Université de Montréal

# La tarification des versions améliorées de logiciels



par
David Déry
Département de sciences économiques
Faculté des arts et sciences

Mémoire présenté à la faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en sciences économiques

Septembre 1991

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

La tarification de versions améliorées de logiciels

présenté par :

David Déry

a été évalué par un jury composée des personnes suivantes

Mémoire accepté le : ______________________________

## SOMMAIRE

Dans l'industrie du logiciel, la technologie permet aux consommateurs de se faire des copies facilement et rapidement. On observe alors plusieurs copies illicites sur le marché. Si des consommateurs préfèrent se contenter d'une copie plutôt que d'acheter le logiciel original, pourquoi alors ne pas baisser les prix ? Les firmes demandent un prix élevé qui semble assez fixe. Pourquoi ces prix restent-ils élevés ? La mise à jour des logiciels pose plusieurs questions importantes pour une entreprise. Par exemple, étant donné l'innovation technologique de la nouvelle version, comment fixer le prix de l'ancienne et de la nouvelle version? On peut également se demander qui achètera la nouvelle version étant donné que l'ancienne version est également disponible ?

Dans ce mémoire, nous proposons un modèle qui tient compte de la présence de deux versions d'un même logiciel, celui-ci ne différant que par la qualité. Nous tentons d'expliquer quel type d'individus serait prêt à payer pour l'ancienne version, la nouvelle version et quels sont ceux qui passeront de l'ancienne à la nouvelle version. Pour modéliser ceci, nous nous servons d'un modèle simple où les consommateurs et les firmes ne tiennent pas compte des autres agents lors de leur décision. De plus, les agents sont myopes puisqu'ils ne tiennent pas compte des versions futures dans leur décisions. On constate que le nombre de logiciels originalement vendus force la firme à prendre un certain prix. Cependant la firme peut toujours se servir de la qualité du logiciel pour cibler la clientèle voulue. Dans un deuxième temps nous permettons à la firme de discriminer entre les propriétaires et les non-propriétaires d'anciennes versions. Puisque les firmes vont chercher le surplus du consommateur elles reçoivent un profit plus important. Cependant la quantité n'augmente pas nécessairement, il se peut que la quantité vendue reste la même.

**Mots clefs** : Biens durables, analyse économique, droits d'auteurs.

# TABLE DES MATIERES

## LISTE DES TABLEAUX

## LISTE DES FIGURES

# REMERCIEMENTS

Je désire dédier ce mémoire à mes parents qui ont su m'encourager jusqu'à la fin de cet ouvrage. Je suis également redevable à mon directeur *Abraham Hollander* pour m'avoir fourni le sujet et pour m'avoir relancé durant les périodes creuses.

## INTRODUCTION

Au début nous avons commencé par étudier le problème du piratage de logiciels. Nous avons alors recherché des références, en vain, car bien peu de publications élaborent ce sujet. Le domaine juridique demeure la source la plus abondante d'information sur ce sujet. Il faut dire que ce problème avec les logiciels n'existe pas depuis longtemps. Le logiciel commercial n'est apparu qu'après la seconde guerre mondiale. Et ce n'est qu'avec l'arrivée des mini-ordinateurs dans les années soixante-dix (70)[1] et du micro-ordinateur dans les années 70-80 que la protection de la propriété intellectuelle est devenue un problème, car peu d'entreprises pouvaient se permettre un ordinateur de cette taille avant cette époque[2]. Comme le mentionne Besen et Raskind [1991], ce nouveau type de médium n'est pas facile à protéger par les moyens traditionnels tels le droit d'auteur, le brevet et la marque de commerce. Plus précisément, il existe une controverse sur le rôle du brevet dans l'industrie du logiciel. Cette controverse suggère l'importance pratique du brevet pour une industrie naissante. En effet, plusieurs entreprises considèrent le droit d'auteur comme insatisfaisant parce que, pour les droits d'auteurs, il suffit que l'oeuvre provienne de l'effort de l'auteur; de telle sorte que, contrairement au brevet, il peut exister plus d'un droit d'auteur pour une même oeuvre. Le droit d'auteur protège l'expression d'une idée et non l'idée elle-même. C'est pourquoi, dans l'industrie du logiciel, plusieurs préconisent l'utilisation du brevet pour protéger les logiciels.

---

1 Le PDP-11, de la compagnie Digital, fut le premier mini-ordinateur qui ait rencontré un franc succès au début des années soixante-dix et lança la compagnie dans le marché des mini-ordinateurs.

2 L'ordinateur IBM 360, dont furent doté plusieurs universités à la fin des années soixante, remplissait une salle complète à l'intérieur de laquelle la température était soigneusement contrôlée.

Le brevet est la forme la plus puissante de protection intellectuelle. Il permet d'exclure tous les concurrents de l'utilisation d'une idée pour une période déterminée. Par conséquent, dans l'industrie du logiciel on pourrait assister à une véritable course aux brevets. Cependant, pour avoir droit au brevet, il faut fournir une description technique complète du logiciel. Dans une industrie où la différence technologique est parfois très nuancée, divulguer son procédé devient très risqué. Dans le but d'établir un compromis, le bureau des droits d'auteurs américains, a annoncé que tous les éléments protégés par les droits d'auteurs, incluant l'affichage à l'écran, devraient être considérés comme une et seule identité. Cependant, les entreprises ne s'entendent pas pour savoir ce qui doit être protégé ou ce qui ne le sera pas. Nous n'avons qu'à observer les nombreuses poursuites entre compagnies sur l'allure générale de l'interface du logiciel (look and feel) pour en témoigner (Xerox vs. Apple, Apple vs. Microsoft, Lotus vs. Paperback Software...). Aussi cette jeune industrie se base-t-elle sur l'expérience d'autres industries, telle l'industrie du livre, pour s'inspirer des lignes de conduite.

Le marché du livre rencontre lui aussi ses problèmes: celui des livres usagés et celui des photocopies sont des exemples classiques. Les droits d'auteurs protègent en bonne partie les auteurs contre les photocopies, même si ces derniers permettent aux universités de faire des copies pour fins pédagogiques et permettent également d'autres utilisations "raisonnables". Par contre, pour les livres usagés, les éditeurs ont recourt aux nouvelles éditions pour réduire l'importance du marché de seconde main. La nouvelle édition peut avoir des numéros de pages différents ce qui rend les choses plus difficiles pour un étudiant voulant suivre un cours avec l'ancienne édition. On peut voir une similitude entre le changement d'édition de livres et la mise à jour de logiciels. Lorsqu'une amélioration est apportée à un logiciel, la compagnie annonce la sortie d'une mise à jour du logiciel. Pour favoriser l'achat de la nouvelle version, les entreprises ont souvent recourt au support technique et aux tarifications spéciales pour les mises à jour. Par exemple, le support technique par téléphone (HelpLine) favorise l'utilisation du dernier logiciel puisqu'une référence à une ancienne version nécessite plus de temps (vieux manuels moins accessibles, formation du personnel insuffisante pour servir les différentes versions...). Les compagnies n'offrent pas tous un support technique gratuit, il faut alors payer à chaque appel et un temps d'appel prolongé ne fait qu'augmenter la facture. De plus, il est souvent peu coûteux de passer de l'avant-dernière version à la dernière, mais plus on prend du retard, plus la mise à jour devient coûteuse. La mise à jour peut donc servir également à réduire le nombre d'anciennes versions du logiciel disponible sur le marché. Les modèles conçus par les économistes à ce sujet seront étudiés en détail dans la revue de littérature qui suit.

La mise à jour des logiciels pose plusieurs questions importantes pour une entreprise. Par exemple, étant donné l'innovation technologique de la nouvelle version, comment fixer le prix de l'ancienne et de la nouvelle version? On peut également se demander qui achètera la nouvelle version étant donné que l'ancienne version est également disponible ? Dans ce mémoire, nous proposons un modèle qui tient compte de la présence de deux versions d'un même logiciel, celui-ci ne différant que par la qualité. Nous tentons d'expliquer quel type d'individus serait prêt à payer pour l'ancienne version, la nouvelle version et quels sont ceux qui passeront de l'ancienne à la nouvelle version. Le modèle proposé, de même que les hypothèses de base, seront exposés dans le second chapitre de ce mémoire.

Un modèle descriptif sera utilisé étant donné que les données sur ce sujet sont plutôt rares. Les compagnies ne font qu'annoncer des pertes afin d'obtenir des compensations du gouvernement, et les associations se contentent de faire la morale aux pirates. On a donc compilé une base de données de logiciel de micro-ordinateurs de type PC et Macintosh[3] de 1981 à ce jour[4]. De ces données, seul le prix et le numéro de mise à jour ont pu nous servir d'indicateurs (puisque nous ne nous servons pas de ces données, nous ne reproduisons pas ces indicateurs). Un écart important dans le prix et/ou le numéro de mise à jour indique une amélioration considérable du logiciel. Nous n'avons conservé que les logiciels de traitement de textes, les bases de données et les chiffriers électroniques[5]; ce sont les trois principales catégories d'utilisation sur micro-ordinateur comme l'illustre le tableau suivant[6]. On remarque cependant que le pourcentage total de l'utilisation des trois catégories au tableau I diminue car d'autres utilisations sont introduites chaque année.

Tableau I : Pourcentage d'utilisation de trois applications de logiciels

| Année | Pourcentage de logiciel utilisé pour le traitement de texte. | Pourcentage de logiciel utilisé comme chiffrier électronique. | Pourcentage de logiciel utilisé comme les bases de données. | Total du pourcentage |
|---|---|---|---|---|
| 1987 | 23% | 19% | 19% | 61% |
| 1988 | 17% | 16.5% | 12% | 45.5% |

Ces trois catégories possèdent plusieurs marques que l'on peut suivre dès les débuts de l'industrie. Malheureusement, cette mini-fresque historique, ne nous permet pas, à elle seule, d'établir une tendance ou un comportement général. On observe que des tactiques isolées, par exemple lorsque la version 2.0 du chiffrier Quattro Pro[7] a

3 Le Macintosh n'a été introduit qu'en 1984, il en va de soi que pour celui-ci les données commencent en 1984.

4 Notre principale source d'information fut les magazines. Ainsi, Bytes, PC World, MacWorld et Personnal Computing forment notre principal source d'information.

5 Le chiffrier électronique permet de manipuler des rangées et des colonnes de chiffres afin d'éffectuer des opérations sur celles-ci. La base de données contient de l'information qui peut être consulté de façon sélective. Par exemple, on peut chercher ceux qui gagnent plus de 50,00$ et qui ne payent pas d'impôts...

6 Source: Personnal Computing, Octobre 1987 p.216 et Octobre 1988 p.192D.

7 De Borland Internationnal.

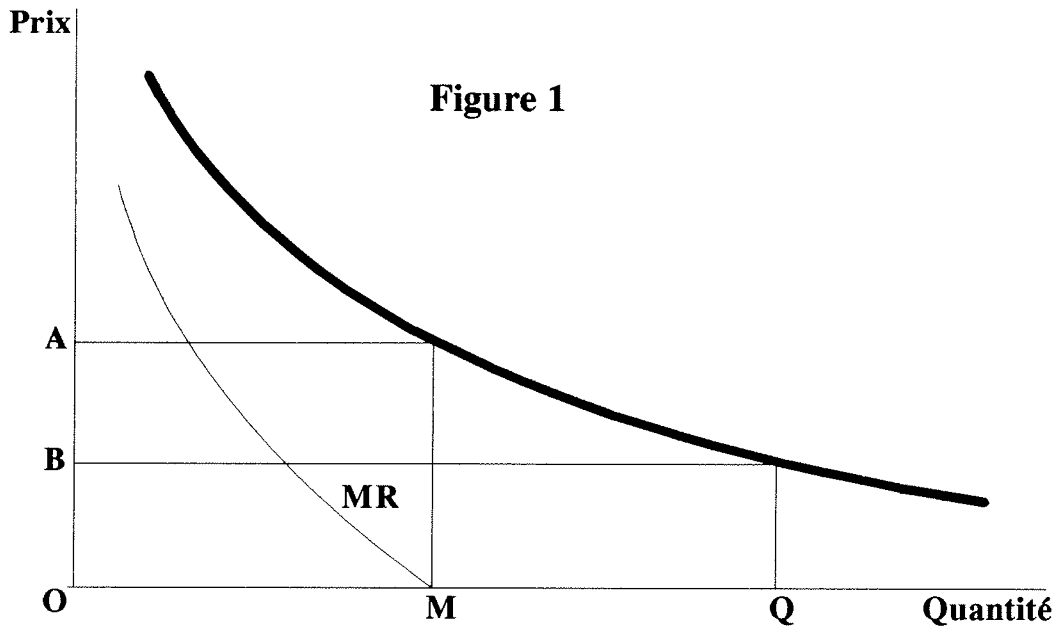
pris d'assaut la part de marché de Lotus, celle-ci a répliqué en lançant deux versions de Lotus 123 sur le marché, un bas de gamme (version 2.2) et un haut de gamme (la version 3.0). De façon plus générale, on peut remarquer que les grands noms de l'industrie sortent presqu'annuellement une nouvelle version de leur logiciel. Cette remarque peut également être faite pour les manuels scolaires. Cependant, nous nous fions au modèle pour tirer des conclusions plus globales et générales sur les stratégies des entreprises.

# CHAPITRE I : REVUE DE LITTÉRATURE

Dans ce chapitre nous tentons d'effectuer un survol des articles à caractère économique dont le sujet ou le traitement formel se rapproche du nôtre. Aucun auteur ne traite explicitement de la tarification de la version améliorée de logiciels. Mais certains sujets discutés par les économistes se rapprochent analytiquement de notre domaine. Ainsi, plusieurs économistes se sont intéressés au problème d'un monopole vendeur d'un bien durable. En effet, celui-ci génère un marché de seconde main à cause de la nature durable du bien et par conséquent ce marché échappe à l'emprise du monopole. Que devrait faire le monopole pour conserver son pouvoir de marché ? Ce problème se rapproche de celui du producteur de logiciels qui veut savoir comment inciter les consommateurs à ne pas se contenter d'anciennes versions.

Dans cette littérature, il faut d'abord distinguer deux cas possibles pour le monopole: soit louer, soit vendre le bien durable. Dans le cas où il y a location, la présence d'un marché de seconde main ne nuit pas au profit du monopole. C'est Swan [1970] qui montra le premier que la présence d'un marché de seconde main, en soi, ne nuit pas au profit, car si le bien durable est loué, la firme conserve son contrôle sur le marché puisqu'un produit loué ne peut pas être vendu. Mais son modèle s'éloigne beaucoup du nôtre et fait appel à des modèles mathématiques trop approfondis pour les besoins de notre exposé. Il y a des façons plus simple d'expliquer pourquoi un monopole qui vend un bien durable peut rencontrer des problèmes lorsqu'un marché de seconde main existe. Nous élaborerons donc le texte de Coase [1972] pour comprendre pourquoi louer un bien durable est préférable à le vendre, lorsqu'un marché de seconde main existe et échappe au contrôle du monopole.

**Figure 1 :** Détermination du prix d'un monopole




L'exemple de Coase va nous permettre de constater qu'un monopole peut avoir intérêt à "tromper" les consommateurs si un marché secondaire existe. Une firme possédant toutes les terres du pays se retrouverait en situation de monopole. La totalité des terres à vendre est représentée par OQ sur la figure 1. En économie, il est bien connu qu'en l'absence de coûts, un monopole maximise ses profits en chargeant le prix correspondant au revenu marginal nul, lorsque MR atteint le point M sur la figure 1. En reprenant la figure 1 de Coase, on voit que ceci revient à dire que le monopole vend la quantité OM au prix OA. Mais le monopole dispose encore de MQ terres qu'il pourrait vendre après avoir vendu la quantité OM. C'est ici que le monopole pourrait "tromper" les consommateurs. Il pourrait recommencer l'opération à plus petite échelle. Il chargerait donc un autre prix de monopole sur la quantité qui reste. Il pourrait recommencer jusqu'au moment où son profit économique serait nul; c'est-à-dire qu'il arrêterait à la quantité OQ. Les consommateurs seraient désolés d'apprendre que les terres qu'ils ont achetées au prix OA ne valent plus que OB ! La présence du second marché a permis au monopole d'obtenir des profits supplémentaires au dépend des consommateurs de première période. Cependant, si les acheteurs éventuels de première période anticipent correctement la stratégie du monopole, alors personne ne sera prêt à payer plus que OB, le prix que la firme obtiendrait si elle vendait toutes les terres d'un seul coup. Pour que les consommateurs acceptent d'acheter les terres au prix OA, il faut que la valeur de leur terre ne se déprécie pas suite aux ventes subséquentes du monopole. C'est ici que l'on introduit l'idée de location; si les consommateurs louent les terres, c'est le monopole qui absorbera les pertes associées à une baisse de prix, puisqu'une baisse de ces prix diminuerait ses profits. Cet exemple illustre bien le problème de la présence d'un marché de seconde main. La tentation de vendre moins cher existe toujours lorsqu'un monopole à l'occasion de revendre en seconde période, ou dans notre cas, de vendre une seconde version du logiciel par la suite. Si la firme peut louer son logiciel, la tentation est vite éliminée. Cependant, lorsqu'une firme n'a pas le contrôle de son produit une fois aux mains du client, comme dans le cas des logiciels, la firme préfère vendre le produit.

Puisque nous nous préoccupons de logiciels, nous ignorerons les modèles basés sur la location. Comme nous avons mentionné dans notre introduction, le marché du logiciel s'inspire d'autres industries, telle celle du livre, pour établir ses stratégies. Nous allons examiner comment les économistes ont traité le problème du marché des livres usagés. Miller [1974] et Benjamin & Kormendi [1974] s'entendent sur le fait que les maisons d'édition consacrent parfois beaucoup d'efforts pour limiter le marché des livres usagés. Nous élaborerons plus sur le texte de Benjamin & Kormendi car celui-ci traite plus à fond le sujet.

Benjamin et Kormendi reconnaissent que le marché de seconde main peut avoir un effet négatif aussi bien que positif sur les ventes du produit durable neuf. D'un côté, les versions usagées peuvent être des substituts parfaits pour les produits neufs et ils réduisent ainsi les ventes du monopole au profit du marché des biens usagés. Le monopole aurait donc intérêt dans ce cas, à restreindre le marché de seconde main. Par contre, la possibilité de pouvoir revendre le produit neuf à un marché secondaire peut inciter davantage à acheter le produit neuf puisque celui-ci possède maintenant une valeur de revente supplémentaire. Dans ce cas, restreindre le marché secondaire ne ferait que nuire au monopole puisqu'il affecterait négativement ses ventes du produit neuf. Il est donc important de savoir quelle relation existe entre le produit neuf et le produit usagé. L'article de Benjamin et Kormendi tente justement d'étudier la relation entre les deux marchés.

