

**Université de Montréal**

**Propriétés géométriques des surfaces associées  
aux solutions des modèles sigma grassmanniens  
en deux dimensions**

par

**Laurent Delisle**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)  
en mathématiques  
orientation mathématiques appliquées

September 2, 2014



**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

**Propriétés géométriques des surfaces associées  
aux solutions des modèles sigma grassmanniens  
en deux dimensions**

présentée par

**Laurent Delisle**

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

*Alfred Michel Grundland*

---

(président-rapporteur)

*Véronique Hussin*

---

(directeur de recherche)

*Pavel Winternitz*

---

(membre du jury)

*Bernard Piette*

---

(examineur externe)

*Nom du représentant du doyen*

---

(représentant du doyen de la FAS)

Thèse acceptée le

*Date d'acceptation*

---



# SOMMAIRE

---

Dans cette thèse, nous analysons les propriétés géométriques des surfaces obtenues des solutions classiques des modèles sigma bosoniques et supersymétriques en deux dimensions ayant pour espace cible des variétés grassmanniennes  $G(m, n)$ . Plus particulièrement, nous considérons la métrique, les formes fondamentales et la courbure gaussienne induites par ces surfaces naturellement plongées dans l'algèbre de Lie  $su(n)$ .

Le premier chapitre présente des outils préliminaires pour comprendre les éléments des chapitres suivants. Nous y présentons les théories de jauge non-abéliennes et les modèles sigma grassmanniens bosoniques ainsi que supersymétriques. Nous nous intéressons aussi à la construction de surfaces dans l'algèbre de Lie  $su(n)$  à partir des solutions des modèles sigma bosoniques.

Les trois prochains chapitres, formant cette thèse, présentent les contraintes devant être imposées sur les solutions de ces modèles afin d'obtenir des surfaces à courbure gaussienne constante. Ces contraintes permettent d'obtenir une classification des solutions en fonction des valeurs possibles de la courbure. Les chapitres 2 et 3 de cette thèse présentent une analyse de ces surfaces et de leurs solutions classiques pour les modèles sigma grassmanniens bosoniques. Le quatrième consiste en une analyse analogue pour une extension supersymétrique  $\mathcal{N} = 2$  des modèles sigma bosoniques  $G(1, n) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$  incluant quelques résultats sur les modèles grassmanniens.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les propriétés géométriques des surfaces associées aux solutions holomorphes des modèles sigma grassmanniens bosoniques. Nous donnons une classification complète de ces solutions à courbure gaussienne constante pour les modèles  $G(2, n)$  pour  $n = 3, 4, 5$ . De plus, nous établissons deux conjectures sur les valeurs constantes possibles de la courbure gaussienne pour  $G(m, n)$ . Nous donnons aussi des éléments de preuve de ces conjectures en nous appuyant sur les immersions et les coordonnées de Plücker ainsi que la séquence de Veronese. Ces résultats sont publiés dans la revue *Journal of Geometry and Physics*.

Le troisième chapitre présente une analyse des surfaces à courbure gaussienne constante associées aux solutions non-holomorphes des modèles sigma grassmanniens bosoniques. Ce travail généralise les résultats du premier article et donne un algorithme systématique pour l'obtention de telles surfaces issues des solutions connues des modèles. Ces résultats sont publiés dans la revue *Journal of Geometry and Physics*.

Dans le dernier chapitre, nous considérons une extension supersymétrique  $\mathcal{N} = 2$  du modèle sigma bosonique ayant pour espace cible  $G(1, n) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ . Ce chapitre décrit la géométrie des surfaces obtenues des solutions du modèle et démontre, dans le cas holomorphe, qu'elles ont une courbure gaussienne constante si et seulement si la solution holomorphe consiste en une généralisation de la séquence de Veronese. De plus, en utilisant une version invariante de jauge du modèle en termes de projecteurs orthogonaux, nous obtenons des solutions non-holomorphes et étudions la géométrie des surfaces associées à ces nouvelles solutions. Ces résultats sont soumis dans la revue *Communications in Mathematical Physics*.

#### MOT-CLÉS

Modèles sigma grassmanniens, supersymétrie, solutions holomorphes et non-holomorphes, géométrie des surfaces, projecteurs orthogonaux, séquence de Veronese.

## SUMMARY

---

In this Ph. D. thesis, we analyze the geometric properties of surfaces obtained from the classical solutions of the two-dimensional bosonic and supersymmetric sigma models which has Grassmann manifolds  $G(m, n)$  as target space. In particular, we consider the metric, the fundamental forms and the gaussian curvature induced by these surfaces which naturally live in the  $su(n)$  Lie algebra.

The first chapter presents some preliminary tools to understand the elements of the following chapters. We present non-abelian gauge theories and bosonic grassmannian sigma models as well as its supersymmetric counterpart. Another section presents a construction of surfaces in the Lie algebra  $su(n)$  from the solutions of the bosonic sigma models.

The three last chapters contained in this thesis presents the constraints that have to be imposed on the solutions of the models in order to generate constant gaussian curvature surfaces. From these constraints, we can give a classification of the solutions depending on the possible values of the curvature. The first two papers presents an investigation of these surfaces and of their associated solutions for the bosonic grassmannian sigma models. In the third paper, we generalize our approach to a supersymmetric extension of the bosonic  $\mathbb{C}P^{n-1} \cong G(1, n)$  sigma model including some results for the general Grassmann manifold  $G(m, n)$ .

In chapter 2, we study the geometric properties of surfaces associated to holomorphic solutions of the grassmannian sigma models. We give a complete classification of these constant curvature solutions for the particular models  $G(2, n)$  with  $n = 3, 4, 5$ . Furthermore, we establish two conjectures on the possible values of the gaussian curvature. We also give some elements of proof for these conjectures in terms of Plücker coordinates and immersions as well as Veronese curves. These results are published in the Journal of Geometry and Physics.

The third chapter presents a similar analysis as in the second chapter in the case of non-holomorphic solutions of the bosonic grassmannian sigma models. This work generalizes the results obtained in the first paper and give a systematic

algorithm to obtain such surfaces from the known solutions of the models. These results are published in the Journal of Geometry and Physics.

In the last chapter of this thesis, we consider a  $\mathcal{N} = 2$  supersymmetric extension of the bosonic sigma model which has the  $\mathbb{C}P^{n-1} \cong G(1, n)$  manifold as target space. This chapter presents a geometric description of the surfaces obtained from the solutions of the model and shows, in the holomorphic case, that they have constant gaussian curvature if and only if the solutions consists of a generalization of the Veronese curve. Furthermore, using a gauge invariant formulation of the model in terms of orthogonal projectors, we obtain explicit non-holomorphic solutions and study the geometry of their associated surfaces. These results are submitted to Communications in Mathematical Physics.

#### KEYWORDS

Grassmannian sigma models, Veronese curve, supersymmetry, holomorphic and non-holomorphic solutions, geometry of surfaces, orthogonal projectors.



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	v
<b>Summary</b> .....	vii
<b>Remerciements</b> .....	xi
<b>Liste des figures</b> .....	xiii
<b>Liste des tableaux</b> .....	xv
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Bibliographie</b> .....	9
<b>Chapter 1. Préliminaires</b> .....	13
1.1. Théorie de jauge non-abélienne.....	13
1.2. Modèle sigma grassmannien en deux dimensions.....	18
1.2.1. Discussion générale .....	19
1.2.2. Formalisme en fonction de projecteurs orthogonaux .....	22
1.2.2.1. Les modèles $\mathbb{C}P^{n-1}$ .....	24
1.2.2.2. Les modèles $G(m, n)$ .....	26
1.3. Construction de surfaces dans l'algèbre de Lie $su(n)$ .....	26
1.3.1. Les modèles $\mathbb{C}P^{n-1}$ .....	28
1.3.2. Isomorphisme entre $su(n)$ et l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n^2-1}$ .....	30
1.4. Extension supersymétrique des modèles sigma $\mathbb{C}P^{n-1}$ .....	31
1.4.1. Discussion générale .....	32
1.4.2. Formalisme en fonction de projecteurs orthogonaux .....	35
<b>Bibliographie</b> .....	37
<b>Chapter 2. Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models: (1) Holomorphic solutions</b> .....	41

2.1.	Introduction .....	42
2.2.	Energy density and curvature of holomorphic immersions of 2-spheres into Grassmannian manifolds .....	43
2.2.1.	General discussion .....	43
2.2.2.	Energy density and curvature .....	45
2.2.3.	Orthogonalized parametrization and a wedge product .....	46
2.2.4.	Macfarlane parametrization and general results .....	47
2.3.	Constant curvature for holomorphic immersions in $G(m, n)$ .....	48
2.3.1.	General discussion and Veronese curve .....	48
2.3.2.	Admissible constant curvatures .....	50
2.4.	Holomorphic solutions and constant curvatures of the $G(2, n)$ model for $n > 3$ .....	52
2.4.1.	The case of $G(2, 4)$ .....	54
2.4.2.	The case of $G(2, 5)$ .....	55
2.4.3.	The case of $G(2, 6)$ and other Grassmannians .....	57
2.5.	Conclusion .....	58
	Acknowledgements .....	59
	Appendix A. The case of $r = 7$ in $G(2, 5)$ .....	59
	Appendix B. Numerical evidence for $r = 7$ in $G(2, 6)$ .....	60
	<b>Bibliographie</b> .....	63
	<b>Chapter 3. Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models:(2) Non-holomorphic solutions</b> .....	65
3.1.	Introduction .....	65
3.2.	Grassmannian models .....	67
3.2.1.	General discussion .....	67
3.2.2.	Classical solutions .....	68
3.2.3.	Special case $G(1, n) = \mathbb{C}P^{n-1}$ model .....	69
3.3.	Non-holomorphic solutions for $G(m, n)$ .....	72
3.3.1.	$G(2, n)$ .....	74
3.3.2.	$G(m, n)$ for $m > 2$ .....	76

3.4. Constant curvatures for some Grassmannian models.....	78
3.5. Further comments and conclusions.....	80
Acknowledgements.....	80
<b>Bibliographie</b> .....	81
<b>Chapter 4. Constant curvature surfaces of the supersymmetric</b> <b><math>\mathbb{C}P^{N-1}</math> sigma model</b> .....	83
4.1. Introduction .....	83
4.2. SUSY $\mathbb{C}P^{N-1}$ sigma model.....	87
4.2.1. The model.....	87
4.2.2. The projector formalism and surfaces constructed from the solutions of the SUSY model.....	89
4.3. SUSY invariant solutions and the Veronese sequence .....	90
4.3.1. Constant curvature surfaces of the Veronese type.....	91
4.4. SUSY holomorphic solutions with constant curvature .....	93
4.5. SUSY non-holomorphic solutions with constant curvature .....	97
4.5.1. The SUSY $\mathbb{C}P^1$ model.....	98
4.5.2. The SUSY $\mathbb{C}P^2$ model.....	98
4.6. Solutions of the SUSY $\mathbb{C}P^{N-1}$ for $N > 2$ and $G(M, N)$ models....	100
4.7. Conclusion and outlook .....	106
Appendix: Isomorphism between $\mathbb{R}^{N^2-1}$ and $su(N)$ .....	107
Acknowledgements.....	109
<b>Bibliographie</b> .....	111
<b>Conclusion et perspectives futures</b> .....	115
<b>Bibliographie</b> .....	125



## REMERCIEMENTS

---

Ce projet a débuté un lundi matin à 8h30 où j'étais assis dans la classe d'algèbre linéaire enseignée par ma directrice Véronique Hussin. J'ai, immédiatement, été captivé par son intérêt pour les mathématiques et sa gentillesse. J'ai voulu en connaître davantage. Je lui ai donc demandé de me superviser lors de deux stages d'été où elle m'a introduit aux extensions supersymétriques d'équations différentielles. Ce fût une révélation et il était clair pour moi que je voulais poursuivre dans cette avenue en compagnie de Véronique. Cette thèse est le fruit de ces belles années de collaboration avec toi et de nos nombreuses discussions autour de ta table ronde. J'aimerais également te remercier pour ton soutien financier qui m'a permis de présenter mes travaux de recherche au travers de diverses conférences dans le monde et de rencontrer des chercheurs exceptionnels. Merci  $\infty$ ment!

Un de ces chercheurs est le professeur Wojtek J. Zakrzewski de l'Université de Durham au Royaume-Uni. Aujourd'hui, je suis très fier de présenter cette thèse et c'est grâce à notre collaboration que je peux le faire. En automne 2012, tu m'as accueilli à Durham où j'ai eu le privilège de rencontrer ta famille et tes amis, et surtout tu m'as transmis ta passion pour les mathématiques. Cette étape de ma jeune carrière m'a inspiré à poursuivre mes études au niveau postdoctoral.

À Véronique et Wojtek, merci! J'espère que nous pourrions collaborer ensemble dans le futur et surtout de poursuivre notre amitié.

Je veux remercier mes amis Louis-Xavier, Marc-Kevin, Pierre-Luc, Vincent et Guillaume de m'avoir apporté tant de plaisir et de souvenirs durant ces années. Louis et Marc vous êtes définitivement les meilleurs coloc du monde et je n'oublierai jamais notre soirée karaoké où vous avez eu le privilège de me voir "chanter" la ketchup song! Sur une note plus émotive, merci les gars pour votre soutien lors de l'année difficile que j'ai traversée. Vous avez toujours été là pour moi. Je vous aime!

Papa, merci d'être revenu dans ma vie. Maman, ton soutien et tes encouragements m'ont permis d'accomplir ce rêve. Je vous aime.

Finalement, je dédie cette thèse à mon ami Hugues Lapointe. Tu me manques mon ami.

## LISTE DES FIGURES

---

1.1	Illustration pour la variété $G(1, n) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ .....	20
-----	--	----





## LISTE DES TABLEAUX

---

3.1	Possible values of $r(2, n)$ for $n = 4, 5, 6, 7 \dots$	79
-----	---	----

# INTRODUCTION

---

Les théories de jauge trouvent leur pertinence dans la description des particules élémentaires de la nature, constituées de bosons et de fermions, et de leurs interactions [1, 2, 3, 4]. Elles sont décrites à l'aide d'un groupe de Lie  $G$  agissant localement en tout point de l'espace-temps et laissant invariant le lagrangien associé au modèle à l'étude. Elles sont dites abéliennes ou non-abéliennes suivant que le groupe  $G$  est abélien ou non. L'exemple le plus simple est celui de la théorie de l'électromagnétisme (théorie quantique de l'électrodynamique) qui est décrite par une théorie de jauge abélienne où  $G = U(1)$  est le groupe des matrices unitaires de format  $1 \times 1$ . Les champs électromagnétiques satisfont les équations d'Euler-Lagrange mieux connues comme les équations de Maxwell. Des exemples plus sophistiqués sont donnés dans les théories des interactions nucléaires faible (théorie quantique électrofaible) et forte (théorie quantique de la chromodynamique) décrites par des théories de jauge non-abéliennes où  $G = SU(2) \times U(1)$  et  $G = SU(3)$  respectivement. Le groupe de Lie  $SU(n)$  [5], ici, est représenté par les matrices unitaires de format  $n \times n$  de déterminant un. Dans le chapitre 1, nous présentons une construction des théories de jauge non-abéliennes pour  $SU(n)$  aussi connues comme les théories de Yang-Mills [1, 2, 3, 4, 6, 7].

Les théories de Yang-Mills sont des candidates pour une description finale du modèle standard de la physique. Il est accepté que ces théories peuvent être résolues exactement, mais malgré de nombreux efforts, l'obtention de solutions exactes demeure un problème ouvert. Néanmoins, ces théories possèdent des propriétés fondamentales dont l'invariance conforme de la fonctionnelle d'énergie [6, 9], la méthode perturbative d'expansion  $\frac{1}{n}$  [6, 10] et la liberté asymptotique [1, 2, 6]. Dans cette thèse, nous serons, cependant, intéressés par la propriété suivante [3, 6, 11, 12, 13]:

- L'existence de solutions non-triviales des équations d'Euler-Lagrange notamment l'existence de solutions statiques semblables aux solitons topologiques: instantons et anti-instantons. Les instantons étant des solitons topologiques

des théories de Yang-Mills pures définies sur l'espace-temps euclidien en quatre dimensions.

Les modèles sigma grassmanniens bi-dimensionnels [1, 2, 6, 8, 11] partagent ces dernières propriétés avec les théories de Yang-Mills. De plus, contrairement à ces théories, plusieurs solutions des équations d'Euler-Lagrange associées à ces modèles sont connues et nous les utiliserons pour construire des surfaces dans l'algèbre de Lie  $su(n)$ . En effet, cette thèse concerne l'étude des propriétés géométriques des surfaces construites des solutions  $Z$  des équations d'Euler-Lagrange associées aux modèles sigma grassmanniens [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]

À l'origine, les modèles sigma ont été introduits par Gell-Mann et Lévy [8] pour décrire les interactions entre les nucléons et les pions lors de la désintégration  $\beta$ .

De notre côté, les modèles sigma grassmanniens représentent des théories des champs scalaires non-linéaires définis sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  et qui prennent leurs valeurs dans des variétés grassmanniennes  $G(m, n)$ . À cet égard, une variété grassmannienne  $G(m, n)$  est définie par l'espace quotient

$$G(m, n) = \frac{U(n)}{U(m) \times U(n-m)}, \quad n > m. \quad (0.0.1)$$

Les champs  $Z(x_1, x_2)$  sont ainsi paramétrés par des matrices complexes de format  $n \times m$  satisfaisant la contrainte

$$Z^\dagger Z = \mathbb{I}_m, \quad (0.0.2)$$

où  $\mathbb{I}_m$  est la matrice identité de format  $m \times m$  et  $(x_1, x_2)$  sont des coordonnées locales sur  $\mathbb{R}^2$ . La densité lagrangienne associée à ces modèles est donnée par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (D_\mu Z)^\dagger D_\mu Z \right], \quad (0.0.3)$$

où  $\mu$  représente les coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ , et  $D_\mu$  sont les dérivées covariantes définies comme

$$D_\mu \Lambda = \partial_\mu \Lambda - \Lambda (Z^\dagger \partial_\mu Z). \quad (0.0.4)$$

Cette densité lagrangienne représente une théorie des champs libres où les champs  $Z$  n'ont pas de masse et sont contraints à la variété grassmannienne  $G(m, n)$ . Plus spécifiquement, nous considérons, dans cette thèse, les solutions à action finie. Pour assurer la finitude de l'action, nous imposons donc les conditions frontières

$$D_\mu Z \longrightarrow 0, \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \longrightarrow \infty \quad (0.0.5)$$

qui nous permettent de compactifier l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  en la 2-sphère  $S^2$  à l'aide de la projection stéréographique. Dans le livre de Zakrzewski [6], il est démontré que ces solutions peuvent être classifiées en trois catégories: holomorphes, non-holomorphes (ou mixtes) et anti-holomorphes. Pour bien décrire ces solutions, nous considérons de nouvelles coordonnées complexes données par

$$x_{\pm} = x_1 \pm ix_2. \quad (0.0.6)$$

Dans ce système de coordonnées, la densité lagrangienne (0.0.3) s'écrit

$$\mathcal{L} = \text{Tr} \left[ (D_+ Z)^\dagger D_+ Z + (D_- Z)^\dagger D_- Z \right], \quad (0.0.7)$$

où, par définition, les dérivées covariantes  $D_{\pm}$  sont définies par

$$D_{\pm} Z = \partial_{\pm} Z - Z(Z^\dagger \partial_{\pm} Z). \quad (0.0.8)$$

En minimisant la fonctionnelle d'énergie décrite par la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$ , on déduit les équations d'Euler-Lagrange

$$D_+ D_- Z + Z(D_- Z)^\dagger D_- Z = 0, \quad Z^\dagger Z = \mathbb{I}_m. \quad (0.0.9)$$

Les solutions à action finie des équations d'Euler-Lagrange sont entièrement déterminées pour l'espace projectif  $G(1, n) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$  [6]. Ces solutions sont décrites par l'application successive d'un opérateur d'orthogonalisation  $P_+$  sur un vecteur  $f = f(x_+)$  holomorphe. Nous avons

$$Z_i = \frac{P_+^i f}{|P_+^i f|}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (0.0.10)$$

où l'opérateur  $P_+$  est défini récursivement par

$$P_+^0 f = f, \quad P_+ f = \partial_+ f - \frac{f^\dagger \partial_+ f}{|f|^2} f, \quad P_+^{i+1} f = P_+(P_+^i f). \quad (0.0.11)$$

Pour  $i = 0$ , la solution est dite holomorphe, pour  $i = n-1$ , elle est dite anti-holomorphe et pour  $i = 1, \dots, n-2$ , les solutions sont dites mixtes. Ces solutions trouvent aussi leur interprétation en fonction de solitons topologiques [3, 6] pour les modèles en  $(2+1)$  dimensions à un temps donné. En effet, nous décrivons  $Z_0$  comme un instanton,  $Z_{n-1}$  comme un anti-instanton et  $Z_i$  pour  $i = 1, \dots, n-2$  comme une combinaison d'instantons et d'anti-instantons.

Pour les modèles  $G(m, n)$ , la situation est plus complexe et seulement certaines solutions ont été obtenues [6, 11, 13]. Les solutions considérées, dans cette thèse, sont obtenues en choisissant des sous-ensembles de dimension  $m$  dans l'ensemble  $\{Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}\}$ . Nous décrivons en plus de détails ces solutions dans les chapitres 1 et 3 [16].

Afin d'accomplir notre objectif, il s'avère pertinent de reformuler ces modèles à l'aide de projecteurs orthogonaux [6] donnés par

$$\mathbb{P} = ZZ^\dagger. \quad (0.0.12)$$

Dans cette formulation, la densité lagrangienne (0.0.7) et les équations d'Euler-Lagrange (0.0.9) sont données, respectivement, par

$$\mathcal{L} = \text{Tr} [\partial_+ \mathbb{P} \partial_- \mathbb{P}], \quad [\partial_+ \partial_- \mathbb{P}, \mathbb{P}] = 0. \quad (0.0.13)$$

En effet, cette description est invariante de jauge et est privilégiée, afin de construire des surfaces plongées dans l'algèbre de Lie  $su(n)$  via l'immersion de Weierstrass [29, 30, 31, 32] et afin de décrire de nouvelles solutions pour une extension supersymétrique des modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .

Notons que, dans les années 90, Konopelchenko et *al.* [29, 30, 31] ont généralisé la représentation de Weierstrass de surfaces plongées dans  $\mathbb{R}^3$  à des surfaces pouvant être plongées dans des espaces multi-dimensionnels comme des algèbres et des groupes de Lie. Cette généralisation a suscité de l'intérêt et a permis de construire des surfaces issues des solutions des modèles sigma projectifs  $\mathbb{C}P^{n-1}$  [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 26, 27, 33]. Dans [28], les auteurs s'intéressent aux surfaces obtenues des solutions des modèles sigma définis sur l'espace de Minkowski. Ces mêmes auteurs ont analysé certaines propriétés géométriques de ces surfaces comme la métrique, la courbure gaussienne, la courbure moyenne et la fonctionnelle de Willmore induites par ces surfaces qui naturellement vivent dans l'algèbre de Lie  $su(n)$ . En ce qui concerne les surfaces à courbure gaussienne constante issues de ces solutions on trouve plusieurs résultats. Une classification complète de ces surfaces pour les modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$  a été donnée en fonction de la séquence de Veronese définies par

$$f = \left( 1, \sqrt{\binom{n-1}{1}} x_+, \dots, \sqrt{\binom{n-1}{r}} x_+^r, \dots, x_+^{n-1} \right)^T, \quad (0.0.14)$$

pour les solutions  $Z_i$  définies en (0.0.10). Une telle classification est inexistante pour les modèles  $G(m, n)$  pour  $m \geq 2$  et demeure un problème ouvert et très difficile en vertu notamment de l'absence d'un théorème de complétude et des contraintes des modèles [6].

Les chapitres 2 et 3 [16, 17] donnent des avenues afin de résoudre ce problème. En particulier, nous établissons aussi plusieurs résultats fondamentaux sur les possibles valeurs de cette courbure gaussienne.

La représentation de Weierstrass pour les surfaces associées aux modèles sigma grassmanniens en deux dimensions est donnée par [14]

$$X(x_+, x_-) = \int_{\gamma} ([\partial_- \mathbb{P}, \mathbb{P}] dx_- - [\partial_+ \mathbb{P}, \mathbb{P}] dx_+) \in su(n), \quad (0.0.15)$$

où le projecteur orthogonal  $\mathbb{P}$  est solution des équations d'Euler-Lagrange (0.0.13) et  $\gamma$  une courbe de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$ . Cette immersion de Weierstrass sera discutée en détails dans le chapitre 1. De cette représentation, nous pouvons déduire que la courbure gaussienne induite par cette surface est donnée par [9]

$$\mathcal{K} = -\frac{2}{\mathcal{L}} \partial_+ \partial_- \ln \mathcal{L}. \quad (0.0.16)$$

Nous cherchons dans cette thèse à décrire les conditions sur les solutions des modèles sigma grassmanniens bosoniques et supersymétriques menant à des surfaces à courbure  $\mathcal{K}$  constante. L'interprétation physique d'un tel problème jusqu'à ce jour n'est pas clair, mais ce problème en demeure très difficile d'un point de vue mathématique. Pour les modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$  que nous venons de décrire, une classification des solutions menant à des surfaces à courbure gaussienne constante a été donnée à partir de la séquence de Veronese (0.0.14).

Pour les modèles  $G(m, n)$ , une telle classification est inexistante. Cette absence est dûe à certains obstacles:

- (1) Contrairement aux modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$ , l'ensemble complet des solutions des modèles  $G(m, n)$  pour  $m \geq 2$  n'est pas connu.
- (2) Pour les modèles  $G(m, n)$ , nous avons conjecturé qu'il est possible de construire des surfaces à courbure gaussienne  $\mathcal{K} = \frac{4}{r}$  pour  $r \in [1, m(n - m)] \cap \mathbb{Z}$ . Cette conjecture est vérifiée pour les modèles  $\mathbb{C}P^{n-1} \cong G(1, n)$  en utilisant la séquence de Veronese ainsi que les immersions naturelles des modèles  $\mathbb{C}P^j \subset \mathbb{C}P^{n-1}$  pour  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ . Pour les modèles  $G(m, n)$ , nous avons l'immersion  $G(m, n - 1) \subset G(m, n)$  menant à des surfaces à courbure gaussienne de paramètre  $r = 1, \dots, m(n - 1 - m)$ . On remarque ainsi que pour  $m \geq 2$ , certaines valeurs de la courbure gaussienne ne sont pas obtenues d'immersion de variétés grassmanniennes de plus petite dimension.

Les chapitres 2 et 3 considèrent des modèles sigma grassmanniens en deux dimensions pour des degrés de liberté bosoniques uniquement. Nous savons que d'un autre côté, le modèle standard de la physique est composé de particules bosoniques et fermioniques. En vertu d'une théorie d'unification, il est donc naturel de tenter d'inclure dans les modèles sigma grassmanniens des degrés de liberté fermioniques. Il est connu que les théories décrivant le modèle standard possèdent des symétries reliant des degrés de liberté fermioniques entre eux et des

degrés de liberté bosoniques entre eux. Une question naturelle s'impose: existe-t-il des symétries reliant des degrés de liberté fermioniques à des degrés de liberté bosoniques? La réponse à cette question est affirmative, au moins d'un point de vue théorique, et ces symétries sont décrites dans les théories supersymétriques [35, 36, 37, 38, 39]. En d'autres termes, une supersymétrie est une symétrie entre des degrés de liberté fermioniques et bosoniques. Ainsi, nous avons considéré, dans cette thèse, une extension supersymétrique des modèles sigma grassmanniens [6, 40, 41] et les résultats que nous avons obtenus sont exposés dans le chapitre 4.

Les théories supersymétriques sont importantes et trouvent plusieurs applications en physique et en mathématique. Voici quelques-unes de ces applications:

- (1) En physique quantique [35], la supersymétrie est utilisée pour factoriser l'hamiltonien décrivant un système physique. Cette factorisation permet de comprendre la dégénérescence double des énergies propres et démontre que l'état fondamental est le seul état où la supersymétrie est non-brisée.
- (2) En relativité [36, 39], le groupe de Poincaré représente les isométries de l'espace-temps de Minkowski. Les générateurs de ce groupe sont donnés par les translations  $P_\mu$  et les transformations de Lorentz  $M_{\mu\nu}$  décrivant l'algèbre de Lie de Poincaré. Cette algèbre peut être étendue à la superalgèbre de Poincaré qui contient de nouveaux générateurs (de supersymétrie)  $Q$ , les supercharges qui satisfont à la règle d'anti-commutation

$$\{Q_\mu, Q_\nu^\dagger\} = Q_\mu Q_\nu^\dagger + Q_\nu^\dagger Q_\mu = 2\sigma_{\mu\nu}^\omega P_\omega. \quad (0.0.17)$$

Ainsi les générateurs  $\{P_\mu, M_{\mu\nu}, Q_\mu, Q_\mu^\dagger\}$  forment la superalgèbre de Poincaré et c'est l'unique extension de l'algèbre de Poincaré incluant des relations d'anti-commutation. Voir [1, 2] pour une explication des notations.

- (3) Les théories des supercordes et de supergravité [37] incorporent naturellement la supersymétrie dans leur formulation.
- (4) En géométrie complexe [37, 42], les supersymétries pour les modèles sigma imposent des contraintes sur l'espace-cible de ces modèles qui devient, notamment, kählérien ou hyper-kählérien.

Plus particulièrement, dans le chapitre 4 de cette thèse [43], nous sommes intéressés par une extension supersymétrique  $\mathcal{N} = 2$  du modèle sigma  $\mathbb{C}P^{n-1}$ . Pour introduire ces extensions, nous utilisons les notions de superspaces et de superchamps que nous décrivons en plus de détails dans le chapitre 1. Un superchamp

bosonique  $\Phi$  est ainsi défini sur un superspace  $(x_+, x_-, \theta_+, \theta_-)$  comme

$$\Phi(x_+, x_-, \theta_+, \theta_-) = z(x_+, x_-) + i\theta_+\chi_+(x_+, x_-) + i\theta_-\chi_-(x_+, x_-) - \theta_+\theta_-\mathcal{F}(x_+, x_-), \quad (0.0.18)$$

où  $z$  et  $\mathcal{F}$  sont des vecteurs à  $n$  composantes bosoniques et,  $\chi_+$  et  $\chi_-$  sont des vecteurs à  $n$  composantes fermioniques. L'espace-cible est une variété grassmannienne supersymétrique  $\mathbb{C}P^{n-1}$ . On a donc la contrainte non-linéaire

$$\Phi^\dagger\Phi = 1. \quad (0.0.19)$$

En tenant compte de cette contrainte, la densité lagrangienne et les équations d'Euler-Lagrange associées à ce modèle sont données, respectivement, par

$$\mathcal{L} = 2(|\check{D}_+\Phi|^2 - |\check{D}_-\Phi|^2), \quad \check{D}_-\check{D}_+\Phi + \Phi|\check{D}_-\Phi|^2 = 0. \quad (0.0.20)$$

Tout comme pour les modèles bosoniques, notre objectif est d'utiliser les solutions des équations d'Euler-Lagrange pour construire des surfaces via la représentation de Weierstrass. Différentes approches ont été utilisées pour résoudre ces équations. La première [6, 44, 45] consiste à résoudre une équation de Dirac linéarisée à partir d'une solution  $Z$  des modèles sigma grassmanniens bosoniques et la deuxième [46] fait l'hypothèse que les quantités fermioniques contenues dans la densité lagrangienne sont des  $c$ -nombres (des quantités commutantes).

L'originalité de notre approche est l'utilisation du formalisme des projecteurs orthogonaux qui est invariant de jauge et qui, jusqu'à présent, n'a été utilisé que pour décrire les solutions holomorphes de ce modèle [47]. Plus particulièrement, les auteurs ont caractérisé les surfaces à courbure gaussienne constante pour le modèle  $\mathbb{C}P^1$ .

Nous allons beaucoup plus loin dans l'analyse des surfaces issues des solutions holomorphes du modèle  $\mathbb{C}P^{n-1}$  car, nous démontrons que les surfaces à courbure gaussienne constante sont caractérisées par une généralisation de la séquence de Veronese (0.0.14). Nous prouvons que cette séquence, baptisée séquence de Veronese généralisées supersymétriques (GSV), sont uniques et qu'aucune autre solution holomorphe ne mène à une courbure gaussienne constante. Ce résultat est fondamental, car nous croyons que, tout comme le cas bosonique, les solutions non-holomorphes sont construites à partir des solutions holomorphes par l'application successive d'un opérateur d'orthogonalisation. Nous avons en fait démontré que c'est le cas pour le modèle de  $\mathbb{C}P^1$ . Nous avons également des résultats généraux dans le cadre des modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$  pour  $n > 2$  pour une bosonisation de dimension 1 [36, 38, 39]. Cela signifie que les variables bosoniques et fermioniques sont des éléments d'une nouvelle algèbre de Grassmann engendrée par une variable fermionique.



Ce chapitre propose également, pour la première fois, une représentation de Weierstrass pour les surfaces obtenues des solutions des équations d'Euler-Lagrange. Nous étudions la métrique et la courbure gaussienne de ces surfaces et nous démontrons, dans le cas holomorphe, que celle-ci forment des sphères dans  $su(n)$ .

L'approche en fonction des projecteurs orthogonaux s'avère innovatrice et fondamentale pour construire ces surfaces. De plus, cette approche nous a permis de construire des solutions non-holomorphes et de donner des stratégies pour leur construction systématique. Nous croyons que ce chapitre mènera à une classification complète des solutions menant à des surfaces à courbure gaussienne constante pour les modèles sigma  $\mathbb{C}P^{n-1}$  supersymétriques. Nous présentons aussi quelques résultats partiels pour les modèles  $G(m, n)$ .

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] A. Zee *Quantum Field Theory in a Nutshell, Second Edition* (New Jersey: Princeton University Press, 2010).
- [2] P. Ramond *Field Theory: a Modern Primer* (Reading, MA: Benjamin-Cummings, 1981).
- [3] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*. (Cambridge University Press, New York, 2004).
- [4] B. de Wit *Lecture notes in field theory in physics* Chapter 12: Non-abelian gauge theories, University of Utrecht, The Netherlands.
- [5] Warner, F. W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups* (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [6] W.J. Zakrzewski, *Low Dimensional Sigma Models* (Hilger, Bristol, 1989).
- [7] C. N. Yang and R. L. Mills (1954) Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.* **96**, 191.
- [8] M. Gell-Mann and M. Levy (1960) The axial vector current in beta decay. *Nuovo Cimento* **16**, 705-726.
- [9] Gray, A. *Modern differential geometry of curves and surfaces* (CRC Press, Florida, 1993).
- [10] A. D’Adda, P. Di Vecchia and M. Luscher (1978) A  $1/N$  expandable series of non-linear  $\sigma$  models with instantons. *Nucl. Phys. B* **146**, 63.
- [11] A. J. Macfarlane (1979) Generalization of  $\sigma$  models and  $CP^N$  models, and instantons. *Phys. Lett. B* **82**, 239.
- [12] A. M. Din and W. J. Zakrzewski (1980) Properties of the general classical solutions of the  $CP^{N-1}$  model. *Phys. Lett. B* **95**, 419.
- [13] A. M. Din and W. J. Zakrzewski (1984) Further properties of classical solutions in Grassmannian  $\sigma$  model. *Nucl. Phys. B* **237**, 461.
- [14] P. P. Goldstein and A. M. Grundland (2010) Invariant recurrence relations for  $CP^{N-1}$  models. *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 265206.
- [15] A. M. Grundland, A. Strasburger and W. J. Zakrzewski (2006) Surfaces immersed in  $su(N + 1)$  Lie algebras obtained from the  $CP^N$  sigma models. *J. Phys. A* **39** 9187–9214.

- [16] L. Delisle, V. Hussin and W. J. Zakrzewski (2013) Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models:(2) Non-holomorphic solutions. *Journal of Geometry and Physics* **71**, 1–10.
- [17] L. Delisle, V. Hussin and W.J. Zakrzewski (2013) Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models: (1) Holomorphic solutions. *Journal of Geometry and Physics* **66**, 24–36.
- [18] V. Hussin, I. Yurduşen and W.J. Zakrzewski (2010) Canonical surfaces associated with projectors in Grassmannian sigma models. *J. Math. Phys* **51**, 103509.
- [19] Bolton J., Jensen G. R., Rigoli M. and Woodward L. M. (1988) On conformal minimal immersions of  $S^2$  into  $\mathbb{C}P^n$ , *Math. Ann.* **279**, 599–620.
- [20] F. Jie, J. Xiaoxiang and X. Xiaowei (2011) Construction of homogeneous minimal 2-spheres in complex Grassmannians. *Acta Mathematica Scientia* **31**, 1889–1898.
- [21] X. X. Jiao and J. G. Peng (2003) Pseudo-holomorphic curves in complex Grassmann manifolds. *Transaction of the American Mathematical Society* **355**, 3715–3726.
- [22] X. X. Jiao and J. G. Peng (2004) Classification of holomorphic two-spheres with constant curvature in the complex Grassmannians  $G_{2,5}$ . *Differential Geometry and its Applications* **20**, 267–277.
- [23] C. Peng and X. Xu (2014) Minimal two-spheres with constant curvature in the complex Grassmannians. To be published in *Israel Journal of Mathematics*.
- [24] C. Peng and X. Xu (2014) Classification of minimal homogeneous two-spheres in the complex Grassmann manifold  $G(2, n)$ . To be published in *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.
- [25] S. Post and A. M. Grundland (2012) Analysis of  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma models via projective structures. *Nonlinearity* **25** 1–36.
- [26] A. M. Grundland and S. Post (2012) Soliton surfaces associated with  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model. *J. Phys.: Conf. Ser.* **380**, 012023.
- [27] A. M. Grundland, W. A. Hereman and İ. Yurduşen (2008) Conformally parametrized surfaces associated with  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma models. *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 065204.
- [28] A. M. Grundland and L. Snobl (2005) Description of surfaces associated with Grassmannian sigma models on Minkowski space. *J. Math. Phys.* **46**, 083508.
- [29] B. Konopelchenko and I. Taimanov (1996) Constant mean curvature surfaces via an integrable dynamical system. *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 1261–1265.
- [30] R. Carroll and B. Konopelchenko (1996) Generalized Weierstrass-Enneper inducing conformal immersions and gravity. *Int. J. Mod. Phys. A* **11**, 1183–1216.
- [31] B. Konopelchenko and G. Landolfi (1999) Generalized Weierstrass representation for surfaces in multi-dimensional Riemannian spaces. *Stud. Appl. Maths.* **104**, 129–169.
- [32] F. Hélein, *Constant Mean Curvature Surfaces, Harmonic Maps and Integrable Systems* (Birkhäuser,Basel, 2001).

- [33] P. Bracker and A. M. Grundland (2001) Symmetry properties and explicit solutions of the generalized Weierstrass system. *J. Math. Phys.* **42** 1250–1282.
- [34] Arnold, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics (second edition)* (Springer-Verlag, New York, 1989).
- [35] B. Bagchi *Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics* (Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2001).
- [36] B. DeWitt *Supermanifolds* (New York: Cambridge University Press, 1984).
- [37] B. Zumino (1979) Supersymmetry and kahler manifolds. *Phys. Lett. B* **87**, 203–206.
- [38] F. Berezin *The Method of Second Quantization* (New York: Academic, 1966).
- [39] Cornwell, J. F. 1989 *Group Theory in Physics: Supersymmetries and Infinite-Dimensional Algebras (Techniques of Physics vol 3)* (New York: Academic).
- [40] E. Witten (1977) Supersymmetric form of the nonlinear sigma model in two dimensions. *Phys. Rev. D* **16**, pp. 2991-2994.
- [41] A. D’Adda, M. Luscher and P. Di Vecchia (1979) Confinement and chiral symmetry breaking in  $CP^{N-1}$  models with quarks. *Nucl. Phys.*, **B 152**, pp. 125–144.
- [42] U. Lindström (2012) Supersymmetric Sigma Model Geometry. *Symmetry* **4**, 474–506.
- [43] L. Delisle, V. Hussin, İ. Yurduşen and W. J. Zakrzewski (2014) Constant curvature surfaces of the supersymmetric  $CP^{N-1}$  sigma model. *To be submitted to Communications in Mathematical Physics*.
- [44] A. M. Din and W. J. Zakrzewski (1981) Fermion solutions in the supersymmetric  $CP^{N-1}$  model. *Phys. Lett. B* **101**, 166.
- [45] K. Fujii, T. Koikawa and R. Sasaki (1984) Classical solutions for supersymmetric Grassmannian sigma models in two dimensions. I. *Prog. Theor. Phys.* **71**, pp. 388–394.
- [46] A. M. Din, J. Lukierski and W. J. Zakrzewski (1982) General classical solutions of a supersymmetric non-linear coupled boson-fermion model in two dimensions, *Nuclear Physics B* **194**, 157–171.
- [47] V. Hussin and W.J. Zakrzewski (2006) Susy  $CP^{N-1}$  model and surfaces in  $\mathbb{R}^{N^2-1}$ . *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 14231.



# Chapter 1

---

## PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre présente des outils préliminaires pour comprendre les éléments présentés dans les chapitres suivants. Dans la première section, nous décrivons en détails les théories de jauge non-abéliennes contruites à partir du groupe de Lie  $SU(n)$  et présentons une densité lagrangienne invariante par rapport à ce groupe local. Par la suite, nous introduisons les modèles sigma en deux dimensions ayant pour espace-cible des variétés grassmanniennes  $G(m, n)$ . Ces modèles s'inscrivent dans un contexte de théorie de jauge et nous utilisons les outils de la première section pour construire la théorie. Nous présentons une reformulation des modèles sigma en fonction de projecteurs orthogonaux qui nous servirons à construire des surfaces dans l'algèbre de Lie  $su(n)$ . La construction de ces surfaces est l'objet de la section 3 où nous présentons différentes propriétés géométriques de ces surfaces. Nous étudions en profondeur la classification des surfaces à courbure gaussienne constante et discutons de l'isomorphisme entre  $su(n)$  et l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n^2-1}$ . La section 4 décrit une extension supersymétrique du modèle sigma  $\mathbb{C}P^{n-1}$  qui fait l'objet du dernier chapitre de cette thèse.

### 1.1. THÉORIE DE JAUGE NON-ABÉLIENNE ET DENSITÉ LAGRANGIENNE

La théorie des champs classiques [1, 2, 3, 4] décrit la dynamique des champs  $\Phi$  dans l'espace-temps en  $(d+1)$  dimensions,  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ . Ces champs seront représentés par des vecteurs à  $n$  composantes tels que  $\Phi(x, t) = (\phi_1(x, t), \dots, \phi_n(x, t))$  où  $(x, t)$  sont des coordonnées locales sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ .

