

Université de Montréal

MÉTHODES D'INFÉRENCE EXACTES POUR DES  
MODÈLES DE RÉGRESSION AVEC ERREURS AUTORÉGRESSIVES  
ET APPLICATIONS MACROÉCONOMIQUES

par

Malika NEIFAR

Département de Sciences économiques

Faculté des Arts et Sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Philosophiae Doctor (Ph.D.)  
en sciences économiques

Décembre, 1995

© Neifar Malika, 1995

CENTRE DE DOCUMENTATION  
05 MARS 1996  
SCIENCES ÉCONOMIQUES UQAM

Université de Montréal  
Faculté des Arts et Sciences

Cette thèse intitulée:

MÉTHODES D'INFÉRENCE EXACTES POUR DES  
MODÈLES DE RÉGRESSION AVEC ERREURS AUTORÉGRESSIVES  
ET APPLICATIONS MACROÉCONOMIQUES

Présentée par:

Malika NEIFAR

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

## SOMMAIRE

L'inférence dans les modèles dynamiques constitue l'un des problèmes fondamentaux de l'économétrie. La plupart des méthodes d'inférence (tests et régions de confiance) disponibles pour les processus autorégressifs et les modèles de régression avec erreurs autocorrélées sont basées sur des approximations asymptotiques obtenues en supposant que la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

Les objectifs principaux de cette thèse sont les suivants:

- (1) proposer des méthodes d'inférence exactes pour des processus autorégressifs d'ordre  $p \geq 1$ ;
- (2) développer des méthodes d'inférence valides (ou exactes) pour une classe générale de modèles de régression linéaires dont les erreurs suivent un processus autorégressif;
- (3) développer des tests de changement structurel applicables dans le cadre de tels modèles;
- (4) appliquer les différentes méthodes proposées à des données tunisiennes et américaines.

Les méthodes proposées sont fondées sur la combinaison de trois techniques principales: (1) utilisation de tests induits (dont les niveaux sont relativement faciles à borner) ainsi que de tests à bornes généralisés; (2) recherche des transformations qui permettent d'éliminer les paramètres de nuisance des distributions des statistiques; (3) utilisation de tests de Monte Carlo.

Les méthodes proposées sont appliquées à des séries macroéconomiques tunisiennes et américaines.

## TABLE DES MATIÈRES

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| SOMMAIRE .....              | i   |
| TABLE DES MATIÈRES .....    | iii |
| LISTE DES TABLEAUX .....    | vii |
| LISTE DES FIGURES .....     | ix  |
| INTRODUCTION GÉNÉRALE ..... | 1   |

**ESSAI I: MÉTHODES D'INFÉRENCE EXACTE POUR UN MODÈLE DE RÉGRESSION AVEC ERREURS AR(2): UNE APPROCHE FONDÉE SUR DES TESTS INDUITS CONTRE L'AUTOCORRÉLATION**

|   |    |
|---|----|
| 1. Introduction .....   | 9  |
| 2. Modèle et notations .....  | 11 |
| 3. Construction de régions de confiance pour $\phi_1$ et $\phi_2$ .....                       | 15 |
| 4. Construction de régions de confiance conjointes pour $\phi_1$ , $\phi_2$ et $\gamma$ ..... | 19 |
| 5. Construction de régions de confiance marginales et des tests à bornes pour $\gamma$ .....  | 22 |
| 6. Exemple numérique et application au P.I.B réel tunisien .....                              | 24 |
| Références .....  | 39 |

**ESSAI II: MÉTHODES D'INFÉRENCE EXACTES POUR DES PROCESSUS AUTORÉGRESSIFS: UNE APPROCHE FONDÉE SUR DES TESTS INDUITS**

|   |    |
|---|----|
| 1. Introduction .....                                 | 44 |
| 2. Modèle et notations. ....                          | 47 |
| 3. Test de l'hypothèse $H_0: \theta = \theta_0$ ..... | 48 |

|   |    |
|---|----|
| 4. Région de confiance pour $\theta$ .....  | 51 |
| 4.1 Processus AR(1) .....                   | 52 |
| 4.2 Processus AR(2) .....                   | 54 |
| 4.3 Processus AR(p) .....                   | 57 |
| 5. Tests d'hypothèses générales .....       | 60 |
| 6. Validité asymptotique des tests .....    | 62 |
| 7. Application au P.I.B réel tunisien ..... | 64 |
| Références .....                            | 73 |

**ESSAI III: MÉTHODES D'INFÉRENCE EXACTES POUR DES PROCESSUS  
AUTORÉGRESSIFS PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE TRONQUÉ**

|   |     |
|---|-----|
| 1. Introduction .....   | 78  |
| 2. Modèle et notations .....                                    | 80  |
| 3. Test de l'hypothèse $H_0(\theta_0): \theta = \theta_0$ ..... | 83  |
| 3.1 Approche fondée sur les moindres carrés ordinaires .....    | 85  |
| 3.2 Approche fondée sur les moindres carrés contraints .....    | 89  |
| 4. Application au P.I.B réel tunisien .....                     | 97  |
| Annexe .....  | 102 |
| Preuves des lemmes .....  | 103 |
| Preuves des propositions .....                                  | 106 |
| Conditions de stationnarité .....                               | 108 |
| Illustrations des méthodes par des données simulées .....       | 111 |
| Références .....  | 117 |

**ESSAI IV: MÉTHODES D'INFÉRENCE EXACTES POUR DES MODÈLES DE RÉGRESSION AVEC ERREURS AUTORÉGRESSIVES: EXTENSIONS DE L'APPROCHE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE TRONQUÉ**

|   |     |
|---|-----|
| 1. Introduction   | 121 |
| 2. Modèle et notations  | 123 |
| 3. Test de l'hypothèse $H_0(\theta_0): \theta = \theta_0$                       | 124 |
| 3.1 Méthodes fondées sur des autorégressions de résidus transformés             | 125 |
| 3.1.1 Approches fondées sur les moindres carrées ordinaires                     | 125 |
| 3.1.2. Approches fondées sur les moindres carrées contraints                    | 131 |
| 3.2 Méthodes fondées sur des régressions de résidus transformés sur des résidus | 134 |
| 4. Illustrations numériques   | 137 |
| 5. Application à un modèle du P.I.B réel tunisien                               | 139 |
| Annexe  | 167 |
| Références  | 169 |

**ESSAI V: TESTS EXACTS CONTRE LE CHANGEMENT STRUCTUREL POUR DES MODÈLES DE RÉGRESSION AVEC ERREURS AUTORÉGRESSIVES**

|  |     |
|--|-----|
| 1. Introduction  | 173 |
| 2. Modèle et notations   | 174 |
| 3. Tests d'analyse de covariance   | 178 |
| 3.1 Test induit  | 179 |
| 3.2 Test de Chow généralisé  | 180 |
| 3.3 Test de Chow en deux étapes  | 184 |
| 3.4 Test de Chow permettant l'instabilité des paramètres autorégressives | 186 |
| 3.5 Test de Chow avec date de rupture inconnue sous l'alternative        | 188 |

4. Tests prédictifs de Chow ..... 192

    4.1 Test prédictif global ..... 192

    4.2 Test prédictif individuel ..... 195

5. Applications économiques ..... 196

    Références ..... 210

**CONCLUSION GÉNÉRALE ..... 213**

## LISTE DES TABLEAUX

## ESSAI I

Tableau I: Intervalles de confiance avec les niveaux:

|   |    |
|---|----|
| $\alpha = 0.15$ , $\alpha_1 = 0.12$ , $\alpha_2 = 0.03$ , $\alpha_{11} = 0.02$ , $\alpha_{12} = 0.10$ . . . . . | 30 |
| (a) Calcul par Imhof (bornes exactes) . . . . .   | 30 |
| (b) Résultats fondés sur l'utilisation de points critiques tabulés . . . . .                                    | 30 |
| (c) $\alpha_1 = 0$ , $\alpha = \alpha_2 = 0.15$ . . . . .   | 31 |
| (d) Résultats asymptotiques . . . . .   | 31 |

Tableau II: Intervalles de confiance avec les niveaux:

|  |    |
|--|----|
| $\alpha = 0.10$ , $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.05$ , $\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0.025$ . . . . . | 32 |
| (a) Calcul par Imhof (borne exactes) . . . . .   | 32 |
| (b) Résultats asymptotiques . . . . .  | 33 |

## ESSAI IV

Tableau I: Intervalles de confiance simultanés pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  et non simultanés pour les

|  |     |
|--|-----|
| paramètres de régression . . . . .   | 143 |
| 1) Résultats des méthodes fondées sur des autorégressions de résidus transformés . . . . .             | 143 |
| (a) Résultats de l'approche fondée sur les moindres carrés ordinaires ( $p_1 = 5$ ) . . . . .          | 143 |
| (b) Résultats de l'approche fondée sur les moindres carrés contraints . . . . .                        | 143 |
| 2) Résultats de la méthode fondée sur des régressions de résidus transformés sur des résidus . . . . . | 144 |

|   |     |
|---|-----|
| 3) Résultats asymptotiques . . . . .  | 144 |
| 4) Résultats des tests induits . . . . .  | 145 |
| Tableau II "modèle (5.1)" intervalles de confiance pour $\theta_1$ , $\theta_2$ et $\tilde{\beta}_1$ . . . . .              | 146 |
| Tableau III "modèle (5.2)" intervalles de confiance pour $\theta_1$ , $\theta_2$ , $\tilde{\beta}_1$ et $\beta_2$ . . . . . | 147 |
| <b>ESSAI V</b>  |     |
| Tableau I: Estimation par maximum de vraisemblance du modèle (5.1) . . . . .  | 202 |
| Tableau II: Tests prédictifs individuels au niveau $\alpha = 0.10$ "P.I.B" . . . . .  | 203 |
| Tableau III: Estimation par maximum de vraisemblance du modèle (5.2) . . . . .  | 204 |
| Tableau IV: Tests prédictifs individuels au niveau $\alpha = 0.10$ "investissement" . . . . .                               | 205 |

## LISTE DES FIGURES

## ESSAI I

|   |    |
|---|----|
| Figure 1: "exemple numérique" Régions de confiance simultanées pour $\phi_1$ et $\phi_2$<br>( $1 - \alpha_1 = 0.88$ ) | 34 |
|---|----|

|  |    |
|--|----|
| (a) Points critiques calculés par l'algorithme d'Imhof | 34 |
| (b) Points critiques tabulés                           | 34 |
| (c) Région asymptotique                                | 35 |

|   |    |
|---|----|
| Figure 2: "exemple numérique" Régions de confiance simultanées pour $\phi_1$ et $\phi_2$<br>( $1 - \alpha_1 = 0.95$ ) | 36 |
|---|----|

|  |    |
|--|----|
| (a) Points critiques calculés par l'algorithme d'Imhof | 36 |
| (b) Région asymptotique                                | 36 |

|   |    |
|---|----|
| Figure 3: "cas du P.I.B réel tunisien" Régions de confiance asymptotique pour $\phi_1$ et $\phi_2$<br>( $1 - \alpha_1 = 0.95$ ) | 37 |
|---|----|

|  |    |
|--|----|
| Figure 4: "cas du P.I.B réel tunisien" Régions de confiance simultanée pour $\phi_1$ et $\phi_2$<br>( $1 - \alpha_1 = 0.95$ ) "points critiques calculés par l'algorithme d'Imhof" | 38 |
|--|----|

## ESSAI II

|   |    |
|---|----|
| Figure 1: La série du P.I.B réel tunisien | 68 |
|---|----|

|  |    |
|--|----|
| Figure 2: La série des $y_t = \log(PIB_t)$ | 69 |
|--|----|

|   |    |
|---|----|
| Figure 3: Les autocorrélations partielles des $y_t$ | 70 |
|---|----|

|  |    |
|--|----|
| Figure 4: Les autocorrélations des $y_t$ | 71 |
|--|----|

Figure 5: Région de confiance "valide" pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\alpha = 0.05$ ) . . . . . 72

**ESSAI III**

Figure 1: Région de confiance "valide" pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\alpha = 0.05$ ) "première  
 approche" . . . . . 100

Figure 2: Région de confiance "valide" pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\alpha = 0.05$ ) "deuxième  
 approche" . . . . . 101

**ESSAI IV**

Figure 1: "exemple numérique" Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  "statistique  
 $F_{(1)}(\theta_0)$ " . . . . . 148

Figure 2: "exemple numérique" Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  "statistique  
 $F_{(2)}(\theta_0)$ " . . . . . 149