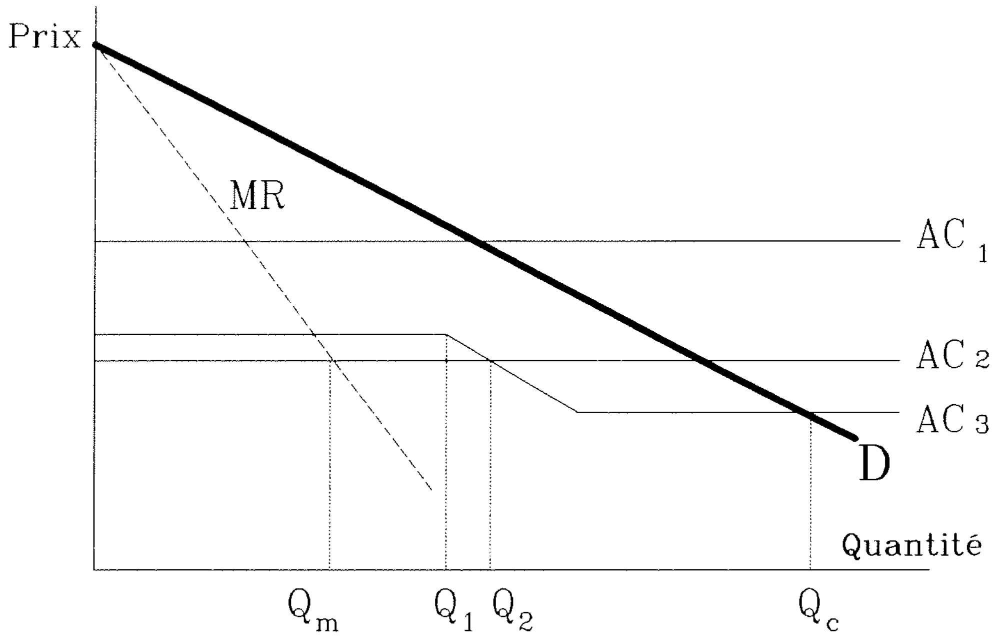
Ces auteurs étudient plusieurs cas afin d'en tirer un résultat général. Ils prennent d'abord un marché isolé où les deux biens, l'un nouveau et l'autre usagé, sont parfaitement substituables entre eux. Pour simplifier leur étude, les auteurs supposent également qu'il n'y a que deux périodes. Ainsi, si un individu veut acheter un bien B en première période, il peut le revendre en deuxième période. Puisque les individus tiennent compte de la possibilité de revente dans leur prix d'achat, il s'en suit que la présence de biens usagés ne réduit pas le pouvoir de monopole de la firme. Ceci est d'autant plus vrai si le monopole peut louer sur le marché des biens uagés et des biens neufs .

Maintenant qu'arrive-t-il si la firme réussit à faire passer une loi interdisant la revente de produits usagés ? Cette législation affecterait sûrement le comportement de la firme puisque le marché est maintenant redéfinit. Dans ce modèle à une seule période, la conclusion n'est plus aussi simple. Il faut maintenant examiner l'effet de trois facteurs: les coûts, l'effet de substitution et la valeur ajoutée. Évidemment, si les coûts baissent suite à cette législation, la firme désirera maintenir la législation en place. De même, si tous les consommateurs sont prêts à changer leur achat de biens usagés pour des biens neufs, (l'effet de substitution est important), alors le monopole sera favorisé par la législation. Dans ce cas, la prohibition du second marché entraîne automatiquement un mouvement des clients vers le premier marché. Ce transfert en première période ne peut qu'avantager le monopole puisqu'il s'agit de gens qui, au lieu de se contenter de biens usagés, achètent directement du monopole. Cependant, la valeur actualisée peut baisser suite à la législation. Il se peut que les consommateurs prennent compte, dans le prix d'achat, de la possibilité de pouvoir revendre en seconde période. Dans ce cas, l'abolition du second marché signifie que les consommateurs sont prêts à payer moins cher pour le produit neuf. La prohibition du second marché est alors désavantageuse. Le problème pour la firme est de savoir comment les trois facteurs vont être affectés par une interdiction de vendre en seconde période. Plus important encore, quel facteur dominera et guidera la décision de la firme ? En représentant graphiquement ces trois forces, les auteurs Benjamin et Kormendi trouvent un cas où une firme concurrentielle aura intérêt à interdire le marché de seconde main. On peut toujours trouver des cas où la firme aura intérêt à bannir le marché de seconde main. Cependant les auteurs ne peuvent pas trouver de régles précises pour lesquelles la firme sera favorisée par une abolition du marché de seconde période. On remarque aussi que les mêmes auteurs n'ont pas affirmé que la firme allait intervenir, seulement qu'il y avait possibilité même pour une firme en concurrence d'intervenir en restreignant le marché de seconde période.

Malgré les travaux des auteurs ci-haut cités, aucun article n'a pu établir de façon certaine et sans équivoque qu'une relation existe entre le monopole et la durabilité. On a cependant pu trouver un cas où limiter la durabilité était avantageux. De plus, on a pas pu trouver des règles de décisions nous permettant de dire quand il fallait restreindre la durabilité d'un bien. Une relation entre la durabilité et la structure de marché reste à définir. Pourquoi un monopole veut restreindre son marché de biens usagés ? Liebowitz [1982] tente de mieux définir les liens entre la structure de marché et la durabilité. L'auteur insiste sur l'analyse des biens neufs et usagés pour apporter une intuition supplémentaire au modèle. Ceci nous intéresse particulièrement puisqu'analytiquement parlant, le problème de la mise à jour et le problème des biens neufs et usagés sont semblables.

La discussion qui suit sur la durabilité va se baser sur l'article d'Hirshleifer [1971] disant qu'un monopole ne retiendra pas une innovation technologique si celle-ci est économiquement rentable. Pour reprendre l'idée d'Hirshleifer sur un monopole fabriquant des ampoules électriques, on va supposer que les individus ont une demande pour l'éclairage provenant de l'ampoule et non pour l'ampoule elle-même. On va prendre D pour la demande de service d'éclairage et MR pour le revenu marginal. On va également examiner deux types d'ampoules. On considère une ampoule qui dure une année avec un coût moyen de l'industrie de $AC_1$. Et on considère également une autre ampoule d'une durée de deux ans avec un coût moyen de l'industrie de $AC_2$.

**Figure 2:** Influence des coûts moyens sur la quantité produite




On remarque que $AC_2$ reste toujours inférieur à $AC_1$; c'est-à-dire qu'une ampoule qui dure deux ans coûte moins cher à produire que deux ampoules qui durent une année chacune. Lorsqu'on double la vie d'une ampoule, on a tendance à croire que les prix et les quantités doublent également. Mais on oublie alors ce qui arrive à la pente. La fonction de demande est deux fois plus haute mais pour des quantités deux fois moins importantes. La fonction de demande devient donc plus verticale. Produire des ampoules coûte toujours aussi cher, mais fournir le service en éclairage est rendu moins cher avec les nouvelles ampoules. On suppose que produire une ampoule qui dure deux ans et une ampoule qui ne dure qu'une année coûtent autant à produire. De telle sorte qu'en produisant deux fois moins d'ampoules on arrive à offrir le même service d'éclairage. Si l'on dépensait autant qu'avant pour les ampoules, on pourrait satisfaire une demande deux fois plus élevée ! Mais la demande d'éclairage ne change pas pour autant. La firme dépense donc deux fois moins avec les nouvelles ampoules pour fournir le même service, d'où $AC_2 < AC_1$. Si le monopole tient à minimiser ses coûts, il n'empêchera pas l'ampoule de deux ans de longévité d'aller sur le marché. La firme choisira toujours le produit le plus efficace tant que les courbes de coûts moyens ne s'entrecoupent pas. Ceci est vrai quelque soit la structure du marché. Le monopole produit moins qu'une industrie compétitive mais ici, la quantité ne joue pas sur le choix de durabilité. Cette construction géométrique permet à Liebowitz de montrer que tant que les courbes de coûts moyens ne se coupent pas, il y a indépendance entre la structure de marché et la durabilité. En fait, la firme choisira toujours de produire le bien le moins coûteux, qu'elle soit en situation de monopole ou de concurrence.

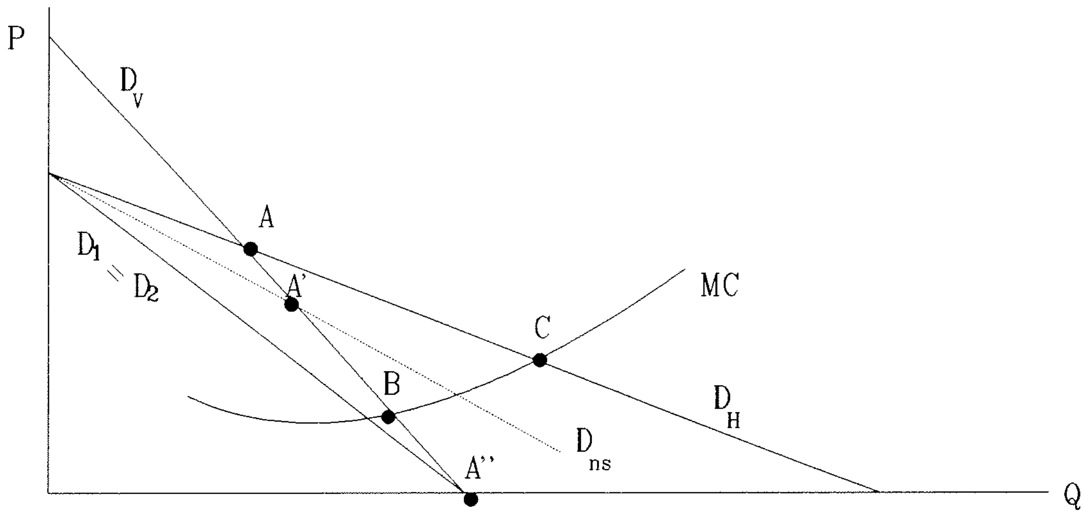
Mais qu'arrive-t-il lorsque les courbes de coûts moyens se coupent ? On sait qu'un monopole et une industrie concurrentielle ne produisent pas la même quantité. L'un peut produire avant que les courbes ne se croisent, et l'autre après que celles-ci se soient croisées. Dans ces circonstances, la structure de marché (monopole ou firme concurrentielle) peut affecter la durabilité. La condition d'indépendance ne tient donc plus. Prenons par exemple, une courbe $AC_3$ de coûts moyens de l'industrie construite à partir de $AC_1$ et de $AC_2$. On remarque, à la figure 2, que la courbe $AC_3$ est inférieure à $AC_2$ pour un Q plus grand que $Q_2$. Si l'on considère $AC_1$, $AC_2$ et $AC_3$ comme étant différentes possibilités de durabilité et D comme la demande du marché alors, $Q_c$, l'intersection de $AC_3$ avec D, représente la quantité produite en concurrence parfaite. De même, $Q_m$, l'intersection de $AC_2$ avec MR, représente la quantité produite par un monopole. Avec le monopole on obtient une diminution de durabilité. Avec le marché concurrentiel on obtient une augmentation de la durabilité puisque l'on opte pour l'ampoule qui dure plus longtemps. Ici, la structure de marché influence la durée de vie du produit. La conclusion au sujet du monopole n'est même pas robuste, $AC_2$ aurait pu représenter des ampoules de quatre ans de longévité. On aurait alors une augmentation de longévité. Par conséquent, il ne semble donc pas exister de lien évident entre le choix de durabilité et la structure de marché.

On n'a pas de problèmes lorsqu'on s'assure que les courbes de coûts moyens ne s'entrecoupent pas. Plusieurs ont donc supposé un taux de rendement constant pour empêcher que les courbes de coûts ne s'entrecoupent. Par contre, lorsque le taux de rendement n'est plus constant on ne sait pas si les courbes de coûts s'entrecoupent ou pas. Pour obtenir l'indépendance entre la structure du marché et la durabilité on peut également présumer une demande pour la durabilité en soi. Mais cette dernière condition n'est pas suffisante (Swan [1972]). On doit également supposer que les courbes de coûts moyens s'entrecoupent avant que ne survienne l'équilibre du monopole ! Ceci est une supposition assez forte puisque nous n'avons aucune indication pour ou contre cette situation. Schmalensee [1979] propose d'autres alternatives pour obtenir une relation claire et non-équivoque entre la structure de marché et la durabilité. Mais analytiquement, les modèles, à eux seuls, ne tranchent pas la question. Pour résoudre ce débat, il faut se servir de l'intuition économique derrière les modèles de biens neufs et usagés.

Il faut tout d'abord prendre note de quelques observations analytiques illustrées à la figure 3. La demande de première période est représentée par $D_1$. La droite $D_2$ représente la demande de seconde période. Lorsqu'un marché pour biens usagés existe, la demande devient $D_V$, la somme verticale de $D_1$ et $D_2$. La somme verticale s'effectue lorsque le prix de revente du bien usagé est pris en considération à l'achat du bien neuf. Si l'utilisation en seconde période est rendue impossible suite à une législation, une partie de ceux qui consommaient en seconde période, a maintenant consommer en première période. Ce déplacement est représenté par $D_{NS}$. Par contre, si les gens sont indifférents entre consommer en première ou seconde période alors le monopole fait face à la somme horizontale de $D_1$ et $D_2$ soit $D_H$. À l'intersection de $D_H$ et $D_V$, au point A, le monopole sera indifférent entre bannir le marché de seconde main ou de le maintenir. Si MC est le coût marginal d'une industrie compétitive alors

B est l'équilibre lorsque le marché de seconde main existe, et C lorsque celui-ci n'existe pas. Au point B, la firme réussit à vendre son produit. Si une firme réussit à faire des profits et qu'une occasion permet à la firme d'augmenter son profit sans que celui-ci soit nécessaire à la viabilité de la firme, alors ce profit supplémentaire constitue une rente. La rente permet de distinguer les firmes qui font des profits plus important que le profit économique nul.

**Figure 3:** Influence du degré de substituabilité sur la durabilité du produit

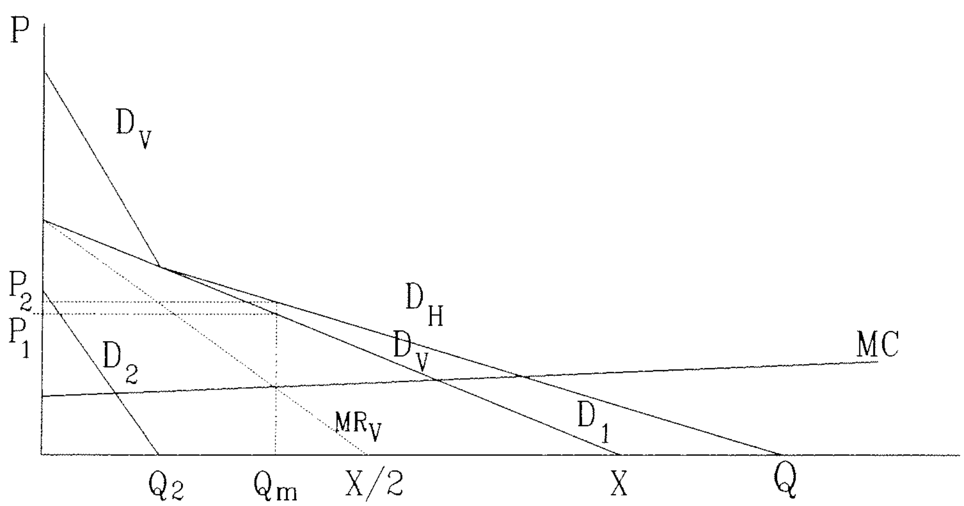



Dans ce modèle Liebowitz montre que monopole et firmes concurrentielles désireront réduire la durabilité de leur bien, cela même si les coûts associés à la durabilité sont nuls. À l'aide de la figure 3, nous allons expliquer pourquoi une firme concurrentielle voudra réduire la durabilité de son produit. Notons d'abord que la droite $D_1 = D_2$ représente la demande pour le bien usagé pour l'une ou l'autre des deux périodes. Lorsque le marché de biens usagés existe, la fonction de demande pour tous les biens, usagés et neufs, est donnée par $D_V$. L'augmentation du prix reflète la possibilité de revendre en seconde période. Lorsque le marché de seconde main est interdit la fonction de demande devient $D_H$ si tous ceux qui consommaient en deuxième période décident de rediriger leur consommation vers la première période. Si seulement une partie des consommateurs change pour le produit neuf lors de l'abolition du second marché, la droite $D_{NS}$, qui se situe entre $D_1=D_2$ et $D_H$, représente alors la nouvelle fonction de demande. Le point A marque l'intersection des droites $D_V$ et $D_H$. A gauche du point A, la droite $D_V$ permet d'atteindre le meilleur prix, de telle sorte que la firme préférera conserver le marché de seconde main. Par contre, à droite du point A, la droite $D_H$ domine les autres droites et offre donc le meilleur rendement et la firme préfèrera donc abolir le marché de seconde main. Si MC représente la fonction de coût marginal, alors B représente le point d'équilibre pour un marché en concurrence parfaite. Le point B étant à la droite de A, le marché en concurrence parfaite préfèra donc éliminer le marché de seconde main.

Examinons maintenant si le monopole bénéficie de l'élimination du marché de seconde main. Nous allons explorer différentes possibilités de substituabilité entre le marché des biens neufs et celui des biens usagés. Premièrement, supposons que la consommation en première et seconde période ne dépende pas l'une de l'autre. Le monopole ne voudra pas éliminer le marché de seconde main car il perdrait inutilement une source de revenu. Les deux marchés étant indépendant, rien nous assure que les consommateurs changeront pour le premier marché si le second est élliminé. Pour compenser toute perte éventuelle, le monopole ne pourra pas augmenter le prix du marché des produits neufs puisque les consommateurs iraient vers le marché de seconde période. Le monopole ne voudra également pas bannir le marché de seconde main lorsque le marché de première et seconde période sont parfaitement substituables. Pour illustrer ceci, reprenons l'exemple du monopole qui produit des ampoules. Dans le présent cas, il se soucie uniquement du service en éclairage. La firme préférera vendre tout en première période plutôt que d'étaler ses ventes en deux périodes. Ainsi, il préférera vendre 20 ampoules à 2$ qui durent deux ans en première période et celles-ci pourront être revendues à 1$ en seconde période. L'alternative étant de vendre 10 ampoules à 1$ qui dure un an en première période et 10 autres ampoules à 1$ en deuxième période lorsque le marché de seconde main n'existe pas. Cette idée rejoint celle d'Hirshleifer sur l'ampoule d'un an contre celle qui dure deux ans. C'est-à-dire que la firme préférera celle qui dure plus longtemps. Ceci revient à dire qu'elle préfère ne pas vendre elle-même aux deux périodes. Lorsque le marché de seconde main n'existe pas, la firme doit donc fournir elle-même aux deux marchés. Le monopole n'aura pas intérêt à bannir le second marché.

On peut également se demander si le monopole voudra bannir le marché de seconde main lorsque la substitution entre neuf et usagé est imparfaite ? Dans la figure 3, puisque $D_V$ représente la demande en présence d'un marché de seconde main et puisque cette position est préférable à $D_H$ ou à $D_1$, on aurait tendance à croire que le cas intermédiaire $D_{ns}$ inciterait également la firme à éliminer le second marché. Mais nous verrons plus tard pourquoi ceci n'est pas toujours le cas.

**Figure 4 :** Demande du bien neuf et du bien usagé



Dans la figure 4, $D_1$ représente la demande pour le bien neuf et $D_2$ pour le bien usagé. Remarquons que $D_2$ est construit de telle façon que son point d'intersection $Q_2$ se situe à moins de la moitié de X, où X est l'intersection de $D_1$ avec l'abscisse. Si $D_1$ est la seule fonction de demande, alors le monopole produit à $Q_m$, où $Q_m$ est l'intersection du revenu marginal (MR) avec le coût marginal (MC). Par contre, lorsque le marché de seconde main existe, la demande pour le monopole est $D_V$, la somme verticale de $D_1$ et $D_2$. Comme pour la figure 3, lorsque le marché secondaire est aboli, la demande du monopole se situe entre $D_1$ et $D_H$. Il est donc clair que si le monopole vend la quantité $Q_m$, alors il aura intérêt à abolir le marché secondaire puisqu'il pourrait vendre pour plus que $P_1$ (il pourrait vendre la même quantité au prix $P_2$). On peut donc conclure que lorsque la demande $D_2$ à une intersection avec l'abscisse en une petite quantité et avec un prix élevé, le monopole souhaitera alors restreindre le marché de seconde main. On peut se demander à juste titre pourquoi y a-t-il un cas où le monopole veut restreindre le marché secondaire alors que les deux cas extrêmes (substitution parfaite ou indépendance entre les deux marchés) n'offrent pas cette éventualité! Liebowitz nous fait remarquer que dans les deux cas extrêmes, les deux populations ont la même taille ($D_1 = D_2$). C'est cette égalité des deux populations qui est responsable du résultat et non le degré de substituabilité. Les modèles utilisés sont donc limités car ils ne permettent pas la variation relative des deux populations.