La dynamique de ces variables est décrite par une densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  et les champs 'physiques' sont les points critiques de la fonctionnelle d'énergie

$$S(\mathcal{L}(\phi_\nu, \partial_\mu \phi_\nu)) = \int_{t_1}^{t_2} \int d^d x dt \mathcal{L}(\phi_\nu, \partial_\mu \phi_\nu) = \int_{t_1}^{t_2} \int d^d x dt \mathcal{L}(\phi_\nu, \partial_t \phi_\nu, \nabla \phi_\nu). \quad (1.1.1)$$

Ces points critiques sont obtenus à partir d'un problème variationnel où nous cherchons les points stationnaires de  $S$  pour une configuration initiale  $\phi_{\nu,i}(t_1, x)$  et une configuration finale  $\phi_{\nu,f}(t_2, x)$ . Ceci signifie que nous imposons  $\delta S = 0$  avec  $\delta\phi_{\nu,i} = \delta\phi_{\nu,f} = 0$ . Le calcul de  $\delta S$  donne

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int d^d x dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\nu} \delta \phi_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi_\nu)} \partial_t \delta \phi_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_\nu)} \nabla \delta \phi_\nu \right), \quad (1.1.2)$$

où nous avons considéré que  $\delta \partial_t \phi_\nu = \partial_t \delta \phi_\nu$  et  $\delta \nabla \phi_\nu = \nabla \delta \phi_\nu$ . En utilisant l'intégration par parties et le fait que la variation des configurations initiale et finale est nulle, nous obtenons

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int d^d x dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\nu} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi_\nu)} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_\nu)} \right) \delta \phi_\nu. \quad (1.1.3)$$

Ainsi, imposer que la variation de l'action,  $\delta S$ , soit nulle pour toutes variations possibles des champs  $\phi_\nu$  revient à résoudre les équations d'Euler-Lagrange **[1, 2, 3]**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\nu} = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi_\nu)} + \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1.4)$$

Comme mentionné dans l'introduction, les théories de Yang-Mills et les modèles sigma grassmanniens s'inscrivent dans un contexte de théorie de jauge par rapport aux groupes  $G = SU(n)$  et  $G = U(n)$ , respectivement. Nous choisissons donc de développer les théories de Yang-Mills où il sera facile par la suite de faire la connexion avec les modèles sigma. Pour introduire les théories de jauge non-abéliennes sur  $SU(n)$ , nous considérons la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi - V(\Phi^\dagger \Phi), \quad (1.1.5)$$

où  $V$  est un potentiel de la variable  $\Phi^\dagger \Phi$ ,  $\Phi = \Phi(x)$  est un vecteur à  $n$  composantes complexes et  $x^\mu = (t, x)$  sont des coordonnées locales sur l'espace-temps. Nous pouvons démontrer que la densité lagrangienne (1.1.5) est invariante par rapport à la transformation globale

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = U\Phi, \quad U \in SU(n), \quad (1.1.6)$$

où  $U$  est une matrice indépendante des coordonnées de l'espace-temps. Cette propriété découle des transformations suivantes

$$\Phi^\dagger \longrightarrow (\Phi^\dagger)' = \Phi^\dagger U^\dagger, \quad \partial_\mu \Phi \longrightarrow (\partial_\mu \Phi)' = U \partial_\mu \Phi \quad (1.1.7)$$

et du fait que  $U$  satisfait  $U^\dagger U = \mathbb{I}$ . Dans un contexte de théories de jauge, nous voulons aussi que la densité lagrangienne soit invariante par rapport aux

transformations locales de jauge issues de  $SU(n)$

$$\Phi(x) \longrightarrow (\Phi(x))' = U(x)\Phi(x). \quad (1.1.8)$$

Cette description invariante de jauge de la densité lagrangienne préserve l'invariance locale par rapport au groupe  $SU(n)$ . Le potentiel  $V$  de la densité lagrangienne (1.1.5) demeure invariant par rapport à cette transformation. En effet, la variable  $\Phi^\dagger\Phi$  se transforme suivant la règle

$$\Phi(x)^\dagger\Phi(x) \longrightarrow (\Phi^\dagger(x)\Phi(x))' = \Phi(x)^\dagger U^\dagger(x)U(x)\Phi(x) = \Phi^\dagger(x)\Phi(x). \quad (1.1.9)$$

Le premier terme de cette densité lagrangienne n'est cependant pas invariant sous une telle transformation. Cette propriété de 'non-covariance' découle du fait que

$$\partial_\mu\Phi(x) \longrightarrow (\partial_\mu\Phi(x))' = \partial_\mu(U(x)\Phi(x)) = U(x)\partial_\mu\Phi(x) + \partial_\mu U(x)\Phi(x), \quad (1.1.10)$$

ne se transforme pas comme le champ  $\Phi$ . Le deuxième terme de cette transformation rend la quantité  $\partial_\mu\Phi$  non-covariante. Plus généralement, nous dirons qu'une quantité  $\Lambda(x)$  est covariante si elle se transforme comme  $\Phi(x)$  sous les transformations de jauge, c'est-à-dire

$$\Lambda(x) \longrightarrow (\Lambda(x))' = U(x)\Lambda(x). \quad (1.1.11)$$

Cette définition de covariance démontre que la dérivée  $\partial_\mu\Phi(x)$  n'est pas une quantité covariante. Ainsi, pour construire une densité lagrangienne qui soit invariante de jauge, nous définissons une dérivée  $D_\mu$  covariante. Cette dernière est une combinaison infinitésimale de la dérivée ordinaire  $\partial_\mu$  et d'un champ de jauge  $A_\mu$  de la forme

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi - iA_\mu\Phi. \quad (1.1.12)$$

Nous devons déterminer la règle de transformation de  $A_\mu$  pour que la dérivée  $D_\mu$  soit covariante. Nous avons

$$D_\mu\Phi \longrightarrow (D_\mu\Phi)' = (\partial_\mu\Phi)' - iA'_\mu\Phi' = U\partial_\mu\Phi + \partial_\mu U\Phi - iA'_\mu U\Phi. \quad (1.1.13)$$

En imposant la propriété de covariance  $(D_\mu\Phi)' = UD_\mu\Phi$ , nous obtenons la règle de transformation

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + iU\partial_\mu U^\dagger. \quad (1.1.14)$$

Nous voyons que le champ de jauge  $A_\mu$  n'est pas une quantité covariante.

Par ailleurs, nous pouvons démontrer que les différents champs de jauge  $A_\mu$  sont des éléments de l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie  $SU(n)$  [5]. En effet, dans un voisinage de l'identité, nous écrivons  $U = \exp(i\eta_a\tau^a) \in SU(n)$  où  $\tau_a$  sont les générateurs du groupe de Lie  $SU(n)$  et  $\eta_a$  est un ensemble linéairement indépendant de paramètres réels pour  $a = 1, \dots, n^2 - 1 = \dim(SU(n))$ . Les



générateurs  $\tau_a$  consistent des matrices hermitiennes de trace nulle et de format  $n \times n$ . L'annulation de la trace découle de

$$\mathbb{I} = \det U = \exp \operatorname{Tr}(\eta_a \tau^a) = \exp(\eta_a \operatorname{Tr}(\tau^a)) \quad (1.1.15)$$

et, en utilisant le fait que  $\{\eta_a\}$  forme un ensemble linéairement indépendant, on conclut que  $\operatorname{Tr}(\tau_a) = 0$ . De plus, pour des variations infinitésimales, nous avons que

$$U = \mathbb{I} + i\eta_a \tau^a + O(\eta^2), \quad U^\dagger = \mathbb{I} - i\eta_a (\tau^a)^\dagger + O(\eta^2) \quad (1.1.16)$$

et par conséquent

$$\mathbb{I} = U^\dagger U = \mathbb{I} + i\eta_a (\tau^a - (\tau^a)^\dagger) + O(\eta^2). \quad (1.1.17)$$

De cette dernière équation, on déduit la propriété d'hermiticité des générateurs  $\tau_a$ , *i.e.*  $\tau_a = \tau_a^\dagger$ . Nous noterons l'algèbre de Lie associée à  $SU(n)$  par  $su(n)$ . À partir de ces observations, nous sommes, donc, prêts à démontrer que les champs de jauge sont des éléments de  $su(n)$  [1]. Pour ce faire, nous observons tout d'abord que la quantité  $A_\mu - A_\mu^\dagger = 0$  est préservée sous les transformations de jauge. En effet, par (1.1.14), nous avons que

$$A_\mu^\dagger \longrightarrow (A_\mu^\dagger)' = U A_\mu^\dagger U^\dagger - i\partial_\mu U U^\dagger, \quad (1.1.18)$$

duquel, on déduit

$$A_\mu - A_\mu^\dagger \longrightarrow (A_\mu - A_\mu^\dagger)' = U(A_\mu - A_\mu^\dagger)U^\dagger. \quad (1.1.19)$$

Cette dernière propriété a été obtenue en observant que  $0 = \partial_\mu(UU^\dagger) = \partial_\mu U U^\dagger + U \partial_\mu U^\dagger$ . Ceci démontre que  $A_\mu = A_\mu^\dagger$  sous ces transformations locales. Pour des variations infinitésimales, nous avons que la règle de transformation pour  $A_\mu$  (1.1.14) devient

$$A_\mu \longrightarrow (A_\mu)' = A_\mu + i\eta_a [\tau^a, A_\mu] + (\partial_\mu \eta_a) \tau^a + O(\eta^2). \quad (1.1.20)$$

De là, nous voyons que, pour les éléments du groupe  $SU(n)$  dans un voisinage de l'identité, la trace de  $A_\mu$  est préservée sous les transformations de jauge. Nous pouvons donc considérer  $A_\mu \in su(n)$  et nous écrivons  $A_\mu = A_\mu^a \tau_a$ . Ainsi, en utilisant cette représentation des champs de jauge, nous avons que la transformation (1.1.20) est équivalente, en fonction des composantes, à

$$A_\mu^a \longrightarrow (A_\mu^a)' = A_\mu^a + i\eta^b A_\mu^c f_{bc}^a + \partial_\mu \eta_a, \quad (1.1.21)$$

où  $f_{bc}^a$  sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie  $su(n)$  et sont définies par  $[\tau_b, \tau_c] = f_{bc}^a \tau_a$ . Cette transformation démontre que pour une théorie de jauge abélienne (où nous avons que les constantes de structure  $f_{bc}^a = 0$ ), les champs de

jauge se transforment conformément à ceux de l'électromagnétisme où le groupe de Lie est le groupe abélien  $U(1)$  [1, 2, 3].

Jusqu'à maintenant, nous avons construit des dérivées covariantes (1.1.12) à partir de champs de jauge  $A_\mu$  se transformant selon une certaine règle (on peut démontrer que les champs de jauge possèdent une structure de groupe sous cette opération [3]). Nous avons, en plus, démontré que ces champs de jauge sont des éléments de l'algèbre de Lie  $su(n)$ . Les propriétés énoncées ci-dessus, nous permettent de déduire que les dérivées covariantes satisfont la règle de Leibniz et l'identité de Jacobi [4] étant donné le caractère infinitésimal de la dérivée covariante. Explicitement, nous avons la propriété de Leibniz

$$D_\mu(\Phi\Psi) = (D_\mu\Phi)\Psi + \Phi(D_\mu\Psi) \quad (1.1.22)$$

et l'identité de Jacobi

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\rho]] + [D_\rho, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\nu, [D_\rho, D_\mu]] = 0. \quad (1.1.23)$$

Par construction, nous avons choisi nos dérivées  $D_\mu$  pour qu'elles se transforment de façon covariante. Ainsi l'application successive de dérivées covariantes demeure une quantité covariante comme le démontre cet exemple:

$$D_\mu(D_\nu\Phi) \longrightarrow D_\mu(D_\nu(U\Phi)) = D_\mu(UD_\nu\Phi) = UD_\mu(D_\nu\Phi). \quad (1.1.24)$$

Cette dernière propriété, nous permet de construire une nouvelle quantité  $F_{\mu\nu}$  qui est aussi covariante et ne dépend que des champs de jauge  $A_\mu$ . Le 2-tenseur  $F_{\mu\nu}$  permettra de considérer les champs de jauge  $A_\mu$  comme des variables dynamiques des modèles à l'étude. La quantité  $F_{\mu\nu}$  est mieux connue sous le nom de tenseur anti-symétrique de Yang-Mills [1, 2, 3, 4]. En effet, nous définissons  $F_{\mu\nu} = i[D_\mu, D_\nu]$  et nous avons, par (1.1.24), que

$$[D_\mu, D_\nu]\Phi \longrightarrow U[D_\mu, D_\nu]\Phi. \quad (1.1.25)$$

En explicitant l'équation, aussi connue comme l'identité de Ricci,

$$[D_\mu, D_\nu]\Phi = -iF_{\mu\nu}\Phi, \quad (1.1.26)$$

nous trouvons que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]. \quad (1.1.27)$$

Nous pouvons remarquer que pour une théorie de jauge abélienne, le terme  $[A_\mu, A_\nu] = 0$  et, dans ce cas,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  est mieux connu, dans la théorie de l'électrodynamique, comme le tenseur de l'électromagnétisme. De l'équation de Ricci, nous déduisons la règle de transformation du 2-tenseur  $F_{\mu\nu}$  donnée par

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow (F_{\mu\nu})' = UF_{\mu\nu}U^\dagger \quad (1.1.28)$$

et, de l'identité de Jacobi, on déduit l'identité de Bianchi [1, 2, 3, 4, 6]

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\rho F_{\mu\nu} = 0. \quad (1.1.29)$$

Cette identité est utilisée dans la quantification des théories de Yang-Mills pour trouver les points stationnaires essentiels pour une formulation en fonction d'intégrales de chemin [1, 2, 3, 6]. Elle génère les équations d'auto-dualité et d'anti-auto-dualité, et, par un raisonnement analogue à celui fait pour  $A_\mu$ , nous pouvons démontrer que le 2-tenseur  $F_{\mu\nu}$  est un élément de l'algèbre de Lie  $su(n)$ . De plus, la règle de transformation pour  $F_{\mu\nu}$  est conservée pour le produit de plusieurs de ces tenseurs. Par exemple, pour un produit de deux tenseurs, nous obtenons que

$$F_{\mu\nu}F_{\rho\varphi} \longrightarrow (UF_{\mu\nu}U^\dagger)(UF_{\rho\varphi}U^\dagger) = U(F_{\mu\nu}F_{\rho\varphi})U^\dagger, \quad (1.1.30)$$

où  $U^\dagger U = \mathbb{I}$  a été utilisée. Finalement, la cyclicité de la trace permet d'obtenir

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\varphi} \cdots F_{\varepsilon\kappa}) \longrightarrow \text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\varphi} \cdots F_{\varepsilon\kappa}), \quad (1.1.31)$$

ce qui démontre que la trace d'un produit arbitraire de 2-tenseurs  $F_{\mu\nu}$  est invariante de jauge. Nous pouvons, ainsi, utiliser les ingrédients énumérés ci-dessus pour construire la densité lagrangienne la plus générale qui soit invariante par rapport aux transformations de Lorentz et invariante de jauge par rapport au groupe local de Lie  $SU(n)$ . Nous obtenons [1, 2, 3, 4, 6, 7]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}(D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi - V(\Phi^\dagger\Phi). \quad (1.1.32)$$

et les théories de Yang-Mills pures (ou théories de jauge non-abéliennes) sont décrites par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}). \quad (1.1.33)$$

Dans la prochaine section de ce chapitre préliminaire, nous utiliserons les outils développés ci-haut pour construire les modèles sigma grassmanniens en deux dimensions.

## 1.2. MODÈLE SIGMA GRASSMANNIEN EN DEUX DIMENSIONS

Dans cette section, nous présentons une construction explicite des modèles sigma grassmanniens et une formulation en fonction de projecteurs orthogonaux. Cette formulation nous permettra par la suite de construire des surfaces dans l'algèbre de Lie  $su(n)$ .

### 1.2.1. Discussion générale

Pour introduire ces modèles, nous représentons l'espace cible  $G(m, n)$  comme l'espace quotient [5, 6]

$$G(m, n) = \frac{U(n)}{U(m) \times U(n-m)}, \quad n > m. \quad (1.2.1)$$

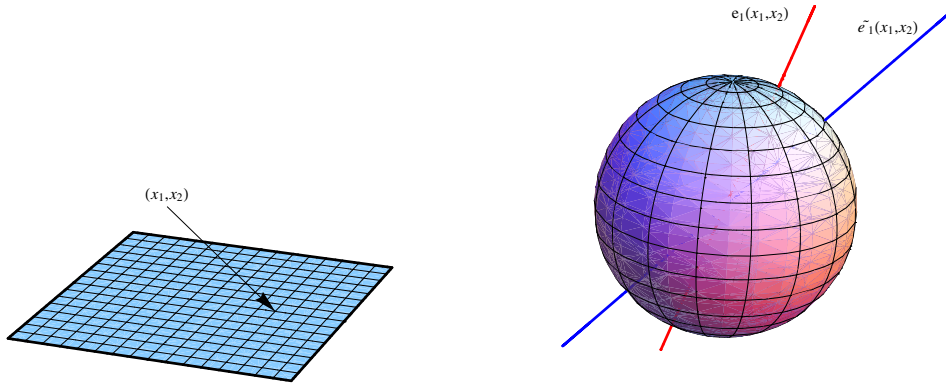
Ces variétés  $G(m, n)$  représentent, géométriquement, les hyper-plans de dimension  $m$  dans l'espace  $\mathbb{C}^n$ . En effet, soit un hyper-plan  $\pi$  de dimension  $m$ , alors tout autre plan  $\tilde{\pi}$  de dimension  $m$  peut être obtenu par une transformation  $U \in U(n)$ . Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  un ensemble de vecteurs orthonormés dans  $\mathbb{C}^n$  formant l'hyper-plan  $\pi$ . Cet ensemble forme un sous-espace vectoriel de dimension  $m$  dans  $\mathbb{C}^n$ , ainsi l'action du groupe  $U(m)$  laisse invariant cet espace *i.e.* l'action par la droite d'une matrice  $U \in U(m)$  sur la matrice  $Z$  formée par les vecteurs de base de l'espace vectoriel donne une nouvelle matrice formée par ces mêmes vecteurs modulo permutation. De plus, le groupe  $U(n-m)$  laisse invariant les vecteurs  $e_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, m$ . Cette analyse nous permet, ainsi, de conclure que  $G(m, n)$  est en effet donné par l'espace quotient (1.2.1). Par notre interprétation géométrique des variétés  $G(m, n)$ , les champs  $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow G(m, n)$  sont représentés par

$$Z(x_1, x_2) = (e_1(x_1, x_2), e_2(x_1, x_2), \dots, e_m(x_1, x_2)) \in \mathbb{C}^{n \times m}(x_1, x_2), \quad (1.2.2)$$

où  $(x_1, x_2)$  sont des coordonnées locales sur  $\mathbb{R}^2$  et, étant donné le caractère d'orthonormalité des vecteurs  $e_i$ , les champs  $Z$  satisfont la contrainte

$$Z^\dagger Z = \mathbb{I}_m. \quad (1.2.3)$$

À la figure 0.1, nous illustrons un exemple de cette description géométrique pour le cas  $G(1, n) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ . Étant donné un point  $(x_1, x_2)$  de l'espace  $\mathbb{R}^2$ , nous associons un champ  $Z(x_1, x_2)$  engendré par le vecteur  $e_1(x_1, x_2)$ . Ce vecteur engendre la droite rouge de notre illustration et est invariant par rapport au groupe local  $U(1)$ , *i.e.* le vecteur  $e_1(x_1, x_2)e^{i\varphi(x_1, x_2)}$  engendre la même droite. De plus, nous voulons construire une densité lagrangienne qui sera invariante par rapport à l'ensemble des droites de  $\mathbb{C}^n$  passant par l'origine au point  $(x_1, x_2)$  de l'espace, *i.e.* les droites de  $\mathbb{C}P^{n-1}$  au point  $(x_1, x_2)$  de l'espace sont considérées comme les mêmes dans notre théorie. Ainsi, pour obtenir la courbe bleue à partir de la courbe rouge, il suffit d'agir sur  $e_1$  par une matrice unitaire  $V \in U(n)$  qui nous donnera la droite engendrée par  $\tilde{e}_1$ . La sphère de la figure 0.1 met l'accent sur le fait que l'action du groupe unitaire préserve la sphère.

FIG. 1.1. Illustration pour la variété  $G(1, n) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ .

Ainsi, nos champs  $Z(x_1, x_2) = (e_1(x_1, x_2), e_2(x_1, x_2), \dots, e_m(x_1, x_2))$  représentent des hyper-planes de dimension  $m$  formés par les vecteurs orthonormaux  $e_i$  au point  $(x_1, x_2)$  de l'espace. L'action par la droite d'une matrice  $U(x_1, x_2)$  dans  $U(m)$  (remarquons que  $U$  est défini au même point de l'espace que  $Z$ ) laisse invariant l'espace vectoriel formé par les vecteurs  $e_i$  au point  $(x_1, x_2)$ . De plus, à partir de  $Z(x_1, x_2)$ , nous pouvons obtenir tous les autres hyper-planes de dimension  $m$  au point  $(x_1, x_2)$  par l'action à gauche d'une transformation globale  $V \in U(n)$ . Ainsi, pour construire notre modèle, nous devons imposer que notre densité lagrangienne soit invariante par rapport aux transformations [3, 6, 8]

$$Z(x_1, x_2) \longrightarrow Z(x_1, x_2)' = VZ(x_1, x_2)U(x_1, x_2). \quad (1.2.4)$$

Cette règle nous amène à construire une théorie de jauge non-abélienne locale par rapport au groupe local  $U(m)$ . L'unique différence avec les théories de Yang-Mills c'est que les modèles sigma grassmanniens sont invariants de jauge par l'action à droite d'un groupe local contrairement à une invariance locale par la gauche.

Pour faire le pont avec la première partie de l'introduction, considérons la densité lagrangienne décrivant une théorie des champs libres [1, 2, 3]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_\mu Z^\dagger \partial_\mu Z) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \partial_\mu e_i^\dagger \partial_\mu e_i, \quad \partial_\mu \longrightarrow \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \quad (1.2.5)$$

qui est invariante par rapport à la transformation globale suivante

$$Z \longrightarrow VZU, \quad V \in U(n), \quad U \in U(m). \quad (1.2.6)$$

Ainsi, pour construire une densité lagrangienne invariante par rapport aux transformations de jauge locales (1.2.4) à partir de la densité lagrangienne (1.2.5), nous devons construire une dérivée covariante, semblable à celle donnée en (1.1.12),

$$D_\mu Z = \partial_\mu Z - iZA_\mu, \quad (1.2.7)$$

où  $A_\mu \in \mathbb{C}^{m \times m}$ . Pour que notre dérivée  $D_\mu$  soit covariante *i.e*  $(D_\mu Z)' = V(D_\mu Z)U$ , les champs de jauge  $A_\mu$  doivent se transformer suivant la règle

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = U^\dagger A_\mu U + iU^\dagger \partial_\mu U \quad (1.2.8)$$

qui, pour les mêmes raisons qu'auparavant, sont des éléments de l'algèbre de Lie  $u(m)$  des matrices hermitiennes de format  $m \times m$  [5]. Nous pouvons ainsi construire la densité lagrangienne associée aux modèles sigma grassmanniens en deux dimensions présentant une invariance par rapport aux transformations (1.2.6). Elle est donnée par [3, 6, 8]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (D_\mu Z)^\dagger D_\mu Z + \Lambda (Z^\dagger Z - \mathbb{I}_m) \right], \quad (1.2.9)$$

où nous avons introduit un multiplicateur de Lagrange  $\Lambda \in \mathbb{C}^{m \times m}$  satisfaisant  $\Lambda^\dagger = \Lambda$  pour mettre en valeur la contrainte (1.2.3). Ce multiplicateur de Lagrange sera utilisé pour déduire les équations d'Euler-Lagrange associées à notre modèle. En fonction des dérivées  $\partial_\mu$  et des champs de jauge  $A_\mu$ , le Lagrangien (1.2.9) s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \partial_\mu Z^\dagger \partial_\mu Z - i\partial_\mu Z^\dagger Z A_\mu + iA_\mu^\dagger Z^\dagger \partial_\mu Z + A_\mu^\dagger Z^\dagger Z A_\mu + \Lambda (Z^\dagger Z - \mathbb{I}_m) \right]. \quad (1.2.10)$$

La variation de l'action associée à cette densité lagrangienne par rapport au multiplicateur de Lagrange  $\Lambda$  génère la contrainte donnée par (4.5.16). D'autre part, la variation de cette même action par rapport aux champs de jauge  $A_\mu$  donne

$$A_\mu = -iZ^\dagger \partial_\mu Z. \quad (1.2.11)$$

Nous voyons ainsi que  $A_\mu^\dagger = A_\mu$  en utilisant le fait que  $\partial_\mu (Z^\dagger Z) = 0$ . Finalement, la variation de la densité lagrangienne par rapport à la variable  $Z$  donne

$$\partial_\mu \partial_\mu Z - 2i\partial_\mu Z A_\mu - iZ \partial_\mu A_\mu - ZA_\mu^2 - Z\Lambda = 0. \quad (1.2.12)$$

Pour déduire une expression pour  $\Lambda$ , nous multiplions cette équation par  $Z^\dagger$  et utilisons la contrainte (1.2.3), nous obtenons que

$$\Lambda = A_\mu^2 - \partial_\mu Z^\dagger \partial_\mu Z = -(D_\mu Z)^\dagger D_\mu Z. \quad (1.2.13)$$

En utilisant les résultats ci-haut, nous obtenons les équations d'Euler-Lagrange associées à notre modèle [3, 6, 8]

$$D_\mu D_\mu Z + Z(D_\mu Z)^\dagger D_\mu Z = 0, \quad Z^\dagger Z = \mathbb{I}_m, \quad (1.2.14)$$

où les dérivées covariantes  $D_\mu$  sont maintenant données par

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - \Phi(Z^\dagger \partial_\mu Z). \quad (1.2.15)$$

Comme mentionné dans l'introduction, nous nous intéressons aux solutions des équations d'Euler-Lagrange (1.2.14) à action finie [6, 8, 9, 10, 11] *i.e.*

$$\mathcal{S} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L} dx_1 dx_2 < \infty. \quad (1.2.16)$$

Pour assurer la finitude de l'action, nous devons imposer des conditions frontières appropriées en ajoutant un point à l'infini [6]. Cela implique que nous considérons maintenant l'espace  $\mathbb{R}^2 \cup \infty$  qui possède les mêmes propriétés topologiques que la 2-sphère  $S^2$  via la projection stéréographique [5, 12]. Le champ  $Z$  est donc une application de la sphère  $S^2$  dans la variété grassmannienne  $G(m, n)$ .

Nous savons que les solutions à action finie des équations d'Euler-Lagrange peuvent être classifiées en trois catégories: holomorphes, non-holomorphes et anti-holomorphes. Pour décrire ces solutions, il est plus pratique de complexifier l'espace  $\mathbb{R}^2$  en introduisant les coordonnées  $x_\pm = x_1 \pm ix_2$ . Dans ces coordonnées, les équations d'Euler-Lagrange deviennent

$$D_+ D_- Z + Z(D_- Z)^\dagger D_- Z = 0, \quad Z^\dagger Z = \mathbb{I}_m, \quad (1.2.17)$$

où les dérivées covariantes sont données par

$$D_\pm \Lambda = \partial_\pm \Lambda - \Lambda(Z^\dagger \partial_\pm Z). \quad (1.2.18)$$

### 1.2.2. Formalisme en fonction de projecteurs orthogonaux

Pour construire des surfaces dans l'algèbre de Lie  $su(n)$ , il est nécessaire de reformuler les modèles sigma en fonction de projecteurs orthogonaux. Par définition, un projecteur orthogonal  $\mathbb{P}$  de rang  $m$  satisfait aux contraintes suivantes:

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}, \quad \mathbb{P}^\dagger = \mathbb{P}, \quad \text{Tr}(\mathbb{P}) = m. \quad (1.2.19)$$

Nous avons considéré, jusqu'à présent, des champs  $Z = (e_1, e_2, \dots, e_m) \in \mathbb{C}^{n \times m}$  satisfaisant  $Z^\dagger Z = \mathbb{I}_m$ . À partir de  $Z$ , on peut construire un projecteur orthogonal

de rang  $m$  donné par

$$\mathbb{P} = ZZ^\dagger = \sum_{i=1}^m e_i e_i^\dagger. \quad (1.2.20)$$

Il est facile de démontrer que  $\mathbb{P}$  satisfait aux contraintes (1.2.19). Nous voulons maintenant déduire l'expression de la densité lagrangienne (1.2.9) en fonction des projecteurs  $\mathbb{P}$ . Nous avons que

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[ (D_\mu Z)^\dagger D_\mu Z \right] &= \text{Tr} \left[ (\partial_\mu Z)^\dagger (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \partial_\mu Z \right] = \text{Tr} \left[ (\partial_\mu Z)^\dagger (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \partial_\mu Z (Z^\dagger Z) \right] \\ &= \text{Tr} \left[ Z (\partial_\mu Z)^\dagger (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \partial_\mu Z Z^\dagger \right] \\ &= \text{Tr} \left[ \partial_\mu \mathbb{P} (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \partial_\mu \mathbb{P} \right]. \end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$\text{Tr} \left[ (\partial_\mu \mathbb{P}) \mathbb{P} (\partial_\mu \mathbb{P}) \right] = \text{Tr} \left[ (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \partial_\mu Z (\partial_\mu Z)^\dagger (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \right] = \text{Tr} \left[ (\partial_\mu Z)^\dagger (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \partial_\mu Z \right].$$

De là, on déduit que la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  s'écrit comme **[3, 6]**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{Tr} (\partial_\mu \mathbb{P} \partial_\mu \mathbb{P}). \quad (1.2.21)$$

Nous pouvons remarquer que cette formulation est trivialement invariante de jauge. Ceci découle directement du fait que  $\mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}' = V \mathbb{P} V^\dagger$  pour  $V \in U(n)$  une transformation globale. Par ailleurs,  $\mathbb{P}$  est invariant sous la transformation locale générée par  $U \in U(m)$ . En fonction des variables complexes  $x_\pm$ , la densité lagrangienne s'écrit **[6]**

$$\mathcal{L} = \text{Tr} \left[ \partial_+ \mathbb{P} \partial_- \mathbb{P} + \Xi (\mathbb{P}^2 - \mathbb{P}) \right], \quad (1.2.22)$$

où nous introduisons le multiplicateur de Lagrange  $\Xi \in \mathbb{C}^{n \times n}$  satisfaisant  $\Xi^\dagger = \Xi$  et renforçant la contrainte que doit satisfaire un projecteur orthogonal, soit  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ . Ce multiplicateur, nous permettra de déduire les équations d'Euler-Lagrange de cette théorie invariante de jauge. La variation de l'action associée à cette densité lagrangienne par rapport au multiplicateur de Lagrange  $\Xi$  génère la contrainte  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ , tandis que la variation par rapport à la variable dynamique  $\mathbb{P}$  donne

$$\mathbb{P} \Xi + \Xi \mathbb{P} - \Xi = 2 \partial_+ \partial_- \mathbb{P}. \quad (1.2.23)$$

À partir de cette équation, nous pouvons en obtenir deux autres en multipliant cette dernière par  $\mathbb{P}$ , respectivement, par la droite et par la gauche:

$$\mathbb{P} \Xi \mathbb{P} = 2 \mathbb{P} \partial_+ \partial_- \mathbb{P}, \quad \mathbb{P} \Xi \mathbb{P} = 2 (\partial_+ \partial_- \mathbb{P}) \mathbb{P}. \quad (1.2.24)$$



La soustraction de ces deux dernières équations génère les équations d'Euler-Lagrange données par [3, 6]

$$[\partial_+ \partial_- \mathbb{P}, \mathbb{P}] = 0, \quad \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}. \quad (1.2.25)$$

Pour la dérivation des équations d'Euler-Lagrange issues des densités lagrangiennes (1.2.9) et (1.2.22), nous avons utilisé l'outil de référence "Matrix CookBook" [13] et la propriété

$$H = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \text{Tr}(A \mathbf{X} B) = A^T B^T. \quad (1.2.26)$$

Cette propriété n'est pas démontrée dans le "Matrix CookBook" [13] et nous en donnons la démonstration immédiate ici.

*Démonstration:* Considérons les éléments matriciels  $H_{ij}$  définis par

$$H_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_{ij}} \text{Tr}(A \mathbf{X} B) = \text{Tr} \left( A \left( \frac{\partial}{\partial X_{ij}} \mathbf{X} \right) B \right) = \sum_{k=1} b_{jk} a_{ki} = (A^T B^T)_{ij}, \quad (1.2.27)$$

et donc  $H = A^T B^T$ , ce qui conclut la démonstration.

### 1.2.2.1. Les modèles $\mathbb{C}P^{n-1}$

Considérons pour commencer la résolution des équations d'Euler-Lagrange dans le cas de  $\mathbb{C}P^{n-1}$ . Les solutions  $Z$  des équations d'Euler-Lagrange (1.2.17) sont obtenues à partir d'une fonction holomorphe  $f(x_+)$  par l'application successive d'un opérateur d'orthogonalisation  $P_+$  [3, 6, 9, 10, 11] défini récursivement par

$$P_+^0 f = f, \quad P_+ f = \partial_+ f - \frac{f^\dagger \partial_+ f}{|f|^2} f, \quad P_+^j f = P_+(P_+^{j-1} f), \quad P_+^n f = 0. \quad (1.2.28)$$

Nous obtenons un ensemble fini de  $n$  vecteurs  $\{f, P_+ f, \dots, P_+^{n-1} f\}$  et la finitude de cet ensemble découle du fait que

$$P_+^{n-1} f = \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-2} |P_+^i f|^2} f^* \wedge \partial_- f^* \wedge \dots \wedge \partial_-^{n-2} f^* = \gamma(x_+, x_-) \nu(x_-), \quad (1.2.29)$$

où  $\gamma$  est une fonction de  $x_+$  et  $x_-$ ,  $\nu$  est un vecteur à  $n$  composantes fonction de  $x_-$  seulement et  $f^*$  représente la conjugaison complexe des composantes de  $f$ . Ainsi, nous avons que

$$P_+^n f = P_+(P_+^{n-1} f) = \partial_+(\gamma \nu) - \frac{(\gamma \nu)^\dagger \partial_+(\gamma \nu)}{|\gamma \nu|^2} (\gamma \nu) = 0, \quad (1.2.30)$$

où nous avons utilisé que  $\partial_+ \nu = 0$ . Avec ces dernières observations, nous pouvons démontrer que

$$Z_i = \frac{P_+^i f}{|P_+^i f|}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.2.31)$$

sont des solutions [6, 10, 11] des équations d'Euler-Lagrange (1.2.17). Pour ce faire, il est plus facile de considérer le modèle invariant de jauge en terme de projecteurs orthogonaux de rang 1. Nous avons les projecteurs

$$\mathbb{P}_i = Z_i Z_i^\dagger = \frac{P_+^i f (P_+^i f)^\dagger}{|P_+^i f|^2}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.2.32)$$

qui satisfont les propriétés (1.2.19). Avant de poursuivre avec la démonstration que ces projecteurs sont solutions des équations d'Euler-Lagrange, nous pouvons identifier quelques-unes de leurs caractéristiques [6, 10, 11, 14]:

- (1) L'ensemble  $\{\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_{n-1}\}$  forme un ensemble complet dans le sens qu'ils (les projecteurs) satisfont à l'identité

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_i = \mathbb{I}. \quad (1.2.33)$$

En effet, en utilisant la propriété que l'ensemble  $\{f, P_+ f, \dots, P_+^{n-1} f\}$  est orthogonal, nous avons que la matrice  $A = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}_i$  possède  $n$  vecteurs propres  $P_+^i f$  de valeurs propres 1 pour  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Comme les vecteurs  $P_+^i f$  sont orthogonaux entre eux, on déduit que la matrice  $A$  est diagonalisable et qu'elle vaut  $\mathbb{I}$ .

- (2) Les projecteurs  $\mathbb{P}_i$  satisfont  $\mathbb{P}_i \mathbb{P}_j = \delta_{ij} \mathbb{P}_i$  pour tout  $i, j$ .  
(3) Tout comme l'opérateur  $P_+$  défini en (1.2.28), nous pouvons associer aux projecteurs  $\mathbb{P}_i$  des opérateurs de création et d'annihilation:

$$\Pi_+(\mathbb{P}_i) = P_{i+1}, \quad \Pi_-(\mathbb{P}_i) = P_{i-1}. \quad (1.2.34)$$

Ces opérateurs sont donnés par

$$\Pi_\pm(\mathbb{P}) = \frac{\partial_\pm \mathbb{P} \mathbb{P} \partial_\mp \mathbb{P}}{\text{Tr}(\partial_\pm \mathbb{P} \mathbb{P} \partial_\mp \mathbb{P})}. \quad (1.2.35)$$

Nous démontrerons cette propriété de création et d'annihilation plus bas. Pour démontrer la propriété (3) et le fait que les projecteurs orthogonaux définis ci-haut sont des solutions des équations d'Euler-Lagrange, quelques calculs s'imposent. Nous avons [6]

$$\partial_- P_+^i f = -P_+^{i-1} \frac{|P_+^i f|^2}{|P_+^{i-1} f|^2}, \quad \partial_+ \left( \frac{P_+^i f}{|P_+^i f|^2} \right) = \frac{P_+^{i+1} f}{|P_+^i f|^2}, \quad (1.2.36)$$

desquelles, on déduit que

$$\begin{aligned} \partial_+ \mathbb{P}_i &= (\partial_- \mathbb{P}_i)^\dagger = \frac{P_+^{i+1} f (P_+^i f)^\dagger}{|P_+^i f|^2} - \frac{P_+^i f (P_+^{i-1} f)^\dagger}{|P_+^{i-1} f|^2}, \\ \partial_+ \partial_- \mathbb{P}_i &= \frac{P_+^{i+1} f (P_+^{i+1} f)^\dagger}{|P_+^i f|^2} - \frac{P_+^i f (P_+^i f)^\dagger}{|P_+^{i-1} f|^2} + \frac{|P_+^i f|^2}{|P_+^{i-1} f|^2} \frac{P_+^{i-1} f (P_+^{i-1} f)^\dagger}{|P_+^{i-1} f|^2} \end{aligned} \quad (1.2.37)$$

$$- \frac{|P_+^{i+1}f|^2 P_+^i f (P_+^i f)^\dagger}{|P_+^i f|^2 |P_+^i f|^2}. \quad (1.2.38)$$

La dernière identité permet de démontrer que les projecteurs orthogonaux satisfont les équations d'Euler-Lagrange  $[\partial_+ \partial_- \mathbb{P}_i, \mathbb{P}_i]$  où nous avons utilisé la propriété (2) identifiée ci-haut. Pour les propriétés d'annihilation et de création [14], elle découle directement de

$$\partial_+ \mathbb{P}_i \mathbb{P}_i \partial_- \mathbb{P}_i = \frac{P_+^{i+1} f (P_+^{i+1} f)^\dagger}{|P_+^i f|^2}, \quad \partial_- \mathbb{P}_i \mathbb{P}_i \partial_+ \mathbb{P}_i = \frac{|P_+^i f|^2 P_+^{i-1} f (P_+^{i-1} f)^\dagger}{|P_+^{i-1} f|^2 |P_+^{i-1} f|^2} \quad (1.2.39)$$

et du fait que  $\text{Tr}(vv^\dagger) = |v|^2$ .

### 1.2.2.2. Les modèles $G(m, n)$

Si nous considérons à présent, les modèles  $G(m, n)$  avec  $m \geq 2$ , la situation est plus complexe et aucun théorème de complétude n'existe à ce jour [6]. Nous pouvons, cependant, déduire de notre analyse des modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$  quelques solutions de ces modèles. Les solutions  $Z$ , que nous considérons dans cette thèse, sont construites [6, 11] en prenant des  $m$ -sous-ensembles de  $\{Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}\}$  où  $Z_i$  a été défini en (1.2.31). Une solution  $Z_{i_1, i_2, \dots, i_m} \in \mathbb{C}^{n \times m}$  du modèle  $G(m, n)$  est donnée par

$$Z_{i_1, i_2, \dots, i_m} = (Z_{i_1}, Z_{i_2}, \dots, Z_{i_m}), \quad (1.2.40)$$

pour  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n-1$ . Il existe plusieurs autres solutions des modèles  $G(m, n)$ . Certaines d'entre elles sont décrites dans le livre de Wojtek J. Zakrzewski [6] et dans le troisième chapitre de cette thèse [15]. La solution  $Z_{0, 1, \dots, m-1}$  sera dite holomorphe,  $Z_{n-m, n-m+1, \dots, n-1}$  anti-holomorphe et les autres sont considérées comme des solutions non-holomorphes ou mixtes. En fonction des projecteurs orthogonaux, la solution  $Z_{i_1, i_2, \dots, i_m}$  est décrite par un projecteur orthogonal de rang  $m$  donné par

$$\mathbb{P}_{i_1, i_2, \dots, i_m} = Z_{i_1, \dots, i_m} Z_{i_1, \dots, i_m}^\dagger = \sum_{j=1}^m Z_{i_j} Z_{i_j}^\dagger. \quad (1.2.41)$$

Par des calculs analogues à ceux des modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$ , nous pouvons démontrer que ces projecteurs sont des solutions des équations d'Euler-Lagrange [6]. Une discussion plus approfondie de ces solutions sera faite dans les deux chapitres suivants de cette thèse [15, 16].

## 1.3. CONSTRUCTION DE SURFACES DANS L'ALGÈBRE DE LIE $su(n)$

Nous proposons dans cette section de décrire la représentation de Weierstrass [17, 18, 19, 20] pour les surfaces obtenues des solutions classiques des modèles

sigma grassmanniens. Pour décrire ces surfaces, nous observons que les équations d'Euler-Lagrange (1.2.25) s'écrivent comme une loi de conservation [21] donnée par

$$\partial_+ \mathbf{L} - \partial_- \mathbf{L}^\dagger = 0, \quad \mathbf{L} = [\partial_- \mathbb{P}, \mathbb{P}]. \quad (1.3.1)$$

À partir de cette loi de conservation, nous pouvons construire une 1-forme différentielle  $\alpha$  [21] comme

$$\alpha = \mathbf{L} dx_- + \mathbf{L}^\dagger dx_+ \quad (1.3.2)$$

possédant les propriétés suivantes:

- (1) La forme différentielle  $\alpha \in su(n)$ . En effet, la trace de l'opérateur  $\mathbf{L}$  est nulle, comme trace d'un commutateur. De plus, nous observons aisément que  $\alpha^\dagger = \alpha$ .
- (2) La forme différentielle  $\alpha$  est fermée [5, 22] pour toute solution  $\mathbb{P}$  des équations d'Euler-Lagrange. Ceci repose sur le fait que

$$d\alpha = (\partial_+ \mathbf{L} - \partial_- \mathbf{L}^\dagger) dx_+ \wedge dx_- = 0, \quad (1.3.3)$$

pour les projecteurs  $\mathbb{P}$  satisfaisant la loi de conservation mentionnée ci-dessus.

