

UNIVERSITE DE MONTREAL

ESSAI SUR LES EFFETS DU
REGIME EPARGNE-ACTIONS DU QUEBEC
SUR LES ACTIONS ADMISSIBLES

PAR

RICHARD CLOUTIER

DEPARTEMENT DE SCIENCES ECONOMIQUES
FACULTE DES ARTS ET DES SCIENCES

MEMOIRE PRESENTE A LA FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
MAITRE ES SCIENCES (M.Sc.)

JUILLET 1986



TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE	1
INTRODUCTION	2
PARTIE -I- THEORIE FINANCIERE	3
le comportement d'un actif risqué: une variable aléatoire	3
généralisation à un marché d'actif	4
le problème de sélection	4
théorie de l'utilité dans l'incertitude	6
sélection optimale.....	8
sans actif certain	8
introduction d'un actif certain	8
solution numérique	9
l'indice bêta simple	9
un modèle d'équilibre: le CAPM	11
dérivation intuitive du CAPM	12
caractéristique du risque d'un portefeuille	14
 ANNEXES DE LA PARTIE -I-	
1. la forme de la CPE	15
2. dérivation du portefeuille M	17
3. achat d'actifs risqués	20
4. extension de la CML	22
5. bêta et variance de portefeuille	24
6. dérivation du CAPM	26
7. démonstration des mécanismes d'arbitrage	28
 PARTIE -II- LE REGIME EPARGNE-ACTIONS.....	30
 SECTION -1- LES EMISSIONS PUBLIQUES.....	32
les données	32
les résultats statistiques	33
stabilité des résultats	34

l'indice bêta simple et le CAPM	35
à propos de l'écart	39
portefeuille optimal sans actif certain	42
incluant un actif certain	44
portefeuille optimal considérant le rendement fiscal	45
portefeuille optimal et revenu croissant	46
modélisation du revenu croissant	47
SECTION -2- LES EMISSIONS PAR LES PRDAA.....	52
ANNEXES DE LA PARTIE -II-	
A.informations sur le REA	57
B.les indices	58
C.restructuration du portefeuille	59
D.rendements annuels et théorème du binôme	61
E.les données	63
SECTION -3- A PROPOS DE L'ESTIMATION	65
PARTIE -III- THEORIE DE LA DEMANDE ET RATIONNEMENT	
QUANTITATIF.....	71
le modèle	71
le modèle avec rationnement	73
solution	73
redéfinition du système	74
étude de la structure locale	76
CONCLUSION.....	80
REMERCIEMENTS	81
BIBLIOGRAPHIE.....	82

SOMMAIRE

Le régime Epargne-Actions draine, depuis quelques années, une part importante de l'investissement au Québec. Connaissant la sensibilité des marchés, la singularité du régime est bien sentie dans les milieux financiers, mais ses effets véritables ne semblent pas être encore bien définis. Utilisant des outils de la théorie financière et de la théorie économique, cet essai se veut une analyse à la fois statistique et théorique du phénomène. La démarche suivie est inductive, c'est-à-dire que partant des faits, elle cherche à remonter à la règle générale.

INTRODUCTION

En créant le régime Epargne-Actions du Québec, le système fiscal québécois a doté ses contribuables, en 1979, d'un instrument d'intervention sur les paramètres de leur déclaration de revenu personnel.

Il est possible depuis, par certaines transactions boursières, d'alléger le revenu imposable des particuliers et de ce fait, de diminuer le taux d'imposition fiscal.

Puisque le régime s'imisce artificiellement dans le système boursier au niveau du nombre des intervenants et des montants investis, il est possible qu'il se soit dessiné de nouvelles règles du jeu au sein du marché et que ces règles soient suffisamment importantes pour être discernables et pour qu'on s'y arrête. C'est en fait l'objectif de ce travail et le texte procède de la façon suivante.

Dans la première partie est présenté un résumé des principaux outils de l'analyse financière par l'approche moyenne-variance.

Ces outils sont ensuite appliqués, dans la deuxième partie, au cas du régime Epargne-Actions. Cette partie est divisée en deux sections où chacune présente l'analyse d'une des catégories dans lesquelles ont été classées les actions éligibles au régime. Elle est complétée par la suggestion d'une attitude optimale à adopter par l'investisseur.

Dans la troisième partie, les résultats de l'analyse du REA sont confrontés à la théorie de la demande sous rationnement quantitatif. Cette section a pour but de reconsidérer l'analyse et les résultats obtenus dans un cadre analytique outillé de la théorie micro-économique moderne.

PARTIE -I- THEORIE FINANCIERE

Le comportement d'un actif risqué: une variable aléatoire.

En analyse financière, l'évolution dans le temps du cours d'un actif risqué est habituellement considéré, a priori, comme une variable aléatoire. C'est-à-dire que l'équation de la valeur future d'un actif comporte une partie stochastique. La valeur à la fin d'une période donnée est donc définie comme:

$$\tilde{V}_t = V_{t-1} + E_t$$

où V_{t-1} est la valeur au début de la période et E_t , l'écart observé sur la période. En termes financiers, E_t est considéré comme le rendement nominal d'un actif. En valeur relative, le rendement peut s'écrire:

$$\tilde{R} = \frac{\tilde{V}_t - V_{t-1}}{V_{t-1}}$$

où les tildes signifient une variable aléatoire.

Dans l'approche moyenne-variance, on systématise le comportement des rendements en faisant des hypothèses sur la distribution de probabilité des E_t . On suppose que les E_t ont des distributions de type normale (Gauss-Laplace), donc que toute l'information est donnée par la moyenne et la variance des variables.

La mesure de la valeur moyenne est donnée par le premier moment d'une variable aléatoire: l'espérance mathématique. On peut ainsi préciser l'équation du rendement en termes de valeurs espérées:

$$E(R) = \frac{E(V_t) - V_{t-1}}{V_{t-1}}$$

Par le deuxième moment on obtient une information supplémentaire en la variance de la variable:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_{E_t}^2}{V_{t-1}^2}$$

En d'autres mots, cette approche analytique revient à faire l'hypothèse globale que dans ses critères de choix d'actifs financiers, l'investisseur ne tient compte que du rendement et du risque. Les deux moments de la variable aléatoire normale sont les mesures respectives du rendement espéré et du risque.

généralisation à un marché d'actifs

En pratique, l'investisseur fait face à plusieurs actifs financiers qu'il peut combiner en un portefeuille. L'espérance de rendement d'un portefeuille se généralise par

$$E(R_p) = \sum_i^n w_i E(R_i)$$

Le rendement espéré est donc une somme pondérée des rendements des n actifs composant le portefeuille, où les w_i sont les pourcentages investis dans chacun des actifs ($\sum w_i = 1$).

La variance du portefeuille s'écrit

$$\text{var}(R_p) = \sum_i^n \sum_j^n w_i w_j \sigma_{i,j}$$

où $\sigma_{i,j}$ est la covariance entre l'actif i et l'actif j . Dans les cas où $i=j$, $\sigma_{i,i} = \sigma_i^2$. La variance d'un portefeuille est donc fonction d'une somme de variances et de covariances.

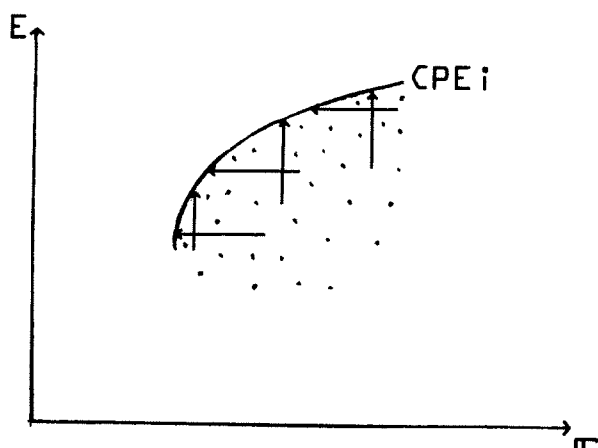
le problème de sélection

Dans son problème de sélection entre les différents actifs risqués du marché, l'investisseur peut éliminer un certain nombre d'actifs techniquement non efficaces, sans tenir compte de ses préférences face au risque⁽¹⁾.

Représentons les actifs risqués dans un graphique ayant en ordonnée l'espérance des rendements et en abscisse l'écart-type des rendements:

(1) On suppose seulement qu'il a de l'aversion au risque.

GRAPHIQUE 1



Chaque point représente un portefeuille d'actifs (où un portefeuille peut contenir un ou plusieurs actifs). Puisqu'il existe une infinité de combinaisons de portefeuilles, on peut démontrer que l'ensemble des points est cerné par une courbe ayant la forme concave du graphique. Cette courbe est la courbe des portefeuilles efficaces (CPE) ⁽¹⁾. Elle représente le sous-ensemble des portefeuilles pour lesquels, à un niveau de risque donné, il est impossible d'obtenir une espérance de rendement plus élevée ou, de façon équivalente, pour une espérance de rendement donnée, il est impossible d'obtenir un niveau de risque moins élevé. En d'autres mots, CPE est l'ensemble des portefeuilles risqués dominants.

Techniquement CPE est obtenue par la solution, par programmation quadratique, de l'un ou l'autre des systèmes suivants:

$$\min \sigma^2(R_p) \text{ sous contrainte que } E(R_p) = K$$

$$\max E(R_p) \text{ sous contrainte que } \sigma^2(R_p) = K$$

Notons ici que l'analyse est basée en partie sur les anticipations des investisseurs et que ces anticipations sont non déterministes. Il peut donc exister théoriquement autant de courbes de portefeuilles efficaces qu'il y a d'investisseurs. C'est pourquoi la courbe est notée de l'indice *i* dans le graphique.

A ce point de l'analyse, l'investisseur fait face à un choix délimité de portefeuilles. Pour déterminer une solution optimale (et unique) on a besoin de plus d'informations sur ses préférences face au risque. Cette étape dans la sélection d'un portefeuille a été développée par Markowitz, qui a suggéré que l'investisseur cherche à maximiser l'espérance de l'utilité plutôt que simplement maximiser le rendement espéré.

(1) Voir l'annexe 1 pour une dérivation de CPE_i.

Théorie de l'utilité dans l'incertitude

Sous les axiomes habituels de l'utilité cardinale caractérisant les préférences des individus, c'est-à-dire, en bref, préordre des préférences, continuité et indépendance sur la fonction, et sous l'hypothèse de non satiété (i.e. l'utilité marginale toujours positive), on dérive la fonction d'utilité espérée de l'investissement. De l'approche moyenne-variance, on a l'hypothèse que les rendements ont des distributions de type normale. Pour maximiser l'utilité en ne tenant compte que de l'espérance et de la variance, on doit maintenant supposer que les distributions des rendements sont normales conjointes. La fonction d'utilité peut ainsi s'écrire:

$$U = U(R; E, \sigma)$$

Alors, la valeur espérée de l'utilité est donnée par l'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue:

$$E[U(R)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(R) f(R; E, \sigma) dR$$

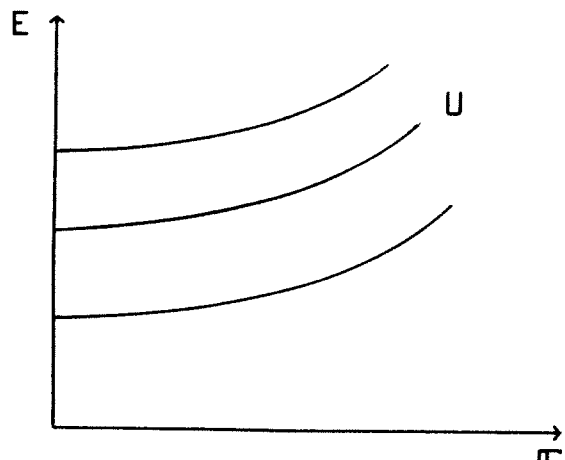
Soit
$$z = \frac{R - E(R)}{\sigma_R}$$

alors

$$E[U(R)] = \int_{-\infty}^{\infty} U(E(R) + z\sigma_R) f(z; 0, 1) dz \quad (1)$$

Les courbes d'indifférence du graphique 2 sont définies par les différentes combinaisons de $(E(R), \sigma_R)$ pour lesquels l'utilité espérée est constante.

GRAPHIQUE 2



Pour déterminer la pente des courbes on fait la différentielle totale de (1)

$$dE[U(R)] = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} U'(E(R) + \sigma_R z) z f(z; 0, 1) dz d\sigma$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} U'(E(R) + \sigma_R z) f(z; 0, 1) dz dE(R)$$

d'où

$$\frac{dE(R)}{d\sigma_R} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U'(E(R) + \sigma_R z) z f(z; 0, 1) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} U'(E(R) + \sigma_R z) f(z; 0, 1) dz} \quad (2)$$

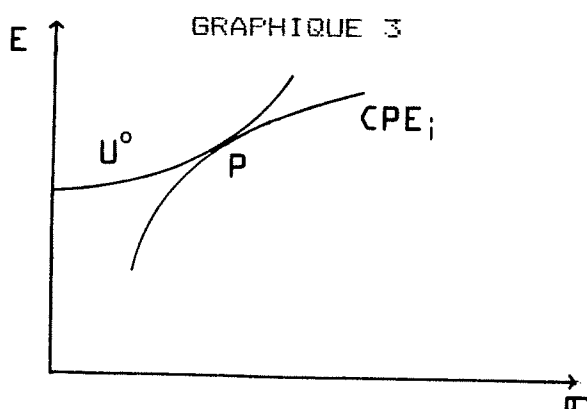
Puisque par hypothèse $U' > 0$, alors le dénominateur est positif. Le numérateur sera positif seulement si l'investisseur a de l'aversion pour le risque et que $U'' < 0$, c'est-à-dire que l'utilité croît à un taux décroissant. Dans ce cas, l'utilité marginale pour une valeur négative de z est toujours plus élevée qu'une valeur égale mais positive de z . Alors l'intégrale du numérateur est négative et le numérateur entier est positif. Ceci justifie la pente positive des courbes telles que tracées sur le graphique 2. La convexité des courbes est par ailleurs assurée par l'hypothèse que U'' est négatif.

sélection optimale

Partant des résultats obtenus (où les critères de choix sont l'espérance et la variance des rendements) on est en mesure de préciser le choix optimal de l'investisseur i en combinant sa carte d'utilité U_i à sa courbe des portefeuilles efficaces CPE_i .

sans actif certain

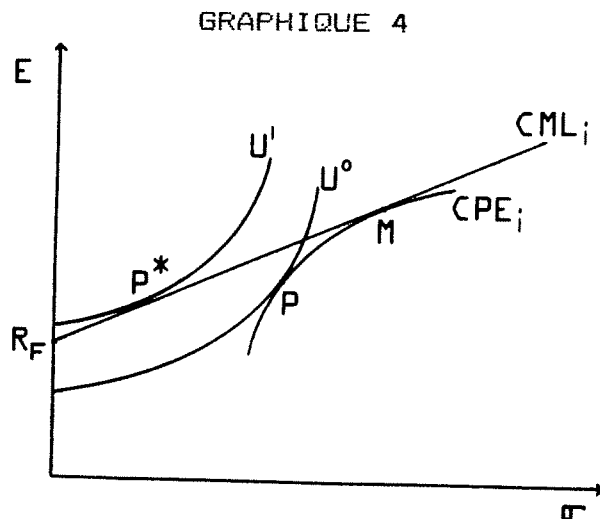
Dans le cas où l'investisseur ne fait face qu'à un marché d'actifs risqués, la solution est au point où la pente de la tangente de CPE_i est égale à la pente de la tangente de U_i , comme le montre le graphique suivant:



Etant donné les concavités et convexités respectives de ces courbes, la solution au point P est unique.

introduction d'un actif certain

Supposons qu'il existe sur le marché un actif certain, dans le sens que l'on connaît avec certitude son rendement de fin de période, autrement dit que le risque est nul. Dans le graphique 4 un tel actif est représenté par R_F .



La solution optimale se déplace du point P au point P* en deux étapes. Premièrement, l'investisseur modifie son portefeuille d'actifs risqués de façon à se déplacer du point P au point M. Deuxièmement, il combine le portefeuille M avec l'actif certain R_F de façon à maximiser son utilité. La solution optimale est maintenant P* et le gain d'utilité est représenté par la différence entre U^1 et U^0 . Ce résultat est connu comme le théorème de séparation des investissements, qui dit qu'un investisseur qui a de l'aversion au risque, pour maximiser son utilité, choisit le portefeuille M⁽¹⁾ qu'il combine à R_F , quelle que soit sa fonction d'utilité. On peut démontrer que si le taux de rendement des actifs risqués est plus élevé que le taux de rendement de l'actif certain, le montant investi dans les actifs risqués sera toujours positif.⁽²⁾

Le segment $R_F M$ ainsi généré dans le graphique 4 est la droite CML (Capital Market Line). Elle regroupe toute les combinaisons entre R_F et M qui permettent de détenir un portefeuille efficace. Théoriquement, lorsqu'il existe un actif certain duquel on peut prêter ou emprunter au même taux et en quantité infinie, CML s'étend vers la droite de façon infinie.⁽³⁾

solution numérique

En pratique, la quantité de calculs numériques nécessaires pour résoudre le problème de l'investisseur est très élevée. Dans un marché de n actifs risqués, l'investisseur devrait compiler n rendements, n variances et $(n^2 - n)/2$ covariances. Par exemple, si $n=100$, il y aurait 5150 paramètres à calculer.

Dans le but de diminuer et de simplifier l'analyse et les calculs, il s'est développé différents outils tel l'indice bêta simple.

L'indice bêta simple

L'indice bêta (β) simple est fondé sur l'analyse de la corrélation entre le comportement d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs et le comportement d'un indice de marché. La corrélation est donnée par le β_i dans une régression linéaire simple de la forme:

$$R_i = \theta_i + \beta_i R_m + e_i \quad (2)$$

où θ_i est la composante du rendement du portefeuille i qui est indépendante du marché (une constante).

(1) Voir l'annexe 2 pour une dérivation du portefeuille M

(2) Voir l'annexe 3 pour une démonstration.

(3) Voir l'annexe 4 pour une démonstration.

R_m est le taux de rendement de l'indice du marché (une variable aléatoire).

e_i est l'imperfection de la corrélation (une variable aléatoire).

Ce modèle présente des caractéristiques utiles:

1° Par construction on a que $E(e_i) = 0$ pour tout i .

2° Par hypothèse on a que

$$\text{cov}(e_i, R_m) = E[(e_i - 0)(R_m - E(R_m))] = 0$$

Ceci implique que la qualité de la description du rendement faite par l'équation (2) est indépendante des variations de R_m . Cette hypothèse est équivalente à dire que l'évolution d'un cours est une promenade aléatoire (ou encore que l'erreur e_i est un bruit blanc). En fait, l'analyse de régression est une technique qui garantit l'indépendance entre e_i et R_m .

3° Par hypothèse on a que $E(e_i, e_j) = 0$. Ceci implique qu'il n'existe aucun effet, au-dessus du marché, qui crée un co-mouvement entre deux actifs.

A l'aide de ces caractéristiques on obtient les résultats importants qui suivent.

Premièrement, on obtient le rendement espéré d'un portefeuille i en prenant l'espérance mathématique de (2):

$$\begin{aligned} E[R_i] &= E[\theta_i + \beta_i R_m + e_i] \\ &= E[\theta_i] + E[\beta_i R_m] + E[e_i] \end{aligned}$$

Puisque θ_i et β_i sont des constantes et que $E[e_i] = 0$,

$$E[R_i] = \theta_i + \beta_i E[R_m]$$

Deuxièmement, on peut démontrer que le β d'un portefeuille (β_p) est la somme pondérée des β des actifs constituant le portefeuille. C'est-à-dire

$$\beta_p = \sum_i w_i \beta_i$$

Troisièmement, on peut aussi démontrer que la variance d'un

portefeuille (σ_p^2) est donnée par⁽¹⁾

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_i w_i^2 \sigma_i^2$$

Comme conséquence, le calcul de l'information totale ne requiert plus que la connaissance de $3n+2$ paramètres. C'est-à-dire:

$$n \cdot \beta_i, n \cdot \theta_i, n \cdot \sigma_i, R_m \text{ et } \sigma_m.$$

Pour $n=100$ on a maintenant besoin que de 302 paramètres au lieu des 5150 précédents.