Liebowitz souligne que même si une firme en industrie compétitive ne veut pas à elle seule réduire la durabilité de son produit, l'industrie dans son ensemble pourrait trouver avantageux une réduction de la durabilité. Si le bien usagé possède une valeur de revente positive, les biens usagés de plus longue longévité des autres firmes seront plus hautement évalués. Ainsi, la firme qui réduit la durée de vie de son produit perdrait des clients aux profits des autres firmes. De plus, un monopole a moins de chance d'être en faveur d'une restriction du marché de seconde main. Le monopole produisant moins qu'une industrie en concurrence, il y a moins de chance que celui-ci se situe à droite du point A de la figure 3. Par conséquent, on peut avoir le cas où un monopole est socialement plus avantageux que des firmes en concurrence!

L'article de Liebowitz est consistant avec la littérature en général car il conclut qu'un monopole de même qu'une industrie concurentielle, ont tendance à réduire la durabilité de leur produit. Le résultat est moins ambigu que les autres travaux, en ce sens que la comparaison entre monopole et l'industrie se fait par rapport à un point unique sans qu'il n'y ait d'exceptions de part et d'autre.

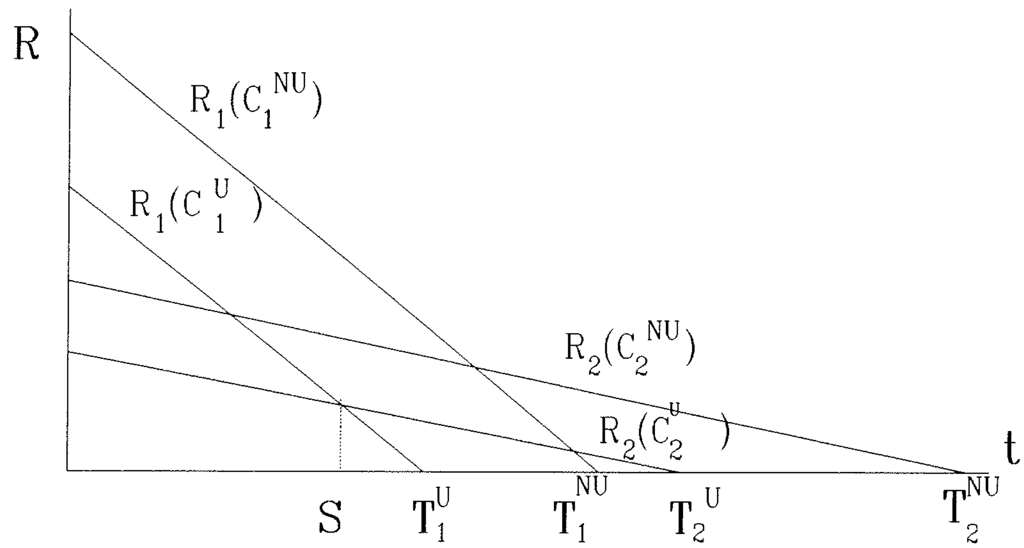
L'article de Bond [1986] prend compte des critiques de Liebowitz dans la formulation de son modèle. Cependant, il y a, une modification importante à ce modèle: la période à laquelle le bien neuf est transigé est déterminée par le modèle. Le modèle prend également soin de déterminer lui-même le degré de substituabilité entre les biens neufs et usagés. Deux types de consommateurs, un ayant une préférence pour les biens neufs et l'autre pour les biens usagés, permettent au modèle les choix ci-haut mentionnés. On suppose également que la qualité du service offert par le bien décroît avec l'âge de celui-ci. Mais la période à laquelle un consommateur délaisse le bien et le transige sur le marché des biens usagés est déterminée par une variable de choix propre à chaque consommateur. De plus, on fait l'hypothèse que le déclin de la qualité du service se ressent moins fortement auprès d'un des deux types de consommateurs de telle sorte qu'en présence d'un marché usagé, le groupe cible s'oriente vers la consommation de biens usagés. Il est important de noter que le modèle sélectionne lui-même la période de transaction du bien neuf. Cette dernière extension est importante car l'auteur montrera que la présence d'un marché secondaire affectera la période de transaction du bien neuf.

Enfin, cet article étudie, lui-aussi, si un marché compétitif cherchera à bannir ou non un marché de seconde main. Cependant, contrairement aux autres articles, l'ouverture du marché de seconde main n'équivaut pas à augmenter la durée de vie du bien durable. Au contraire, l'ouverture du marché secondaire résulte en une répartition uniforme de la durée de vie du bien durable puisque tous les biens les plus usagés seront détenus par ceux dont leur préférence les incitent à se procurer les plus vieux biens. Cette répartition uniforme de la durée de vie, en présence du second marché, se situe entre celle des deux types d'individus lorsque le marché secondaire n'existe pas. Ainsi, l'âge moyen des biens durables pourrait baisser ou augmenter en introduisant le marché de seconde main. Le modèle de cet article permet toutefois d'étudier les effets d'une augmentation des coûts sans pourtant éliminer complètement le marché de seconde main. On pourra donc voir qu'une taxe sur la valeur ajoutée n'a pas le même effet qu'une taxe unitaire. Par exemple, la taxe sur la valeur ajoutée incite les gens à retarder leur période d'achat.

L'auteur travaille dans un modèle où les consommateurs louent les services d'un bien durable. Cependant ce modèle de location peut très bien être remplacé par un modèle dans lequel les biens durables sont vendus. Le loyer serait alors ce que le propriétaire du bien neuf reçoit lorsqu'il le revend. La durée de vie des biens durable n'est pas pré-déterminée; on ne connaît pas au moment de la fabrication la durée de vie du bien. Aussi les profits générés par ces biens durables décroissent avec l'âge. On considère deux types de détérioration: celle des matières premières, les intrants, et celle du produit fini, l'extrant.

On peut maintenant caractériser les deux types de consommateurs. Le consommateur de type 1 préfère consommer tôt. Le consommateur de type 2 préfère consommer plus tard. De telle sorte que le consommateur de type 2 aura tendance à consommer des biens usagés. Si la détérioration provient des intrants, la période optimale de remplacement pour une firme de type i est donnée par: $T_i = T_i(C_i)$ où $T'_i > 0$, $i=1,2$ et $C_i$ est le coût de production de la firme i. Dans la figure 5, la période optimale de remplacement est représentée par les points d'intersections des courbes de location avec l'axe horizontal.

**Figure 5:** Détermination de la durée de vie d'un produit qui se détériore.




Par contre, si la détérioration est due au produit fini, l'extrant, alors un marché de seconde main, peut se développer seulement s'il existe plusieurs marchés où le niveau de détérioration requis diffère d'une industrie à l'autre. Et nous obtenons alors $T'_i = 0$. Pour permettre l'analyse qui suit on suppose deux courbes d'indifférences âge-location lesquelles ne peuvent se croiser qu'en un seul point. Une courbe d'indifférence âge-location représente les différentes combinaisons possibles de machines neuves et usagées qui permettent de générer la même rente pour un coût d'output donné.

On va considérer deux types d'équilibres, un dans lequel celui qui loue peut le louer qu'à un seul type de consommateur, et l'autre équilibre où celui qui loue, le fait aux deux types de consommateurs. Cette dernière situation est équivalente au cas où l'on admet l'existence du marché de seconde main lorsqu'on vend le produit.

À partir de ce modèle, et l'aide de la figure 5, Bond dégage trois résultats de son texte. Premièrement, comme l'indique la figure 5, $T_2^{NU} \geq T_2^U \geq T_1^{NU} \geq S$ (le terme NU indique qu'il n'y a pas de marchés usagés "no used market" et le terme U dénote le cas où le marché usagé existe). La première inégalité, $T_2^{NU} \geq T_2^U$ vient assez naturellement si l'on remarque que les coûts baissent lorsque le marché de seconde main est toléré, soit $C^U{}_2 < C^{NU}{}_2$. Ceci revient à dire que ceux qui préfèrent consommer plus tard reportent leur consommation lorsque l'existence d'un marché de seconde main est permis. Un résultat moins intuitif, $T_2^U \geq T_1^{NU}$ , nous indique que même si le consommateur de type 1 (qui a une préférence pour le présent) est le seul à avoir accès au marché de seconde main, le consommateur de type 2 consommera tout de même plus tard. Finalement, comme pour la première inégalité, puisque $C^U{}_1 < C^{NU}{}_1$ on a $T_1^{NU} \geq S$. Même si le consommateur de type 1 préfère consommer tôt, il reportera tout de même, sa consommation plus tard lorsque la présence du second marché le rend possible.

Un second résultat provient de certaines taxes qui peuvent réduire le marché de seconde main sans l'éliminer. Une taxe unitaire a pour effet de réduire la demande pour de nouvelles machines. Par contre, une taxe sur la valeur ajoutée a un effet ambigu, elle peut augmenter comme elle peut diminuer la demande pour de nouvelles machines. Enfin, le troisième résultat, nous affirme que tant que la courbe d'indifférence âge-location $R_i(t,C_i)$ sera linéaire en t et que $D_i$ sera parfaitement inélastique, on aura $N^U < N^{NU}$. Par conséquent, la demande pour les biens neufs, lorsqu'un marché usagé existe, est inférieure à la demande de biens neufs lorsque le marché de seconde main n'existe pas.

Ce dernier article apporte donc plusieurs résultats pour le marché compétitif. Lorsqu'une période unique de remplacement existe, l'introduction d'un marché de seconde main fera baisser le coût du capital du service offert. Ce nouveau marché permettra une répartition uniforme de l'âge de remplacement. Ce nouvel âge moyen de remplacement sera entre les deux âges de remplacement que rencontrent les deux types d'individus en l'absence du marché secondaire. L'introduction d'une taxe unitaire réduit la demande du nouveau produit. La taxe sur la valeur ajoutée offre de façon ambiguë les deux possibilités. Enfin, Bond offre sa réponse sur l'effet d'abolir totalement le marché de seconde main pour une industrie en concurrence. L'abolition du second marché a deux effets: une réduction de la demande du bien durable dans son ensemble et une modification de l'âge moyen de remplacement.

Enfin, nous arrivons à l'article de French [1988], qui suit la philosophie traditionnelle, c'est-à-dire qu'il suppose que les consommateurs ne sont pas intéressés à la durabilité elle-même mais au service offert par la firme. Celle-ci choisit d'offrir le service qui offre le plus grand écart entre le revenu actualisé et les coûts; la durabilité n'est alors qu'une question de minimisation des coûts. Le texte de French discute donc des conditions pour lesquelles il est rationnel pour un monopole de ne pas permettre l'augmentation de la durabilité lorsque le coût d'augmentation de la durabilité est nulle. L'auteur identifie quelques forces pouvant négativement affecter la durabilité au point de vue social. En ce qui nous concerne, on retient particulièrement celle qui mentionne qu'il peut être difficile pour un vendeur de surveiller et appliquer des arrangements contractuels. Cet article présente donc un modèle simple de deux périodes, accompagné d'un exemple montrant que la fonction d'utilité d'un acheteur peut être telle que des contrats sans coûts peuvent être nécessaires pour rendre la planification de la durabilité efficace.

L'argument principal est que si un bien usagé ne peut pas être loué facilement, la firme doit vendre ce bien durable. Mais si l'acheteur ne respecte pas les arrangements contractuels alors la firme exigera que le consommateur solde son dû au moment de l'acquisition. Par contre, si le vendeur et l'acheteur n'ont pas les mêmes possibilités d'accès au marché des capitaux, la fonction d'utilité des acheteurs peut être faite de telle sorte que ceux-ci ne sont pas prêts à payer suffisamment le vendeur contre toute perte éventuelle que celui-ci pourrait encourir suite à une augmentation de la durabilité du bien.

L'auteur conclu donc que si l'acheteur et le vendeur du bien durable peuvent s'entendre sur un contrat qui peut être appliqué sans coût, alors il n'y a rien qui empêche l'entrée en vigueur du contrat et l'amélioration de la durabilité. Comme le contrat est sans coût, aucun coût supplémentaire n'est engendré. Cependant si le vendeur est obligé de demander un paiement complet dès la réception du bien, et que les deux parties n'ont pas le même accès au capital, alors il n'y a rien qui empêche le monopole de supprimer une invention pouvant augmenter la durabilité même s'il n'encourt aucun coût. En pratique ceci diffère de ce que dit Hirshleiffer lorsqu'il mentionne qu'un monopole ne retiendra pas les innovations.

Ce survol de la littérature concernant la durabilité d'un produit neuf et l'influence des biens usagés semble suggérer que plusieurs auteurs croient que les firmes en général ont tendance à supprimer la durabilité de leur produit et à ainsi réduire le marché de seconde main. Même si l'approche diffère souvent, la littérature des années soixante-dix semble fortement suggérer cette conclusion surtout en ce qui concerne l'industrie du livre. Le modèle qui va suivre ne diffère pas complètement de ceux de Benjamin et Kormendi et de celui de Liebowitz en ce sens que les modèles se situent dans un monde à deux périodes et où les populations s'additionnent horizontalement ou verticalement, dépendemment que le marché de seconde main existe ou pas.

## CHAPITRE II : LE MODELE

### A - Motivation du problème

Lorsqu'on feuillette une revue spécialisée d'informatique, on remarque que celle-ci est remplie de publicités. Dans ces publicités, on retrouve plusieurs annonces de nouveaux logiciels, mais également des versions améliorées de logiciels déjà présents sur le marché. On peut alors se demander si la compagnie qui lance un nouveau produit et celle qui émet une version améliorée procèdent toutes deux de la même manière pour fixer leurs prix. On peut en douter puisqu'on observe que certaines compagnies chargent un prix réduit pour la version améliorée à ceux qui possèdent déjà une ancienne version. Même si l'entreprise qui lance son nouveau produit offre elle aussi un prix réduit d'introduction, on constate que cette réduction n'est pas aussi importante que dans le premier cas. Pourquoi ? Il faut d'abord observer que les deux types d'entreprises ne font pas face aux mêmes contraintes. Dans le premier cas, l'entreprise qui émet une version améliorée fait concurrence à son propre produit. L'ancienne version devient alors le bas de gamme et la version améliorée devient le haut de gamme. Non seulement l'arrivée de la nouvelle version sépare le marché en deux, mais il ne faut pas que les propriétaires de l'ancienne version du logiciel se sentent lésés par l'arrivée de la nouvelle version!

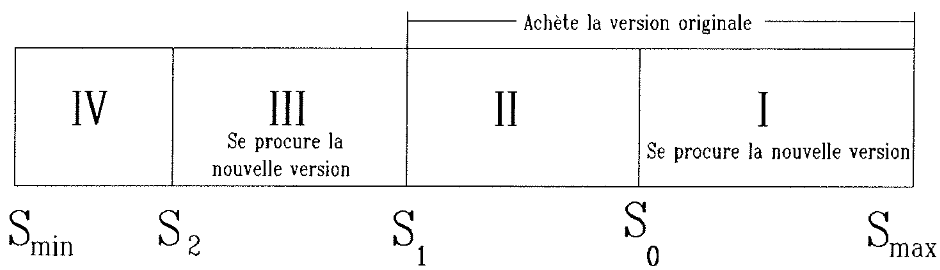
Dans ce chapitre, nous allons proposer un modèle qui tient compte de la présence de deux versions d'un même logiciel, ces deux versions ne diffèrent que par leur qualité. Nous tentons d'expliquer quel type d'individus serait prêt à payer pour l'ancienne version, quels sont ceux qui achèteront la nouvelle version et quels sont ceux qui passeront de l'ancienne à la nouvelle version. Pour expliquer le comportement des consommateurs, il faut d'abord modéliser les critères qui déterminent si le consommateur achète le logiciel ou ne l'achète pas.

## B - Définition du modèle

Nous allons travailler avec un modèle simple où il n'y a pas d'interactions intertemporelles de la part des consommateurs ni de la part des firmes. En seconde période, les agents prennent la fonction de demande comme données et réagissent selon celle-ci. Cependant en première période, les consommateurs sont myopes puisqu'ils ne prévoient pas la sortie éventuelle de la nouvelle version sur le marché. Les firmes sont également myopes puisqu'elles ne prévoient pas l'entrée possible d'un logiciel concurrent sur le marché en seconde période. Enfin, notons que les préférences des consommateurs sont distribuées selon une fonction de distribution uniforme.

Pour qu'un logiciel se vende bien il faut qu'il corresponde aux goûts et aux exigences des consommateurs. La réussite du logiciel va dépendre à la fois des préférences des consommateurs et de la qualité du logiciel. Nous supposons donc que chaque consommateur a un indice de préférence S. Cet indice permet de distinguer chaque consommateur sur une échelle de préférence donnée. Nous supposons également que la qualité du logiciel, $\theta$, sert à distinguer les deux versions du logiciel. Dans ce modèle le consommateur est confronté à un choix dichotomique: il achète un seul logiciel ou il n'achète rien du tout. Ainsi lorsqu'un consommateur se procure un logiciel, c'est que son utilité, (fonction de S et de $\theta$), est supérieure au prix P du logiciel. Algébriquement, ceci peut s'écrire $U(\theta,S) > P$. Il faut cependant définir la fonction d'utilité $U(\theta,S)$. Afin de ne pas surcharger le modèle, nous supposons une formule simple, soit $U(\theta,S)=\theta S$ du type Mussa et Rosen [1978]. Malgré sa simplicité, cette fonction reflète bien la réalité telle qu'on observe dans les revues spécialisées. Si la qualité du logiciel augmente, alors l'utilité de l'individu augmente également. De plus, l'indice S de cette fonction permet d'expliquer la divergence d'utilité entre consommateurs lorsqu'un logiciel de qualité θ est présent sur le marché. Il suffit de se servir d'un indice S marginal pour séparer les acheteurs des non-acheteurs. La figure 6 et le texte ci-dessous expliquent comment le choix du S marginal partage les consommateurs en deux groupes.