- (3) La 1-forme  $\alpha$  est exacte [5, 22]. Cette propriété repose sur le lemme de Poincaré [22]: si  $\Omega$  est un sous-ensemble ouvert et simplement connexe de  $\mathbb{R}^n$ , alors une  $p$ -forme différentielle  $\alpha$  lisse et définie sur  $\Omega$  est exacte. Dans notre cas  $\Omega = \mathbb{R}^2$  (vrai aussi pour la compactification  $\Omega = S^2$ ) et  $\alpha$  est une 1-forme différentielle fermée ce qui nous permet de conclure que  $\alpha$  est aussi exacte.

Ces remarques permettent de définir une surface  $\mathbf{X}(x_+, x_-) \in su(n)$  [17, 18, 19, 20, 21] en choisissant

$$\alpha = d\mathbf{X} = \partial_+ \mathbf{X} dx_+ + \partial_- \mathbf{X} dx_-. \quad (1.3.4)$$

En comparant cette expression avec celle donnée en (1.3.2), nous voyons que les vecteurs tangents à la surface  $\mathbf{X}$  sont donnés par

$$\partial_+ \mathbf{X} = \mathbf{L}^\dagger = -[\partial_+ \mathbb{P}, \mathbb{P}], \quad \partial_- \mathbf{X} = \mathbf{L} = [\partial_- \mathbb{P}, \mathbb{P}]. \quad (1.3.5)$$

Nos surfaces habitent donc naturellement dans l'algèbre de Lie  $su(n)$  et afin de déduire des propriétés géométriques de ces surfaces, nous introduisons un produit scalaire  $(\bullet, \bullet) : su(n) \times su(n) \rightarrow \mathbb{R}$ , basé sur la forme de Killing [5], donné par

$$(A, B) = \frac{1}{2} \text{Tr}(AB). \quad (1.3.6)$$

À partir de ces ingrédients, nous pouvons obtenir la première forme fondamentale  $\mathcal{I}$  [12, 22] donnée par

$$\mathcal{I} = (d\mathbf{X}, d\mathbf{X}) = g_{++}dx_+^2 + 2g_{+-}dx_+dx_- + g_{--}dx_-^2. \quad (1.3.7)$$

Les facteurs  $g_{\pm\pm}$  et  $g_{\pm\mp}$  sont les composantes de la métrique données par

$$g_{++} = g_{--}^\dagger = \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathbf{L}^\dagger)^2, \quad g_{+-} = g_{-+} = \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger). \quad (1.3.8)$$

### 1.3.1. Les modèles $\mathbb{C}P^{n-1}$

Étant donné que les solutions des modèles projectifs  $\mathbb{C}P^{n-1}$  sont entièrement connues, débutons notre analyse en décrivant les surfaces  $\mathbf{X}$  issues de ces modèles [15, 16, 21, 23, 24, 25, 26, 27]. Soit  $\mathbf{X}_i$  la surface associée à la solution  $\mathbf{Z}_i$  donnée en (1.2.31). Dans ce cas, le projecteur  $\mathbb{P}_i$  associé à la solution  $\mathbf{Z}_i$  est donné par  $Z_i Z_i^\dagger$ , et les quantités  $\mathbf{L}_i$  et  $\mathbf{L}_i^\dagger$  définissant les vecteurs tangents de la surface sont

$$\mathbf{L}_i = (\mathbf{L}_i^\dagger)^\dagger = -\frac{P_+^{i-1}f(P_+^i f)^\dagger}{|P_+^{i-1}f|^2} - \frac{P_+^i f(P_+^{i+1}f)^\dagger}{|P_+^i f|^2}. \quad (1.3.9)$$

Ainsi, les quantités  $\mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^\dagger$  et  $(\mathbf{L}_i^\dagger)^2$  formant les composantes de la métrique  $g$  sont données par

$$(\mathbf{L}_i^\dagger)^2 = \frac{P_+^{i+1}f(P_+^{i-1}f)^\dagger}{|P_+^{i-1}f|^2}, \quad \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^\dagger = \frac{|P_+^i f|^2}{|P_+^{i-1}f|^2} \frac{P_+^{i-1}f(P_+^{i-1}f)^\dagger}{|P_+^{i-1}f|^2} + \frac{|P_+^{i+1}f|^2}{|P_+^i f|^2} \frac{P_+^i f(P_+^i f)^\dagger}{|P_+^i f|^2}. \quad (1.3.10)$$

En utilisant l'orthogonalité des vecteurs  $P_+^j f$ , nous déduisons les formes explicites des composantes de la métrique [21]

$$g_{++}^i = (g_{--}^i)^\dagger = 0, \quad g_{+-}^i = g_{-+}^i = \frac{1}{2} \left( \frac{|P_+^i f|^2}{|P_+^{i-1}f|^2} + \frac{|P_+^{i+1}f|^2}{|P_+^i f|^2} \right) \quad (1.3.11)$$

pour  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Ce dernier résultat nous indique que nos surfaces  $\mathbf{X}_i(x_+, x_-) \in su(n)$  sont des applications conformes [12, 22]. Des applications seront dites conformes si localement elles préservent les angles entre deux courbes. Dans notre situation, soit deux courbes  $\gamma_1(t)$  et  $\gamma_2(t)$  du plan  $\mathbb{C}$  se croisant au point  $(x_0, y_0)$  et formant un angle  $\theta$  à ce point, alors l'angle entre  $\mathbf{X}(\gamma_1(t))$  et  $\mathbf{X}(\gamma_2(t))$  au point  $\mathbf{X}(x_0, y_0)$  est aussi donné par  $\theta$ .

Un exemple classique d'une telle application conforme est donné par la projection stéréographique entre la sphère  $S^2$  et le plan  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  [12, 22]. Cet exemple vaut la peine d'être explicité puisque les solutions à action finie de nos modèles sigma grassmanniens sont construites à partir de cette idée. Cette correspondance sera utilisée dans les chapitres de cette thèse [15, 16] et nous jugeons bon d'en discuter en plus de détails. Soit  $\sigma : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \longrightarrow S^2$  la projection

stéréographique donnée par

$$\sigma(x_1, x_2) = \left( \frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{-1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} \right), \quad (1.3.12)$$

alors la métrique induite par cette application est

$$g = \begin{pmatrix} \langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_1} \rangle & \langle \sigma_{x_1}, \sigma_{x_2} \rangle \\ \langle \sigma_{x_2}, \sigma_{x_1} \rangle & \langle \sigma_{x_2}, \sigma_{x_2} \rangle \end{pmatrix} = \frac{4}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.3.13)$$

où  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  dénote le produit scalaire standard sur  $\mathbb{R}^3$ . Ce dernier résultat démontre que la première forme fondamentale induite par l'application  $\sigma$  est donnée par

$$\mathcal{I}_{S^2} = \frac{4dx_+dx_-}{(1+x_+x_-)^2} \quad (1.3.14)$$

démontrant que l'application est conforme. Nous pouvons en donner la démonstration immédiate. Soit  $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$  pour  $i = 1, 2$  deux courbes du plan  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  tel que  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = (x_0, y_0)$ . L'angle  $\theta$  entre les deux courbes au point  $(x_0, y_0)$  est déterminé par

$$\cos(\theta) = \frac{\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0)}{\|\dot{\gamma}_1(t_0)\| \|\dot{\gamma}_2(t_0)\|}. \quad (1.3.15)$$

Pour démontrer que l'application est conforme, on définit  $\rho_i(t) = \sigma(\gamma_i(t))$  et nous avons que

$$\langle \dot{\rho}_1(t_0), \dot{\rho}_2(t_0) \rangle = \frac{4}{(1+x_0^2+y_0^2)^2} \dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0), \quad (1.3.16)$$

ainsi que

$$\|\dot{\rho}_i(t_0)\| = \frac{2}{(1+x_0^2+y_0^2)} \|\dot{\gamma}_i(t_0)\|. \quad (1.3.17)$$

Ces calculs permettent de déduire

$$\frac{\langle \dot{\rho}_1(t_0), \dot{\rho}_2(t_0) \rangle}{\|\dot{\rho}_1(t_0)\| \|\dot{\rho}_2(t_0)\|} = \frac{\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0)}{\|\dot{\gamma}_1(t_0)\| \|\dot{\gamma}_2(t_0)\|}, \quad (1.3.18)$$

et que, par conséquent, la projection stéréographique est conforme.

Nous venons de déterminer que nos surfaces  $\mathbf{X}_i$  définissent des applications conformes pour  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , *i.e.* les surfaces sont conformes pour l'ensemble complet de solutions des modèles projectifs. De plus, nous pouvons observer que la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  explicitée en (1.2.22) et associée à la solution  $\mathbb{P}_i$  est donnée par [15, 16, 21]

$$\mathcal{L}_i = 2g_{+-}^i \implies \mathcal{I} = (d\mathbf{X}_i, d\mathbf{X}_i) = \mathcal{L}_i dx_+ dx_- \quad (1.3.19)$$

Ce dernier résultat démontre que puisque nous sommes intéressés par des solutions à action finie, les surfaces  $\mathbf{X}_i$  auront une aire finie (ce dernier résultat découle directement de l'intégrale de cette dernière équation). Nos surfaces étant

des applications conformes, nous pouvons donner l'expression pour la courbure gaussienne  $\mathcal{K}_i$  [12, 21] associée à la surface  $\mathbf{X}_i$ . Cette courbure est donnée par

$$\mathcal{K}_i = -\frac{1}{g_{+-}^i} \partial_+ \partial_- \ln g_{+-}^i = -\frac{2}{\mathcal{L}_i} \partial_+ \partial_- \ln \mathcal{L}_i \quad (1.3.20)$$

pour  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Comme mentionné dans l'introduction, les surfaces  $\mathbf{X}_i$  ont courbure gaussienne constante si elles sont représentées par la séquence de Veronese [25]. Cette séquence modulo invariance de jauge est donnée à partir de

$$f = \left( 1, \sqrt{\binom{n-1}{1}} x_+, \dots, \sqrt{\binom{n-1}{r}} x_+^r, \dots, x_+^{n-1} \right)^T \quad (1.3.21)$$

en appliquant successivement l'opérateur d'orthogonalisation  $P_+$  défini plus haut. En effet, cette propriété remarquable de la séquence de Veronese repose sur le fait que [15, 25]

$$|P_+^i f|^2 = \frac{(n-1)!i!}{(n-1-i)!} (1+|x|^2)^{n-1-2i} \quad (1.3.22)$$

et que, par conséquent,

$$g_{+-}^i = \frac{n-1+2i(n-1-i)}{2(1+|x|^2)}. \quad (1.3.23)$$

Nous en déduisons, en utilisant l'expression pour la courbure gaussienne, que

$$\mathcal{K}_i = \frac{4}{r_i}, \quad r_i = (n-1) + 2i(n-1-i) \in \mathbb{Z}^+, \quad (1.3.24)$$

pour  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . La séquence de Veronese est l'unique séquence ayant cette propriété de courbure gaussienne constante [25].

### 1.3.2. Isomorphisme entre $su(n)$ et l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n^2-1}$

L'obtention d'une classification des surfaces à courbure gaussienne constante pour les modèles  $G(m, n)$  avec  $m \geq 2$  est un problème plus difficile. En effet, jusqu'à ce jour, ce problème demeure ouvert et quelques résultats partiels sont connus [15, 16, 24, 26, 27, 28, 29, 30]. Nous avons, brièvement, identifié quelques obstacles à cette classification.

Il est possible d'obtenir d'autres quantités géométriques [21]: la deuxième forme fondamentale, la courbure moyenne, la fonctionnelle de Willmore, etc. Ces propriétés ont été déduites d'un repère local sur  $su(n)$  et pour obtenir ce repère nous utilisons l'isomorphisme [5]

$$\varphi : su(n) \cong \mathbb{R}^{n^2-1}. \quad (1.3.25)$$

Pour démontrer cette propriété, nous considérons une base orthonormée  $\{\tau_a : a = 1, 2, \dots, n^2 - 1\}$  de l'algèbre de Lie  $su(n)$  et, ainsi, un élément  $\mathcal{U} \in su(n)$  est donné par  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_a \tau^a$  pour  $\mathcal{U}_a \in \mathbb{R}$ . Nous définissons l'application  $\varphi$  par

$$\varphi(\mathcal{U}) = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_{n^2-1})^T \in \mathbb{R}^{n^2-1}. \quad (1.3.26)$$

Puisque  $su(n)$  et  $\mathbb{R}^{n^2-1}$  ont la même dimension,  $\varphi$  sera un isomorphisme s'il est injectif. Mais ceci découle aisément du fait que  $\varphi(\mathcal{U}) = 0$  si et seulement si chaque  $\mathcal{U}_a = 0$  et, par conséquent,  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ . En utilisant cet isomorphisme, on définit un repère local [21]  $\{\eta_j : j = 1, 2, \dots, n^2 - 1\}$  où  $\eta_1 = \partial_+ \mathbf{X}$ ,  $\eta_2 = \partial_- \mathbf{X}$ ,  $\eta_j \in su(n)$  et les éléments du repère local satisfont

$$(\eta_1, \eta_i) = (\eta_2, \eta_i) = 0, \quad (\eta_i, \eta_j) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\eta_i \eta_j) = \delta_{ij} \quad (1.3.27)$$

pour  $i, j \geq 3$ . Les quantités  $\eta_i$  pour  $i \geq 3$  peuvent être considérées géométriquement comme les composantes du vecteur normal à la surface  $\mathbf{X}$ . La dynamique de ce repère local est ensuite déterminée par les équations de Gauss-Weingarten et Gauss-Codazzi-Ricci [21]. Ces quantités peuvent, par la suite, être utilisées pour définir la courbure moyenne, la deuxième forme fondamentale et la fonctionnelle de Willmore.

Nous utiliserons cet isomorphisme pour plonger les surfaces dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n^2-1}$  et ce plongement est discuté en plus de détails dans l'annexe du dernier chapitre de cette thèse.

#### 1.4. EXTENSION SUPERSYMMÉTRIQUE DES MODÈLES SIGMA $\mathbb{C}P^{n-1}$

La technique la plus directe pour introduire les théories supersymétriques est via les notions de superspaces et de superchamps [31, 32, 33, 34]. Les modèles considérés [6, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41], dans cette thèse, sont construits sur des superspaces de dimension 2,  $(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2)$  où  $(x_1, x_2)$  sont des coordonnées locales sur  $\mathbb{R}^2$  et  $(\theta_1, \theta_2)$  est un spineur de Majorana. Dans ce cas, nous considérons  $\theta_1$  et  $\theta_2$  comme étant "réels" [31, 33], et ils satisfont les relations

$$\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1 = 0, \quad \theta_1^2 = \theta_2^2 = 0. \quad (1.4.1)$$

On parle d'une supersymétrie  $\mathcal{N} = 2$ . Tout comme pour les modèles bosoniques, nous sommes intéressés par des solutions holomorphes et non-holomorphes, il est donc préférable de considérer un superspace complexe  $(x_+, x_-, \theta_+, \theta_-)$  où

$$x_{\pm} = x_1 \pm ix_2, \quad \theta_{\pm} = \theta_1 \pm i\theta_2. \quad (1.4.2)$$



Une supersymétrie est considérée comme une supertranslation [31, 32, 33, 34] dans le superspace et est donnée par les transformations suivantes:

$$x_+ \longrightarrow x_+ + \epsilon_+ \theta_+, \quad \theta_+ \longrightarrow \theta_+ + i\epsilon_+, \quad (1.4.3)$$

$$x_- \longrightarrow x_- + \theta_- \epsilon_-, \quad \theta_- \longrightarrow \theta_- - i\epsilon_-, \quad (1.4.4)$$

où  $\epsilon_{\pm}$  sont des paramètres complexes fermioniques. Nous trouvons les générateurs de supersymétrie par l'action de ces transformations sur un champ défini sur le superspace. Nous avons, par exemple,

$$\psi(x_+, \theta_+) \longrightarrow \psi(x_+ + \epsilon_+ \theta_+, \theta_+ + i\epsilon_+) = (1 + \epsilon_+ \check{Q}_+) \psi(x_+, \theta_+), \quad (1.4.5)$$

où  $\check{Q}_+ = i\partial_{\theta_+} + \theta_+ \partial_+$  et, par un raisonnement analogue, on trouve que  $\check{Q}_- = i\partial_{\theta_-} + \theta_- \partial_-$ . Les générateurs (les supercharges) de supersymétrie  $\check{Q}_+$  et  $\check{Q}_-$  anti-commutent, respectivement, avec les opérateurs

$$\check{\partial}_+ = -i\partial_{\theta_+} + \theta_+ \partial_+, \quad \check{\partial}_- = -i\partial_{\theta_-} + \theta_- \partial_- \quad (1.4.6)$$

qui seront définis comme les superdérivées pour nos modèles. Notons que puisque ces superdérivées anti-commutent avec les générateurs de supersymétrie, elles sont également génératrices de cette supersymétrie. Pour mettre en valeur que les supersymétries sont des symétries entre des degrés de liberté bosoniques et fermioniques, posons  $\psi = u + i\theta_+ \xi$  pour  $u$  une quantité bosonique et  $\xi$  une quantité fermionique dans la transformation (1.4.5). Nous observons ainsi que

$$\delta u = -\epsilon_+ \xi, \quad \delta \xi = i\epsilon_+ \partial_+ u. \quad (1.4.7)$$

### 1.4.1. Discussion générale

Après ces quelques éléments introductifs, introduisons l'extension supersymétrique des modèles sigma  $\mathbb{C}P^{n-1}$  [6, 35, 36, 38]. Nous considérons un superchamp  $\Phi$  défini sur le superspace  $(x_+, x_-, \theta_+, \theta_-)$  et, par un développement de Taylor autour de  $\theta_+ = \theta_- = 0$ , il peut être représenté par

$$\Phi = z(x_+, x_-) + i\theta_+ \chi_+(x_+, x_-) + i\theta_- \chi_-(x_+, x_-) - \theta_+ \theta_- F(x_+, x_-). \quad (1.4.8)$$

Dans cette représentation,  $u$  et  $F$  sont des vecteurs bosoniques à  $n$  composantes des variables  $(x_+, x_-)$ , et  $\chi_+$  et  $\chi_-$  sont des vecteurs fermioniques à  $n$  composantes des variables  $(x_+, x_-)$ . On dit que  $\Phi$  est un superchamp bosonique. Ce superchamp a pour espace-cible la super-variété grassmannienne  $\mathbb{C}P^{n-1}$ . Comme pour les modèles bosoniques, nous exigeons que les modèles supersymétriques soient invariants de jauge par rapport aux groupes local  $U(1)$  et global  $U(n)$ . Nous devons, ainsi, construire des dérivées supercovariantes qui se transforment de façon

covariante sous les changements de phase. Ces dérivées sont données par

$$\check{D}_\pm \Lambda = \check{\partial}_\pm \Lambda - \Lambda A_\pm, \quad (1.4.9)$$

où  $A_\pm$  sont des champs de jauge décrits par des matrices réelles fermioniques de format  $1 \times 1$ . La dynamique du champ  $\Phi$  est déterminée par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = 2(|\check{D}_+ \Phi|^2 - |\check{D}_- \Phi|^2), \quad (1.4.10)$$

où la présence du signe moins s'explique par le fait que nous voulons que le modèle se réduise au modèle bosonique lorsque  $\chi_\pm, F \rightarrow 0$ . Cette propriété doit être respectée afin de construire une extension supersymétrique d'un modèle bosonique. Pour la conjugaison, nous prenons comme définition [31, 33]

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger &= z^\dagger - i\chi_+^\dagger \theta_+^* - i\chi_-^\dagger \theta_-^* - F^\dagger \theta_-^* \theta_+^*, \\ &= z^\dagger + i\theta_- \chi_+^\dagger + i\theta_+ \chi_-^\dagger - \theta_+ \theta_- F^\dagger \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

et  $|\Phi|^2 = \Phi^\dagger \Phi$ . Dans les produits, l'ordre a de l'importance étant donné que certaines quantités anti-commutent entre elles. Le superchamp  $\Phi$  a pour espace-cible la super-variété  $\mathbb{C}P^{n-1}$  et doit, conséquemment, satisfaire la contrainte

$$\Phi^\dagger \Phi = 1, \quad (1.4.12)$$

qui, en fonction des composantes, s'écrit

$$|z|^2 = 1, \quad z^\dagger \chi_+ + \chi_-^\dagger z = 0, \quad z^\dagger F + F^\dagger z = |\chi_-|^2 - |\chi_+|^2. \quad (1.4.13)$$

Nous sommes maintenant prêts à donner les équations d'Euler-Lagrange associées à ce modèle en considérant, tout comme le modèle bosonique, la densité lagrangienne [6]

$$\mathcal{L}_\lambda = 2(|\check{D}_+ \Phi|^2 - |\check{D}_- \Phi|^2 + \lambda(\Phi^\dagger \Phi - 1)), \quad (1.4.14)$$

où le paramètre  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange satisfaisant  $\lambda^\dagger = \lambda$  introduit pour renforcer la contrainte  $\Phi^\dagger \Phi = 1$ . La variation de la densité lagrangienne par rapport au multiplicateur de Lagrange donne la contrainte (1.4.12). En explicitant la densité lagrangienne  $\mathcal{L}_\lambda$ , nous obtenons (modulo un facteur 2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda &= |\check{\partial}_+ \Phi|^2 - |\check{\partial}_- \Phi|^2 + A_+(\check{\partial}_+ \Phi)^\dagger \Phi - A_-(\check{\partial}_- \Phi)^\dagger \Phi - A_+^\dagger \Phi^\dagger \check{\partial}_+ \Phi \\ &+ A_-^\dagger \Phi^\dagger \check{\partial}_- \Phi + |\Phi|^2(|A_+|^2 - |A_-|^2) + \lambda(|\Phi|^2 - 1). \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

La variation de la densité lagrangienne par rapport aux champs de jauge  $A_\pm$  donne

$$A_\pm = \Phi^\dagger \check{\partial}_\pm \Phi. \quad (1.4.16)$$

La contrainte (1.4.12) implique que les champs de jauge satisfont la relation

$$A_+^\dagger = -A_- . \quad (1.4.17)$$

Cette relation sera utilisée pour déduire les équations d'Euler-Lagrange pour le champ  $\Phi$ . À cet égard, la variation par rapport au champ  $\Phi$  est plus complexe, étant donné le caractère anti-commutatif de certaines quantités. Il faut ainsi faire usage de prudence. Nous avons

$$\check{\partial}_- \check{\partial}_+ \Phi - \check{\partial}_- A_+ \Phi + A_+ \check{\partial}_- \Phi - \check{\partial}_+ \Phi A_+^\dagger + \check{\partial}_- \Phi A_-^\dagger - \Phi (|A_+|^2 - |A_-|^2) - \lambda \Phi = 0. \quad (1.4.18)$$

Afin de trouver une expression pour le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  multiplions cette équation par  $\Phi^\dagger$ . Nous obtenons, en utilisant la contrainte (1.4.12) et les relations (1.4.16) et (1.4.17),

$$\lambda = A_+ A_- - \check{\partial}_- \Phi^\dagger \check{\partial}_+ \Phi = -|\check{D}_+ \Phi|^2. \quad (1.4.19)$$

En retournant à l'équation de départ, elle se réduit à

$$\check{D}_- \check{D}_+ \Phi + |\check{D}_+ \Phi|^2 \Phi = 0. \quad (1.4.20)$$

Ces équations (avec (1.4.12)) sont connues comme les équations d'Euler-Lagrange de l'extension supersymétrique des modèles sigma  $\mathbb{C}P^{n-1}$  [6, 36, 38].

Comme nous sommes intéressés par les solutions à action finie de ces équations, nous choisissons les conditions frontières suivantes [6, 41]:

$$\check{D}_\pm \Phi \longrightarrow 0, \quad |x| \longrightarrow \infty. \quad (1.4.21)$$

Comme discuté dans l'introduction, certains auteurs [6, 36, 37, 39, 40, 41] se sont intéressés à résoudre les équations d'Euler-Lagrange (1.4.20). Une de ces techniques repose sur la résolution de l'équation de Dirac linéarisée qui sans aucun doute est la technique la plus utilisée dans la littérature. La seconde [38] repose sur l'interprétation des contributions fermioniques comme des quantités commutantes appelées des  $c$ -nombres. Nous jugeons bon de discuter de cette deuxième approche en plus de détails, car celle-ci reviendra dans le dernier chapitre de cette thèse.

Cette technique permet d'utiliser un algorithme analogue au cas bosonique pour résoudre les équations d'Euler-Lagrange dans toute leur généralité. Il repose sur l'orthogonalisation des champs holomorphes suivants:

$$f, \quad \epsilon_+^{(1)} \check{\partial}_+ f, \quad \check{\partial}_+^2 f, \quad \epsilon_+^{(3)} \check{\partial}_+^3 f, \quad \dots, \quad (1.4.22)$$

où  $\epsilon_+^{(j)}$  sont des constantes complexes fermioniques. Les constantes fermioniques sont choisies complexes pour assurer que  $|\epsilon_+^{(j)}| = \sqrt{\epsilon_-^{(j)} \epsilon_+^{(j)}} \neq 0$  et les termes

$\epsilon_-^{(j)} \epsilon_+^{(j)}$  sont considérés comme des c-nombres (n'en demeure qu'ils sont également nilpotents). De plus, en utilisant la propriété

$$\sqrt{\gamma_0 + i\theta_+ \gamma_1} = \sqrt{\gamma_0} + i\theta_+ \frac{\gamma_1}{2\sqrt{\gamma_0}}, \quad \text{pour } \gamma_0 \neq 0, \quad (1.4.23)$$

les auteurs ont fait le choix canonique  $\sqrt{\epsilon_-^{(j)} \epsilon_+^{(j)}} = 1$ . Ici,  $\gamma_0 = \epsilon_-^{(j)} \epsilon_+^{(j)} \neq 0$  est considéré comme un c-nombre indépendant des variables de Grassmann  $\theta$ . Certaines considérations physiques d'un tel choix ont été soulevées notamment dû au fait que bien que  $\epsilon_-^{(j)} \epsilon_+^{(j)}$  soit un c-nombre, il en demeure nilpotent *i.e.*  $(\epsilon_-^{(j)} \epsilon_+^{(j)})^2 = 0$ . L'inversibilité d'un tel c-nombre est donc remise en doute. Faisant abstraction de ces considérations, les auteurs ont démontré que les quantités

$$Z_c^i = \frac{\epsilon_+^i \check{P}_+^i f}{|\epsilon_+^i \check{P}_+^i f|} \quad (1.4.24)$$

solutionnaient formellement les équations d'Euler-Lagrange où

$$\check{P}_+ f = \check{\partial}_+ f - \frac{f^\dagger \check{\partial}_+ f}{|f|^2} f. \quad (1.4.25)$$

Dans le chapitre 4, nous n'adopterons pas cette méthode et nous considérerons les c-nombres  $\epsilon_-^i \epsilon_+^i$  comme non-inversibles.

### 1.4.2. Formalisme en fonction de projecteurs orthogonaux

Pour introduire le formalisme en fonction des projecteurs orthogonaux, nous procédons comme dans le cas bosonique. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 2(|\check{D}_+ \Phi|^2 - |\check{D}_- \Phi|^2) = 2\Phi^\dagger \Phi (|\check{D}_+ \Phi|^2 - |\check{D}_- \Phi|^2) \\ &= 2\text{Tr} [\Phi (|\check{D}_+ \Phi|^2 - |\check{D}_- \Phi|^2) \Phi^\dagger] \\ &= 2\text{Tr} [(\check{\partial}_+ \mathbb{P})^\dagger (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \check{\partial}_+ \mathbb{P} - (\check{\partial}_- \mathbb{P})^\dagger (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \check{\partial}_- \mathbb{P}], \end{aligned}$$

où  $\mathbb{P} = \Phi \Phi^\dagger$  est un projecteur orthogonal de rang 1. Un calcul direct démontre que

$$(\check{\partial}_\pm \mathbb{P})^\dagger \mathbb{P} \check{\partial}_\pm \mathbb{P} = \check{D}_\mp \Phi (\check{D}_\mp \Phi)^\dagger \implies \text{Tr} (\check{\partial}_\pm \mathbb{P})^\dagger \mathbb{P} \check{\partial}_\pm \mathbb{P} = -|\check{D}_\mp \Phi|^2. \quad (1.4.26)$$

Ainsi nous obtenons

$$\mathcal{L} = 2\text{Tr} [(\check{\partial}_+ \mathbb{P})^\dagger (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \check{\partial}_+ \mathbb{P} - (\check{\partial}_- \mathbb{P})^\dagger (\mathbb{I} - \mathbb{P}) \check{\partial}_- \mathbb{P}] = 4\text{Tr} [\check{\partial}_- \mathbb{P} \check{\partial}_+ \mathbb{P}] - \mathcal{L}. \quad (1.4.27)$$

Finalement, la densité lagrangienne, en fonction des projecteurs orthogonaux  $\mathbb{P}$ , est donnée par [41]

$$\mathcal{L} = 2\text{Tr} [\check{\partial}_- \mathbb{P} \check{\partial}_+ \mathbb{P} + \lambda(\mathbb{P}^2 - \mathbb{P})], \quad (1.4.28)$$

où nous avons introduit un multiplicateur de Lagrange (hermitien) pour renforcer la contrainte d'orthogonalité des projecteurs. Avant de poursuivre, nous devons démontrer l'identité suivante, afin de déterminer les équations d'Euler-Lagrange,

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial \Xi} \text{Tr}(\Xi \Pi) = \Pi^T \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \Xi} \text{Tr}(\Pi \Xi) = -\Pi^T, \quad (1.4.29)$$

où  $\Xi$  et  $\Pi$  sont des matrices à entrées fermioniques (anti-commutantes) de format, respectivement,  $n \times m$  et  $m \times n$ . Nous avons, en effet, que

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial}{\partial \Xi_{ij}} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \Xi_{lk} \Pi_{kl} = \Pi_{ji} \quad \Longrightarrow \quad \Gamma = \Pi^T \quad (1.4.30)$$

et, en plus,

$$\text{Tr}(\Xi \Pi) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m \Xi_{lk} \Pi_{kl} = - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \Pi_{kl} \Xi_{lk} = -\text{Tr}(\Pi \Xi). \quad (1.4.31)$$

Ainsi, en retournant à la densité lagrangienne, nous voyons qu'une variation par rapport à  $\lambda$  donne la propriété d'orthogonalité aux projecteurs  $\mathbb{P}$ . D'un autre côté, la variation par rapport à  $\mathbb{P}$  engendre l'équation

$$2\check{\partial}_- \check{\partial}_+ \mathbb{P} - \mathbb{P} \lambda - \lambda \mathbb{P} + \lambda = 0. \quad (1.4.32)$$

Nous obtenons, tout comme dans le modèle bosonique, deux équations en multipliant par  $\mathbb{P}$  par la gauche et ensuite par la droite:

$$2\mathbb{P} \check{\partial}_- \check{\partial}_+ \mathbb{P} - \mathbb{P} \lambda \mathbb{P} = 0, \quad 2\check{\partial}_- \check{\partial}_+ \mathbb{P} \mathbb{P} - \mathbb{P} \lambda \mathbb{P} = 0. \quad (1.4.33)$$

La soustraction de ces deux dernières équations donne les équations d'Euler-Lagrange du modèle [40, 41]

$$[\check{\partial}_- \check{\partial}_+ \mathbb{P}, \mathbb{P}] = 0, \quad \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}. \quad (1.4.34)$$

Nous voulons mettre de l'emphase, ici, sur la différence entre ces équations et les équations obtenues pour les modèles non-supersymétriques (1.2.25). Les équations se distinguent par la présence des super-dérivées  $\check{\partial}_\pm$  qui satisfont

$$\check{\partial}_\pm^2 = -i\partial_\pm. \quad (1.4.35)$$

Dans le chapitre 4, nous utilisons cette relation pour établir une connexion entre les modèles supersymétrique et bosonique. Cette connexion est aussi utilisée pour construire des surfaces issues des solutions du modèle supersymétrique  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .

Ceci conclut le chapitre des éléments préliminaires et nous utiliserons à profusion ces résultats dans les prochains chapitres.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] A. Zee *Quantum Field Theory in a Nutshell, Second Edition* (New Jersey: Princeton University Press, 2010)
- [2] P. Ramond *Field Theory: a Modern Primer* (Reading, MA: Benjamin-Cummings, 1981).
- [3] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*. (Cambridge University Press, New York, 2004).
- [4] B. de Wit *Lecture notes in field theory in physics* Chapter 12: Non-abelian gauge theories, University of Utrecht, The Netherlands.
- [5] Warner, F. W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups* (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [6] W.J. Zakrzewski, *Low Dimensional Sigma Models* (Hilger, Bristol, 1989).
- [7] C. N. Yang and R. L. Mills (1954) Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.* **96**, 191.
- [8] A. J. Macfarlane (1979) Generalization of  $\sigma$  models and  $\mathbb{C}P^N$  models, and instantons. *Phys. Lett. B* **82**, 239.
- [9] A. D’Adda, P. Di Vecchia and M. Luscher (1978) A  $1/N$  expandable series of non-linear  $\sigma$  models with instantons. *Nucl. Phys. B* **146**, 63.
- [10] A. M. Din and W. J. Zakrzewski (1980) Properties of the general classical solutions of the  $\mathbb{C}P^{N-1}$  model. *Phys. Lett. B* **95**, 419.
- [11] A. M. Din and W. J. Zakrzewski (1984) Further properties of classical solutions in Grassmannian  $\sigma$  model. *Nucl. Phys. B* **237**, 461.
- [12] Gray, A. *Modern differential geometry of curves and surfaces* (CRC Press, Florida, 1993).
- [13] K. B. Petersen and M. S. Pedersen (2006) *The Matrix Cookbook*.
- [14] S. Post and A. M. Grundland (2012) Analysis of  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma models via projective structures. *Nonlinearity* **25** 1–36.
- [15] L. Delisle, V. Hussin and W. J. Zakrzewski (2013) Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models:(2) Non-holomorphic solutions. *Journal of Geometry and Physics* **71**, 1–10.

- [16] L. Delisle, V. Hussin and W.J. Zakrzewski (2013) Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models: (1) Holomorphic solutions. *Journal of Geometry and Physics* **66**, 24–36.
- [17] B. Konopelchenko and I. Taimanov (1996) Constant mean curvature surfaces via an integrable dynamical system. *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 1261–1265.
- [18] R. Carroll and B. Konopelchenko (1996) Generalized Weierstrass-Enneper inducing conformal immersions and gravity. *Int. J. Mod. Phys. A* **11**, 1183–1216.
- [19] B. Konopelchenko and G. Landolfi (1999) Generalized Weierstrass representation for surfaces in multi-dimensional Riemannian spaces. *Stud. Appl. Maths.* **104**, 129–169.
- [20] F. Hélein, *Constant Mean Curvature Surfaces, Harmonic Maps and Integrable Systems* (Birkhäuser, Basel, 2001).
- [21] A. M. Grundland, A. Strasburger and W. J. Zakrzewski (2006) Surfaces immersed in  $su(N + 1)$  Lie algebras obtained from the  $\mathbb{C}P^N$  sigma models. *J. Phys. A* **39** 9187–9214.
- [22] Arnold, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics (second edition)* (Springer-Verlag, New York, 1989).
- [23] P. P. Goldstein and A. M. Grundland (2010) Invariant recurrence relations for  $\mathbb{C}P^{N-1}$  models. *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 265206.
- [24] V. Hussin, I. Yurduşen and W.J. Zakrzewski (2010) Canonical surfaces associated with projectors in Grassmannian sigma models. *J. Math. Phys* **51**, 103509.
- [25] Bolton J., Jensen G. R., Rigoli M. and Woodward L. M. (1988) On conformal minimal immersions of  $S^2$  into  $\mathbb{C}P^n$ , *Math. Ann.* **279**, 599–620.
- [26] F. Jie, J. Xiaoxiang and X. Xiaowei (2011) Construction of homogeneous minimal 2-spheres in complex Grassmannians. *Acta Mathematica Scientia* **31**, 1889–1898.
- [27] X. X. Jiao and J. G. Peng (2003) Pseudo-holomorphic curves in complex Grassmann manifolds. *Transaction of the American Mathematical Society* **355**, 3715–3726.
- [28] X. X. Jiao and J. G. Peng (2004) Classification of holomorphic two-spheres with constant curvature in the complex Grassmannians  $G_{2,5}$ . *Differential Geometry and its Applications* **20**, 267–277.
- [29] C. Peng and X. Xu (2014) Minimal two-spheres with constant curvature in the complex Grassmannians. To be published in *Israel Journal of Mathematics*.
- [30] C. Peng and X. Xu (2014) Classification of minimal homogeneous two-spheres in the complex Grassmann manifold  $G(2, n)$ . To be published in *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.
- [31] B. DeWitt *Supermanifolds* (New York: Cambridge University Press, 1984)
- [32] B. Zumino (1979) Supersymmetry and kahler manifolds. *Phys. Lett. B* **87**, 203–206.
- [33] F. Berezin *The Method of Second Quantization* (New York: Academic, 1966)

- [34] Cornwell, J. F. 1989 *Group Theory in Physics: Supersymmetries and Infinite-Dimensional Algebras (Techniques of Physics vol 3)* (New York: Academic).
- [35] E. Witten (1977) Supersymmetric form of the nonlinear sigma model in two dimensions. *Phys. Rev. D* **16**, pp. 2991-2994.
- [36] A. D'Adda, M. Luscher and P. Di Vecchia (1979) Confinement and chiral symmetry breaking in  $CP^{N-1}$  models with quarks. *Nucl. Phys.*, **B 152**, pp. 125-144.
- [37] K. Fujii, T. Koikawa and R. Sasaki (1984) Classical solutions for supersymmetric Grassmannian sigma models in two dimensions. I. *Prog. Theor. Phys.* **71**, pp. 388-394.
- [38] A. M. Din, J. Lukierski and W. J. Zakrzewski (1982) General classical solutions of a supersymmetric non-linear coupled boson-fermion model in two dimensions, *Nuclear Physics B* **194**, 157-171.
- [39] U. Lindström (2012) Supersymmetric Sigma Model Geometry. *Symmetry* **4**, 474-506.
- [40] V. Hussin and W.J. Zakrzewski (2006) Susy  $CP^{N-1}$  model and surfaces in  $\mathbb{R}^{N^2-1}$ . *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 14231.
- [41] L. Delisle, V. Hussin, İ. Yurduşen and W. J. Zakrzewski (2014) Constant curvature surfaces of the supersymmetric  $CP^{N-1}$  sigma model. *To be submitted to Communications in Mathematical Physics*.





## Chapter 2

---

# CONSTANT CURVATURE SOLUTIONS OF GRASSMANNIAN SIGMA MODELS: (1) HOLOMORPHIC SOLUTIONS

Auteurs: L. Delisle, V. Hussin et W. J. Zakrzewski

Référence: Journal of Geometry and Physics **66** (2013), 24–36

### Résumé

Cet article présente un algorithme systématique pour construire des applications holomorphes à courbure constante de la 2-sphère dans des variétés grassmanniennes  $G(m, n)$ . Notre algorithme nous amène à établir deux conjectures sur les valeurs possibles de cette courbure. Nous démontrons les conjectures dans les cas spéciaux  $G(2, 4)$ ,  $G(2, 5)$ , présentons les formules explicites d'applications holomorphes et démontrons qu'elles correspondent avec celles obtenues par des méthodes différentes. Nous faisons quelques commentaires sur les applications ayant pour espace cible les variétés grassmanniennes  $G(2, n)$  pour  $n \geq 6$ .

### Abstract

We present a general procedure for constructing constant curvature holomorphic maps of 2-spheres into Grassmannian manifolds  $G(m, n)$ . Our procedure allows us to make a couple of conjectures as to the possible values of this curvature. We prove our conjectures for  $G(2, 4)$ ,  $G(2, 5)$ , present explicit formulae for the relevant maps and show that they agree with those found by other methods. We also make some comments about the maps into  $G(2, n)$  for  $n \geq 6$ .

## 2.1. INTRODUCTION

Just over 10 years ago Li and Yu discussed, in a very interesting paper [1], the classification of minimal 2-spheres with constant Gaussian curvature (called 'curvature' in this paper) immersed in the complex Grassmannian manifold  $G(2, 4)$ .

The classification of Li and Yu came in the form of two theorems (named A and B in their paper). Theorem A discussed the holomorphic case and it showed that only four constant curvatures were possible. There are given as  $\mathcal{K} = 4, 2, \frac{4}{3}$  and 1. Moreover, their paper also gave explicit examples of such holomorphic immersions. Theorem B described non-holomorphic immersions which correspond to  $\mathcal{K} = 2, 1, \frac{2}{3}$  and  $\frac{2}{5}$ .

Since the appearance of this paper many other papers have also been written. In particular, a classification of holomorphic spheres with constant curvature has also been produced [2] for  $G(2, 5)$ . Other contributions by the same authors, and other authors, have mostly dealt with non-holomorphic immersions [3, 4, 5] for  $G(2, n)$ .

Having recently looked [6] at the construction of higher-dimensional surfaces based on harmonic maps of  $S^2$  into  $\mathbb{C}P^{n-1}$  and other Grassmannian manifolds we have tried to understand the theorems of Li and Yu using our approach. The non-holomorphic maps (Theorem B) were relatively easy to understand by taking, for examples, pairs of maps [6] from the Veronese sequence. This, however, was not the case for the holomorphic maps (Theorem A).

Motivated by this task we have started thinking about the explicit expressions for the curvatures of the holomorphic immersions. This has lead to the expressions given in the next section and they, in turn, provide us with an explicit algorithmic procedure for the construction of all constant curvature immersions in complex Grassmannian manifolds  $G(m, n)$ . When we apply this procedure to  $G(2, 4)$  we recover the results [1] of Li and Yu. We have also retrieved, in a way that will be clarified in the paper, the results of Jiao and Peng [2].

In Section 2, we present the general formulae for the curvature of holomorphic immersions into  $G(m, n)$ . Two different parametrizations of the solutions are introduced. In section 3, we discuss such immersions for the case of constant curvature. Some of them are related to the Veronese curves in  $G(m, n)$  and we conjecture that the Veronese curves give rise to the smallest possible curvatures. All admissible curvatures for holomorphic solutions are then discussed and we make a second conjecture. Section 4 is devoted to the case of  $G(2, n)$  where our conjectures are partially proved and where the cases  $G(2, 4)$  and  $G(2, 5)$  are

discussed in detail. We also discuss the case of  $G(2, 6)$  and make some comments about  $G(2, n)$  for  $n \geq 7$ .