Jusqu'ici l'analyse s'est basée sur le comportement et les préférences particulières des investisseurs, c'est à dire sur des anticipations. La prochaine étape consiste à systématiser les comportements des investisseurs et à déterminer les mécanismes d'ajustement des prix et rendements. En fait on a maintenant besoin d'un modèle d'équilibre.

Un modèle d'équilibre: le CAPM

Le but du modèle d'équilibre des prix des actifs financiers (CAPM: capital assets pricing model) est de déterminer une mesure de risque et une relation entre le rendement et le risque des actifs financiers, quand le marché est à l'équilibre. C'est un modèle associé à l'approche moyenne-variance. L'idée fondamentale derrière le CAPM est l'uniformisation des comportements.

Pour sa construction on doit d'abord rajouter quelques hypothèses à celles que l'on avait déjà.

On avait que:

- 1° les investisseurs ont de l'aversion au risque et maximisent $E(U)$.
- 2° les investisseurs ne tiennent compte que de l'espérance et de la variance des rendements dans leurs critères de choix de portefeuille.
- 3° les investisseurs ont tous la même période horizon.

On doit maintenant rajouter que:

- 4° il y a atomisticité des agents.

(1) Voir l'annexe 5 pour une dérivation de β_p et σ_p^2 .

- 5° il n'existe pas d'imperfections du marché telles taxes ou coûts de transactions.
- 6° tous les actifs sont disponibles et parfaitement divisibles.
- 7° les anticipations des investisseurs quant aux espérances, variances et covariances des actifs sont homogènes.

dérivation intuitive du CAPM: (1)

Partant des courbes CPE_i et CML_i , puisque les investisseurs ont des anticipations homogènes, alors tous ont la même courbe des portefeuilles efficaces, i.e.

$$CPE_i = CPE \quad \text{pour tout } i.$$

Alors tous les investisseurs combinent le même portefeuille efficace M à l'actif certain. Donc

$$CML_i = CML \quad \text{pour tout } i.$$

Par ailleurs, dans une situation d'équilibre sur le marché, tous les titres sont détenus de façon à ce que l'offre égale la demande. Alors, l'équilibre n'est atteint que lorsque le portefeuille M contient tous les actifs du marché (selon leurs proportions respectives).

Donc, le portefeuille M est nécessairement le portefeuille de marché et CML doit avoir son ordonnée à l'origine au point R_F .

On obtient que tous les investisseurs doivent détenir le portefeuille de marché, dans un marché à l'équilibre.

Puisque la pente de la tangente à CPE est égale à la pente de CML, i.e.

$$\frac{E[R_{P^*}] - E[R_1]}{(\sigma_{1P^*})/\sigma_P} = \frac{E[R_{P^*}] - R_F}{\sigma_{P^*}}$$

(1) pour une dérivation plus rigoureuse voir l'annexe 6.

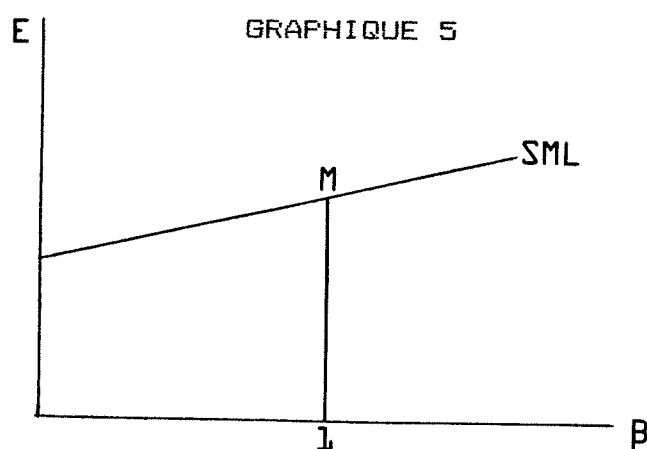
on obtient

$$E[R_1] = R_F + (E[R_P] - R_F) \frac{\sigma_{1P^*}}{\sigma_{P^*}^2}$$

qui est l'équation du CAPM, et qui peut se réécrire:

$$E[R_1] = R_F + \beta_1 [E(R_{P^*}) - R_F]$$

qui nous donne l'équation de la courbe SML du graphique 5 (security market line) que l'on représente dans l'espace espérance- β .



On a donc obtenu une relation linéaire entre le risque et le rendement des actifs et à l'équilibre, tous les actifs doivent se situer sur SML. Dans un tel système, l'équilibre est atteint et maintenu par une mécanique d'arbitrage⁽¹⁾.

Pour ce qui est du bêta du portefeuille de marché, puisque le risque du portefeuille M est donné par:

$$\beta_M = \frac{\sigma_{MM}}{\sigma_M^2}$$

alors

$$\beta_M = 1$$

Partant de ce résultat et sachant que le risque du portefeuille est aussi donné par:

$$\sigma_M^2 = \beta_M^2 \sigma_M^2 + \sum_1 w_1^2 \sigma_1^2$$

(1) Pour une démonstration des mécanismes d'arbitrage voir l'annexe 7.

Il faut donc que

$$\sum_i w_i^2 \sigma_i^2 = 0$$

Ce résultat est très important. Il signifie qu'une partie du risque est complètement éliminée par la détention d'un portefeuille de marché, comme il est démontré dans la partie suivante.

Caractéristiques du risque d'un portefeuille

La variance d'un portefeuille contenant n actifs est donnée par:

$$\text{var}(R_p) = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{i,j}$$

Développant:

$$\text{var}(R_p) = \sum_i w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} w_i w_j \sigma_{i,j}$$

où on a distingué la variance et la covariance. La variance d'un portefeuille est donc égale à la sommation des variances pondérées de chaque actif, plus la sommation des covariances pondérées. En d'autres mots,

(risque total) = (risque non-systématique) + (risque systématique)

Supposons que tous les actifs ont la même proportion dans le portefeuille. Alors

$$\text{var}(R_p) = \frac{1}{n^2} \sum_i \sigma_i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_i \sigma_{i,j}$$

et supposons aussi que σ_i^2 et $\sigma_{i,j}$ sont les σ moyens, alors

$$\text{var}(R_p) = \frac{n}{n^2} \sigma_i^2 + \frac{n*n}{n^2} \sigma_{i,j}$$

A la limite, quand n tend vers l'infini, le premier terme s'évanouit donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(R_p) = \sigma_{1j}$$

L'investisseur peut donc éliminer la partie non systématique du risque d'un portefeuille en diversifiant ses investissements. Le seul risque qu'il ne peut éliminer est la covariance avec le marché, c'est-à-dire le risque de l'économie.

LES ANNEXES

ANNEXE 1 : forme de la CPE

On désire démontrer la forme de la courbe CPE.

Soit les portefeuilles J et K, représentés sur le graphique 6 et soit E une combinaison de ces deux portefeuilles. On a pour E que

$$E(R_E) = aE[R_J] + (1-a)E[R_K], \quad 0 \leq a \leq 1$$

$$\begin{aligned} \sigma_E &= [a^2\sigma_J^2 + (1-a)^2\sigma_K^2 + 2a(1-a)\sigma_{JK}]^{1/2} \\ &= [a^2\sigma_J^2 + (1-a)^2\sigma_K^2 + 2a(1-a)r_{JK}\sigma_J\sigma_K]^{1/2} \end{aligned}$$

Puisque $a^2\sigma_J^2 \geq 0$ et $(1-a)^2\sigma_K^2 \geq 0$, la valeur maximale de σ_E sera obtenue pour $r_{JK} = 1$. Dans ce cas et par la règle de différentiation en chaîne

$$\frac{dE[R_E]}{d\sigma_E} = \frac{dE[R_E]/da}{d\sigma_E/da}$$

où

$$\frac{dE[R_E]}{da} = E[R_J] - E[R_K]$$

$$\frac{d\sigma_E}{da} = \sigma_J - \sigma_K$$

substituant

$$\frac{dE[R_E]}{d\sigma_E} = \frac{E[R_J] - E[R_K]}{\sigma_J - \sigma_K}$$

On obtient une constante puisque les distributions de probabilité de j et k sont indépendantes de a. Une combinaison des portefeuilles j et k génèrent donc une droite (représentée par la ligne pointillée dans le graphique 6) quand la corrélation est parfaite.

Puisque σ_E est maximum pour $r_{jk} = 1$, toutes les valeurs de σ_E doivent se situer à gauche de la droite pointillée pour $r_{jk} < 1$ (représentée par le trait plein).

Pour le cas où $r_{jk} = -1$, la variance de E devient un carré parfait:

$$\sigma_E^2 = a^2\sigma_J^2 + (1-a)^2\sigma_K^2 - 2a(1-a)\sigma_K\sigma_J$$

Alors

$$\sigma_E = \pm [a\sigma_J - (1-a)\sigma_K]$$

obtenant donc deux racines.

Pour $\sigma_E = [a\sigma_J - (1-a)\sigma_K]$

$$\frac{d\sigma_E}{da} = (\sigma_J + \sigma_K) > 0, \text{ une pente positive.}$$

Pour $\sigma_E = - [a\sigma_J - (1-a)\sigma_K]$

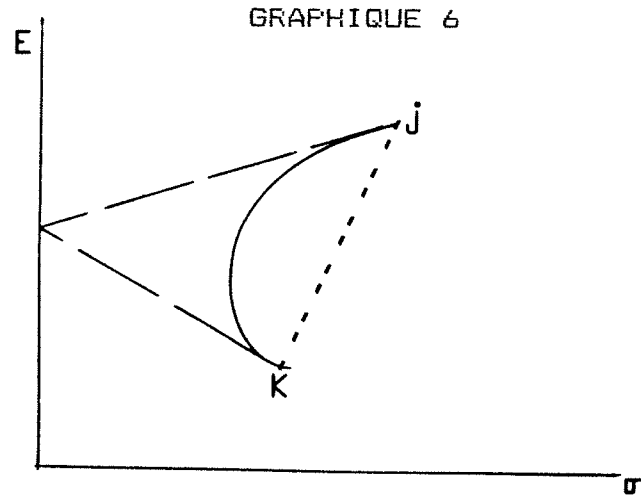
$$\frac{d\sigma_E}{da} = - (\sigma_J + \sigma_K) < 0, \text{ une pente négative.}$$

En outre, il est possible de choisir a tel que

$$(a\sigma_J - (1-a)\sigma_K) = - (a\sigma_J - (1-a)\sigma_K) = 0$$

donc $\sigma_E = 0$

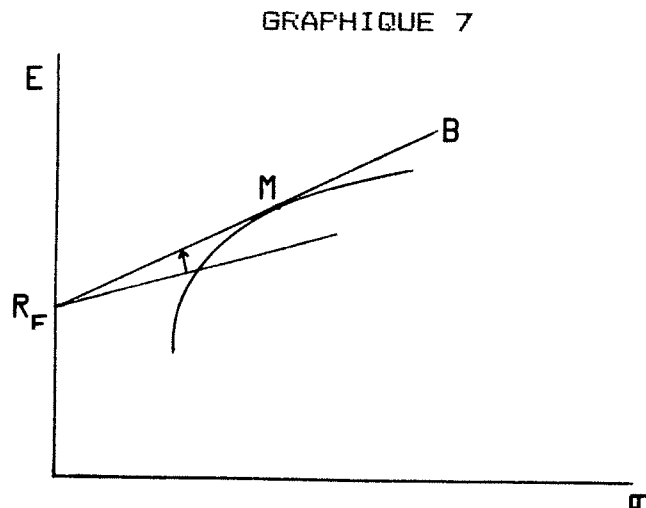
Ces résultats génèrent, dans le graphique, les traits semi-pleins.



Dans le cas de plus de deux portefeuilles, la concavité est conservée et la forme de la courbe demeure la même.

ANNEXE 2: dérivation du portefeuille M

Supposons que les ventes à découvert sont permises et qu'il existe un actif ayant un rendement certain à lequel on peut prêter et emprunter indéfiniment. La frontière efficace se situe sur le rayon R_F -B du graphique 7 qui possède la pente la plus élevée.



et la pente est donnée par θ si

$$\theta = \frac{E[R_p] - R_F}{\sigma_p} \quad (1)$$

La frontière efficace est déterminée par le portefeuille qui maximise θ sous la contrainte que la somme des proportions w_i des actifs est égale à 1. Le problème est donc

$$\max \frac{E[R_p] - R_F}{\sigma_p} \quad \text{s.c.q.} \quad \sum_i w_i = 1$$

Pour solutionner, on peut insérer la contrainte dans la fonction objective de la façon suivante. Multiplier R_F par 1 ne change rien, donc

$$R_F = R_F * 1 = R_F(\sum w_i) = \sum w_i R_F \quad (2)$$

Substituant (2) DANS (1) et développant l'espérance et l'écart-type des rendements du portefeuille on obtient

$$\theta = \frac{E[R_p] - \sum w_i R_F}{\sigma_p}$$

$$\theta = \frac{\sum w_i [E(R_i) - R_F]}{[\sum w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{i,j}]^{1/2}}$$

$$\theta = \left[\sum_i w_i [E(R_i) - R_F] \right] \left[\sum_i w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{i,j} \right]^{-1/2}$$

Utilisant les règles de dérivée d'un produit et de dérivée en chaîne on obtient la dérivée première par rapport à w_k :

$$\frac{d\theta}{dw_k} = \frac{\partial}{\partial w_k} \left[\sum_i w_i [E(R_i) - R_F] \right] \frac{\partial}{\partial \left[\sum_i w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{i,j} \right]^{-3/2}}$$

$$+ \left(2w_k \sigma_k^2 + 2 \sum_j w_j \sigma_{k,j} \right) \frac{\partial}{\partial \left[\sum_i w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{i,j} \right]^{-1/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_k} \left[E(R_k) - R_F \right]$$

multipliant par

$$\left[\sum_i w_i \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma_{ij} \right]^{1/2}$$

et réarrangeant

$$\frac{d\theta}{dw_k} = - \frac{\sum_i w_i [E(R_i) - R_F]}{\sum_i w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma_{ij}} \left[w_k \sigma_k^2 + \sum_{j \neq i} w_i \sigma_{ij} \right] + [E(R_k) - R_F]$$

définissant

$$\phi = \frac{\sum_i w_i [E(R_i) - R_F]}{\sum_i w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} w_i w_j \sigma_{ij}}$$

on obtient

$$\frac{d\theta}{dw_k} = - \left[\phi w_k \sigma_k^2 + \sum_{j \neq k} \phi w_j \sigma_{jk} \right] + [R_k - R_F] \quad (3)$$

La condition du premier ordre pour déterminer un maximum nous mène à solutionner le système d'équations simultanées suivant:

$$\frac{d\theta}{dw_1} = \frac{d\theta}{dw_2} = \dots = \frac{d\theta}{dw_k} = \dots = \frac{d\theta}{dw_n} = 0$$

Ayant obtenu de (3) que

$$\frac{d\theta}{dw_k} = - [\phi w_1 \sigma_{1k} + \phi w_2 \sigma_{2k} + \dots + \phi w_k \sigma_{kk}^2 + \dots + \phi w_{n-1} \sigma_{n-1k} + \phi w_n \sigma_{nk}] + E(R_k) - R_F$$

et définissant $Z_k = \phi w_k$, le système devient:

$$\begin{aligned} E[R_1] - R_F &= Z_1 \sigma_{11}^2 + Z_2 \sigma_{12} + Z_3 \sigma_{13} + \dots + Z_n \sigma_{1n} \\ E[R_2] - R_F &= Z_1 \sigma_{12} + Z_2 \sigma_{22}^2 + Z_3 \sigma_{23} + \dots + Z_n \sigma_{2n} \\ E[R_3] - R_F &= Z_1 \sigma_{13} + Z_2 \sigma_{23} + Z_3 \sigma_{33}^2 + \dots + Z_n \sigma_{3n} \\ &\vdots \\ E[R_n] - R_F &= Z_1 \sigma_{1n} + Z_2 \sigma_{2n} + Z_3 \sigma_{3n} + \dots + Z_n \sigma_{nn}^2 \end{aligned}$$

On a donc un système à n équations et n inconnues. La proportion optimale à investir dans l'actif k est

$$w_k = \frac{Z_k}{\sum_1 Z_1} \quad \text{pour tout } k.$$

et la solution est unique. On obtient ainsi le portefeuille optimal M , qui contient tous les actifs risqués selon leur proportion du marché et qui peut être combiné à l'actif certain pour obtenir un portefeuille efficace.

ANNEXE 3: achat d'actifs risqués

Soit un individu possédant un montant M , R étant la partie investie en actifs risqués au taux de rendement r et i le taux de rendement de l'actif certain. La valeur de l'investissement à la fin de la période est une variable aléatoire définie par:

$$\begin{aligned} V &= (M-R)(1+i) + R(1+r) \\ &= M(1+i) + R(r-i) \end{aligned} \quad (1)$$

Si la fonction d'utilité est définie pour une seule période, l'individu investira un montant R^* , obtenant la valeur espérée de la fonction $U(V)$. Donc, le problème de l'individu est de déterminer R^* qui maximise $E[U(V)]$ étant donné i et la distribution de probabilité de r . De (1)

$$E[U(V)] = E [U(M(1+i) + R(r-i))] \quad (2)$$

Le maximum de $E[U(V)]$ est donné par la condition du premier ordre et doit respecter celle du deuxième ordre:

$$\frac{dE[U(V)]}{dR} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2E[U(V)]}{dR^2} < 0$$

Par les propriétés de l'espérance mathématique, la condition du premier ordre peut s'écrire:

$$E [dU / dR] = 0$$

Dérivant en chaîne

$$E \begin{bmatrix} dU & dV \\ \hline dV & dR \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{où} \quad \frac{dU}{dV} = U'(V) \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dR} = (r-i)$$

insérant dans la condition du premier ordre:

$$E [U'(V)(r-i)] = 0 \quad (3)$$

La condition de second ordre s'obtient en prenant la dérivée:

$$\frac{d E [U'(V)(r-i)]}{dR} = E [U''(V)(r-i)^2] \quad (4)$$

De (4) on a que $(r-i)^2 > 0$. De plus, $U''(V) < 0$ pour tout V par hypothèse. Donc la condition de second ordre (pour $r \neq i$) est strictement négative:

$$E [U''(V)(r-i)^2] < 0$$

et la condition du premier ordre est donc une fonction décroissante de R . Les conditions sont donc satisfaites pour que l'on puisse déterminer R^* . Supposons que le montant investi dans les actifs risqués ne peut être négatif, i.e. $R \geq 0$ et prenons le cas où $R = 0$. Alors

$$E [U'(V)(r-i)] \leq 0$$

car c'est une fonction strictement décroissante de R et que $R \geq 0$. Si $R = 0$, alors $V = M(1+i)$ et $U'(V) = U'(M(1+i))$ où on sait que $U' > 0$ (par hypothèse de non satiété). Prenant l'espérance:

$$E [U'(M(1+i))(r-i)] = U'[M(1+i)(E(r)-i)]$$

et $U'[M(1+i)(E(r)-i)] \leq 0$. Puisque $U'(M(1+i)) > 0$, alors

$$(E(r)-i) \leq 0 \quad \text{ou} \quad E(r) \leq i$$

Il est donc optimal pour un investisseur de ne pas détenir d'actifs risqués ($R^* = 0$) seulement si le taux de rendement de ces actifs est inférieur ou égal au taux de rendement de l'actif certain. Sinon l'investisseur détiendra un montant positif d'actifs risqués.