**Figure 6 :** Répartition des consommateurs entre ceux qui achètent et ceux qui n'achètent pas le logiciel




À l'aide d'outils algébriques que nous développons, nous allons expliquer pourquoi les gens achètent un logiciel et ce qu'il faut faire pour que ceux qui ont déjà acheté un logiciel achètent encore lorsqu'une nouvelle version se présente sur le marché. Si nous prenons un logiciel de qualité $\theta_a$ qui se vend au prix $P_a$, nous savons qu'un certain nombre de consommateurs vont se procurer le logiciel. Pour distinguer ceux qui achètent ce logiciel de ceux qui ne l'achètent pas, on se sert de l'indice S de préférence. Ainsi lorsqu'on observe l'achat d'un logiciel, c'est qu'il existe un indice marginal $S_1$ qui sépare les consommateurs en deux groupes. Le consommateur d'indice $S_1$ est le dernier consommateur qui n'achète pas le logiciel. Ceux qui possèdent un indice S supérieur à $S_1$ se procurent le logiciel. Algébriquement on écrit $\theta_a S > P_a$ pour tous $S > S_1$. Si l'on se réfère à la figure 6, cela veut dire que tous ceux qui ont une préférence à droite de $S_1$ se procurent la version originale. Cependant, on remarque deux cas particuliers. Si $S_1 = S_{min}$ toute la population cible achète le logiciel;

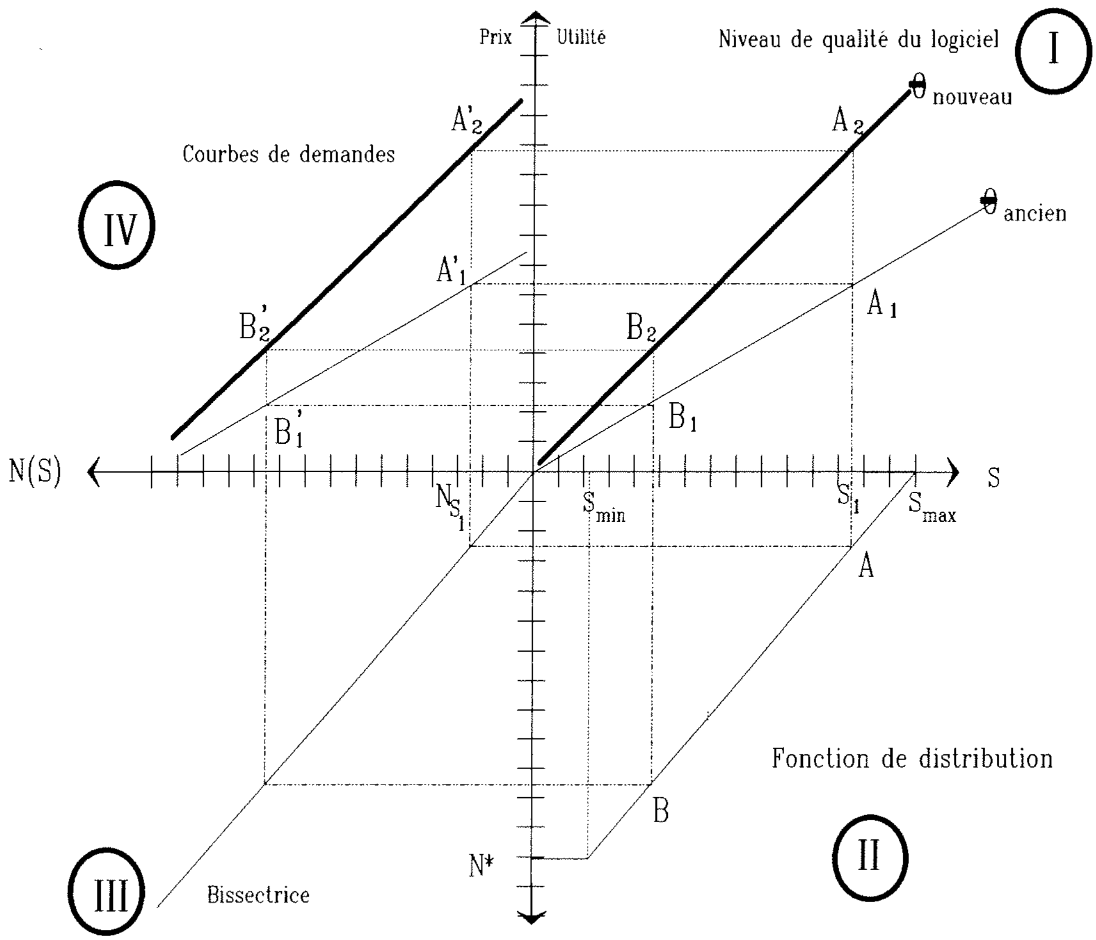
au contraire, si $S_1 = S_{max}$ , personne ne se procure le logiciel. En se servant de $S_1$, nous avons donc divisé la population en deux groupes: celle dont l'achat de la version originale augmente le niveau de bien-être et celle où, au contraire, l'achat abaisse le niveau de bien-être. Le nombre de consommateurs qui achètent le logiciel dépend également de la qualité du logiciel puisque l'indice S marginal est choisi pour un niveau de qualité $\theta$ donné. Dans ce paragraphe nous venons donc de décrire comment l'achat du logiciel dépend de sa qualité $\theta$ et de la préférence S du consommateur. Maintenant qu'arrive-t-il si une mise à jour du logiciel fait son apparition sur le marché et que sa qualité a été améliorée à $\theta_N$ ?

Cette nouvelle version va probablement permettre d'aller chercher de nouveaux clients. Cependant, comme l'indique la figure 6, la nouvelle version n'ira pas nécessairement chercher tous les consommateurs à gauche de $S_1$, seuls ceux dont le bien-être augmente suite à l'achat du logiciel font parti du nouveau groupe d'acheteurs. Nous supposons que pour une qualité $\theta_N$ et un prix $P_N$, $S_2$ détermine le niveau à partir duquel ceux qui n'ont pas l'ancienne version achètent la nouvelle version. Les nouveaux consommateurs sont ceux pour lesquels la nouvelle version augmente leur bien être ( $\theta_N S_2 - P_N > 0$) alors que l'ancienne version n'était pas suffisante pour l'augmenter ($\theta_A S_1 - P_A \leq 0$ ).

Lorsqu'on observe les faits rapportés par les périodiques, on remarque que certains propriétaires d'anciennes versions se procurent également la nouvelle version. Nous voulons expliquer le comportement de ces propriétaires et déterminer si les conditions d'achats sont les mêmes que pour le premier groupe d'acheteurs (ceux qui n'ont pas de logiciels). Supposons que le niveau marginal $S_0$ de la figure 6 sert à délimiter les proprétaires de l'ancienne version du logiciel qui achètent la nouvelle version. Selon notre convention, ceux à droite de l'indice $S_0$ se procurent la nouvelle version. Par contre, les propriétaires de l'ancienne version profitent déjà d'une certaine utilité $U(\theta_a,S)$ due à l'ancienne version. Il faut donc que l'utilité de la nouvelle version soit suffisamment importante pour susciter l'intérêt de ces derniers. C'est-à-dire que l'intérêt d'acheter doit demeurer, même si l'on retranche l'utilité de l'ancienne version de celle de la nouvelle version. Algébriquement, on a donc $U(\theta_N,S) - U(\theta_a,S) > P_N$. Puisque l'on a posé $U(\theta_N,S)=\theta_N S$ et $U(\theta_a,S)=\theta_a S$ alors on doit avoir $S > S_0$ où $S_0=P_N/(\theta_N-\theta_a)$. Nous remarquons que les deux groupes de consommateurs n'achètent pas selon les mêmes critères. Pour que les propriétaires de l'ancienne version achètent, on doit respecter l'inégalité $S > P_N/(\theta_N-\theta_a)$ tandis que ceux qui ne possèdent pas l'ancienne version achètent si l'inégalité $S > P_N/\theta_N$ est respectée. Les deux groupes ne sont donc pas prêts à payer le même prix pour la nouvelle version. Les nouveaux consommateurs ne voudront pas payer plus que ce que leur procure l'amélioration de la nouvelle version. Ceci explique pourquoi les compagnies de logiciels offrent des prix réduits aux détenteurs d'anciennes versions. La pratique d'offrir une réduction à ceux qui possèdent déjà une ancienne version n'est qu'un volet de la politique de tarification d'une entreprise. Comment les différentes politiques de tarifications affectent-elles les profits de la firme? Pour répondre à cette question, nous aurons besoin de la fonction de demande du logiciel produit par la firme.

Il faut d'abord souligner que nous ne pouvons pas construire la fonction de demande directement à partir du niveau d'utilité et de ses composantes S et $\theta$. Nous pouvons toujours représenter les trois variables sur un plan à deux axes. Les deux premières variables seraient représentées sur les axes et une courbe de niveau représenterait la troisième variable dans l'espace défini par ces deux axes. C'est ce que l'on fait au premier quadrant de la figure 7. On a l'indice S en abscisse, l'utilité $U(\theta,s)$ en ordonnée et le niveau de qualité du logiciel, $\theta$, varie avec la pente de la droite. À l'aide de l'information contenue dans ce quadrant nous devons construire la fonction de demande. Malgré la différence entre les exigences, la demande des propriétaires de logiciels et celle de ceux qui n'ont pas de logiciel, seront toutes deux représentées par une seule fonction de demande. Dorénavant, nous allons parler donc d'une fonction de demande conjointe. Dans un premier temps nous allons procéder par construction géométrique (figure 7). Nous aurons besoin de quatre étapes, donc quatre quadrants, pour construire les fonctions de demande.

**Figure 7:** Construction géométrique des deux fonctions de demande




Dans le premier quadrant de la figure 7, nous représentons graphiquement l'idée que le succès de vente dépend de sa qualité $\theta$ et de l'indice de préférence S du consommateur. Un consommateur, à un niveau de préférence donné, sera prêt à payer proportionnellement plus cher pour accéder à une meilleure qualité. C'est pourquoi la pente indiquant le degré de qualité du nouveau produit ($\theta_{nouveau}$) est plus importante que celle de l'ancien produit ($\theta_{ancien}$).

Nous savons que personne ne possède d'indice inférieur à $S_{min}$ et personne ne possède d'indice supérieur à $S_{max}$. Cependant pour un $S_1$ choisi entre ces deux points, combien de personnes vont se procurer la version originale du logiciel ? Nous avons besoin de cette information pour construire la fonction de demande, puisque par définition, une fonction de demande nous informe du nombre de produits vendus à un prix donné. C'est pourquoi, dans le second quadrant, nous représentons le nombre de consommateurs en fonction de l'indice marginal $S_1$ choisi. Pour connaître le nombre de consommateurs qui achètent la version originale étant donné un indice marginal $S_1$, on a recours à une fonction de distribution. Cette fonction de distribution F nous indique le nombre de consommateurs ayant un indice inférieur à S. Sachant qu'au point $S_{max}$ personne ne se procure le logiciel et qu'au point $S_{min}$, tous les consommateurs achètent le logiciel, nous devons déterminer l'équation formée par ces deux points pour connaître notre fonction de distribution. Or, il existe une formule pour trouver l'équation d'une droite à partir de deux points. Pour nos deux points $M_1(S_{max}\,;\,0)$ et $M_2(S_{min}\,;\,N^*)$ l'équation de la droite nous est donnée par la relation :

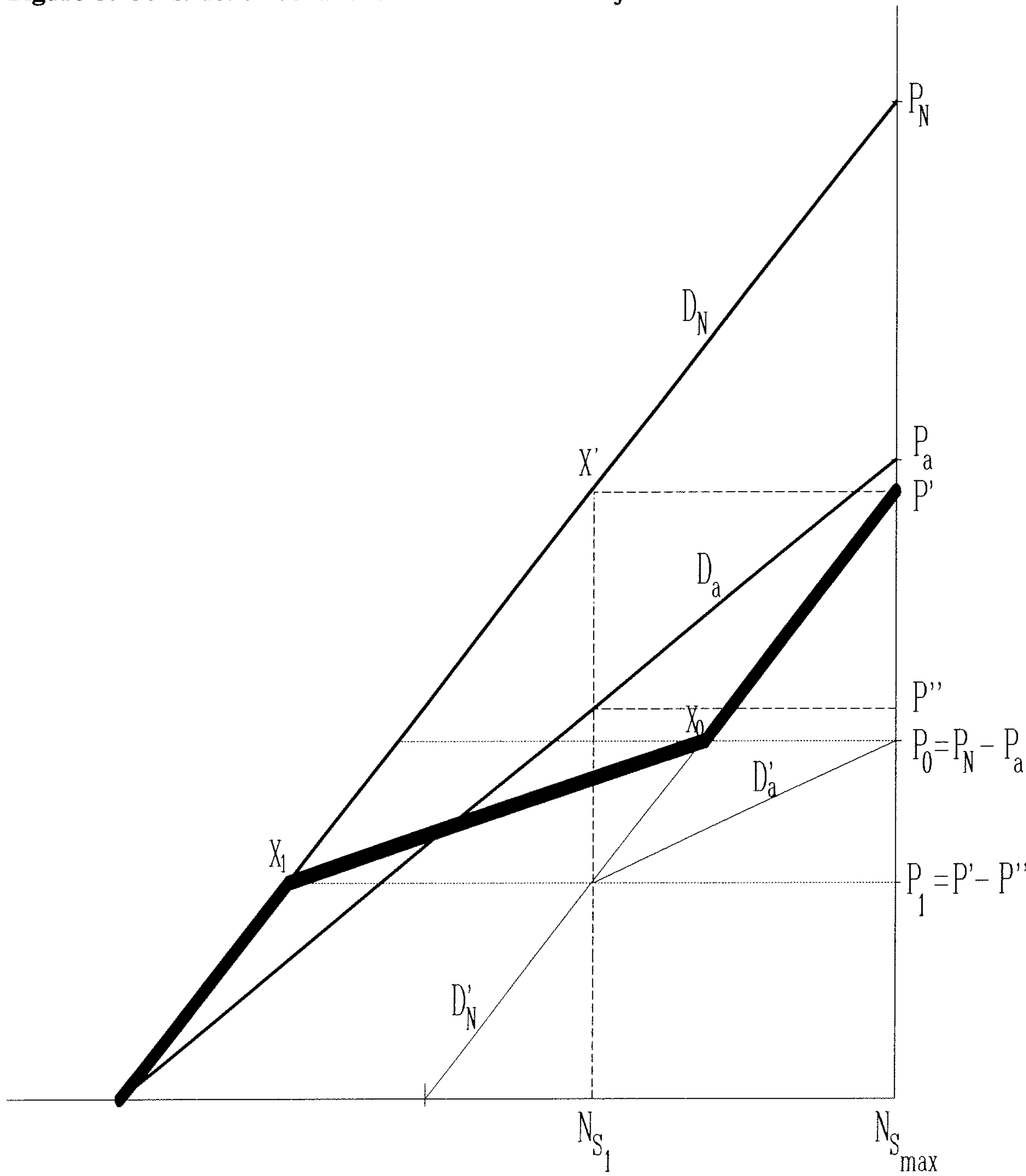
$$F(S) = \frac{S_{max}-S}{S_{max}-S_{min}}\, N^* \qquad \textbf{(E1)}$$

Pour simplifier la notation nous normalisons $N^*$ à 1 où $N^*$ est le nombre total de consommateurs.

Dans le troisième quadrant, on ne fait que reprojeter le nombre de consommateurs vers le quatrième quadrant afin de s'en servir pour obtenir les fonctions de demande.

Le quatrième quadrant contient les fonctions de demande recherchées. Par définition, une fonction de demande nous renseigne sur le nombre de produits vendus à un prix donné. Nous devons donc nous arranger pour obtenir les prix sur un axe du quatrième quadrant, puis le nombre de produits vendus sur l'autre axe. Puisque chaque consommateur n'achète qu'un seul logiciel, le nombre de consommateurs et le nombre de logiciels sont tous les deux égaux. Le nombre de consommateurs est déterminé au second quandrant. Au troisième quadrant nous reprojetons ce nombre, de telle sorte que l'abscisse du quatrième quadrant représente le nombre de logiciels vendus. Nous venons donc de définir un des deux axes nécessaires à la construction de la fonction de demande. L'autre axe, l'ordonnée, s'obtient en effectuant un changement de mesure, pour chaque niveau d'utilité, un consommateur sera prêt à payer un certain prix. Nous effectuons donc cette correspondance sur l'ordonnée du quatrième quadrant, nous n'avons plus qu'à projeter nos deux premières droites du premier quadrant vers le quatrième quadrant. Il suffit de prendre deux paires de points $(A_1,B_1)$ et $(A_2,B_2)$ à la figure 7, pour construire nos deux fonctions de demande. La figure 8 représente le quatrième quadrant mais agrandi. Sur cette figure, $D_a$ et $D_n$ représentent respectivement les demandes pour l'ancien et le nouveau logiciel.

**Figure 8:** Construction de la fonction de demande conjointe



Avant de continuer, il faut se rappeler qu'en choisissant un indice $S_1$, on détermine également le nombre d'individus qui se procurent la version originale du logiciel. Ce nombre d'individus est important car il va influencer la forme de la fonction de demande conjointe ( demande par les propriétaires d'ancienne version et de ceux qui n'ont pas de logiciel). La variable $N_{S_1}$ représente le nombre d'individus qui acquièrent la version originale du logiciel. Dans la figure 8 nous commençons par représenter les deux fonctions de demandes originales $D_N$ et $D_a$. Ces deux droites sont obtenues par projection des deux droites du premier quadrant de la figure 7. Ces dernières se rencontrant en abscisse, il en est de même pour les droites $D_N$ et $D_a$. La droite $D_N$ repésente la demande pour la nouvelle version du logiciel. De même, la droite $D_a$ représente la demande pour l'ancienne version du logiciel. Notons que les termes version originale et ancienne version seront employés pour désigner la même version. Cependant, dans le problème que nous considérons, la firme désire vendre son logiciel à un seul prix malgré la présence de deux fonctions de demande différentes. Nous allons maintenant décrire la construction géométrique de la figure 8. Dans cette partie nous allons décrire comment tenir compte des deux fonctions de demande pour construire la fonction de demande conjointe.

**1) La construction géométrique de la fonction de demande conjointe.**

Sur la figure 8, lorsque l'on projette la valeur $N_{S_1}$ sur la fonction de demande $D_N$ on obtient le prix P'. On peut alors dire que le détenteur marginal $S_1$ serait prêt à payer P' pour le nouveau logiciel. Ce point est important puisqu'il permet de connaître le prix maximal du nouveau logiciel pour que ceux qui ne possèdent pas l'ancien logiciel. Sur la figure 8, on remarque que ceux à gauche de $N_{S_1}$ n'ont pas acheté la version originale du logiciel. On constate que ces mêmes consommateurs ne sont pas prêts à payer plus que P' pour la nouvelle version. La quantité demandée par ces gens est donc nulle pour des prix supérieurs au prix P'. Ces derniers n'ont pas acheté d'anciennes versions et ne s'intéressent qu'à la nouvelle version. Pour illustrer cette idée nous faisons commencer la fonction de demande pour la nouvelle version au point P'. Géométriquement, on effectue une translation de la droite $D_N$ vers la droite jusqu'au point P' de l'ordonnée. On obtient alors une nouvelle droite $D'_N$ parallèle à $D_N$. La droite $D'_N$ représente la demande du nouveau logiciel par ceux qui ne possèdent pas l'ancienne version.

On doit maintenant déterminer la fonction de demande du nouveau logiciel pour ceux qui possèdent déjà une ancienne version du logiciel. À la figure 8, les propriétaires de l'ancienne version se situe à droite du point $N_{S_1}$. Précédemment, on a établi que ces propriétaires ne sont pas prêts à payer le plein prix pour la nouvelle version. Ces derniers ne sont prêts qu'à payer que pour l'amélioration de la nouvelle version. Le prix de l'amélioration est donc représenté par la différence verticale entre le prix de la nouvelle version et le prix de l'ancienne version. Par exemple, au point $N_{S_{max}}$, la différence verticale entre les deux fonctions de demande $D_N$ et $D_a$ revient à effectuer $P_N$-$P_a$. Appellons $P_0$ le prix obtenu à partir de la différence verticale de $P_N$ et $P_a$. Le consommateur dont l'indice est $S_{max}$, n'est pas prêt à payer plus que $P_0$ pour la nouvelle version du logiciel. Si l'on procède de la même manière pour le consommateur marginal de l'autre extrémité (au point $N_{S_1}$), on effectue la différence verticale entre P' et P'', on appelle cette différence verticale $P_1$. Ce prix est également le plus haut prix que le consommateur d'indice $S_1$ est prêt à payer pour la nouvelle version. À l'aide de ces opérations géométriques, nous avons obtenu deux points, soit ($N_{S_1}$ ,$P_1$ ) et ($N_{S_{max}}$ , $P_0$). Appelons $D'_a$ le segment définit par ces deux points. Le segment $D'_a$ représente la demande pour la nouvelle version pour ceux qui possèdent déjà l'ancienne version du logiciel.