## 2.2. ENERGY DENSITY AND CURVATURE OF HOLOMORPHIC IMMERSIONS OF 2-SPHERES INTO GRASSMANNIAN MANIFOLDS

### 2.2.1. General discussion

Let us consider maps of  $S^2$  into Grassmannian manifold  $G(m, n)$ ,  $n > m$ . One way of thinking about such maps involves treating them as fields of  $U(m, n)$   $\sigma$  models [7]. Thus we consider  $n \times m$  complex fields put in an array  $Z = \{Z_{\alpha, a}, \alpha = 1, 2, \dots, n, a = 1, \dots, m\}$  (note the order of indices). These fields are subject to the constraint

$$Z^\dagger Z = \mathbb{I}_m, \quad (2.2.1)$$

where  $\mathbb{I}_m$  is the  $m \times m$  unit matrix. The fields transform as

$$Z \longrightarrow Z' = VZU \quad (2.2.2)$$

under global  $V \in U(n)$  and local  $U \in U(m)$  transformations.

Then one introduces  $U(m)$  matrix valued gauge fields  $A_\mu$ , which transform as

$$A_\mu \longrightarrow U^\dagger A_\mu U - iU^\dagger \partial_\mu U \quad (2.2.3)$$

and uses them to construct gauge covariant derivatives

$$D_\mu Z = \partial_\mu Z - iZ A_\mu. \quad (2.2.4)$$

Here  $\mu$  stands for the index of  $x_1$  and  $x_2$ —two local coordinates in the Euclidean space  $\mathbb{R}^2$ .

Then keeping the constraint (2.2.1) and defining the gauge fields in terms of  $Z$  and its derivatives

$$iA_\mu = Z^\dagger \partial_\mu Z, \quad (2.2.5)$$

we define the Lagrangian density ("energy"—in the harmonic map literature) as

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{Tr}(D_\mu Z)^\dagger D_\mu Z. \quad (2.2.6)$$

The stationarity of the corresponding action  $S = 4 \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L} dx_1 dx_2$  leads to the Euler-Lagrange equations

$$D_\mu D_\mu Z + Z(D_\mu Z)^\dagger (D_\mu Z) = 0, \quad (2.2.7)$$

where  $x_1$  and  $x_2$  are our local coordinates. The model described by (2.2.6) and (2.2.7) is the so-called two-dimensional  $U(m, n)$  Grassmannian  $\sigma$  model.

What are the boundary conditions for the field  $Z$ ? As we are interested in the maps of  $S^2$  into the Grassmannians we have to compactify  $\mathbb{R}^2$ . This we do by adding a point at  $\infty$  and this 'chooses' for us the boundary conditions:

$$D_\mu Z \longrightarrow 0, \quad \text{as } \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \longrightarrow \infty \quad (2.2.8)$$

sufficiently fast so that the action  $S$  is finite. Then our maps are maps of 2-spheres into Grassmannians with appropriate topological properties (see *i.e.* [7]).

Next we introduce the complex variables and the corresponding derivatives in our Euclidean space  $\mathbb{R}^2$  by defining

$$x_\pm = x_1 \pm ix_2, \quad \partial = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2}), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2}). \quad (2.2.9)$$

In these coordinates, the Lagrangian density is given by

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (DZ)^\dagger DZ + (\bar{D}Z)^\dagger \bar{D}Z \right], \quad (2.2.10)$$

and the Euler-Lagrange equations take the form

$$\bar{D}DZ + Z(DZ)^\dagger DZ = 0. \quad (2.2.11)$$

Using the invariance properties of the theory, we can introduce two different parametrizations of the matrix field  $Z$ . The first one [8], called Macfarlane parametrization, is given by

$$Z = \hat{Z}\hat{L} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m \\ K \end{pmatrix} \hat{L}, \quad (2.2.12)$$

where  $K$  is an  $(m-n) \times m$  matrix and  $\hat{L}$  is an  $m \times m$  matrix, which due to (2.2.1) satisfy

$$\hat{L}^\dagger (K^\dagger K + \mathbb{I}_m) \hat{L} = \mathbb{I}_m \quad \text{or} \quad K^\dagger K + \mathbb{I}_m = (\hat{L}\hat{L}^\dagger)^{-1}. \quad (2.2.13)$$

Since the  $m \times m$  matrix  $(\hat{L}\hat{L}^\dagger)$  is clearly hermitian and strictly positive definite, its inverse exists and we define it as  $\hat{M}$  such that

$$\hat{M} = (\hat{L}\hat{L}^\dagger)^{-1} = \mathbb{I}_m + K^\dagger K = \hat{Z}^\dagger \hat{Z}. \quad (2.2.14)$$

Then [8], if  $K$  is holomorphic, *i.e.*  $\bar{\partial}K = 0$  the corresponding  $Z$  satisfies the Euler-Lagrange equations (2.2.11) for the Lagrangian (2.2.10). Such fields correspond to the holomorphic immersions of  $S^2$  into the Grassmannian manifold  $G(m, n)$ .

The second parametrization [7], called orthogonalized parametrization, corresponds to putting

$$Z = \tilde{Z}\tilde{L}, \quad (2.2.15)$$

where  $\tilde{Z}$  is a holomorphic  $n \times m$  matrix obtained from a set of linearly independent holomorphic vectors  $f_1, \dots, f_m$  and  $\tilde{L}$  is an  $m \times m$  matrix. Due to (2.2.1) we obtain

$$\tilde{M} = (\tilde{L}\tilde{L}^\dagger)^{-1} = \tilde{Z}^\dagger \tilde{Z}, \quad (2.2.16)$$

a relation which is similar to (2.2.14).

### 2.2.2. Energy density and curvature

As holomorphic immersions satisfy  $\bar{\partial}\hat{Z} = 0$  (or  $\bar{\partial}K = 0$ ), for them the Lagrangian (2.2.10) takes the form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr}(DZ)^\dagger DZ. \quad (2.2.17)$$

Let us now use the Macfarlane parametrization (2.2.12) to calculate (2.2.17). First we look at the case of the  $\mathbb{C}P^{n-1}$  fields in which  $\hat{Z}$  is a  $n$  component vector. In this case, we have

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{|\partial\hat{Z}|^2}{|\hat{Z}|^2} - \frac{|\hat{Z}^\dagger \partial\hat{Z}|^2}{|\hat{Z}|^4} \right). \quad (2.2.18)$$

However, given that  $\bar{\partial}\hat{Z} = 0$  (and so  $\partial\hat{Z}^\dagger = 0$ ) this can be rewritten as

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\bar{\partial}|\hat{Z}|^2}{|\hat{Z}|^2} - \frac{\bar{\partial}|\hat{Z}|^2 \partial|\hat{Z}|^2}{|\hat{Z}|^4} \right) \quad (2.2.19)$$

and finally

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial \left( \frac{\bar{\partial}|\hat{Z}|^2}{|\hat{Z}|^2} \right) = \frac{1}{4} \partial (\bar{\partial} \ln |\hat{Z}|^2). \quad (2.2.20)$$

We consider now the general Grassmannian manifold  $G(m, n)$  described by the field (2.2.12). It is easy to check that in this case the two terms in (2.2.18) are replaced by (up to an overall factor  $\frac{1}{2}$ )

$$\text{Tr} \left( \bar{\partial}\hat{Z}^\dagger \partial\hat{Z} \hat{M}^{-1} - (\partial\hat{Z})^\dagger \hat{Z} \hat{M}^{-1} \hat{Z}^\dagger (\partial\hat{Z}) \hat{M}^{-1} \right), \quad (2.2.21)$$

where  $\hat{M}$  is given by (2.2.14). However, using the property that  $\partial\hat{Z}^\dagger = \bar{\partial}\hat{Z} = 0$  we can rewrite (2.2.21) as

$$\partial \text{Tr}(\hat{M}^{-1} \bar{\partial}\hat{M}). \quad (2.2.22)$$

As expected, in the  $\mathbb{C}P^{n-1}$  case, this reduces to (2.2.20).

Next we show that (2.2.22) is given by  $\partial\bar{\partial} \ln \det \hat{M}$ . Indeed, since  $\hat{M}^{-1} = (\det \hat{M})^{-1} \text{adj}(\hat{M})$ , we obtain

$$\text{Tr}(\hat{M}^{-1} \bar{\partial}\hat{M}) = \frac{1}{\det \hat{M}} \sum_{i,j=1}^m \text{adj}(\hat{M})_{ij} \bar{\partial}\hat{M}_{ji}. \quad (2.2.23)$$

But  $\text{Tr}(\hat{M})\text{adj}(\hat{M}) = m \det \hat{M}$  and it is easy to check that (for  $m > 1$ )  $\text{Tr}(\bar{\partial}\text{adj}(\hat{M})\hat{M}) = (m - 1)\text{Tr}(\text{adj}(\hat{M})\bar{\partial}\hat{M})$  (as all the minors in  $\text{adj}(\hat{M})$  involve products of  $m - 1$  terms).

Finally, putting everything together we see that for the holomorphic embeddings the Lagrangian becomes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial\bar{\partial}\ln \det \hat{M} \quad (2.2.24)$$

and the associated curvature is given by (see *e.g.* [9])

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{\mathcal{L}}\partial\bar{\partial}\ln \mathcal{L}. \quad (2.2.25)$$

Here, it is worth noticing that the choice of the parametrization of  $Z$ , (*i.e.* using (2.2.12) or (2.2.15)), does not affect the proof of this result since the only assumption used in its derivation has been the fact that  $\hat{Z}$  or  $\tilde{Z}$  is holomorphic. In the case (2.2.12), the Lagrangian is given by (2.2.24) with

$$\det \hat{M} = |\det \hat{L}|^{-2} = \det(\mathbb{I}_m + K^\dagger K), \quad (2.2.26)$$

while for the case (2.2.15), the Lagrangian is given by (see *e.g.* [9])

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial\bar{\partial}\ln \det \tilde{M} \quad (2.2.27)$$

with

$$\det \tilde{M} = |\det \tilde{L}|^{-2}. \quad (2.2.28)$$

### 2.2.3. Orthogonalized parametrization and a wedge product

Let us here explain the choice of the parametrization (2.2.15) and its name. In  $\tilde{M}$ , the matrix  $\tilde{L}$  may be chosen triangular since we start from holomorphic linearly independent vectors  $f_1, \dots, f_m$  that we orthonormalize to obtain  $Z$ . Indeed, the matrix  $\tilde{L} = \{l_{ij}, i, j = 1, \dots, m\}$  is thus given as

$$\begin{cases} l_{ii} = \frac{1}{|\tilde{f}_i|} & i = 1, \dots, m, \\ l_{ij} = -\frac{1}{|\tilde{f}_j|} \frac{f_i^\dagger f_j}{|\tilde{f}_i|^2} & i < j, \\ l_{ij} = 0 & i > j, \end{cases} \quad (2.2.29)$$

where the vectors  $\tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_m$  are obtained from  $f_1, \dots, f_m$  by the well-known Gram-Schmidt orthogonalization process. We thus obtain

$$\det \tilde{M} = |\det \tilde{L}|^{-2} = |f_1|^2 \prod_{i=2}^m |\tilde{f}_i|^2. \quad (2.2.30)$$

In particular, for  $G(2, n)$ , we see that we have

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} |f_1|^2 & f_1^\dagger f_2 \\ f_2^\dagger f_1 & |f_2|^2 \end{pmatrix}, \quad (2.2.31)$$

which can be diagonalized as

$$\tilde{M}_D = \begin{pmatrix} |f_1|^2 & 0 \\ 0 & |\tilde{f}_2|^2 \end{pmatrix}, \quad (2.2.32)$$

with

$$\tilde{f}_2 = f_2 - \frac{f_1^\dagger f_2}{|f_1|^2} f_1. \quad (2.2.33)$$

We thus obtain

$$\det \tilde{M} = |f_1|^2 |\tilde{f}_2|^2 = |f_1|^2 |f_2|^2 - |f_1^\dagger f_2|^2. \quad (2.2.34)$$

Note that we can also define a 'wedge product' of two vectors; namely  $f_1 \wedge f_2$ . Such a quantity gives us an  $n \times n$  matrix defined as

$$(f_1 \wedge f_2)_{ij} = \mathcal{A}_{ij} = (f_1)_i (f_2)_j - (f_2)_i (f_1)_j. \quad (2.2.35)$$

Then it is easy to check that

$$|f_1 \wedge f_2|^2 = \sum_{ij} \mathcal{A}_{ij}^\dagger \mathcal{A}_{ij} = 2(|f_1|^2 |f_2|^2 - |f_1^\dagger f_2|^2) = 2 \det \tilde{M}. \quad (2.2.36)$$

This suggests another way of thinking of  $\det \tilde{M}$  which can be generalized to  $G(m, n)$ .

Indeed, we can write

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial \bar{\partial} \ln \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}, \quad (2.2.37)$$

with

$$\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} |\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_m}|^2 = m! \det \tilde{M} \quad (2.2.38)$$

and where

$$\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_m} = (f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_m)_{i_1, i_2, \dots, i_m}. \quad (2.2.39)$$

#### 2.2.4. Macfarlane parametrization and general results

Since the Grassmannian manifold  $G(m, n)$  is defined as the coset space given as  $\frac{U(n)}{U(m) \times U(n-m)}$ , we have the well-known duality property  $G(m, n) \cong G(n-m, m)$ . We can thus use the Macfarlane parametrization to prove the following theorem.

**Theorem 1.** The holomorphic solutions of  $G(m, n)$  are in one-to-one correspondence with the holomorphic solutions of  $G(n-m, m)$ . Furthermore, we have

$$\det \hat{M}^{(m, n)} = \det \hat{M}^{(n-m, m)}. \quad (2.2.40)$$



**Proof.** Let

$$\varphi : G(m, n) \longrightarrow G(n - m, n) \quad (2.2.41)$$

be defined by

$$\varphi(\hat{Z}^{(m,n)}) = \varphi \left( \begin{array}{c} \mathbb{I}_m \\ K^{(m,n)} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \mathbb{I}_{n-m} \\ K^{(m,n)T} \end{array} \right) = \hat{Z}^{(n-m,m)}. \quad (2.2.42)$$

We see that, since the transposition map is one-to-one, the map  $\varphi$  is one-to-one and  $\varphi$  establishes a one-to-one correspondence between the Macfarlane parametrization of  $G(m, n)$  and the Macfarlane parametrization of  $G(n - m, n)$ . To prove the second part of the theorem we calculate  $\det \hat{M}^{(n-m,n)}$ . We find

$$\det \hat{M}^{(n-m,n)} = \det \left( \mathbb{I}_{n-m} + (K^{(m,n)T})^\dagger K^{(m,n)T} \right) \quad (2.2.43)$$

$$= \det \left( \mathbb{I}_{n-m} + K^{(m,n)} (K^{(m,n)})^\dagger \right) \quad (2.2.44)$$

$$= \det(\mathbb{I}_m + (K^{(m,n)})^\dagger K^{(m,n)}) \quad (2.2.45)$$

$$= \det \hat{M}^{(m,n)}. \quad (2.2.46)$$

This last equality is a direct consequence of Sylvester's determinant theorem. This concludes the proof.

From Theorem 1, we note that if  $\mathcal{K}$  is the curvature (not necessarily constant) of a holomorphic solution of  $G(m, n)$  then  $\mathcal{K}$  is the curvature of the corresponding holomorphic solution of  $G(n - m, n)$  and vice-versa. In particular, holomorphic solutions of  $G(n - 1, n)$  are obtained from holomorphic solutions of  $G(1, n) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ .

Moreover, the special case  $G(m, 2m)$  enjoys an additional transposition invariance for all  $m \geq 1$ . This invariance will be used, in particular, to give a complete classification of holomorphic immersions of constant curvature of  $S^2$  into  $G(2, 4)$ .

## 2.3. CONSTANT CURVATURE FOR HOLOMORPHIC IMMERSIONS IN $G(m, n)$

### 2.3.1. General discussion and Veronese curve

Let us note that if we want holomorphic immersions for  $G(m, n)$  with constant curvature  $\mathcal{K}$ , the Lagrangian must take the form

$$\mathcal{L} = \frac{2}{\mathcal{K}}(1 + |x|^2)^{-2}, \quad (2.3.1)$$

where  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 = x_+x_-$ . This comes from the observation that the element of area  $ds^2$  is given by (see *e.g.* [9])

$$ds^2 = \frac{4}{\mathcal{K}} \frac{1}{(1 + |x|^2)^2} dx_+ dx_-, \quad (2.3.2)$$

where the factor  $\frac{1}{(1+|x|^2)^2}$  comes from the stereographic projection. This implies that (2.2.14) and (2.2.16), the expression of  $\det \hat{M}$  and  $\det \tilde{M}$  must be proportional to  $(1 + |x|^2)^r$  where the positive integer  $r$  is related to the curvature

$$\mathcal{K} = \frac{4}{r}. \quad (2.3.3)$$

For  $G(1, n) = \mathbb{C}P^{n-1}$ , we know that special solutions corresponding to the so-called Veronese curve  $f^{(n)} : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$  are given by

$$f^{(n)} = \left( 1, \sqrt{\binom{n-1}{1}} x_+, \dots, \sqrt{\binom{n-1}{r}} x_+^r, \dots, x_+^{n-1} \right)^T, \quad (2.3.4)$$

and have constant curvature  $\mathcal{K} = \frac{4}{n-1}$ . Indeed, we have  $\det \tilde{M} = |f^{(n)}|^2 = (1 + |x|^2)^{n-1}$ . We know that, up to gauge invariance, Veronese curves  $f^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , are the only solutions embedded in  $\mathbb{C}P^{n-1}$  giving rise to holomorphic solutions [7, 9].

We can generalize this result to the Veronese holomorphic curve in  $G(m, n)$  which takes the form

$$\tilde{Z}_V^{(m,n)} = \left( f^{(n)}, \partial f^{(n)}, \dots, \partial^{m-1} f^{(n)} \right), \quad (2.3.5)$$

for which the curvature is now [6]

$$\mathcal{K} = \frac{4}{m(n-m)}. \quad (2.3.6)$$

We will conjecture in the following that this curve is the minimal constant curvature that we can find for holomorphic solutions. The corresponding integer  $r$  in  $\det \tilde{M}$ , denoted by  $r_{max}(m, n)$ , is given by

$$r_{max}(m, n) = m(n-m) = \dim G(m, n). \quad (2.3.7)$$

Let us mention that this general result about the curvature of the Veronese curves may be easily recovered using our recent study [6] of projectors associated with the Veronese sequence. Starting from the vector  $\tilde{Z}_V^{(m,n)}$  given by (2.3.5), we construct a solution of the  $G(m, n)$  model by the Gram-Schmidt orthogonalization process as usual and obtain

$$Z_V^{(m,n)} = \left( \frac{f^{(n)}}{|f^{(n)}|}, \frac{P_+ f^{(n)}}{|P_+ f^{(n)}|}, \dots, \frac{P_+^{m-1} f^{(n)}}{|P_+^{m-1} f^{(n)}|} \right) \quad (2.3.8)$$

where the operator  $P_+$  is defined as

$$P_+ : f \in \mathbb{C}^n \longrightarrow P_+ f = \partial f - \frac{f^\dagger \partial f}{|f|^2} f. \quad (2.3.9)$$

A sequence of projectors  $P_k$  could thus be constructed from these functions, *i.e.*,

$$P_k := \frac{P_+^k f (P_+^k f)^\dagger}{|P_+^k f|^2}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.3.10)$$

It was shown in [6] that the curvature  $\mathcal{K}$  is related to the following quantity

$$A \left( n, \sum_{i=0}^{m-1} P_i \right) = m(n-m), \quad (2.3.11)$$

which is exactly the expected value (2.3.7) of the power  $r$ . In the Macfarlane parametrization (2.2.12), we get for the holomorphic Veronese curve in  $G(m, n)$ , the following expression,

$$(K_V^{(m,n)})_{ij} = (-1)^{m-j} \left( \frac{m-j+1}{m-j+i} \right) \frac{\sqrt{\binom{n-1}{i+m-1}}}{\sqrt{\binom{n-1}{j-1}}} \binom{i+m-1}{m} \binom{m}{j-1} x_+^{i-j+m}, \quad (2.3.12)$$

for  $i = 1, \dots, n-m$  and  $j = 1, \dots, m$ .

**Theorem 2.** Holomorphic solutions with constant curvature of  $G(m, n-1)$  generate holomorphic solutions with the same curvature of  $G(m, n)$  by embedding.

**Proof.** Using the wedge product introduced in Section 2 we get

$$\begin{aligned} \det \tilde{M}(m, n) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} |\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_m}|^2 \\ &= \det \tilde{M}(m, n-1) + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{m-1} \leq n-1} |\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}, n}|^2. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Setting  $(f_i)_n$  for  $i = 1, \dots, m$  in the expression of  $\mathcal{A}_{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}, n}$  given in (2.2.39), we obtain

$$\det \tilde{M}(m, n) = \det \tilde{M}(m, n-1). \quad (2.3.14)$$

This concludes the proof.

### 2.3.2. Admissible constant curvatures

In the previous subsection, we have just seen that  $G(m, n)$  admits a special type of holomorphic solutions with constant curvature such that  $r = r(m, n) = m(n-m)$ . Moreover, in different approaches [1, 2], a systematic classification of holomorphic solutions with constant curvatures has been given for  $G(2, 4)$  and  $G(2, 5)$  and it was shown there that there exist such solutions for all integer values  $r \leq m(n-m)$ .

Based on these results and on our detailed investigations, we present here two of our conjectures about holomorphic solutions of  $G(m, n)$  with constant curvature.

**Conjecture 1.** The maximal value of  $r$  in the expression of  $\det \tilde{M}$  ( $\det \hat{M}$ ) for which there exists a holomorphic solution of  $G(m, n)$  of constant curvature is given by  $r_{max}(m, n) = m(n - m)$ . This solution corresponds to the Veronese holomorphic curve (2.3.5) and its curvature is minimal (2.3.6).

This conjecture is clearly true for  $G(1, n) = \mathbb{C}P^{n-1}$ . Due to the duality property, it is also true for  $G(n - 1, n)$ .

In the general case, since the expression of  $\det \tilde{M}$  for  $G(m, n)$  contains at most  $N_m^n = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  terms, the maximal power of  $r$  is  $N_m^n - 1$ . Since  $r_{max}(m, n) \leq N_m^n - 1$ , in order to prove Conjecture 1, we thus have to show that the values  $r = r_{max}(m, n) + 1, \dots, N_m^n - 1$  are not possible.

For example, for  $G(2, n)$ , we obtain  $N_2^n = \frac{1}{2}n(n - 1)$ . This shows that the number of values of  $r > r_{max}(m, n)$  that have to be checked (and proved not to correspond to constant curvature solutions) in order to prove our conjecture is thus given by

$$N_2^n - 1 - r_{max}(2, n) = \frac{(n - 3)(n - 2)}{2}. \quad (2.3.15)$$

In the next section, we prove our conjecture for  $n = 4, 5$  and discuss the case  $n = 6$ .

**Conjecture 2.** For  $m$  fixed, holomorphic solutions with constant curvature in  $G(m, n)$  can be constructed for all integer values of  $r$  such that  $1 \leq r \leq r_{max}(m, n)$ .

More precisely, the conjecture can be stated as follow: for  $m$  fixed, all integers  $r = r_{max}(m, n) - k, \forall k = 1, \dots, m - 1$ , give rise to holomorphic solutions of constant curvature in  $G(m, n)$

Indeed, from Theorem 2, we know that  $G(m, n)$  has holomorphic solutions for  $r = 1, \dots, r_{max}(m, n - 1)$  by simple embedding from the holomorphic solutions of  $G(m, n - 1)$ . The solution corresponding to  $r_{max}(m, n)$  is given by the Veronese sequence (2.3.5).

The conjecture is true also for  $G(1, n) = \mathbb{C}P^{n-1}$  and due to the duality property, it is also true for  $G(n - 1, n)$ .

In the next section, we discuss both conjectures for the case  $G(2, n)$ , for which some partial results are already known [1, 2].

## 2.4. HOLOMORPHIC SOLUTIONS AND CONSTANT CURVATURES OF THE $G(2, n)$ MODEL FOR $n > 3$

We consider  $n > 3$  in the following developments. Indeed, for  $G(2, 3)$ , the conjectures are true due to the duality with  $G(1, 3) = \mathbb{C}P^2$ .

As mentioned before, constant curvature holomorphic solutions for the  $G(2, n)$  case are obtained for  $r = 1, \dots, r_{max}(2, n-1) = 2(n-3)$  by simple embeddings from the holomorphic solutions of  $G(2, n-1)$ . For  $r_{max}(2, n) = 2(n-2)$ , we obtain the Veronese holomorphic solution from (2.3.5). This means that our conjectures will be proven if we show that the values of  $r$  given by

$$r = r_{max}(2, n) + k, \quad k = 1, \dots, \frac{(n-3)(n-2)}{2} \quad (2.4.1)$$

are not admissible (Conjecture 1) and that we can exhibit a solution for  $r = 2n-5$  (Conjecture 2).

Let us start with some general results on the explicit form of holomorphic solutions with constant curvature in  $G(2, n)$ . We consider the Macfarlane parametrization (2.2.12) which can be written as

$$\hat{Z}^{(2,n)} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 \\ K^{(2,n)} \end{pmatrix} \quad (2.4.2)$$

such that

$$\det \hat{M} = \det(\mathbb{I}_2 + (K^{(2,n)})^\dagger K^{(2,n)}). \quad (2.4.3)$$

Gauge invariance (2.2.2) can now be used to change  $K^{(2,n)}$  to its canonical form and so produce a classification of solutions. In fact, previous approaches [1, 2] for the cases of the  $G(2, 4)$  and  $G(2, 5)$  models have explicitly used this gauge invariance. Due to the parametrization (2.4.2), we can take the following transformations of the matrix  $K^{(2,n)}$

$$K^{(2,n)} \longrightarrow K^{(2,n)'} = V_0 K^{(2,n)} U_0 \quad (2.4.4)$$

with constant matrices  $V_0 \in U(n-2)$  and  $U_0 \in U(2)$ .

As in recent papers [1, 2], the elements of the matrix  $K^{(2,n)}$ , can be chosen to be

$$(K^{(2,n)})_{i1} = \alpha_i x_+^{r_i}, \quad (K^{(2,n)})_{i2} = \beta_i x_+^{s_i}, \quad i = 1, \dots, n-2. \quad (2.4.5)$$

Due to the invariance property (2.4.4), we may choose  $\beta_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2} \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ . Without any loss of generality we can also take  $r_1 = 1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{n-2}$  and  $1 \leq s_1$ . Moreover, in order to obtain  $\det \hat{M}$  as a function of  $|x|^2$  only we have to

satisfy the constraints

$$s_i = r_i + s_1 - 1, \quad i = 1, \dots, n-2. \quad (2.4.6)$$

We are now interested in an explicit expression for the determinant (2.4.3). This can be derived using the wedge product introduced in Section 2 (see (2.2.35)) for the orthogonalized parametrization with  $\hat{Z}^{(2,n)} = (\hat{z})_{ik}, i = 1, \dots, n, k = 1, 2$ . We thus defined

$$p_{ij} = \det \begin{pmatrix} \hat{z}_{i1} & \hat{z}_{i2} \\ \hat{z}_{j1} & \hat{z}_{j2} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i < j. \quad (2.4.7)$$

The coordinates  $p_{ij}, i, j = 1, \dots, n, i < j$  are, in fact, the so called Plücker coordinates [2, 10]. They satisfy  $p_{12} = 1$  and the Plücker relations

$$p_{ij}p_{kl} = p_{ik}p_{jl} - p_{jk}p_{il} \implies p_{ij} = p_{1i}p_{2j} - p_{1j}p_{2i}, \quad (2.4.8)$$

for  $i, j = 3, \dots, n, i < j$ . From the explicit form of the elements of  $K^{(2,n)}$  given in (2.4.5) we find that

$$p_{12} = 1, \quad p_{1i} = \beta_{i-2}x_+^{r_{i-2}+s_1-1}, \quad p_{2i} = -\alpha_{i-2}x_+^{r_{i-2}}, \quad i = 3, \dots, n \quad (2.4.9)$$

and

$$p_{ij} = \gamma_{i-2, j-2}x_+^{r_{i-2}+r_{j-2}+s_1-1}, \quad i, j = 3, \dots, n, \dots, i < j \quad (2.4.10)$$

with  $\gamma_{i,j} = \alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i$ .

The next step involves the verification that we can construct an embedding [2, 10] of  $G(2, n)$  into  $\mathbb{C}P^{N_2^n-1}$ . Indeed, we introduce the map  $\Phi_n : G(2, n) \longrightarrow \mathbb{C}P^{N_2^n-1}$ , where  $N_2^n = \frac{1}{2}n(n-1)$  is the number of Plücker coordinates, such that  $\Phi_n(\hat{Z}^{(2,n)}) = \mathcal{Z}_{N_2^n}$  with  $\mathcal{Z}_{N_2^n} = (p_{ij})_{i < j}$  being a  $N_2^n$  component vector.

Then it is easy to prove that

$$\det \hat{M}^{(2,n)} = \det \hat{Z}^{(2,n)\dagger} \hat{Z}^{(2,n)} = \mathcal{Z}_{N_2^n}^\dagger \mathcal{Z}_{N_2^n}. \quad (2.4.11)$$

For example, for  $G(2, 4)$ , we have an embedding into  $\mathbb{C}P^5$  and the map  $\Phi_4$  is explicitly given by

$$\begin{aligned} \Phi_4(\hat{Z}^{(2,4)}) &= \mathcal{Z}_6 = (1, p_{23}, p_{13}, p_{24}, p_{14}, p_{34})^T \\ &= (1, -\hat{z}_{31}, \hat{z}_{32}, -\hat{z}_{41}, \hat{z}_{42}, \hat{z}_{31}\hat{z}_{42} - \hat{z}_{32}\hat{z}_{41})^T. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Let us now present some general results for the  $G(2, n)$  case dealing with the extremal values of  $r$  related to the quantity  $N_2^n - 1 = \frac{1}{2}n(n-1) - 1$ .

**Theorem 3.** In the Grassmannian manifold  $G(2, n)$  for  $n \geq 6$ , the value  $r = N_2^n - 1$  does not give rise to a holomorphic solution with constant curvature.

**Proof.** In order to obtain the maximal power  $r = N_2^n - 1$  in the expression of  $\mathcal{Z}_{N_2^n}$ ,

all the Plücker coordinates  $p_{ij}$  must be different from zero and the corresponding powers must be all different. The ordering of these powers implies that the two highest ones appear in  $p_{n-1,n}$  and  $p_{n-2,n}$ . They are given by

$$r_{n-3} + r_{n-2} + s_1 - 1 = N_2^n - 1, \quad r_{n-4} + r_{n-2} + s_1 - 1 = N_2^n - 2. \quad (2.4.13)$$

We thus obtain  $r_{n-3} = 1 + r_{n-4}$  and, consequently,

$$p_{1,n-1} = \beta_{n-3} x_+^{r_{n-3}+s_1-1} = \beta_{n-3} x_+^{r_{n-4}+s_1}, \quad p_{3,n-2} = \gamma_{1,n-4} x_+^{r_{n-4}+s_1}. \quad (2.4.14)$$

This shows, however, that these two powers are the same which contradicts the assumption. This concludes the proof.

Let us mention that Theorem 3 is also valid for  $n = 4, 5$  but the proof is different and will be given in the next subsections.

#### 2.4.1. The case of $G(2, 4)$

In this case, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_6 &= (1, p_{23}, p_{13}, p_{24}, p_{14}, p_{34})^T \\ &= \left(1, -\alpha_1 x_+, \beta_1 x_+^{s_1}, -\alpha_2 x_+^{r_2}, \beta_2 x_+^{r_2+s_1-1}, \gamma_{12} x_+^{r_2+s_1}\right)^T. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Conjecture 1 will be proven if we show that the power  $r = 5$  is not allowed in the expression of  $\det \hat{M}$  given by (2.4.11). This is easy to prove, since we have  $r_2 + s_1 = 5$  and, using the transposition invariance,  $(r_2, s_1) = (3, 2)$ , we obtain the following constraints:

$$\alpha_1^2 = \beta_2^2 = 5, \quad \alpha_2^2 = \beta_1^2 = 10 \quad (2.4.16)$$

which, together with

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 = 1, \quad (2.4.17)$$

cannot be satisfied. For  $r = 4$ , we get the solution corresponding to the Veronese sequence given by

$$\mathcal{Z}_6 = \left(1, -2x_+, \sqrt{3}x_+^2, -\sqrt{3}x_+^2, 2x_+^3, x_+^4\right)^T. \quad (2.4.18)$$

To prove Conjecture 2 in this case, we need to present a solution for  $r = 3$ . In this case, we can easily prove that  $\gamma_{12} \neq 0$  (or equivalently  $p_{34} \neq 0$ ) and thus  $r_2 + s_1 = 3$ . Again without any loss of generality, we can take  $(r_2, s_1) = (2, 1)$  and we find a holomorphic solution given by

$$\mathcal{Z}_6 = \left(1, -\sqrt{\frac{8}{3}}x_+, \frac{1}{\sqrt{3}}x_+, -\sqrt{3}x_+^2, 0, -x_+^3\right)^T. \quad (2.4.19)$$

The corresponding curvature is  $\mathcal{K} = \frac{4}{3}$ .

Let us point out that, using our approach, it is easy to reproduce the complete classification [1, 2] of holomorphic immersions of constant curvature in  $G(2, 4)$ .

### 2.4.2. The case of $G(2, 5)$

In this case, the explicit expression of  $\det \hat{M}^{(2,5)}$ , given in (2.4.11), is

$$\det \hat{M}^{(2,5)} = \mathcal{Z}_{10}^\dagger \mathcal{Z}_{10} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 5} |p_{i_1 i_2}|^2, \quad (2.4.20)$$

where the ten component vector  $\mathcal{Z}_{10}$  is given by

$$\mathcal{Z}_{10} = (1, p_{23}, p_{13}, p_{24}, p_{14}, p_{25}, p_{15}, p_{34}, p_{35}, p_{45})^T. \quad (2.4.21)$$

Let us note that to prove Conjecture 2 in this case we need to present a solution of this type for  $r = 5$ . Such solutions have already been found [2] but here, for completeness, we present expressions for two of them using our approach. Their corresponding vector  $\mathcal{Z}_{10}$  in (2.4.21) take the forms:

$$\mathcal{Z}_{10} = \left( 1, -\sqrt{5}x_+, \sqrt{5}x_+^2, -\sqrt{5}x_+^2, \frac{7}{\sqrt{5}}x_+^3, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}x_+^3, 2x_+^4, x_+^4, x_+^5 \right)^T, \quad (2.4.22)$$

$$\mathcal{Z}_{10} = \left( 1, -x_+, 2x_+, -\frac{1}{\sqrt{5}}x_+^2, \frac{7}{\sqrt{5}}x_+^2, 0, \sqrt{5}x_+^3, \sqrt{5}x_+^3, \sqrt{5}x_+^4, x_+^5 \right)^T. \quad (2.4.23)$$

The expressions for these two solutions exhibit an obvious symmetry between their coefficients.

For  $r = 6$ , our approach gives us a solution corresponding to the Veronese sequence

$$\mathcal{Z}_{10} = \left( 1, \sqrt{6}x_+, \sqrt{6}x_+^2, 3x_+^2, 4x_+^3, 2x_+^3, 3x_+^4, -\sqrt{6}x_+^4, -\sqrt{6}x_+^5, -x_+^6 \right)^T. \quad (2.4.24)$$

We still have to prove Conjecture 1 which, in this special case, can be reformulated in the following way.

**Proposition 1.** In  $G(2, 5)$ , there are no holomorphic solutions with constant curvature corresponding to  $r = 9, 8, 7$ .

**Proof.** In the expression for  $\det \hat{M}^{(2,5)}$  given in (2.4.20) we see that the highest powers of  $|x_+|$  are  $r = r_3 + r_2 + s_1 - 1$  and  $r_3 + s_1$  with the corresponding coefficients  $\gamma_{23}$  and  $\gamma_{13}$  in the Plücker coordinates.

- (1) If  $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ , we thus obtain  $\gamma_{12} = 0$  or  $\alpha_3 = 0$ . This means that the highest power one may expect to find is  $r = 6$ .
- (2) If  $\gamma_{23} = 0$  and  $\gamma_{13} \neq 0$  (which is equivalent to the case  $\gamma_{23} \neq 0$  and  $\gamma_{13} = 0$ ), we first take  $\beta_3 = 0$  then, either  $\alpha_3 = 0$  or  $\beta_1 = 0$ , leaving us with a maximal power of  $r = 6$ .



We thus consider  $\beta_3 \neq 0$  and  $\alpha_1 = \frac{\alpha_3\beta_1}{\beta_3}$ . The maximal power to consider now is  $r_3 + s_1 = 8$ . However, in such a case, we are led to put  $(r_2, s_1) = (3, 2)$  with the constraints  $\alpha_3^2 = \beta_1^2 = 28$  and

$$\frac{\beta_1^2\alpha_3^2}{\beta_3^2} = \beta_3^2 = 8, \quad (2.4.25)$$

which cannot be simultaneously satisfied. So this case has been eliminated.

Next we consider the case of  $r_3 + s_1 = 7$ . In this case we have the following, not equivalent, set of choices for  $r_2$  and  $s_1$ :  $(r_2, s_1) = (2, 2), (2, 3), (2, 4)$  and  $(3, 2)$ . Luckily, it is easy to check that they are all not compatible with the constraint  $\det M = (1 + |x|^2)^7$ .

For example, the case  $(r_2, s_1) = (2, 3)$  leads to  $\frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} = \frac{\beta_2^2}{7} = 21$  and  $\alpha_3^2 = 35 - \beta_2^2$  which cannot be simultaneously satisfied.

- (3) If  $\gamma_{13} \neq 0$  and  $\gamma_{23} \neq 0$ , the maximal power that we may expect to find is  $r = 9$ . In such a case all the powers in (2.4.20) must be different and all the Plücker coordinates must be non vanishing. Then we find that  $r_3 = 8 - s_1$  and  $r_2 = 2$ . With such a choice we see, however, that it is impossible to choose  $s_1$  such that all the powers are different. So  $r = 9$  has been eliminated

Let us now consider the  $r = 8$  case. In this case, we have  $r_3 = 7 - s_1$  and  $r_2 = 2$ . We are thus led to three possible choices for  $s_1$ , namely  $s_1 = 2, 3, 4$ . It is straightforward to show that none of these choices is consistent with the constraint  $\det M = (1 + |x|^2)^8$ .

Indeed, for example, in the case  $(r_2, s_1) = (2, 2)$  we must have

$$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 = 1, \quad |\alpha_3\beta_2| = 56, \quad |\alpha_2\beta_3| = \sqrt{28}l \quad (2.4.26)$$

for  $0 \leq l \leq \sqrt{28}$  which are not compatible with each other. In the case  $s_1 = 3$  we can show that  $\alpha_3^2 < 0$ , and in the case  $s_1 = 4$  we deduce that  $\beta_3^2 < 0$  which are both incompatible. Thus  $r = 8$  does not lead to holomorphic solutions with a constant curvature.

Let us now consider the most involved case of  $r = 7$ . Again, we have  $r_3 = 6 - s_1$  and  $r_2 = 2$ . We are thus led to two choices for  $s_1$ , namely  $s_1 = 2, 3$  subject to the constraint  $\det M = (1 + |x|^2)^7$ . Explicit but somewhat involved calculations show that both cases are incompatible (details are given in Appendix A). Thus we see that  $r = 7$  also does not lead to holomorphic solutions with constant curvatures. This completes the proof.

As a final comment in this subsection let us mention that we know from Theorem 1 that the complete classification of holomorphic solutions with constant curvatures for  $G(2, 5)$  gives rise to a complete classification of such solutions for  $G(3, 5)$ .

### 2.4.3. The case of $G(2, 6)$ and other Grassmannians

In order to prove Conjecture 1, we need to show that the maximal value of  $r$  in the expression for the curvature  $\mathcal{K} = \frac{4}{r}$  is  $r_{max}(2, 6) = 8$ . As shown in the above section, we may embed the  $G(2, 6)$  model into  $\mathbb{C}P^{14}$ . Thus we need to exclude the cases where  $r = 9, 10, 11, 12, 13$  and  $14$ .

Theorem 3 shows that  $r = N_2^6 - 1 = 14$  does not give rise to holomorphic solutions of constant curvature.

In the case of  $r = 13$ , the Plücker coordinates involving the highest powers of  $x_+$  are

$$p_{46} = \gamma_{24}x_+^{r_2+r_4+s_1-1}, \quad p_{56} = \gamma_{34}x_+^{r_3+r_4+s_1-1}. \quad (2.4.27)$$

If  $\gamma_{24}, \gamma_{34} \neq 0$ , then it is easy to show that it is impossible to choose  $r_2$  and  $s_1$  in such a way that we get all the powers ranging from 1 to 13. So, let us suppose that  $p_{56} = 0$  or  $p_{46} = 0$ . In this case, as it can be easily checked, it is also impossible to get the full range of powers. So the case  $r = N_2^6 - 2 = 13$  is excluded. What can we say about  $r = N_2^n - 2$  for a more general  $n$ , *i.e.* for  $n \geq 7$ ?

**Theorem 4.** In the Grassmannian manifold  $G(2, n)$  for  $n \geq 7$  and with the condition  $\gamma_{n-3, n-2}, \gamma_{n-4, n-2} \neq 0$ , the value  $r = N_2^n - 2$  does not give rise to a holomorphic solution with constant curvature.

**Proof.** According to theorem 3 the Plücker coordinates  $p_{1, n-1}$  and  $p_{3, n-2}$  are proportional. Since  $\gamma_{n-3, n-2}, \gamma_{n-4, n-2} \neq 0$  we see that

$$r_{n-3} = N_2^n - 1 - r_{n-2} - s_1, \quad r_{n-4} = N_2^n - 2 - r_{n-2} - s_1 \quad (2.4.28)$$

and in order to prove our theorem it suffices to find an other pair of Plücker coordinates which are proportional. We have to distinguish two cases, the first one with  $r_2 = 2$  and the second one with  $r_2 = 3$  and  $s_1 = 2$ . In the former case we have

$$p_{3, n-1} \propto p_{4, n-2} \propto x_+^{N_2^n - 1 - r_{n-2}} \quad (2.4.29)$$

and in the second case we have

$$p_{1, n-2} \propto p_{2, n-1} \propto x_+^{N_2^n - 3 - r_{n-2}}. \quad (2.4.30)$$

This concludes the proof.