Figure 3: "exemple numérique" Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  "statistique  
 $F_{(3)}(\theta_0)$ " . . . . . 150

Figure 4: "exemple numérique" Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  "statistique  
 $F_{(4)}(\theta_0)$ " . . . . . 151

Figure 5: "exemple numérique" Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  "statistique  
 $F_{(5)}(\theta_0)$ " . . . . . 152

Figure 6: "exemple numérique" Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  "statistique  
 $F_{(6)}(\theta_0)$ " . . . . . 153

|  |     |
|--|-----|
| Figure 7: "exemple numérique" Région de confiance valide pour $\theta_1$ et $\theta_2$ "statistique $F_{(7)}(\theta_0)$ "      | 154 |
| Figure 8: "exemple numérique" Région de confiance valide pour $\theta_1$ et $\theta_2$ "statistique $F_{(8)}(\theta_0)$ "      | 155 |
| Figure 9: "exemple numérique" Région de confiance valide pour $\theta_1$ et $\theta_2$ "statistique $F_{(9)}(\theta_0)$ "      | 156 |
| Figure 10: "exemple numérique" Région de confiance valide pour $\theta_1$ et $\theta_2$ "approche basée sur des tests induits" | 157 |
| Figure 11: "exemple numérique" Région de confiance asymptotique pour $\theta_1$ et $\theta_2$                                  | 158 |
| Figure 12: "modèle (5.1)" Région de confiance valide pour $\theta_1$ et $\theta_2$ "statistique $F_{(5)}(\theta_0)$ "          | 159 |
| Figure 13: "modèle (5.1)" Région de confiance valide pour $\theta_1$ et $\theta_2$ "statistique $F_{(7)}(\theta_0)$ "          | 160 |
| Figure 14: "modèle (5.1)" Région de confiance valide pour $\theta_1$ et $\theta_2$ "approche basée sur des tests induits"      | 161 |
| Figure 15: "modèle (5.1)" Région de confiance asymptotique pour $\theta_1$ et $\theta_2$                                       | 162 |
| Figure 16: "modèle (5.2)" Région de confiance valide pour $\theta_1$ et $\theta_2$ "statistique $F_{(5)}(\theta_0)$ "          | 163 |

Figure 17: "modèle (5.2)" Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  "statistique  $F_{(7)}(\theta_0)$ " ..... 164

Figure 18: "modèle (5.2)" Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  "approche basée sur des tests induits" ..... 165

Figure 19: "modèle (5.2)" Région de confiance asymptotique pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  .. 166

#### ESSAI V

Figure 1: Région de confiance "valide" pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\alpha_1 = 0.05$ ,  $T_1 = 11$ )  
"deuxième approche" ..... 206

Figure 2: Région de confiance "valide" pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\alpha_1 = 0.05$ ,  $T_2 = 21$ )  
"deuxième approche" ..... 207

Figure 3: Région de confiance "valide" pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\alpha_1 = 0.05$ ,  $T_1 = 70$ )  
"statistique  $F_{(5)}(\theta_0)$ " ..... 208

Figure 4: Région de confiance "valide" pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\alpha_1 = 0.05$ ,  $T_2 = 68$ )  
"statistique  $F_{(5)}(\theta_0)$ " ..... 209

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'inférence statistique sur des modèles autorégressifs et les modèles de régression avec erreurs autocorrélées est un problème central de l'analyse économétrique. Les méthodes disponibles sont généralement fondées sur des approximations asymptotiques obtenues en supposant que la taille de l'échantillon tend vers l'infini. Aucune borne uniforme sur la marge d'erreur n'est habituellement disponible pour ces méthodes et, par conséquent, il n'y a aucune garantie que ces méthodes sont "valides en échantillon fini" au sens de la théorie classique des tests et des régions de confiance (Lehmann, 1986). Par "test valide", on entend un test tel que la probabilité de rejet sous l'hypothèse nulle n'excède pas le niveau affiché ( $\alpha$ , par exemple) et, par "région de confiance valide" une région de confiance telle que la probabilité que la vraie valeur d'un paramètre se trouve dans la région (la probabilité de couverture) n'est pas inférieure au niveau affiché ( $1 - \alpha$ ).

Deux questions principales se posent dans ce contexte. La première concerne le développement de tests d'indépendance contre la présence d'autocorrélation. La seconde touche le développement de méthodes d'estimation et d'inférence pour les coefficients de régression de tels modèles. Dans ce dernier cas, les méthodes disponibles sont presque toujours basées sur des approximations asymptotiques; pour un survol, voir Judge, Griffiths, Hill, Lütkepohl et Lee (1985). Sur la première question, de nombreux

résultats sont disponibles, notamment pour des tests d'autocorrélation au délai un; pour un survol, voir King (1983, 1987).

Dans l'essai I de cette thèse, nous considérons un modèle de régression avec  $k$  régresseurs fixes ( $k \geq 1$ ) et des erreurs autocorrélées d'ordre deux et nous proposons une généralisation des méthodes d'inférence décrites dans Dufour (1990) pour un modèle de régression avec erreurs autorégressives d'ordre 1. L'approche proposée comporte trois étapes: en premier lieu, on construit une région de confiance exacte pour le vecteur des coefficients du processus autorégressif ( $\phi$ ), en deuxième lieu une région de confiance simultanée pour  $\phi$  et un vecteur d'intérêt  $\gamma$  de combinaisons linéaires des coefficients de régression et, finalement, on déduit par une méthode de projection une région de confiance pour les éléments appropriés de  $\gamma$ . Par la dualité entre tests et région de confiance, on dérive des tests à bornes exacts pour des hypothèses de la forme  $\gamma = \gamma_0$ . La construction de la région de confiance pour les coefficients du processus autorégressif se fait par inversion de tests d'indépendance des erreurs contre des alternatives de dépendance à différents délais. Les tests d'indépendance sont obtenus en combinant plusieurs tests (test induit). Cette approche a l'avantage de simplifier considérablement le calcul des distributions des statistiques sous l'hypothèse nulle et de permettre l'utilisation de tables. Les valeurs critiques appropriées peuvent être calculées par l'algorithme d'Imhof (1961). Les différentes méthodes sont appliquées à un modèle du P.I.B réel tunisien.

Dans l'essai II, nous considérons un modèle autorégressif d'ordre  $p \geq 2$ , possiblement non stationnaire, avec comme seul régresseur une constante. Pour tester n'importe quelle hypothèse qui fixe le vecteur complet des coefficients autorégressifs, nous développons une extension de l'approche décrite à l'essai I. Plus précisément chaque hypothèse est testée en transformant les observations de façon à faire disparaître l'autocorrélation entre celles-ci sous l'hypothèse nulle et en testant si les observations transformées sont indépendantes. Nous utilisons ainsi un test induit en combinant plusieurs tests d'autocorrélation conçus pour détecter la dépendance aux délais  $1, 2, \dots, p$ . La région de confiance conjointe valide pour les coefficients autorégressifs s'obtient par inversion des tests considérés. Nous appliquons les différentes méthodes à un modèle du P.I.B réel tunisien.

Dans l'essai III, nous considérons de nouveau le modèle autorégressif, mais les approches proposées sont fondées sur une méthode de maximum de vraisemblance "tronquée" qui consiste à tester l'hypothèse d'intérêt contre une alternative légèrement différente du modèle de départ, mais qui peut approximer cette dernière de façon arbitrairement précise. Cette approche a l'avantage de fournir des statistiques dont les distributions ne dépendent pas des paramètres de nuisance et sont relativement faciles à simuler. Deux méthodes sont ainsi suggérées. La première est basée sur les moindres carrés ordinaires (m.c.o) non contraints. Elle permet d'obtenir des statistiques de test dont les distributions non seulement ne dépendent pas de paramètres de nuisance, mais sont aussi "pivotales" dans le sens où la distribution de la statistique de test ne dépend

pas de la valeur particulière testée du vecteur des paramètres autorégressifs. Cette caractéristique permet de simplifier considérablement la construction de régions de confiance. La seconde méthode est fondée sur des m.c.o contraints qui tiennent compte de toutes les contraintes imposées par le modèle  $AR(p)$  mais ne conduit pas à des statistiques pivotales. Chacune de ces méthodes permet de tester des hypothèses qui fixent la valeur du vecteur des coefficients autorégressifs au moyen d'une statistique de type Fisher. Les points critiques de chaque statistique se calculent facilement par simulation. Ces procédures sont inspirées par les techniques utilisées par Hillier (1987), Kiviet et Phillips (1990, 1992) et Dufour et Kiviet (1993). Pour le cas de tests de l'hypothèse de racine unitaire multiple d'ordre supérieur à deux, nous proposons en outre une généralisation de la paramétrisation de Dickey (1976), Fuller (1976), Hasza et Fuller (1979) et Beveridge et Nelson (1981). Cette réécriture donne des modèles équivalents à la formulation initiale mais a l'avantage d'exprimer de façon simple les hypothèses de racines unitaires multiples. Nous appliquons ces procédures à un modèle du P.I.B réel tunisien.

Dans l'essai IV, nous étendons l'approche de l'essai précédent à un modèle de régression plus général avec  $k$  régresseurs fixes et des erreurs autorégressives d'ordre  $p$ . Le problème central ici consiste éliminer les coefficients de régression qui constituent des paramètres de nuisance. Nous considérons trois méthodes d'élimination de ces paramètres. La première consiste à considérer d'abord la régression originale, à réécrire celle-ci sous la forme de  $p + 1$  régressions basées sur des ensembles

d'observations légèrement décalées, et à estimer ensuite les résidus de chaque régression. La seconde méthode considère une régression transformée et élargie par les régresseurs nécessaires. La troisième méthode est fondée sur la régression orthogonalisée sous l'hypothèse nulle. Ces méthodes sont appliquées et comparées sur un modèle du P.I.B réel tunisien.

Enfin, dans l'essai V, nous abordons le problème qui consiste à tester la stabilité temporelle des coefficients des différents modèles considérés en utilisant les approches inférentielles des essais précédents. Pour les modèles de régression avec erreurs autocorrélées, les distributions des statistiques de tests considérées dépendent généralement de paramètres de nuisance. Nous surmontons cette difficulté par l'utilisation de tests à bornes. Cette approche généralise de celle décrite dans Dufour et Kiviet (1995). Plusieurs tests sont ainsi construits: des tests de type analyse de covariance, des tests prédictifs similaires à celui proposé par Chow (1960), et des tests de type "intersection". Les différentes approches ainsi proposées permettent d'obtenir des tests de stabilité d'une part contre des alternatives où le point de rupture est spécifié à priori et d'autre part des alternatives où le point de rupture n'est pas spécifié (tests de type analyse de covariance, tests prédictifs). Nous appliquons quelques méthodes à des données tunisiennes et américaines.

## Références

- BEVERIDGE, S., et NELSON, C. R., (1981): "*A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular attention to Measurement of the 'Business Cycles'*," *Journal of Monetary Economics* 7, 151-174.
- CHOW, G. C. (1960): "*Tests of Equality between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions*," *Econometrica* 28, 591-605.
- DICKEY, D. A., (1976): "*Estimation and Testing of non Stationary Time Series*," Ph. D thesis, Iowa state university.
- DICKEY, D. A., et FULLER, W. A., (1979): "*Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root*," *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- DUFOUR, J.-M., (1990): "*Exact tests and confidence sets in linear regressions with autocorrelated errors*," *Econometrica* 58, 475-494.
- DUFOUR, J.-M., and J.F. KIVIET, (1992): "*Exact tests for structural change in first-order dynamic models*," Working paper (Université de Montréal and University of Amsterdam).
- FULLER, W. A., (1976): "*Time Series*," New York: John Wiley.
- HASZA, D. P., et FULLER, W. A., (1979): "*Estimation for Autoregressive Processes with Unit Roots*," *The Annals of Statistics*, vol.7.no 5, 1106-1120.

IMHOF, J. P. (1961): "*Computing the Distribution of Quadratic forms in Normal Variables*," *Biometrika*, 48, 419-426.

JUDGE, G. G., W. E. GRIFFITHS, R., HILL, C., LUTKEPOHL, H., et, LEE, T., (1985): "*The Theory and Practice of Econometrics*," Second edition. New York: Wiley.

LEHMAN, E. L., (1986): "*Testing Statistical Hypotheses*," Second Edition, Wiley, New York.