Maintenant que nous avons $D'_N$ et $D'_a$, (la fonction de demande pour ceux qui n'ont pas l'ancienne version et pour ceux qui ont l'ancienne version) nous pouvons construire la fonction de demande conjointe. Rappelons-nous que la fonction de demande conjointe représente la fonction de demande pour le nouveau produit lorsque la firme n'offre qu'un seul prix aux deux groupes de consommateurs. Nous avons déjà la fonction de demande pour chacun des deux groupes pris individuellement. La fonction de demande conjointe sera donc construite à partir des droites $D'_N$ et $D'_a$. En suivant l'axe des prix, on constate qu'au-dessus du prix $P_0$ seuls ceux qui n'ont pas l'ancienne version se montrent prêts à payer pour la nouvelle version. On identifie ce dernier segment par un trait gras car il fait partie de la fonction de demande conjointe.

À partir du prix $P_0$, les deux groupes veulent bien se procurer la nouvelle version du logiciel au prix courant. En abscisse, on remarque qu'à chaque prix est associé une quantité de logiciels (ou de consommateurs). Si les deux types de consommateurs participent à l'achat de la nouvelle version, la quantité vendue est l'addition du nombre d'individus dans chacun des deux groupes pour un prix donné. Géométriquement, cette addition correspond à une somme horizontale des deux fonctions de demande $D'_N$ et $D'_a$ lorsque celles-ci se situent entre $P_0$ et $P_1$. Nous identifions en gras le segment $X_1X_0$ résultant de la somme horizontale de $D'_N$ et $D'_a$. Le segment $X_1X_0$ fait également partie de la fonction de demande conjointe et est représenté par un trait gras.

Enfin, il nous reste à déterminer quelle sera la fonction de demande conjointe lorsque la firme demande un prix inférieur à $P_1$. On constate d'abord que le segment $X_1X_0$ s'arrête à l'intersection de la droite $D_N$ (la fonction de demande originale pour le nouveau logiciel). À ce point, le prix est tel que tous les propriétaires de l'ancienne version se procurent la nouvelle version du logiciel. La firme fait donc face uniquement à la fonction de demande $D_N$. Ce dernier segment marqué en gras, forme une autre partie de la fonction de demande conjointe pour le nouveau logiciel.

La fonction de demande conjointe, telle que construite géométriquement, est formée de trois segments de droites indiqués en gras sur la figure 8. Cependant, on peut faire remarquer, à juste titre, qu'une construction géométrique ne permet pas, à elle seule, de tirer des conclusions générales et robustes. C'est pourquoi nous accompagnons notre construction géométrique d'un modèle algébrique.

**2) Construction algébrique de la fonction de demande conjointe**

Pour être fidèle à la construction géométrique de la figure 8, nous devons commencer par exprimer les fonctions de demande $D_n$ et $D_a$ sous forme algébrique. On peut se servir de l'équation (E1) et y substituer S par $\frac{P}{\theta_n}$ pour trouver l'équation de la droite $D_n$ et par $\frac{P}{\theta_a}$ pour l'équation de la droite $D_a$.

Ainsi en substituant S par $\frac{P}{\theta_n}$ nous obtenons l'équation de la droite $D_N$ :

$$N_n = \left( \frac{S_{max}}{S_{max} - S_{min}} - \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\, \theta_n} \right) \qquad \text{(E2)}$$

De même, en substituant S par $\frac{P}{\theta_a}$ on obtient l'équation de la droite $D_a$ :

$$N_a = \left( \frac{S_{max}}{S_{max} - S_{min}} - \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\, \theta_a} \right) \qquad \text{(E3)}$$

$D'_n$ n'est qu'une translation de $D_n$.

$$N'_n = \left( \frac{S_{max}}{S_{max} - S_{min}} - \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\,\theta_n} \right) - N_{S_1}$$

Maintenant que l'on a les fonctions de demande $D_N$ et $D_a$, il nous faut déterminer les prix $P_0$ et $P_1$ de la figure 8. Or, nous savons, par construction, que le prix $P_0$ est le résultat de la différence verticale entre $P_N$ et $P_a$. Si nous posons N=0, nous pouvons déterminer $P_N$ à partir de (E2).

On a alors: $P_n = S_{max}\,\theta_n$

De même, nous pouvons nous servir de (E3) pour déterminer $P_a$.
$P_a = S_{max}\,\theta_a$

Puisque, par construction, $P_0 = P_n - P_a$ , on peut écrire:

$$\boxed{P_0 = S_{max}\,\theta_n - S_{max}\,\theta_a = S_{max}(\theta_n - \theta_a)}$$

Au prix $P_1$ tous les propriétaires de l'ancienne version achètent la nouvelle version du logiciel. Mais ce prix marque également une des deux extrémités du segment de droite $D'_a$. Nous avons donc besoin d'isoler la variable $P_1$ si l'on veut arriver à exprimer le segment $D'_a$ sous forme algébrique. Afin de déterminer la valeur de $P_1$, nous allons encore utiliser l'équation (E2). Cette équation va nous permettre d'exprimer P en fonction de N. C'est une étape nécessaire avant de pouvoir exprimer les résultats en fonction de $P_1$.

$$P = \theta S_{max} - \frac{N}{N^*}(S_{max} - S_{min})\,\theta \qquad \textbf{(E4)}$$

Pour reproduire fidèlement la construction géométrique de la figure 8, $P_1$ doit être obtenu en effectuant la différence entre P' et P''. Il est donc clair que l'on a besoin de connaître les valeur de P' et P'' avant de pouvoir déterminer celle ce $P_1$. Les valeurs de P' et de P peuvent être déterminées à l'aide de l'équation (E4).

Dans l'équation (E4) nous substituons $\theta$ par $\theta_n$ pour obtenir la valeur de P'.

$$P' = \theta_n S_{max} - N_{S_1} (S_{max} - S_{min})\, \theta_n$$

Puis nous remplaçons $\theta$ par $\theta_a$ dans l'équation (E4) pour obtenir la valeur de P.

$$P'' = \theta_a S_{max} - N_{S_1} (S_{max} - S_{min})\, \theta_a$$

Nous en déduisons la valeur de $P_1$

$$\boxed{\Leftrightarrow \quad P_1 = S_1(\theta_n - \theta_a)}$$

Maintenant que nous connaissons les valeurs de $P_1$ et de $P_0$ nous pouvons maintenant trouver l'équation du segment $D'_a$ de la figure 8, donnée par les points $(0,P_0)$ et $(N_{S_1},P_1)$ (notons que par définition $N_{S_{max}} = 0$). Nous nous servons de la même formule utilisée pour déterminer la fonction de distribution.

$$\frac{P - P_0}{P_1 - P_0} = \frac{N}{N_{S_1}}$$

$$\Leftrightarrow N = N_{S_1}\left(\frac{P - P_0}{P_1 - P_0}\right)$$ L'équation de la droite $D'_A$. **(E5)**

Cependant pour définir la fonction de demande conjointe, on a besoin du segment $X_1X_0$ et non la droite $D'_A$ elle-même. Il suffit d'effectuer la somme horizontale de $D'_A$ et $D'_n$ pour obtenir le segment $X_1X_0$ de la figure 8.

$$N = N_n - N_{S_1} + N_{S_1}\left(\frac{P - P_0}{P_1 - P_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow N = N_n + N_{S_1}\left(\frac{P - P_0 - P_1 + P_0}{P_1 - P_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow N = N_n + N_{S_1}\left(\frac{P - P_1}{P_1 - P_0}\right) \Leftrightarrow N = N_n + N_{S_1}\left(\frac{P_1 - P}{P_0 - P_1}\right)$$

où la définition de $N_n$ nous est donnée par l'équation E3 et celle de $N_{S_1}$ par l'équation (E1) en remplaçant S par $S_1$ dans cette dernière, c'est-à-dire que $N_{S_1} = \frac{S_{max}-S_1}{S_{max}-S_{min}}$.

En déterminant l'équation du segment $X_0X_1$, nous avons tous les éléments algébriques pour décrire la fonction de demande conjointe. Le tableau II décrit la fonction de demande conjointe selon ces trois segments qui la composent. Les segments valides correspondent aux traits gras de la figure 8 ( en se rappelant que $N_{S_1} = \frac{S_{max}- S_1}{S_{max} - S_{min}}$ ).

**Tableau II: La fonction de demande conjointe**

| Nom de la droite | Équation de la droite | Segment valide | |
|---|---|---|---|
| $D'_n$ : | $\delta - \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\theta_n} - N_{S_1}$ | Pour $P > P_0$ | Cas 1 |
| $X_0X_1$ : | $\delta - \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\theta_n} + N_{S_1}\left(\frac{P_1 - P}{P_0 - P_1}\right)$ | Pour $P_1 < P \leq P_0$ | Cas 2 |
| $D_n$ : | $\delta - \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\theta_n}$ | Pour $P \leq P_1$ | Cas 3 |

Où $\delta = \frac{S_{max}}{S_{max} - S_{min}}$

Maintenant que nous avons obtenu la fonction de demande conjointe, nous devons déterminer quel sera le prix optimal de la nouvelle version lorsque la firme charge un seul prix aux deux groupes de consommateurs. Nous aurons donc à déterminer quels sont les profits associés à cette fonction de demande.

### 3) Détermination algébrique des profits associés à la fonction de demande conjointe

Comme on peut le voir sur la figure 8 et sur le tableau II, la fonction de demande est formée à partir de trois segments de droite. En l'absence de coûts, dans le cas d'une fonction linéaire, le point d'intersection de la marginale avec l'abscisse détermine le prix optimal à charger. Toutefois, puisque l'on a trois segments de droite, on a également trois marginales et trois intersections avec l'abscisse. Nous devons alors déterminer les réponses suggérées par les trois cas et vérifier s'ils admettent une solution sur la fonction de demande conjointe.

Nous allons désormais adopter la notation $\tilde{\theta} = \frac{\theta_a}{\theta_N}$ et $\tilde{S} = \frac{S_{max}}{S_1}$ lorsque possible et lorsque son utilisation permettra de simplifier les explications.

Commençons par le **cas 1.** D'après le tableau II, lorsque $P = 0$, l'intersection de la droite nous est donnée par $N = \delta - N_{S_1}$. Le point d'intersection de la marginale, situé à mi-chemin, est alors $N = \frac{\delta - N_{S_1}}{2}$. Pour déterminer le prix de la fonction de demande il suffit d'égaler $\frac{\delta - N_{S_1}}{2}$ avec la valeur donnée par l'équation E1 du tableau II. En isolant P, le prix optimal est $P^* = \left(\frac{\theta_n}{2}\right)S_1$ (voir l'équation E4 de l'appendice pour les détails de calcul).

Ce prix est-il sur la fonction de demande ? Pour le savoir, on doit vérifier l'inégalité $P^* > P_0$. Sachant que $P^* = \left(\frac{\theta_n}{2}\right)S_1$ et que $P_0 = S_{max}(\theta_n - \theta_a)$ on obtient l'inégalité $\frac{1}{2}\,\frac{1}{\tilde{S}} > (1-\tilde{\theta})$. La solution optimale $P^*$ se situe sur le segment à condition que l'inégalité $\frac{1}{2(1-\tilde{\theta})} > \tilde{S}$ soit respectée.

Au **cas 2** du tableau II, lorsque P = 0 on a $N = \mathscr{S} + N_{S_1} \frac{P_1}{P_0 - P_1}$. Le point d'intersection de la marginale nous est donné par $\frac{1}{2}\left(\mathscr{S} + N_{S_1} \frac{P_1}{P_0 - P_1}\right)$. On obtient le prix optimal $P^{**} = \theta_n \frac{\theta_n - \theta_a}{2\theta_n - \theta_a}\left(\frac{S_{max} + S_1}{2}\right)$ (voir l'équation E5 de l'appendice). Ce prix fait partie de la fonction de demande, si l'on a $P_0 \geq P^{**} > P_1$. On procède en deux étapes, premièrement on vérifie si l'on a $P^{**} \leq P_0$, c'est-à-dire que $\theta_n \left(\frac{\theta_n - \theta_a}{2\theta_n - \theta_a}\right) \left(\frac{S_{max} + S_1}{2}\right) \leq S_{max}(\theta_n - \theta_a)$. Cette inégalité est équivalente à comparer $\frac{S_1 - S_{max}}{S_{max}} < 2\left(\frac{\theta_n - \theta_a}{\theta_n}\right)$ (voir l'équation E6 de l'appendice). Cette inégalité est toujours vérifiée puisque le terme de gauche est négatif alors que celui de droite est positif.

Il faut également vérifier si l'on a $P_1 < P^{**}$ pour que le prix optimal $P^{**}$ se réalise sur la fonction de demande. Cette inégalité est équivalente à vérifier $2(1-\tilde{\theta}) < (\tilde{S}-1)$ (voir l'équation E7 de l'appendice). Cette inégalité est bonne pourvu que l'inégalité $\tilde{S}$ **> 3 - 2**$\tilde{\theta}$ soit respectée.

Enfin dans le **cas 3**, l'intersection de la marginale avec l'abscisse est $N = \frac{1}{2}\mathscr{S}$. Le prix optimal correspondant est $P^{***} = \frac{1}{2}(S_{max})\theta_n$ qui se réalise sur le troisième segment pourvu que $P^{***} \leq P_1$ ou, si l'on préfère, si l'inégalité $\frac{1}{2}\tilde{S} \leq (1-\tilde{\theta})$ soit respectée. On observe que pour des valeurs de $\tilde{\theta}$ comprises entre ½ et 1, la condition $P^{***} \leq P_1$ ne tient pas. Nous avons une solution que lorsque $\tilde{\theta}$ est compris entre 0 et ½ et que lorsque l'inégalité $\tilde{S}$ $\leq$**2-2**$\tilde{\theta}$ est vérifiée.

A l'aide de la notation $\tilde{\theta} = \dfrac{\theta_a}{\theta_N}$ et $\tilde{S} = \dfrac{S_{max}}{S_1}$ et du tableau III, on résume les trois cas et les conditions pour lesquelles le prix appartient à la fonction de demande.

**Tableau III:** Les conditions pour que le prix se réalise sur l'un des trois segments de la fonction de demande conjointe.

| Cas | Condition pour que le prix se réalise sur la fonction de demande | Étiquette |
|---|---|---|
| Cas I | $\tilde{S} < \dfrac{1}{2(1-\tilde{\theta})}$ | **(A)** |
| Cas II | $3 - 2\tilde{\theta} < \tilde{S}$ | **(B)** |
| Cas III | $\tilde{S} \leq 2 - 2\,\tilde{\theta}$ | **(C)** |

On sait que le profit est égal au prix optimal multiplié par la quantité correspondante, (moins les coûts mais dans notre cas les coûts sont nuls). Or ces valeurs ont déjà été calculées, il suffit de calculer les profits en effectuant le produit du prix et de la quantité optimale obtenue précédemment.

Nous appelons le point d'intersection 2, le second coude de la fonction de demande conjointe. Comme on peut le constater à la figure 8, le prix à ce point est $P_1$. Pour obtenir la quantité optimale, il suffit d'introduire la valeur de $P_1$ à la place de P dans l'équation de $D_N$. Le tableau IV permet d'établir une synthèse des valeurs optimales obtenues jusqu'à présent.

**Tableau IV:** Les prix, quantités et profits associés aux trois segments de la fonction de demande conjointe.

| **Cas** | **Prix** | **Quantité** | **Profit** |
|---|---|---|---|
| Cas 1 | $\frac{\theta_N}{2} S_1$ | $\frac{1}{2} \frac{S_1}{S_{max}-S_{min}}$ | $\frac{\theta_N}{4} \frac{S^2_1}{S_{max}-S_{min}}$ |
| Cas 2 | $\frac{\theta_N - \theta_a}{2\theta_N - \theta_a} \frac{S_{max}+S_1}{2} \theta_N$ | $\frac{1}{2} \frac{S_{max}+S_1}{S_{max}-S_{min}}$ | $\frac{\theta_N}{4} \frac{\theta_N - \theta_a}{2\theta_N - \theta_a} \frac{(S_{max}+S_1)^2}{S_{max}-S_{min}}$ |
| Cas 3 | $\frac{1}{2} S_{max}\ \theta_N$ | $\frac{1}{2} \frac{S_{max}}{S_{max}-S_{min}}$ | $\frac{\theta_N}{4} \frac{S^2_{max}}{S_{max}-S_{min}}$ |
| Intersection 2 | $S_1 (\theta_N - \theta_a)$ | $\frac{S_{max}-S_1(1-\tilde{\theta})}{S_{max}-S_{min}}$ | $\frac{S_{max}-S_1(1-\tilde{\theta})}{S_{max}-S_{min}} S_1 (\theta_N - \theta_a)$ |

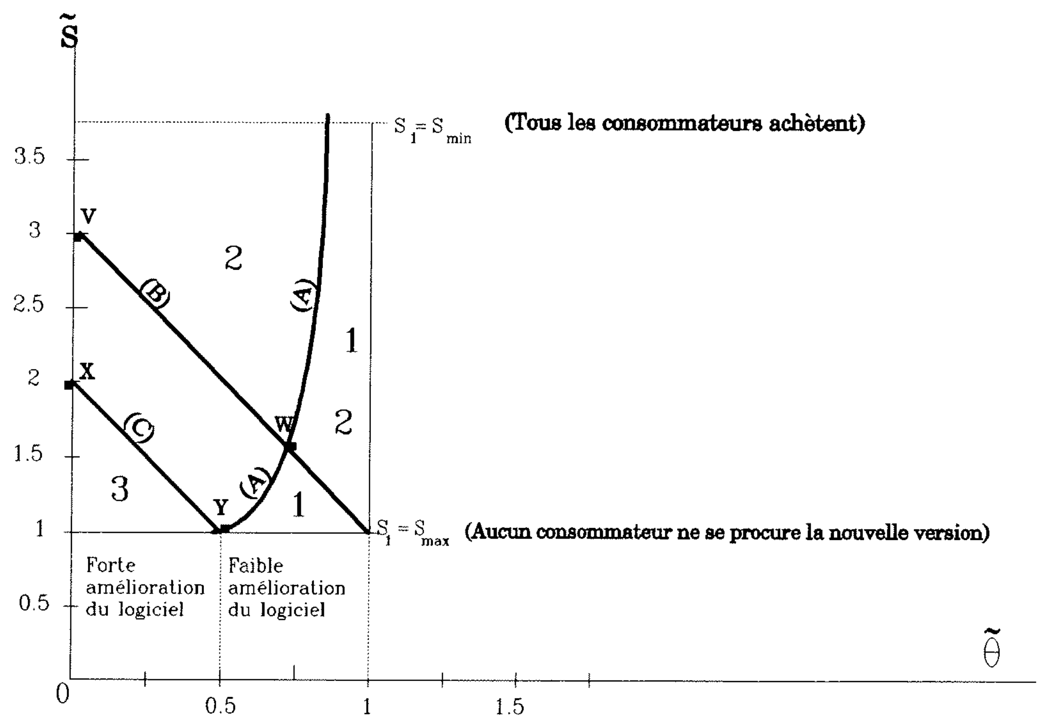
**4) Détermination graphique des profits générés à partir de la fonction de demande conjointe**

Nous aimerions pouvoir représenter graphiquement les circonstances amenant un prix à se réaliser sur l'un des trois segments de la fonction de demande conjointe. Plus précisément, nous souhaitons être en mesure de déterminer visuellement quand le prix demandé par la firme se réalisera sur le premier, le second ou le troisième segment de la fonction de demande. Dorénavent dans cette section, il sera entendu que le terme "demande" désignera la fonction de demande conjointe.