Returning to the  $r$  cases in the  $G(2, 6)$  Grassmannian we are left with having to exclude the cases  $r = 9, 10, 11, 12$ .

Let us now assume that all the Plücker coordinates are real. In the case  $r = 12$  and with  $\gamma_{24}, \gamma_{34} \neq 0$ , we easily find the incompatible condition

$$1089 \left( 5\sqrt{22} - 4\sqrt{10}e + 2e_1 \right)^2 = 495 \quad (2.4.31)$$

to satisfy, where  $e, e_1 = \pm 1$ . If  $\gamma_{24}$  or  $\gamma_{34}$  is zero. So we see, that in this case, we have also eliminated the case of  $r = 12$ . We believe, that using similar arguments we can prove this also when the Plücker coordinates are complex and also for  $r = 9, 10, 11$  though we have not succeeded in demonstrating this in full generality.

Furthermore, in Appendix B, we present a numerical proof of Conjecture 2.

Our analysis, using Plücker coordinates, of constant curvature holomorphic solutions into higher dimensional Grassmannians can be easily generalised to  $m > 2$ . For example, in the  $G(3, 6)$  case, we have the following Plücker relation

$$p_{456} = p_{234}p_{156} - p_{134}p_{256} + p_{124}p_{356}, \quad (2.4.32)$$

which can be implemented in a computer program. We believe that this procedure may lead to the proofs of our conjectures in the general case. In this context, we note that our conjectures give  $r_{max}(3, 6) = 9$  and the Grassmannian may be embedded into  $\mathbb{C}P^{19}$ . So we see that to prove Conjecture 1, one needs to show that  $r = 10, 11, \dots, 19$  do not lead to holomorphic configurations of constant curvature. Conjecture 2 will be proved when if we construct solutions for  $r = 7, 8$ . We are presently trying to prove our conjectures, trying to write on a Mathematica program using the Plücker coordinates to sort out all the constraints and so prove our conjectures.

## 2.5. CONCLUSION

In this paper we have presented a general approach for constructing holomorphic maps of  $S^2$  (of constant curvature) into the general Grassmannian manifold  $G(m, n)$ . Our approach has given us an explicit formula for the value of this curvature and has led us to formulate two conjectures about such maps. To test the validity of our conjectures we looked in detail at the case of maps into  $G(2, n)$  Grassmannians using Plücker coordinates and at an embedding into the well-known  $\mathbb{C}P^N$  model.

We have managed to prove our conjectures in the cases of  $G(2, 4)$  and  $G(2, 5)$  Grassmannians. In both cases, we performed the full classifications of solutions and we calculated the values of the corresponding constant curvatures. In the

$G(2, 4)$  case our results agree with the classification [1] given by Li and Yu and in the  $G(2, 5)$  case we reproduced the classification presented in [2]. We also managed to make some important observations about the maps into  $G(2, 6)$ . We have not found yet any nice algorithmic way of proving our conjectures for larger values of  $n$  and  $m$  except in some special cases. Thus, if our conjectures are correct, for each  $n$  and  $m$  we have a finite range of  $r$  (from  $N_m^n - 1$  to  $m(n - m)$ —see the text before (2.3.15) to look at and to show the corresponding maps are not of constant curvature). However, as this range rapidly grows with  $n$  and  $m$ , we need to find a smart way of proving these statements and so far we have not found them.

Unfortunately, so far, we have not succeeded in proving our conjectures even for the  $G(2, n)$  case. However we believe them to be correct and in Appendix B we present numerical proof of the existence of holomorphic solutions with  $r = 7$  in the  $G(2, 6)$  case.

In order to prove Conjecture 1, we have to make a detailed analysis of the non-linear constraints on the Plücker coordinates. This work is currently being carried out but the progress is slow.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This work reported here has been supported in part by a research grant from NSERC of Canada. LD also acknowledge a FQRNT fellowship. We would also like to thank the anonymous referee for his/her constructive comments which have made us improve the original version of this paper.

## APPENDIX A. THE CASE OF $r = 7$ IN $G(2, 5)$

To complete the proof of Proposition 1, we need to show that, in the case of  $\gamma_{13} \neq 0$  and  $\gamma_{23} \neq 0$ , the value  $r = 7$  is not admissible. For  $r = 7$  we have two possible candidates corresponding to  $(r_2, s_1) = (2, 2)$  and  $(r_2, s_1) = (2, 3)$ . In both cases, we have to impose  $\alpha_1 = \sqrt{7}$ .

For  $(r_2, s_1) = (2, 2)$ , we have to satisfy the additional constraints

$$\begin{aligned} \gamma_{13}^2 &= 7\gamma_{23}^2 = 7, & \alpha_2 &= \sqrt{21} \sin \theta, & \beta_1 &= \sqrt{21} \cos \theta, \\ \beta_3 &= \sqrt{21}e^{i\psi}, & \beta_2 &= \sqrt{35}e^{in}, \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

where  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  (using gauge invariance). Then, we see that

$$\alpha_3 = \frac{e^{i\lambda_1} + 21e^{i\psi} \sin \theta}{\sqrt{35}e^{in}} = \frac{e^{i\lambda_2} + \sqrt{21}e^{i\psi}}{\sqrt{3} \cos \theta} \tag{2.5.2}$$

from which we calculate  $\alpha_3^2$  and end up with the following equation to satisfy

$$21 \cos^2 \theta (1 + 21^2 \sin^2 \theta + 42 \sin \theta \cos(\psi - \lambda_1)) = 5390 + 490\sqrt{21} \cos(\psi - \lambda_2). \quad (2.5.3)$$

To proceed further we maximize the left hand side by imposing  $\cos(\psi - \lambda_1) = 1$  (note that  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) which becomes a function of one variable  $\theta$ . This can, in turn, be maximized but it leads to the following constraint (which is not possible to satisfy):

$$\cos(\psi - \lambda_2) \approx -1.22454. \quad (2.5.4)$$

In the  $(r_2, s_1) = (2, 3)$  case we get the following constraints on the coefficients

$$\gamma_{13}^2 = 7, \quad \alpha_3 = \sqrt{35} \cos \theta, \quad \beta_1 = \sqrt{35} \sin \theta, \quad \alpha_2 = \sqrt{21}, \quad \beta_2 = \sqrt{35} e^{i\psi}, \quad (2.5.5)$$

where, by gauge invariance,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Then, again we see that this implies that

$$\beta_3 = e^{i\lambda_2} + 5\sqrt{7} \sin \theta \cos \theta \implies \beta_3^2 = 1 + 175 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 10\sqrt{7} \sin \theta \cos \theta \cos \lambda_2. \quad (2.5.6)$$

Furthermore, we can determine  $\gamma_{12}^2$  which has to satisfy

$$\gamma_{12}^2 = 35 \left( 7 + 21 \sin^2 \theta - 2\sqrt{7}\sqrt{21} \sin \theta \cos \psi \right), \quad (2.5.7)$$

and thus we are left with the equation  $\gamma_{12}^2 + \beta_3^2 = 21$  to satisfy. We minimize the left hand side of it by imposing  $\cos \psi = -\cos \lambda_2 = 1$ . This gives us two possible values of  $\theta$ :  $\theta \approx 0.0901758$  and  $\theta \approx 1.49397$  and we obtain

$$\gamma_{12}^2 + \beta_3^2|_{\theta \approx 0.0901758} \approx 179.642 > 21, \quad \gamma_{12}^2 + \beta_3^2|_{\theta \approx 1.49397} \approx 129.491 > 21. \quad (2.5.8)$$

However, these values do satisfy  $\gamma_{12}^2 + \beta_3^2 = 21$ . This concludes our proof of Proposition 1.

## APPENDIX B. NUMERICAL EVIDENCE FOR $r = 7$ IN $G(2, 6)$

In order to prove Conjecture 2 in the  $G(2, 6)$  case, we must find a holomorphic solution of constant curvature  $\mathcal{K} = \frac{4}{7}$ . To do this we consider the following generalization of the solutions  $\mathcal{Z}_6$  and  $\mathcal{Z}_{10}$  by considering the following Plücker coordinates for  $\mathcal{Z}_{15}$ :

$$\begin{aligned} p_{23} &= -\sqrt{7}x_+, & p_{13} &= \beta_1 x_+^2, & p_{24} &= -\alpha_2 x_+^2, & p_{14} &= \beta_2 x_+^3, \\ p_{25} &= -\frac{1}{\beta_4} x_+^3, & p_{15} &= \beta_3 x_+^4, & p_{26} &= 0, & p_{16} &= \beta_4 x_+^4. \end{aligned}$$

This choice implies that the Plücker coordinate  $p_{56}$ , which contains the highest powers of  $x_+$  in  $\mathcal{Z}_{15}$ , is such that  $p_{56} = x_+^7$ . The remaining coordinates then

become

$$\begin{aligned} p_{34} &= (\sqrt{7}\beta_2 - \alpha_2\beta_1)x_+^4, & p_{35} &= \left(\sqrt{7}\beta_3 - \frac{\beta_1}{\beta_4}\right)x_+^5, \\ p_{36} &= \sqrt{7}\beta_4x_+^5, & p_{45} &= \left(\alpha_2\beta_3 - \frac{\beta_2}{\beta_4}\right)x_+^6, & p_{46} &= \alpha_2\beta_4x_+^6, \end{aligned}$$

which are required to satisfy the constraints

$$p_{13}^2 + p_{24}^2 = 21|x|^4, \quad p_{35}^2 + p_{36}^2 = 21|x|^{10}, \quad p_{45}^2 + p_{46}^2 = 7|x|^{12}, \quad (2.5.9)$$

$$p_{14}^2 + p_{25}^2 = 35|x|^6, \quad p_{15}^2 + p_{16}^2 + p_{34}^2 = 35|x|^8. \quad (2.5.10)$$

The derived set of quadratic constraints on the Plücker coordinates is hard to solve so we looked at it using *Mathematica* 8. A symbolic solution of these constraints was found by the program. We then, convinced ourselves that the symbolic solutions for the Plücker coordinates were the correct ones by taking numerical approximations of them. Indeed, we verified that the numerical approximations were such that  $\mathcal{Z}_{15}^\dagger \mathcal{Z}_{15} \approx (1 + |x|^2)^7$ . Even though this is only a numerical verification of the compatibility condition, the fact that *Mathematica* 8 has originally produced a symbolic solution is an evidence of the correctness of Conjecture 2 in the  $G(2, 6)$  case. Here, we give one approximate solution to our problem

$$\begin{aligned} \beta_1 &\approx -0.4907042, & \beta_2 &\approx 2.8363697, & \beta_3 &\approx 2.6842282, \\ \beta_4 &\approx -0.1926106, & \alpha_2 &\approx -4.5562275. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$



# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Zhen-Qi Li, Zhu-Huan Yu, Constant curved minimal 2-spheres in  $G(2, 4)$ , *Manuscripta Mathematica* 100 (1999) 305–316.
- [2] X. Jiao, J. Peng, Classification of holomorphic spheres of constant curvature in complex Grassmann manifold  $G_{2,5}$ , *Differential Geometry and Its Applications* 20 (2004) 267–277.
- [3] X. Jiao, J. Peng, Pseudo-holomorphic curves in complex Grassmann manifolds, *Transaction of the American Mathematical Society* 355 (2003) 3715–3726.
- [4] X. Jiao, J. Peng, Minimal 2-spheres in  $G(2, 4)$ , *Frontiers of Mathematics in China* 5 (2010) 297–310.
- [5] J. Fei, X. Jiao, X. Xu, On conformal minimal 2-spheres in complex Grassmann manifold  $G(2, n)$ , *Indian Academy of Sciences, Proceedings* 121 (2011) 181–199.
- [6] V. Hussin, I. Yurdusen, W. J. Zakrzewski, Canonical surfaces associated with projectors in Grassmannian sigma models, *Journal of Mathematical Physics* 51 (2010) 103509-1-15.
- [7] W. J. Zakrzewski, *Low Dimensional Sigma Models*, Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [8] A. J. Macfarlane, Generalisation of  $\sigma$ -models and  $\mathbb{C}P^N$  models, and Instantons, *Physics Letters* 82 B (1979) 239–241.
- [9] J. Bolton, G. R. Jensen, M. Rigoli, L. M. Woodward, On conformal minimal immersions of  $S^2$  into  $\mathbb{C}P^n$ , *Mathematische Annalen* 279 (1988) 599–620.
- [10] P. Griffiths, J. Harris, *Principle of Algebraic Geometry*, Wiley, NY, 1978; K. Yang, *Complete and Compact Minimal Surfaces*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1989.





# Chapter 3

---

## CONSTANT CURVATURE SOLUTIONS OF GRASSMANNIAN SIGMA MODELS:(2) NON-HOLOMORPHIC SOLUTIONS

Auteurs: L. Delisle, V. Hussin et W. J. Zakrzewski

Référence: Journal of Geometry and Physics, **71** (2013), 1–10

### Résumé

Nous généralisons notre algorithme systématique pour construire des applications non-holomorphes à courbure constante de la 2-sphère dans des variétés grassmanniennes  $G(m, n)$ . Nous présentons des expressions générales décrivant ces solutions et les utilisons pour construire des applications à courbure constante. Nous discutons des valeurs possibles de cette courbure constante.

### Abstract

We generalize here our general procedure for constructing constant curvature maps of 2-spheres into Grassmannian manifolds  $G(m, n)$  this time concentrating our attention on maps which are non-holomorphic. We present some expressions describing these solutions in the general case and discuss how to use these results to construct solutions of constant curvature. We also discuss possible values of this constant curvature.

### 3.1. INTRODUCTION

Recently, we have presented an expression for the Gaussian curvature of holomorphic immersions into complex Grassmannian manifolds  $G(m, n)$  [1]. In this case  $G(m, n)$  was described by a  $n \times m$  complex matrix field  $Z$  which satisfied

$$Z^\dagger Z = \mathbb{I}_m, \tag{3.1.1}$$

where  $\mathbb{I}_m$  is the  $m \times m$  unit matrix and as usual the symbol  $\dagger$  denotes Hermitian conjugation.

We parametrized the  $Z$  matrix in the following way. We introduced  $\tilde{Z}$  a holomorphic  $n \times m$  matrix obtained from a set of linearly independent holomorphic vector fields  $f_1, \dots, f_m$  and  $\tilde{L}$  a  $m \times m$  matrix such that:

$$Z = \tilde{Z}\tilde{L}. \quad (3.1.2)$$

Such a parametrization can be called orthogonalized as it involves  $Z$  that was obtained by orthogonalizing the set  $\{f_1, \dots, f_m\}$ . Then due to (3.1.1) we have defined a new matrix  $\tilde{M}$  as:

$$\tilde{M} = (\tilde{L}\tilde{L}^\dagger)^{-1} = \tilde{Z}^\dagger\tilde{Z}. \quad (3.1.3)$$

Next we have showed that the Lagrangian density  $\mathcal{L}$  of this holomorphic immersion is given by

$$\mathcal{L}(Z) = \frac{1}{2}\partial_+\partial_-\ln\det\tilde{M}, \quad (3.1.4)$$

where the partial derivatives ( $\partial_\pm = \partial_{x_\pm}$ ) are taken with respect to complex coordinates  $x_\pm$ . The associated curvature of this immersion is [2]

$$\mathcal{K}(Z) = -\frac{1}{\mathcal{L}(Z)}\partial_+\partial_-\ln\mathcal{L}(Z). \quad (3.1.5)$$

Thus we see that the discussion of determining admissible constant curvature holomorphic solutions of Grassmannian manifolds  $G(m, n)$  has been reduced to having to find all possible holomorphic matrices  $\tilde{Z}$  and the corresponding curvatures that satisfy

$$\det\tilde{M} \propto (1 + |x|^2)^r, \quad (3.1.6)$$

where the positive integer  $r$  is related to the curvature by

$$\mathcal{K} = \frac{4}{r}. \quad (3.1.7)$$

In our previous paper [1], we have also conjectured that, for  $m$  fixed, holomorphic solutions with constant curvature in  $G(m, n)$  can be constructed for all integer values of  $r$  such that

$$1 \leq r \leq r_{h,max}(m, n) = m(n - m). \quad (3.1.8)$$

In this paper, we go further and look at other solutions of the Grassmannian model, the ones which are non-holomorphic. Thus we consider  $\tilde{Z}$  that is not constructed out of holomorphic vectors and for which the simplified formula (3.1.4) is no longer valid. There are several papers in which some such solutions have already been studied. Some early papers are explicit in the construction of these

solutions [3], some more recent ones [4] are more general but less explicit. Our discussion, presented in this paper, provides explicit formulae for some of these solutions. In this discussion we concentrate our attention on solutions of constant curvature. In our approach we rely heavily on Veronese curves and we show that the admissible values of  $r$  in the expression (3.1.7) of the curvature follow an explicit rule and that they are all greater than  $r_{h,max}(m, n)$ , the maximal value for the holomorphic case, as given in (3.1.8).

Section 2 presents a general discussion of solutions of the Grassmannian models. In it, first we look at the simplest model, namely  $G(1, n) = \mathbb{C}P^{n-1}$ , and, for completeness, we recall the general construction of all solutions of this model. We also discuss some of their properties. These results are then used in Section 3 in which we look at solutions of more complicated Grassmannian models. First we demonstrate which properties of the  $\mathbb{C}P^{n-1}$  solutions generalize to these models and then show how our approach can be used to classify all solutions of constant curvature. Section 4 illustrates possible values of the curvature and some solutions for some Grassmannian models.

We finish the paper with a short summary of our main results and some conclusions.

## 3.2. GRASSMANNIAN MODELS

### 3.2.1. General discussion

General maps of  $S^2$  into Grassmannian manifold  $G(m, n)$ ,  $n > m$  are given by  $n \times m$  complex matrix valued fields  $Z$  subject to the constraint (3.1.1). Under global  $V \in U(n)$  and local  $U \in U(m)$  transformations these maps transform as

$$Z \longrightarrow VZU. \quad (3.2.1)$$

Minimal immersions are obtained by minimizing the Lagrangian:

$$\mathcal{S} = 4 \int_{S^2} \mathcal{L}(Z) dx_+ dx_-. \quad (3.2.2)$$

Here  $x_{\pm} = x \pm iy$  are local coordinates in  $\mathbb{R}^2$ . The shift from  $\mathbb{R}^2$  to  $S^2$  will be performed by choosing a compactification of  $\mathbb{R}^2$  as discussed below. The Lagrangian density  $\mathcal{L}$  is given by

$$\mathcal{L}(Z) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (D_+ Z)^\dagger D_+ Z + (D_- Z)^\dagger D_- Z \right], \quad (3.2.3)$$

where  $D_{\pm}$  denote the covariant derivatives acting on  $Z : \mathbb{R}^2 \longrightarrow G(m, n)$  and are defined by

$$D_{\pm} Z = \partial_{\pm} Z - ZZ^\dagger \partial_{\pm} Z. \quad (3.2.4)$$

The Euler-Lagrange equation corresponding to (3.2.3) takes the form:

$$D_+D_-Z + Z(D_-Z)^\dagger D_-Z = 0. \quad (3.2.5)$$

As we are interested in the maps of  $S^2$  into the Grassmannians we have to compactify  $\mathbb{R}^2$ . This we do by adding a point at  $\infty$  and this requirement 'chooses' for us the boundary conditions:

$$D_\mu Z \longrightarrow 0, \quad \text{as } \sqrt{x^2 + y^2} \longrightarrow \infty \quad (3.2.6)$$

sufficiently fast so that the total Lagrangian  $\mathcal{S}$  is finite. Then our maps are maps of 2-spheres into Grassmannians with appropriate topological properties [3].

### 3.2.2. Classical solutions

A construction of a large class of classical solutions of the Grassmannian models  $G(m, n)$ , which are of course minimal immersions of  $S^2$ , is well known (see *e.g.* [5]). This construction gives all solutions in the  $G(1, n)$  case. For  $G(m, n)$  with  $m > 1$ , the situation is less clear but most (if not all) solutions can be constructed using the approach discussed in [5]. In any case, only such solutions have so far been looked at in any detail and in this paper we restrict our attention to using them and studying their properties.

A possible way to find these solutions is to start with a set of holomorphic vectors  $f_1, \dots, f_k$  (*i.e.* functions of  $x_+$ ). Here  $k$  can be any integer up to  $n - 1$  (note that  $n > m$ ). Then one considers another set obtained from this set by taking derivatives, *i.e.*  $\partial_+ f_1, \dots, \partial_+ f_k$  and  $\partial_+^2 f_1, \dots, \partial_+^2 f_k$  and so on. Next one constructs a matrix whose columns are the first set, then the next one and so on. Finally, we Gram-Schmidt orthogonalize all these vectors.

Next we note that we can take any set of  $m$  vectors from these orthogonalized vectors and construct from them our matrix  $\tilde{Z}$ . This matrix  $Z$  can be shown to solve the Euler-Lagrange equation and so defines a solution of the Grassmannian model  $G(m, n)$ . If the original vectors  $f_1, \dots, f_k$  are all polynomials in  $x_+$  then this solution describes an immersion of  $S^2$  into  $G(m, n)$ .

Let us mention here a few classes of solutions derived this way.

- (1) We take  $m$  holomorphic polynomial vectors (*i.e.*  $k = m$ ). In this case we have a holomorphic solution. An example of such a case has been given in [6].
- (2) We start with one function ( $f$ ) only (*i.e.*  $k = 1$ ). Then our construction will be equivalent to defining the operator  $P_+$  as

$$P_+ : f \in \mathbb{C}^N \longrightarrow P_+ f = \partial_+ f - \frac{f^\dagger \partial_+ f}{|f|^2} f \quad (3.2.7)$$

and then applying it up to  $n-1$  times to  $f$  and to the new vectors obtained from it, *i.e.*

$$P_+^i f = P_+(P_+^{i-1} f). \quad (3.2.8)$$

A solution of the Grassmannian model  $G(m, n)$  then involves taking for  $Z$  any  $m$  vectors from the orthonormalized set  $\left(\frac{f}{|f|}, \frac{P_+ f}{|P_+ f|}, \dots, \frac{P_+^{n-1} f}{|P_+^{n-1} f|}\right)$ . Note that if we take the first  $m$  of them the solution is holomorphic. And if we take the last  $m$  of them the solution is antiholomorphic. But we can take any  $m$  of them, say  $\left(\frac{f}{|f|}, \frac{P_+^2 f}{|P_+^2 f|}, \dots\right)$ . Then the solution will be called non-holomorphic.

In fact there are many more solutions than those described by our procedure given above. Thus we could 'miss out' some vectors from our original set or interchange them. In such cases, there are some conditions that the vectors have to satisfy in order that the final matrix  $Z$  solves the Euler-Lagrange equation. The interested reader can find the discussion of these conditions in the original papers and in [5] where these papers have been referenced. Here we will restrict our attention to the cases mentioned above.

### 3.2.3. Special case $G(1, n) = \mathbb{C}P^{n-1}$ model

In this case the field  $Z$  is a  $(n \times 1)$  matrix and any solution of the Euler-Lagrange equation is given by

$$Z_i = \frac{P_+^i f}{|P_+^i f|}, \quad (3.2.9)$$

for some  $i = 0, \dots, n-1$  and some holomorphic vector  $f$ . For the map to be from  $S^2$  and not  $\mathbb{R}^2$  the components of the vector  $f$  have to be ratios of polynomials in  $x_+$  [5]. In fact, due to the invariance (3.2.1) they can be given by polynomials in  $x_+$ .

Of these solutions those corresponding to  $i = 0$  are holomorphic, those corresponding to  $i = n-1$  are anti-holomorphic and the remaining ones are 'mixed' (also called non-holomorphic in this paper).

Consider now one of these solutions, say, corresponding to a general  $i$  for  $i \neq 0$  and  $i \neq n-1$ . Then its Lagrangian density is given by [5]

$$\mathcal{L}(Z_i) = \frac{1}{2} \left( \frac{|P_+^{i+1} f|^2}{|P_+^i f|^2} + \frac{|P_+^i f|^2}{|P_+^{i-1} f|^2} \right). \quad (3.2.10)$$

Let us note that

$$\partial_+ \partial_- \ln(|P_+^i f|^2) = \left( \frac{|P_+^{i+1} f|^2}{|P_+^i f|^2} - \frac{|P_+^i f|^2}{|P_+^{i-1} f|^2} \right), \quad (3.2.11)$$

which, of course, is due to its topological nature. Hence it is easy to verify that

$$\mathcal{L}(Z_i) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln \left( |P_+^i f|^2 |P_+^{i-1} f|^4 \cdots |P_+ f|^4 |f|^4 \right). \quad (3.2.12)$$

Note that, in the holomorphic case ( $i = 0$ ), we have

$$\mathcal{L}(Z_0) = \frac{1}{2} \frac{|P_+ f|^2}{|f|^2} = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln(|f|^2). \quad (3.2.13)$$

Moreover, a few lines of algebra then shows that this expression is much simpler if we use the formulation involving 'wedge products'; namely we note that

$$P_+^i f \propto (f \wedge \partial_+ f \wedge \cdots \wedge \partial_+^{i-1} f)^\dagger (f \wedge \partial_+ f \wedge \cdots \wedge \partial_+^{i-1} f \wedge \partial_+^i f), \quad (3.2.14)$$

where  $\propto$  differ from  $=$  by an overall factor (up to irrelevant constants)

$$\frac{1}{|(f \wedge \partial_+ f \wedge \cdots \wedge \partial_+^{i-1} f)|^2}. \quad (3.2.15)$$

To go further, we need to calculate

$$|(f \wedge \partial_+ f \wedge \cdots \wedge \partial_+^{i-1} f)^\dagger (f \wedge \partial_+ f \wedge \cdots \wedge \partial_+^{i-1} f \wedge \partial_+^i f)|^2. \quad (3.2.16)$$

This, as it is easy to check, is the product of determinants  $M_{i+1}$  and  $M_i$ , where

$$M_i = \begin{pmatrix} |f|^2 & f^\dagger \partial_+ f & \cdots & f^\dagger \partial_+^{i-1} f \\ (\partial_+ f)^\dagger f & |\partial_+ f|^2 & \cdots & (\partial_+ f)^\dagger \partial_+^{i-1} f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_+^{i-1} f)^\dagger f & (\partial_+^{i-1} f)^\dagger \partial_+ f & \cdots & |\partial_+^{i-1} f|^2 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{i-1} |P_+^k f|^2, \quad M_0 = 1. \quad (3.2.17)$$

However, this is exactly what we need for rewriting  $\mathcal{L}$  in a simple way. Using the expressions above it becomes

$$\mathcal{L}(Z_i) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln(M_{i+1} M_i). \quad (3.2.18)$$

Thus we see that taking  $i = 0$ , we retrieve the holomorphic case (3.2.13).

Next consider constant curvature solutions. This implies that we require to have

$$M_{i+1} M_i \propto (1 + |x|^2)^{r_i(1,n)} \quad (3.2.19)$$

in which case the corresponding curvature  $\mathcal{K}$  is given by  $\mathcal{K}(Z_i) = \frac{4}{r_i(1,n)}$ . In the following, we determine all possible values of  $r_i(1,n)$ , where the label  $i$  is related to the label of the solutions  $Z_i$  and  $(1,n)$  refers to the  $G(1,n)$  model. We already know that the only holomorphic solutions with constant curvature in  $G(1,n) = \mathbb{C}P^{n-1}$  are the Veronese minimal spheres [2, 5].

Let us next show that, using the projector formalism, it is easy to determine all the possible values of the corresponding curvatures for non-holomorphic solutions.

Starting from the holomorphic Veronese curve  $f^{(n)} : S^2 \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ :

$$f^{(n)} = \left( 1, \sqrt{\binom{n-1}{1}} x_+, \dots, \sqrt{\binom{n-1}{r}} x_+^r, \dots, x_+^{n-1} \right), \quad (3.2.20)$$

with constant curvature  $\mathcal{K}(Z_0) = \frac{4}{n-1}$ , we get a set of linearly independent solutions given by  $\left\{ \frac{P_+^i f^{(n)}}{|P_+^i f^{(n)}|}, i = 0, \dots, n-1 \right\}$  following the procedure described above. To this set corresponds a set of orthogonal projectors  $P_i(f^{(n)})$  defined as follows:

$$P_i(f^{(n)}) := Z_i Z_i^\dagger = \frac{P_+^i f^{(n)} (P_+^i f^{(n)})^\dagger}{|P_+^i f^{(n)}|^2}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.2.21)$$

We have shown in [7] that, for each solution in this set, the curvature  $\mathcal{K}(Z_i)$  is related to the following quantity

$$r_i(1, n) = A(n, P_i(f^{(n)})) = (n-1) + 2i(n-1-i). \quad (3.2.22)$$

This formula may be easily recovered from the expression of  $\mathcal{L}(Z_i)$  given in (3.2.12) using the fact that

$$|P_+^i f^{(n)}|^2 = \frac{(n-1)!i!}{(n-1-i)!} (1+|x|^2)^{n-1-2i}. \quad (3.2.23)$$

We see that  $r_0(1, n) = r_{n-1}(1, n) = n-1$ . This is the minimal value of  $r_i(1, n)$  in the set and it corresponds to the largest constant curvature  $\mathcal{K} = \frac{4}{n-1}$  for the holomorphic and anti-holomorphic solutions. We also have

$$A(n, P_{n-1-i}(f^{(n)})) = A(n, P_i(f^{(n)})), \quad (3.2.24)$$

which implies that among the projectors of the set only 'a half of them' give rise to different curvatures. More precisely, for  $n = 2p$  we consider only the projectors  $P_i(f^{(n)})$  with  $i = 1, \dots, p-1$ , while for  $n = 2p+1$ , we take  $i = 1, \dots, p$  for non-equivalent non-holomorphic solutions.

Let us note that for non-equivalent solutions, we have

$$r_{i+1}(1, 2p) - r_i(1, 2p) \geq 4, \quad i = 0, \dots, p-2, \quad (3.2.25)$$

$$r_{i+1}(1, 2p+1) - r_i(1, 2p+1) \geq 2, \quad i = 0, \dots, p-1, \quad (3.2.26)$$

which was deduced from

$$r_{i+1}(1, n) - r_i(1, n) = 2(n-2i-2). \quad (3.2.27)$$

We thus get a higher bound for the values of  $r$  which is obtained as

$$r_{p-1}(1, 2p) = 2p^2 - 1, \quad r_p(1, 2p+1) = 2p(p+1). \quad (3.2.28)$$



Finally, it is easy to show that, for  $p, q \in \mathbb{N}$  and  $q < p$ ,

$$r_{p-q}(1, 2p) = r_0(1, 2(p^2 - q(q-1))), \quad (3.2.29)$$

$$r_{p-q}(1, 2p+1) = r_0(1, 2(p(p+1) - q^2) + 1). \quad (3.2.30)$$

This result relates non-holomorphic solutions of constant curvature to a holomorphic solution of a higher dimensional Grassmannian  $G(1, N)$  (for  $N > n$ ).

Let us illustrate these results by some explicit examples.

- (1) For  $\mathbb{C}P^2$  ( $n = 3$ ), we get only one non-holomorphic solution corresponding to  $P_1(f^{(3)})$  for which  $r_1(1, 3) = 4$  (the same value as for  $P_0(f^{(5)})$ ). Let us recall that holomorphic solutions are obtained for  $r = 1, 2$ .
- (2) For  $\mathbb{C}P^3$  ( $n = 4$ ), we get one non-holomorphic solution corresponding to  $P_1(f^{(4)})$  for which  $r_1(1, 4) = 7$  (the same value as for  $\mathbb{P}_0(f^{(8)})$  and also, by embedding, the preceding one *i.e.* of the  $\mathbb{C}P^2$  field with  $r = 4$ ). Note that holomorphic solutions are easily found for  $r = 1, 2, 3$ .
- (3) For  $\mathbb{C}P^4$  ( $n = 5$ ), we have two new non-holomorphic solutions with  $r_1(1, 5) = 10$  and  $r_2(1, 5) = 12$  and the embeddings with  $r = 4, 7$ . Of course the holomorphic solutions are obtained for  $r = 1, 2, 3, 4$ .
- (4) For  $\mathbb{C}P^5$  ( $n = 6$ ), we have two new non-holomorphic solutions with  $r_1(1, 6) = 13$  and  $r_2(1, 6) = 17$  and the embeddings with  $r = 4, 7, 10, 12$ . The holomorphic solutions exist for  $r = 1, 2, 3, 4, 5$ .

### 3.3. NON-HOLOMORPHIC SOLUTIONS FOR $G(m, n)$

As we have said above there are many non-holomorphic solutions of  $G(m, n)$  models. In Section 2, we discussed a class of them obtained by applying the  $P_+$  operator defined in (3.2.7). Then if we apply it to a holomorphic vector  $f_1$  several times—we obtain vectors  $P_+^i f_1$ . In what follows we shall take  $f_1 = f^{(n)}$  as the Veronese curve (3.2.20). Any pair of these normalized vectors gives a solution of  $G(2, n)$ , any triple produces a solution of  $G(3, n)$  *etc.*

A generic solution  $Z$  of  $G(m, n)$ , made of  $m$  normalized independent vectors taken among the set  $\{f^{(n)}, P_+ f^{(n)}, \dots, P_+^{n-1} f^{(n)}\}$ , gives rise to a projector  $P = ZZ^\dagger = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_i$ , where the constants  $\alpha_i$  take the values 0 or 1 and  $P_i$  acts on  $f^{(n)}$  as in (3.2.21). We have shown in [7] that, for such a generic solution, the Lagrangian density is given by

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i-1} - \alpha_i)^2 \frac{|P_+^i f^{(n)}|^2}{|P_+^{i-1} f^{(n)}|^2}. \quad (3.3.1)$$

This expression can be rewritten in the following more compact form, using the expression  $M_i$  given in (3.2.17), as

$$\mathcal{L}(Z) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln \prod_{i=1}^{n-1} M_i^{(\alpha_{i-1} - \alpha_i)^2}. \quad (3.3.2)$$

In particular, if  $\alpha_0 = \dots = \alpha_{m-1} = 1$  and  $\alpha_m = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ , we get easily

$$\mathcal{L}(Z) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln M_m, \quad (3.3.3)$$

which corresponds to a holomorphic solution of the  $G(m, n)$  model as discussed in [1].

In order to get constant curvature solutions, we require that

$$\prod_{i=1}^{n-1} M_i^{(\alpha_{i-1} - \alpha_i)^2} \propto (1 + |x|^2)^r. \quad (3.3.4)$$

But the  $M_i$ 's are products of consecutive  $|P_+^k f^{(n)}|^2$ , which implies that each  $P_+^k f^{(n)}$  must be such that

$$|P_+^k f^{(n)}|^2 \propto (1 + |x|^2)^{r_k}. \quad (3.3.5)$$

For the Veronese sequence with  $f^{(n)}$  given by (3.2.20), using (3.2.23), we get

$$\partial_+ \partial_- \ln M_i = \frac{i(n-i)}{(1 + |x|^2)^2} \quad (3.3.6)$$

and so (3.3.2) may be rewritten as

$$\mathcal{L}(Z) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln(1 + |x|^2)^{r(m,n)}, \quad r(m, n) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)(\alpha_{i-1} - \alpha_i)^2. \quad (3.3.7)$$

Hence, we get a constant curvature solution of our Grassmannian  $G(m, n)$  model with

$$\mathcal{K}(Z) = \frac{4}{r(m, n)}. \quad (3.3.8)$$

Note that for the holomorphic solution corresponding to (3.3.3), we get  $r_{h,max}(m, n) = m(n-m)$  as expected (see (3.1.8)).

Let us mention that due to the property  $G(m, n) \cong G(n-m, n)$  (which is easy to see in the projector formulation), we will consider solutions only for the model  $G(m, n)$  (with  $m = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ) but our construction will also give the solutions for the models with larger  $m$ . Thus, in particular, we have already all the solutions of  $G(n-1, n) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ .

In order to make our discussion more intuitive, let us first discuss in detail the  $G(2, n)$  model. We, thus, have to distinguish the cases when the two  $P_+^l f^{(n)}$  vectors forming the solution have their corresponding  $l$ 's differing by 1 or not. The reason for this is simple: the Lagrangian density of the vectors which differs

by more than one is purely additive; it is simply a sum of Lagrangian densities of corresponding  $\mathbb{C}P^{n-1}$ . We will then show how this gets modified for larger values of  $m$ .

### 3.3.1. $G(2, n)$

We take a solution of  $G(2, n)$  of the form

$$Z_{i,j}^{(n)} = \left( \frac{P_+^i f^{(n)}}{|P_+^i f^{(n)}|}, \frac{P_+^j f^{(n)}}{|P_+^j f^{(n)}|} \right), \quad (3.3.9)$$

where  $f^{(n)}$  is the Veronese curve (3.2.20) for any integer  $i, j$  such that  $i \neq j$  and  $0 \leq i \leq n-2$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ .

It is easy to see that the case  $j > i+1$  leads to:

$$\mathcal{L}(Z_{i,j}^{(n)}) = \mathcal{L}(Z_i) + \mathcal{L}(Z_j) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln(M_{i+1} M_i M_{j+1} M_j), \quad (3.3.10)$$

where  $Z_i$  is defined in (3.2.9), and the constant curvature is given as in (3.3.8) with

$$r(2, n) = r_{i,j}(2, n) = r_i(1, n) + r_j(1, n) = 2(n-1 + i(n-1-i) + j(n-1-j)). \quad (3.3.11)$$

Next we consider the case of consecutive projectors, *i.e.* when  $j = i+1$ . The calculation of the Lagrangian density gives

$$\mathcal{L}(Z_{i,i+1}^{(n)}) = \frac{1}{2} \left( \frac{|P_+^i f^{(n)}|^2}{|P_+^{i-1} f^{(n)}|^2} + \frac{|P_+^{i+2} f^{(n)}|^2}{|P_+^{i+1} f^{(n)}|^2} \right) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln(M_{i+2} M_i) \quad (3.3.12)$$

and the constant curvature is given as in (3.3.8) with

$$r(2, n) = r_i(2, n) = 2(n-2 + i(n-2-i)), \quad (3.3.13)$$

for  $0 \leq i \leq n-2$ . The holomorphic case ( $i = 0$ ) is included in formula (3.3.12) and reduces to expression (3.3.3) with  $m = 2$ .

Due to the way the set of solutions was constructed, we have a relation between  $P_+^i f$  and  $P_+^{n-1-i} f$  through complex conjugation. We thus have equivalent solutions  $Z_{i,i+1}^{(n)} \sim Z_{n-2-i, n-1-i}^{(n)}$  and  $Z_{i,j}^{(n)} \sim Z_{n-1-j, n-1-i}^{(n)}$ . This leads to

$$r_i(2, n) = r_{n-2-i}(2, n), \quad r_{i,j}(2, n) = r_{n-1-j, n-1-i}(2, n). \quad (3.3.14)$$

Let us now look at some properties of these expressions for different values of the parameter  $r$ . First, due to the relation (3.3.14), non-equivalent solutions of the type  $Z_{i,i+1}^{(n)}$  are obtained for  $i = 0, 1, \dots, p-1$  where  $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  and  $p \geq 2$ . We thus have, for  $i = 0, 1, \dots, p-1$ ,

$$r_{i+1}(2, 2p) - r_i(2, 2p) \geq 2, \quad r_{i+1}(2, 2p+1) - r_i(2, 2p+1) \geq 4. \quad (3.3.15)$$

Indeed, this result follows from

$$r_{i+1}(2, n) - r_i(2, n) = 2(n - 2i - 3) \geq 2(n - 2p + 1). \quad (3.3.16)$$

Second, in the set  $\{r_{i,j}(2, n)\}$  that leads to non-equivalent solutions, we see that the minimal value of  $r$  for non-holomorphic solutions of  $G(2, n)$ , for  $n \geq 4$ , is

$$r_{0,n-1}(2, n) = 2(n - 1) > r_0(2, n) = 2(n - 2). \quad (3.3.17)$$

Moreover, for  $i = 1, \dots, p - 1$  with  $p = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  and  $p \geq 2$ , we have

$$r_i(2, n) - r_{0,n-1}(2, n) \geq 2(n - 4). \quad (3.3.18)$$

Third, we can show that we get distinct non-holomorphic solutions with the same value of  $r$ . Indeed, from the definition of the  $r_{i,j}(2, n)$ , we have, in particular, that

$$r_{i,j}(2, n) = r_{i,k}(2, n), \quad (3.3.19)$$

for  $k = n - 1 - j$ . Since  $j$  is at least equal to 2 and  $k > j$ , we get  $n > 5$ . For example, for  $n = 6$ , we have  $r_{0,2}(2, 6) = r_{0,3}(2, 6) = 22$ . For  $n = 7$ , we have  $r_{0,2}(2, 7) = r_{0,4}(2, 7) = 28$ . Moreover, we can have  $r_i(2, n) = r_{j,k}(2, n)$  for  $n > 6$  and some values of  $i, j, k$ . For example, for  $n = 7$ , we have  $r_{0,5}(2, 7) = r_2(2, 7) = 22$ . Furthermore, as  $n$  increases identical values of  $r$  appear for a larger number of distinct solutions.

Finally, we give the higher bound for the values of  $r$  for non-holomorphic solutions of  $G(2, n)$ . We have

$$r_{p-2,p}(2, 2p) = 2(2p^2 - 3), \quad r_{p-1,p+1}(2, 2p+1) = 4(p^2 + p - 1). \quad (3.3.20)$$

Thus the lowest value of the curvature is given by the appropriately chosen two projectors with  $i$  and  $j$  differing by 2.

Let us add that due to (3.3.14), we see that values of  $r_{i,j}(2, n)$  for non-equivalent solutions are given by

$$r_{i,j}(2, 2p), \quad i = 0, \dots, p - 2, \quad j = i + 2, \dots, 2p - 1 - i, \quad (3.3.21)$$

$$r_{i,j}(2, 2p + 1), \quad i = 0, \dots, p - 1, \quad j = i + 2, \dots, 2p - i. \quad (3.3.22)$$

To prove (3.3.20), we note from (3.3.11) that the maximal value of  $r$  is given by the values of  $i$  and  $j$  which maximize  $i(n - 1 - i) + j(n - 1 - j)$ . It is clear that the value of  $i$  which maximizes  $i(a - i)$  is given by  $i = \frac{a}{2}$ . As  $i$  has to be an integer, this value is reached when  $n$  is odd since  $a = n - 1$  is then even. For  $n$  even, the maximum value is given by the nearest integer, *i.e.* for  $i = \frac{a \pm 1}{2}$ . As  $i$  and  $j$  have to satisfy the condition  $j > i + 1$ , we have to take  $j = i + 2$  and place  $i$

and  $j$  as close to  $\frac{n-1}{2}$  as possible. This, as can be easily checked, gives the values mentioned above.