ANNEXE 4: extension de la CML

La possibilité d'emprunter et de prêter modifie la frontière efficace originale de la courbe CML de R_{FM} à R_{FMB} . Le segment R_{FM} comprend les combinaisons entre le portefeuille risqué et les actifs certains.

Les actifs certains peuvent toutefois être utilisés comme levier financier en combinant un emprunt au taux sans risque à des actifs risqués. Ces combinaisons génèrent le segment MB de la courbe comme le démontre l'exemple suivant.

Soit $R_F = 5\%$, $E(R_M) = 10\%$ et $\sigma(R_M) = 20$. A partir des équations du rendement et du risque:

$$E(R_P) = aR_F + (1-a)E(R_M)$$

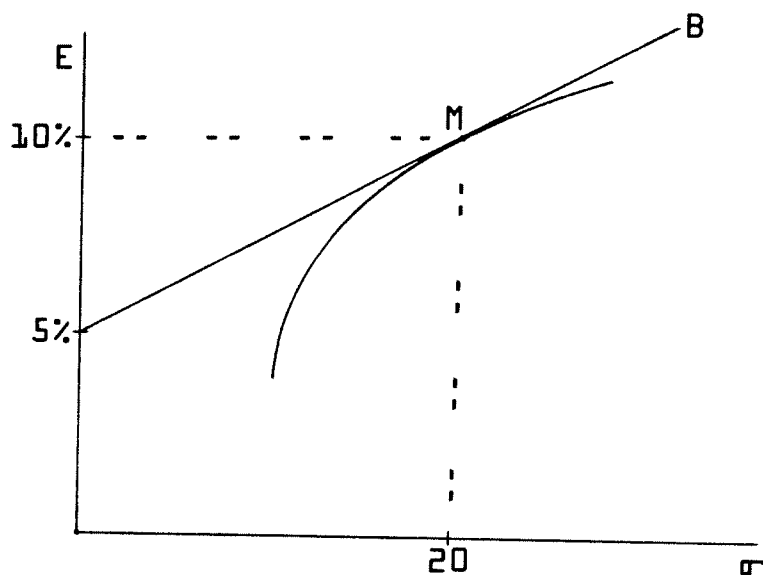
$$\sigma^2(R_P) = (1-a)^2\sigma^2(R_M)$$

on obtient différentes valeurs pour le rendement et le risque du portefeuille en faisant varier a :

a	$(1-a)$	R_P	$\sigma(R_P)$
1	0	5	0
.5	.5	7.5	10
0	1	10	20
-.5	1.5	12.5	30
-1	2	15	40

De cet exemple on constate que la courbe CML du graphique 8 peut être étendue sur le segment MB.

GRAPHIQUE 8



ANNEXE 5: bêta et variance de portefeuille

1. Dérivation du β d'un portefeuille:

Par définition, le β d'un portefeuille P contenant n actifs est

$$\beta_P = \frac{\sigma_{PM}}{\sigma_M^2} = \frac{E [(R_P - E(R_P)) (R_M - E(R_M))]}{\sigma_M^2}$$

développant,

$$\begin{aligned} \beta_P &= \frac{E \left[\left(\sum_i^n w_i (R_i - E(R_i)) \right) (R_M - E(R_M)) \right]}{\sigma_M^2} \\ &= \frac{E \left\{ \left[w_1 (R_1 - E(R_1)) + w_2 (R_2 - E(R_2)) + \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. w_n (R_n - E(R_n)) \right] (R_M - E(R_M)) \right\}}{\sigma_M^2} \\ &= w_1 \frac{E [(R_1 - E(R_1)) (R_M - E(R_M))]}{\sigma_M^2} + \dots + \\ &\quad w_n \frac{E [(R_n - E(R_n)) (R_M - E(R_M))]}{\sigma_M^2} \\ &= w_1 \beta_1 + w_2 \beta_2 + \dots + w_n \beta_n \end{aligned}$$

obtenant finalement

$$\beta_P = \sum w_i \beta_i \quad (1)$$

2. Dérivation de la variance d'un portefeuille:

On sait que la variance d'un portefeuille est donnée par

$$\sigma_P^2 = \sum_i w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} w_i w_j \sigma_{i,j} \quad (2)$$

or $\sigma_i^2 = E [R_i - E(R_i)]^2$

$$R_i = \theta_i + \beta_i R_M + e_i$$

$$R_i = \theta_i + \beta_i R_M$$

alors $\sigma_i^2 = E [(\theta_i + \beta_i R_M + e_i) - (\theta_i + \beta_i R_M)]^2$
 $= E [\beta_i (R_M - E(R_M)) + e_i]^2$
 $= \beta_i^2 E(R_M - E(R_M))^2 + 2\beta_i E[e_i (R_M - E(R_M))] + E(e_i)^2$

où $E(e_i) = 0$, alors

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 E[R_M - E(R_M)]^2 + E(e_i)^2$$

$$= \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_i^2 \quad (3)$$

Par ailleurs

$$\sigma_{i,j} = E [(R_i - E(R_i)) (R_j - E(R_j))]$$

substituant

$$\sigma_{i,j} = E [((\theta_i + \beta_i R_M + e_i) - (\theta_i + \beta_i R_M)) * ((\theta_j + \beta_j R_M + e_j) - (\theta_j + \beta_j R_M))]$$

simplifiant

$$\sigma_{i,j} = E [(\beta_i (R_M - E(R_M)) + e_i) (\beta_j (R_M - E(R_M)) + e_j)]$$

$$= \beta_i \beta_j E(R_M - E(R_M))^2 + \beta_j E[e_i (R_M - E(R_M))] + \beta_i E[e_j (R_M - E(R_M))] + E(e_i e_j)$$

par les hypothèses sur e on obtient

$$\sigma_{1j} = \beta_1 \beta_j \sigma_M^2 \quad (4)$$

Insérant (3) et (4) dans (2)

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 &= \sum_i w_i^2 \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sum_i \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_M^2 + \sum_i w_i^2 \sigma_{e_i}^2 \\ &= \sum_i \sum_j w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_M^2 + \sum_i w_i^2 \sigma_{e_i}^2 \end{aligned}$$

réarrangeant

$$\sigma_F^2 = \left[\sum_i w_i \beta_i \right] \left[\sum_j w_j \beta_j \right] \sigma_M^2 + \sum_i w_i^2 \sigma_{e_i}^2$$

Ainsi, la variance d'un portefeuille peut s'écrire (par (1))

$$\sigma_F^2 = \beta_F^2 \sigma_M^2 + \sum_i w_i^2 \sigma_{e_i}^2$$

ANNEXE 6: dérivation du CAPM

Pour une dérivation plus rigoureuse du CAPM dans le cas où on peut vendre à découvert et où on peut emprunter et prêter à un taux d'intérêt certain, reprenons la solution de l'annexe 3. La frontière techniquement efficace est obtenue en déterminant le portefeuille M, lequel est tiré de la solution du système d'équations simultanées de la forme:

$$\begin{aligned} \theta [w_1 \sigma_{1k} + w_2 \sigma_{2k} + \dots + w_k \sigma_{kk} + \dots + w_n \sigma_{nk}] \\ = E(R_k) - R_F \quad (1) \end{aligned}$$

Si les anticipations sont homogènes alors chaque individu choisit le même portefeuille optimal M. Dans ce cas, M doit contenir, à l'équilibre, tous les actifs en proportion de leur part du marché. Pour obtenir l'équation du CAPM, démontrons que le coté

gauche de l'équation (1) est égal à $\text{cov}(R_k, R_M)$:

$$\text{cov}(R_k, R_M) = E \left[(R_k - E(R_k)) \left(\sum_i R_i w_i - \sum_i E(R_i) w_i \right) \right]$$

car $R_M = \sum R_i w_i$, les w_i étant pondérés selon les parts du marché.

Réarrangeant,

$$\text{cov}(R_k, R_M) = E \left[(R_k - E(R_k)) \left(\sum_i w_i (R_i - E(R_i)) \right) \right]$$

développant,

$$\begin{aligned} \text{cov}(R_k, R_M) &= E \left[w_1 (R_k - E(R_k)) (R_1 - E(R_1)) + w_2 (R_k - E(R_k)) (R_2 - E(R_2)) \right. \\ &\quad + \dots + w_k (R_k - E(R_k))^2 + \dots + \\ &\quad \left. w_n (R_k - E(R_k)) (R_n - E(R_n)) \right] \\ &= w_1 E(R_k - E(R_k)) (R_1 - E(R_1)) + w_2 E(R_k - E(R_k)) (R_2 - E(R_2)) + \\ &\quad + \dots + w_k E(R_k - E(R_k))^2 + \dots + \\ &\quad w_n E(R_k - E(R_k)) (R_n - E(R_n)) \end{aligned}$$

Comparant avec l'équation (1), on peut en tirer:

$$\theta \text{cov}(R_k, R_M) = R(R_k) - R_F \quad (2)$$

Puisque cette relation vaut pour tout actif k , elle vaut aussi pour tout portefeuille d'actifs, dont le portefeuille de marché M . Alors

$$\theta \text{cov}(R_M, R_M) = E(R_M) - R_F$$

Puisque $\text{cov}(R_M, R_M) = \sigma_M^2$

$$\theta \sigma_M^2 = E(R_M) - R_F$$

où
$$\theta = \frac{E(R_M) - R_F}{\sigma_M^2}$$

Substituant cette valeur de θ dans l'équation (2) et réarrangeant on obtient:

$$E(R_K) = R_F + \frac{E(R_M) - R_F}{\sigma_M^2} \text{cov}(R_K, R_M)$$

$$E(R_K) = R_F + \beta_K [E(R_M) - R_F]$$

qui est l'équation du CAPM.

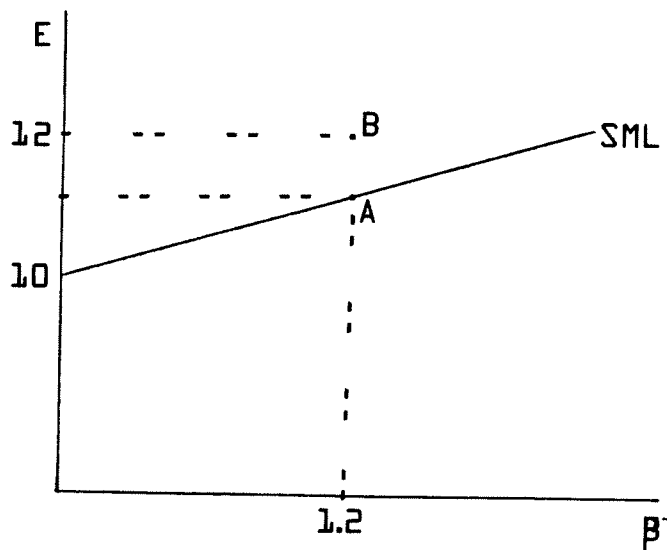
ANNEXE 7: démonstration des mécanismes d'arbitrage

Supposons deux portefeuilles A et B ayant les caractéristiques suivantes:

	E(R)	β
A	10	1.2
B	12	1.2

Graphiquement, la situation est la suivante:

GRAPHIQUE 9



Démontrons que par des mécanismes d'arbitrages le portefeuille B ne peut demeurer à cette position.

B offre un rendement plus élevé que A, pour un niveau de risque identique. Il est donc rentable de vendre à découvert une partie de A pour acheter B. Supposons la vente à découvert de A pour une valeur de 1000\$ et l'achat de B avec ce montant. Le portefeuille d'arbitrage est ainsi constitué:

	montant investi	E(R)	β
A	-1000\$	-100\$	-1.2
B	1000\$	120\$	1.2
portefeuille d'arbitrage	0	20\$	0

Donc, sans investissement net et sans risque il est possible de faire des profits. Il est clair qu'à l'équilibre un actif tel B ne peut exister.

PARTIE -II- LE REGIME EPARGNE-ACTIONS

Depuis le 22 juin 1979, les contribuables québécois peuvent bénéficier d'exemptions fiscales en adhérant au Régime d'Epargne-Actions du Québec (REA)⁽¹⁾ instauré par le gouvernement provincial. En achetant des actions respectant des conditions au préalable, les particuliers peuvent obtenir des crédits d'impôt associés à 50, 75, 100 ou 150% du coût d'achat.

Ces actions sont en quelque sorte un nouvel instrument financier dont une partie du rendement est stochastique (le rendement habituel de l'action) et une partie non stochastique (l'exonération fiscale associée à l'achat). De ces deux parties la seconde est prépondérante. Elle offre un rendement certain minimum de 25% environ et pouvant aller jusqu'à 75% du montant investi (dépendamment des taux d'exonération et d'imposition).

Bien que le REA soit profitable aux particuliers (du moins à certains), c'est la facilitation du financement de la petite et moyenne entreprise (PME) qui est sa raison d'être. De ce fait, il est un outil servant une volonté de dirigisme de l'état et indique son insatisfaction face à la libre orientation des capitaux. Les crédits d'impôt accordés représentent ainsi une récompense offerte à l'investisseur pour l'inciter à modifier ses habitudes d'épargne et changer l'orientation existante des capitaux. Mais il est rare que les effets d'une intervention se restreignent à être uniquement les objectifs visés; l'interdépendance des marchés, des agents, des phénomènes, fait qu'il existe toujours dans l'ensemble des conséquences d'un choc un sous-ensemble d'effets difficilement prévisibles dont les éléments peuvent être favorables ou pervers.

Concrètement le REA intervient dans la réorientation des capitaux en admettant seulement les actions des entreprises établies au Québec et de façon plus précise vers la PME en attribuant des taux de déduction plus élevés sur les titres de celles-ci.

Par ailleurs, seules sont éligibles les actions nouvellement émises sur le marché. Le régime engendre ainsi une hausse des fonds disponibles et rend unique l'éligibilité des titres pour fin d'abri fiscal. Finalement le REA intervient sur la période de détention de ces mêmes titres. Pour éviter toute récupération d'impôt, le niveau du REA doit être maintenu pendant une période minimum de deux ans après la fin de l'année d'acquisition d'actions ayant permis une déduction. Cette contrainte est importante. Elle génère un portefeuille de court terme qui doit être maintenu sur le long terme pour permettre le renouvellement continu des déductions fiscales. Elle peut amener aussi l'investisseur à être contraint de détenir en même temps trois portefeuilles REA, au moins à certaines périodes.

(1) L'annexe A fournit des informations sur le REA.

Etant donné la structure du marché boursier québécois, il est utile de distinguer les titres éligibles au REA en deux catégories. L'une comprend les actions disponibles via les programmes de réinvestissement de dividendes et d'achat d'actions, (PRDAA) liés aux très grandes entreprises, dont le capital-actions ordinaires autorisé est illimité. Ces actions sont transigées au coût du marché, selon certaines règles. L'autre catégorie regroupe les nouvelles émissions, éligibles et transigées sur le marché primaire, en quantité et à des prix contrôlés par la Commission des Valeurs Mobilières du Québec (CVMQ) et par les maisons de courtage. Face à ces caractéristiques: prépondérance du rendement non stochastique, unicité de l'éligibilité, absence de surenchère, période de détention obligatoire et autres on peut soupçonner la présence d'un bruit, autre que celui attendu, dans les mécanismes d'ajustement du marché boursier québécois. Ce bruit pourrait bien être non négligeable considérant la popularité du REA: en 1984 les détenteurs de portefeuilles REA furent au nombre de 120 000 pour des contributions totales de 500 millions \$⁽¹⁾.

L'objectif est donc d'étudier si le REA engendre des effets notables sur le comportement des actions admissibles. Puis, face aux résultats obtenus et dans le cadre de la théorie du portefeuille, est développée l'attitude optimale que peut adopter un investisseur.

Pour le reste du texte de cette partie la procédure est la suivante. La section 1 est consacrée à l'analyse de la catégorie d'actions émises par prospectus, sur le marché primaire. L'analyse est basée sur l'évolution du cours de l'indice REA-Lévesque-Beaubien (REALB) tel que créé et diffusé par la maison de courtage du même nom. Comme il est précisé plus loin, la structure de cet indice est conforme aux besoins de ce texte, puisqu'il a été créé dans le but de résumer le mouvement de l'ensemble des actions admissibles au REA. Dans cette section l'analyse financière est appliquée selon l'approche moyenne-variance telle que présentée dans la partie précédente.

La deuxième section est consacrée à l'analyse des actions éligibles obtenues des compagnies offrant des programmes de réinvestissement de dividendes et d'achat d'actions (PRDAA). L'information statistique sur cette catégorie est obtenue de l'indice PRDAA, construit dans le cadre de ce travail pour compléter l'analyse, en considérant les actions négligées par l'indice REALB. L'indice PRDAA est fortement lié dans sa structure à l'indice REALB⁽²⁾ pour fin de comparaisons.

(1)source: Revenu Québec, service de la statistique.

(2)La structure des indices est précisée dans l'annexe B et les données dans l'annexe E.

SECTION -I- Les émissions publiques

Les données

Les données utilisées pour évaluer les performances des titres concernés sont celles enrégistrées par l'indice REA-Lévesque Beaubien (REA-LB).

En résumé, les principales caractéristiques de l'indice REALB sont les suivantes. Premièrement il ne tient pas compte des actions émises dans le cadre des programmes de réinvestissement de dividendes et d'achat d'actions. Deuxièmement il utilise la majorité des nouvelles émissions éligibles sauf deux types: "celles des très grandes entreprises car leur importance biaiserait l'indice et les très petites émissions car il n'est pas pratique de les inclure"⁽¹⁾. Par ailleurs, l'indice est dynamique dans le sens que les émissions incluses dans le calcul de l'indice ne le sont que pendant leur période d'éligibilité c'est-à-dire à partir de la date de l'émission jusqu'à deux ans après la fin de l'année de l'émission. Ce caractère dynamique de l'indice correspond parfaitement aux principes régissant le REA. Ceci permet de prélever de l'indice du marché les périodes d'éligibilité des titres concernés et de distinguer leur comportement.

Les très grandes firmes évincées de l'indice sont en fait celles ayant un actif de plus de 1 milliard \$ sauf pour des émissions de moins de 25 millions \$. Cette mesure est nécessaire afin d'éviter que quelques émissions démesurées étouffent le comportement des autres puisqu'elles sont pondérées par leur taille. De 1979 à 1985, douze émissions ont été exclues pour cette raison sur un total de 124. De ces douze, cinq provenaient des firmes ayant des programmes de réinvestissement et d'achat.

A l'opposé, l'exclusion des très petites émissions (d'une valeur de moins de 2 millions \$) ne s'est appliquée qu'à huit occasions sur la même période, ce qui est tout à fait négligeable.

La structure de l'indice et l'évolution du régime ont fait que dès août 81 il était calculé sur la base d'une dizaine de titres, à la fin 83 sur presque une trentaine et fin 85 sur environ 90 titres. Des études statistiques ayant démontré qu'il suffit qu'un portefeuille contienne de 12 à 15 titres pour qu'il soit représentatif du marché, on devrait donc s'attendre à ce que les performances de l'indice REALB tendent vers celles du marché en général, pour finalement s'y confondre.

(1) "L'indice REALB", dossier de presse, oct.84.

(2) La structure des indices est précisée dans l'annexe B et les données dans l'annexe E.