**ESSAI I**

**MÉTHODES D'INFÉRENCE EXACTES POUR UN MODÈLE DE  
RÉGRESSION AVEC ERREURS AR(2):  
UNE APPROCHE FONDÉE SUR DES TESTS INDUITS  
CONTRE L'AUTOCORRÉLATION**

## 1. Introduction

L'inférence sur des modèles de régression avec erreurs autorégressives constitue l'un des sujets classiques de l'économétrie. Deux problèmes principaux se posent dans ce contexte: (1) le développement de tests d'indépendance contre la présence d'autocorrélation; (2) le développement de méthodes d'estimation et d'inférence pour les coefficients de régression du modèle. Sur le premier sujet, de nombreux résultats exacts sont disponibles, notamment pour les tests d'autocorrélation au délai 1 ; pour un survol, voir King (1983, 1987). Sur le second sujet, la plupart des méthodes d'inférence disponibles sont basées sur des approximations asymptotiques et, par conséquent, n'offrent aucune garantie de validité en échantillon fini, même si l'on suppose que les régresseurs sont fixes et les erreurs normales; pour un survol, voir Judge, Griffiths, Hill, Lütkepohl et Lee (1985). De fait, très peu de méthodes d'inférence exactes ont été proposées pour des modèles de régression avec erreurs autocorrélées, et celles-ci sont limitées à des modèles linéaires dont les erreurs suivent des processus AR(1) ou MA(1); pour une discussion, voir Dufour (1990).

Le but du présent texte est de proposer des méthodes d'inférence exactes pour une classe générale de modèles de régression dont les erreurs suivent un processus AR(2). La méthode proposée est une généralisation de celle décrite dans Dufour (1990) pour un modèle de régression avec erreurs AR(1). Celle-ci comporte trois étapes: en premier lieu, on construit une région de confiance exacte pour le vecteur des coefficients du processus autorégressif ( $\phi$ ), en deuxième lieu une région de confiance

simultanée pour  $\phi$  et le vecteur des combinaisons linéaires des coefficients de régression  $\beta$  qu'on note par  $\gamma$  et, en dernier lieu, on déduit par une méthode de projection une région de confiance pour les éléments appropriés de  $\gamma$ . Par la dualité entre tests et régions de confiance, il est possible de dériver un test  $\alpha$ -semblable exact conjoint pour les  $\phi$  et les  $\gamma$ , et des tests à bornes exacts pour les  $\gamma$ .

La construction de la région de confiance pour les coefficients du processus autorégressif sera faite par "inversion" de tests d'indépendance des erreurs contre des alternatives de dépendance à différents délais (plus grands ou égaux à 1). Il existe une littérature assez considérable sur ce sujet qui pourra être exploitée ici; voir Thomas et Wallis (1971), Schmidt (1972), Wallis (1972), Vinod (1973), Webb (1973), et King (1984, 1987).

Après avoir décrit le modèle étudié et les principales notations utilisées (section 2), notre texte suivra les principales étapes de la méthode proposée: Nous allons montrer:

- (1) comment construire une région de confiance exacte pour les coefficients du processus AR(2) qui caractérise les erreurs (section 3);
- (2) comment, étant donnée cette région de confiance, construire une région de confiance simultanée pour les coefficients du modèle autorégressif et tout vecteur de transformations linéaires des coefficients de régression du modèle (section 4);

(3) comment construire des régions de confiance "marginales" et des tests à bornes pour les coefficients de régression du modèle ou tout vecteur de transformations linéaires de ces mêmes coefficients (section 5).

Enfin, dans la section 6, nous présenterons une illustration numérique de la méthode proposée et une application à un modèle du P.I.B réel tunisien. On se donnera un modèle de régression avec une constante, deux régresseurs fixes et des erreurs qui suivent un processus autorégressif d'ordre 1. Comme prévu, les intervalles de confiance trouvés par les méthodes proposées couvrent bien les vrais valeurs des paramètres et sont remarquablement précis.

## 2. Modèle et notations

Dans la suite de ce texte, nous allons considérer le modèle de régression suivant dont les erreurs suivent un processus AR(2):

$$(2.1) \quad y_t = x_t' \beta + u_t,$$

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + e_t, \quad e_t \sim^{ind} N(0, \sigma_e^2), \quad t = 1, \dots, T,$$

où  $y_t$  est la variable dépendante (au temps  $t$ ), les  $x_t$  sont des vecteurs fixes de dimension  $k \times 1$ ,  $\beta$  est un vecteur  $k \times 1$  de coefficients fixes et  $u_t$  est une erreur aléatoire; les coefficients  $\beta$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\sigma_e^2$  sont inconnus. En outre, nous allons considérer trois hypothèses alternatives sur les  $u_t$ .

Hypothèse A (Stationnarité):  $\phi_1 + \phi_2 < 1$ ,  $\phi_2 - \phi_1 < 1$ ,  $|\phi_2| < 1$ , et

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \sim N \left[ 0, \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \right]$$

où  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$  satisfont les conditions requises pour que  $u_t$  soit stationnaire:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_e^2 \frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2} \left( \frac{1}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2} \right),$$

$$\sigma_{12} = \frac{\phi_2 \sigma_{11}}{1 - \phi_2} = \sigma_e^2 \frac{\phi_1}{1 + \phi_2} \left( \frac{1}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2} \right).$$

Hypothèse B (Processus dont les racines peuvent se trouver sur le cercle unité):

$\phi_1 + \phi_2 \leq 1$ ,  $\phi_2 - \phi_1 \leq 1$ ,  $|\phi_2| \leq 1$ ;  $u_1$  et  $u_2$  sont indépendants de  $e_3, \dots, e_T$  et suivent une distribution quelconque.

Hypothèse C (Erreurs non stationnaires):  $u_1$  et  $u_2$  sont indépendants de  $e_3, \dots, e_T$  et suivent une distribution quelconque avec  $(\phi_1, \phi_2)' \in S_2$  où  $S_2$  est un ensemble qui contient le triangle de stationnarité.

Supposons d'abord que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont connus, donc on peut transformer le modèle comme suit:

$$y_t(\phi) = x_t(\phi)' \beta + u_t(\phi), \quad t = \bar{p}, \dots, T$$

où  $\bar{p} \geq 3$ ,  $\phi = (\phi_1, \phi_2)'$  et

$$y_t(\Phi) = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2}, \quad t = 3, \dots, T,$$

$$x_t(\Phi) = x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2}, \quad t = 3, \dots, T,$$

$$u_t(\Phi) = u_t - \phi_1 u_{t-1} - \phi_2 u_{t-2}, \quad t = 3, \dots, T.$$

En utilisant une notation matricielle, on peut écrire le modèle transformé comme suit:

$$(2.2) \quad y(\Phi) = X(\Phi)' \beta + u(\Phi).$$

En outre, sous l'hypothèse A, on peut prendre  $\bar{p} = 1$  et conserver toutes les observations en prenant:

$$y_1(\Phi) = \frac{\sigma_e}{\sigma_u} y_1, \quad x_1(\Phi) = \frac{\sigma_e}{\sigma_u} x_1, \quad u_1(\Phi) = \frac{\sigma_e}{\sigma_u} u_1,$$

$$y_2(\Phi) = \sqrt{1 - \phi_2^2} \left( y_2 - \frac{\phi_1}{\phi_2} y_1 \right), \quad x_2(\Phi) = \sqrt{1 - \phi_2^2} \left( x_2 - \frac{\phi_1}{\phi_2} x_1 \right),$$

$$u_2(\Phi) = \sqrt{1 - \phi_2^2} \left( u_2 - \frac{\phi_1}{\phi_2} u_1 \right)$$

où  $\sigma_u = \sigma_{11}$  tel que défini dans l'hypothèse A; voir Judge, Griffiths, Hill, Lütkepohl et Lee (1985, page 191) pour la dérivation des transformations appropriées. Sous l'hypothèse B,  $\bar{p} = 3$  et on perd les deux premières observations. Quand le modèle initial (2.1) contient une constante, on a  $x_t = (1, z_t)'$  et

$$y_t(\Phi) = (1 - \phi_1 - \phi_2) \beta_1 + (z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2})' \bar{\gamma} + e_t, \quad t = 3, \dots, T$$

où  $\beta = (\beta_1, \bar{\gamma})'$ ,  $\bar{\gamma} = (\beta_2, \dots, \beta_k)'$ . Il est clair que le coefficient  $\beta_1$  est non identifiable quand  $\phi_1 + \phi_2 = 1$ . Pour éviter ce problème, on redéfinit ce coefficient comme suit:

$$\bar{\beta}_1 = (1 - \phi_1 - \phi_2)\beta_1.$$

On voit facilement que  $\bar{\beta}_1$  est identifiable quelles que soient les valeurs de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .

On considère alors le modèle transformé:

$$y_t(\Phi) = \bar{\beta}_1 + (z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2})' \bar{\gamma} + e_t, \quad t = 3, \dots, T.$$

En utilisant une notation matricielle on peut écrire le modèle transformé comme suit:

$$(2.3) \quad y(\Phi) = \bar{X}(\Phi)\bar{\beta} + u(\Phi)$$

où

$$y(\Phi) = [y_p(\Phi), \dots, y_T(\Phi)]', \quad u(\Phi) = [u_p(\Phi), \dots, u_T(\Phi)]',$$

$$\bar{X}(\Phi) = [\bar{x}_p(\Phi), \dots, \bar{x}_T(\Phi)]', \quad \bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \beta_2, \dots, \beta_k)',$$

$$\bar{x}_t(\Phi) = [1, (z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2})']'.$$

Nous supposons en outre que  $\text{rang}[x(\Phi)] = k < T - \bar{p} + 1 = T_1$ , où  $x(\Phi)$  représente

soit  $X(\Phi)$  soit  $\bar{X}(\Phi)$ , et  $T_1$  est le nombre effectif d'observations. Nous définissons

$\hat{\beta}(\Phi)$  comme l'estimateur de  $\beta$  (ou  $\bar{\beta}$ ) obtenu en estimant le modèle transformé (2.2)

[ou (2.3)] par les moindres carrés ordinaires:

$$\hat{\beta}(\Phi) = [x(\Phi)'x(\Phi)]^{-1}x(\Phi)'y(\Phi), \quad \hat{u}(\Phi) = y(\Phi) - x(\Phi)\hat{\beta}(\Phi),$$

$$s^2(\Phi) = \hat{u}(\Phi)'\hat{u}(\Phi)/(T_1 - k) = ||\hat{u}(\Phi)||^2/(T_1 - k).$$

### 3. Construction de régions de confiance pour $\phi_1$ et $\phi_2$

Considérons d'abord le problème qui consiste à tester l'hypothèse:

$$H(\phi_0): \phi = \phi_0 \text{ contre } H_a(\phi_0): \phi \neq \phi_0.$$

On note par  $\phi = (\phi_1, \phi_2)'$  les vraies valeurs des paramètres et par  $\phi_0 = (\phi_{01}, \phi_{02})'$  les

valeurs hypothétiques. Sous  $H(\phi_0)$ , le modèle transformé s'écrit:

$$(3.1) \quad y(\phi_0) = x(\phi_0)\beta + u(\phi_0),$$

et les résidus  $u_t(\phi_0)$  du modèle transformé sont indépendants  $N(0, \sigma_e^2)$ . Si  $\phi \neq \phi_0$ ,

les  $u_t(\phi_0)$  demeurent autocorrélés et suivent un processus ARMA(2, 2). En effet,

$$\begin{aligned} u_t(\phi_0) &= u_t - \phi_{10}u_{t-1} - \phi_{20}u_{t-2} \\ &= \phi_1 u_{t-1} - \phi_2 u_{t-2} + e_t - \phi_{10}(\phi_1 u_{t-2} + \phi_2 u_{t-3} + e_{t-1}) \\ &\quad - \phi_{20}(\phi_1 u_{t-3} + \phi_2 u_{t-4} + e_{t-2}) \\ &= \phi_1(u_{t-1} - \phi_{10}u_{t-2} - \phi_{20}u_{t-3}) + \phi_2(u_{t-2} - \phi_{10}u_{t-3} - \phi_{20}u_{t-4}) \\ &\quad + e_t - \phi_{10}e_{t-1} - \phi_{20}e_{t-2} \end{aligned}$$

et donc

$$u_t(\phi_0) = \phi_1 u_{t-1}(\phi_0) + \phi_2 u_{t-2}(\phi_0) + e_t - \phi_{10}e_{t-1} - \phi_{20}e_{t-2},$$

ou encore

$$(3.2) \quad u_t(\phi_0) - \phi_1 u_{t-1}(\phi_0) - \phi_2 u_{t-2}(\phi_0) = e_t - \phi_{10}e_{t-1} - \phi_{20}e_{t-2}.$$

Lorsque  $u_t(\phi_0)$  est stationnaire, sa fonction d'autocovariance doit satisfaire les équations suivantes:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_e^2 - \phi_{10}(\phi_1 - \phi_{10})\sigma_e^2 - \phi_{20}[\phi_1(\phi_1 - \phi_{10}) + \phi_2 - \phi_{20}]\sigma_e^2,$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 - \phi_{10}\sigma_e^2 - \phi_{20}(\phi_1 - \phi_{10})\sigma_e^2, \quad \gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 - \phi_{20}\sigma_e^2,$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}, \quad \forall k \geq 3.$$

Pour  $\phi_{10} = \phi_1$  et  $\phi_{20} = \phi_2$  on aura:  $\gamma_0 = \sigma_e^2$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 0$ , et donc  $\gamma_k = 0$ ,

$\forall k \geq 3$ . Ceci implique l'indépendance des  $u_t(\phi_0)$  à tous les délais  $k \geq 1$ . Nous

remarquons qu'il suffit que  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  pour avoir  $\gamma_k = 0$ ,  $\forall k \geq 1$ . L'équation

(3.2) peut également s'écrire:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) u_t(\phi_0) = (1 - \phi_{10} B - \phi_{20} B^2) e_t,$$

et sous  $H(\phi_0)$  on a:  $u_t(\phi_0) = e_t \sim^{ind} N(0, \sigma_e^2)$ , c'est-à-dire que les  $u_t(\phi_0)$  sont

indépendants à tous les délais  $k \neq 0$ .