We also have to prove that the values in (3.3.20) are higher than the largest value of  $r_i(2, n)$ . Indeed, the largest value of  $r$ , when  $n$  is even, corresponds to  $i = \frac{n-2}{2}$  and then  $r_{max} = \frac{n^2-4}{2}$ . For  $n$  odd the corresponding value is given by  $r_{max} = \frac{n^2-5}{2}$  where  $i = \frac{n-3}{2}$ .

At this stage, we could illustrate these results for some values of  $n$ .

- (1) For  $n = 3$ , the duality property leads to  $G(2, 3) \cong \mathbb{C}P^2$ .
- (2) For  $n = 2p = 4$ , in the case of consecutive projectors, we have only two non-equivalent solutions  $Z_{0,1}^{(4)}, Z_{1,2}^{(4)}$  where  $Z_{0,1}^{(4)}$  is holomorphic with  $r_0(2, 4) = 4$  and  $Z_{1,2}^{(4)}$  is non-holomorphic with  $r_1(2, 4) = 6$ . For non consecutive projectors, the completion relation  $\sum_{i=0}^3 P_i = \mathbb{I}$ , leads to  $Z_{0,3}^{(4)} \sim Z_{1,2}^{(4)}$  and  $Z_{1,3}^{(4)} \sim Z_{0,2}^{(4)}$ . Thus the only remaining case is  $Z_{0,2}^{(4)}$  with  $r_{0,2}(2, 4) = 10$ . The solutions  $Z_{1,2}^{(4)}$  and  $Z_{0,2}^{(4)}$  correspond to the two last solutions presented in theorem B in [8]. The missing solution corresponding to  $r = 2$  is actually the solution corresponding to the direct sum of  $\mathbb{C}P^1 \oplus \mathbb{C}P^1$ .
- (3) For  $n = 2p + 1 = 5$ , in the case of consecutive projectors, the symmetry (3.3.14) leads to two non-equivalent solutions  $Z_{0,1}^{(5)}, Z_{1,2}^{(5)}$  where  $Z_{0,1}^{(5)}$  is holomorphic with  $r_0(2, 5) = 6$  and  $Z_{1,2}^{(5)}$  is non-holomorphic with  $r_1(2, 5) = 10$ . For non consecutive projectors, the symmetry property leads to  $Z_{0,2}^{(5)} \sim Z_{2,4}^{(5)}$  and  $Z_{0,3}^{(5)} \sim Z_{1,4}^{(5)}$ . The non-equivalent solutions are  $Z_{0,2}^{(5)}, Z_{0,3}^{(5)}, Z_{0,4}^{(5)}, Z_{1,3}^{(5)}$  with  $r_{0,2}(2, 5) = 16, r_{0,3}(2, 5) = 14, r_{0,4}(2, 5) = 8$  and  $r_{1,3}(2, 5) = 20$ . Using  $G(2, 5) \cong G(3, 5)$ , the above example gives all the possible values of  $r$  for the  $G(3, 5)$  model.

### 3.3.2. $G(m, n)$ for $m > 2$

The  $G(3, n)$  model is strongly related to the  $G(2, n)$  and  $G(1, n)$  cases. Indeed, we have to distinguish three cases: three isolated projectors, two consecutive projectors and one isolated projector and three consecutive projectors. Explicitly, we have ( $i < j < k$ )

$$Z_{i,j,k}^{(n)} = \left( \frac{P_+^i f^{(n)}}{|P_+^i f^{(n)}|}, \frac{P_+^j f^{(n)}}{|P_+^j f^{(n)}|}, \frac{P_+^k f^{(n)}}{|P_+^k f^{(n)}|} \right), \quad (3.3.23)$$

for  $(i, j, k)$  with  $j > i + 1$  and  $k > j + 1$  (the first case),  $(i, j, k) = (i, j, j + 1)$  with  $j > i + 1$  and  $(i, j, k) = (i, i + 1, k)$  with  $k > i + 2$  (the second case) and, finally,  $(i, j, k) = (i, i + 1, i + 2)$  (the third case), for  $0 \leq i \leq n - 1$ .

In the first case, we obtain the Lagrangian density

$$\mathcal{L}(Z_{i,j,k}^{(n)}) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln(M_{i+1} M_i M_{j+1} M_j M_{k+1} M_k), \quad (3.3.24)$$

with corresponding  $r$  given by

$$r_{ijk}(3, n) = 3(n-1) + 2i(n-1-i) + 2j(n-1-j) + 2k(n-1-k). \quad (3.3.25)$$

For the second case, we have two possibilities:

$$\mathcal{L}(Z_{i,j,j+1}^{(n)}) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln(M_{i+1} M_i M_{j+2} M_j), \quad (3.3.26)$$

and  $r$  given by

$$r_{i,j,j+1}(3, n) = 3n - 5 + 2i(n-1-i) + 2j(n-2-j) \quad (3.3.27)$$

and

$$\mathcal{L}(Z_{i,i+1,k}^{(n)}) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln(M_{i+2} M_i M_{k+1} M_k), \quad (3.3.28)$$

and  $r$  given by

$$r_{i,i+1,k}(3, n) = 3n - 5 + 2i(n-2-i) + 2k(n-1-k). \quad (3.3.29)$$

For the third case,

$$\mathcal{L}(Z_{i,i+1,i+2}^{(n)}) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln(M_{i+3} M_i), \quad (3.3.30)$$

with

$$r_{i,i+1,i+2}(3, n) = 3(n-3) + 2i(n-3-i). \quad (3.3.31)$$

Again, we can obtain upper bounds on the value of  $r$ . Explicitly, we get for  $n \geq 5$

$$r_{p-3,p-1,p+1}(3, 2p) = 6p^2 - 19, \quad r_{p-2,p,p+2}(3, 2p+1) = 6p^2 + 6p - 16. \quad (3.3.32)$$

This can be easily generalized to the  $G(m, n)$  model given the Lagrangian densities of the different solutions for  $G(k, n)$  for  $k < m$ . Only one case is missing, the case where we have the sum of  $m$  consecutive projectors. In this case, the Lagrangian density is given by

$$\mathcal{L}(Z_{i,i+1,\dots,i+m-1}^{(n)}) = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln(M_{i+m} M_i), \quad (3.3.33)$$

with  $r$  given by, using formula (3.3.6),

$$r_{i,i+1,\dots,i+m-1}(m, n) = m(n-m) + 2i(n-m-i). \quad (3.3.34)$$

We see that for  $i = 0$ , we retrieve the values of  $r$  corresponding to the holomorphic solution namely  $r_{0,\dots,m-1} = m(n-m)$ .

In the  $G(m, n)$  model with  $n \geq 2m - 1$ , the upper bound of the different values of  $r$  is given by:

$$r_{p-m, p-m+2, \dots, p+m-2}(m, 2p) = \frac{1}{3}m(6p^2 - 2m^2 - 1), \quad (3.3.35)$$

$$r_{p-m+1, p-m+3, \dots, p+m-1}(m, 2p+1) = \frac{2}{3}m(1 - m^2 + 3p(1+p)). \quad (3.3.36)$$

The proof is similar to the one used in the special case of  $m = 2$ . Note that the condition  $n \geq 2m - 1$  is crucial in our analysis. Indeed, in the case  $n = 2p$ , it is equivalent to  $p - m \geq 0$ , which ensures the existence of the projector

$$P_{p-m} + P_{p-m+2} + \dots + P_{p+m-2}. \quad (3.3.37)$$

We thus see that Eq. (3.3.35) gives the upper bounds for the  $G(m, 2p)$  models only for the values  $1 \leq m \leq p$ , but using the duality property  $G(m, 2p) \cong G(2p-m, 2p)$  we get all of them. The reasoning is similar for the odd case  $n = 2p + 1$ .

We finish this section with the following comments: given that  $G(m, n) \cong G(n - m, n)$ , we see that, in order to get new results and solutions which are not related to the lower dimensional Grassmannians  $G(i, n)$  with  $i \leq m - 1$ , we have to impose  $n - m \geq m$  or  $n \geq 2m$ . This means that, for  $m$  fixed, the minimal value of  $n$  is given by  $n = 2m$ .

Moreover, in the case of  $G(m, 2m)$ , we get a set of  $\frac{1}{2} \binom{2m}{m} - 1$  non-holomorphic and non-equivalent solutions. Indeed, we can construct a total of  $\binom{2m}{m}$  projectors in  $G(m, 2m)$ . Using the completion relation  $\sum_{k=1}^m P_{i_k} = \mathbb{I} - \sum_{k=m+1}^{2m} P_{i_k}$ , we get  $\frac{1}{2} \binom{2m}{m}$  non-equivalent solutions. We get the desired result by removing the holomorphic solution.

### 3.4. CONSTANT CURVATURES FOR SOME GRASSMANNIAN MODELS

In this section, we summarize the possible values of the constant  $r(2, n)$  appearing in the curvature  $\mathcal{K} = \frac{4}{r(2, n)}$  for the  $G(2, n)$  model with  $n = 4, 5, 6, 7$ . The possible values of  $r(2, n)$  are listed in the following table.

This puts together all the values mentioned in Sections 2 and 3. As mentioned above, in the  $G(2, 6)$  model, we see that we obtain two non equivalent non-holomorphic solutions  $Z_{02}^{(6)}$  and  $Z_{03}^{(6)}$  of the same curvature  $\mathcal{K} = \frac{2}{11}$ . Here are the

TAB. 3.1. Possible values of  $r(2, n)$  for  $n = 4, 5, 6, 7$ 

$G(2, n)$	$G(2, 4)$	$G(2, 5)$	$G(2, 6)$	$G(2, 7)$
$r_0$	4	6	8	10
$r_1$	6	10	14	18
$r_2$	-	-	16	22
$r_{02}$	10	16	22	28
$r_{03}$	-	14	22	30
$r_{04}$	-	8	18	28
$r_{05}$	-	-	10	22
$r_{06}$	-	-	-	12
$r_{13}$	-	20	30	40
$r_{14}$	-	-	26	38
$r_{15}$	-	-	-	32
$r_{24}$	-	-	-	44

explicit expressions of these solutions

$$Z_{02}^{(6)} = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\frac{5}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{10}x_-^2 \\ \sqrt{5}x_+ & \sqrt{2}x_-(-2 + 3|x|^2) \\ \sqrt{10}x_+^2 & 1 + 3|x|^4 - 6|x|^2 \\ \sqrt{10}x_+^3 & x_+(3 + |x|^4 - 6|x|^2) \\ \sqrt{5}x_+^4 & \sqrt{2}x_+^2(3 - 2|x|^2) \\ x_+^5 & \sqrt{10}x_+^3 \end{pmatrix},$$

$$Z_{03}^{(6)} = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\frac{5}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{10}x_-^3 \\ \sqrt{5}x_+ & \sqrt{2}x_-^2(3 - 2|x|^2) \\ \sqrt{10}x_+^2 & -x_-(3 + |x|^4 - 6|x|^2) \\ \sqrt{10}x_+^3 & 1 + 3|x|^4 - 6|x|^2 \\ \sqrt{5}x_+^4 & \sqrt{2}x_+(2 - 3|x|^2) \\ x_+^5 & \sqrt{10}x_+^2 \end{pmatrix}.$$

A similar exercise can be done for the  $G(3, n)$  model for  $n = 6, 7$ . Indeed, for  $G(3, 6)$  we get

$$\{r_{012}\} = \{9\}, \quad \{r_{013}, r_{014}, r_{015}\} = \{25, 21, 13\},$$

$$\{r_{023}, r_{034}, r_{045}\} = \{21, 19, 13\}, \quad \{r_{024}, r_{025}, r_{035}\} = \{35, 27, 27\}$$

and for the  $G(3, 7)$  model, we have

$$\{r_{012}, r_{123}, r_{234}\} = \{12, 18, 20\},$$

$$\{r_{013}, r_{014}, r_{015}, r_{016}, r_{124}, r_{125}\} = \{34, 32, 26, 16, 40, 34\},$$

$$\{r_{023}, r_{034}, r_{045}, r_{134}\} = \{28, 28, 24, 38\},$$



$$\{r_{024}, r_{025}, r_{026}, r_{035}, r_{036}, r_{135}\} = \{50, 44, 34, 46, 36, 56\}.$$

### 3.5. FURTHER COMMENTS AND CONCLUSIONS

In this paper we have generalized the results of [1] to non-holomorphic immersions of  $S^2$  into Grassmannians. Some of our results coincide with the results obtained some time ago (see the references in [5]) but at that time the emphasis was on different aspects of this problem. Some of our results are, however, more general and more explicit. Given the mathematical interest in  $S^2$  immersions into Grassmannians [8] we thought it is worthwhile to look at these 'older' expressions and rederive them in a new setting. Moreover, our procedure is simpler and, in a way, more explicit. In particular, it can be used to check with ease whether a given immersion has a constant curvature or not (see our work in [1]).

In addition, it also shows very clearly how to go further and generalize it to the study of immersions into more general (larger) Grassmannians. This problem is currently under investigation.

Let us finish by mentioning that in this work we can also exploit the following observation. Consider, for example, the solutions of the  $G(2, n)$  model and note that we can obtain some of them by following simple procedure: given two vector fields  $f \in \mathbb{C}P^{k-1}$  and  $g \in \mathbb{C}P^l$  such that  $k + l = n$ , one can construct a solution of  $G(2, n)$  by taking

$$Z_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{P_+^i f}{|P_+^i f|} & 0 \\ 0 & \frac{P_+^j g}{|P_+^j g|} \end{pmatrix}, \quad (3.5.1)$$

where  $0 \leq i \leq k - 1$  and  $0 \leq j \leq l - 1$ . The Lagrangian density, as given in (3.2.3), corresponding to  $Z_{ij}$  can be easily calculated and we get

$$\mathcal{L}(Z_{ij}) = \mathcal{L}(Z_i^f) + \mathcal{L}(Z_j^g), \quad (3.5.2)$$

where  $Z_i^f = \frac{P_+^i f}{|P_+^i f|}$  and  $Z_j^g = \frac{P_+^j g}{|P_+^j g|}$ . We thus see that if  $f$  and  $g$  are the Veronese sequences in  $\mathbb{C}P^{k-1}$  and  $\mathbb{C}P^{l-1}$ , respectively, then we get

$$\mathcal{L}(Z_{ij}) = \frac{r_i(1, k) + r_j(1, l)}{(1 + |x|^2)^2}, \quad (3.5.3)$$

with corresponding constant curvature  $\mathcal{K} = \frac{4}{r_i(1, k) + r_j(1, l)}$ .

### ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been supported in part by research grants from NSERC of Canada. LD also acknowledges a FQRNT fellowship.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] L. Delisle, V. Hussin, W. J. Zakrzewski, Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models: (1) holomorphic solutions, *J. Geom. Phys.* 66 (2013) 24–36.
- [2] J. Bolton, G. R. Jensen, M. Rigoli, L. M. Woodward, On conformal minimal immersions of  $S^2$  into  $\mathbb{C}P^n$ , *Math. Ann.* 279 (1988) 599–620.
- [3] See *e.g.* A. M. Din, W. J. Zakrzewski, Further properties of classical solutions in Grassmannian  $\sigma$  models, *Nuclear Phys. B* 237 (1984) 461–476; F. E. Burstall, J. C. Wood, The construction of harmonic maps into complex Grassmannians, *J. Differential Geom.* 23 (1986) 255–298.
- [4] M. Svensson, J. C. Wood, Filtrations, factorizations and explicit formulae for harmonic maps, *Comm. Math. Phys.* 310 (2012) 99–134; A. Bahy-El-Dien, J. C. Wood, The explicit construction of all harmonic two-sphere in  $G_2(R^n)$ , *J. Reine Angew. Math.* 398 (1989) 36–66; X. Jiao, J. Peng, Pseudo-holomorphic curves in complex Grassmannian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (2003) 3715–3726; J. Fei, X. Xiao, X. Xu, On conformal 2-spheres in complex Grassmann manifold  $G(2, n)$ , *Proc. Indian Acad. Sci.* 121 (2011) 181–199.
- [5] W. J. Zakrzewski, *Low Dimensional Sigma Models*, Hilger, Bristol, 1989.
- [6] A. J. Macfarlane, Generalisation of  $\sigma$ -models and  $\mathbb{C}P^N$  models, and Instantons, *Phys. Lett.* 82 B (1979) 239–241.
- [7] V. Hussin, I. Yurdusen, W. J. Zakrzewski, Canonical surfaces associated with projectors in Grassmannian sigma models, *J. Math. Phys.* 51 (2010) 103509-1-15.
- [8] Zhen-Qi Li, Zhu-Huan Yu, Constant curved minimal 2-spheres in  $G(2, 4)$ , *Manuscripta Math.* 100 (1999) 305–316.



# Chapter 4

---

## CONSTANT CURVATURE SURFACES OF THE SUPERSYMMETRIC $\mathbb{C}P^{N-1}$ SIGMA MODEL

Auteurs: L. Delisle, V. Hussin, İ. Yurduşen et W. J. Zakrzewski

Soumis à la revue Communications in Mathematical Physics

### Résumé

Nous construisons des surfaces à courbure constante issues des solutions à action finie du modèle sigma  $\mathbb{C}P^{N-1}$  supersymétrique. Nous démontrons qu'il existe une unique solution holomorphe menant à des surfaces à courbure constante: la séquence de Veronese généralisées. Nous présentons une construction explicite des solutions non-holomorphes pour les modèles  $\mathbb{C}P^1$  et  $\mathbb{C}P^2$  et une discussion générale pour les constructions possibles de ces solutions pour  $N > 3$ .

### Abstract

Constant curvature surfaces are constructed from the finite action solutions of the supersymmetric  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model. It is shown that there is a unique holomorphic solution which leads to constant curvature surfaces: the generalized Veronese curve. We also present an explicit construction of non-holomorphic solutions for the supersymmetric  $\mathbb{C}P^1$  and  $\mathbb{C}P^2$  models and give a general discussion on the possible construction of these solutions for  $N > 3$ .

### 4.1. INTRODUCTION

Studies of exact solutions of integrable models are a subject of great interest in the mathematics and physics communities. In particular, the bosonic integrable  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model (in 2 euclidean dimensions) has found applications in physics,

biology and mathematics [1, 2, 3, 4, 5]. It also solves a linear spectral problem [6, 7, 8].

This bosonic model is described by a complex vector field  $Z_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^N$  which satisfies  $|Z_b|^2 = 1$ . Note that we have put an extra label  $b$  to emphasise that we are dealing with a purely bosonic model; later we will generalise this to the supersymmetric case in which a similar field is a superfield *i.e.* is a function on a superspace. The field  $Z_b$  satisfies equations which describe the critical points of the action functional

$$\mathcal{S}_b = \int_{\mathbb{R}^2} dx_+ dx_- \mathcal{L}_b, \quad \mathcal{L}_b = 2(|D_{x_+} Z_b|^2 + |D_{x_-} Z_b|^2). \quad (4.1.1)$$

In this expression we use the complex variables  $x_{\pm} = x \pm iy$  to parametrise  $\mathbb{R}^2$  and have introduced the covariant derivatives  $D_{x_{\pm}} \Lambda = \partial_{x_{\pm}} \Lambda - \Lambda(Z_b^\dagger \partial_{x_{\pm}} Z_b)$ .

It is easy to see that these critical points of (4.1.1) are given by fields  $Z_b$  which solve the Euler-Lagrange equations

$$D_{x_+} D_{x_-} Z_b + Z_b |D_{x_-} Z_b|^2 = 0. \quad (4.1.2)$$

If we now restrict our attention to solutions of (4.1.2) of finite action  $\mathcal{S}_b$ , we have to require that  $D_{x_{\pm}} Z_b \rightarrow 0$  for  $|x \pm iy| \rightarrow \infty$ . This compactifies  $\mathbb{R}^2 \sim S^2$  via the stereographic projection. All such critical point maps are then called harmonic maps in the mathematical literature [9]. As all such maps are characterised by a topological number (corresponding to the values of  $\pi_2(\mathbb{C}P^{N-1})$ ) some of these solutions have been also interpreted as static topological solitons [6, 10] of the same model in (2+1) dimensions.

In fact, all such harmonic maps have been known for some time (see *e.g.* [6]). They can be obtained from the recursive application of an orthogonalization operator  $P_{x_+}$  to a holomorphic solution  $f(x_+)$  in order to obtain, in the general case,  $N - 2$  mixed fields  $P_{x_+}^i f$ , for  $i = 1, 2, \dots, N - 2$ , and a anti-holomorphic field  $P_{x_+}^{N-1} f$ . Thus, they are given by

$$Z_{b,k} = \frac{P_{x_+}^k f}{|P_{x_+}^k f|}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (4.1.3)$$

where  $Z_{b,0}$  is sometimes referred to as an instanton, while  $Z_{b,i}$  for  $i = 1, 2, \dots, N - 2$  as mixtures of instantons and anti-instantons and  $Z_{b,N-1}$  as an anti-instanton solution. Note that we have

$$P_{x_+}^0 f = f, \quad P_{x_+} f = \partial_{x_+} f - \frac{f^\dagger \partial_{x_+} f}{|f|^2} f, \quad P_{x_+}^k f = P_+(P_{x_+}^{k-1} f), \quad k = 1, \dots, N - 1. \quad (4.1.4)$$

The  $\mathbb{C}P^{N-1} \cong G(1, N)$  bosonic sigma model, as well as its generalization to Grassmannian  $G(M, N)$  bosonic model [6], can be formulated also in a gauge

invariant way in terms of rank  $M$  orthogonal projectors [6, 10, 11]. Indeed, the rank one orthogonal projector  $\mathbb{P}_b = Z_b Z_b^\dagger \in \mathbb{C}^{N \times N}$ , satisfying  $\mathbb{P}_b = \mathbb{P}_b^\dagger = \mathbb{P}_b^2$  and  $\text{Tr } \mathbb{P}_b = 1$ , is the solution of the equivalent form of the Euler-Lagrange equations (4.1.2):

$$[\partial_{x_+} \partial_{x_-} \mathbb{P}_b, \mathbb{P}_b] = 0. \quad (4.1.5)$$

This gauge invariant formulation of the  $\mathbb{C}P^{N-1}$  model played an essential role in the construction of surfaces associated with solutions of the model [7, 8, 12, 14, 15, 13].

Few years ago, the Weierstrass representation of surfaces in multidimensional spaces [9, 16, 17, 18] such as Lie algebras and groups has generated interest in surfaces associated with the solutions  $Z_{b,k} = (4.1.3)$  of the  $\mathbb{C}P^{N-1}$  bosonic sigma model [7, 8, 11, 12, 14, 15, 13, 19]. Indeed, these solutions were shown to possess interesting geometric properties and they live in the  $su(N)$  Lie algebra [7, 8].

To construct such surfaces, it was realized that a special operator which is a solution of a conservation law associated to the model, generated an  $su(N)$  closed one-form  $\alpha_b$  [11, 12]. Indeed, from the Euler-Lagrange equation (4.1.5), we get the conservation law

$$\partial_{x_+} \mathbf{L}_b - \partial_{x_-} \mathbf{L}_b^\dagger = 0, \quad \mathbf{L}_b = [\partial_{x_-} \mathbb{P}_b, \mathbb{P}_b], \quad (4.1.6)$$

from which we can construct the  $su(N)$  valued one-form

$$\alpha_b = \mathbf{L}_b dx_- + \mathbf{L}_b^\dagger dx_+, \quad (4.1.7)$$

which is closed whenever  $\mathbb{P}_b$  is a solution of the Euler-Lagrange equations (4.1.5). From the Poincaré lemma [20, 21] and the fact that  $S^2$  is compact, we deduce that  $\alpha_b$  is also exact and so can be used to construct a surface  $\mathbf{X}_b$  from its tangent vector as

$$\partial_{x_+} \mathbf{X}_b = \mathbf{L}_b^\dagger, \quad \partial_{x_-} \mathbf{X}_b = \mathbf{L}_b. \quad (4.1.8)$$

The surface  $\mathbf{X}_b$  naturally lives in the Lie algebra  $su(N)$  for a convenient choice of the constant of integration, and from the scalar product

$$(A, B) = \frac{1}{2} \text{Tr}(AB), \quad A, B \in su(N), \quad (4.1.9)$$

we can calculate various geometric properties of these surfaces such as the induced metric and the gaussian curvature [8, 11, 12, 14, 15, 13, 19]. Indeed, from the first fundamental form  $\mathcal{I} = (d\mathbf{X}_b, d\mathbf{X}_b)$ , we find that the components of the metric tensor  $g_b$  are given by

$$g_{b,++} = g_{b,--}^\dagger = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{L}_b^\dagger)^2, \quad g_{b,+-} = g_{b,-+} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{L}_b \mathbf{L}_b^\dagger) \quad (4.1.10)$$

or, in terms of the projector  $\mathbb{P}_b$  by

$$g_{b,++} = g_{b,--}^\dagger = -\frac{1}{2}\text{Tr}(\partial_{x_+}\mathbb{P}_b\partial_{x_+}\mathbb{P}_b), \quad g_{b,+ -} = g_{b,- +} = \frac{1}{2}\text{Tr}(\partial_{x_-}\mathbb{P}_b\partial_{x_+}\mathbb{P}_b). \quad (4.1.11)$$

Then, for the solutions  $\mathbb{P}_b$  of (4.1.5), one can show [8, 11, 12, 14, 15, 13] that the metric components  $g_{b,++} = 0$  and thus we deduce the explicit form of the gaussian curvature [9, 22]:

$$\mathcal{K}_b = -\frac{1}{g_{b,+ -}}\partial_{x_+}\partial_{x_-}\ln g_{b,+ -}. \quad (4.1.12)$$

Other geometric properties, such as the second fundamental form, the Willmore functional and the mean curvature have also been determined [8, 11]. In this paper we limit ourselves to the study of the gaussian curvature. This choice is motivated by the fact that two decades ago, Bolton *et al.* in [19] studied various properties of the surfaces obtained from the solutions of the  $\mathbb{C}P^{N-1}$  bosonic sigma model. They were particularly interested in finding conditions for these surfaces to be of constant gaussian curvature. In [19] they presented a complete classification of such surfaces in terms of the Veronese curve and gave also some pinching theorems. In fact they showed that, up to gauge transformations, the only solutions which lead to constant curvature surfaces are those given by  $Z_{b,k} = (4.1.3)$  for which  $f$  is chosen as the Veronese curve

$$f(x_+) = \left( 1, \sqrt{\binom{N-1}{1}x_+}, \dots, \sqrt{\binom{N-1}{r}x_+^r}, \dots, x_+^{N-1} \right). \quad (4.1.13)$$

For further discussions on the construction of such surfaces, we refer the reader to the Appendix where we recall how the surfaces  $\mathbf{X}_b$  associated to holomorphic solutions naturally lives in the Lie algebra  $su(N)$  and show that they can be immersed in  $\mathbb{R}^{N^2-1}$  where they describe spheres of prescribed radius.

A classification of such solutions for a general Grassmannian  $G(M, N)$  bosonic sigma model [6] is not complete and has been the object of extensive research work [14, 15, 13, 23, 24, 25, 26]. Recently, three of us (LD, VH and WJZ) obtained some new results and gave two conjectures relating to the possible values of the constant gaussian curvature of such solutions [14] and, recently, these conjectures have got partial support [15, 27, 28].

The aim of this paper is to consider the supersymmetric (SUSY) generalization of this problem for which little is known. General considerations of the SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model and its solutions have been given in several papers [29, 30, 31]. A good review is given in [6]. The constraints which appear in the usual formulation of this model have limited some authors to the study of the

constant curvature surfaces obtained from only the holomorphic solutions of the SUSY  $\mathbb{C}P^1$  model [32]. In this paper, we consider the SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  model and we show that, up to gauge symmetry, the holomorphic solutions corresponding to the constant curvature surfaces are related to a generalization of the Veronese curve (4.1.13). Furthermore, we also present the explicit forms of the non-holomorphic solutions and show that, for the non trivial  $\mathbb{C}P^2$  model, these solutions are heavily constrained as predicted by the authors in [32].

In Section 2, we present a description of the SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model and discuss a systematic way of constructing surfaces, via the Weierstrass representation, from solutions of this model. Section 3 is devoted to the construction of special invariant solutions of the model and of the constant curvature surfaces obtained from them. Then, in Section 4, we consider the case of SUSY holomorphic solutions of the model and present a theorem that shows that the only solutions with constant curvature are in fact associated with what we call a holomorphic generalized Veronese curve. Section 5 presents a discussion of non-holomorphic solutions of the model for the special cases of SUSY  $\mathbb{C}P^1$  and  $\mathbb{C}P^2$ . In Section 6, we discuss possible generalizations of our results to SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  and SUSY  $G(M, N)$  models and present some partial solutions. We finish the paper with concluding remarks and our plans for future studies.

## 4.2. SUSY $\mathbb{C}P^{N-1}$ SIGMA MODEL

In this section, we consider the two-dimensional SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model and show how to generate surfaces from its solutions following a procedure similar to the one used in the bosonic model.

### 4.2.1. The model

The SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model can be constructed using a two-dimensional superspace  $(x_1, x_2; \theta_1, \theta_2)$  where  $(x_1, x_2)$  are local coordinates on  $\mathbb{R}^2$  and  $(\theta_1, \theta_2)$  are components of a Majorana spinor regarded as being real. This superspace  $(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2)$ , whose bosonic part is compactified to the 2-sphere  $S^2$ , will be denoted by  $\tilde{S}^2$ . For future considerations, we work in the two-dimensional complex superspace  $(x_+, x_-; \theta_+, \theta_-)$ , that will also be denoted by  $\tilde{S}^2$ , where

$$x_{\pm} = x_1 \pm ix_2, \quad \theta_{\pm} = \theta_1 \pm i\theta_2. \quad (4.2.1)$$



The dynamical variable field of the model is a vector bosonic superfield  $\Phi$  defined on the complex superspace which has the following finite Taylor expansion

$$\Phi(x_+, x_-; \theta_+, \theta_-) = z(x_+, x_-) + i\theta_+\chi_+(x_+, x_-) + i\theta_-\chi_-(x_+, x_-) - \theta_+\theta_-F(x_+, x_-), \quad (4.2.2)$$

where  $z$  and  $F$  are  $N$ -components bosonic vectors and  $\chi_+$  and  $\chi_-$  are  $N$ -components fermionic vectors. As in the bosonic sigma model (4.1.2), the field  $\Phi$  satisfies the nonlinear constraint

$$|\Phi|^2 = \Phi^\dagger\Phi = 1, \quad (4.2.3)$$

where the complex conjugation of  $\Phi$  is defined naturally as

$$\Phi^\dagger = z^\dagger + i\theta_-\chi_+^\dagger + i\theta_+\chi_-^\dagger - \theta_+\theta_-F^\dagger. \quad (4.2.4)$$

The explicit form of the constraint (4.2.3) may be found by direct calculations (see for example [6, 32]).

The action is defined in this case as [6, 29, 30, 31, 32]

$$\mathcal{S} = \int_{\tilde{S}^2} d\theta_+d\theta_-dx_+dx_-\mathcal{L} = \int_{S^2} dx_+dx_-(\partial_{\theta_+}\partial_{\theta_-}\mathcal{L}), \quad (4.2.5)$$

where the Lagrangian density  $\mathcal{L}$  is given by

$$\mathcal{L} = 2(|\check{D}_+\Phi|^2 - |\check{D}_-\Phi|^2). \quad (4.2.6)$$

We note that the action (4.2.5) depends only on the  $\theta_+\theta_-$  component of the Lagrangian density  $\mathcal{L}$  and, as a consequence, the finiteness of the action depends only on this component of the Lagrangian. The supercovariant derivatives  $\check{D}_\pm$  are defined as

$$\check{D}_\pm\Lambda = \check{\partial}_\pm\Lambda - \Lambda(\Phi^\dagger\check{\partial}_\pm\Phi), \quad (4.2.7)$$

where the usual superderivatives

$$\check{\partial}_\pm = -i\partial_{\theta_\pm} + \theta_\pm\partial_{x_\pm} \quad (4.2.8)$$

are SUSY invariant operators. Both these derivatives anticommute with the supercharges  $\check{Q}_\pm$  [33] given by

$$\check{Q}_\pm = i\partial_{\theta_\pm} + \theta_\pm\partial_{x_\pm}. \quad (4.2.9)$$

and all these operators satisfy the usual anticommutation rules

$$\begin{aligned} \{\check{\partial}_-, \check{\partial}_+\} &= 0, & \check{\partial}_\pm^2 &= -i\partial_{x_\pm}, \\ \{\check{Q}_-, \check{Q}_+\} &= 0, & \check{Q}_\pm^2 &= i\partial_{x_\pm}, \\ \{\check{Q}_\pm, \check{\partial}_\pm\} &= 0, & \{\check{Q}_\pm, \check{\partial}_\mp\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Using the principle of least action, we find that the superfield  $\Phi$  satisfies the Euler-Lagrange equations given as

$$\check{D}_+ \check{D}_- \Phi + |\check{D}_- \Phi|^2 \Phi = 0, \quad (4.2.11)$$

together with the constraint (4.2.3). In order to obtain finite action solutions of the SUSY sigma model, we have to impose the boundary conditions

$$\check{D}_\pm \Phi \rightarrow 0, \quad |x_\pm| \rightarrow \infty. \quad (4.2.12)$$

#### 4.2.2. The projector formalism and surfaces constructed from the solutions of the SUSY model

Here we discuss our construction of surfaces in the Lie algebra  $su(N)$  using a procedure similar to the one described before for the bosonic model (see Introduction). First we consider the orthogonal projector formulation of our SUSY model. From a solution  $\Phi$  of the SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model, we construct, as in the bosonic model [6], the supermap  $\tilde{\mathbb{P}} : \tilde{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$  given by

$$\tilde{\mathbb{P}} = \Phi \Phi^\dagger. \quad (4.2.13)$$

The supermap  $\tilde{\mathbb{P}}(x_+, x_-, \theta_+, \theta_-)$  is an orthogonal projector of rank one since, from (4.2.3), it satisfies the usual bosonic constraints

$$\tilde{\mathbb{P}}^\dagger = \tilde{\mathbb{P}}, \quad \tilde{\mathbb{P}}^2 = \tilde{\mathbb{P}}, \quad \text{Tr } \tilde{\mathbb{P}} = 1. \quad (4.2.14)$$

The Euler-Lagrange equations (4.2.11) may then be rewritten as

$$[\check{\partial}_+ \check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{P}}] = 0. \quad (4.2.15)$$

which turns out to give us a superconservation law [32]

$$\check{\partial}_+ [\check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{P}}] - \check{\partial}_- [\check{\partial}_+ \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{P}}] = 0. \quad (4.2.16)$$

This expression may be transformed into a bosonic conservation law by applying the  $\check{\partial}_+ \check{\partial}_-$  operator to it. Then we get

$$\partial_{x_+} \mathbf{L} - \partial_{x_-} \mathbf{L}^\dagger = 0, \quad \mathbf{L} = i \check{\partial}_- [\check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{P}}], \quad (4.2.17)$$

expressions which are similar to the ones obtained in the bosonic case (4.1.6) but now, we have

$$\mathbf{L} = [\partial_{x_-} \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{P}}] - 2i (\check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}})^2. \quad (4.2.18)$$

We would like to point out that the term  $(\check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}})^2$  is non zero since  $\tilde{\mathbb{P}}$  is a matrix.

Next we perform the construction of the surfaces generated by solutions of the SUSY model just as this has been done in the bosonic case and explained in the introduction. The corresponding one-form  $\tilde{\alpha}$  is still traceless even though we

have an additional contribution with respect to the bosonic case since  $\text{Tr}(AB) = -\text{Tr}(BA)$  for  $A$  and  $B$  fermionic matrices. This form satisfies  $\tilde{\alpha}^\dagger = \tilde{\alpha}$ . The metric is still given by (4.1.11) where now the projector  $\tilde{\mathbb{P}}$  is a superfield.

Note that these results are more general than the one obtained in [32], where only the holomorphic case was studied. Here our procedure applies also to non-holomorphic immersions.

Introducing the canonical variable  $\Phi = \frac{w}{|w|}$ , we can construct the rank one orthogonal projector as defined by (4.2.13)

$$\tilde{\mathbb{P}} = \frac{ww^\dagger}{|w|^2}. \quad (4.2.19)$$

We call this particular form the canonical one since it is well defined on the equivalence classes of  $[w]$  in  $\mathbb{C}P^{N-1}$  and it trivially satisfies the conditions of being a rank one orthogonal projector (4.2.14). In this canonical representation, the general expression for the metric  $\tilde{g}$  (this new notation has been introduced to emphasise that our metric is now a function of  $\theta_\pm$  and so is defined on superspace) is

$$\tilde{g}_{++} = \tilde{g}_{--}^\dagger = -\frac{1}{|w|^2} \partial_{x_+} w^\dagger (\mathbb{I} - \tilde{\mathbb{P}}) \partial_{x_+} w \quad (4.2.20)$$

and

$$\tilde{g}_{+-} = \tilde{g}_{-+} = \frac{1}{2|w|^2} (\partial_{x_+} w^\dagger (\mathbb{I} - \tilde{\mathbb{P}}) \partial_{x_-} w + \partial_{x_-} w^\dagger (\mathbb{I} - \tilde{\mathbb{P}}) \partial_{x_+} w). \quad (4.2.21)$$

This paper, as it will be shown later, deals with conformally parametrized surfaces in the sense that  $\tilde{g}_{++} = \tilde{g}_{--} = 0$  and, in this case, the gaussian curvature is given as in (4.1.12) but involving the superfields.

### 4.3. SUSY INVARIANT SOLUTIONS AND THE VERONESE SEQUENCE

In this section, we construct harmonic solutions of the SUSY sigma model by performing SUSY translations. We show that such solutions generate a finite set of constant curvature surfaces in  $su(N)$  if we restrict ourself to the Veronese sequence in a proper way. This procedure is similar as the one described for the bosonic case. The major question that will be treated in the following sections is the completeness of the set of such solutions.

Let us start by assuming that our SUSY orthogonal projector  $\tilde{\mathbb{P}}$  is such that it can be written as

$$\tilde{\mathbb{P}}(x_+, x_-, \theta_+, \theta_-) = \tilde{\mathbb{P}}(y_+, y_-), \quad (4.3.1)$$

where  $y_+$  and  $y_-$  are SUSY translated variables defined by

$$y_+ = x_+ + i\theta_+ \frac{\xi_1(x_+)}{\sqrt{N-1}}, \quad y_- = y_+^\dagger. \quad (4.3.2)$$

In this case, the superconservation equation (4.2.16) becomes equivalent to

$$\left( \frac{|\xi_1|^2}{N-1} - \theta_+ \frac{\xi_1^\dagger}{\sqrt{N-1}} + \theta_- \frac{\xi_1}{\sqrt{N-1}} - \theta_+ \theta_- \right) [\partial_{y_+} \partial_{y_-} \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathbb{P}}] = 0, \quad (4.3.3)$$

where we have used the convention that  $|\xi_1|^2 = \xi_1^\dagger \xi_1$ .

Finding solutions  $\tilde{\mathbb{P}} = (4.3.1)$  which satisfy (4.3.3) in this case has got reduced to the ones of the bosonic case (4.1.5) and we can exploit the fact that the complete set of solutions is known [6]. Indeed, starting with  $w = w(y_+)$ , a holomorphic superfield, the complete set of solutions is obtained by considering  $\{P_{y_+}^k w, k = 0, \dots, N-1\}$  where the definition of  $P_{y_+}$  is as in (4.1.4) with  $y_+$  and  $w = w(y_+)$  being now a supervariable and a superfield respectively.

Let us now note that this set can be used to construct  $N$  projectors defined as

$$\tilde{\mathbb{P}}_k(y_+, y_-) = \frac{P_{y_+}^k w (P_{y_+}^k w)^\dagger}{|P_{y_+}^k w|^2}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.3.4)$$

where for  $k = 0$  we have a holomorphic solution and for  $k = 1, \dots, N-2$  non-holomorphic (or mixed) solutions and for  $k = N-1$  an anti-holomorphic solution. Of course, each of these orthogonal projectors solves the equation

$$[\partial_{y_+} \partial_{y_-} \tilde{\mathbb{P}}_k(y_+, y_-), \tilde{\mathbb{P}}_k(y_+, y_-)] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.3.5)$$

Note that the holomorphic superfield  $w = w(y_+)$  can be expanded as the SUSY invariant holomorphic solution

$$w(y_+) = u(x_+) + i\theta_+ \frac{\xi_1(x_+)}{\sqrt{N-1}} \partial_{x_+} u(x_+). \quad (4.3.6)$$

In consequence, the SUSY invariant non-holomorphic solutions can be expanded as ( $k = 1, \dots, N-1$ )

$$P_{y_+}^k w = \left( 1 + i\theta_+ \frac{\xi_1(x_+)}{\sqrt{N-1}} \partial_{x_+} + i\theta_- \frac{\xi_1^\dagger(x_+)}{\sqrt{N-1}} \partial_{x_-} - \theta_+ \theta_- \frac{|\xi_1(x_+)|^2}{N-1} \partial_{x_+} \partial_{x_-} \right) P_{x_+}^k u. \quad (4.3.7)$$

This shows that the purely bosonic part is given by  $P_{x_+}^k u(x_+)$  and the fermionic parts are functions of an arbitrary function  $\xi_1(x_+)$  and of the usual derivatives of the superfield  $P_{x_+}^k u(x_+)$ .

### 4.3.1. Constant curvature surfaces of the Veronese type

Based on the results of Section 2, we now compute the metric and the gaussian curvature of the SUSY invariant solutions we have just obtained.