Les résultats statistiques:

Le tableau A présente les premiers résultats statistiques sur les valeurs des indices REALB et TSE300 (l'indice TSE300 représente les performances du marché). Ces résultats traduisent leur comportement depuis les débuts du REA, c'est-à-dire qu'ils sont basés sur des observations qui s'échelonnent de juillet 79 à décembre 85, pour un total de 77 observations. Elles sont mensuelles et correspondent aux valeurs observées en fin de période, converties en pourcentage de variation.

TABEAU A (résultats mensuels en %)

	REA-LB	TSE300
MOYENNE: $E(R_1)$	1.13	0.97
VARIANCE: σ^2_1	38.27	33.30
ECART-TYPE: σ_1	6.19	5.77
COVARIANCE: $\sigma_{rea,tse}$	26.28	
COEF. DE CORR.: $r_{rea,tse}$	0.74	

De ces résultats on remarque premièrement le coefficient de corrélation. Avec une valeur de .74 il signifie qu'on observe une distinction entre le comportement du marché en général et celui du marché REA. Cette distinction est importante. Elle implique une attitude différente des investisseurs selon l'identité du marché.

Une deuxième remarque importante est le rapport rendement-risque (moyenne-écart-type) de chacun des deux portefeuilles. Transformée en valeurs annuelles, l'espérance de gain d'un portefeuille contenant les titres de l'indice REA (portefeuille REA pour simplifier) est de 13.56%. Celle (de façon équivalente) du portefeuille TSE300 est de 11.64%. Si on considère que sur le marché bancaire la concurrence pour s'attirer l'épargne des agents se joue au niveau des centièmes de pourcentage, l'écart observé ici est pour le moins notable, pour un différentiel de risque qui semble assez faible. Le rapport risque-rendement sera approfondi dans la partie traitant du portefeuille optimal.

stabilité des résultats:

Les premiers résultats semblent indiquer que le marché REA est distinct, sous l'hypothèse que l'indice REALB, utilisé comme compte, représente un portefeuille de marché, c'est-à-dire est bien diversifié. Cette hypothèse est toutefois peu réaliste pour les débuts du REA. Par exemple, en 1979 seulement quatre nouvelles émissions furent admissibles et sur ces quatre, deux seules purent être incluses dans le calcul de l'indice. On doit en fait attendre à août 1981 pour que l'indice contienne une dizaine de titres et pour que l'on puisse espérer théoriquement un comportement tendant vers celui du marché complet. A partir de 1983 cependant la diversification ne fait plus de doute puisqu'à la fin de cette année l'indice utilisait les cours de 38 actions, pour ensuite s'élever à 51 à la fin 84, puis à près de cent à la fin 85.

Afin de vérifier la rigueur des premiers résultats (i.e. ceux couvrant toutes les observations) le tableau B présente les résultats obtenus suite au tronçonnage des observations sur certaines périodes. Plus précisément, les observations des années 79-80, 81, 82, 83 et 84 ont été enlevées cumulativement et dans l'ordre.

TABLEAU B (résultats en % mensuels)

nb. d'obs.:	77	60	48	36	24	12
E(tse):	0.97	0.53	0.93	1.15	0.57	1.58
Var(tse):	33.30	26.68	24.96	15.34	14.97	12.01
E-T(tse):	5.77	5.17	5.00	3.92	3.87	3.47
E(realb):	1.13	0.94	1.69	1.47	1.35	2.95
Var(realb):	38.27	26.07	24.79	16.46	14.85	14.83
E-T(realb):	6.19	5.11	4.98	4.06	3.85	3.85
Cov(realb,tse):	26.28	19.87	18.62	11.59	10.27	8.74
Corr(realb,tse):	0.74	0.75	0.75	0.73	0.69	0.65
années	79-85	81-85	82-85	83-85	84-85	1985

La constatation la plus importante sur ce tableau est certes la stabilité dans le temps du coefficient de corrélation. Il appert

que l'écart observé entre les comportements des deux marchés soit structurel puisque pour les douze dernières observations (l'année 85), où l'indice REA est basé sur près d'une centaine de titres, on observe même une hausse de l'indépendance relative.

Une autre constatation majeure est au niveau de l'évolution du rapport rendement-risque. Alors que les écart-types respectifs des deux indices tendent à se rapprocher (même que pour certaines périodes l'écart-type de l'indice REA-LB est plus faible que celui de l'indice TSE300) l'espérance de rendement devient fortement plus élevée pour le portefeuille REA. On observe donc que l'écart-type de l'indice REA se conforme aux règles d'un portefeuille diversifié en tendant à se confondre à l'écart-type du marché. Par contre, entre les rendements de ces deux indices persiste un écart théoriquement artificiel ne niant pas les anticipations d'un bruit d'intervention.

l'indice bêta simple et le CAPM

Le calcul de l'indice bêta (β) simple permet de classer les actifs selon la quantité de risque qui leur est associée.

Insérant nos variables dans l'équation linéaire de l'indice bêta on obtient

$$R_{rea} = \theta + \beta_{rea} R_{tse} + \epsilon_{rea}$$

ou
$$R_{rea} = \hat{\theta} + \hat{\beta}_{rea} R_{tse}$$

Les résultats de cette régression linéaire simple sont présentés dans le tableau C. La valeur du bêta obtenu est basée sur les 60 dernières observations, c'est-à-dire sur les années 81 à 85 inclusivement.

L'équation estimée résultante étant

$$R_{rea} = .54 + .74 R_{tse}$$

Tableau C

échantillon: 1981.01 - 1985.12
 60 observations
 MCO // la variable dépendante est REA

	COEFFICIENT	ECART-TYPE	STATISTIQUE-T
C	0.0054369	0.0044314	1.2269050
TSE	0.7448157	0.0853416	8.7274599
R-carré	0.567708	moy. de la var. dép.	0.009381
R-carré ajusté	0.560255	var. de la var. dép.	0.051492
E.-T. de la régression	0.034146	Som. carrés des rés.	0.067626
stat. Durbin-Watson	1.987199	statistique-F	76.16856

on observe donc un bêta de .74 pour le portefeuille REA, indiquant que pour une variation de 1% de l'indice TSE300, l'indice REA varie de 3/4 de 1%.

Pour les mêmes raisons que précédemment, la stabilité de ce résultat a été vérifiée en effectuant des régressions après tronçonnage de certaines périodes. Les tableaux D, E et F confirment la même constance des coefficients.

Dans le contexte du modèle CAPM d'équilibre des prix des actifs financiers sur le marché des capitaux (Capital Assets Pricing Model) les résultats obtenus ici sont insoutenables.

tableau D

échantillon: 1982.01 - 1985.12
 48 observations
 MCO // la variable dépendante est REA

	COEFFICIENT	ECART-TYPE	STATISTIQUE-T
C	0.0099791	0.0049510	2.0155565
TSE	0.7462091	0.0974255	7.6592830
R-carré	0.560501	moy. de la var. dép.	0.016938
R-carré ajusté	0.550947	var. de la var. dép.	0.050319
E.-T. de la régression	0.033719	Som. carrés des rés.	0.052302
stat. Durbin-Watson	2.057664	statistique-F	58.66462

tableau E

échantillon: 1983.01 - 1985.12
 36 observations
 MCO // la variable dépendante est REA

	COEFFICIENT	ECART-TYPE	STATISTIQUE-T
C	0.0060011	0.0049631	1.2091412
TSE	0.7553618	0.1215658	6.2136020
R-carré	0.531738	moy. de la var. dép.	0.014692
R-carré ajusté	0.517965	var. de la var. dép.	0.041152
E.-T. de la régression	0.028571	Som. carrés des rés.	0.027755
stat. Durbin-Watson	2.071312	statistique-F	38.60885

tableau F

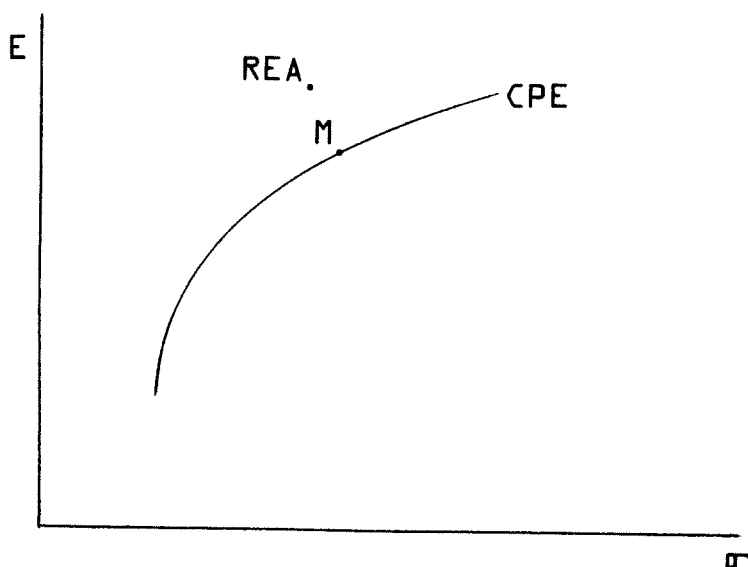
échantillon: 1984.01 - 1985.12
 24 observations
 MCO // la variable dépendante est REA

	COEFFICIENT	ECART-TYPE	STATISTIQUE-T
C	0.0095173	0.0060208	1.5807394
TSE	0.6861582	0.1539136	4.4580738
R-carré	0.474620	moy. de la var. dép.	0.013461
R-carré ajusté	0.450739	var. de la var. dép.	0.039367
E.-T. de la régression	0.029176	Som. carrés des rés.	0.018727
stat. Durbin-Watson	2.069387	statistique-F	19.87442

Sous certaines hypothèses ce modèle suggère qu'à l'équilibre, tout actif ou portefeuille d'actifs se situe sur la courbe des portefeuilles efficaces (CPE sur le graphe A) à l'instar du portefeuille de marché M (ici M=TSE300). Il démontre ensuite qu'un portefeuille efficace se situe au point M, c'est-à-dire est un portefeuille de marché et que ce portefeuille doit avoir un bêta égal à 1 (voir graphique B).

Les résultats présents sont incompatibles avec le CAPM pour deux raisons. Premièrement le portefeuille REA offre un rendement supérieur au portefeuille de marché en même temps qu'un bêta inférieur. Cette situation est représentée sur le graphique B par le point REA. Si les décisions sont prises en termes de rendement

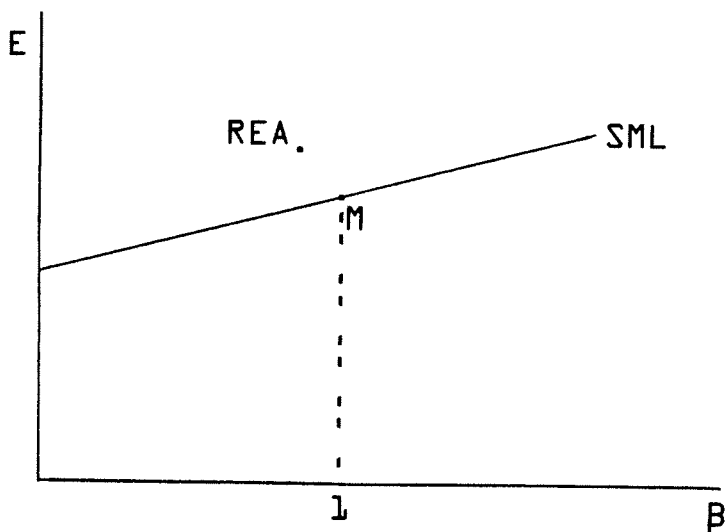
GRAPHIQUE A



et de risque un tel point ne peut subsister longtemps. Il devrait susciter des opérations d'arbitrage jusqu'à ce qu'il se confonde à la courbe SML (Security Market Line). Or on a vu précédemment que cet écart de la courbe est indépendant du temps.

Deuxièmement, le portefeuille REA est un portefeuille efficace puisque bien diversifié. Bref il est un portefeuille de marché. Le CAPM soutient que le bêta d'un tel portefeuille est égal à 1. Or le bêta calculé de l'indice REA est de .75. En d'autres mots, sur le graphique A le point REA devrait se confondre au point M. Le CAPM confirme ainsi la présence du même bruit dans le marché.

GRAPHIQUE B



à propos de l'écart

Jusqu'ici aucune explication n'a été proposée quant à l'origine et à la constance de l'écart. Une hypothèse est maintenant suggérée sur la nature du processus d'ajustement du marché aboutissant à cet écart.

Dans la dérivation du CAPM, le portefeuille de marché contient tous les actifs, chacun en proportion de sa valeur sur le marché. Alors, tout portefeuille I, quel qu'il soit, est déjà contenu dans le portefeuille M selon sa valeur pondérée. A l'équilibre la demande excédentaire des titres constituant I (ici $I=REA$) est nulle et la pente de la tangente à la CPE est dérivée au point où se situe M, c'est-à-dire pour $a=0$, "a" représentant le niveau de la demande excédentaire des titres du portefeuille I dans une combinaison linéaire entre M et I.

Maintenant, la question est à savoir si vraiment le portefeuille TSE300 contient le portefeuille REA, ou si vraiment $a=0$, puisque ce dernier est un portefeuille de marché lui-même et que ses performances sont distinctes.

On sait que les titres REA se transigent sur le marché primaire et que cette contrainte ne peut influencer directement sur le cours des titres. Mais qu'en est-il sur le marché secondaire?

Le marché boursier est fréquenté par une clientèle particulière (quant à sa richesse, son attitude face au risque, etc.). En créant le REA on insère dans ce marché une nouvelle catégorie d'investisseurs dont le but premier est d'obtenir un abri fiscal. Il est fort probable qu'un certain nombre d'entre eux n'auraient jamais fréquenté le marché boursier si ce n'avait été du REA, ou du moins y font-ils une entrée précipitée. Il est donc probable aussi qu'ils seront moins actifs sur ce marché, se satisfaisant principalement de leur gain fiscal. En fait, si les actions qu'ils détiennent dans le cadre du REA varient considérablement, l'idée n'est pas qu'ils ne transigeront pas ces titres mais plutôt que leur tolérance serait plus grande comparativement à l'investisseur aguéri.

En outre, les détenteurs de REA font face à certaines contraintes. Ils doivent d'abord conserver leurs titres, ou un portefeuille équivalent en déductions, sur une période de deux ans après la fin de l'année d'acquisition des titres. Même s'ils peuvent faire en sorte de détenir leur portefeuille REA seulement aux dates relevées par le fisc, l'unicité de l'éligibilité ainsi qu'une disponibilité restreinte des nouvelles émissions entravent les facilités de transaction. Encore là, c'est au niveau relatif que cette contrainte est signifiante. Ce qui est certain ce n'est pas que les transactions des titres soient impossibles mais qu'elles sont contraintes, parce qu'étant dans un cadre plus

rigide que le marché ordinaire.

Pour ces motifs, il se pourrait que pendant la période de détention associée au REA, l'offre de ces actions sur le marché secondaire soit en partie captive des investisseurs du régime et principalement des nouveaux investisseurs ci-haut mentionnés. En d'autres mots, une partie de l'offre des titres éligibles serait en quelque sorte retirée du marché. Il surviendrait alors un nouvel équilibre entre l'offre et la demande.

Pour illustrer l'ajustement vers le nouvel équilibre, considérons cet exemple extrême (rapporté sur le graphique C où l'ordonnée nous donne les prix d'un titre et l'abscisse les quantités et où on suppose que les relations entre les prix et les quantités demandées et offertes sont représentées respectivement par la courbe de demande D et les courbes d'offre O (point A)).

Supposons une compagnie dont les titres sont admissibles au REA et qui se situe en position initiale à l'intersection des courbes D et O_t ,

où q_t : quantité d'actions en circulation au temps t

et soit q_{at} : quantité d'actions disponibles aux transactions sur le marché secondaire au temps t.

Supposons que $q_t = q_{at}$

i.e. que toutes les actions sont disponibles pour les transactions (hypothèse réaliste).

Soit une nouvelle émission d'actions (δq) par la compagnie, entre le temps t et le temps t+1. Alors apparaît une hausse de l'offre (jusqu'au point B) telle que:

$$\begin{aligned} q_{t+1} &= q_t + (q_{t+1} - q_t) \\ &= q_t - \delta q \end{aligned}$$

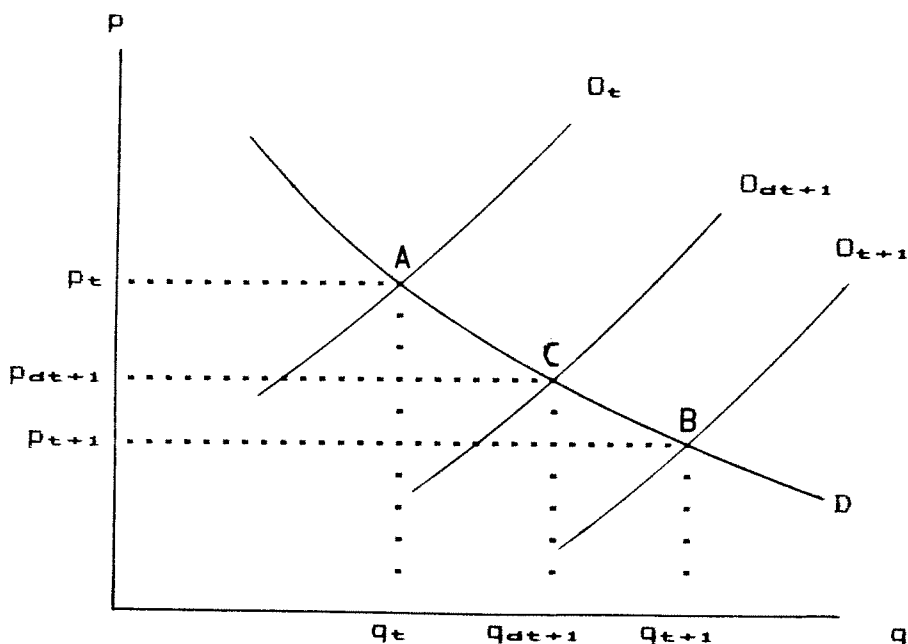
Distinguons $\delta q = q_1 + q_2$

où q_1 : part des nouvelles actions acquises pour abri fiscal

q_2 : autres.

Supposons maintenant que cette nouvelle émission soit la seule éligible au REA de la période t à la période t+1. Alors q_1 sera

GRAPHIQUE C



complètement retirée de l'offre totale O_{t+1} (point B) sur le marché secondaire, vu la contrainte de détention. C'est-à-dire que

$$\delta q_d = q_z$$

et

$$q_{dt+1} = q_{dt} + \delta q_d$$

$$q_{dt+1} = q_t + q_z$$

donc

$$q_{dt+1} < q_{t+1}$$

La solution finale sera au point C et on obtient donc, comme on peut le voir sur le graphique, une hausse du cours des actions éligibles de P_{t+1} à P_{dt+1} (on suppose arbitrairement que la courbe de demande est inchangée).

Même si dans la réalité la captivité de l'offre n'est pas aussi totale que dans cet exemple, le principe d'ajustement proposé ici est de cette nature, expliquant l'écart observé statistiquement.

Retournant aux graphiques A et B, dans le contexte du CAPM, le point REA ne peut se confondre avec le point M car une des hypothèses du modèle est violée: l'efficacité des processus d'arbitrage. C'est-à-dire que les jeux entre l'offre et la demande ne peuvent ramener le portefeuille REA sur les courbes CPE et SML. Alors le CAPM ne peut expliquer l'équilibre du marché

mais suggère plutôt une irrégularité dans le cheminement vers l'équilibre.

Partant, la hausse du cours ne représente pas une hausse de la valeur des titres, mais plutôt la valeur de la distorsion causée par le régime. Le titre n'est alors plus pondéré selon sa valeur réelle mais selon la valeur de la quantité d'actions libres pour les transactions. A ce moment on ne peut plus considérer le portefeuille REA comme étant totalement inclus dans le portefeuille TSE300; on ne peut plus considérer la demande excédentaire comme nulle.