Pour tester  $H(\phi_0)$ , il est donc suffisant de tester l'hypothèse que les perturbations

$u_t(\phi_0)$ ,  $t = \bar{p}, \dots, T$ , du modèle transformé sont indépendantes contre la présence

d'autocorrélation aux délais 1 et 2. Pour ce faire, nous allons d'abord considérer des statistiques de Durbin & Watson (1950) généralisées pour  $j \geq 2$ ; voir Vinod (1973).

Ces statistiques peuvent s'écrire:

$$(3.3) \quad d_j(\Phi_0) = \frac{\sum_{i=1}^{T_1-j} [\hat{u}_{i+j}(\Phi_0) - \hat{u}_i(\Phi_0)]^2}{\sum_{i=1}^{T_1} \hat{u}_i(\Phi_0)^2},$$

ou encore

$$(3.4) \quad d_j(\Phi_0) = \frac{\hat{u}(\Phi_0)' A_j \hat{u}(\Phi_0)}{\hat{u}(\Phi_0)' \hat{u}(\Phi_0)}$$

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & & & 0 \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ 0 & & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & & & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le test consiste à rejeter  $H(\Phi_0)$  lorsque au moins l'un des tests basés sur  $d_1(\Phi_0)$  ou  $d_2(\Phi_0)$

rejette l'hypothèse d'indépendance. La région critique de niveau  $\alpha_{1j}$  pour chacun de ces

tests est de la forme:

$$(3.5) \quad d_j(\Phi_0) < d_j^1(x(\Phi_0)) \text{ ou } d_j(\Phi_0) > d_j^2(x(\Phi_0)).$$

Les points  $d_j^1(x(\Phi_0))$  et  $d_j^2(x(\Phi_0))$  sont choisis de façon que, sous l'hypothèse nulle,

$$P[d_j(\Phi_0) < d_j^1(x(\Phi_0))] = \delta_j^1, \quad P[d_j(\Phi_0) > d_j^2(x(\Phi_0))] = \delta_j^2, \quad j = 1, 2$$

où  $\delta_j^1 + \delta_j^2 = \alpha_{1j}$  et  $0 < \alpha_{1j} < 1$ . Comme en présence d'une constante, la statistique  $d_j(\Phi_0)$

a une distribution symétrique par rapport à 2, il est naturel de choisir

$\delta_j^1 = \delta_j^2 = \alpha_{1j} / 2$ . En outre, par l'inégalité de Boole-Bonferroni, on voit facilement que le niveau global du test, c'est-à-dire la probabilité qu'au moins l'une des deux statistiques  $d_1(\Phi_0)$  et  $d_2(\Phi_0)$  soit significative, ne peut excéder  $\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12}$ . En général les points critiques  $d_j^1(x(\Phi_0))$  et  $d_j^2(x(\Phi_0))$  dépendent de  $x(\Phi_0)$ . Par conséquent, il sera commode d'utiliser la fonction de répartition de  $d_j(\Phi_0)$ :

$$F_j(z; x(\Phi_0)) = P [ d_j(\Phi_0) \leq z \mid H_{0j} ]$$

où  $H_{0j}: \phi_j = \phi_{j0}$ ,  $j = 1, 2$ , et d'évaluer cette fonction à  $\hat{d}_j(\Phi_0)$  qui représente la valeur observée de  $d_j(\Phi_0)$ :

$$\delta_j(\Phi_0) = F [ \hat{d}_j(\Phi_0); x(\Phi_0) ] .$$

La région critique, définie par (3.5), basée sur  $d_j(\Phi_0)$  peut alors s'écrire:

$$(3.6) \quad \delta_j(\Phi_0) < \delta_j^1 \quad \text{ou} \quad \delta_j(\Phi_0) > 1 - \delta_j^2 .$$

De façon équivalente, la région d'acceptation s'écrit:

$$d_j^1(x(\Phi_0)) \leq d_j(\Phi_0) \leq d_j^2(x(\Phi_0)) \quad \text{ou bien} \quad \delta_j^1 \leq \delta_j(\Phi_0) \leq 1 - \delta_j^2 .$$

On accepte  $H(\Phi_0)$  lorsque

$$\delta_j^1 \leq \delta_j(\Phi_0) \leq 1 - \delta_j^2, \quad j = 1, 2 .$$

On obtient ainsi une région de confiance conjointe valide pour  $(\phi_1, \phi_2)'$  de niveau plus grand ou égal à  $1 - \alpha_1$ :

$$(3.7) \quad I(\alpha_{11}, \alpha_{12}) = \{ (\phi_{10}, \phi_{20}) \in S_2: \delta_1^1 \leq \delta_1(\phi_0) \leq 1 - \delta_1^2,$$

$$\delta_1^1 \leq \delta_2(\phi_0) \leq 1 - \delta_2^2 \}$$

où  $S_2$  est l'ensemble des valeurs admissibles de  $(\phi_1, \phi_2)'$ . Par exemple, sous l'hypothèse A, l'ensemble  $S_2$  s'écrit

$$\begin{aligned} S_2 &= \{ (\phi_{10}, \phi_{20})': \phi_{10} + \phi_{20} < 1, \phi_{20} - \phi_{10} < 1, |\phi_{20}| < 1 \} \\ &= \{ (\phi_{10}, \phi_{20})': -1 < \phi_{20} < 1, \phi_{20} - 1 < \phi_{10} < 1 - \phi_{20} \}. \end{aligned}$$

En pratique, la région de confiance  $I(\alpha_{11}, \alpha_{12})$  peut être établie par un balayage de l'ensemble admissible, où on ne retient que les points  $(\phi_{10}, \phi_{20})'$  qui sont acceptés par les deux tests basés sur  $d_1(\phi_0)$  et  $d_2(\phi_0)$ .

#### 4. Régions de confiance conjointes pour $\phi_1, \phi_2$ et $\gamma$

Sachant comment construire une région de confiance exacte pour les coefficients d'autocorrélation, nous allons maintenant décrire comment obtenir des régions de confiance conjointes pour ces coefficients et le vecteur  $\beta$  des coefficients de régression. Plus précisément, nous allons considérer le problème qui consiste à

construire une région de confiance conjointe pour le vecteur  $\phi$  et le vecteur  $\gamma = C \beta$  (ou  $C \bar{\beta}$ ) où  $C$  est une matrice  $m \times k$  de rang  $m$ .

Pour toute valeur de  $\phi$  dans la région de confiance exacte de  $\phi$ , le modèle (2.1) peut être transformé de façon à avoir des erreurs indépendantes. Comme précédemment, le modèle transformé

$$y(\phi) = x(\phi)\beta + u(\phi)$$

satisfait toutes les hypothèses du modèle linéaire classique. Soit

$$\hat{\beta}(\phi) = [x(\phi)'x(\phi)]^{-1}x(\phi)'y(\phi), \quad \hat{u}(\phi) = y(\phi) - x(\phi)\hat{\beta}(\phi),$$

$$s^2(\phi) = \hat{u}(\phi)'\hat{u}(\phi)/(T_1 - k).$$

Si on considère l'hypothèse  $H(\gamma_0): \gamma = \gamma_0$ , on voit alors facilement que la statistique de Fisher pour  $H(\gamma_0)$ ,

$$F(\gamma_0; \phi) = \frac{(C\hat{\beta} - \gamma_0)' \{ C[x(\phi)'x(\phi)]^{-1} C' \}^{-1} (C\hat{\beta} - \gamma_0) / m}{\hat{u}(\phi)'\hat{u}(\phi) / (T_1 - k)},$$

suit sous  $H(\gamma_0)$  une loi de Fisher avec  $(m, T_1 - k)$  degrés de liberté ( $\phi$  désigne toujours la vraie valeur du vecteur des coefficients autorégressifs). Par conséquent, l'ensemble

$$J(\gamma, \phi; \alpha_2) = \{ \gamma_0: F(\gamma_0; \phi) \leq F(\alpha_2; m, T_1 - k) \},$$

est une région de confiance de niveau  $1 - \alpha_2$  pour  $\gamma$ . De plus, il est facile de voir que le vecteur  $(d_1(\phi), d_2(\phi))$  et la statistique  $F(\gamma_0; \phi)$  sont indépendants lorsque  $\gamma = \gamma_0$  [voir Dufour (1990)]. En outre, la région de confiance

$$K(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2) = \{ (\phi_0, \gamma_0) : \phi_0 \in I(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \text{ et } \gamma_0 \in J(\alpha_2; \phi_0) \}$$

est de niveau plus grand ou égal à  $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)$ , car

$$\begin{aligned} P[(\phi, \gamma) \in K(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2)] &= P[\phi \in I(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \text{ et } \gamma \in J(\alpha_2; \phi)] \\ &= P[\phi \in I(\alpha_{11}, \alpha_{12})] P[\gamma \in J(\alpha_2; \phi)] \geq (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Plutôt que d'utiliser la région de confiance ellipsoïdale  $J(\gamma_0; \phi)$ , dont la forme peut être difficile à comprendre et à établir, on peut aussi considérer une région de confiance "induite" dont la forme est rectangulaire [voir Savin (1984)]. Si on dénote

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)'$  et  $\gamma_0 = (\gamma_{10}, \dots, \gamma_{m0})'$ , une telle région est de la forme:

$$J_I(\alpha_2; \phi_0) = \{ \gamma_0 : |\hat{\gamma}_j - \gamma_{j0}| \leq \hat{V}(\hat{\gamma}_j) t [\alpha_2/(2m); T_1 - k], j = 1, \dots, m \}$$

où  $\hat{V}(\hat{\gamma}) = s^2(\phi) \{ C[x(\phi)']x(\phi) \}^{-1} C'$ . On peut montrer facilement, par l'inégalité de Bonferroni, que

$$P[\gamma \in J_I(\gamma; \phi)] \geq 1 - \alpha_2.$$

De là, on voit facilement que la région de confiance conjointe

$$K_I(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2) = \{ (\phi_0, \gamma_0) : \phi_0 \in I(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \text{ et } \gamma_0 \in J_I(\alpha_2; \phi_0) \}$$

satisfait la condition de niveau

$$P[\gamma \in K_I(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2)] \geq (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2).$$

### 5. Construction de régions de confiance marginales et de tests pour $\gamma$

Nous pouvons maintenant construire une région de confiance exacte pour  $\gamma$  et des tests à bornes pour  $H(\gamma_0): \gamma = \gamma_0$ . Pour ce faire on va définir les deux ensembles suivants:

$$U(\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2) = \{ \gamma_0: (\Phi_0, \gamma_0) \in K_I(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2) \text{ pour au moins un } \Phi_0 \in I(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \}$$

et

$$L(\alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_2) = \{ \gamma_0: (\Phi_0, \gamma_0) \in K_I(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2) \text{ pour tout } \Phi_0 \in I(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \}$$

où  $I(\alpha_{11}, \alpha_{12})$  est la région de confiance pour  $\phi$  telle que

$$P[\phi \in I(\alpha_{11}, \alpha_{12})] \geq 1 - \alpha_1, \quad 0 < \alpha_1 < 1 \text{ et } \alpha_{11} + \alpha_{12} = \alpha_1.$$