Les figures utilisées (figure 9 et 10) seront délimitées de part et d'autre par deux droites. L'une de ces droites, $\tilde{S} = 1$, nous vient de la définition de $\tilde{S}$ puisque l'on pose $\tilde{S} = \frac{S_{max}}{S_1}$ on sait que $\tilde{S}$ sera au moins égal à un (1), car par définition $S_1 \leq$

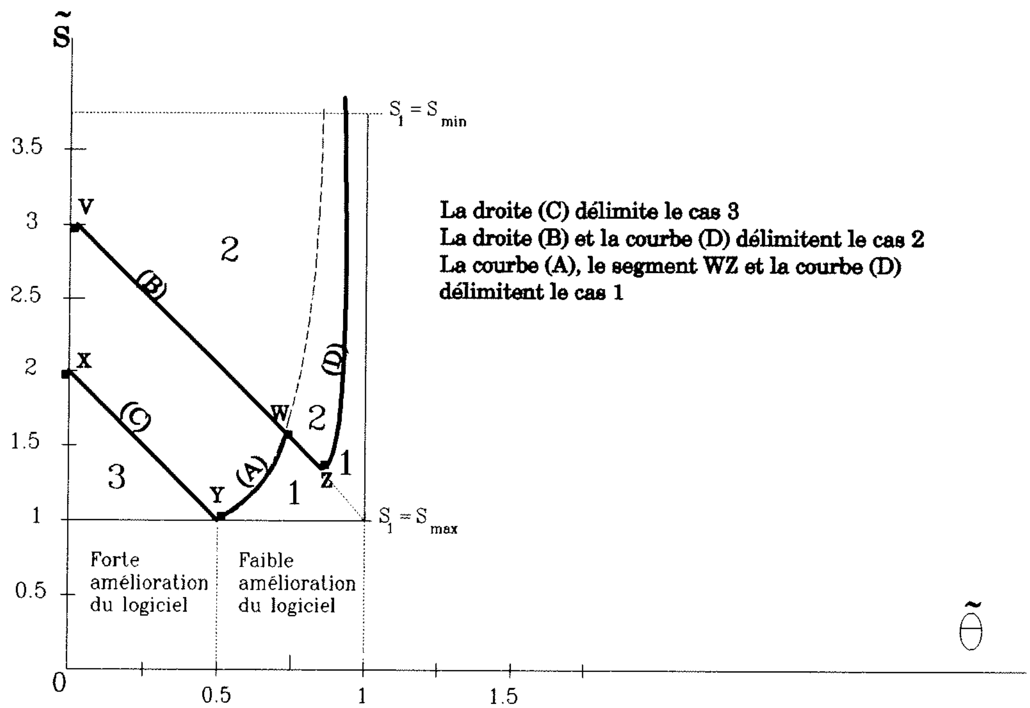
$S_{max}$. C'est pourquoi on n'observe rien sous la droite $\tilde{\tilde{S}} = 1$. De même, puisque l'on a posé $\tilde{\theta}$ égal à $\frac{\theta_a}{\theta_N}$, on sait que $\theta$ ne prendra pas de valeur supérieure à 1 car par définition $\theta_a \leq \theta_n$. La zone sous la droite $\tilde{\tilde{S}} = 1$ et la zone à droite de la fonction linéaire $\tilde{\theta} = 1$ sont donc ignorées. Nous travaillons donc à l'intérieur du rectangle délimité par les droites $\tilde{\theta} = 1$, $\tilde{\tilde{S}} = 1$, de l'ordonnée et de la droite $S_1 = S_{min}$.

**Figure 9 :** Représentation graphique des inégalités permettant de déterminer sur quel segment se réalise le prix optimal.




La figure 9 représente les inégalités (A), (B) et (C) du tableau III. Les zones que définissent ces courbes, correspondent aux trois segments de la fonction de demande conjointe. Par exemple, la droite (C) permet de délimiter la zone où le prix que demande la firme se réalise sur le troisième segment de la fonction de demande conjointe. Ainsi, chaque fois qu'un chiffre apparaît, c'est que dans cette zone le prix se réalise au segment correspondant. Cependant, on constate que, sous la courbe (A) mais au-dessus de la droite (B), qu'il est possible que la solution soit sur le premier ou le second segment de la fonction de demande conjointe. Pour savoir lequel segment sera choisit, nous aurons besoin d'une autre courbe. La courbe (D) va nous permettre de délimiter la zone où il est plus profitable de produire sur le premier segment et où il est plus profitable de produire sur le second segment. On obtient alors la courbe (D) en égalant les profits du cas 1 et du cas 2 du tableau IV. L'équation de la fonction (D) nous est alors donnée par $\tilde{\tilde{S}} = \sqrt[1]{\frac{2-\tilde{\theta}}{1-\tilde{\theta}}} - 1$. À l'aide de la courbe (D) de la figure 10, on peut maintenant déterminer sans ambiguïté où la firme fixera son prix sur la fonction de demande étant donné une combinaison particulière de $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\tilde{S}}$. À gauche de la courbe (D) et au-dessus de la droite (B), la firme fixera son prix sur le second segment de la fonction de demande conjointe. De même, à droite de la courbe (D) lorsqu'on se trouve au-dessus de la droite (B), la firme fixera son prix sur le premier segment de la fonction de demande conjointe puisque c'est sur ce segment qu'elle y trouve son plus important profit.

Figure 10 : Représentation graphique des inégalités permettant de déterminer de façon unique sur quel segment se réalise le prix optimal



**5) Interprétation des figures 9 et 10.**

Nous sommes maintenant en mesure de dire dans quelles circonstances la firme ne vendra qu'à ses nouveaux clients et dans quelles circonstances la firme vendra également à ses anciens clients. Avant de continuer, rappelons-nous que nous travaillons avec la notation $\tilde{S} = \frac{S_{max}}{S_1}$ et $\tilde{\theta} = \frac{\theta_a}{\theta_N}$. Cette notation explique pourquoi $\tilde{S}$ ne peut pas prendre de valeurs inférieures à 1. De même, $\tilde{\theta}$ ne peut pas prendre de valeurs supérieures à 1. Cela veut également dire que $\tilde{\theta}$ exprime l'amélioration en pourcentage. Nous parlons donc d'une amélioration faible lorsque $\tilde{\theta}$ est compris entre 0 et ½ et d'une amélioration considérable lorsque $\tilde{\theta}$ est compris entre 0 et ½. De même, nous disons que beaucoup de logiciels se sont vendus lorsque $\tilde{S}$ s'approche de $\frac{S_{max}}{S_{min}}$ et peu de logiciels se sont vendus lorsque $\tilde{S}$ s'approche de 1.

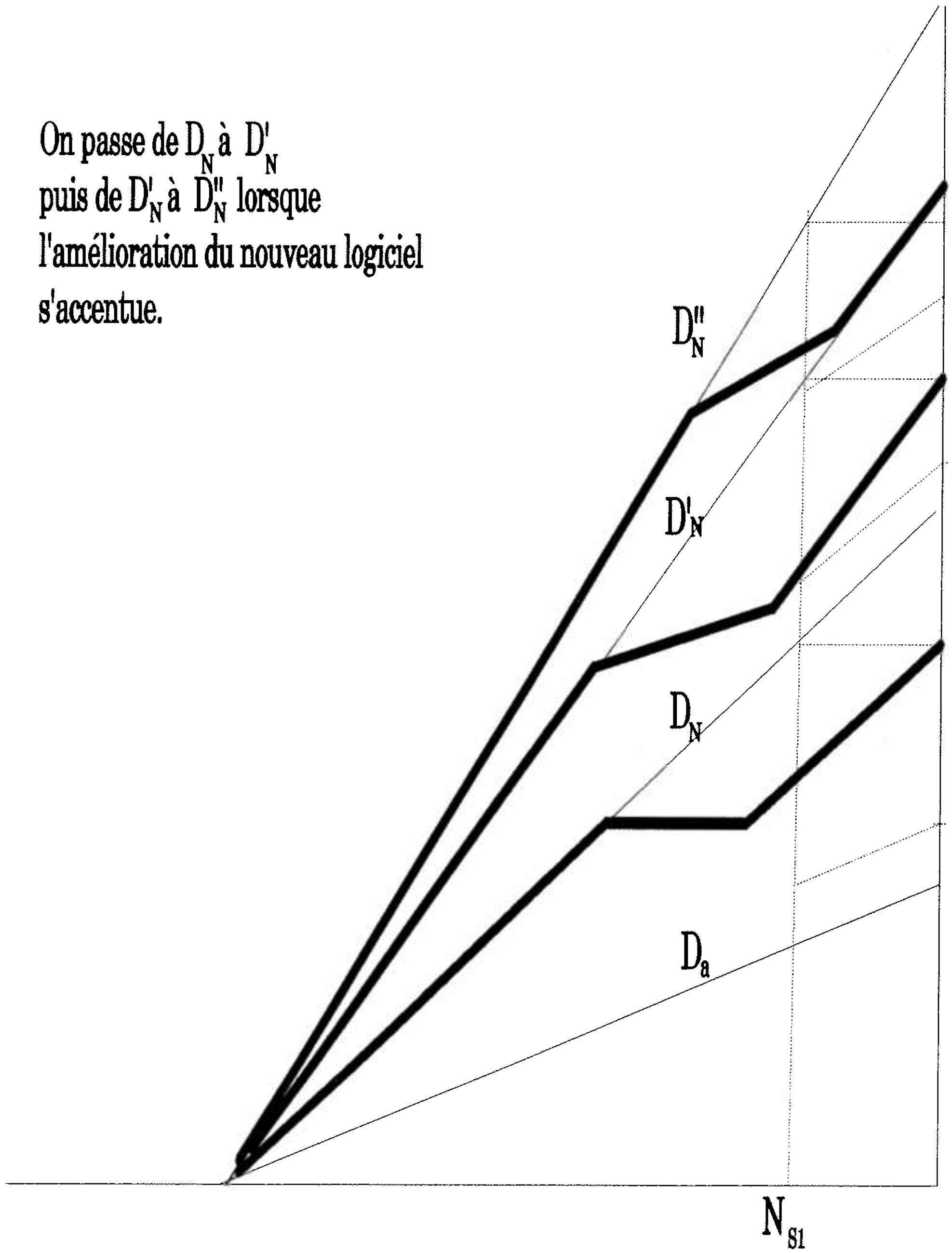
La figure 10 est plus facile à expliquer si l'on commence par les cas extrêmes de l'ordonnée. Par exemple, lorsque $S_1 = S_{max}$ ( $\tilde{S} = 1$), aucun consommateur n'achète le logiciel. Dans ce cas la fonction de demande est une droite. Le premier segment de la fonction de demande conjointe représente la demande de ceux qui n'ont pas acheté la version originale. On se sert donc de ce segment pour former la fonction de demande pour tous les consommateurs. Il n'y a pas d'anciens clients à considérer donc pas de second segment dans la fonction de demande conjointe. En fait, on peut à peine parler d'une fonction de demande conjointe puisqu'un seul groupe de consommateurs existe sur le marché. D'ailleurs à la figure 10, on n'observe que le prix ne se réalise pas sur le second segment de la fonction de demande conjointe lorsque l'on est près de la droite $\tilde{\tilde{S}}=1$. Le troisième segment de la fonction de demande conjointe représente la demande pour les nouveaux clients lorsque les anciens clients se sont tous procurés la nouvelle version. Or, puisqu'il n'y a pas d'anciens clients, le premier et le troisième segment forment une seule droite: la fonction de demande pour les nouveaux propriétaires.

À l'autre extrémité de l'ordonnée on a $S_1=S_{min}$. Dans ce cas, tous les consommateurs se sont procurés la version originale du logiciel. Il n'y a donc plus de nouveaux consommateurs à aller chercher. La fonction de demande conjointe se confond alors avec le second segment pour ne former qu'une seule droite.

Cependant, il est plus probable que l'on rencontre un cas intermédiaire. C'est ici que l'on se sert de la variable $\tilde{\tilde{\theta}}$ pour expliquer le comportement des consommateurs. Nous avions convenu que lorsque $\tilde{\tilde{\theta}}$ est compris entre ½ et 1, nous disons que la nouvelle version du logiciel comporte peu d'améliorations. Au contraire, si $\tilde{\tilde{\theta}}$ est compris entre 0 et ½ il s'agit d'une version comportant d'importantes améliorations.

Dans un premier temps, nous nous concentrons sur ce qu'il advient au prix lorsque l'amélioration est faible, c'est-à-dire à droite de $\tilde{\tilde{\theta}}=0.5$ sur la figure 10. Lorsque peu de gens se sont procurés la version originale ($S_1$ près de $S_{max}$), il n'y a que ceux qui n'ont pas l'ancienne version qui seront prêts à acheter une version comportant peu d'amélioration. Le prix que fixe l'entreprise se réalise alors sur le premier segment de la fonction de demande conjointe. On observe également que plus il y a de gens qui se sont procurés l'ancienne version, plus il y a de chances que des consommateurs soient intéressés par la nouvelle version du logiciel même si celle-ci comporte peu d'améliorations. L'augmentation du nombre de propriétaires d'anciennes versions se traduit, à la figure 10, par un déplacement de $S_1 = S_{max}$ vers $S_1 = S_{min}$. En effectuant ce déplacement, on finit par quitter le premier segment pour atteindre le second segment de la fonction de demande conjointe, c'est-à-dire que pour un nombre assez important de propriétaires d'anciennes versions, le prix devient suffisamment bas pour inciter ces propriétaires à acquérir également la nouvelle version. Toutefois lorsque notre mesure de l'amélioration, $\tilde{\theta}$, se rapproche de 0.5, il peut arriver que le prix fixé par la firme n'appartienne pas à aucun des segments de la fonction de demande conjointe. Nous expliquons plus loin ce qui se passe lorsque le prix demandé par la firme se réalise à l'intérieur de la zone VWYX. Afin de mieux comprendre ce que représente la zone VWYX, ouvrons une parenthèse et établissons un parallèle entre la figure 10 et la fonction de demande conjointe de la figure 8.

**Figure 11 :** Influence de l'augmentation de la qualité du nouveau logiciel sur la réalision du prix sur la fonction de demande conjointe.




Revenons pour un moment à la figure 8 et jouons avec les pentes relatives de $D_a$ et $D_N$ pour observer ce qu'il arrive au prix lorsque la valeur de notre $\tilde{\theta}$ change. À la figure

11, on retrouve la droite $D_a$ et plusieurs droites $D_N$ de pentes différentes. Plus l'écart entre la droite $D_a$ et la droite $D_N$ est importante, plus la valeur du $\tilde{\theta}$ sera faible. Si l'on fixe un certain nombre $N_{S_1}$, le prix réalisé sur la fonction de demande conjointe se réalise sur le premier segment, puis sur le second segment pour un niveau d'amélioration $\tilde{\theta}$ plus important. Si l'on accentue davantage l'amélioration, le prix se réalisera le troisième segment de la fonction de demande conjointe. Ce déplacement sur la fonction de demande conjointe nous permet de comprendre pourquoi, à la droite $\tilde{\tilde{S}} = 1.5$ de la figure 10, on passe du segment 1, au segment 2, à la zone WVYX pour aboutir au troisième segment de la fonction de demande conjointe lorsque l'on augmente l'amélioration ($\tilde{\theta}$ se rapproche de zéro). Nous retardons délibérément l'explication de la nature de la zone WVYX afin de discuter d'abord du cas où l'amélioration de la nouvelle version est importante. La figure 11 nous permet de voir qu'il s'agit sensiblement du même raisonnement mais on commence le déplacement sur le second segment. On remarque toutefois à la figure 10, qu'avant de passer du second au troisième segment, il existe plusieurs $\tilde{\tilde{S}}$ pour lesquels le prix demandé par la firme ne se réalise pas sur la fonction de demande conjointe. Nous devons donc maintenant expliquer pourquoi cette zone WVXY entre le second et le troisième segment.

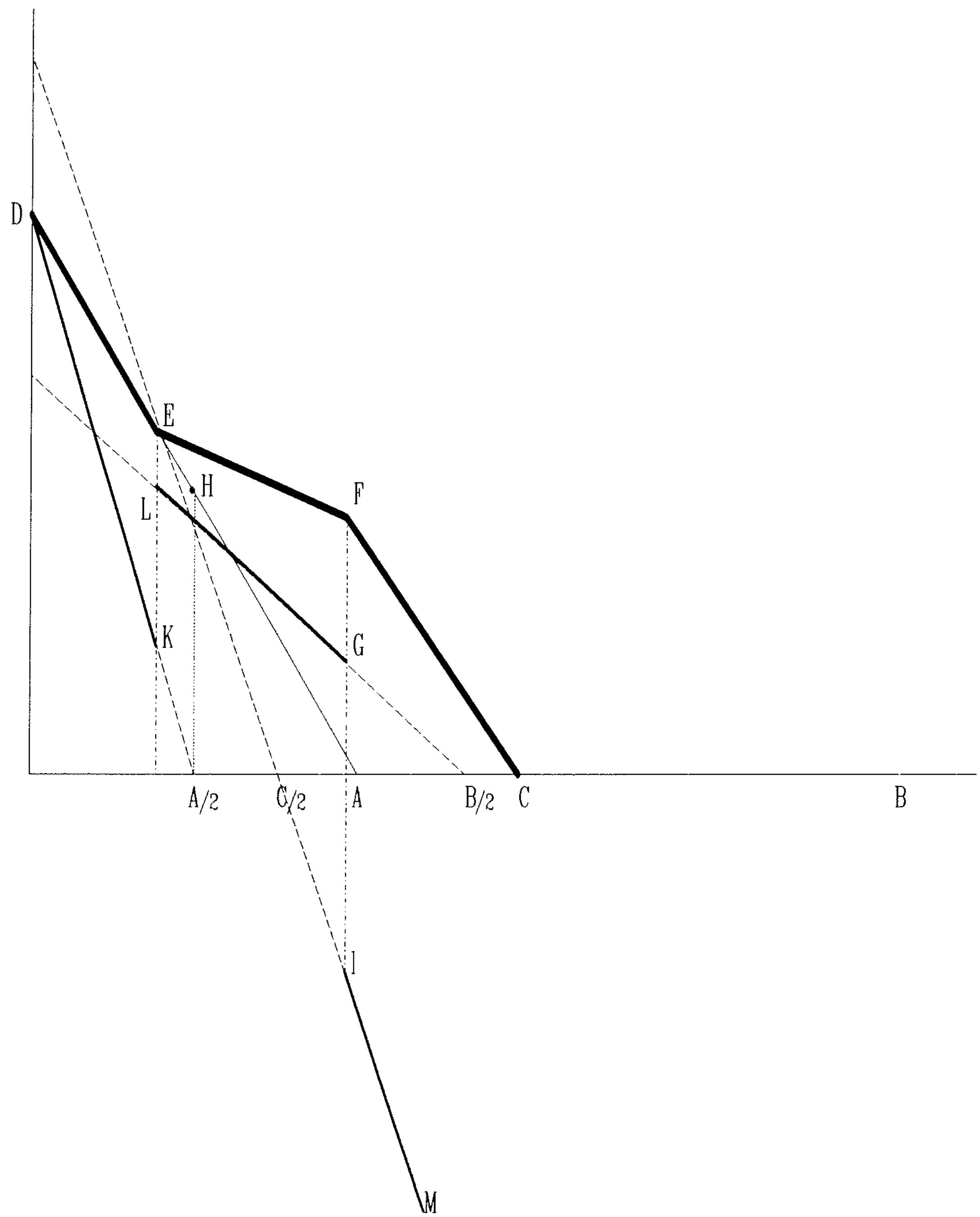
### 6) Explication de la zone VWXY des figures 9 et 10.