La tâche de l'investisseur ne consiste plus à combiner un portefeuille quelconque au portefeuille de marché mais plutôt à combiner deux portefeuilles de marchés distincts.

Portefeuille optimal

sans actif certain

La solution consiste à tracer une combinaison linéaire entre les deux portefeuilles et à choisir le portefeuille optimal p^* , soit celui qui maximise l'utilité de l'investisseur.

C'est-à-dire choisir d'investir ses fonds dans les proportions

$$a \text{ et } (1-a) \quad \text{où } 0 \leq a \leq 1$$

des portefeuilles REA et TSE300 . L'espérance et la variance de rendement du portefeuille combiné sont alors

$$E(R_{p^*}) = aE(R_{rea}) + (1-a)E(R_{tse})$$

$$\sigma^2_{p^*} = a^2\sigma^2_{rea} + (1-a)^2\sigma^2_{tse} + 2a(1-a)\sigma_{rea,tse}$$

Faisant varier "a" de 0 à 1 on obtient la courbe des portefeuilles efficaces (CPE), tracée sur le graphique D.

L'investisseur détermine alors la valeur de "a" selon sa fonction d'utilité et peut se retrouver en n'importe quel point sur la

courbe CPE. De ces équations on peut entre autre dériver le portefeuille à variance minimale a^* donné par

$$a^* = \frac{\sigma^2_{tse} - r_{rea,tse}\sigma_{rea}\sigma_{tse}}{\sigma^2_{rea} + \sigma^2_{tse} - 2r_{rea,tse}\sigma_{tse}\sigma_{rea}}$$

Après insertion des valeurs (obtenues de l'échantillon complet) on obtient

$$a^* = .37$$

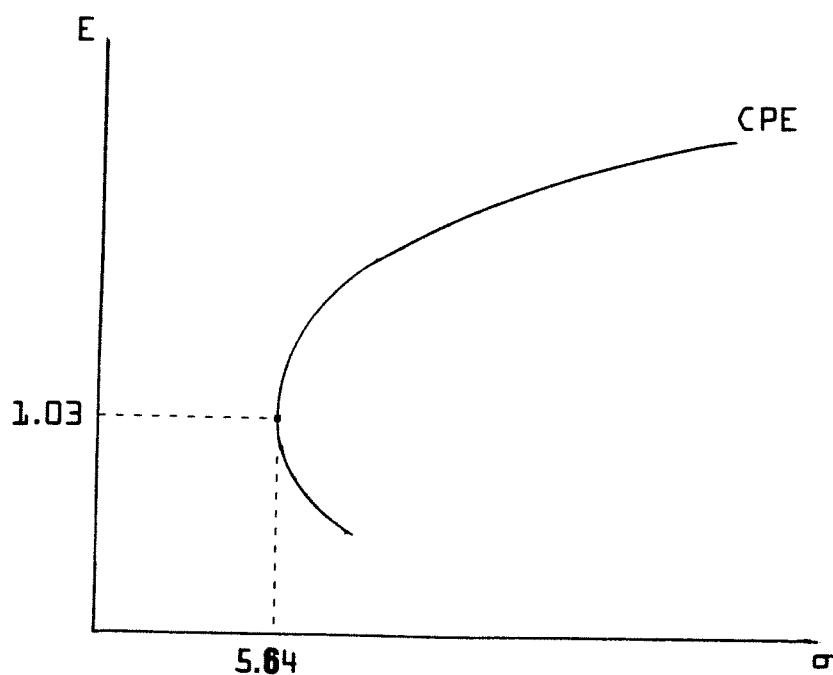
Donc en répartissant 37% de sa richesse dans un portefeuille REA et 63% dans le portefeuille TSE300, tous deux diversifiés, l'investisseur obtient le portefeuille optimal P^* à variance minimale.

Alors l'espérance et la variance du portefeuille P^* sont

$$E(R_{P^*}) = 1.03 \quad (\text{ou } 12.36\% \text{ annuellement})$$

et $\sigma_{P^*} = 5.64$

GRAPHIQUE D



incluant un actif certain

Si on inclue maintenant un actif à rendement certain (R_f) on est en mesure de dériver la courbe "Capital Market Line" (CML), c'est-à-dire la courbe offrant toutes les combinaisons linéaires entre l'actif certain et le portefeuille P^* au point où la pente de CML est égale à la pente de la tangente de la courbe des portefeuilles efficaces (voir graphique E).

C'est-à-dire:

on sait que

$$\frac{R_{P^*} - R_f}{\sigma_{P^*}} = \text{pente CML}$$

et que

$$\frac{dE(R_{P^*})/da}{d\sigma_{P^*}/da} = \text{pente CPE}$$

alors il faut que

$$\text{pente CML} = \text{pente CPE}$$

et une

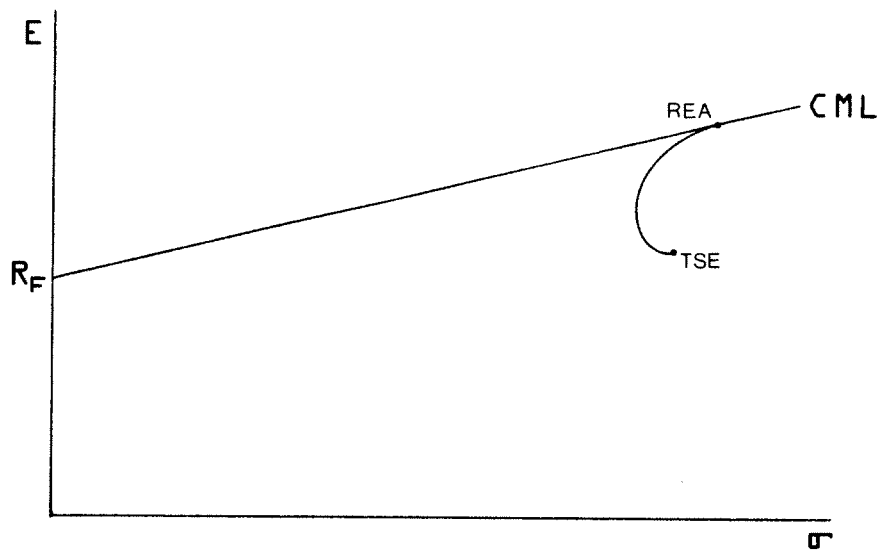
$$\text{pente CML maximale}$$

Résolvant ce problème à l'aide d'un algorithme itératif et utilisant $R_f = .07$, i.e. 7% par an, on obtient

$$a = 1 \quad (\text{voir graphique E})$$

C'est-à-dire que l'investisseur maximise son bien-être en combinant dans le portefeuille optimal P^* le titre à rendement certain avec le portefeuille du marché REA seulement.

GRAPHIQUE E



Alors, l'espérance de rendement devient

$$E(R_p^*) = bE(R_{rea}) + (1-b)R_f$$

et la variance

$$\sigma_p^2 = b^2\sigma_{rea}^2$$

car

$$\sigma_f^2 = \sigma_{rea,f} = 0$$

où "b" détermine le point où se situe le portefeuille combiné sur la courbe CML. Autrement dit, "b" indique la répartition de l'investissement entre l'actif certain et le portefeuille REA et est fixé selon les préférences des individus.

Portefeuille optimal considérant le rendement fiscal

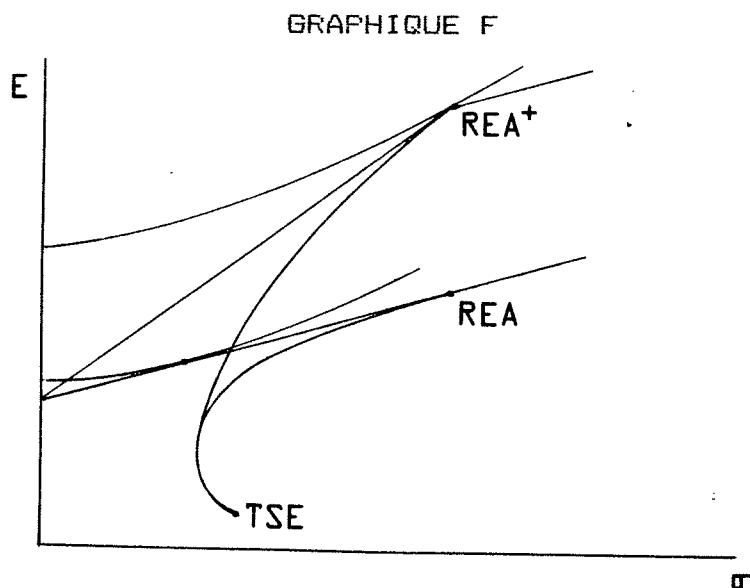
Jusqu'à maintenant, les exonérations fiscales permises par le REA ont été exclues du rendement. Ces exonérations font cependant partie du rendement total et leur attrait vient surtout de ce qu'elles sont certaines, dans le sens que les montants déduits du revenu sont connus. Si on ajoute maintenant au rendement espéré du portefeuille REA le rendement fiscal REA_f , le rendement total devient:

$$E(REA^+) = E(REA) + REA_f$$

et la variance demeure inchangée puisque REA_F est certain, i.e.

$$\sigma^2_{REA^+} = \sigma^2_{REA}$$

Graphiquement on observe un déplacement vertical du portefeuille REA:



Etant donné la forme des courbes d'utilité (avec aversion au risque), un tel déplacement de la droite des combinaisons linéaires sur le rayon R_F-REA^+ doit entraîner une restructuration du portefeuille P^* en faveur des actions du $REA^{(1)}$ (sauf dans le cas où P^* est à droite du point REA , dans ce cas le résultat est incertain). Intuitivement, le besoin de sécurité de l'investisseur, qu'il satisfait habituellement par la détention d'actifs certains, est en partie (ou en totalité dans le cas présenté dans le graphique F) obtenu par le rendement certain de la partie fiscale du rendement du portefeuille REA^+ .

La prise en compte du rendement fiscal fait survenir un nouveau facteur dans l'attitude optimale puisqu'en valeur absolue, le rendement fiscal peut varier considérablement selon le niveau de revenu. Par exemple, un individu dont le salaire est trop faible pour qu'il soit imposé n'a aucun rendement fiscal à la détention d'actions REA . A l'opposé, le rendement fiscal des très haut salariés peut devenir tout à fait négligeable, puisque les déductions admissibles sont institutionnellement limitées.

Portefeuille optimal et revenu croissant.

On désire maintenant démontrer que dans un cas dynamique et partant d'un revenu non imposable et croissant, l'attitude optimale de l'investisseur fait que la proportion qu'occupe

(1) Voir l'annexe C pour une démonstration mathématique.

l'actif certain dans le portefeuille P^* évolue de la façon suivante:

- 1° l'investisseur combine le portefeuille REA (sans rendement fiscal) à l'actif certain selon sa carte d'utilité.
- 2° avec la hausse du revenu, la proportion de l'actif certain diminue jusqu'à ce que l'investisseur atteigne la déduction maximale permise par le programme (possiblement jusqu'à élimination).
- 3° la proportion de l'actif certain augmente jusqu'à une solution finale, équivalente à la solution de départ, toujours selon les préférences de l'investisseur.

Pour analyser la dynamique du portefeuille, un cycle de revenu est modélisé. Le revenu de travail (considéré non décroissant) est combiné au revenu d'investissement. Ces investissements, selon la solution du cas statique, sont une combinaison d'actifs certains et du REA.

Considérer des revenus croissants indéfiniment est peu réaliste. Cependant, il permet à l'analyse de couvrir tous les niveaux de revenu en utilisant une seule carte d'utilité. Dans une telle présentation, tous les cas peuvent être adaptés en utilisant la carte d'utilité désirée.

Finalement, l'analyse dynamique permet de dégager un sentier optimal.

Modélisation du revenu croissant:

les variables:

R_{tot} = revenu total

R_i = revenu imposable

R_f = revenu final

R_{REA} = revenu dû au rendement du REA (sans rendement fiscal)

R_w = revenus autres que R_{REA}

D_{REA} = déduction du revenu associée au REA

DM_{REA} = D_{REA} maximum permis

I_{REA} = montant investi dans la REA

τ = taux de taxation

r = taux de rendement

θ = taux d'exonération fiscale

α = part du revenu déductible

β = taux de réinvestissement de D_{REA}

les relations:

$$R_F = R_{TOT} - \tau R_1$$

$$R_{TOT} = R_W + R_{REA}$$

$$R_{REA} = r\beta D_{REA}$$

$$D_{REA} = \sum_i \theta_i I_{REA,i} = \min(\alpha R_{TOT}, D_{MREA})$$

$$R_1 = R_{TOT} - D_{REA}$$

intégration des relations et équation finale:

$$\begin{aligned} R_F &= R_{TOT} - \tau R_1 \\ &= R_W + R_{REA} - \tau(R_{TOT} - D_{REA}) \\ &= R_W + r\beta D_{REA} - \tau(R_W + r\beta D_{REA} - D_{REA}) \\ &= R_W + r\beta D_{REA} - \tau(R_W + (r\beta - 1)D_{REA}) \\ &= R_W + r\beta D_{REA} - \tau R_W - \tau(r\beta - 1)D_{REA} \\ &= (1 - \tau)R_W + (r\beta - \tau r\beta + \tau)D_{REA} \\ &= (1 - \tau)R_W + [(1 - \tau)r\beta + \tau]D_{REA} \end{aligned}$$

obtenant:

$$R_F = (1 - \tau)R_W + (1 - \tau)r\beta D_{REA} + \tau D_{REA}$$

Donc, le revenu final est la somme du revenu de travail net, plus le rendement net des actifs financiers, plus le rendement permis par la déduction fiscale. Le revenu final est une fonction strictement croissante de β et D_{REA} , alors R_F est maximum pour

$$\beta = 1$$

$$\text{et} \quad D_{\text{REA}} = \min(\alpha R_{\text{TOT}}, DM_{\text{REA}})$$

C'est la solution du cas statique.

Optimum dynamique:

Soit $R_{F,i}$: le revenu final à la période i .

$$\begin{aligned} R_{F,1} &= (1-\tau)R_{W,1} + (1-\tau)r\beta_0 D_{\text{REA},0} + \tau D_{\text{REA},1} \\ &= (1-\tau)R_{W,1} + \tau D_{\text{REA},1} \end{aligned}$$

$$R_{F,2} = (1-\tau)R_{W,2} + (1-\tau)r\beta_1 D_{\text{REA},1} + \tau D_{\text{REA},2}$$

$$R_{F,3} = (1-\tau)R_{W,3} + (1-\tau)(r-r^2)\beta_1 D_{\text{REA},1} + (1-\tau)r\beta_2 D_{\text{REA},2} + \tau D_{\text{REA},3}$$

$$\begin{aligned} R_{F,4} &= (1-\tau)R_{W,4} + (1-\tau)r(1+r)^2\beta_1 D_{\text{REA},1} + (1-\tau)(r-r^2)\beta_2 D_{\text{REA},2} \\ &\quad + (1-\tau)r\beta_3 D_{\text{REA},3} + \tau D_{\text{REA},4} \end{aligned}$$

et ainsi de suite. (1)

De façon générale:

$$R_{F,t} = (1-\tau) \left[R_{W,t} + \sum_{i=0}^{t-1} r(1+r)^i \beta_{t-i-1} D_{\text{REA},t-i-1} \right] + \tau D_{\text{REA},t}$$

REA passé cumulé
REA contemporain

$$\text{où} \quad D_{\text{REA},t} = \theta_1 I_{\text{REA},t}, \quad \theta_1 = (.5, .75, 1, 1.5)$$

Remarquons que:

$$I_{\text{TOT,REA},t} = I_{\text{REA},t} + I_{\text{REA},t-1} + I_{\text{REA},t-2}$$

$$\text{alors} \quad I_{\text{TOT,REA}} = \sum_{i=0}^2 I_{\text{REA},t-i}$$

Maintenant, si t tend vers l'infini, la partie entre les accolades tend vers l'infini et le dernier terme s'évanouit. Or, le dernier terme représente le rendement fiscal du REA au temps t . Donc, à l'infini, le rendement fiscal devient nul. Et ainsi

$$R_{F,t} \underset{t \rightarrow \infty}{=} (1-\tau) \left[R_{W,t} + \sum_{i=0}^{t-1} r(1+r)^i \beta_{t-i-1} D_{\text{REA},t-i-1} \right]$$

(1) Voir l'annexe D pour la modélisation du binôme $(1+r)^t$.

On a donc passé d'une situation où le rendement fiscal était nul (au temps zéro), puis croissant, pour finalement redevenir nul (à l'infini).

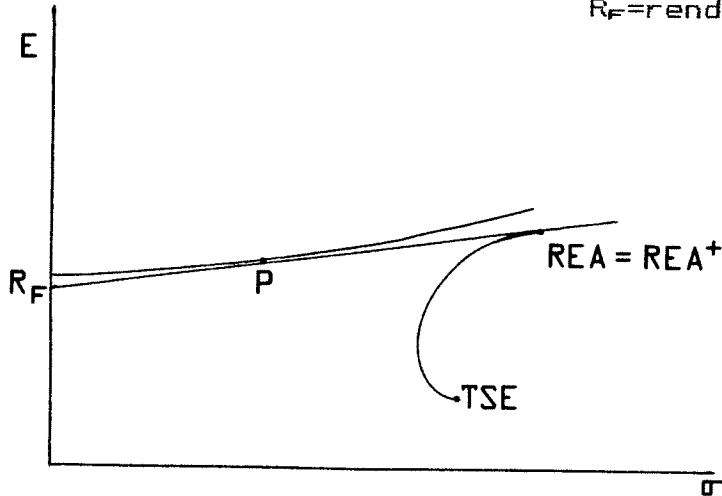
Illustration graphique:

au temps zéro:

$$E(R_P) = bE(R_{REA}) + (1-b)R_F$$

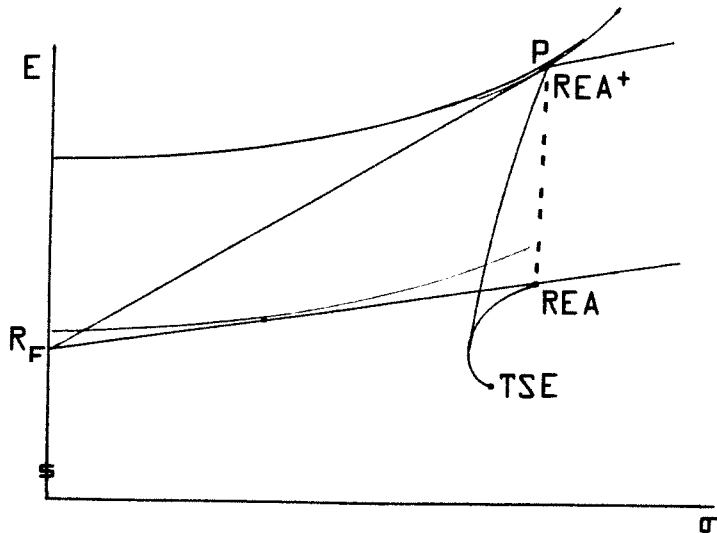
R_P = rendement du portefeuille total

R_F = rendement certain



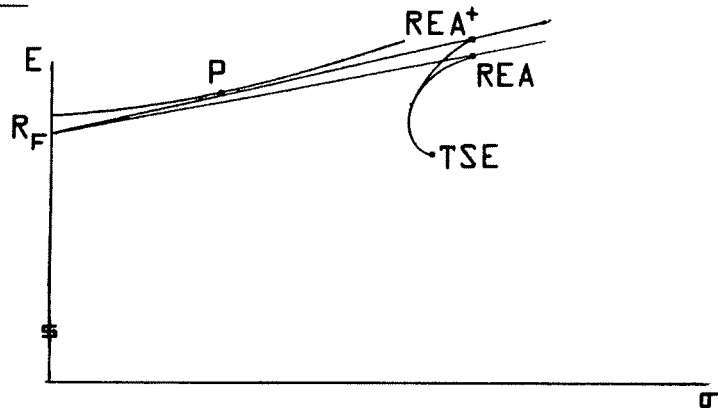
au temps t:

$$E(R_P) = bE(R_{REA^+}) + (1-b)R_F$$



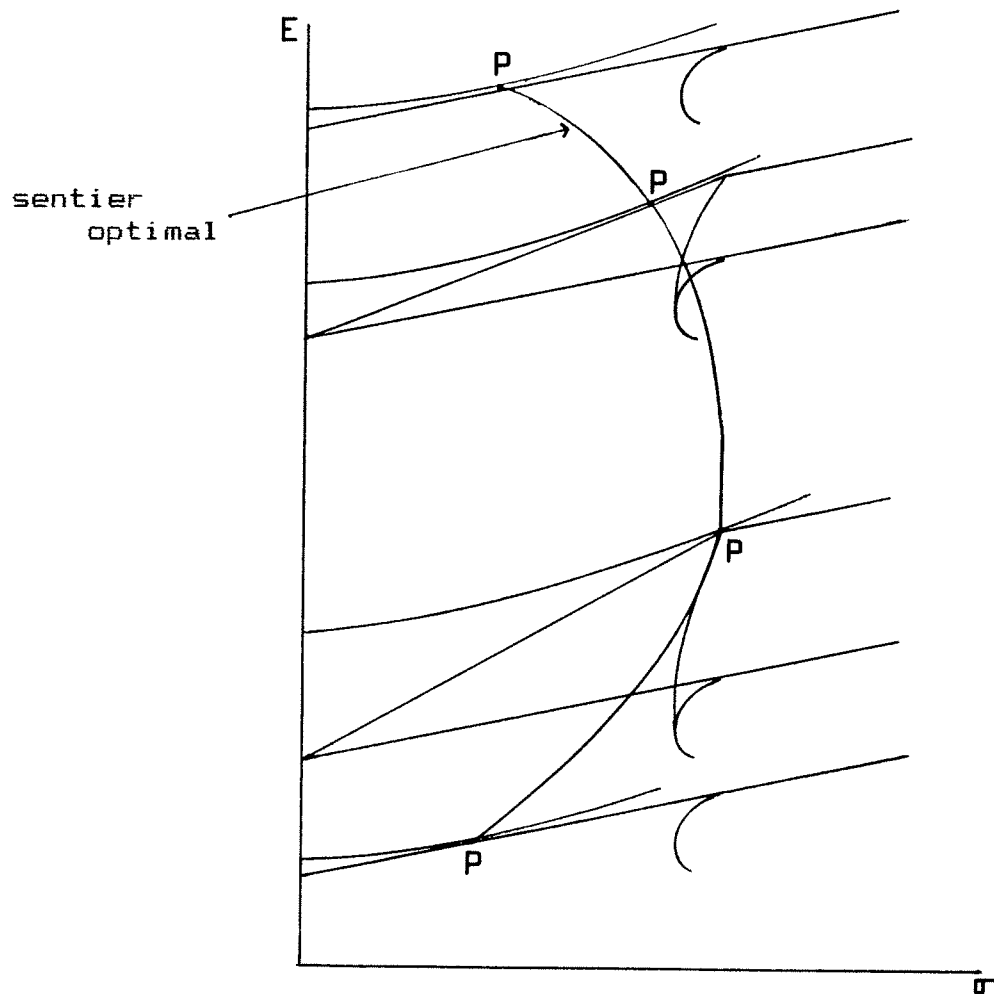
Tout le système s'est déplacé sur l'ordonnée car les rendements sont en valeur absolue.

au temps $t = +\infty$



Dans le cas illustré dans les trois graphiques précédents, la carte d'utilité a été choisie de manière à obtenir la solution de coin (qui est une solution particulière). Précisément, l'investisseur en vient à éliminer l'actif certain de son portefeuille avant de le réintroduire.

Puisque la présentation est en temps continu, la solution dynamique est identifiable par un sentier optimal qui peut avoir la forme caractéristique suivante:



SECTION -2- Les émissions par les PRDAA

Comme mentionné précédemment, le marché boursier québécois possède une structure permettant de distinguer les compagnies qui y sont inscrites en deux catégories. La présente section concerne les titres émis par les firmes offrant un programme de réinvestissement de dividendes et d'achat d'actions (PRDAA). Ces programmes permettent d'émettre directement (sans passer par le marché primaire et les émissions publiques) une quantité non limitée d'actions, lesquelles sont transigées au coût du marché, contrairement aux émissions de la section précédente. Ces actions peuvent ainsi être obtenues en n'importe quel temps.

Il existe cependant une réglementation particulière autour des transactions des titres éligibles au REA par le PRDAA. Ainsi, il a été établi des limites sur les contributions totales par compagnie (ces limites varient selon les firmes) et sur les dates d'acquisition. En outre, la volatilité des titres, qui pourrait être augmentée par les effets saisonniers d'achat et de vente associés au REA, est contenue par le fait que les prix payés sont des moyennes arithmétiques des prix observés pendant les cinq jours suivant la date limite d'achat.

Pour analyser cette catégorie d'actions, l'indice PRDAA a été créé et il a été construit sur le modèle de l'indice REALB.

Le tableau E présente les résultats statistiques tirés de l'indice PRDAA. Il sont accompagnés de ceux déjà obtenus sur les indices REALB et TSE300.

Remarquons premièrement que l'indice PRDAA n'est pas un portefeuille de marché car il n'est constitué que de sept différentes actions; il n'est pas suffisamment diversifié. Ceci se vérifie immédiatement par son écart-type empirique, qui est plutôt élevé malgré que les actions du PRDAA soient considérées sur le marché comme étant relativement sécuritaires. En fait, le manque de diversité fait que la variance des titres s'ajoute possiblement de façon non négligeable au risque de l'économie (on n'a qu'à se rappeler que la variance des titres, dans un portefeuille, est divisée par le carré du nombre de titres).

Une autre constatation du tableau est que le rendement de l'indice PRDAA est en moyenne le plus élevé, si l'on considère toutes les observations. Selon la théorie, des actifs relativement sécuritaires peuvent offrir un rendement supérieur à des actifs plus risqués lorsque le marché est baissier. Il semble que ce soit le cas pour la période observée car pour 1981 et 1984, les marchés boursiers ont clôturé l'année en baisse.

(1) Voir annexe B.

tableau E

nb. d'obs.:	77	60	48	36	24	12
=====						
E(tse):	0.97	0.53	0.93	1.15	0.57	1.58
Var(tse):	33.30	26.68	24.96	15.34	14.97	12.01
E-T(tse):	5.77	5.17	5.00	3.92	3.87	3.47

E(realb):	1.13	0.94	1.69	1.47	1.35	2.95
Var(realb):	38.27	26.07	24.79	16.46	14.85	14.83
E-T(realb):	6.19	5.11	4.98	4.06	3.85	3.85

E(prdaa):	1.34	1.04	1.69	1.69	0.93	1.92
Var(prdaa):	28.59	24.38	22.99	13.88	12.94	14.04
E-T(prdaa)	5.35	4.94	4.80	3.73	3.60	3.75

Cov(tse,realb):	26.28	19.87	18.62	11.59	10.27	8.74
Corr(tse,realb):	0.74	0.75	0.75	0.73	0.69	0.65

Cov(tse,prdaa):	26.14	21.48	20.30	10.70	11.23	10.35
Corr(tse,prdaa):	0.85	0.84	0.85	0.73	0.81	0.80
=====						
années	79-85	81-85	82-85	83-85	84-85	1985

A l'opposé, pour l'année 1985 qui fut excellente du point de vue des rendements, la performance de l'indice REALB est supérieure à celle de l'indice PRDAA. Les rendements du portefeuille PRDAA sont toutefois continuellement plus élevés que ceux du TSE300. Il semble donc que l'écart des rendements, justifié dans la section 1 par la captivité de l'offre, puisse théoriquement s'appliquer pour cette catégorie aussi.

Finalement, la corrélation entre les indices PRDAA et TSE300 indique aussi un écart de comportement. Cet écart semble correspondre à celui existant entre les indices REALB et TSE300, mais dans des proportions réduites car on note que la corrélation de l'indice de marché est plus élevée avec l'indice PRDAA qu'avec l'indice REALB.

Toutefois, le portefeuille PRDAA ne peut être considéré comme un portefeuille de marché et les résultats perdent de leur intérêt. La seule conclusion que l'on peut en tirer est qu'ils ne réfutent

pas l'hypothèse de la présence d'un bruit dans les mécanismes du marché.

De la même façon qu'à la section 1, les indices β ont été calculés et sont présentés dans les tableaux G à K. On voit en suivant ces tableaux une évolution du niveau de risque: l'indice β passe d'une valeur de 0.74 à une valeur de 1.04 entre 1982 et 1985. Sauf pour la dernière période, l'indice β_{PRDAA} est en moyenne égal à .8. Ce résultat est non conforme au CAPM puisque les rendements du portefeuille PRDAA sont plus élevés que ceux du portefeuille de marché. Par contre, pour l'année 1985, la relation risque-rendement se conforme à la théorie.

Si on cherche à expliquer cette évolution du niveau de risque, il peut être pertinent d'examiner le tableau F. Il montre les quantités d'actions qui ont été émises et qui étaient potentiellement éligibles au REA, pour chaque année du régime et selon la catégorie. La hausse du taux de risque correspond plutôt

tableau F

Nouvelles émissions (en millions d'actions)

	REALB	part	PRDAA	part
1979	4.5	35%	8.2	65%
1980	1.5	5%	30.7	95%
1981	9.9	41%	14.4	59%
1982	8.2	26%	22.9	74%
1983	26.5	36%	46.2	64%
1984	33.6	55%	27.3	45%
1985	105.1	71%	49.3	29%

source: calculs fait à partir de publications de La Bourse de Montréal.

bien à la baisse de la part relative du PRDAA dans le REA. Comme on devrait s'y attendre dans l'esprit de ce texte, l'écart entre les marchés diminue proportionnellement à la chute de l'importance du REA dans cette catégorie du programme. Plus précisément, on ré-observe une relation risque-rendement plus conforme en même temps que l'impact de l'intervention semble diminuer (ce résultat est cependant très préliminaire, n'étant basé que sur douze observations).

Quoiqu'il en soit, les résultats statistiques tirés de l'indice PRDAA doivent être considérés subjectivement vis-à-vis la notion

d'équilibre. Son manque de diversité fait qu'il est plus difficile d'interpréter les conséquences du REA sur ces actions et son analyse devient hypothétique; on ne peut pas se baser sur le fait qu'un portefeuille de marché doit avoir un bêta égal à l'unité. Il semble toutefois que tel que sont les résultats, ils ne contredisent pas les ceux obtenus de l'indice REALB dans la section 1 (puisque pour un niveau de risque moins élevé que celui de l'indice TSE300, l'indice PRDAA présente des rendements supérieurs).

tableau G

échantillon: 1981.01 - 1985.12

60 observations

MCO // la variable dépendante est PRDAA

	COEFFICIENT	ECART-TYPE	STATISTIQUE-T
C	0.0060949	0.0033559	1.8161375
TSE	0.8207950	0.0646306	12.699791
R-carré	0.735504	moy. de la var. dép.	0.010441
R-carré ajusté	0.730943	var. de la var. dép.	0.049854
E.-T. de la régression	0.025860	Som. carrés des rés.	0.038785
stat. Durbin-Watson	2.087816	statistique-F	161.2847

tableau H

échantillon: 1982.01 - 1985.12

48 observations

MCO // la variable dépendante est PRDAA

	COEFFICIENT	ECART-TYPE	STATISTIQUE-T
C	0.0090934	0.0035764	2.5425706
TSE	0.8345650	0.0703764	11.858586
R-carré	0.753518	moy. de la var. dép.	0.016876
R-carré ajusté	0.748160	var. de la var. dép.	0.048537
E.-T. de la régression	0.024358	Som. carrés des rés.	0.027291
stat. Durbin-Watson	2.447013	statistique-F	140.6261

tableau I

échantillon: 1983.01 - 1985.12
 36 observations
 MCO // la variable dépendante est PRDAA

	COEFFICIENT	ECART-TYPE	STATISTIQUE-T
C	0.0083882	0.0041889	2.0024987
TSE	0.7435842	0.1026021	7.2472623
R-carré	0.607040	moy. de la var. dép.	0.016944
R-carré ajusté	0.595482	var. de la var. dép.	0.037915
E.-T. de la régression	0.024114	Som. carrés des rés.	0.019771
stat. Durbin-Watson	1.914527	statistique-F	52.52281

tableau J

échantillon: 1984.01 - 1985.12
 24 observations
 MCO // la variable dépendante est PRDAA

	COEFFICIENT	ECART-TYPE	STATISTIQUE-T
C	0.0046353	0.0037316	1.2421905
TSE	0.8208896	0.0953923	8.6054041
R-carré	0.770960	moy. de la var. dép.	0.009353
R-carré ajusté	0.760549	var. de la var. dép.	0.036953
E.-T. de la régression	0.018082	Som. carrés des rés.	0.007193
stat. Durbin-Watson	1.541215	statistique-F	74.05298

tableau K

échantillon: 1985.01 - 1985.12
 12 observations
 MCO // la variable dépendante est PRDAA

	COEFFICIENT	ECART-TYPE	STATISTIQUE-T
C	0.0027976	0.0041028	0.6818887
TSE	1.0378727	0.1076628	9.6400349
R-carré	0.902847	moy. de la var. dép.	0.019241
R-carré ajusté	0.893132	var. de la var. dép.	0.039540
E.-T. de la régression	0.012926	Som. carrés des rés.	0.001671
stat. Durbin-Watson	1.991576	statistique-F	92.93027

LES ANNEXES:ANNEXE A : INFORMATIONS SUR LE REA

-Les actions admissibles sont nouvellement émises par des compagnies établies au Québec et ne peuvent être achetées ou rachetées par la compagnie émettrice.

-Elles sont émises sur le marché primaire dans le cadre d'une émission publique.

-Sous réserve du maximum mentionné plus bas le contribuable peut déduire les montants suivants:

	%	du coût d'achat
- Corporations en voie de développement (CVD): ⁽¹⁾		
* actions ordinaires à plein droit de vote.	150	
* actions privilégiées et convertibles en actions ordinaires à plein droit de vote.	150	
* actions subalternes à droit de vote.	100	
* actions privilégiées et convertibles en actions subalternes à droit de vote.		
- Corporations ayant un actif inférieur à 1 milliard\$, non CVD:		
* actions ordinaires à plein droit de vote.	100	
* actions subalternes à droit de vote.	en 84 après 84	100 75
- Corporations ayant un actif supérieur à 1 milliard\$:		
* actions ordinaires à plein droit de vote et actions subalternes à droit de vote.	en 84 après 84	75 50

-Le montant maximum qu'un contribuable peut déduire pour une année donnée est de 20% de son revenu total de l'année sans excéder 20 000\$.

-Pour éviter toute récupération d'impôt le niveau du REA doit être maintenu pendant une période minimum de deux ans après la fin de l'année d'acquisition ayant permis une déduction. Pendant cette période les actions incluses dans le REA peuvent être vendues sans entraîner d'inclusion dans le revenu en autant qu'elles soient remplacées par d'autres actions admissibles donnant droit à une déduction équivalente.

(1) Est en voie de développement toute corporation éligible dont l'actif est inclus entre 2 et 25 millions\$ ou dont l'avoir net des actionnaires est inclus entre 750 000\$ et 10 millions\$.

ANNEXE B: LES INDICES.

L'INDICE REA-LB: (1)

-Le but de l'indice est de résumer le mouvement de l'ensemble des émissions étant admissibles au REA depuis 1979.

-C'est un indice de nouvelles émissions; les émissions ne sont conservées dans le calcul de l'indice que pendant une période de 2 ans après le fin de l'année d'émission.

$$\text{indice REALB} = \frac{\sum_i (P_i * N_i) * 1000}{D}$$

P_i : prix de fermeture à la Bourse de Montréal des actions de la compagnie i .

N_i : nombre d'actions de la nouvelle émission de la compagnie.

D : valeur originale des actions incluses dans l'indice.

-L'indice comprend les bons de souscription accompagnant les nouvelles émissions.

-Toutes les émissions admissibles font partie de l'indice à l'exception de grandes entreprises (car elles le biaiseraient) et des très petites émissions car il n'est pas pratique de les inclure.

L'INDICE PRDAA:

-L'équation de l'indice PRDAA est la même que celle de l'indice REALB .

-La continuité des émissions du programme de réinvestissement et d'achat fait que, sauf pour Dominion Textile, ce sont les mêmes firmes qui sont incluses depuis le début. C'est-à-dire: Alcan, Banque de Montréal, Banque Royale, Domtar, Entreprise Bell Canada, Canadien Pacifique. Dominion Textile s'est ajoutée en septembre 1980 seulement.

(1) Informations tirées du dossier de presse, déc 84.

ANNEXE C: restructuration du portefeuille

On veut démontrer que théoriquement, une hausse du taux de rendement r sur les actifs risqués entraîne une restructuration du portefeuille optimal augmentant la part relative de ces actifs.

Soit V , la valeur espérée du rendement tel que

$$V = (M-R)(1+i) + R(1+r)$$

où M est le montant total investi en actifs financiers.

R est la partie investie dans les actifs risqués.

i est le taux de rendement connu de l'actif certain.

r est le taux de rendement espéré des actifs risqués.

Définissons U comme la fonction d'utilité pour une seule période et définissons

$$C = (M-R)(1+i)$$

$$A = R(1+r)$$

Alors

$$U(V) = U [(M-R)(1+i) + R(1+r)]$$

$$= U [C+A]$$

$$= U [C] + U [A]$$

Donc l'utilité totale de l'investissement est égale à l'utilité apportée par la valeur de fin de période de l'actif certain, plus la valeur espérée de fin de période des actifs risqués.

La solution optimale pour un investisseur est de déterminer la valeur R^* qui respectera la condition de premier ordre suivante:

$$\frac{dU [V]}{dR} = 0$$

Où

$$\frac{dU [V]}{dR} = \frac{dU [C]}{dR} + \frac{dU [A]}{dR}$$

Par la règle de dérivation en chaîne:

$$\frac{dU [V]}{dR} = \frac{dU}{dC} \frac{dC}{dR} + \frac{dU}{dA} \frac{dA}{dR} = 0$$

$$= -U'(C)(1+i) + U'(A)(1+r) = 0 \quad (A)$$

Vérifiant la condition de second ordre:

$$\begin{aligned} \frac{d^2U(V)}{dR^2} &= \frac{d[-U'(C)(1+i)]}{dR} + \frac{d[U'(A)(1+r)]}{dR} \\ &= U''(C)(1+i)^2 + U''(A)(1+r)^2 \end{aligned}$$

Puisque $U'' < 0$ par hypothèse,

$$U''(C)(1+i)^2 + U''(A)(1+r)^2 < 0 \quad (B)$$

donc la solution est bien un maximum.

De l'équation (A), on peut ré-écrire:

$$U'(C)(1+i) = U'(A)(1+r)$$

$$\frac{U'(C)}{U'(A)} = \frac{(1+r)}{(1+i)}$$

Donc à l'optimum, l'investisseur détermine R^* de façon que le ratio des utilités égale le ratio des rendements.