Si on choisit  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha'_2$  tels que

$$(5.1) \quad (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) = 1 - \alpha, \quad (1 - \alpha_1)\alpha'_2 = \alpha \text{ et } 0 \leq \alpha_1 < \alpha \leq 1 - \alpha_1,$$

alors, on aura:

$$\alpha_1 < \alpha \leq \alpha'_2, \quad L(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha'_2) \subset U(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2)$$

et

$$(5.2) \quad P[\gamma \in L(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha'_2)] \leq 1 - \alpha \leq P[\gamma \in U(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2)],$$

pour toutes les valeurs de  $\phi$  et  $\gamma$  admissibles [pour la démonstration, voir l'appendice de Dufour(1990)]. En d'autres termes,  $U(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2)$  est une région de confiance conservatrice pour  $\gamma$  de niveau  $1 - \alpha$  et  $L(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2')$  est une région de confiance libérale au même niveau. De ces deux régions de confiance, on peut facilement déduire des tests conservateurs (ou libéraux) pour toute hypothèse  $H(\gamma_0): \gamma = \gamma_0$ , ainsi que des tests à bornes. Pour ce faire on va définir les deux statistiques suivantes:

$$(5.3) \quad Q_L(\gamma) = \inf \{ F(\gamma, \phi_0): \phi_0 \in I(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \},$$

$$Q_U(\gamma) = \sup \{ F(\gamma, \phi_0): \phi_0 \in I(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \}$$

où  $\alpha_{11} + \alpha_{12} = \alpha_1$  et  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_2'$  vérifient (5.1). Il est à noter que l'événement

$\gamma \in U(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2)$  est équivalent avec la probabilité un à  $Q_L(\gamma) \geq F(\alpha_2; m, T_1 - k)$

alors que l'événement  $\gamma \in L(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2')$  est équivalent à

$Q_U(\gamma) \leq F(\alpha_2'; m, T_1 - k)$ . Comme

$$P[\gamma \in U(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2)] \geq 1 - \alpha, \quad P[\gamma \in L(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2')] \leq 1 - \alpha,$$

on déduit que

$$P[Q_L(\gamma) \geq F(\alpha_2; m, T_1 - k)] \leq \alpha, \quad P[Q_U(\gamma) \leq F(\alpha_2'; m, T_1 - k)] \leq 1 - \alpha.$$

L'événement  $Q_L(\gamma_0) \geq F(\alpha_2; m, T_1 - k)$  est donc une région critique conservatrice

alors que  $Q_U(\gamma_0) \leq F(\alpha_2'; m, T_1 - k)$  est une région critique libérale pour tester

$H(\gamma_0): \gamma = \gamma_0$  au niveau  $\alpha$ . Comme  $Q_L(\gamma_0) \leq Q_U(\gamma_0)$  et

$F(\alpha_2; m, T_1 - k) \geq F(\alpha'_2; m, T_1 - k)$  ( $\alpha_2 \leq \alpha'_2$ ), il est clair que la région critique libérale contient la région conservatrice. Ceci suggère d'utiliser un test à bornes pour

$H(\gamma_0)$ :

rejeter  $H(\gamma_0)$  si  $Q_L(\gamma_0) \geq F(\alpha_2; m, T_1 - k)$ ,

accepter  $H(\gamma_0)$  si  $Q_U(\gamma_0) \leq F(\alpha'_2; m, T_1 - k)$ .

Dans les autres cas, il est préférable de considérer le test comme non concluant.

## 6. Exemple Numérique et application à un modèle

### du P.I.B réel tunisien

Nous allons maintenant appliquer l'approche développée plus haut aux données artificielles engendrées par le modèle:

$$(6.1) \quad y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + u_t,$$

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + e_t, \quad e_t \sim^{ind} N(0, 4), \quad t = 1, \dots, T,$$

$$\beta_1 = 10, \quad \beta_2 = \beta_3 = 1, \quad \phi_1 = -0.9, \quad \phi_2 = 0.0, \quad T = 47, \quad k = 3$$

où  $x_{2t}$  et  $x_{3t}$  sont générés indépendamment des  $u_t$  suivant les processus:

$$x_{2t} = 5x_{2t-1} + \eta_{2t}, \quad x_{3t} = t + \eta_{3t}, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $x_{20} = \eta_{20}/\sqrt{.75}$  et  $\eta_{2t}$  et  $\eta_{3t}$  sont mutuellement indépendants avec  $\eta_{2t} \sim N(0, 1)$  et

$\eta_{3t} \sim N(0, 10)$ . Si on estime ce modèle, en laissant tomber les deux premières observations, par maximum de vraisemblance conditionnel (le logiciel utilisé est Shazam), on obtient les résultats suivants:

$$y_t = 9.9095 + 0.87069 x_{2t} + 1.0983 x_{3t} + \hat{u}_t, \quad R^2 = 0.929$$

$$(0.238) \quad (0.0952) \quad (0.0856)$$

$$\hat{\phi}_1 = -1.02466, \quad \hat{\phi}_2 = -0.07586,$$

$$(0.14863) \quad (0.14863)$$

$$SSE = 101.03, \quad SSR = 1321.4, \quad SST = 1422.4, \quad d_1 = 1.9955, \quad d_2 = 1.7589,$$

où les valeurs entre parenthèses sont les écart-types. Les intervalles et les régions de confiance sont présentés dans le tableau I(d) "page 31" et sur la figure 1(c) "page 35" pour un niveau de 0.88 et sur la figure 2(b) "page 36" pour un niveau de 0.95.

Nous allons procéder ici sous l'hypothèse B ( $|\phi_2| \leq 1$  et  $|\phi_1| \leq |1 - \phi_2|$ ) et considérer deux variantes de la méthode décrite à la section 3 afin de construire une région de confiance pour  $(\phi_1, \phi_2)'$ . En outre, nous allons construire pour les coefficients de régression des intervalles de confiance simultanés de type "induit" (basés sur l'inégalité de Bonferroni). En première étape, pour pouvoir effectuer une comparaison avec des résultats fondés sur des points critiques déjà tabulés pour les statistiques  $d_1(\phi_0)$  et  $d_2(\phi_0)$ , nous avons choisi les niveaux de signification suivants pour les différents tests:  $\alpha_{11} = 0.02$  pour  $d_1(\phi_0)$ ,  $\alpha_{12} = 0.10$  pour  $d_2(\phi_0)$ ,  $\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12} = 0.12$ ,  $\alpha = 0.15$ ,  $\alpha_2 = 1 - (1 - \alpha)/(1 - \alpha_1) = 0.03$  et  $\alpha_{2j} = \alpha_2/k = 0.01$  où  $k = 3$ . On doit déterminer l'ensemble des vecteurs  $\phi_0$  tels que

les statistiques  $d_1(\phi_0)$  et  $d_2(\phi_0)$  (calculées à partir du modèle transformé) ne sont pas significatives aux niveaux  $\alpha_{11}$  et  $\alpha_{12}$  respectivement.

Pour la première méthode, les points critiques sont obtenues en utilisant l'algorithme d'Imhof(1961) telle que programmée dans la sous-routine FQUAD de Koerts et Abrahamse (1969). La région de confiance simultanée ainsi obtenue est (voir la figure 1(a) "page 34") assez précise et elle est étendue à côté de la borne  $\phi_2 - \phi_1 = 1$  du triangle de stationnarité. les intervalles de confiance correspondants (obtenus par projection) sont dans le tableau I(a) "page 30".

Pour la deuxième méthode [tableau I(b) "page 30"], on construit la région de confiance de  $\phi$  en utilisant les bornes disponibles pour des statistiques de DW. Cette méthode consiste à réunir tous les  $\phi_0$  satisfaisant les deux conditions suivantes:

$$d_{1L}^1 \leq d_1(\phi_0) \leq d_{1u}^2, \quad d_{2L}^1 \leq d_2(\phi_0) \leq d_{2u}^2$$

où  $d_{1u}^2 = 4 - d_{1L}^1$  et  $d_{2u}^2 = 4 - d_{2L}^1$ .  $d_{1L}^1 = 1.245$  est la borne critique inférieure de  $d_1$  sous  $H_{01}: \phi_1 = 0$  contre  $H_{a1}: \phi_1 > 0$  au niveau de signification 0.02 [ $k' = 2$  et  $T = 45$ , dans Savin et White (1977, Table II)],  $d_{2L}^1 = 1.385$  est la borne critique inférieure pour  $d_2$  sous  $H_{02}: \phi_2 = 0, \phi_1 = 0$  contre  $H_{a2}: \phi_2 > 0$  au niveau de 0.10 [ $k' = 2$  et  $T = 45$ , dans Vinod (1973, Table IIa)]. La région de confiance pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$  obtenue de cette façon est plus grande que celle trouvée par la première

approche, elle est aussi étendue à côté de la borne  $\phi_2 - \phi_1 = 1$ ; voir tableau I(b) "page 30" et figure 1(b) "page 34".

Si on utilise tout l'ensemble des valeurs admissibles de  $\phi_{10}$  et  $\phi_{20}$  comme région de confiance de niveau 1 ( $\alpha_1 = 0$ ), on a  $\alpha = \alpha_2 = 0.15$ , nous obtenons alors les intervalles rapportés au Tableau I(c) "page 31". On remarque que les régions de confiance pour  $\beta$  sont beaucoup plus grandes; ce qui met en évidence l'importance de l'utilisation d'une région de confiance pour  $\phi$ . Sur la base des deux premières méthodes, il est clair que  $\bar{\beta}_1$ ,  $\beta_2$  et  $\beta_3$  sont significativement différents de zéro, en effet les tests à bornes pour  $\bar{\beta}_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 0$  et  $\beta_3 = 0$  sont significatifs au niveau  $0.03 = \alpha_2$  car

$$Q_L(\bar{\beta}_1 = 0) = (24.181)^2 \geq 5.04598 = F(\alpha_2; 1, 42),$$

$$Q_L(\beta_2 = 0) = (6.48)^2 \geq 5.04598 = F(\alpha_2; 1, 42),$$

$$Q_L(\beta_3 = 0) = (7.54)^2 \geq 5.04598 = F(\alpha_2; 1, 42).$$

En seconde étape nous allons utiliser des niveaux de signification plus usuels, à savoir  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.05$ ,  $\alpha = 0.10$  (avec  $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_1/2 = 0.025$ ), nous obtenons les résultats asymptotiques du tableau II(b) "page 33" et de la figure 2(b) "page 36", et les résultats exacts (avec des calculs par Imhof) du tableau II(a) "page 32" et de la figure 2(a) "page 36". La région de confiance asymptotique est semblable à la région exacte; elle est étendue également sur la ligne  $\phi_2 - \phi_1 = 1$ . Quel que soit le niveau

utilisé, on constate que les régions de confiance obtenues couvrent bien les vraies valeurs des paramètres et sont remarquablement précises.

Maintenant nous allons appliquer les méthodes proposées à un modèle de P.I.B réel tunisien. L'étude de cette série [voir Dufour et Neifar (1995 b)] suggère que  $\log(P.I.B)_t = y_t$  suit un processus autorégressif d'ordre deux. On écrira ce processus sous la forme

$$(6.2) \quad y_t = \beta_1 + u_t, \quad u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + e_t$$

où  $e_t \sim^{ind} N(0, \sigma^2)$ . Si on estime le modèle (6.2) par maximum de vraisemblance conditionnel nous obtenons les résultats suivants:

$$\begin{aligned} y_t &= 10.627 + \hat{u}_t \\ &\quad (0.1955) \\ \hat{u}_t &= 0.70053 \hat{u}_{t-1} + 0.26506 \hat{u}_{t-2} + \hat{e}_t \\ &\quad (0.17604) \quad (0.17604) \end{aligned}$$

où les valeurs entre parenthèses sont les écart-types. Les intervalles de confiance asymptotiques pour un niveau de 0.95 ( $t_{0.025}(29) = 2.045$ ) sont:

$$\phi_1 \in [0.34053, 1.0605], \quad \phi_2 \in [-0.094941, 0.62506],$$

la région de confiance conjointe asymptotique pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$  est sur la figure 3 "page 37".