Il reste donc une grande zone définie par les points VWXY telle qu'aucun segment ne lui a été assigné. Cela voudrait dire qu'il existe un cas où il ne serait pas optimal de charger le prix sur l'un des trois segments.

La seule alternative disponible, serait alors de charger le prix dicté par l'une des intersections que peuvent former deux segments. Il faut remarquer que, parce que la fonction de demande n'est pas une seule droite continue, la dérivée de cette fonction n'est pas continue. Cette discontinuité peut forcer la firme à demander un prix qu'elle n'aurait pas demandé si elle n'était pas forcée à fixer qu'un seul prix. Examinons la figure 12 pour comprendre quelle est la nature de cette contrainte.

Prenons la fonction de demande DEFC de la figure 12, elle possède trois fonctions marginales, soit DK, LG et IM. Si on se fie à la marginale DK, la solution optimale serait H. Mais ce point n'est pas sur la fonction de demande ! Il faut donc arrêter la marginale au moment où le segment DE de la fonction de demande s'arrête. Le point K de la marginale n'est pas une solution optimale puisqu'elle arrête avant d'obtenir le point A/2. On poursuit notre recherche le long de la marginale du second segment. Cette fonction marginale, LG, s'arrête au point G, avant que l'on puisse obtenir le point B/2, un point offrant une solution optimale. Au point G, la marginale est positive ce qui indique qu'il y a possibilité d'améliorer les profits si l'on produit plus. Cependant si l'on procède à la marginale du troisième segment, IM, nous observons une marginale négative et produire d'avantage ne ferait que diminuer les profits ! La meilleure solution est le point G, le dernier point qui offre une marginale positive. Ce point projeté sur la fonction de demande nous amène au point F, soit sur le second coude de la fonction de demande.

**Figure 12 :** Comment le prix peut-il se réaliser sur le second coude de la fonction de demande conjointe ?



Notons que lorsque le prix unique demandé par la firme n'est pas sur l'un des trois segments de la fonction de demande conjointe, ce prix sera toujours à la seconde intersection (ou second coude) de la fonction de demande conjointe. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que si le prix ne se réalise pas sur un segment, c'est que le point d'intersection de la marginale avec l'abscisse se réalise au-delà de la partie appartenant à la fonction de demande conjointe. Si le segment suivant possède une pente plus prononcée, la marginale de ce dernier risque de rencontrer l'abscisse avant que ne débute la partie réalisable du segment. D'une part nous avons un prix qui se réalise là où la doite ne fait plus partie de la fonction, et d'autre part, nous avons un prix qui se réalise avant que le segment ne soit définit. L'intersection entre ces deux segments est alors l'unique solution. Ceci n'est possible que si le segment qui suit possède une pente plus accentuée. On ne rencontre cette relation qu'entre le second et le troisième segment de la fonction de demande conjointe de telle sorte que le prix doit se réaliser à l'intersection de ces deux segments si le prix ne peut pas être réalisé ailleurs.

Nous venons de décrire comment la firme procède pour déterminer un prix unique d'un logiciel lorqu'une ancienne version du même logiciel existe déjà sur le marché. On a vu que le nombre de propriétaires de l'ancienne version influence la politique de tarification de la firme. De plus, l'existence de la zone XVYX et le besoin d'une courbe (D) à la figure 10, nous suggère que la firme agirait différemment si elle pouvait discriminer entre les deux types de consommateurs. C'est pourquoi dans le prochain chapitre on permet la discrimination par les prix.

## CHAPITRE III : DISCRIMINATION ENTRE LES DEUX GROUPES DE CONSOMMATEURS.

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit comment une firme fixerait son prix de vente si elle ne devait demander qu'un seul prix à deux groupes de consommateurs différents. Ces deux groupes n'ont pas les mêmes exigences puisqu'un des deux groupes est déjà propriétaire d'une version antérieure du logiciel et profite donc d'un certain niveau d'utilité. La firme essaye donc de composer de son mieux avec la présence des deux groupes à l'aide d'une fonction de demande conjointe. Cependant ne serait-il pas mieux si la firme pouvait offrir un certain prix à un groupe et un autre prix à l'autre groupe sans se préoccuper de la différence existant entre ces deux groupes ? Cela est possible si l'on permet à la firme de discriminer. Par contre la discrimination n'est pas toujours possible. Pour qu'une firme puisse discriminer en prix sur un même marché, il faut que certaines conditions soient respectées.

Pour qu'une firme puisse discriminer sur un marché, il faut trois conditions. Premièrement, il faut que la firme possède un pouvoir de marché. Si la firme n'a pas de pouvoir de marché elle ne peut pas influencer le prix de vente et ne peut donc pas pratiquer de discrimination. Deuxièmement, il faut que la firme ait la possibilité de distinguer et de trier ses clients. Dans ce but, la firme demande souvent une preuve d'identité afin que le client démontre son appartenance au groupe cible. Par exemple, pour obtenir un tarif étudiant, le consommateur doit fournir une attestation d'incription à une institution scolaire reconnue lors de son achat. Enfin, troisièmement, il faut que la firme puisse empêcher la revente d'un consommateur à un autre. Habituellement, le client signe une entente lui interdisant de revendre le bien acheté et souvent il ne peut acheter qu'un seul exemplaire par année, de telle sorte que le client ne puisse s'enrichir du commerce de ce bien auprès des autres consommateurs. En permettant la firme de discriminer, on suppose que la firme répond aux trois conditions ci-haut mentionnées.

Si la firme peut demander un prix différent à chacun des deux groupes, on imagine bien que cette opportunité sera plus profitable pour la firme que l'alternative de demander un seul prix aux deux groupes. Cependant, pour des raisons de rigueur, nous allons vérifier si notre modèle suit cette intuition. Nous allons également examiner si la firme qui discrimine produit une quantité plus importante que la firme qui ne discrimine pas.

Avant de pouvoir répondre à toutes ces questions, nous aurons besoin d'établir un tableau semblable au tableau IV. Dans ce tableau, on retrouve le prix, la quantité et les profits provenant de la vente de logiciels dans chacun des deux groupes de consommateurs. Heureusement, la plupart de ces valeurs sont déjà calculées au tableau IV. Par exemple, la demande de ceux qui n'ont pas acheté la version originale du logiciel est représentée par l'équation $D'_N$. Nous connaissons également la fonction de demande $D'_a$, la demande des propriétaires de l'ancienne version du logiciel. Cependant lorsque nous avons déterminé la fonction de demande $D'_a$ à l'équation E5, nous n'avions pas cherché à déterminer le prix et la quantité optimale associée à cette droite. Rappelons-nous que la fonction de demande des propriétaires de l'ancienne version du logiciel nous est donné par $N=N_{S_1}\left(\frac{P_0-P}{P_0-P_1}\right)$. La quantité associée à la tarification optimale le long de la fonction de demande $D'_a$, nous est donnée par le point d'intersection de la marginale de $D'_a$ avec l'abscisse, soit par $N=\frac{1}{2}N_{S_1}\left(\frac{P_0}{P_0-P_1}\right)$.

Pour déterminer le prix optimal, il suffit ensuite d'égaler la quantité que nous venons d'obtenir avec la valeur de la fonction de demande $D'_a$. En isolant la variable P, on obtient $P = \frac{1}{2} P_0$ ou si l'on préfère $P = \frac{1}{2} S_{max} (\theta_N - \theta_a)$. Nous pouvons maintenant résumer toutes ces valeurs à l'intérieur d'un seul tableau ( le tableau V) où vont figurer le prix, la quantité et le profit pour les propriétaires et les non-propriétaires de l'ancienne version du logiciel. Nous allons également indiquer dans une troisième rangée, la somme de ces deux groupes. Cette rangée nous donnera la quantité et le profit réalisé lorsque la firme discrimine et reçoit donc deux sources de revenus différents provenant de ces deux groupes. Dans un tel contexte, effectuer la somme des prix demandés par les deux groupes n'a pas de sens, c'est pourquoi la case représentant cette somme reste vide.

Tableau V : Détermination de la quantité et du profit de la firme qui discrimine

| Groupe correspondant | Prix (P) | Quantité (Q) | Profit (Π) |
|---|---|---|---|
| Ceux qui n'ont pas l'ancienne version ($D'_N$) | $\frac{\theta_N}{2} S_1$ | $\frac{1}{2} \frac{S_1}{S_{max}-S_{min}}$ | $\frac{\theta_N}{4} \frac{S^2_1}{S_{max}-S_{min}}$ |
| Ceux qui possèdent l'ancienne version($D'_a$) | $\frac{\theta_N - \theta_a}{2} S_{max}$ | $\frac{1}{2} \frac{S_{max}}{S_{max}-S_{min}}$ | $\frac{\theta_N - \theta_a}{4} \frac{S^2_{max}}{S_{max}-S_{min}}$ |
| Somme des deux groupes ( $D'_N + D'_a$ ) | | $\frac{1}{2} \frac{S_{max}+S_1}{S_{max}-S_{min}}$ | $\frac{\theta_N S^2_1 + (\theta_N - \theta_a) S^2_{max}}{4(S_{max}-S_{min})}$ |

**A - Est-ce que la firme qui discrimine produit plus que la firme qui ne discrimine pas ?**

Au tableau IV, nous avons déterminé la quantité que la firme produit lorsqu'elle ne fixe qu'un seul prix sur le marché. Cette quantité change selon que l'on se trouve sur le premier, le second ou le troisième segment de la fonction de demande conjointe. Le tableau VI énumère les différentes quantités vendues selon que l'on se trouve sur l'un des trois segments de la fonction de demande conjointe ou selon que l'on discrimine entre les deux groupes de consommateurs.

**Tableau VI**: Notation utilisée pour les différentes quantités de logiciels vendus selon que l'on discrimine ou pas

| Cas | variable | Quantité |
|---|---|---|
| Cas 1 de la fonction de demande conjointe | $Q_1$ | $\frac{1}{2}\frac{S_1}{S_{max}-S_{min}}$ |
| Cas 2 de la fonction de demande conjointe | $Q_2$ | $\frac{1}{2}\frac{S_{max}+S_1}{S_{max}-S_{min}}$ |
| Cas 3 de la fonction de demande conjointe | $Q_3$ | $\frac{1}{2}\frac{S_{max}}{S_{max}-S_{min}}$ |
| Coude de la fonction de demande conjointe | $Q_C$ | $\frac{S_{max}-S_1(1-\tilde{\theta})}{S_{max}-S_{min}}$ |
| Cas de discrimination en prix | $Q_T$ | $\frac{1}{2}\frac{S_{max}+S_1}{S_{max}-S_{min}}$ |

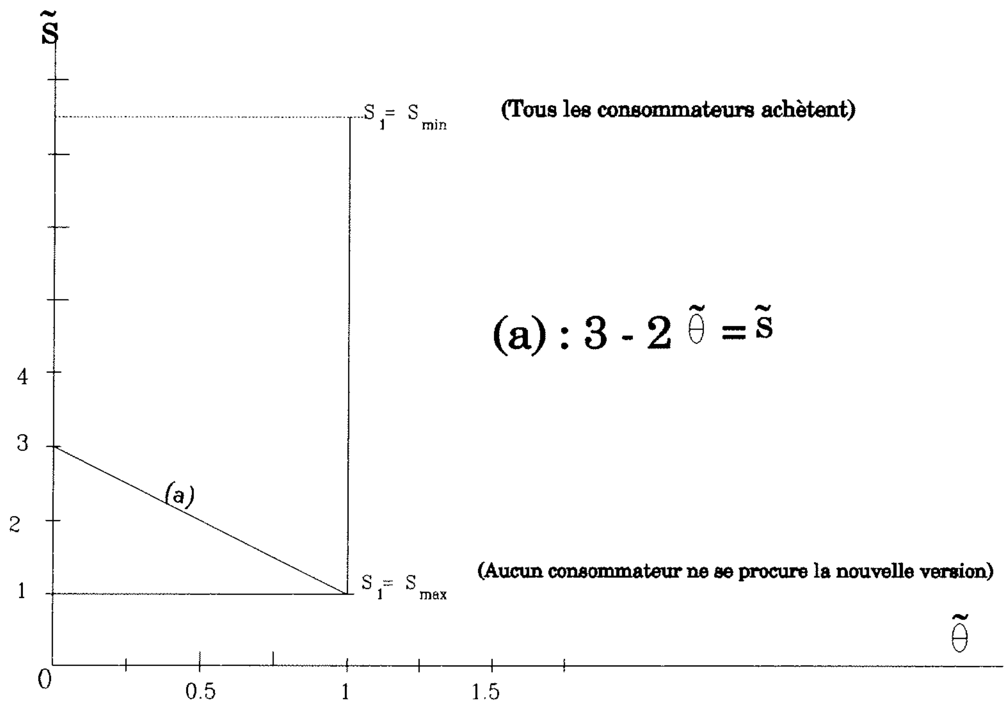
En regardant sur le tableau VI on peut immédiatement observer la relation suivante, $Q_T = Q_2 = Q_1+Q_3$. Rappelons-nous que $Q_1$ représente la quantité de logiciels vendus à ceux qui ne possèdent pas l'ancienne version du logiciel. De même, $Q_3$ représente le nombre de nouvelles versions vendues à ceux qui ne possèdent pas de logiciels et à cette quantité, le prix est tel que tous les propriétaires de l'ancienne version achètent la nouvelle version du logiciel.

L'égalité, $Q_T = Q_1+Q_3$, nous permet de constater que lorsqu'on discrimine selon le prix, on vend une plus grande quantité de logiciels que si l'on ne discrimine pas. Par exemple, si le prix unique se réalise sur le premier segment de la fonction de demande conjointe ( avec une quantité $Q_1$), la firme ne vend qu'à ceux qui n'ont pas l'ancienne version du logiciel. La quantité vendue est alors inférieure au cas où la firme discrimine entre les deux groupes de consommateurs, c'est-à-dire que $Q_T \geq Q_1$. Lorsqu'on fixe un seul prix et que celui-ci se réalise sur le premier ou le troisième segment de la fonction de demande conjointe, on vend donc moins de logiciels que si l'on discriminait. Cependant, il faut observer qu'un prix sur le premier segment implique que l'on vise qu'une seule partie de la population. Il est donc normal que l'on vende moins. De plus, dans le cas où le prix se réalise sur le troisième segment de la fonction de demande conjointe, c'est que le prix est tel que tous les propriétaires de la version originale achètent la nouvelle version, mais il n'en reste pas moins que sur le troisième segment seuls ceux qui n'ont pas le logiciel sont ciblés. Cependant, il faut se rappeler des conditions amenant un prix à se réaliser sur le troisième segment. À la figure 9, nous avons vu que pour que le prix se réalise sur le troisième segment de la fonction de demande conjointe, il faut que l'amélioration soit importante et que très peu de logiciels aient été vendu en première période. Alors le fait que sur le troisième segment tous les propriétaires de l'ancienne version achètent, n'implique pas que beaucoup de logiciels se vendent puisque ces derniers sont très peu nombreux. D'ailleurs à la figure 9, on observe que si beaucoup de versions originales se vendent la firme fixera son prix sur le second segment ce qui suggère que cette dernière situation est plus avantageuse.

Lorsque la firme demande un prix unique et que celui-ci se réalise sur le second segment de la fonction de demande conjointe, la firme obtient la même quantité que celle obtenue en discriminant ($Q_T = Q_2$ ). Ceci veut tout simplement dire que le nombre de propriétaires de l'ancienne version de logiciel n'est pas une donnée contraignante dans la détermination du prix de la nouvelle version, on ne peut donc pas vendre une plus grande quantité même en discriminant selon les prix. Autrement dit, si la quantité en discriminant et la quantité en discriminant sont les mêmes alors le prix pourra toujours se réaliser sur le second segment de la fonction de demande conjointe de telle sorte que le choix du $N_{S_1}$ initial permet une solution sur le second segment.

Par contre, il n'est pas aussi facile de voir si le cas où l'on produit sur le coude de la fonction de demande conjointe, génère une plus grande ou une plus petite quantité de logiciels que le cas où l'on discrimine entre les consommateurs. Pour résoudre ce problème nous posons $Q_T > Q_C$. En résolvant cette inégalité nous trouvons $3-2\tilde{\theta} > \tilde{S}$ (voir appendice l'équation E8). On illustre le domaine de définition de cette inégalité à la figure 13. L'inégalité est vérifiée sous la droite (A) de la figure 13, de telle sorte que la firme qui ne vend pas beaucoup sa version originale (près de $S_1 = S_{max}$) ne pourra vendre une plus grande quantité de logiciels que si elle discrimine par le prix de sa nouvelle version surtout si l'amélioration est considérable ($\tilde{\theta}$ près de zéro).

**Figure 13 :** Détermination graphique de la quantité la plus importante entre un prix réalisé sur le troisième segment et entre le cas avec discrimination.




**B - Comparaison des profits totaux obtenus en discriminant et des profits totaux obtenus en ne discriminant pas.**

Si l'on veut connaître quelle situation est la plus favorable pour la firme, c'est-à-dire entre discriminer et ne pas discriminer, il faut comparer les profits obtenus dans chacun des deux cas. Algébriquement, le cas où la firme discrimine en prix reste identique quelque soit la quantité de logiciels vendus. Cependant, dans le cas où la firme demande un prix unique, la fonction de profit change selon que l'on se trouve sur le premier, le second ou le troisième segment de la fonction de demande conjointe. Pour s'assurer que, selon notre modèle, le cas de discrimination en prix rapporte plus, il faut comparer les profits provenant de la discrimination avec le profit provenant de chacun des trois segments de la fonction de demande conjointe. Avant d'effectuer ces comparaisons prenons note du tableau VII qui résume les notations qui seront utilisées.

Tableau VII: Notation utilisée pour décrire les profits avec ou sans discrimination

| | |
|---|---|
| $\Pi_T$ | Profit total de la firme lorsqu'il y a discrimination par les prix entre les deux groupes. |
| $\Pi_{Cas1}$ | Profit total de la firme lorsqu'un seul prix est demandé aux deux groupes de consommateurs et que ce prix se réalise sur le premier segment. |
| $\Pi_{Cas2}$ | Profit total de la firme lorsqu'un seul prix est demandé aux deux groupes de consommateurs et que ce prix se réalise sur le second segment. |
| $\Pi_{Cas3}$ | Profit total de la firme lorsqu'un seul prix est demandé aux deux groupes de consommateurs et que ce prix se réalise sur le troisième segment. |
| $\Pi_C$ | Profit total de la firme lorsqu'un seul prix est demandé aux deux groupes de consommateurs et que ce prix se réalise sur le second coude de la fonction de demande conjointe. |

Puisque $\Pi_{Cas1}$ est une composante de $\Pi_T$, il est clair que $\Pi_T \geq \Pi_{Cas1}$. D'ailleurs, si l'on effectue l'inégalité $\Pi_T \geq \Pi_{Cas1}$ on obtient $\frac{\theta_N - \theta_a}{4} \frac{S^2_{max}}{S_{max}-S_{min}} \geq 0$. Or le seul cas qui nous amènerait à observer $\Pi_T = \Pi_{Cas1}$ , serait dans le cas où $\theta_N = \theta_a$. Ceci est compréhensible, si la version améliorée est la même que l'ancienne version, alors discriminer entre les deux groupes n'apporte rien de plus.