Supposons maintenant une hausse de r à r' . Alors

$$\frac{U'(C)}{U'(A)} < \frac{(1+r')}{(1+i)} \quad \text{à } R^*$$

Il faut donc que l'investisseur modifie R^* de façon à retrouver l'égalité. Des équations (A) et (B) on a que

$U'(C)$ est une fonction croissante de $d^2U(V)/dR$

$U'(A)$ est une fonction décroissante de $d^2U(V)/dR$

alors, une hausse de R entraîne une hausse du ratio $\frac{U'(C)}{U'(A)}$

Donc la nouvelle solution optimale R^{**} est telle que

$$R^{**} > 0$$

et

$$\frac{U'(C)}{U'(A)} = \frac{(1+r^*)}{(1+i)}$$

On a donc démontré qu'une hausse du taux de rendement des actifs risqués entraîne, théoriquement, une hausse de la proportion de ces actifs dans le portefeuille optimal restructuré.

ANNEXE D: Rendements annuels et théorème du binôme.

Soit R = rendement (cumulé)
 M = montant investi
 r = taux de rendement
 t = temps

aux temps:

$$t=1, \quad R = rM$$

$$t=2, \quad R = r(M+rM) = (r+r^2)M$$

$$t=3, \quad R = r[M+rM+r(M+rM)] = (r+r^2+r^2+r^3)M = (r+2r^2+r^3)M$$

$$t=4, \quad R = r\{M+rM+r(M+rM)+r[M+rM+r(M+rM)]\}$$

$$= (r+r^2+r^2+r^3+r^2+r^3+r^3+r^4)M = (r+3r^2+3r^3+r^4)M$$

et ainsi de suite.

Modélisant cette progression à l'aide du triangle de Pascal:

1		r	$= r(1+r)^0$				
1	1	$r+r^2$	$= r(1+r)^1$				
1	2	1	$r+2r^2+r^3$	$= r(1+r)^2$			
1	3	3	1	$r+3r^2+3r^3+r^4$	$= r(1+r)^3$		
1	4	6	4	1	$r+4r^2+6r^3+4r^4+r^5$	$= r(1+r)^4$	
1	5	10	10	5	1	$r+5r^2+10r^3+10r^4+5r^5+r^6$	$= r(1+r)^5$

etc.

Donc on a le produit du binôme $(1+r)^t$ par son coefficient r .
Alors le rendement $R = r(1+r)^t M$ croît à l'infini si $t \rightarrow \infty$, i.e.

$$R = r(1+r)^t M = \infty$$

$t \rightarrow \infty$

ANNEXE E: les données

DATE	REALB	%	TSE300	%	PRDAA	%
1979-07	1031		1558		844	
08	1100	6.69	1696	8.86	880	4.27
09	1047	-4.82	1752	3.30	875	-0.57
10	1031	-1.53	1579	-9.87	812	-7.20
11	1169	13.39	1700	7.66	853	5.05
12	1254	7.27	1813	6.65	904	5.98
1980-01	1488	18.66	2028	11.86	1017	12.50
02	1432	-3.76	2193	8.14	1005	-1.18
03	1157	-19.20	1798	-18.01	867	-13.73
04	1189	2.77	1870	4.00	896	3.34
05	1363	14.63	1972	5.45	1013	13.06
06	1310	-3.89	2061	4.51	1021	0.79
07	1270	-3.05	2197	6.60	1106	8.33
08	1197	-5.75	2218	0.96	1156	4.52
09	1250	4.43	2260	1.89	1188	2.77
10	1282	2.56	2240	-0.88	1187	-0.08
11	1380	7.64	2402	7.23	1264	6.49
12	1304	-5.51	2269	-5.54	1219	-3.56
1981-01	1311	0.54	2227	-1.85	1169	-4.10
02	1303	-0.61	2180	-2.11	1186	1.45
03	1380	5.91	2333	7.02	1267	6.83
04	1337	-3.12	2306	-1.16	1205	-4.89
05	1291	-3.44	2371	2.82	1189	-1.33
06	1304	1.01	2361	-0.42	1124	-5.47
07	1176	-9.82	2254	-4.53	1074	-4.45
08	1171	-0.43	2177	-3.42	1061	-1.21
09	1044	-10.85	1883	-13.50	983	-7.35
10	1024	-1.92	1843	-2.12	943	-4.07
11	1036	1.17	2012	9.17	1022	8.38
12	1000	-3.47	1954	-2.88	1000	-2.15
1982-01	957	-4.30	1787	-8.55	929	-7.10
02	968	1.15	1671	-6.49	926	-0.32
03	921	-4.86	1588	-4.97	906	-2.16
04	893	-3.04	1548	-2.52	879	-2.98
05	855	-4.26	1524	-1.55	879	0.00
06	801	-6.32	1367	-10.30	810	-7.85
07	870	8.61	1412	3.29	840	3.70
08	945	8.62	1613	14.24	967	15.12
09	964	2.01	1602	-0.68	927	-4.14
10	1084	12.45	1774	10.74	1028	10.90
11	1248	15.13	1838	3.61	1069	3.99
12	1288	3.21	1958	6.53	1185	10.85
1983-01	1378	6.99	2031	3.73	1166	-1.60
02	1382	0.29	2090	2.90	1283	10.03
03	1369	-0.94	2156	3.16	1358	5.85
04	1483	8.33	2341	8.58	1450	6.77
05	1563	5.39	2421	3.42	1482	2.21

06	1561	-0.13	2447	1.07	1476	-0.40
07	1587	1.67	2478	1.27	1505	1.96
08	1576	-0.69	2483	0.20	1539	2.26
09	1526	-3.17	2535	2.09	1542	0.19
10	1459	-4.39	2369	-6.55	1543	0.06
11	1594	9.25	2560	8.06	1666	7.97
12	1562	-2.01	2552	-0.31	1720	3.24
1984-01	1573	0.70	2469	-3.25	1650	-4.07
02	1520	-3.37	2420	-1.98	1594	-3.39
03	1538	1.18	2382	-1.57	1549	-2.82
04	1537	-0.07	2323	-2.48	1502	-3.03
05	1506	-2.02	2230	-4.00	1470	-2.13
06	1488	-1.20	2221	-0.40	1483	0.88
07	1463	-1.68	2140	-3.65	1481	-0.13
08	1585	8.34	2389	11.64	1581	6.75
09	1548	-2.33	2393	0.17	1571	-0.63
10	1589	2.65	2353	-1.67	1604	2.10
11	1550	-2.45	2369	0.68	1642	2.37
12	1506	-2.84	2400	1.31	1699	3.47
1985-01	1701	12.95	2595	8.13	1840	8.30
02	1765	3.76	2595	0.00	1838	-0.11
03	1813	2.72	2613	0.69	1829	-0.49
04	1834	1.16	2635	0.84	1840	0.60
05	1905	3.87	2736	3.83	1857	0.92
06	1980	3.94	2713	-0.84	1969	6.03
07	2114	6.77	2779	2.43	1975	0.30
08	2119	0.24	2820	1.48	2019	2.23
09	2049	-3.30	2651	-5.99	1903	-5.75
10	2079	1.46	2675	0.91	1922	1.00
11	2086	0.34	2857	6.80	2074	7.91
12	2117	1.49	2878	0.74	2118	2.12

SECTION -3- A propos de l'estimation

Comme critique sur l'estimation des bêtas, il est important de préciser que les dividendes versés par les corporations ne sont pas inclus dans les calculs des indices. Sharpe [1978] suggère que ne pas considérer les dividendes peut sérieusement biaiser les résultats d'analyses. Cependant, le CAPM est un modèle théorique qui néglige quantité d'informations. Par exemple, Sharpe suggère aussi que les coûts de transactions doivent être considérés et, dans un même esprit, que les bêtas doivent être ajustés selon que le marché est haussier ou baissier. On peut porter le même genre de critique au sujet de la taxation, le CAPM (la forme classique) faisant l'hypothèse que les rendements des actifs ne sont pas sujet à la taxation.

Considérer toutes ces informations dans le calcul du bêta d'un seul actif ou d'un portefeuille de peu d'actifs peut être envisageable. Par contre, dans un portefeuille de marché comme l'indice TSE300, ceci devient très laborieux, voire impossible. Litzenberger et Ramaswamy [1979] font remarquer à ce sujet que les régimes de taxation sont tels que selon l'identité des agents économiques, certains peuvent préférer les dividendes aux gains en capitaux, ou encore être indifférents et que la solution d'un tel problème est de nature empirique.

En fait, l'indice bêta simple a été développé en ayant comme objectif d'offrir un outil d'analyse simple et le prix à payer pour cette simplicité est la marge d'erreur éventuelle, liée au peu d'information qu'il utilise. Les lourdes hypothèses sur lesquelles repose la construction du CAPM reflètent d'ailleurs le caractère de cette technique d'analyse.

Elton et Gruber [1981] font toutefois remarquer que la meilleure façon de juger la qualité d'une méthode d'analyse est de regarder avec quelle efficacité elle prédit la réalité. Sur ce point, le CAPM a montré, quoique sans faire l'unanimité, qu'il pouvait être un outil d'analyse pertinent. Des études ont d'ailleurs été faites sur la validité du CAPM lorsqu'on relâche certaines hypothèses et que l'on considère explicitement des informations supplémentaires. Ainsi, Brennan [1970], Black et Scholes [1974], Rosenberg et Marathe [1978] et Litzenberger et Ramaswamy [1979], en utilisant des modèles et des méthodes d'estimation de plus en plus sophistiqués, ont analysé le CAPM en considérant l'effet des taxes et des dividendes et ont tous obtenu que l'indice bêta était une mesure appropriée.

Mais puisque dans le cas présent on désire analyser le lien entre des indices de marché et que pour ce faire, le CAPM est utilisé dans sa forme classique, le véritable problème vient de l'information qui n'est pas incluse dans les observations plutôt

qu'en tant que variables explicatives. Principalement, les dividendes ne sont pas calculés dans les rendements des indices.

Une façon d'examiner les conséquences d'une telle situation est de supposer que le modèle à estimer par une régression linéaire simple est le suivant:

$$y = x\beta + v$$

et qu'on ne dispose que de n valeurs approchées x^* et y^* de x et y , telles que

$$y = y^* + e$$

$$x = x^* + u$$

où $e_{(N \times 1)}$ et $u_{(N \times 2)}$ sont les matrices des erreurs sur les variables, supposées aléatoires comme la matrice des erreurs $v_{(N \times 1)}$; $\beta' = (\beta_0, \beta_1)$. La relation entre les valeurs observées s'écrit:

$$y - e = (x - u)\beta + v$$

$$y = x\beta + v - u\beta + e$$

$$y = x\beta + \Gamma$$

A partir de cette équation, on peut supposer différents comportements de l'erreur totale Γ et, conséquemment, obtenir différents résultats théoriques sur la qualité de l'estimation.

Cas i)

Si favorablement $E(e) = E(u) = 0$ et si v , u , e et x^* sont statistiquement indépendants, puisque l'estimateur des moindres carrés ordinaire (MCO) est donné par:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \beta + (x'x)^{-1}x'\Gamma \\ &= \beta + (x'x)^{-1}x'(v - u\beta + e) \end{aligned}$$

alors, prenant la probabilité limite (plim) de l'estimateur, on obtient

$$\text{plim } \hat{\beta} = \beta + \text{plim} T^{-1}(x'x)^{-1} \text{plim} T^{-1}(x'\Gamma)$$

où, selon les hypothèses:

$$\begin{aligned} \text{plim} T^{-1}(x'x) &= \text{plim} T^{-1}(x^{**}x^{**}) + \text{plim} T^{-1}(u'u) \\ &= \Sigma + \Omega \end{aligned}$$

$$\text{plim} T^{-1}(x'v) = 0$$

$$\text{plim} T^{-1}(x'u) = \Omega$$

$$\text{plim} T^{-1}(x'e) = 0$$

Donc, l'estimateur MCO est égal (en probabilité limite) à:

$$\text{plim } \hat{\beta} = \beta - (\Sigma + \Omega)^{-1} \Omega \beta$$

$$\text{où } \Sigma = \text{plim} T^{-1}(x^{**}x^{**}) = \begin{bmatrix} 1 & x^{**} \\ x^{**} & x^{**2} + \sigma^2_{x^{**}} \end{bmatrix}$$

x^{**} et $\sigma^2_{x^{**}}$ étant respectivement la moyenne et la variance de x^{**} et

$$\Omega = \text{plim} T^{-1}(x'u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_u \end{bmatrix}$$

Puisqu'il n'y a pas d'erreur associée à la constante β_0 .

Substituant Σ et Ω dans $\text{plim } \hat{\beta}$:

$$\text{plim} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sigma^2_{x^{**}} + \sigma^2_u} \begin{bmatrix} -x^{**}\sigma^2_u\beta_1 \\ \sigma^2_u\beta_1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{plim } \hat{\beta}_1 &= \beta_1 - \frac{\sigma^2_{ue} \beta_1}{\sigma^2_{xx} + \sigma^2_u} \\ &= \beta_1 - \frac{\sigma^2_{ue} \beta_1}{\sigma^2_{xx} + \sigma^2_u} \end{aligned}$$

et ainsi, l'estimateur MCO est biaisé et le biais est proportionnel à la valeur de la variance de l'erreur u . On remarque que dans ce cas, le biais n'est produit que par l'erreur sur la variable exogène (ici l'indice TSE300). Donc, l'erreur de mesure sur la variable expliquée (REALB ou PRDAA) est sans conséquence sur la qualité de l'estimation.

Mais, les variables approchées étant toutes deux des indices de marché, il est fort probable que u et e soient corrélés l'un à l'autre.

cas ii)

Si e et u ne sont pas statistiquement indépendants, alors

$$\text{plim } T^{-1}(x'e) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{ue} \end{bmatrix} = \delta$$

et l'estimateur MCO devient:

$$\text{plim } \hat{\beta} = \beta - (\Sigma + \Omega)^{-1}(\Omega\beta + \delta)$$

Résolvant de la même façon que précédemment on obtient que

$$\text{plim } (\hat{\beta}_1 - \beta_1) = \frac{-\beta_1 \sigma^2_{ue} + \sigma_{ue} e}{\sigma^2_{xx} + \sigma^2_u}$$

Le biais de l'estimateur est maintenant aussi fonction de l'erreur sur la variable endogène, selon sa covariance avec u ,

mais il est difficile de déterminer dans ce cas s'il est moins élevé que dans le cas précédent. Une façon d'examiner les conséquences de la corrélation entre e et u est de supposer que les observations sont affectées d'erreurs systématiques.

cas iii)

Si les variables sont affectées d'une erreur systématique et que ces erreurs obéissent à des fonctions linéaires des variables auxquelles elles correspondent, c'est-à-dire que si

$$E(u|x;v) = u_1x + u_0$$

$$E(e|x;v) = e_1y + e_0$$

Malinvaud [1978] montre qu'il est possible de définir des nouvelles variables x^* et y^* et de nouvelles erreurs \bar{u} et \bar{e} telles que

$$x^* = \bar{x} + \bar{u}$$

$$y^* = \bar{y} + \bar{e}$$

avec

$$E(\bar{u}|\bar{x};v) = 0$$

$$E(\bar{e}|\bar{x};v) = 0$$

Il suffit de poser

$$\bar{x} = (1 + u_1)x + u_0$$

$$\bar{y} = (1 + e_1)y + e_0$$

Autrement dit, les nouvelles variables sont la somme des valeurs vraies et des erreurs systématiques sur les observations correspondantes. Ces variables obéissent à un modèle de régression simple:

$$\bar{y} = \bar{x}\beta + v$$

où

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 \frac{1 + e_1}{1 + u_1}$$

De cette façon, on obtient que la valeur du biais sur β_1 dépend du lien entre les erreurs de mesures. Si la relation linéaire entre les erreurs et leur variable est la même, l'estimateur β_1 sera non biaisé. Comme conséquence, l'estimation d'une relation linéaire entre deux variables théoriquement fortement corrélées (e.g. deux indices de marché) via l'utilisation de variables approchées, peut profiter d'une uniformité de la structure de ces variables.

En pratique, si l'indice TSE300 ne considère pas certaines informations telles les dividendes, il peut être approprié, du point de vue de l'estimation, de faire de même pour l'indice REALB (par exemple). C'est dans cet ordre d'idées que Morin [1977], dans une étude sur l'efficacité du CAPM sur le marché canadien, a préféré construire un indice de marché ad hoc pour l'analyse de portefeuilles incluant les versements en dividendes, plutôt que d'utiliser l'indice TSE300 qui ne contient pas les dividendes.

En résumé, les conséquences de l'utilisation de variables approchées sont que: 1° si les erreurs de mesures sont non corrélées, l'indice bêta est biaisé et son biais n'est dû qu'à la variable explicative (l'indice TSE300); 2° si les erreurs de mesures sont corrélées (ce cas semble le plus probable), un comportement systématique montre que l'indice sera d'autant moins biaisé que la corrélation sera élevée.

En conséquence, comme l'indice TSE300 néglige certaines informations, il peut être profitable (pour la qualité de l'estimation) de faire de même pour les variables que l'on cherche à expliquer.

PARTIE -III-

Modélisation du phénomène dans le cadre de la théorie de la demande sous rationnement quantitatif.

1. Le modèle:

Dans la partie précédente, il est proposé que l'écart observé entre les actifs liés au REA et les autres actifs, est le résultat d'une captivité relative de l'offre des premiers.

La théorie économique a déjà considéré ce phénomène (rationnement quantitatif) en insérant dans la modélisation du problème d'optimisation, une contrainte sur les quantités disponibles. A partir de ce nouveau système, l'optimum est reconstruit ainsi que l'analyse de sa structure.

Il survient toutefois un problème à l'application de ce type d'analyse au présent modèle de rationnement: la présence de l'incertitude (rendement et utilité espérés). Dans le cadre de ce mémoire, puisque les modèles de rationnement quantitatif en incertitude sont peu développés, cette interprétation du phénomène est approfondie en utilisant les modèles de rationnement connus, c'est-à-dire les modèles en certitude. Il est donc supposé que la substitution de système ne fausse pas l'analyse qui s'ensuit. On peut toutefois tenter de justifier cet écart de la façon suivante.

Le rationnement quantitatif discuté ici est celui auquel fait face l'investisseur situé sur le marché secondaire au moment de l'achat des actifs. Par hypothèse, l'investisseur considère le risque et le rendement des titres dans la sélection de son portefeuille. Le problème de l'investisseur se définit alors dans un cas d'incertitude; il cherche à:

$$\max EU(Rx, \sigma^2_x)$$

$$\text{sous contrainte que } p \cdot x = m$$

où x = vecteur des actifs

p = vecteur des prix correspondant

m = montant à investir

Donc, l'utilité espérée de l'investissement au début de la période considérée est conditionnelle à la réalisation à la fin de la période et la structure du portefeuille est définie par les préférences de l'investisseur face au risque.

Considérons ce problème comme une première étape dans la sélection du portefeuille, plus précisément comme l'étape définissant la structure du portefeuille. L'investisseur apparaît alors sur le marché secondaire avec des choix prédéfinis.

Maintenant, définissons

$$e = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$$

comme l'ensemble des q états de la nature pouvant se réaliser à la fin de la période. On a déjà que

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

est le vecteur des n actifs financiers; définissons

$$x_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}\}$$

comme un sous-ensemble contenant des actifs "équivalents", dans le sens que l'investisseur anticipe la même réalisation à la fin de la période pour ces p actifs, pour chacun des états de la nature. De cette façon, si $i = (1, 2, \dots, j)$, alors

$$x = \sum_{i=1}^j x_i$$

La deuxième étape dans la sélection du portefeuille consiste à faire un choix à l'intérieur de certains des j sous-ensembles, lesquels ont déjà été déterminés lors de la première étape. A ce stade, les préférences de l'investisseur sont donc indépendantes du rendement espéré et du risque.