Si on applique maintenant la méthode proposée (avec des calculs par Imhof), en imposant les conditions de stationnarité, nous obtenons la région de confiance de niveau 0.95 sur la figure 4 "page 38". Cette région est assez précise, elle est étendue à côté

de la borne  $\phi_1 + \phi_2 = 1$  du triangle de stationnarité, elle est plus informative pour  $\phi_1$  que pour  $\phi_2$ . Par projection sur les axes, nous obtenons les intervalles de confiance simultanés suivants:

$$\phi_1 \in [-0.0299, 1.64], \phi_2 \in [-0.679, 1.0].$$

Puisque  $\beta_1$  est non identifiable, nous avons construit l'intervalle de confiance (à 0.95)

$$\text{pour } \bar{\beta}_1 = (1 - \phi_1 - \phi_2)\beta_1: \bar{\beta}_1 \in [0.0954, 0.772].$$

Tableau I "exemple numérique"  
Intervalles de confiance avec les niveaux:

$$\alpha = 0.15, \alpha_2 = 0.03, \alpha_1 = 0.12, \alpha_{11} = 0.02, \alpha_{12} = 0.10$$

des vrais paramètres:

$$\phi_1 = -0.9, \phi_2 = 0.0, \beta_1 = 10, \bar{\beta}_1 = (1 - \phi_1 - \phi_2)\beta_1 = 19, \beta_2 = \beta_3 = 1$$

(a) Calcul par Imhof (bornes exactes)

| Paramètres      | Intervalles de confiance simultanés |
|-----------------|-------------------------------------|
| $\phi_1$        | [-1.73, -0.639]                     |
| $\phi_2$        | [-1.00, 0.32]                       |
| $\bar{\beta}_1$ | [11.877, 38.526]                    |
| $\beta_2$       | [0.565, 1.251]                      |
| $\beta_3$       | [0.724, 1.44]                       |

Le point critique utilisé pour le calcul des intervalles de confiance simultanés des paramètres de régression est  $t_{\alpha/2k}(42) = 2.698$ .

(b) Résultats fondés sur l'utilisation de points critiques tabulés:

$$d_{1L}^1 = 1.245, d_{2L}^1 = 1.385$$

| Paramètres      | Intervalles de confiance simultanés |
|-----------------|-------------------------------------|
| $\phi_1$        | [-1.77, -0.629]                     |
| $\phi_2$        | [-1.00, 0.33]                       |
| $\bar{\beta}_1$ | [11.7699, 38.899]                   |
| $\beta_2$       | [0.565, 1.255]                      |
| $\beta_3$       | [0.736, 1.449]                      |

(Suite du tableau I)

(c)  $\alpha_1 = 0, \alpha = \alpha_2 = 0.15$ 

| Paramètres      | Intervalles de confiance simultanés |
|-----------------|-------------------------------------|
| $\phi_1$        | [-1.00, 1.00]                       |
| $\phi_2$        | [-2.00, 2.00]                       |
| $\bar{\beta}_1$ | [7.861, 40.77]                      |
| $\beta_2$       | [0.111, 6.53]                       |
| $\beta_3$       | [-0.559, 14.991]                    |

(d) Résultats asymptotiques

| Paramètres | Intervalles de confiance simultanés |
|------------|-------------------------------------|
| $\phi_1$   | [-1.3385, -0.7108]                  |
| $\phi_2$   | [-0.3898, 0.23809]                  |
| $\beta_1$  | [9.2675, 10.5521]                   |
| $\beta_2$  | [0.6137, 1.1277]                    |
| $\beta_3$  | [0.8673, 1.3292]                    |

Les intervalles de confiance pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont obtenus par projection de l'ellipsoïde [de la figure I(c)] sur les axes. Le point critique utilisé pour la construction de la région conjointe est égal à  $F_{0.12}(2; 42) = 2.23099$ . Les intervalles de confiance simultanés pour les paramètres de régression sont calculés à l'aide du point critique  $t_{0.0372k}(42) = 2.698$ .

Tableau II "exemple numérique"  
 Intervalles de confiance avec les niveaux:

$$\alpha = 0.10, \alpha_1 = \alpha_2 = 0.05, \alpha_{11} = \alpha_{12} = 0.025$$

des vrais paramètres:

$$\phi_1 = -0.9, \phi_2 = 0.0, \beta_1 = 10, \bar{\beta}_1 = (1 - \phi_1 - \phi_2)\beta_1 = 19, \beta_2 = \beta_3 = 1$$

(a) Calcul par Imhof (bornes exactes)

| Paramètres      | Intervalles de confiance simultanés | Intervalles de confiance non simultanés |
|-----------------|-------------------------------------|---|
| $\phi_1$        | [-1.419, -0.649]                    | [-1.419, -0.649]                        |
| $\phi_2$        | [-0.619, 0.31]                      | [-0.619, 0.31]                          |
| $\bar{\beta}_1$ | [12.146, 31.487]                    | [12.404, 31.205]                        |
| $\beta_2$       | [0.559, 1.253]                      | [0.624, 1.188]                          |
| $\beta_3$       | [0.739, 1.446]                      | [0.805, 1.381]                          |

Les intervalles de confiance pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont simultanés et sont obtenus par projection de la région de la figure 2(a) sur les axes. Les intervalles des paramètres de régression sont simultanés dans la première colonne ( $t_{0.5/2k}(42) = 2.494$ ) et sont non simultanés dans la deuxième colonne ( $t_{0.05/2}(42) = 2.019$ ).

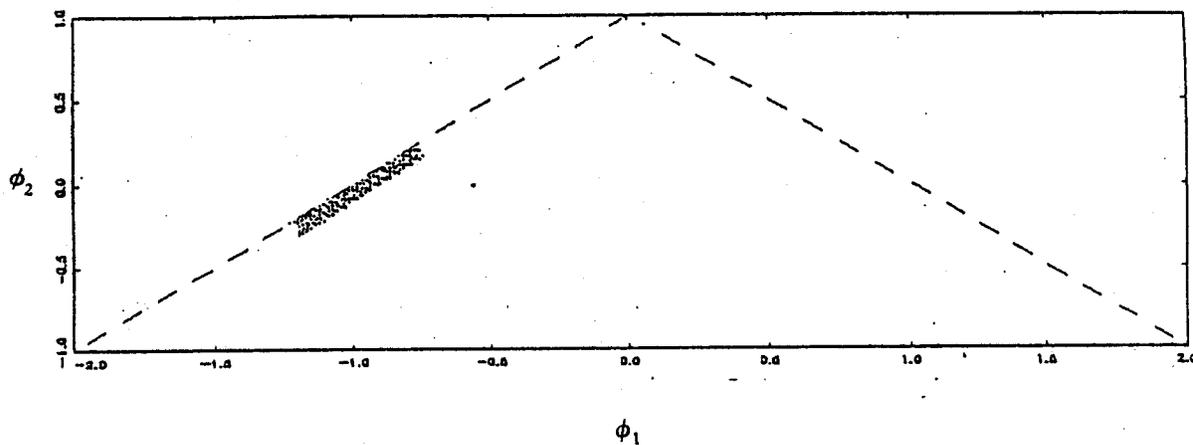
(Suite du tableau II)

## (b) Résultats asymptotiques

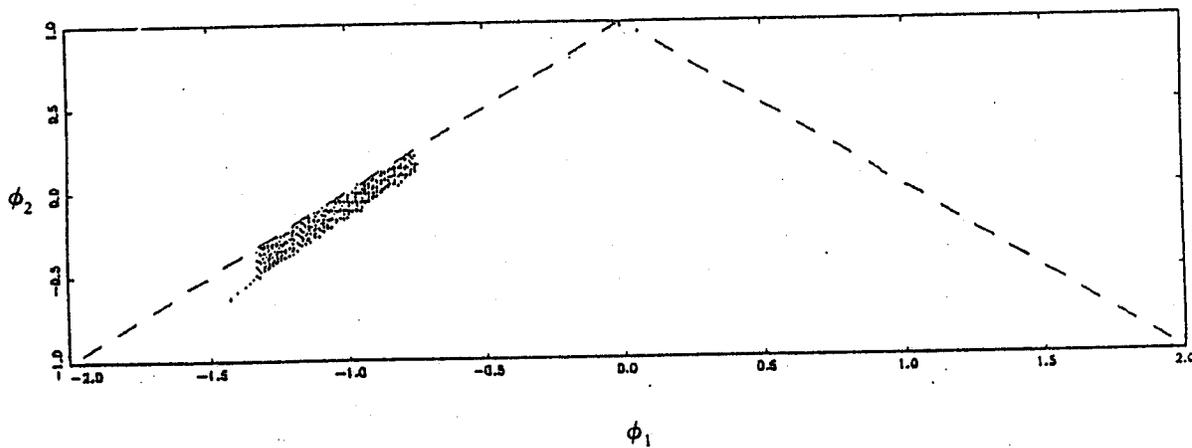
| Paramètres | Intervalles de confiance simultanés | Intervalles de confiance non simultanés |
|------------|-------------------------------------|---|
| $\phi_1$   | [-1.398, -0.665]                    | [-1.371, -0.679]                        |
| $\phi_2$   | [-0.449, 0.297]                     | [-0.421, 0.269]                         |
| $\beta_1$  | [9.319, 10.503]                     | [9.429, 10.39]                          |
| $\beta_2$  | [0.633, 1.108]                      | [0.678, 1.063]                          |
| $\beta_3$  | [0.885, 1.312]                      | [0.925, 1.271]                          |

Les intervalles de confiance dans la première colonne sont simultanés: les intervalles pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont construits par projection de l'ellipsoïde de la figure 2(b) sur les axes ( $F_{0.05}(2; 42) = 3.1$ ) et les intervalles des paramètres de régression sont calculés avec le point critique  $t_{0.05/2k}(42) = 2.49$ . Dans la seconde colonne, les intervalles sur les paramètres autorégressives sont aussi simultanés rectangulaires et sont construits avec le point critique  $t_{0.05/2p}(42) = 2.325$ , alors que les intervalles sur les paramètres de régression sont non simultanés et sont construits avec le point critique  $t_{0.05/2}(42) = 2.01$ .

Figure 1: "exemple numérique"  
Régions de confiance simultanées pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$  ( $1 - \alpha_1 = 0.88$ )  
(a) Points critiques calculés par l'algorithme d'Imhof