Using the property that

$$\partial_{y_+} \tilde{\mathbb{P}}_k = \left( 1 + i\theta_+ \frac{\partial_{x_+} \xi_1}{\sqrt{N-1}} \right) \left( \frac{P_{y_+}^{k+1} w (P_{y_+}^k w)^\dagger}{|P_{y_+}^k w|^2} - \frac{P_{y_+}^k w (P_{y_+}^{k-1} w)^\dagger}{|P_{y_+}^{k-1} w|^2} \right), \quad (4.3.8)$$

the metric components (4.1.11), in the SUSY case, become

$$\tilde{g}_{++} = \tilde{g}_{--} = 0, \quad \tilde{g}_{+-} = \tilde{g}_{-+} = \frac{A}{2} \left( \frac{|P_{y_+}^{k+1} w|^2}{|P_{y_+}^k w|^2} + \frac{|P_{y_+}^k w|^2}{|P_{y_+}^{k-1} w|^2} \right), \quad (4.3.9)$$

where  $A$  is a bosonic superfield of the form

$$A(x_+, x_-, \theta_+, \theta_-) = 1 + i\theta_+ \frac{\partial_{x_+} \xi_1}{\sqrt{N-1}} + i\theta_- \frac{\partial_{x_-} \xi_1^\dagger}{\sqrt{N-1}} - \theta_+ \theta_- \frac{|\partial_{x_+} \xi_1|^2}{N-1}. \quad (4.3.10)$$

This last result shows that the surfaces obtained by this procedure are still conformally parametrized and, thus, that the expression for the Gaussian curvature is given as in (4.1.12). Next we compute this curvature for our surfaces. We find that, using a Taylor expansion,

$$\ln(A) = \frac{i}{\sqrt{N-1}} (\theta_+ \partial_{x_+} \xi_1 + \theta_- \partial_{x_-} \xi_1^\dagger), \quad (4.3.11)$$

so that  $\partial_{x_+} \partial_{x_-} \ln(A) = 0$ . In this case, the curvature is similar to the one of the purely bosonic model and takes the following explicit form:

$$\tilde{\mathcal{K}}_k = -2 \left( \frac{|P_{y_+}^{k+1} w|^2}{|P_{y_+}^k w|^2} + \frac{|P_{y_+}^k w|^2}{|P_{y_+}^{k-1} w|^2} \right)^{-1} \partial_{y_+} \partial_{y_-} \ln \left( \frac{|P_{y_+}^{k+1} w|^2}{|P_{y_+}^k w|^2} + \frac{|P_{y_+}^k w|^2}{|P_{y_+}^{k-1} w|^2} \right), \quad (4.3.12)$$

for  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

This expression was shown to be constant when  $w$  was taken as the Veronese curve [7, 8, 11, 12, 14, 15, 13, 19], *i.e.* for  $w(y_+) = f(y_+)$  where  $f$  is the Veronese curve as in (4.1.13). Note also that the SUSY holomorphic solution coincides with (4.3.6) when  $u(x_+)$  is chosen as the purely bosonic Veronese curve (4.1.13). The SUSY non-holomorphic solutions are explicitly written as (4.3.7) with the same  $u(x_+)$ .

We get the usual value [15] of the gaussian curvature:

$$\tilde{\mathcal{K}}_k = \frac{4}{N-1+2k(N-1-k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.3.13)$$

In the bosonic case, we know that the surfaces constructed this way are the only solutions with constant curvature. In the next sections, we will investigate whether this is also the case in the SUSY model.

#### 4.4. SUSY HOLOMORPHIC SOLUTIONS WITH CONSTANT CURVATURE

In this section, we present a theorem which states that the only SUSY holomorphic solutions with constant curvature are the SUSY invariant ones given by (4.3.6).

Let us start our discussion with the construction of the surfaces generated by a general holomorphic solution of the SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model. Using the gauge invariance of the model [6, 29], any such solution is given by (4.2.19) where

$$w(x_+, \theta_+) = (1, W_1(x_+, \theta_+), \dots, W_{N-1}(x_+, \theta_+))^T. \quad (4.4.1)$$

As usual, we can perform the following expansion:

$$w(x_+, \theta_+) = u(x_+) + i\theta_+\xi(x_+), \quad (4.4.2)$$

and we see that  $u$  is a purely bosonic  $N$ -column vector and  $\xi$  is a fermionic  $N$ -column vector such that:

$$u(x_+) = (1, u_1(x_+), \dots, u_{N-1}(x_+))^T, \quad \xi(x_+) = (0, \xi_1(x_+), \dots, \xi_{N-1}(x_+))^T. \quad (4.4.3)$$

From (4.2.17), we see [32] that  $\mathbf{L} = -\partial_{x_-}\tilde{\mathbb{P}}$  with  $\tilde{\mathbb{P}} = (4.2.19)$  and, from (4.1.8) and the fact that  $\tilde{\mathbf{X}} \in su(N)$ . Then equations (4.1.8) may be easily integrated and for a convenient choice of the constant of integration, we have that the surface  $\tilde{\mathbf{X}}$  is given by

$$\tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbb{P}} - \frac{1}{N}\mathbb{I}_N. \quad (4.4.4)$$

As in the bosonic case, it satisfies the properties discussed in the Appendix, even though we are dealing with superfields.

From the expressions (4.2.20) and (4.2.21), we see that the metric components take the form

$$\tilde{g}_{++} = \tilde{g}_{--} = 0, \quad \tilde{g}_{+-} = \tilde{g}_{-+} = \frac{|P_{x_+}w|^2}{2|w|^2}, \quad (4.4.5)$$

which shows that general holomorphic immersions lead to conformally parametrized surfaces [22].

Using properties of the operator  $P_{x_+}$  given in [6, 14, 15, 13] and defined as in (4.1.4), we calculate the explicit form of the gaussian curvature (4.1.12) and

we obtain

$$\tilde{\mathcal{K}} = 4 - 2 \frac{|w|^2 |P_{x_+}^2 w|^2}{|P_{x_+} w|^4}. \quad (4.4.6)$$

In [32], it was shown that, for the SUSY  $\mathbb{C}P^1$  model, surfaces associated with holomorphic solutions are always of constant curvature  $\mathcal{K} = 4$ . This result can be easily reproduced here using (4.4.6), since  $P_{x_+}^2 w$  is always zero in the  $\mathbb{C}P^1$  model.

We now state our general result on the uniqueness of these holomorphic solutions.

**Theorem:** The general form of the holomorphic solution of the SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model leading to constant curvature surfaces is the solution given in (4.3.6) with  $u(x_+)$  being the bosonic Veronese curve defined in (4.1.13). We have named this curve the Generalized SUSY Veronese (GSV) curve.

**Proof:**

First we perform the general expansion of the metric component  $\tilde{g}_{+-}$  and of the curvature  $\tilde{\mathcal{K}}$  in terms of the components of the field  $w$ . Using (4.4.2), we get

$$|w|^2 = a_0 + i\theta_+ a_1 + i\theta_- a_2 - \theta_+ \theta_- a_3, \quad (4.4.7)$$

with

$$a_0 = |u|^2, \quad a_1 = a_2^\dagger = u^\dagger \xi, \quad a_3 = |\xi|^2. \quad (4.4.8)$$

Thus, from (4.4.5), we obtain

$$\tilde{g}_{+-} = g_0 + i\theta_+ g_1 + i\theta_- g_2 - \theta_+ \theta_- g_3, \quad (4.4.9)$$

with

$$g_0 = \frac{1}{2} \partial_{x_+} \partial_{x_-} \ln a_0, \quad g_1 = g_2^\dagger = \frac{1}{2} \partial_{x_+} \partial_{x_-} \left( \frac{a_1}{a_0} \right), \quad g_3 = \frac{1}{2} \partial_{x_+} \partial_{x_-} \left( \frac{a_0 a_3 - a_2 a_1}{a_0^2} \right). \quad (4.4.10)$$

Since the metric components  $\tilde{g}_{++} = \tilde{g}_{--} = 0$ , we make use of expression (4.1.12) to get

$$\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K}_0 + i\theta_+ \mathcal{K}_1 + i\theta_- \mathcal{K}_2 - \theta_+ \theta_- \mathcal{K}_3, \quad (4.4.11)$$

with

$$\mathcal{K}_0 = -\frac{1}{g_0} \partial_{x_+} \partial_{x_-} \ln g_0, \quad \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2^\dagger = -\frac{1}{g_0} \partial_{x_+} \partial_{x_-} \left( \frac{g_1}{g_0} \right) - \frac{g_1}{g_0} \mathcal{K}_0 \quad (4.4.12)$$

and

$$\mathcal{K}_3 = -\frac{1}{g_0} \partial_{x_+} \partial_{x_-} \left( \frac{g_0 g_3 - g_2 g_1}{g_0^2} \right) - \frac{g_3}{g_0} \mathcal{K}_0 - \frac{g_2}{g_0} \mathcal{K}_1 + \frac{g_1}{g_0} \mathcal{K}_2. \quad (4.4.13)$$

To achieve constant curvature surfaces, we first need  $\mathcal{K}_0$  to be constant. From the bosonic sigma model [14, 15, 13, 19], we know that  $u = u(x_+)$  must be the

Veronese curve given as in (4.1.13). We thus get, as in the classical case,

$$a_0 = (1 + |x|^2)^{N-1}, \quad g_0 = \frac{(N-1)}{2(1 + |x|^2)^2}, \quad \mathcal{K}_0 = \frac{4}{N-1}. \quad (4.4.14)$$

To complete our analysis we need to determine the possible expression for  $\xi(x_+)$  in (4.4.3) that leads to  $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3 = 0$ . We will show that  $\mathcal{K}_1 = 0$  requires that  $\xi$  has the form as stated in the theorem, *i.e.*  $w$  is of the GSV form. This, in turn, will imply that  $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3 = 0$  since we know that (4.3.6) is a solution of our problem from section 3.1.

Using the expressions (4.4.14) and the form of  $g_1$  as in (4.4.10), we see that the constraint  $\mathcal{K}_1 = 0$  reduces to

$$\partial_{x_+}^2 \partial_{x_-}^2 h(x_+, x_-) = 0, \quad h(x_+, x_-) = (1 + |x|^2)^{2-N} a_1 = (1 + |x|^2)^{2-N} u^\dagger \xi. \quad (4.4.15)$$

In order to solve this problem, we express the superfield  $\xi$  as a linear combination of the derivatives of the bosonic Veronese sequence  $u$ :

$$\xi(x_+) = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i(x_+) \partial_{x_+}^i u, \quad (4.4.16)$$

where  $\phi_i(x_+)$  are fermionic functions of  $x_+$  for  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . This linear combination is equivalent to the matrix equation

$$\xi = A\phi, \quad A = \left( u, \partial_{x_+} u, \dots, \partial_{x_+}^{N-1} u \right) \quad (4.4.17)$$

and  $\phi = (0, \phi_1, \dots, \phi_{N-1})^T$ . By construction, the matrix  $A$  is triangular and we get

$$\det A = \prod_{i=0}^{N-1} i! \sqrt{\binom{N-1}{i}} = ((N-1)!)^{N/2}. \quad (4.4.18)$$

The system (4.4.17) is thus invertible and, from the fact that  $\det A$  is constant, the vector field  $\phi$  is a function of  $x_+$  as desired and is of the polynomial form. This implies that

$$\xi(x_+) = \frac{\xi_1(x_+)}{\sqrt{N-1}} \partial_{x_+} u(x_+) \iff \phi_1(x_+) = \frac{\xi_1(x_+)}{\sqrt{N-1}}, \quad \phi_2 = \dots = \phi_{N-1} = 0. \quad (4.4.19)$$

Going back to  $h(x_+, x_-)$  given by (4.4.15), we note that

$$\begin{aligned} h(x_+, x_-) &= (1 + |x|^2)^{2-N} \sum_{i=1}^{N-1} \phi_i u^\dagger \partial_{x_+}^i u = (1 + |x|^2)^{2-N} \sum_{i=1}^{N-1} \phi_i \partial_{x_+}^i a_0 \\ &= (N-1)! \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{(N-i-1)!} \frac{x_-^i \phi_i(x_+)}{(1 + |x|^2)^{i-1}}. \end{aligned} \quad (4.4.20)$$



Since  $h(x_+, x_-)$  satisfies (4.4.15), we get, by standard integration, the general solution in terms of four arbitrary functions  $h_1(x_-)$ ,  $h_2(x_+)$ ,  $h_3(x_-)$ ,  $h_4(x_+)$  as

$$h(x_+, x_-) = h_1(x_-)x_+ + h_2(x_+)x_- + h_3(x_-) + h_4(x_+). \quad (4.4.21)$$

We see that the maximal power of  $(1 + |x|^2)$  in the denominator of  $h(x_+, x_-)$  in (4.4.20) is  $(N - 2)$  and so we can rewrite (4.4.21) as

$$\begin{aligned} & (N - 1)! \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(1 + |x|^2)^{N-i-1}}{(N - i - 1)!} x_-^i \phi_i(x_+) \\ &= (1 + |x|^2)^{N-2} (h_1(x_-)x_+ + h_2(x_+)x_- + h_3(x_-) + h_4(x_+)). \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

In order to fix the arbitrary functions, we evaluate the expression (4.4.22) at  $x_+ = 0$  and  $x_- = 0$ . At  $x_- = 0$ , we get the constraint

$$h_4(x_+) = -h_1(0)x_+ - h_3(0) \quad (4.4.23)$$

and, at  $x_+ = 0$ , we have

$$\begin{aligned} h_3(x_-) &= -h_2(0)x_- - h_4(0) + h(0, x_-) \\ &= -h_2(0)x_- - h_4(0) + (N - 1)! \sum_{i=1}^{N-1} \frac{x_-^i \phi_i(0)}{(N - i - 1)!}. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Next we put these expressions of  $h_4(x_+)$  and  $h_3(x_-)$  into (4.4.22) and we get

$$\begin{aligned} & (1 + |x|^2)^{N-2} (N - 1) (\phi_1(x_+) - \phi_1(0)) x_- \\ &+ (N - 1)! \sum_{i=2}^{N-1} \frac{x_-^i}{(N - i - 1)!} \left( (1 + |x|^2)^{N-i-1} \phi_i(x_+) - (1 + |x|^2)^{N-2} \phi_i(0) \right) \\ &= (1 + |x|^2)^{N-2} ((h_1(x_-) - h_1(0))x_+ + (h_2(x_+) - h_2(0))x_-). \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

Note that in this last expression, we have also used the fact that  $h_3(0) + h_4(0) = 0$ .

Now it is easy to show that the left hand side of this expression is a polynomial in  $x_-$  of degree  $(2N - 3)$ . We thus have

$$h_1(x_-) - h_1(0) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i x_-^i, \quad (4.4.26)$$

where the coefficients  $a_i$  are left to be determined. From this last result and by comparing the coefficients of  $x_-$ , we deduce that

$$h_2(x_+) - h_2(0) = -a_1 x_+ + (N - 1) (\phi_1(x_+) - \phi_1(0)). \quad (4.4.27)$$

Taking into account all these constraints, the expression (4.4.25) becomes

$$(N - 1)! \sum_{i=2}^{N-1} \frac{x_-^i}{(N - i - 1)!} \left( (1 + |x|^2)^{N-i-1} \phi_i(x_+) - (1 + |x|^2)^{N-2} \phi_i(0) \right)$$

$$= (1 + |x|^2)^{N-2} \sum_{i=2}^{N-1} a_i x_-^i x_+. \quad (4.4.28)$$

Dividing this last expression by  $x_-^2$ , we obtain

$$\sum_{i=2}^{N-1} \frac{x_-^{i-2} (1 + |x|^2)^{N-i-1}}{(N-1-i)!} \phi_i(x_+) - \sum_{i=2}^{N-1} \frac{x_-^{i-2} (1 + |x|^2)^{N-2}}{(N-1-i)!} (\phi_i(0) + b_i x_+) = 0 \quad (4.4.29)$$

with  $b_i = \frac{(N-i-1)!}{(N-1)!} a_i$ . This last expression is a polynomial in the variable  $x_-$  of maximal degree  $(2N-5)$ . Furthermore, we can observe that the first summation is a polynomial expression of  $x_-$  of maximal degree  $(N-3)$ . Let us then consider the  $x_-^j$ 's terms for  $j > N-3$  of the above polynomial. These terms are all contained in the second summation and we get the coefficients of  $x_-^j$  for  $j = N-2, \dots, 2N-5$  which are proportional to

$$\phi_{j-N+4}(0) + b_{j-N+4} x_+. \quad (4.4.30)$$

These expressions must vanish for (4.4.29) to be satisfied. It shows that  $\phi_i(0) = 0$  and  $b_i = a_i = 0$  for  $i = 2, \dots, N-1$ . Hence the expression (4.4.29) reduces to

$$\sum_{i=2}^{N-1} \frac{x_-^{i-2}}{(N-1-i)!} \left( (1 + |x|^2)^{N-i-1} \phi_i(x_+) \right) = 0. \quad (4.4.31)$$

From this expression, it is easy to see that  $\phi_i(x_+) = 0$  for  $i = 2, \dots, N-1$ . This proves our theorem. Interestingly, we see also that the arbitrary functions are given as

$$h_1(x_-) = h_1(0) + a_1 x_-, \quad h_2(x_+) = h_2(0) - a_1 x_+ + (N-1)(\phi_1(x_+) - \phi_1(0)) \quad (4.4.32)$$

and

$$h_3(x_-) = -h_2(0)x_- + h_3(0) + (N-1)x_- \phi_1(0), \quad h_4(x_+) = -h_1(0)x_+ - h_3(0). \quad (4.4.33)$$

Let us conclude this section by giving the expression for the metric. It generalizes the result obtained for the SUSY  $\mathbb{C}P^1$  model and is of the form:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{+-} = & \frac{N-1}{2} \left( \frac{1}{(1+|x|^2)^2} + i\theta_+ \partial_{x_+} \left( \frac{\phi_1(x_+)}{(1+|x|^2)^2} \right) + i\theta_- \partial_{x_-} \left( \frac{(\phi_1(x_+))^\dagger}{(1+|x|^2)^2} \right) \right. \\ & \left. - \theta_+ \theta_- \partial_{x_+} \partial_{x_-} \left( \frac{|\phi_1|^2}{(1+|x|^2)^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

We see that the metric has fermionic contributions as expected, but they are all total derivatives and vanish after integration over  $x_+$  and  $x_-$ .

## 4.5. SUSY NON-HOLOMORPHIC SOLUTIONS WITH CONSTANT CURVATURE

In this section we discuss non-holomorphic solutions of the SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  model and generate constant curvature surfaces from them. The aim is to develop a systematic way, as in the bosonic case, to generate non-holomorphic solutions from holomorphic ones using a recursive application of an orthogonalizing operator.

Let us consider a set of  $N$  orthonormal bosonic supervectors  $\{w_0, w_1, \dots, w_{N-1}\}$ , which satisfy  $w_i^\dagger w_j = \delta_{ij}$ . From them, we construct  $N$  rank one orthogonal projectors

$$\tilde{\mathbb{P}}_i = \frac{w_i w_i^\dagger}{|w_i|^2}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.5.1)$$

This set is complete. Indeed, it is easy to see that, as in the bosonic case,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\mathbb{P}}_i = \mathbb{I}. \quad (4.5.2)$$

### 4.5.1. The SUSY $\mathbb{C}P^1$ model

In the bosonic case, we have two projectors corresponding, respectively, to holomorphic and anti-holomorphic solutions. They are similarly defined in the SUSY case as  $\tilde{\mathbb{P}}_0$  and  $\tilde{\mathbb{P}}_1$ . For  $\tilde{\mathbb{P}}_0$ , using gauge invariance as displayed in (4.4.1), we get the holomorphic solution

$$\tilde{\mathbb{P}}_0 = \frac{1}{1 + |W|^2} \begin{pmatrix} 1 & W^\dagger \\ W & |W|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.5.3)$$

Using the completeness property (4.5.2), we get that the projector  $\tilde{\mathbb{P}}_1$  is given by

$$\tilde{\mathbb{P}}_1 = \mathbb{I} - \tilde{\mathbb{P}}_0 = \frac{1}{1 + |W|^2} \begin{pmatrix} |W|^2 & -W^\dagger \\ -W & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5.4)$$

In this case, the orthonormal set  $\{w_0, w_1\}$  is given explicitly by

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ W \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} -W^\dagger \\ 1 \end{pmatrix} \propto P_{x_+} w_0. \quad (4.5.5)$$

Thus we get

$$[\check{\partial}_+ \check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}_1, \tilde{\mathbb{P}}_1] = [\check{\partial}_+ \check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}_0, \tilde{\mathbb{P}}_0] = 0, \quad (4.5.6)$$

since  $\tilde{\mathbb{P}}_0$  is a solution of the equation of motion, showing that  $\tilde{\mathbb{P}}_1$  is also a solution of the Euler-Lagrange equations (4.2.15).

### 4.5.2. The SUSY $\mathbb{C}P^2$ model

In the bosonic case, the  $\mathbb{C}P^2$  model is the simplest example exhibiting mixed solutions. Indeed, we know that in the  $\mathbb{C}P^2$  case  $\mathbb{P}_0$  and  $\mathbb{P}_2$  correspond to the holomorphic and anti-holomorphic solutions respectively. The projector  $\mathbb{P}_1$  describes a mixed solution related to  $\mathbb{P}_0$  and  $\mathbb{P}_2$  by the completeness relation similar to (4.5.2).

Since we are interested in conformally parametrized surfaces, in the sense that the metric components given in (4.2.20) and (4.2.21) satisfy  $\tilde{g}_{++} = \tilde{g}_{--} = 0$ , these projectors can be generalized to the SUSY case as

$$\tilde{\mathbb{P}}_0 = \frac{ww^\dagger}{|w|^2}, \quad \tilde{\mathbb{P}}_1 = \frac{P_{x_+}w(P_{x_+}w)^\dagger}{|P_{x_+}w|^2}, \quad \tilde{\mathbb{P}}_2 = \frac{\alpha\alpha^\dagger}{|\alpha|^2}, \quad (4.5.7)$$

where

$$\begin{aligned} w(x_+, \theta_+) &= \begin{pmatrix} 1 \\ W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha(x_-, \theta_-) = w^* \wedge \partial_{x_-} w^* \\ &= \begin{pmatrix} W_2^\dagger \partial_{x_-} W_1^\dagger - W_1^\dagger \partial_{x_-} W_2^\dagger \\ \partial_{x_-} W_2^\dagger \\ -\partial_{x_-} W_1^\dagger \end{pmatrix} \propto P_{x_+}^2 w. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Our aim is then to determine the constraints that have to be imposed on  $w$  so that  $\tilde{\mathbb{P}}_1$  solves the SUSY Euler-Lagrange equations (4.2.15). In order to do so, we use the fact that  $\tilde{\mathbb{P}}_0$  and  $\tilde{\mathbb{P}}_2$  are already solutions of the SUSY Euler-Lagrange equations (4.2.15). Thus we get

$$[\check{\partial}_+ \check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}_1, \tilde{\mathbb{P}}_1] = [\check{\partial}_+ \check{\partial}_- (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}_2), (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}_2)] = [\check{\partial}_+ \check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}_0, \tilde{\mathbb{P}}_2] + [\check{\partial}_+ \check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}_2, \tilde{\mathbb{P}}_0]. \quad (4.5.9)$$

This could be explicitly rewritten as

$$\begin{aligned} [\check{\partial}_+ \check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}_1, \tilde{\mathbb{P}}_1] &= \frac{1}{|\alpha|^2 |w|^2} ([(\check{P}_- \alpha)^\dagger w] (\check{P}_- \alpha) w^\dagger + [w^\dagger (\check{P}_- \alpha)] w (\check{P}_- \alpha)^\dagger \\ &\quad - [(\check{P}_+ w)^\dagger \alpha] (\check{P}_+ w) \alpha^\dagger - [\alpha^\dagger (\check{P}_+ w)] \alpha (\check{P}_+ w)^\dagger), \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

where we have used the following definitions:

$$\check{P}_+ w = \check{\partial}_+ w - \frac{w^\dagger \check{\partial}_+ w}{|w|^2} w, \quad \check{P}_- \alpha = \check{\partial}_- \alpha - \frac{\alpha^\dagger \check{\partial}_- \alpha}{|\alpha|^2} \alpha. \quad (4.5.11)$$

Using (4.5.10), we find a constraint on the vector fields  $\alpha$  and  $w$  of the form

$$0 = \alpha^\dagger [\check{\partial}_+ \check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}_1, \tilde{\mathbb{P}}_1] \check{P}_+ w \quad \Rightarrow \quad |\check{P}_+ w|^2 \alpha^\dagger \check{\partial}_+ w = 0. \quad (4.5.12)$$

The idea is to solve this constraint and show that it forces  $w$  to have the GSV form given in (4.3.6). Indeed, we have that

$$\alpha^\dagger \check{\partial}_+ w = \begin{vmatrix} \check{\partial}_+ W_1 & \check{\partial}_+ W_2 \\ \partial_{x_+} W_1 & \partial_{x_+} W_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \partial_{x_+} W_1 & \partial_{x_+} W_2 \end{vmatrix} = \xi_1 \partial_{x_+} W_2 - \xi_2 \partial_{x_+} W_1. \quad (4.5.13)$$

Furthermore, imposing that  $\xi_i(x_+) = \epsilon_+ v_i(x_+)$  with  $\epsilon_+$  a complex fermionic constant, we find that

$$\alpha^\dagger \check{\partial}_+ w = \epsilon_+ (v_1 \partial_{x_+} u_2 - v_2 \partial_{x_+} u_1). \quad (4.5.14)$$

Note that if  $\xi_1$  and  $\xi_2$  are completely arbitrary (4.5.14) becomes

$$\xi_1 \partial_{x_+} u_2 - \xi_2 \partial_{x_+} u_1 - i \theta_+ \partial_{x_+} (\xi_1 \xi_2) \quad (4.5.15)$$

which shows that either  $\xi_1$  or  $\xi_2$  must vanish, hence  $\xi = \epsilon_+ v$  is the only non-trivial solution. So in this case, the constraint (4.5.12) reduces to

$$(-\theta_+ |\epsilon_+|^2 |u|^2 v^\dagger P_{x_+} u - \theta_+ \theta_- \epsilon_+ |u|^2 |P_{x_+} u|^2) (v_1 \partial_{x_+} u_2 - v_2 \partial_{x_+} u_1) = 0. \quad (4.5.16)$$

Using the fact that the term  $|u|^2 |P_{x_+} u|^2$  is invertible, this shows that  $v_1 = \frac{\partial_{x_+} u_1}{\partial_{x_+} u_2} v_2$  and thus we see that

$$\xi(x_+) = \epsilon_+ \left( \frac{v_2}{\partial_{x_+} u_2} \right) \partial_{x_+} u = \eta(x_+) \partial_{x_+} u. \quad (4.5.17)$$

Hence we see that  $\tilde{\mathbb{P}}_1$  is a solution of the SUSY Euler-Lagrange equations only if  $w$  is of the GSV form (4.3.6).

## 4.6. SOLUTIONS OF THE SUSY $\mathbb{C}P^{N-1}$ FOR $N > 2$ AND $G(M, N)$ MODELS

In this section, we use the preceding results to find some ways of obtaining non-holomorphic solutions of the SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  for  $N > 2$ . In fact, we get at the same time partial results for the SUSY  $G(M, N)$  model.

First, if we generalize the scheme used for deriving non-holomorphic solutions of the SUSY  $\mathbb{C}P^2$  model, we get the constraints to be imposed on similar solutions of the SUSY  $G(2, N)$  and  $G(N-2, N)$  models.

Indeed, we use the fact that  $\tilde{\mathbb{P}}_0$  and  $\tilde{\mathbb{P}}_{N-1}$  correspond to, respectively, a holomorphic and anti-holomorphic solution of the model. Then they solve trivially the Euler-Lagrange equations (4.2.15). The completeness relation (4.5.2) shows that the rank two orthogonal projector  $\tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}_{N-1}$  of  $G(2, N)$  is related to the

rank  $N - 2$  orthogonal projector  $\tilde{\mathbb{P}}_1 + \cdots + \tilde{\mathbb{P}}_{N-2}$ . We thus get

$$[\check{\partial}_+ \check{\partial}_- (\tilde{\mathbb{P}}_1 + \cdots + \tilde{\mathbb{P}}_{N-2}), (\tilde{\mathbb{P}}_1 + \cdots + \tilde{\mathbb{P}}_{N-2})] = [\check{\partial}_+ \check{\partial}_- (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}_{N-1}), (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}_{N-1})]. \quad (4.6.1)$$

Based on the fact that we are looking for conformally parametrized surfaces and that the metric components (4.1.11) are identical to the ones obtained in the bosonic model, we use the following parametrization for the projectors  $\tilde{\mathbb{P}}_0$  and  $\tilde{\mathbb{P}}_{N-1}$ :

$$\tilde{\mathbb{P}}_0 = \frac{ww^\dagger}{|w|^2}, \quad \tilde{\mathbb{P}}_{N-1} = \frac{\alpha\alpha^\dagger}{|\alpha|^2}, \quad , \alpha = w^* \wedge \partial_{x_-} w^* \wedge \cdots \wedge \partial_{x_-}^{N-2} w^* \propto P_{x_+}^{N-1} w, \quad (4.6.2)$$

where the fields  $w$  and  $\alpha$  are such that  $\check{\partial}_- w = 0$ ,  $\check{\partial}_+ \alpha = 0$  and  $\alpha^\dagger w = 0$ , and  $w^*$  represents the complex conjugation of the components of  $w$ . This implies that we have

$$\begin{aligned} & [\check{\partial}_+ \check{\partial}_- (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}_{N-1}), (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}_{N-1})] = [\check{\partial}_+ \check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}_0, \tilde{\mathbb{P}}_{N-1}] + [\check{\partial}_+ \check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}_{N-1}, \tilde{\mathbb{P}}_0] \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2 |w|^2} \left( [(\check{P}_- \alpha)^\dagger w] (\check{P}_- \alpha) w^\dagger + [w^\dagger (\check{P}_- \alpha)] w (\check{P}_- \alpha)^\dagger - [(\check{P}_+ w)^\dagger \alpha] (\check{P}_+ w) \alpha^\dagger \right. \\ &\quad \left. - [\alpha^\dagger (\check{P}_+ w)] \alpha (\check{P}_+ w)^\dagger \right), \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

where the operators  $\check{P}_+$  and  $\check{P}_-$  are defined as in (4.5.11).

Proceeding as in the case of the SUSY  $\mathbb{C}P^2$ , we find the following constraint

$$|\check{P}_+ w|^2 \alpha^\dagger \check{\partial}_+ w = 0, \quad (4.6.4)$$

first we look at the expression  $\alpha^\dagger \check{\partial}_+ w$ . By considering the canonical basis of  $\mathbb{R}^N$  given as  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  which satisfies  $e_j^T e_i = \delta_{ij}$ , we see that

$$\alpha^\dagger \check{\partial}_+ w = \begin{vmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_{N-1} \\ \partial_{x_+} W_1 & \cdots & \partial_{x_+} W_{N-1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \partial_{x_+}^{N-2} W_1 & \cdots & \partial_{x_+}^{N-2} W_{N-1} \end{vmatrix}. \quad (4.6.5)$$

In this formulation, we have used the fact that the vector superfield  $w$  may be written using (4.4.1-4.4.3). We may thus impose that  $\xi(x_+) = \epsilon_+ v(x_+)$  and we then find that

$$\alpha^\dagger \check{\partial}_+ w = \epsilon_+ \begin{vmatrix} v_1 & \cdots & v_{N-1} \\ \partial_{x_+} u_1 & \cdots & \partial_{x_+} u_{N-1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \partial_{x_+}^{N-2} u_1 & \cdots & \partial_{x_+}^{N-2} u_{N-1} \end{vmatrix}. \quad (4.6.6)$$

This assumption is based on the fact that we impose that the fields  $u$  and  $\xi$  are elements of a real Grassmann algebra spanned by  $\{1, \epsilon_+\}$ . Moreover, we can also

easily show that

$$|\check{P}_+ w|^2 \propto |u|^2 |\xi|^2 - |u^\dagger \xi|^2 - \theta_+ |u|^2 \xi^\dagger P_{x_+} u + \theta_- |u|^2 (P_{x_+} u)^\dagger \xi - \theta_+ \theta_- |u|^2 |P_{x_+} u|^2 \quad (4.6.7)$$

and hence the constraint (4.6.4) reduces to

$$(-\theta_+ |u|^2 \xi^\dagger P_{x_+} u - \theta_+ \theta_- |u|^2 |P_{x_+} u|^2) \alpha^\dagger \check{\partial}_+ w = 0. \quad (4.6.8)$$

Finally, we use the fact that  $|u|^2 |P_{x_+} u|^2$  is invertible to note that this constraint is equivalent to  $\alpha^\dagger \check{\partial}_+ w = 0$ . So in the case where  $\xi = \epsilon_+ v$ , we find that

$$v(x_+) = \sum_{i=1}^{N-2} a_i(x_+) \partial_{x_+}^i u \quad (4.6.9)$$

for  $a_i$ 's arbitrary bosonic functions of  $x_+$ .

It remains to demonstrate that the Euler-Lagrange equations (4.6.3) are satisfied. This follows from the fact that

$$0 = \check{\partial}_+(\alpha^\dagger w) = (\check{\partial}_+ \alpha^\dagger) w + \alpha^\dagger \check{\partial}_+ w = (\check{\partial}_- \alpha)^\dagger w, \quad (4.6.10)$$

which implies  $w^\dagger \check{P}_- \alpha = \alpha^\dagger \check{P}_+ w = 0$  and returning to (4.6.3), we see that the Euler-Lagrange equations are satisfied. We thus find the form of  $w$  given (4.4.2) to be

$$w(x_+, \theta_+) = u(x_+) + i\theta_+ \epsilon_+ \sum_{i=1}^{N-2} a_i(x_+) \partial_{x_+}^i u(x_+), \quad (4.6.11)$$

which is different from the GSV form (4.3.6).

We can thus summarize this result in the form of the following:

**Theorem:** If we take  $w(x_+, \theta_+) = u(x_+) + i\theta_+ \epsilon_+ v(x_+)$ , the projector  $\tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}_{N-1}$  is a non-holomorphic solution of the SUSY  $G(2, N)$  sigma model where  $v(x_+)$  takes the form  $v(x_+) = \sum_{i=1}^{N-2} a_i(x_+) \partial_{x_+}^i u(x_+)$ . Furthermore, with the same constraints, the projector  $\tilde{\mathbb{P}}_1 + \dots + \tilde{\mathbb{P}}_{N-2}$  is a non-holomorphic solution of the SUSY  $G(N-2, N)$  model, where by construction

$$\tilde{\mathbb{P}}_i = \frac{P_{x_+}^i w(P_{x_+}^i w)^\dagger}{|P_{x_+}^i w|^2}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.6.12)$$

This observation is important and as mentioned before is a generalization of the result obtained for non-holomorphic solutions of the SUSY  $\mathbb{C}P^2$  model. Unfortunately, it does not give the non-holomorphic solutions of SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  for  $N > 3$ . Indeed, for example, for  $N = 4$ , we know that we have four projectors  $\tilde{\mathbb{P}}_0, \tilde{\mathbb{P}}_1, \tilde{\mathbb{P}}_2, \tilde{\mathbb{P}}_3$  such that

$$[\check{\partial}_+ \check{\partial}_-(\tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}_3), (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}_3)] = [\check{\partial}_+ \check{\partial}_-(\tilde{\mathbb{P}}_1 + \tilde{\mathbb{P}}_2), (\tilde{\mathbb{P}}_1 + \tilde{\mathbb{P}}_2)] = 0, \quad (4.6.13)$$

and with the constraints on the original vector  $w$  as given in the theorem. However, we have that  $\tilde{P}_0 + \tilde{P}_3$  and  $\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2$  are non-holomorphic solutions of  $G(2, 4)$ .

We do not claim that the above result is complete. Indeed, in obtaining such a solution, we have imposed two constraints: the first one was to suppose that  $\xi_i = \epsilon_+ v_i$  and the second was in the choice of the anti-holomorphic vector field  $\alpha$ . We are pretty sure that the second constraint is correct since, as in the bosonic model, this parametrization implies that our surfaces are conformal. The first condition is more restrictive since it restricts our vector fields  $u$  and  $\xi$  to a specific Grassmann algebra [33] as explained before.

Another avenue for getting non-holomorphic solutions of SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  involves reproducing the steps of a proof for the bosonic sigma model given in [6]. The projector formalism was used there to show that the non-holomorphic projector  $\mathbb{P}_1$ , orthogonal to the holomorphic  $\mathbb{P}_0$ , solves the Euler-Lagrange equations. This was based on the following property:

$$0 = (\partial_{x_-}(\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1))(\mathbb{P}_0 + \mathbb{P}_1) = (\partial_{x_-}\mathbb{P}_1)\mathbb{P}_1 + \partial_{x_-}\mathbb{P}_0, \quad (4.6.14)$$

since  $(\partial_{x_-}\mathbb{P}_0)\mathbb{P}_0 = (\partial_{x_-}\mathbb{P}_1)\mathbb{P}_0 = 0$  and  $(\partial_{x_-}\mathbb{P}_0)\mathbb{P}_1 = \partial_{x_-}\mathbb{P}_0$ , which leads to

$$[\partial_{x_+}\partial_{x_-}\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1] = 0. \quad (4.6.15)$$

Now, we consider SUSY projectors and we want to solve the SUSY Euler-Lagrange equations for a SUSY projector called  $\bar{\mathbb{P}}_1$  similar to the bosonic one. This projector is constructed as follows: let  $w(x_+, \theta_+)$  and  $\phi(x_+, \theta_+)$  be two holomorphic superfields. We construct from Gram-Schmidt procedure a superfield  $w_1$  orthogonal to  $w$  by setting

$$w_1 = \left( \mathbb{I} - \frac{ww^\dagger}{|w|^2} \right) \phi, \quad (4.6.16)$$

and we set  $\bar{\mathbb{P}}_1 = \frac{w_1 w_1^\dagger}{|w_1|^2}$ . We can thus formulate the following proposition:

**Proposition:** If we impose the condition  $(\check{\partial}_-\tilde{\mathbb{P}}_0)\bar{\mathbb{P}}_1 = \check{\partial}_-\tilde{\mathbb{P}}_0$ , then the non-holomorphic projector  $\bar{\mathbb{P}}_1$  is a solution of the Euler-Lagrange equation.

**Proof:** After some calculations, we find that

$$\check{\partial}_-\tilde{\mathbb{P}}_0 = \frac{w(\check{P}_+w)^\dagger}{|w|^2}, \quad \check{\partial}_-\bar{\mathbb{P}}_1 = -\frac{(\check{P}_+w)^\dagger w_1}{|w|^2} \frac{w w_1^\dagger}{|w_1|^2} + \frac{w_1(\check{\partial}_+w_1)^\dagger}{|w_1|^2} (\mathbb{I} - \bar{\mathbb{P}}_1) \quad (4.6.17)$$

and  $\tilde{\mathbb{P}}_0 \check{\partial}_+ w_1 = 0$ , from which we easily deduce the property by direct calculations

$$(\check{\partial}_-(\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1))(\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1) = 0, \quad (4.6.18)$$



without imposing any constraints on the vector superfield  $\phi$ . Since we have  $(\check{\partial}_-\tilde{\mathbb{P}}_0)\tilde{\mathbb{P}}_0 = (\check{\partial}_-\bar{\mathbb{P}}_1)\tilde{\mathbb{P}}_0 = 0$  and using the hypothesis of the proposition, we get

$$0 = (\check{\partial}_-(\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1))(\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1) = (\check{\partial}_-\bar{\mathbb{P}}_1)\bar{\mathbb{P}}_1 + \check{\partial}_-\tilde{\mathbb{P}}_0. \quad (4.6.19)$$

From these results, we are left with two equations:  $(\check{\partial}_-\bar{\mathbb{P}}_1)\bar{\mathbb{P}}_1 + \check{\partial}_-\tilde{\mathbb{P}}_0 = 0$  and its complex conjugate:  $\bar{\mathbb{P}}_1\check{\partial}_+\bar{\mathbb{P}}_1 + \check{\partial}_+\tilde{\mathbb{P}}_0 = 0$ . To prove our result, it is sufficient to take the  $\check{\partial}_+$  and the  $\check{\partial}_-$  of the first and second equation respectively. In this case, we get the set of two equations

$$\check{\partial}_+\check{\partial}_-\bar{\mathbb{P}}_1\bar{\mathbb{P}}_1 - \check{\partial}_-\bar{\mathbb{P}}_1\check{\partial}_+\bar{\mathbb{P}}_1 + \check{\partial}_+\check{\partial}_-\tilde{\mathbb{P}}_0 = 0, \quad \check{\partial}_-\bar{\mathbb{P}}_1\check{\partial}_+\bar{\mathbb{P}}_1 + \bar{\mathbb{P}}_1\check{\partial}_-\check{\partial}_+\bar{\mathbb{P}}_1 + \check{\partial}_-\check{\partial}_+\tilde{\mathbb{P}}_0 = 0 \quad (4.6.20)$$

from which, taking their sum, we find that

$$[\check{\partial}_+\check{\partial}_-\bar{\mathbb{P}}_1, \bar{\mathbb{P}}_1] = 0. \quad (4.6.21)$$

This concludes the proof of the proposition.

The constraint imposed to prove the proposition is equivalent to

$$(\mathbb{I} - \bar{\mathbb{P}}_1)\check{P}_+w = 0. \quad (4.6.22)$$

The general solution to this equation (or constraint) was discussed in [34]. Indeed, the authors modified the fermionic fields to being c-numbers (commuting numbers) by taking  $\phi = \epsilon_+\check{\partial}_+w_0$  which implies that  $w_1 = \epsilon_+\check{P}_+w_0$ . Making the canonical choice  $|\epsilon_+| = 1$ , the authors have successfully solved this constraint formally but questions were raised concerning the physical interpretation of this procedure.

In this paper, we avoided this procedure and so considered the bosonic and fermionic fields as elements of a complex Grassmann algebra. This gave us some restrictions on the form of the bosonic vector field  $\phi$ .

Let us mention that, for the SUSY  $\mathbb{C}P^2$  model, we can fix  $\bar{\mathbb{P}}_1 = \tilde{\mathbb{P}}_1$  and taking into account the completeness relation (4.5.2), the constraint (4.6.22) becomes

$$(\tilde{\mathbb{P}}_0 + \tilde{\mathbb{P}}_2)\check{P}_+w = 0. \quad (4.6.23)$$

Due to the mutual orthogonality of the vector superfields  $w$  and  $\check{P}_+w$ , the constraint is exactly the condition  $\alpha^\dagger\check{\partial}_+w = 0$  obtained in Section 5.2.

In the general case of SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$ , we can assume that again  $\bar{\mathbb{P}}_1 = \tilde{\mathbb{P}}_1$  and thus put  $\phi = \partial_{x_+}w$  in formula (4.6.16). Then the constraint (4.6.22) becomes

$$(\mathbb{I} - \tilde{\mathbb{P}}_1)(\mathbb{I} - \tilde{\mathbb{P}}_0)\check{\partial}_+w = 0 \iff (\mathbb{I} - \tilde{\mathbb{P}}_0 - \tilde{\mathbb{P}}_1)\check{\partial}_+w = 0, \quad (4.6.24)$$

since  $\tilde{\mathbb{P}}_1 \tilde{\mathbb{P}}_0 = 0$ . The completeness relation (4.5.2) can be used again and we get

$$(\tilde{\mathbb{P}}_2 + \cdots + \tilde{\mathbb{P}}_{N-1})\check{P}_+ w = 0 \quad (4.6.25)$$

or, using  $(P_{x_+}^k w)^\dagger w = 0$  for  $k \geq 1$ , the constraint takes the form:

$$\left( \sum_{k=2}^{N-1} \frac{(P_{x_+}^k w)(P_{x_+}^k w)^\dagger}{|P_{x_+}^k w|^2} \right) \check{\partial}_+ w = 0. \quad (4.6.26)$$

Multiplying from the left by  $(P_{x_+}^j w)^\dagger$  for  $j = 2, \dots, N-1$ , and due to the orthogonality of the set  $\{P_{x_+}^j w, j = 2, \dots, N-1\}$ , we get the following set of equations

$$(P_{x_+}^j w)^\dagger \check{\partial}_+ w = 0, \quad j = 2, \dots, N-1. \quad (4.6.27)$$

We can further reduce this set of equations by observing that  $\check{\partial}_+ w = -i\partial_{\theta_+} w + \theta_+ \partial_{x_+} w$  and that  $(P_{x_+}^j w)^\dagger \partial_{x_+} w = 0$  for  $j = 2, \dots, N-1$ . This shows that the above set is equivalent to

$$(P_{x_+}^j w)^\dagger \xi = 0, \quad \xi = -i\partial_{\theta_+} w, \quad j = 2, \dots, N-1, \quad (4.6.28)$$

where  $w$  is given by (4.4.2) and (4.4.3). The key ingredient to solve this set of equations is to assume, as in the holomorphic case, that  $\xi$  takes the form (4.4.16) where  $\phi_0(x_+) = 0$  by gauge invariance.