Maintenant, comparons le profit obtenu si le prix se réalise sur le troisième segment de la fonction de demande conjointe avec le profit résultant de la discrimination entre les deux groupes de consommateurs. On pose donc l'inégalité $\Pi_T \geq \Pi_{Cas3}$. En résolvant cette inégalité, on obtient $\frac{1}{\tilde{\theta}} \geq \tilde{S}$ (voir équation E9 en appendice pour les étapes). Cette inégalité nous indique que lorsque l'on vend très peu de versions originales, et que la nouvelle version comporte beaucoup d'améliorations, discriminer rapporte toujours plus à la firme.

Lorsqu'un prix se réalise sur le second coude de la fonction de demande conjointe, c'est que le point de tarification optimale pour les propriétaires de l'ancienne version n'appartient pas à la fonction de demande conjointe. Cependant, étant donné le nombre de propriétaires de l'ancienne version, le prix obtenu au second coude est le mieux que la firme puisse faire si l'on demande qu'un seul prix au deux groupes. L'existence d'une solution optimale hors de la fonction de demande conjointe suggère que n'exiger qu'un seul prix est alors contraignant. Si l'on relâche cette contrainte, c'est-à-dire fixer deux prix au lieu d'un, alors on ne peut que faire mieux puisque la contrainte ne joue plus !

Finalement, il nous reste à examiner les profits dans le cas où la firme vend aux deux groupes de consommateurs et où elle vend la même quantité de logiciels qu'elle pratique de la discrimination ou pas. Si l'on effectue l'inégalité $\Pi_T \geq \Pi_{Cas2}$, on remarque que celle-ci est toujours vérifiée (voir équation E10 en appendice pour étapes). Cela veut dire que même si sur le second segment de la fonction de demande conjointe on peut vendre autant de logiciels, le cas avec discrimination rapporte toujours un profit plus important.

**EXTENSION DU MODELE**

Le modèle exposé dans ce mémoire est relativement simple. Par exemple lorsque la valeur de la variable $\theta$ augmente, elle indique qu'une amélioration a été apportée au logiciel. Dans notre modèle une telle augmentation est toujours préférable du point de vu du consommateur. Cependant on peut très bien imaginer une situation plus nuancée où l'amélioration ne serait pas toujours bénéfique pour le consommateur. L'augmentation de la valeur de $\theta$ pourrait également causer des inconvénients aux consommateurs par le biais de coûts supplémentaires. Par exemple, l'amélioration apportée au logiciel pourrait nécessiter un ordinateur plus performant. Si le consommateur ne possède pas un tel ordinateur, il serait obligé d'en acheter un s'il veut profiter des améliorations apporter au logiciel. On voit bien que ce nouveau logiciel nécessite alors des coûts supplémentaires. Des auteurs comme Lancaster [1979] explique ce qui se passe lorsque l'on décompose la qualité à l'aide de plusieurs variables. Lorsque l'on décompose la qualité en deux, on se rend compte que l'augmentation du bien-être du consommateur dépends énormément de la fonction d'utilité. Dans notre exemple de l'ordinateur, si $\theta_1$ représente l'apport du logiciel et $\theta_2$ le coût de mettre à jour l'équipement, on doit se demander si $U(\theta_1,\theta_2)$ augmente ou diminue. Clairement la forme d'$U(\theta_1,\theta_2)$ est importante. Dans le mémoire on fait l'hypothèse que $\theta_2=0$. Si des données numériques avait été disponible, on aurait pu se servir des méthodes décrit dans Feenstra [1988] pour établir une étude empirique et ainsi établir quel est le facteur de qualité que les consommateurs préfèrent.

On aurait pu également enlever la myopie des agents. Les firmes pourraient alors entrevoir différentes stratégies. Premièrement, les firmes pourraient se commettre à fixer le prix de la mise à jour de seconde période. La firme pourrait alors chercher plus de consommateurs en première période si ceux qui s'intéressent à la nouvelle version trouvent plus intéressant d'acheter la mise à jour plutôt que le prix de la nouvelle version de seconde période. Ainsi on s'aperçoit que plus l'écart entre le prix de la nouvelle version et celle de la mise à jour est grand, plus il y a de de consommateurs qui trouveront intéressant l'achat en première période. On voit que dans ce cas, les firmes peuvent se servir des prix en plus de la qualité du logiciel pour cibler un groupe particulier de consommateurs. Deuxièmement, les firmes pourraient ne pas se commettre à fixer le prix de mis à jour et discriminer en seconde période. Troisièmement, les firmes pourraient ne pas se commettre sur le prix de la mise à jour mais se commettre à ne pas discriminer en seconde période. À l'aide de ces deux dernières situations, on pourrait alors examiner comment la discrimination affecte la tarrification des logiciels en seconde période.

# CONCLUSION

Aujourd'hui, une firme qui introduit un logiciel sur le marché risque de rencontrer la présence d'un autre logiciel concurrent semblable. Le logiciel déjà présent peut venir de la même firme ou d'un concurrent, mais l'important, c'est que le logiciel soit semblable et ne diffère que par la qualité. Il faut donc composer avec deux groupes de consommateurs. Un groupe possède le logiciel de la firme et l'autre ne le possède pas. Comment la présence de ces deux groupes influence-t-elle la politique de tarification de la firme ? Pour y répondre, nous avons construit une fonction de demande conjointe qui tient compte des préférences des deux groupes. On observe que les propriétaires et les non-propriétaires de l'ancienne version ne réagissent pas de la même façon face à l'entrée d'une nouvelle version du logiciel. Ceux qui possèdent déjà une ancienne version ne sont pas prêts à payer autant que les autres pour la nouvelle version du logiciel. Ceci s'explique par le fait que les propriétaires de l'ancienne version profitent déjà de l'utilité de l'ancienne version.

Du côté de la firme, on observe que le nombre de versions originales vendues influence beaucoup le prix ainsi que le niveau d'amélioration apporté au nouveau logiciel. Par exemple, si la firme ne vend aucune version originale, le prix de la nouvelle version ne changera pas et il n'y aura aucune amélioration apportée à la nouvelle version. On remarque également que le nombre de versions originales vendues et l'amélioration apportée au logiciel sont interdépendants et même que certaines combinaisons de ces deux variables permettent d'atteindre un des deux groupes en particulier. Par exemple, si une quantité moyenne de versions originales est vendue et si peu d'améliorations sont apportées à la nouvelle version alors seuls ceux qui ne possèdent pas le logiciel seront intéressés par celle-ci. On constate également qu'en seconde période, la firme doit se servir du nombre de versions originales vendues comme une donnée et ne peut réagir que par rapport à l'amélioration qu'elle apporte au logiciel.

Dans la partie que nous venons de décrire, nous nous servons toujours de la fonction de demande conjointe car nous supposons que la firme ne peut pas discriminer et doit donc demander le même prix auprès des deux groupes. Si l'on relâche cette contrainte, on remarque que la quantité de logiciels vendus peut ne pas changer. Cependant la firme qui discrimine peut aller chercher une part plus importante du surplus des consommateurs, de telle sorte qu'à moins qu'il n'y ait aucune différence entre le nouveau et l'ancien logiciel, le profit de la firme augmente.

# REFERENCES

**Benjamin, D. et Kormendi, R.,** "The interrelationship between markets for new and used durable goods", *Journal of Law and Economics*, October 1974, p381-402

**Besen, S.M., and S,N. Kirby**, "An introduction to the Law and Economics of Intellectual Property" *Journal of Economic Perspectives*, 1991,vol 5, no 1, p3-27.

**Bond, E.W.**, "The effect of used markets with endogenous replacement of durable goods", *Southern Economic Journal*, Vol. 53, 1986, p422-431.

**Coase, R.H.**, "Durability and monopoly", *Journal of Law and Economics*, October 1972, p143-149.

**Feenstra, R.** "Empirical Methods for Internationnal Trade", *MIT Press*, 1988

**French, G.**, "Contracts and the provision of durability", *Quaterly Review of Economics and Business*, Vol.20, no 1, Spring 1988, p6-20.

**Hirshleifer, J.**, "Suppression of inventions", *Journal of Political Economy*, March/April 1971, vol 79, p382-383.

**Lancaster, K.** "Variety, Equity and Efficiency", *Columbia University Press*, 1979

**Liebowitz, S.J.**, "Durability, markets structure, and new-used goods models", *American Economic Review*, September 1982, p816-824.

**Miller, L.H.**, "On killing off the market for used textbooks", *Journal of Political Economy*, May 1974, p612-620.

**Mussa, M. and Rosen, S.** "Monopoly and product quality", *Journal of Economic Theory*, August 1978, 18(2), p301-317.

**Schmalensee, R.**, "Market structure, durability and quality: a selective survey", *Economic Inquiry*, April 1979, Vol. 17, p177-196.

**Swan, P.L.**, "Durability of consummer goods", *American Economic Review*, December 1970, Vol.60, p884-894.

__________, "Optimum durability, second hand markets, and planned obsolescence", *Journal of Political Economy*, May 1972, vol 80, p575-585.

## APPENDICE

Étapes de la dérivation de l'équation (E4) :

Si $N = \dfrac{\delta - N_{S_1}}{2}$ que vaut P?

$$\Rightarrow \frac{\delta - N_{S_1}}{2} = \delta - \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\theta_n} - N_{S_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\theta_n} = \delta - \frac{\delta - N_{S_1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta - N_{S_1}}{2} = \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\theta_n}$$

$$\Leftrightarrow P = \theta_n \frac{\delta - N_{S_1}}{2}(S_{max} - S_{min})$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{\theta_n}{2}(S_{max} - S_{min})\left(\frac{S_{max}}{(S_{max} - S_{min})} - \frac{S_{max} - S_1}{(S_{max} - S_{min})}\right)$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{\theta_n}{2} S_1$$

Étapes de la dérivation de l'équation (E5) :

$$\frac{1}{2}\left(\delta + N_{S_1}\frac{P_1}{P_0 - P_1}\right) = \delta - \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\theta_n} + N_{S_1}\frac{P - P_1}{P_1 - P_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} N_{S_1}\frac{P_1}{P_0 - P_1} = \frac{1}{2}\delta - \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\theta_n} + N_{S_1}\frac{P_1}{P_0 - P_1} - N_{S_1}\frac{P}{P_0 - P_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{(S_{max} - S_{min})\theta_n} = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}N_{S_1}\frac{P_1}{P_0 - P_1} - N_{S_1}\frac{P}{P_0 - P_1}$$

$$\Leftrightarrow P\left[\frac{1}{(S_{max} - S_{min})\theta_n} + N_{S_1}\frac{1}{P_0 - P_1}\right] = \frac{1}{2}\left[\delta + N_{S_1}\frac{P_1}{P_0 - P_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left[\frac{1}{(S_{max}-S_{min})\theta_n}+\frac{S_{max}-S_1}{S_{max}-S_{min}}\frac{1}{P_0-P_1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{S_{max}}{S_{max}-S_{min}}+\frac{S_{max}-S_1}{S_{max}-S_{min}}\frac{P_1}{P_0-P_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left[\frac{1}{\theta_n}+(S_{max}-S_1)\frac{1}{P_0-P_1}\right]=\frac{1}{2}\left[S_{max}+(S_{max}-S_1)\frac{P_1}{P_0-P_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left[\frac{P_0-P_1+(S_{max}-S_1)\theta_n}{(P_0-P_1)\theta_n}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{S_{max}(P_0-P_1)\theta_n+\theta_n(S_{max}-S_1)P_1}{(P_0-P_1)\theta_n}\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left[P_0-P_1+(S_{max}-S_1)\theta_n\right]=\frac{1}{2}\left[S_{max}(P_0-P_1)\theta_n+\theta_n(S_{max}-S_1)P_1\right]$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{1}{2}\left[\frac{S_{max}(P_0-P_1)\theta_n+\theta_n(S_{max}-S_1)P_1}{P_0-P_1+(S_{max}-S_1)\theta_n}\right]$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{\theta_n}{2}\left[\frac{S_{max}(\theta_n-\theta_a)(S_{max}-S_1)+(S_{max}-S_1)(\theta_n-\theta_a)S_1}{(\theta_n-\theta_a)(S_{max}-S_1)+(\theta_n)(S_{max}-S_1)}\right]$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{\theta_n}{2}\left[\frac{S_{max}(\theta_n-\theta_a)+(\theta_n-\theta_a)S_1}{(\theta_n-\theta_a)+(\theta_n)}\right]$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{\theta_n}{2}(\theta_n-\theta_a)\left[\frac{S_{max}+S_1}{\theta_n-\theta_a+\theta_n}\right]$$

$$\Leftrightarrow P=\theta_n\frac{\theta_n-\theta_a}{2\theta_n-\theta_a}\left[\frac{S_{max}+S_1}{2}\right]$$

Étapes de la dérivation de l'équation (E6) :

$$P=\theta_n\frac{\theta_n-\theta_a}{2\theta_n-\theta_a}\left(\frac{S_{max}+S_1}{2}\right)\leq P_0$$

$$\Leftrightarrow \theta_n\frac{\theta_n-\theta_a}{2\theta_n-\theta_a}\left(\frac{S_{max}+S_1}{2}\right)\leq(\theta_n-\theta_a)S_{max}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta_n}{2\theta_n-\theta_a}\left(\frac{S_{max}+S_1}{2}\right)\leq S_{max}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{S_{max}+S_1}{S_{max}}\right)\leq\frac{2\theta_n-\theta_a}{\theta_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{S_1}{S_{max}}\right)\leq 2-\frac{\theta_a}{\theta_n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{S_1}{S_{max}} \leq \frac{4}{2} - \frac{\theta_a}{\theta_n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{S_1}{S_{max}} \leq \frac{3}{2} - \frac{\theta_a}{\theta_n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{S_1}{S_{max}} \leq 3 - 2(\frac{\theta_a}{\theta_n})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{S_1}{S_{max}} \leq 1 + 2(\frac{\theta_n - \theta_a}{\theta_n})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{S_1 - S_{max}}{S_{max}} \leq 2(\frac{\theta_n - \theta_a}{\theta_n})$$

Étapes de la dérivation de l'équation (E7) :

$$\Leftrightarrow \quad S_1\ (\theta_n - \theta_a) < \theta_n\ \frac{\theta_n - \theta_a}{2\theta_n - \theta_a}\left(\frac{S_{max} + S_1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad S_1 < \frac{\theta_n}{2\theta_n - \theta_a}\left(\frac{S_{max} + S_1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - \frac{\theta_a}{\theta_n} < \frac{1}{2}\left(\frac{S_{max}}{S_1} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{2} - \frac{\theta_a}{\theta_n} < \frac{1}{2}\ \frac{S_{max}}{S_1} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} - \frac{\theta_a}{\theta_n} < \frac{1}{2}\frac{S_{max}}{S_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 - 2(\frac{\theta_a}{\theta_n}) < \frac{S_{max}}{S_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + 2(\frac{\theta_n - \theta_a}{\theta_n}) < \frac{S_{max}}{S_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\frac{\theta_n - \theta_a}{\theta_n}) < \frac{S_{max} - S_1}{S_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(1 - \tilde{\theta}) < \tilde{S} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 - 2\tilde{\theta} < \tilde{S}$$

Étapes de la dérivation de l'équation (E8) :

$$Q_T = \frac{1}{2}\frac{S_{Max} + S_1}{S_{Max} - S_{Min}} > Q_c = \frac{S_{Max} - S_1(1 - \tilde{\theta})}{S_{Max} - S_{Min}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(S_{Max}+S_1) > S_{Max}-S_1(1-\tilde{\theta})$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_1 + S_1(1-\tilde{\theta}) > \frac{1}{2}S_{Max}$$
$$\Leftrightarrow S_1(\frac{3}{2}-\tilde{\theta}) > \frac{1}{2}S_{Max}$$
$$\Leftrightarrow S_1(3-2\tilde{\theta}) > S_{Max}$$
$$\Leftrightarrow (3-2\tilde{\theta}) > \tilde{S}$$

Étapes de la dérivation de l'équation (E9) :

$$\Pi_T > \Pi_{Cas3} \Leftrightarrow \frac{\theta_N}{4}\frac{S^2{}_1}{S_{Max}-S_{Min}} + \frac{\theta_N - \theta_a}{4}\frac{S^2{}_{Max}}{S_{Max}-S_{Min}} > \frac{\theta_N}{4}\frac{S^2{}_{Max}}{S_{Max}-S_{Min}}$$
$$\Leftrightarrow \theta_N S^2{}_1 + (\theta_N - \theta_a) S^2{}_{Max} > \theta_N S^2{}_{Max}$$
$$\Leftrightarrow \theta_N S^2{}_1 > \theta_a S^2{}_{Max}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tilde{S}} > \tilde{\theta}$$

Étapes de la dérivation de l'équation (E10) :

Posons $A = (\frac{\theta_N}{2} S_1)(\frac{1}{2}\frac{S_1}{S_{max}-S_{min}})$

$$B = (\frac{\theta_N - \theta_a}{2} S_{max})(\frac{1}{2}\frac{S_{max}}{S_{max}-S_{min}})$$
$$C = (\frac{\theta_N - \theta_a}{2\theta_N - \theta_a})\frac{S_{max}+S_1}{2}\theta_N(\frac{1}{2}\frac{S_1}{S_{max}-S_{min}})$$
$$D = (\frac{\theta_N - \theta_a}{2\theta_N - \theta_a}\frac{S_{max}+S_1}{2}\theta_N)(\frac{S_{max}}{S_{max}-S_{min}})$$

$\Pi_T \geq P_{cas2} \Leftrightarrow A + B \geq C + D$

Donc pour que $\Pi_T \geq P_{cas2}$ il suffit de vérifier qu'on a $A \geq C$ et $B \geq D$.

Or $A \geq C$

$$\Leftrightarrow (\frac{\theta_N}{2} S_1) \geq (\frac{\theta_N - \theta_a}{2\theta_N - \theta_a})\frac{S_{max}+S_1}{2}\theta_N$$
$$\Leftrightarrow \frac{2-\tilde{\theta}}{1-\tilde{\theta}} \geq \frac{1}{\tilde{S}} + 1$$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2 - \tilde{\theta} - 1 + \tilde{\theta}}{1 - \tilde{\theta}} \geq \dfrac{1}{\tilde{S}}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{1 - \tilde{\theta}} \geq \dfrac{1}{\tilde{S}}$

$\Leftrightarrow \quad \tilde{S} \geq 1 - \tilde{\theta}$ toujours vrai puisque $\tilde{S} \geq 1 \geq 1 - \tilde{\theta}$

Vérifions maintenant si B $\geq$ D

$\Leftrightarrow \quad (\dfrac{\theta_N - \theta_a}{2} S_{max}) \geq (\dfrac{\theta_N - \theta_a}{2\theta_N - \theta_a} (S_{max} + S_1)\theta_N)$

$\Leftrightarrow \quad 2 - \tilde{\theta} \geq 1 + \dfrac{1}{\tilde{S}}$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \tilde{\theta} \geq \dfrac{1}{\tilde{S}}$ ce qui est vrai

**Puisque l'on a A $\geq$ C et B $\geq$ D alors l'inégalité $\Pi_T \geq P_{cas2}$ est vérifiée.**