(b) Points critiques tabulés



(Suite de la Figure 1)  
(c) Région asymptotique

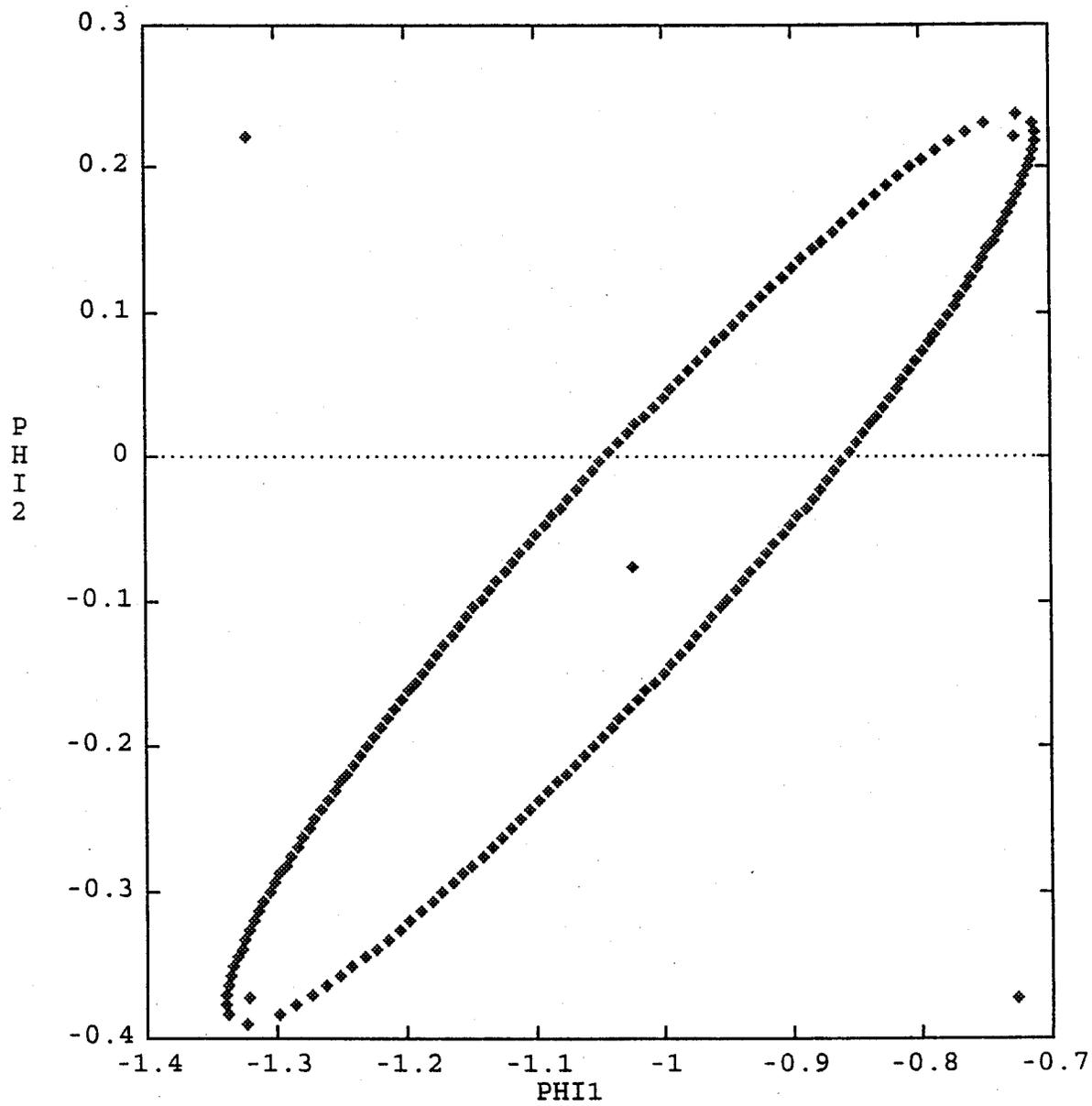
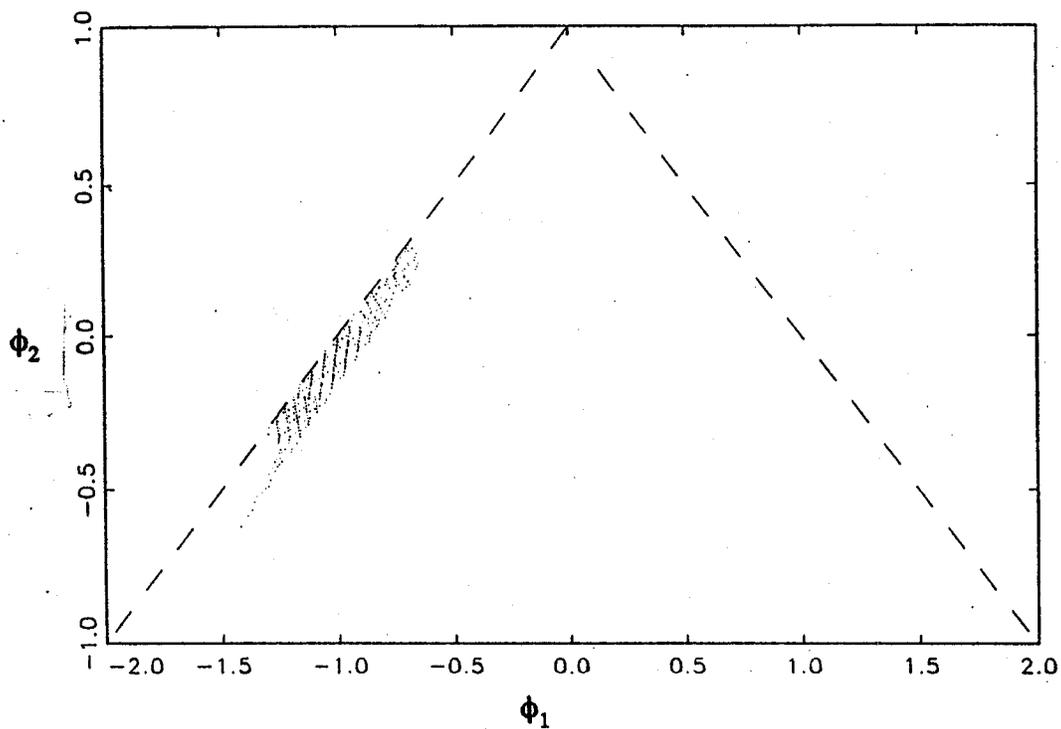


Figure 2: "exemple numérique"

Régions de confiance simultanées pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$  ( $1 - \alpha_1 = 0.95$ )

(a) Points critiques calculés par l'algorithme d'Imhof



(b) Région asymptotique

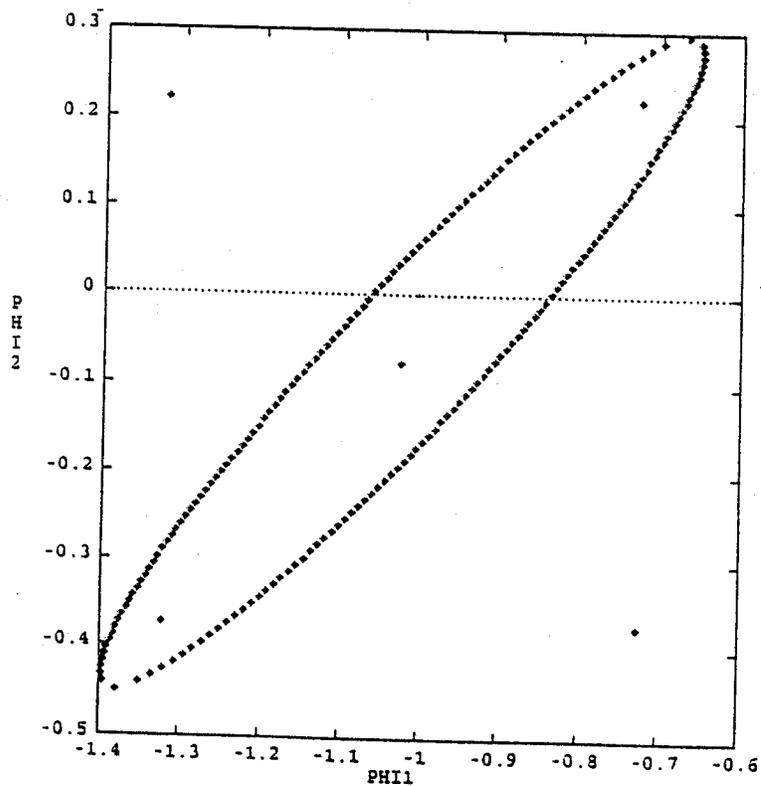


Figure 3: "cas du P.I.B réel tunisien"  
Région de confiance asymptotique pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$  ( $1 - \alpha_1 = 0.95$ )

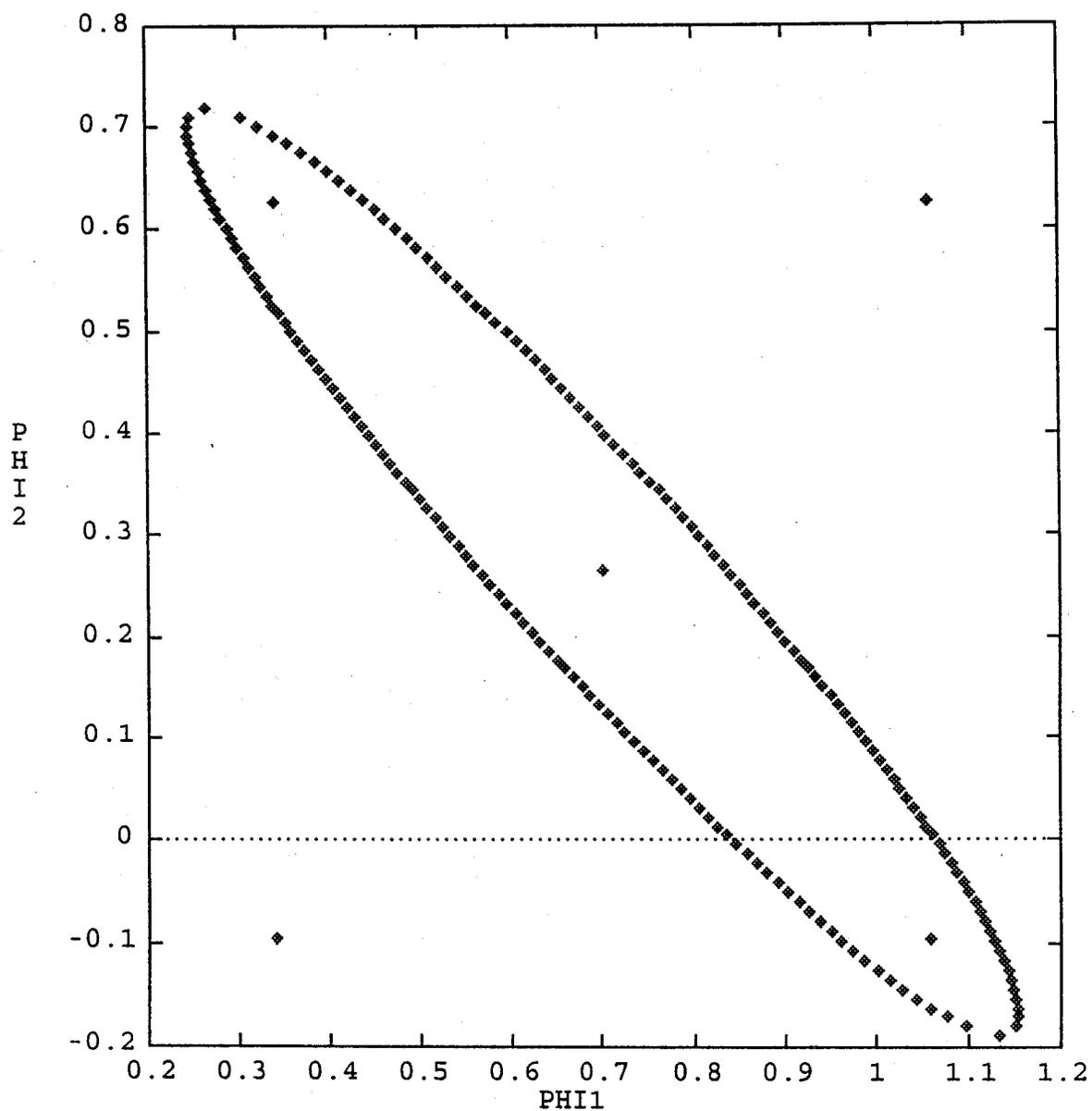
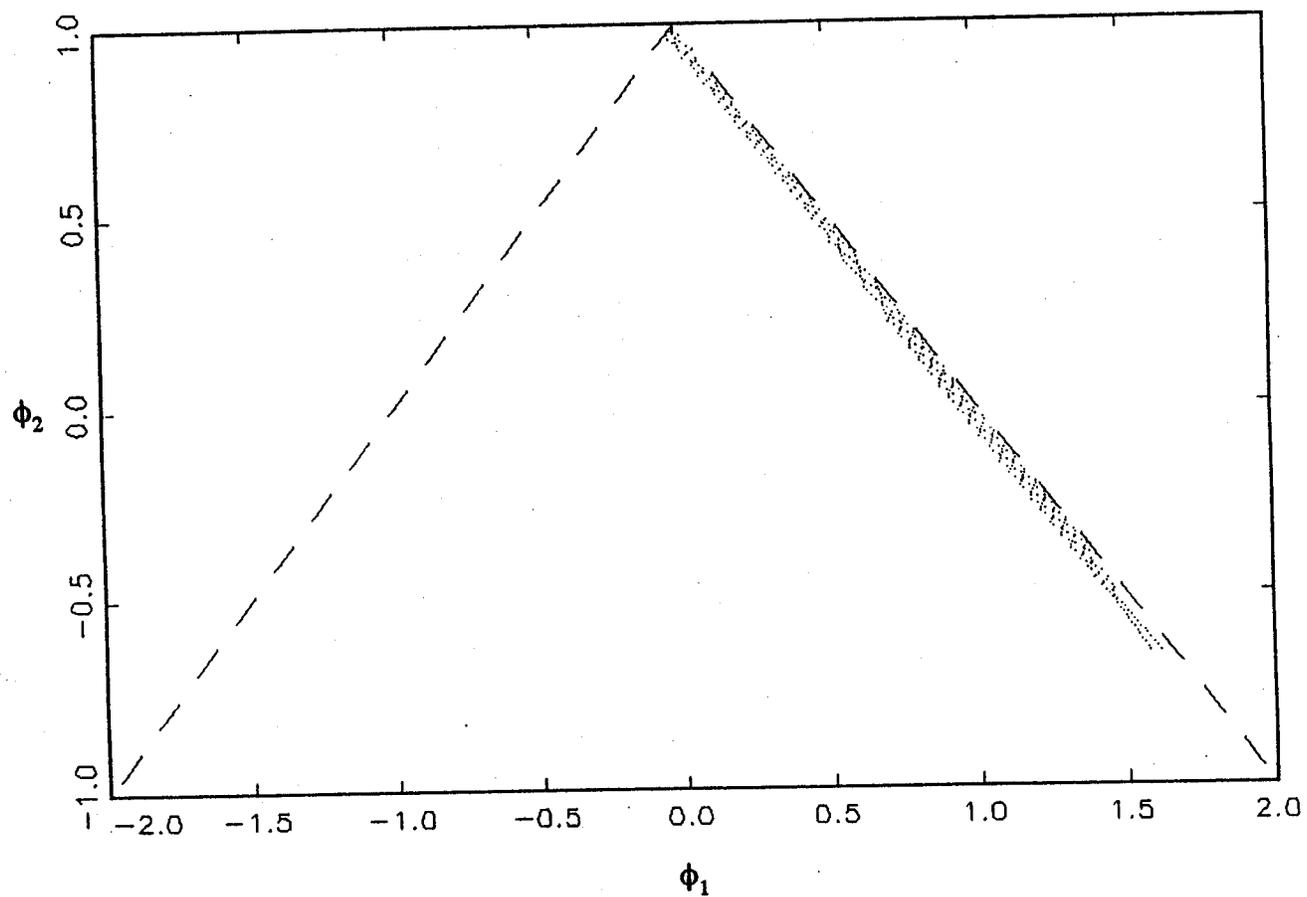