Il suffit ensuite de supposer qu'à ce niveau, la fonction d'utilité régissant les choix possède les caractéristiques de doublement différentiability et de concavité et on obtient la formulation du problème de seconde étape de l'investisseur:

$$\max U(x)$$

$$\text{sous contrainte que } p \cdot x = m$$

On a donc un modèle de choix d'actifs dans un cas de certitude et cette optique peut se lier assez facilement à la réalité. Par exemple, on peut imaginer le cas d'un investisseur qui, dans une première étape, choisit d'inclure dans son portefeuille des

actions d'une institution bancaire et, dans une seconde étape, doit faire un choix entre les différentes institutions qui s'offrent à lui. Il est fort possible que l'investisseur anticipe le même comportement pour différents titres et son choix sera ainsi indépendant de ses goûts face au risque.

Dans cet esprit, il semble acceptable d'utiliser le problème de seconde étape de l'investissement pour analyser les effets du rationnement quantitatif et ainsi, de se transposer dans le cas certain.

2. Le modèle avec rationnement:

Considérant qu'une partie des actifs est rationnée sur le marché on doit alors partitionner le modèle de la façon suivante:

$$x = (x_1, x_2)$$

où x_1 représente les actifs non rationnés

x_2 les actifs rationnés (éligibles REA)

Définissons maintenant \bar{x}_2 comme la borne supérieure du rationnement et considérons le cas où $x_2 = \bar{x}_2$. La fonction de demande devient:

$$x_i = f_i(p_1, p_2, m) \quad i = 1, 2$$

et $p_1 = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n})$

$$p_2 = (p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2m}), \quad n = l + m$$

Le problème de l'investisseur se redéfinit ainsi:

$$\begin{aligned} \max U(x_1, x_2) \quad \text{s.c.q.} \quad & m = p_1'x_1 + p_2'x_2 \\ & x_2 \leq \bar{x}_2 \end{aligned}$$

3. Solution:

Ecrivant le lagrangien:

$$\mathbb{E} = U(x_1, x_2) + \phi(m - p_1'x_1 - p_2'x_2) + \delta(x_2 - \bar{x}_2)$$

où les conditions de Kuhn-Tucker pour un maximum sont

$$E_{x_1} = U_1 - \phi p_1 = 0$$

$$E_{x_2} = U_2 - \phi p_2 + \delta = 0$$

$$E_{\phi} = m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

$$E_{\delta} = \bar{x}_2 - x_2 \geq 0, (\bar{x}_2 - x_2)\delta = 0, \delta \geq 0$$

$$\text{alors } p_2 = \frac{U_2}{\phi} + \frac{\delta}{\phi} \quad \text{et} \quad p_1 = \frac{U_1}{\phi}$$

On constate que les prix des actifs sont déterminés par leur utilité marginale et que, pour les actifs rationnés, leur prix subit un ajustement selon la valeur du rationnement. Puisque δ doit être non négatif selon les conditions de Kuhn-Tucker, on retrouve dans ce système la justification théorique de la hausse des prix constatée statistiquement sur le marché des actions éligibles au REA.

Dans le contexte de rationnement quantitatif, la quantité disponible devient un paramètre institutionnel et une présentation rigoureuse du système exige la fonction de demande inverse des titres rationnés puisqu'en fait, ce sont les prix qui s'ajustent aux quantités.

4. Redéfinition du système:

Prenons d'abord le système partitionné

$$x_1 = f_1(p_1, p_2, m)$$

$$x_2 = f_2(p_1, p_2, m)$$

que l'on peut réécrire

$$x_1 = f_1(p_1, p_2, m_1 + m_2)$$

$$x_2 = f_2(p_1, p_2, m_1 + m_2)$$

si $m_1 + m_2 = m$, et où $m_2 = p_2 x_2$.

On peut démontrer que le système

$$\Gamma_2 = f_2(p_1, p_2, m_1 + m_2)$$

$$\theta_2 = m_2 - p_2 x_2$$

possède une matrice jacobienne de rang maximum (donc la fonction vectorielle est différentiable). On peut alors écrire

$$x_2 = f_2(p_1, p_2, m_1 + p_2 x_2)$$

ainsi $x_2 = f_2(p_1, p_2, m_1)$

Isolant p_2 :

$$p_2 = g_2(p_1, x_2, m_1)$$

Maintenant, on avait que

$$x_1 = f_1(p_1, p_2, m_1 + m_2)$$

qui devient

$$x_1 = g_1(p_1, g_2(p_1, x_2, m_1), m_1 + p_2 g_2(p_1, x_2, m_1))$$

donc

$$x_1 = g_1(p_1, x_2, m_1)$$

On obtient finalement une représentation partitionnée et mixte:

$$x_1 = g_1(p_1, x_2, m_1) \quad \text{fonction de demande directe}$$

$$p_2 = g_2(p_1, x_2, m_1) \quad \text{fonction de demande inverse}$$

Reprenant l'hypothèse que $x_2 = \bar{x}_2$, alors

$$x_1 = g_1(p_1, \bar{x}_2, m_1)$$

$$p_2 = g_2(p_1, \bar{x}_2, m_1)$$

On observe donc à nouveau que les prix sur le marché rationné sont fonction du niveau de rationnement.

L'intérêt de cette présentation mixte est premièrement qu'elle définit plus justement le marché puisque dans le cas de rationnement, les prix sont endogènes et les quantités exogènes. Deuxièmement, puisque p_2 est un prix qui s'ajuste au niveau du rationnement, on obtient, en passant par le système mixte, un système de demande complet non rationné.

Cette information était déjà suggérée par le CAPM. L'écart de prix observé pour les actions éligibles au REA traduit la valeur de la contrainte de rationnement. C'est-à-dire, dans

$$p_2 = \frac{U_2}{\phi} + \frac{\delta}{\phi} \quad , \quad \frac{\delta}{\phi} \text{ est la valeur du}$$

rationnement.

Finalement, puisque le CAPM observe ce prix ajusté (pour un niveau de risque inchangé), ce modèle d'équilibre des prix des actifs financiers correspond donc bien à la théorie économique de la demande dans le cas de rationnement quantitatif.

5. Etude de la structure locale

Maintenant que l'on a caractérisé le comportement adaptatif de l'investisseur, on peut étudier le voisinage du point d'équilibre $(x_1, p_2)^*$ lorsque les paramètres institutionnels (p_1, x_2, m) changent.

Pour faire cette étude locale, il est plus simple de partir de la forme directe partitionnée non rationnée et d'inclure le rationnement en cours de route puisque nous passerons par la forme réduite du système et que cette forme réduite est unique⁽¹⁾. Il suffira ensuite d'en dériver la forme mixte.

Partant donc de la solution du système direct partitionné non rationné:

$$E_{x_1} = U_1 - \phi p_1 = 0$$

$$E_{x_2} = U_2 - \phi p_2 = 0$$

$$E_{\phi} = m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

faisant la différentielle totale du système:

(1) Cette affirmation est démontrable (voir Bronsard 1984).

$$dE_1 = \frac{\delta}{\delta x_1} U_1 dx_1 + \frac{\delta}{\delta x_2} U_1 dx_2 - \frac{\delta}{\delta x_2} \phi p_1 d\phi - \frac{\delta}{\delta x_2} \phi p_1 dp_1 = 0$$

$$dE_2 = \frac{\delta}{\delta x_1} U_2 dx_1 + \frac{\delta}{\delta x_2} U_2 dx_2 - \frac{\delta}{\delta x_2} \phi p_2 d\phi - \frac{\delta}{\delta x_2} \phi p_2 dp_2 = 0$$

$$dE_\bullet = \frac{\delta}{\delta x_1} p_1 x_1 dp_1 - \frac{\delta}{\delta x_2} p_1 x_1 dx_1 - \frac{\delta}{\delta x_2} p_2 x_2 dp_2 - \frac{\delta}{\delta x_2} p_2 x_2 dx_2 + \frac{\delta m}{\delta m} dm = 0$$

réarrangé

$$U_{11} dx_1 + U_{12} dx_2 - p_1 d\phi - \phi dp_1 = 0$$

$$U_{21} dx_1 + U_{22} dx_2 - p_2 d\phi - \phi dp_2 = 0$$

$$-x_1 dp_1 - p_1 dx_1 - x_2 dp_2 - p_2 dx_2 + dm = 0$$

insérant la condition du premier ordre $p_i = \frac{U_i}{\phi}$ et isolant dp_1 et dm :

$$\frac{1}{\phi} (U_{11} dx_1 + U_{12} dx_2 - U_1 \frac{d\phi}{\phi}) = dp_1$$

$$\frac{1}{\phi} (U_{21} dx_1 + U_{22} dx_2 - U_2 \frac{d\phi}{\phi}) = dp_2$$

$$\frac{1}{\phi} (-U_1 dx_1 - U_2 dx_2) = x_1 dp_1 + x_2 dp_2 - dm$$

sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & -U_1 \\ U_{21} & U_{22} & -U_2 \\ -U_1 & -U_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\phi/\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dp_2 \\ dm \end{bmatrix}$$

Posons

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & -v_1 \\ K_{21} & K_{22} & -v_2 \\ -v_1 & -v_2 & w \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & -U_1 \\ U_{12} & U_{22} & -U_2 \\ -U_1 & -U_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Alors

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ d\Phi/\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & -v_1 \\ K_{21} & K_{22} & -v_2 \\ -v_1 & -v_2 & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dp_2 \\ dm \end{bmatrix}$$

où

$$dx_1 = (K_{11} - v_1 x_1) dp_1 + (K_{12} - v_1 x_2) dp_2 + v_1 dm$$

$$dx_2 = (K_{21} - v_2 x_1) dp_1 + (K_{22} - v_2 x_2) dp_2 + v_2 dm$$

réarrangé

$$dx_1 = K_{11} dp_1 - v_1 x_1 dp_1 + K_{12} dp_2 - v_1 x_2 dp_2 + v_1 dm$$

$$dx_2 = K_{21} dp_1 - v_2 x_2 dp_1 + K_{22} dp_2 - v_2 x_2 dp_2 + v_2 dm$$

réarrangé

$$dx_1 = K_{11} dp_1 + K_{12} dp_2 + v_1 (dm - x_1 dp_1 - x_2 dp_2)$$

$$dx_2 = K_{21} dp_1 + K_{22} dp_2 + v_2 (dm - x_1 dp_1 - x_2 dp_2)$$

où $dm - x_1 dp_1 - x_2 dp_2$ est équivalent à $\sum p_i^* dx_i^*$ + $\sum p_i^* dx_i^*$,

$i = 1 \dots l$, investisseurs

alors

$$dx_1 = K_{11} dp_1 + K_{12} dp_2 + \sum v_1^* (p_i^* dx_i^* + p_i^* dx_i^*)$$

$$dx_2 = K_{21} dp_1 + K_{22} dp_2 + \sum v_2^* (p_i^* dx_i^* + p_i^* dx_i^*)$$

Puisque le marché du REA s'ajuste par les prix, on peut réécrire le système ainsi (où les souscrits "2" représentent le REA):

$$\begin{aligned} dx_1 - K_{12}dp_2 &= K_{11}dp_1 + \sum v_1^i (p_1^i dx_1^i + p_2^i dx_2^i) \\ -K_{22}dp_2 &= K_{21}dp_1 - dx_2 + \sum v_2^i (p_1^i dx_1^i + p_2^i dx_2^i) \end{aligned}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} I & -K_{12} \\ 0 & -K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dp_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ K_{21} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} + \sum_i \begin{bmatrix} v_1^i \\ v_2^i \end{bmatrix} (p_1^i dx_1^i + p_2^i dx_2^i)$$

que l'on peut représenter sous la forme réduite:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dp_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} + \sum_i \begin{bmatrix} \beta_1^i \\ \beta_2^i \end{bmatrix} (p_1^i dx_1^i + p_2^i dx_2^i)$$

Alors sous les hypothèses de départ sur la fonction d'utilité et de demande et sous rationnement des actifs x_2 tel que $x_2 = \bar{x}_2$, on peut caractériser le comportement de l'investisseur i au moyen de la structure locale suivante:

$$dx_1^i = S_{11}^i dp_1 + S_{12}^i d\bar{x}_2^i + \beta_1^i (p_1^i dx_1^i + p_2^i d\bar{x}_2^i)$$

$$S_{11}^i = S_{11}^{i'}; S_{11}^i p_1 = 0; \Omega_1' S_{11}^i \Omega_1 < 0 \text{ pour } \Omega_1 \neq \theta p_1, \theta \in \mathbb{R}; p_1' \beta_1^i = 1$$

$$S_{12}^i = -p_2$$

Dans la littérature microéconomique c'est le modèle sous rationnement quantitatif de Drèze.

Dans l'équation de dx_1^i , $d\bar{x}_2^i$ peut s'interpréter comme une variation dans le rationnement. S_{12} est une matrice d'effets de débordements.

Le prix p_2 est déterminé par la demande de marché et est fonction du niveau de rationnement.

CONCLUSION

L'objectif du travail était de vérifier si le REA cause une certaine distorsion sur le marché boursier québécois. En résumé, on obtient que:

- 1° La statistique descriptive fait ressortir des résultats incohérents par rapport à la théorie du portefeuille et au modèle d'équilibre CAPM.
- 2° L'analyse économique du phénomène propose que le marché réagit au REA par des ajustements ad hoc de l'offre et de la demande.
- 3° finalement, une attitude optimale d'investissement est suggérée, étant donné les nouvelles règles du jeu.

Comme on devait s'y attendre, l'intervention de l'état ne semble pas sans conséquences. Le bruit perçu empiriquement est, en autant que l'on accepte cette analyse, une conséquence indirecte du régime et fait partie du sous-ensemble des effets difficilement prévisibles d'une intervention. Comme c'est souvent le cas, l'ajustement des prix joue le rôle d'indicateur de l'allure des réactions au choc.

Qu'un investisseur, pour maximiser l'utilité de son épargne, doive la répartir uniquement entre un actif certain et un portefeuille REA dynamique n'est pas évident à prime abord. Dans l'optique de l'ajustement proposé vers un nouvel équilibre de l'offre et de la demande, le dénouement devient plus intuitif. Cette réaction optimale est aussi un élément des conséquences de l'intervention.

Finalement, tout au long du texte, la majeure partie de l'analyse statistique est basée sur le modèle CAPM. Or ce modèle ne fait pas l'unanimité quant à son efficience. Ainsi, dans une étude à ce sujet, Morin [1977] a obtenu que le CAPM classique traduisait erratiquement l'économie canadienne. Il conclue entre autre que sur la période observée, l'indice β (i.e. la relation risque-rendement) est statistiquement non significatif et que la relation est non linéaire. A l'opposé, Calvet et Lefoll [1985], ont obtenu dans une analyse équivalente (mais sur des observations plus récentes), des conclusions favorables au CAPM. Par exemple, ils ont vérifié que: la relation risque-rendement est linéaire, le risque non systématique ne semble pas intervenir dans la fixation des prix des actifs, le CAPM conserve sa robustesse sous l'utilisation de différents indices de marché (différentes pondérations des actifs).

Donc à ce sujet les opinions abondent et sont contradictoires. On ne doit donc pas perdre de vue qu'une chaîne a la force de son maillon le plus faible et que les résultats obtenus ici ne peuvent être plus robustes que ne l'est le CAPM.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M. Georges Dionne pour avoir assumé la direction de ce mémoire. Ma reconnaissance s'adresse aussi à M. Camille Bronsard ainsi qu'à M. Eric Ghysels pour leur collaboration. Je dois à la maison Lévesque Beaubien inc. des gains de temps très appréciés. Je remercie finalement Mme Renée Cloutier pour avoir gracieusement accepté de critiquer la composition du texte.

BIBLIOGRAPHIE

- ANDERSON, R.W., "Some Theory Of Inverse Demand For Applied Demand Analysis", *European Economic Review*, 14, 1980, 281-290.
- BLACK, F. et M. SCHOLLES, "The Effects Of Dividend Yield And Dividends Policy On Common Stock Prices And Returns", *Journal of Financial Economics* 1, 1974, 1-22.
- BOURSE DE MONTREAL, "REA Un Moyen De Réduire Vos Impôts Au Québec", sept 84, feuillet.
- BOURSE DE MONTREAL, "Revue de la Bourse de Montreal", semestrielles, 2-1979 à 1-1985.
- BRENNAN, M.J., "Taxes, Market Valuation And Corporation Financial Policy", *National Tax Journal*, décembre 1970, 417-427.
- BRONSARD, C. et L. SALVAS-BRONSARD, "Sur Les Formes Structurelles Engendrées Par La Théorie De La Demande Et Leur Utilisation", *Annales de l'INSEE*, No. 40, 1980.
- BRONSARD, C. et L. SALVAS-BRONSARD, "Commodity And Asset Demands With And Without Quantity Constraints In The Labor Market", CORE discussion, paper No. 8447, Louvain-La-Neuve, Belgique, Déc. 1984.
- BRONSARD, C. et L. SALVAS-BRONSARD, "Estimating Demand Equations, The Converse Approach", *European Economic Review*, 9, 1977, 301-321.
- CALVET, A. L. et J. LEFOLL, "Risk And Return On The Canadian Capital Markets: Estimation And Sensitivity Analysis", Université d'Ottawa, fac. d'adm., 1985.
- COPELAND, T.E. et J.F.WESTON, "Financial Theory And Corporate Policy", Addison-Wesley, Ca, 2^{ème} édition, 1983.
- ELTON, J.E. et M.J. GRUBER, "Modern Portfolio Theory And Investment Analysis", John Wiley and Sons, New York, N.Y., 1981.
- FARREL, J. L. Jr., "Guide To Portfolio Management", McGraw-Hill Book inc., New York, N.Y., 1983.
- GAGNON, J.M. et N.KHOURY, "La Réglementation Du Marché Des Capitaux", ed. G.Morin, 1979, 75 pages.

- HALEY, C.W., et L.D. SCHALL, "The Theory Of Financial Decisions", Second Edition, McGraw-Hill Book co., Washington, D.C., 1979.
- JOHNSTON, J., "Econometric Methods", troisième édition, McGraw Hill, California, 1984.
- JUDGE, G.G., R.C. HILL, W.E. GRIFFITHS, H. LUTKEPOHL et T.C. LEE, "Introduction To The Theory And Practice Of Econometrics", Wiley, New York, 1982.
- LEVESQUE BEAUBIEN inc., "Bulletin d'Information REA", 1^{er}, 2^{ème}, 3^{ème} et 4^{ème} trimestres de 1985.
- LITZENBERGER, R. et K. RAMASWAMY, "The Effect Of Personal Taxes And Dividends On Capital Asset Prices", Journal Of Financial Economics, juin 1979, 163-196.
- MALINVAUD, E., "Leçons De Théorie Microeconomique", 4^{ème} édition, Dunod, Paris, 1982.
- MALINVAUD, E., "Méthodes Statistiques De L'Econométrie", troisième édition, Dunod, Paris, 1978.
- MERTON, R., "An Analytic Derivation Of The Efficient Set", Journal of Financial and Quantitative Analysis, September 1976, 1851-1872.
- MORIN, R.-A., "Market Line Theory And The Canadian Equity Market", rapport 77-04, Ecole des H.E.C., Montréal, 1977.
- ROSENBERG, B. et V. MARATHE, "Test Of Capital Asset Pricing Hypothesis", Journal of Financial Research, 1978.
- SHARPE, W.F. "Investments", Prentice Hall, New Jersey, 1987
- TOBIN, J., "Liquidity Preference As A Behavior Toward Risk", The Review of Economic Studies, Fevrier 1958, 65-86.
- TRUCHON, M., "Elements D'Optimisation", Université de Laval, Québec, 1985.
- VARIAN, H.R., "Microeconomic Analysis", Second édition, W.W., Norton, N.Y., N.Y., 1984.