Then we note that the set of equations (4.6.28) for  $\theta_+ = \theta_- = 0$ , reduces to

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left( (P_{x_+}^j u)^\dagger (\partial_{x_+}^i u) \right) \phi_i(x_+) = 0, \quad j = 2, \dots, N-1. \quad (4.6.29)$$

For  $j = N-1$ , we get

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left( (P_{x_+}^{N-1} u)^\dagger (\partial_{x_+}^i u) \right) \phi_i(x_+) = \phi_{N-1} |P_{x_+}^{N-1} u|^2 = 0, \quad j = 2, \dots, N-1, \quad (4.6.30)$$

since it can be easily seen from the orthogonality of the set  $\{P_{x_+}^j u, j = 2, \dots, N-1\}$  that we have  $(P_{x_+}^{N-1} u)^\dagger (\partial_{x_+}^i u) = 0$  for  $i = 0, \dots, N-2$ . This leads to  $\phi_{N-1} = 0$ . Next, in a similar way, we look at equation (4.6.29) for  $j = N-2$  and we obtain

$$(P_{x_+}^{N-2} u)^\dagger \xi = \phi_{N-2} |P_{x_+}^{N-2} u|^2 = 0, \quad (4.6.31)$$

which shows that  $\phi_{N-2} = 0$ . We then repeat this procedure for other values of  $j$  and find that  $\phi_j = 0$  for  $j = 2, \dots, N-1$  and so that

$$\xi = \phi_1(x_+) \partial_{x_+} u. \quad (4.6.32)$$

However, we already know that, with such an expression for  $\xi$ ,  $\tilde{\mathbb{P}}_1$  is a solution of the Euler-Lagrange equations.

With this expression, the projector  $\tilde{\mathbb{P}}_1$  can be written as

$$\tilde{\mathbb{P}}_1 = \frac{P_{x_+} w (P_{x_+} w)^\dagger}{|P_{x_+} w|^2} = \frac{P_{y_+} u (P_{y_+} u)^\dagger}{|P_{y_+} u|^2}, \quad (4.6.33)$$

for  $u = u(y_+)$  and  $y_+ = y_-^\dagger = x_+ + i\theta_+ \phi_1(x_+)$ . If we want to describe the surface associated with this projector, we have to calculate the explicit expression for  $\mathbf{L}$  given in (4.2.18). This expression reduces to the bosonic one if  $(\check{\partial}_- \tilde{\mathbb{P}}_1)^2 = 0$ . This is in fact true since we have

$$\check{\partial}_- = (\phi_1^\dagger + \theta_-) \partial_{y_-} = \Gamma(x_-, \theta_-) \partial_{y_-} \quad (4.6.34)$$

with  $\Gamma(x_-, \theta_-)$  a fermionic function such that  $\Gamma^2 = 0$ . The surface associated to  $\tilde{\mathbb{P}}_1$  is thus described as in the bosonic case [7].

Let us conclude this section by another observation about the solutions of the SUSY  $G(2, N)$  sigma model.

**Lemma:** Without any restrictions on the vector superfield  $\phi$ , the projector  $\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1$  is a solution (holomorphic) of the SUSY  $G(2, N)$  sigma model.

**Proof:** This follows directly from equation (4.6.18) and its complex conjugate. Indeed, taking the  $\check{\partial}_+$  of equation (4.6.18) and the  $\check{\partial}_-$  of its complex conjugate, we obtain

$$(\check{\partial}_+ \check{\partial}_- (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1)) (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1) - (\check{\partial}_- (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1)) (\check{\partial}_+ (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1)) = 0, \quad (4.6.35)$$

$$(\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1) \check{\partial}_- \check{\partial}_+ (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1) + (\check{\partial}_- (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1)) (\check{\partial}_+ (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1)) = 0. \quad (4.6.36)$$

Taking the sum of these two equations yields our result

$$[\check{\partial}_+ \check{\partial}_- (\tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1), \tilde{\mathbb{P}}_0 + \bar{\mathbb{P}}_1] = 0. \quad (4.6.37)$$

## 4.7. CONCLUSION AND OUTLOOK

In this paper, we have presented a construction of surfaces from the solutions of the SUSY  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model. Indeed, using a gauge-invariant formulation of the model in terms of rank one orthogonal projectors, we have constructed a closed one-form from which we have deduced the tangent vectors to the surfaces. We have thus showed that these surfaces naturally live in the Lie algebra  $su(N)$  and deduced some of their geometrical properties such as the metric and their gaussian curvature.

We considered first the holomorphic solutions of the model since they are the simplest solutions of the Euler-Lagrange equations. For these solutions, we have shown that they induce constant curvature solutions if the corresponding projectors are parametrized by a vector superfield  $w$  of the GSV form: a generalization of the Veronese curve. This theorem is important, it showed the existence and the

uniqueness of such a curve but it has given us a path to find the mixed solutions of our model. Indeed, we tried to find a generalization of the procedure presented in [6] and have fully succeeded in the  $\mathbb{C}P^1$  model. For the more general models, we have proposed a pinching theorem on the constraints that one has to impose in order to obtain non-holomorphic solutions.

These constraints were to suppose that the vector fields components are element of a two-dimension complex Grassmann algebra and that our surfaces be conformally parametrized.

This paper is only a beginning and a lot of work is still left to do. First, we have obtained numerous non-holomorphic solutions: SUSY invariant ones and the one exposed in Section 6. One project should consist of proving the completeness of such solutions. Also the solutions obtained in Section 6 are the results of some impose constraints. One could ask if we could relax these constraints by considering the components of the superfield  $w$  to be elements of a general complex Grassmann algebra. Furthermore, in Section 6, we have imposed specific forms for our surfaces to be conformally parametrized. Could one find more general solutions? Is our choice for  $\alpha$  as general as it could be?

Nevertheless, we have presented a novel approach based on the projector formalism of our model and have deduced the general non-holomorphic solutions of the  $\mathbb{C}P^2$  model.

## APPENDIX: ISOMORPHISM BETWEEN $\mathbb{R}^{N^2-1}$ AND $su(N)$

In section 2, we have defined a surface  $\mathbf{X} \in su(N)$  using its tangent vector fields (4.1.8). In this appendix, we recall how we can associate to this surface a surface in  $\mathbb{R}^{N^2-1}$  using a natural isomorphism between  $su(N)$  and  $\mathbb{R}^{N^2-1}$ . Let us write

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{N^2-1} a_i(x_+, x_-) K_i, \quad (4.7.1)$$

where  $K_i$  is a basis of the Lie algebra  $su(N)$ . Using the scalar product (4.1.9) on  $su(N)$ , we construct an orthonormal basis  $\{K_{ij}^{\mathbb{R}}, K_{ij}^{\mathbb{C}}, K_i\}$  of the Lie algebra  $su(N)$  as

$$K_{ij}^{\mathbb{R}} = E_{ij} + E_{ji}, \quad K_{ij}^{\mathbb{C}} = i(E_{ij} - E_{ji}), \quad i > j, i, j = 1, \dots, N, \quad (4.7.2)$$

and

$$K_i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{i(i+1)}} \left( \sum_{j=1}^i E_{jj} - iE_{(i+1)(i+1)} \right), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (4.7.3)$$

where  $E_{ij}$  are canonical  $N \times N$  matrices defined as  $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ . One can show that the set  $\{K_{ij}^{\mathbb{R}}, K_{ij}^{\mathbb{C}}, K_i\}$  forms an orthonormal basis of  $su(N)$ . This basis will then be used to generate a vector in  $\mathbb{R}^{N^2-1}$  from the  $a_i$ 's defined in (4.7.1).

Let us present a convenient example: suppose that the surface  $\mathbf{X}$  is associated to an holomorphic solution of our model. We have shown in (4.4.4), that the surface  $\mathbf{X}$  takes the explicit form

$$\mathbf{X} = \mathbb{P} - \frac{1}{N}\mathbb{I}_N, \quad (4.7.4)$$

where  $\mathbb{I}_N$  is the  $N \times N$  identity matrix and  $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  is a rank one orthogonal projector holomorphic solution of the model. The surface then can be written, using the orthonormal basis, as

$$\mathbf{X} = \mathbb{P} - \frac{1}{N}\mathbb{I}_N = \sum_{i=1}^{N-1} a_i K_i + \sum_{i>j} (a_{ij}^{\mathbb{R}} K_{ij}^{\mathbb{R}} + a_{ij}^{\mathbb{C}} K_{ij}^{\mathbb{C}}), \quad (4.7.5)$$

with

$$a_i = (\mathbb{P}, K_i), \quad a_{ij}^{\mathbb{R}} = (\mathbb{P}, K_{ij}^{\mathbb{R}}), \quad a_{ij}^{\mathbb{C}} = (\mathbb{P}, K_{ij}^{\mathbb{C}}). \quad (4.7.6)$$

The coefficients  $a_{ij}^{\mathbb{R}}$  and  $a_{ij}^{\mathbb{C}}$  are explicitly given as

$$a_{ij}^{\mathbb{R}} = \frac{1}{2}(\mathbb{P}_{ij} + \bar{\mathbb{P}}_{ij}), \quad a_{ij}^{\mathbb{C}} = \frac{i}{2}(\bar{\mathbb{P}}_{ij} - \mathbb{P}_{ij}), \quad i > j, i, j = 1, \dots, N \quad (4.7.7)$$

and

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{2i(i+1)}} \left( \sum_{j=1}^i \mathbb{P}_{jj} - i \mathbb{P}_{(i+1),(i+1)} \right), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (4.7.8)$$

Using the representation of  $\mathbf{X}$  given in (4.7.5), we can show that

$$\|\mathbf{X}\|^2 = (\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i^2 + \sum_{i>j} ((a_{ij}^{\mathbb{R}})^2 + (a_{ij}^{\mathbb{C}})^2) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{N} \right), \quad (4.7.9)$$

which shows that the surface represented by the coordinates (4.7.7) and (4.7.8) is a sphere in  $\mathbb{R}^{N^2-1}$  of radius  $\sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{N} \right)}$  centred at the origin. In [13], the authors have obtained a similar result for the bosonic model using the constraint on the orthogonal projector  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ . In our approach, we have constructed the components of our surfaces using a geometric approach instead of an algebraic one.

It could be instructive to explicit an example.

In particular, for  $N = 2$ , the projector  $\mathbb{P}$  takes the form

$$\mathbb{P} = \frac{1}{1 + |W|^2} \begin{pmatrix} 1 & W^\dagger \\ W & |W|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.7.10)$$

An orthonormal basis of  $su(2)$  is given by the Pauli matrices

$$K_{21}^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{21}^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.7.11)$$

The coordinates of the sphere in  $\mathbb{R}^3$  are given as

$$a_1 = \frac{1 - |W|^2}{2(1 + |W|^2)}, \quad a_{21}^{\mathbb{R}} = \frac{W + W^\dagger}{2(1 + |W|^2)}, \quad a_{21}^{\mathbb{C}} = \frac{i(W^\dagger - W)}{2(1 + |W|^2)} \quad (4.7.12)$$

and they satisfy the equation

$$a_1^2 + (a_{21}^{\mathbb{R}})^2 + (a_{21}^{\mathbb{C}})^2 = \frac{1}{4}. \quad (4.7.13)$$

For more results on the non-holomorphic solutions in the bosonic case, see for example, [7] and reference therein.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been supported in part by research grants from Natural sciences and engineering research council of Canada (NSERC). Laurent Delisle also acknowledge a Fonds de recherche du Québec–Nature et technologies (FQRNT) fellowship.



# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Gross, D. G., Piran, T., Weinberg, S.: Two dimensional quantum gravity and random surfaces. Singapore: World Scientific (1992)
- [2] Safran, S.: Statistical thermodynamics of surfaces interface and membranes. Massachusetts: Addison-Wesley (1994)
- [3] Davydov, A.: Solitons in Molecular Systems. NewYork: Kluwer (1999)
- [4] Rajaraman, R.:  $CP^n$  solitons in quantum Hall systems. Eur. Phys. B 28, 157–162 (2002)
- [5] Landolfi, G.: On the Canham-Helfrich membrane model. J. Phys. A: Math. Theor. 36, 4699 (2003)
- [6] Zakrzewski, W.J.: Low Dimensional Sigma Models. Hilger, Bristol (1989)
- [7] Grundland, A. M., Yurduşen, İ.: On analytic descriptions of two-dimensional surfaces associated with the  $CP^{N-1}$  models. J. Phys. A: Math. Theor. 42, 172001 (2009)
- [8] Goldstein, P. P., Grundland, A. m.: Invariant recurrence relations for  $CP^{N-1}$  models. J. Phys. A: Math. Theor. 43, 265206 (2010)
- [9] Hélein, F.: Constant Mean Curvature Surfaces, Harmonic Maps and Integrable Systems. Birkhäuser, Basel (2001)
- [10] Manton, N., Sutcliffe, P.: Topological solitons. Cambridge University Press, NewYork (2004)
- [11] Post, S., Grundland, A. M.: Analysis of  $CP^{N-1}$  sigma models via projective structures. Nonlinearity 25, 1–36 (2012)
- [12] Grundland, A. M., Strasburger, A., Zakrzewski, W. J.: Surfaces immersed in  $su(N + 1)$  Lie algebras obtained from the  $CP^N$  sigma models. J. Phys. A: Math. Gen. 39, 9187–9214 (2006)
- [13] Hussin, V., Yurduşen, İ, Zakrzewski, W. J.: Canonical surfaces associated with projectors in Grassmannian sigma models. J. Math. Phys. 51, 103509 (2010)
- [14] Delisle, L., Hussin, V., Zakrzewski, W. J.: Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models: (1) Holomorphic solutions. Journal of Geometry and Physics, 66, 24–36 (2013)



- [15] Delisle, L., Hussin, V., Zakrzewski, W. J.: Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models:(2) Non-holomorphic solutions. *Journal of Geometry and Physics*, 71, 1–10 (2013)
- [16] Konopelchenko, B., Taimanov, I.: Constant mean curvature surfaces via an integrable dynamical system. *J. Phys. A: Math. Gen.* 29, 1261–1265 (1996)
- [17] Carroll, R., Konopelchenko, B.: Generalized Weierstrass-Enneper inducing conformal immersions and gravity. *Int. J. Mod. Phys. A*, 11, 1183–1216 (1996)
- [18] Konopelchenko, B., Landolfi, G.: Generalized Weierstrass representation for surfaces in multi-dimensional Riemannian spaces. *Stud. Appl. Maths.* 104, 129–169 (1999)
- [19] Bolton, J., Jensen G. R., Rigoli M., Woodward L. M.: On conformal minimal immersions of  $S^2$  into  $CP^n$ . *Math. Ann.* 279, 599–620 (1988)
- [20] Warner, F. W.: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer-Verlag, New York (1983)
- [21] Arnold, V. I.: *Mathematical methods of classical mechanics* (second edition). Springer-Verlag, New York (1989)
- [22] Gray, A.: *Modern differential geometry of curves and surfaces*. CRC Press, Florida (1993)
- [23] Jiao, X. X., Peng, J. G.: Pseudo-holomorphic curves in complex Grassmann manifolds. *Transaction of the American Mathematical Society*, 355, 3715–3726 (2003)
- [24] Jiao, X. X., Peng, J. G.: Classification of holomorphic two-spheres with constant curvature in the complex Grassmannians  $G_{2,5}$ . *Differential Geometry and its Applications*, 20, 267–277 (2004)
- [25] Grundland, A. M., Snobl, L.: Description of surfaces associated with Grassmannian sigma models on Minkowski space. *J. Math. Phys.* 46, 083508 (2005)
- [26] Jie, F., Xiaoxiang, J., Xiaowei, X.: Construction of homogeneous minimal 2-spheres in complex Grassmannians. *Acta Mathematica Scientia*, 31, 1889–1898 (2011)
- [27] Peng, C., Xu, X.: Minimal two-spheres with constant curvature in the complex Grassmannians. To be published in *Israel Journal of Mathematics* (2014)
- [28] Peng, C., Xu, X.: Classification of minimal homogeneous two-spheres in the complex Grassmann manifold  $G(2, n)$ . To be published in *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (2014)
- [29] Witten, E.: Supersymmetric form of the nonlinear sigma model in two dimensions. *Phys. Rev. D* 16, 2991–2994 (1977)
- [30] D’Adda, A., Luscher, M., Di Vecchia, P.: Confinement and chiral symmetry breaking in  $CP^{N-1}$  models with quarks. *Nucl. Phys. B* 152, 125–144 (1979)
- [31] Fujii, K., Koikawa, T., Sasaki, R.: Classical solutions for supersymmetric Grassmannian sigma models in two dimensions. I. *Prog. Theor. Phys.* 71, 388–394 (1984)

- [32] Hussin, V., Zakrzewski, W. J.: Susy  $CP^{N-1}$  model and surfaces in  $\mathbb{R}^{N^2-1}$ . J. Phys. A: Math. Gen. 39, 14231 (2006)
- [33] Cornwell, J. F.: Group Theory in Physics: Supersymmetries and Infinite-Dimensional Algebras (Techniques of Physics vol 3). New York: Academic (1989)
- [34] Din, A. M., Lukierski, J., Zakrzewski, W. J.: General classical solutions of a supersymmetric non-linear coupled boson-fermion model in two dimensions. Nucl. Phys. B **194**, 157–171 (1982)



# CONCLUSION ET PERSPECTIVES FUTURES

---

Dans cette thèse, nous avons présenté une analyse géométrique des surfaces associées aux solutions classiques des modèles sigma bosonique [1, 2] et supersymétrique [3] ayant pour espace-cible des variétés grassmanniennes  $G(m, n)$ . Plus spécifiquement, les travaux de cette thèse avaient pour but de donner une classification des surfaces à courbure gaussienne constante.

Dans les chapitres 2 et 3, nous nous concentrons sur les modèles sigma grassmanniens  $G(m, n)$  pour  $m \geq 2$  puisqu'une classification complète des surfaces à courbure gaussienne constante pour  $\mathbb{C}P^{n-1}$  a été donnée par Bolton et *al.* [4] en fonction de la séquence de Veronese. Nous débutons notre analyse par les solutions holomorphes car, tout comme pour les modèles projectifs nous croyons que les solutions non-holomorphes sont obtenues de ces solutions par l'application successive d'un opérateur d'orthogonalisation. En utilisant deux représentations distinctes, soit les paramétrisations orthogonale et de Macfarlane, nous transformons la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  en le laplacien d'un logarithme. Cette expression, nous a donc donné un critère systématique pour produire des surfaces à courbure gaussienne constante:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln \det \tilde{M}, \quad \det \tilde{M} \propto (1 + |x|^2)^r. \quad (4.7.14)$$

L'objectif du chapitre 2 était de déterminer les valeurs possibles du paramètre  $r$  décrivant des surfaces à courbure gaussienne de la forme

$$\mathcal{K} = \frac{4}{r}. \quad (4.7.15)$$

Nous savions que dans les modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$ , le paramètre  $r$  pouvait prendre toutes les valeurs entières comprises entre 1 et  $n - 1$ , *i.e.*  $1 \leq r \leq n - 1$  pour  $r \in \mathbb{Z}$ . Ce résultat découle directement du fait que les modèles  $\mathbb{C}P^j$  pour  $j = 1, \dots, n - 2$  peuvent être naturellement immergés dans le modèle  $\mathbb{C}P^{n-1}$  et que la séquence de Veronese associée aux variétés projectives  $\mathbb{C}P^j$  mène à des surfaces à courbure gaussienne de paramètre  $r = j$ .

Ces observations nous ont amené à donner des conjectures sur les valeurs possibles du paramètre  $r$  pour les modèles généraux  $G(m, n)$ : nous pouvons construire une solution dans  $G(m, n)$  menant à des surfaces à courbure gaussienne constante pour toutes les valeurs entières comprises entre 1 et  $\dim G(m, n) = m(n - m)$ . Nous savons que cette conjecture est vérifiée pour les modèles projectifs. Nous nous sommes donc concentrés sur les modèles  $G(2, n)$  où certaines complications apparaissent. En effet, par un processus inductif, les solutions à courbure constante peuvent être construites pour  $r = 1, 2, \dots, 2(n - 3)$  et ce fait repose sur l'immersion naturelle de la variété grassmannienne  $G(2, n - 1)$  dans  $G(2, n)$ . Deux valeurs sont manquantes:  $r = 2n - 5$  et  $r = 2(n - 2)$ . Pour  $r = 2(n - 2)$ , nous avons construit une solution en nous servant de la séquence de Veronese et de la paramétrisation orthogonale. Cette solution est appelée séquence de Veronese pour  $G(2, n)$ . La complication apparaît pour la solution associée à  $r = 2n - 5$  où aucune immersion, contrairement aux modèles projectifs, des modèles  $G(2, j)$  n'existe. Nous avons présenté un algorithme pour déterminer une telle solution, si elle existe. Il repose sur l'utilisation des coordonnées et des immersions de Plücker. Ce processus bien que naturel ne mène pas à une preuve directe de nos conjectures. Ce phénomène s'explique par le fait que les coordonnées de Plücker, doivent satisfaire à des contraintes non-linéaires, les relations de Plücker. Nous devons ainsi considérer les immersions dans les modèles  $\mathbb{C}P^N$  modulo ces contraintes et c'est cet espace quotient qui crée certaines complications.

Nous avons, toutefois, utilisé ces outils de la géométrie algébrique pour démontrer nos conjectures pour les modèles particuliers de  $G(2, n)$  pour  $n = 3, 4, 5$ . La solution associée à cette valeur particulière est donnée en fonction de la séquence de Veronese. Nous avons aussi donné une "preuve" numérique de l'existence d'une solution pour  $r = 2(n - 5)$  pour le modèle  $G(2, 6)$ .

Récemment [5, 6], il a été démontré qu'aucune solution homogène n'existait pour  $r = 2(n - 2) - 1$  dans les modèles  $G(2, n)$ . Par solution homogène, nous voulons dire qu'elle possède une forme générale pour tous les modèles  $G(m, n)$  comme la séquence de Veronese. Ce résultat donne, donc, beaucoup d'appui à l'algorithme que nous avons présenté et nous croyons que notre approche en fonction des immersions de Plücker est la bonne.

Il était donc naturel, à la suite des résultats du chapitre 2, de poursuivre notre analyse pour les solutions non-holomorphes des modèles sigma grassmanniens. En nous appuyant sur les solutions connues des modèles, nous avons démontré, tout comme pour les solutions holomorphes, que la densité lagrangienne s'écrivait

comme le laplacien d'un logarithme de la forme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_+ \partial_- \ln \det \mathfrak{A}, \quad (4.7.16)$$

où  $\mathfrak{A}$  s'exprime comme un produit de normes des opérateurs d'orthogonalisation  $P_+$ . Ainsi, pour obtenir des surfaces à courbure gaussienne constante il suffisait de construire des solutions  $Z$  telles que

$$\mathfrak{A} \propto (1 + |x|^2)^r \quad r \in \mathbb{Z}^+. \quad (4.7.17)$$

Encore une fois le problème revenait ensuite à trouver les valeurs possibles du paramètre  $r$  dans l'expression (4.7.15) de la courbure.

Pour les modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$ , nous savons par l'analyse de Bolton et *al.* [4] que l'ensemble complet des solutions est donné par

$$Z_i = \frac{P_+^i f}{|P_+^i f|}, \quad (4.7.18)$$

pour  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . En choisissant  $f$  comme la séquence de Veronese, nous obtenons des surfaces à courbure gaussienne constante

$$\mathcal{K}_i = \frac{4}{n-1+2i(n-1-i)}. \quad (4.7.19)$$

Ce sont en fait les seules solutions menant à des surfaces à courbure gaussienne constante, *i.e* nous avons une classification complète en fonction de la séquence de Veronese.

Notre objectif était donc d'obtenir une classification complète de solutions pour les modèles  $G(m, n)$ . Cet objectif a été rapidement freiné par le fait que l'ensemble complet des solutions pour les modèles  $G(m, n)$  n'est pas connu. Nous avons toutefois pu présenter une analyse des surfaces à courbure gaussienne constante à partir des solutions connues de ces modèles. Nous avons établi plusieurs résultats sur les valeurs possibles de la courbure.

Une classification complète des solutions à courbure constante des modèles  $G(m, n)$  pour  $m \geq 2$  demeure toujours un problème ouvert. Par ailleurs, nous avons produit un algorithme systématique pour classifier ces solutions. Dans l'éventualité où l'ensemble complet des solutions de ces modèles sera connu, notre algorithme pourra être utilisé pour les classifier efficacement.

Le chapitre 3 présente aussi des solutions explicites pour les modèles  $G(2, n)$  pour  $n = 3, 4, 5, 6, 7$ .

Le chapitre 4 de ma thèse comporte une analyse géométrique des surfaces obtenues des solutions classiques d'une extension supersymétrique du modèle sigma  $\mathbb{C}P^{n-1}$ . En effet, en nous appuyant fortement sur l'étude des modèles

bosoniques, nous avons formulé une immersion de Weierstrass, à partir des solutions du modèle, décrivant des surfaces naturellement immergées dans l'algèbre de Lie  $su(n)$ . Nous avons démontré que ces surfaces étaient construites à partir d'une 1-forme différentielle fermée et exacte en réécrivant les équations d'Euler-Lagrange comme une loi de conservation. La représentation de Weierstrass nous a donc permis de déduire des propriétés géométriques de nos surfaces à partir de la forme de Killing de  $su(n)$  qui a joué le rôle de produit scalaire sur cette algèbre. En effet, nous avons obtenu les formes explicites des composantes de la métrique et la courbure gaussienne induites par ces surfaces. Le thème de cette thèse étant la classification des solutions menant à des surfaces à courbure gaussienne constante, nous nous sommes ainsi intéressés à un tel traitement pour les modèles supersymétriques.

Dans un premier temps, la formulation même du modèle impose une invariance par rapport aux supertranslations dans le superspace  $(x_+, x_-, \theta_+, \theta_-)$ . Ces supertranslations ont été décrites à partir d'opérateurs infinitésimaux  $\check{Q}_\pm$  appelés les supercharges. Nous avons utilisé une certaine réduction par symétrie pour obtenir des solutions invariantes par rapport à ces supertranslations. Nous avons réduit, par le fait même, notre modèle supersymétrique à celui du cas bosonique pour lequel l'ensemble complet des solutions à action finie est déterminé. Cette réduction par symétrie a généré une série de solutions qui, en utilisant l'immersion de Weierstrass et la séquence de Veronese, a permis d'obtenir  $n$  surfaces à courbure gaussienne constante modulo transformations de jauge.

Dans les modèles bosoniques, nous savons que les solutions holomorphes  $Z = \frac{f}{|f|}$  mènent à des surfaces à courbure gaussienne constante pour  $f$  choisi comme la séquence de Veronese. Il était donc naturel pour nous de considérer l'analogie de ce résultat pour les modèles supersymétriques. Nous avons aussi démontré que la seule solution, modulo invariance de jauge, menant à des surfaces à courbure constante est donnée par une supertranslation holomorphe de la séquence de Veronese, *i.e* une solution  $\Phi = \frac{w}{|w|}$  est une solution à courbure constante du modèle supersymétrique si et seulement si

$$w(x_+, \theta_+) = u(x_+) + i\theta_+ \frac{\xi_1(x_+)}{\sqrt{n-1}} \partial_+ u(x_+), \quad (4.7.20)$$

où  $u(x_+)$  est la séquence de Veronese bosonique. Ce résultat basé sur les travaux de Bolton et *al.* [4] généralise un résultat fondamental des surfaces à courbure gaussienne constante. Nous avons ainsi obtenu une classification complète des solutions menant à des surfaces à courbure gaussienne constante pour une extension supersymétrique du modèle sigma  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .

Nous nous sommes, ensuite, intéressés aux solutions non-holomorphes de ces modèles pour lesquelles plusieurs difficultés ont été rencontrées dans le passé. Ces difficultés sont dûes aux contraintes du modèle notamment la non-inversibilité des quantités fermioniques. Pour contourner ces contraintes, nous avons fait appel à une approche originale et innovatrice en fonction de projecteurs orthogonaux. Nous avons adopté cette approche étant donné que la métrique induite par les surfaces dans le cas supersymétrique est identique aux modèles bosoniques. De plus, dans les modèles bosoniques, les immersions de Weierstrass représentent des applications conformes, *i.e.*  $g_{\pm\pm} = 0$ , et nous voulions ainsi obtenir de telles immersions pour les modèles supersymétriques. Ce choix est motivé aussi par le fait que les extensions supersymétriques doivent se réduire aux modèles bosoniques en prenant la limite fermionique. Nous avons donc considéré les projecteurs orthogonaux de la forme

$$\tilde{P}_i = \frac{P_+^i w (P_+^i w)^\dagger}{|P_+^i w|^2}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (4.7.21)$$

afin d'obtenir des immersions conformes dans un cadre supersymétrique. Cette approche a mené à l'obtention de solutions non-holomorphes contraintes à une forme particulière pour le superchamp holomorphe  $w$ . En effet, nous avons démontré dans le modèle  $\mathbb{C}P^2$  que  $w$  doit être de la forme (4.7.20) pour que  $\tilde{P}_1$  soit une solution non-holomorphe.

Nous avons, par la suite, tenté de généraliser ce processus pour les modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$  avec  $n \geq 4$ . Ce processus nous a mené à considérer des solutions non-holomorphes des modèles  $G(2, n) \cong G(n-2, n)$  pour lesquelles nous avons obtenu des résultats très intéressants et prometteurs. En effet, nous avons démontré que le projecteur de rang deux  $\tilde{P}_0 + \tilde{P}_{n-1}$  est solution des équations d'Euler-Lagrange si

$$w(x_+, \theta_+) = u(x_+) + i\theta_+ \epsilon_+ v(x_+), \quad v(x_+) = \sum_{i=1}^{n-2} a_i(x_+) \partial_+^i u(x_+). \quad (4.7.22)$$

Nous ne savons, cependant, pas si cette solution est générale, car celle-ci a été obtenue en imposant certaines contraintes. La première contrainte est la représentation choisie pour le projecteur  $\tilde{P}_{n-1}$ . Bien que nous sachions que ce choix mène à des immersions conformes, nous ne savons pas si cette représentation est la plus générale menant à de telles immersions. La deuxième contrainte est celle de supposer que les composantes  $u$  et  $\xi$  du superchamp  $w$  sont des éléments d'une sous-algèbre de Grassmann "holomorphe" engendrée par  $\mathfrak{L} = \{1, \epsilon_+\}$  où  $\epsilon_+$  est une constante fermionique complexe. Par "holomorphe", nous voulons dire que si  $\epsilon_\pm = \epsilon_1 \pm i\epsilon_2$  et  $\partial_{\epsilon_\pm} = \frac{1}{2}(\partial_{\epsilon_1} \pm i\partial_{\epsilon_2})$ , alors pour tout élément  $l \in \mathfrak{L}$  nous avons que



$\partial_{\epsilon_-} l = 0$ . C'est une sous-algèbre de l'algèbre de Grassmann complexe engendrée par les générateurs  $\{1, \epsilon_+, \epsilon_-, \epsilon_+ \epsilon_-\} = \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{L}^\dagger$ . Cette analyse fera partie de mes perspectives futures.

Les résultats obtenus dans ce dernier chapitre sont très prometteurs, mais beaucoup de travail demeure pour espérer obtenir une classification des solutions menant à des surfaces à courbure gaussienne constante dans le modèle supersymétrique  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .

Nous procédons avec une liste de projets en lien avec les résultats obtenus dans cette thèse.

- (1) Preuve de conjectures dans les articles actuellement finalisés (cas non-supersymétrique): Dans le chapitre 2, nous avons établi deux conjectures sur les valeurs possibles du paramètre  $r$  dans l'expression de la courbure gaussienne  $\mathcal{K} = \frac{4}{r}$ . Ces conjectures demeurent des problèmes ouverts et ont récemment reçu l'attention de certains auteurs [5, 6]. Les stratégies pour démontrer ces conjectures sont nombreuses. Nous en énumérons quelques-unes.

La première stratégie est l'obtention de l'ensemble complet des solutions à action finie des équations d'Euler-Lagrange pour les modèles  $G(m, n)$  avec  $m \geq 2$ . Plus spécifiquement, nous croyons qu'une classification sera possible si l'ensemble des solutions holomorphes menant à des surfaces à courbure gaussienne constante est connu. En effet, car à partir de cette classification, nous pourrions engendrer les solutions non-holomorphes par l'application successive d'un opérateur. C'est cette technique qui est utilisée pour les modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$  et nous croyons que c'est aussi le cas pour les modèles sigma plus généraux.

La deuxième stratégie repose sur une analyse plus approfondie des immersions de Plücker. Cette stratégie, comme précédemment expliquée, consiste à immerger les variétés grassmanniennes  $G(m, n)$  dans des espaces projectifs  $\mathbb{C}P^N$  pour  $N = \binom{n}{m} - 1$ . Il suffit ainsi d'utiliser le fait que l'ensemble des solutions des modèles  $\mathbb{C}P^N$  menant à des surfaces à courbure gaussienne constante est connu. Cette stratégie fonctionne trivialement pour les modèles  $G(1, n)$ . Pour les modèles plus généraux, nous sommes confrontés à des contraintes non-linéaires, les relations de Plücker. Ce sont ces relations qui nous empêchent de conclure, car l'espace-cible des immersions de Plücker sont les variétés  $\mathbb{C}P^N$  modulo ces relations. Ces relations mènent cependant à un système d'équations par lesquelles nous croyons que leur résolution déterminera la véracité de nos conjectures.

- (2) Extension des résultats au modèle supersymétrique  $\mathbb{C}P^{n-1}$ : Dans le chapitre 4, nous avons obtenu une classification complète des solutions holomorphes menant à des surfaces à courbure gaussienne constante. Ces solutions sont une généralisation directe de la séquence de Veronese. Une des difficultés des modèles supersymétriques est l'obtention de solutions non-holomorphes. Nous avons réussi à obtenir une famille de solutions pour le modèle  $\mathbb{C}P^2$  et en avons obtenu quelques-unes pour les modèles  $\mathbb{C}P^{n-1}$  avec  $n > 3$ . Ces solutions ont été obtenues d'une solution holomorphe par l'application successive de l'opérateur d'orthogonalisation  $P_+$  et en supposant que les composantes de cette solution holomorphe sont des éléments d'une sous-algèbre de Grassmann holomorphe engendrée par  $\{1, \epsilon_+\}$ .

Pour les solutions non-holomorphes obtenues, il demeure notamment à déterminer les conditions sur ces solutions afin d'obtenir des surfaces à courbure gaussienne constante via la représentation de Weierstrass que nous avons proposée. La description de ces surfaces demeurent ouvertes. Comme mentionné, nous avons obtenu des solutions non-holomorphes en imposant certaines restrictions. Une question naturelle s'impose: Est-ce que les solutions obtenues sont les plus générales? Une avenue à explorer est de supposer que les composantes de la solution holomorphe, utilisée pour construire les solutions non-holomorphes via l'opérateur  $P_+$ , sont des éléments d'une algèbre de Grassmann plus générale. De plus, afin d'obtenir des immersions conformes, nous avons imposé une structure particulière de nos solutions pour que les composantes de la métrique  $g_{++}$  et  $g_{--}$  s'annulent. Nous pouvons, ainsi, nous demander si c'est l'unique structure menant à cette restriction sur les composantes de la métrique.

- (3) Extension des résultats aux modèles supersymétriques  $G(m, n)$ : Nous voulons aussi considérer les modèles sigma supersymétriques ayant pour espace-cible les variétés grassmanniennes  $G(m, n)$  pour  $m < n$ . Nous avons, dans le chapitre 4, obtenu des résultats préliminaires et nous croyons que les stratégies des chapitres 2 et 3 pourront être utilisées pour obtenir une classification partielle des solutions à courbure constante.

Nous envisageons aussi d'utiliser les transformations de Bäcklund adaptées aux modèles sigma non-linéaires [7] pour tenter d'obtenir d'autres solutions des solutions supersymétriques obtenues.

- (4) Nouvelle avenue: Cette thèse a présenté les surfaces obtenues des solutions des modèles sigma ayant pour espace-cible des variétés grassmanniennes compactes. Un de mes futurs projets est de considérer une analyse

de ces surfaces, mais pour des modèles sigma ayant des espaces-cibles non-compacts [8, 9]. Par exemple, les modèles sigma ayant pour espace-cible des variétés grassmanniennes non-compactes  $G_{i,j}(m, n)$ . Ces variétés s'écrivent comme le groupe quotient

$$G_{i,j}(m, n) = \frac{SU(m, n)}{S(U(m-i, n-j) \times U(i, j))}, \quad (4.7.23)$$

où le groupe  $SU(m, n)$  est représenté par les matrices  $U \in \mathbb{C}^{(m+n) \times (m+n)}$  satisfaisant  $U^\dagger \mathbb{I}_{m,n} U = \mathbb{I}_{m,n}$  et  $\mathbb{I}_{m,n} = \text{diag}(\mathbb{I}_m, -\mathbb{I}_n)$ . La densité lagrangienne associée à ces modèles est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (D_\mu Z)^\dagger \mathbb{I}_{m,n} (D_\mu Z) \mathbb{I}_{i,j} \right], \quad (4.7.24)$$

où les champs  $Z \in \mathbb{C}^{(m+n) \times (i+j)}$  et satisfont la contrainte non-linéaire

$$Z^\dagger \mathbb{I}_{m,n} Z = \mathbb{I}_{i,j}. \quad (4.7.25)$$

Ces modèles ressemblent aux modèles considérés dans cette thèse où nous avons choisi  $n = j = 0$ . Afin de construire des surfaces, nous devons reformuler la théorie en fonction de projecteurs orthogonaux  $\mathbb{P}$  définis par

$$\mathbb{P} = Z \mathbb{I}_{i,j} Z^\dagger \mathbb{I}_{m,n}. \quad (4.7.26)$$

Les projecteurs  $\mathbb{P}$  satisfont aux contraintes

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}, \quad \mathbb{P}^\dagger \mathbb{I}_{m,n} \mathbb{P} = \mathbb{I}_{m,n} \mathbb{P}, \quad \text{Tr}(\mathbb{P}) = i + j. \quad (4.7.27)$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées à ces modèles s'écrivent

$$[\partial_+ \partial_- \mathbb{P}, \mathbb{P}] = 0. \quad (4.7.28)$$

Naïvement, nous pourrions adopter l'algorithme standard pour construire des solutions des équations d'Euler-Lagrange à partir d'une solution holomorphe en appliquant successivement un opérateur d'orthogonalisation  $P_+$ . Une complication apparaît dans l'algorithme de Gram-Schmidt: la métrique sur  $\mathbb{C}^{m+n}$  est non-définie. Plus spécifiquement, le produit scalaire  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  est défini en utilisant la métrique  $\mathbb{I}_{m,n}$  par

$$\langle f, g \rangle = f^\dagger \mathbb{I}_{m,n} g \quad (4.7.29)$$

et ce produit scalaire est tel que  $\langle f, f \rangle = 0$  pour des vecteurs  $f \neq 0$ . Nous pourrions ainsi commencer par un ensemble de vecteurs qui en utilisant le procédé de Gram-Schmidt produit des vecteurs de norme nulle. Par exemple, pour  $m = 2$ ,  $n = 1$  et  $f(x_+) = \left(1, \sqrt{2}x_+, x_+^2\right)^T$  la séquence de

Veronese, nous avons que

$$\langle f, f \rangle = 1 + 2|x|^2 - |x|^4 = 0 \quad (4.7.30)$$

pour  $|x|^2 = 1 + \sqrt{2}$ . Cette propriété démontre que nous perdons le caractère global des solutions. Un projet serait ainsi de construire une représentation de Weierstrass à partir des solutions des modèles sigma grassmanniens non-compacts et d'étudier les propriétés géométriques des surfaces obtenues. En particulier, nous pourrions nous intéresser aux surfaces à courbure gaussienne constante.



# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] L. Delisle, V. Hussin and W. J. Zakrzewski (2013) Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models:(2) Non-holomorphic solutions. *Journal of Geometry and Physics* **71**, 1–10.
- [2] L. Delisle, V. Hussin and W.J. Zakrzewski (2013) Constant curvature solutions of Grassmannian sigma models: (1) Holomorphic solutions. *Journal of Geometry and Physics* **66**, 24–36.
- [3] L. Delisle, V. Hussin, İ. Yurduşen and W. J. Zakrzewski (2014) Constant curvature surfaces of the supersymmetric  $\mathbb{C}P^{N-1}$  sigma model, *To be submitted to Communications in Mathematical Physics*.
- [4] Bolton J., Jensen G. R., Rigoli M. and Woodward L. M. (1988) On conformal minimal immersions of  $S^2$  into  $\mathbb{C}P^n$ , *Math. Ann.* **279**, 599–620.
- [5] C. Peng and X. Xu (2014) Minimal two-spheres with constant curvature in the complex Grassmannians. To be published in *Israel Journal of Mathematics*.
- [6] C. Peng and X. Xu (2014) Classification of minimal homogeneous two-spheres in the complex Grassmann manifold  $G(2, n)$ . To be published in *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.
- [7] J. Harnad, Y. Saint-Aubin and S. Shnider (1984) Bäcklund transformations for nonlinear sigma models with values in Riemannian symmetric spaces. *Commun. Math. Phys.* **92**, 329–367.
- [8] JP. Antoine and B. Piette (1987) Classical nonlinear models on Grassmann manifolds of compact or noncompact type. *J. Math. Phys.* **28**, 2753–2762.
- [9] JP. Antoine and B. Piette (1988) Solutions of Euclidean models on noncompact Grassmann manifolds. *J. Math. Phys.* **29**, 1687–1697.