Figure 4: "cas du P.I.B réel tunisien"  
Région de confiance simultanée pour  $\phi_1$  et  $\phi_2$  ( $1 - \alpha_1 = 0.95$ )  
"Points critiques calculés par l'algorithme d'Imhof"



## Références

- ANDERSON, T. W., (1942): "*Distribution of the Serial Correlation Coefficient*," *Annals of Mathematical Statistics*, 13,1-13.
- (1948): "*On the Theory of Testing Serial Correlation*," *Skandinavisk Aktuarietied-skrift*, 31, 88-116.
- ANDREWS, D. W. K., and H. Y. CHEN., (1992): "*Approximately Median-Unbiased Estimation of Autoregressive Models With Applications to U.S. Macroeconomic and Financial Time Series*," *Cowles Foundation Discussion Paper No. 1026*.
- ANDREWS, D. W. K., (1993), "*Exactly Median-Unbiased Estimation of First Order Autoregressive/Unit Root Models*," *Econometrica*, 61, No. 1, 139-165.
- ANSLEY, G.F, Kohn. R, et, Shiveley, T. S., (1992): "*Computing P-Values for the Generalized Durbin-Watson and other Invariant Test Statistics*," *Journal of Econometrics*, 54,277-300.
- BERENBLUT, I. I., and G. I. WEBB., (1973): "*A New Test for Autocorrelated Errors in the Linear Regression Model*," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 35, 33-50.
- DAVIES, R. B. (1980): "*Algorithm AS 155: The Distribution of a Linear Combination of  $\chi^2$  Random Variables*," *Applied Statistics*, 29, 323-333.
- DUFOUR, J.-M., (1986): "*Exact Tests and Confidence Sets in Linear Regressions With Autocorrelated Errors*," *Cahier 8648, Département de Sciences Économiques, Université de Montréal*.
- DUFOUR, J.-M., (1990): "*Exact Tests and Confidence Sets in Linear Regressions With Autocorrelated Errors*," *Econometrica*, Vol 58, 2, 475- 494.

DUFOUR, J.-M., et M. NEIFAR., (1995 b): "*Méthodes d'Inférence Exactes pour des Processus Autorégressifs: une Approche Fondée sur des Tests Induits*,".

DURBIN, J., and G. S. WATSON., (1950): "*Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression I*," *Biometrika*, 37, 409-420.

———— (1951): "*Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression II*," *Biometrika*, 38, 159-178.

DURBIN, J., (1970): "*An Alternative to the Bounds Tests for Testing for Serial Correlation in Least-Squares Regression*," *Econometrica*, Vol 38, 3, 422-429.

DURBIN, J., (1971): "*Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression III*," *Biometrika*, 58, 1-19.

IMHOF, J. P., (1961): "*Computing the Distribution of Quadratic Forms in Normal Variables*," *Biometrika*, 48, 419-426.

JUDGE, G. G., W. E. GRIFFITHS, R. C. HILL, H. LUTKEPOHL, and T. C. LEE., (1985): *The Theory and Practice of Econometrics*, Second edition. New York: Wiley.

KING, M. L., (1981): "*The Alternative Durbin-Watson Test: An Assessment of Durbin and Watson's Choice of Test Statistic*," *Journal of Econometrics*, 3, 179-187.

———— (1983): "*Testing for Autocorrelation in linear regression Model :A Survey*," Working Paper 7183.

———— (1985): "*A Point Optimal Test for Autoregressive Disturbances*," *Journal of Econometrics*, 27, 21-37.

———— (1987): "*Testing for Autocorrelation in Linear Regression Models: A Survey*," in *Specification Analysis in the Linear Model: Essays in Honour of Donald Cochrane*, ed. by M. L. King and D. E. A. Giles. London: Routledge and Kegan Paul, 19-73.

- KOERTS, J., and A. P. J. ABRAHAMSE., (1969): "*On the Theory and Application of the General Linear Model*," Rotterdam: Rotterdam University Press.
- LEHMAN, E. L., (1959): "*Testing Statistical Hypotheses*," New York: John Wiley and Sons.
- SAVIN, N. E., (1984): "*Multiple Hypothesis Testing*," in Handbook of Econometrics, Vol. II, ed. by Z. Griliches and M. D. Intrilligator. Amsterdam: North Holland, 827-879.
- SAVIN, N. E., and K. J. WHITE., (1977): "*The Durbin- Watson Test for Serial Correlation with Extreme Sample Sizes or Many Regressors*," *Econometrica*, 45, 1989-1996.
- SCHMIDT, P., (1972): "*A Generalisation of the Durbin-Watson Test*," *Australian Economic Papers*.
- THEIL, H., and A. L. NAGAR., (1961): "*Testing the Independence of Regression Disturbances*," *Journal of the American Statistical Association*, 56.
- THOMAS, J.J., and WALLIS, K.F., (1971), "*Seasonal Variation in Regression Analysis*," *Journal of the Royal Statistical Society A*, 134, 57-72.
- THOMAS, J. R., ( 1984): "*Hypothesis Testing in Linear Models When the Error Covariance Matrix is non scalar*," *Econometrica*, 52.
- VINOD, H. D., (1973): "*Generalization of the Durbin-Watson Statistic for Higher Order Autoregressive Processes*," *Communications in Statistics*, 2, 115-144.
- VON NEUMANN, J., (1941): "*Distribution of the Ratio of the Mean-Square Successive Difference to the Variance*," *Annals of Mathematical Statistics*, 12, 367-395.
- WALLIS, K. J., (1972): "*Testing for Fourth Order Autocorrelation in Quarterly Regression Equation*," *Econometrica*, 40, 617-636.

WATSON, G. S., (1955): "*Serial Correlation in Regression Analysis I*," *Biometrika*, 42, 327-341.

WATSON, G. S., and E. J. HANNAN., (1956): "*Serial Correlation in Regression Analysis II*," *Biometrika*, 43, 436-448.

WEBB, G. I., (1973): "*Autocorrelations and the General Linear Model*," unpublished ph.D. thesis, The City University, London.

**ESSAI II**

**MÉTHODES D'INFÉRENCE EXACTES POUR DES  
PROCESSUS AUTORÉGRESSIFS: APPROCHE FONDÉE  
SUR DES TESTS INDUITS**

## 1. Introduction

L'inférence statistique (tests et régions de confiance) sur des modèles autorégressifs constitue l'un des problèmes fondamentaux posé par l'analyse des séries chronologiques en économétrie et en statistique. Les méthodes utilisées pour ce faire sont habituellement basées sur des approximations asymptotiques dont la fiabilité est généralement douteuse, même sous des hypothèses paramétriques précises (e.g., innovations gaussiennes). C'est le cas en particulier, lorsque le processus considéré est d'un ordre plus grand que un; voir, par exemple, Diebold et Nerlove (1990), Gouriéroux et Monfort (1990), Brockwell et Davis (1991), Stock (1991, 1993) et Hamilton (1994).

Dans ce texte, nous développons des méthodes d'inférence exactes relativement simples pour réaliser des tests et construire des régions de confiance sur les coefficients d'un processus autorégressif d'ordre  $p$  [AR( $p$ )] gaussien contenant un paramètre constant inconnu. Il n'y a pas de contrainte sur la stationnarité du processus. Nous allons particulièrement nous intéresser au problème des régions de confiance. La méthode développée est une extension de l'approche proposée par Dufour (1990) pour des processus AR(1). Elle comporte deux étapes principales. La première consiste à obtenir un test qui permet de vérifier n'importe quelle hypothèse fixant le vecteur complet des coefficients du processus autorégressif. De cette manière la distribution de

la statistique proposée ne comporte pas de paramètres de nuisance. Chaque hypothèse de ce type est testée en transformant les observations de façon à faire disparaître l'autocorrélation entre celles-ci sous l'hypothèse nulle (dépendance qui ne disparaît pas sous l'alternative) et en testant si les observations transformées sont indépendantes. En outre, pour traiter les cas où  $p \geq 2$ , nous utilisons un test induit obtenu en combinant plusieurs tests d'autocorrélation conçus pour détecter la dépendance aux délais 1, 2, ...,  $p$ .<sup>1</sup> Cette approche a l'avantage de simplifier considérablement le calcul des distributions des statistiques sous l'hypothèse nulle et de permettre l'utilisation de tables. Typiquement, les valeurs critiques appropriées peuvent être calculées au moyen de l'algorithme d'Imhof (1961) ou d'algorithmes semblables [e.g., Ansley, Kohn et Shiveley (1992)]. La seconde étape consiste à construire une région de confiance conjointe pour les coefficients du modèle. Cette dernière est obtenue en cherchant l'ensemble des vecteurs de coefficients autorégressifs qui ne sont pas rejetés par la procédure de test développée plus haut. En d'autres termes, on "inverse" la famille de tests considérée. Pour le cas AR(1), la région de confiance se calcule facilement en résolvant deux polynômes du second degré. Pour les processus d'ordre plus élevé ( $p \geq 2$ ), on peut avoir recours à un balayage sur  $p - 1$  coefficients du modèle: pour chaque configuration de ces  $p - 1$  coefficients, on obtient l'ensemble des valeurs acceptables du dernier paramètre (qui peut être vide) en résolvant  $2p$  polynômes du second degré. La région de confiance conjointe est alors l'union des "régions

---

<sup>1</sup>Pour des survols de la théorie des tests induits et de l'inférence simultanée; voir Miller (1981) et Savin (1984).

conditionnelles" ainsi obtenues. A partir de la région de confiance conjointe, on peut (si désiré) construire des régions de confiance pour les coefficients individuels du modèle par une méthode de projection, et tester toute genre d'hypothèse, linéaire ou non linéaire, sur les coefficients du modèle. Ces régions de confiance et les tests ainsi obtenus possèdent aussi une propriété de simultanéité. En plus d'être exacts sous une hypothèse gaussienne, les tests et les régions de confiance proposés sont "asymptotiquement valides" sous des hypothèses beaucoup plus faibles [e.g., lorsque les innovations sont indépendantes et identiquement distribuées avec une variance finie]. Les méthodes proposées sont appliquées à un modèle du P.I.B réel tunisien.

Notre texte est divisé comme suit. Après avoir décrit le modèle et les principales notations utilisées dans la section 2, nous montrons à la section 3 comment construire un test combiné des paramètres du modèle autorégressif. Dans la section 4, nous discutons comment construire une région de confiance conjointe pour les coefficients du modèle, en considérant d'abord en détail les cas AR(1) et AR(2). Dans la section 5, nous étudions comment construire des régions de confiance pour les coefficients individuels du modèle et comment tester diverses hypothèses sur ces coefficients. Nous démontrons dans la section 6, la validité asymptotique des tests sous des hypothèses de régularité usuelles plus faibles que l'hypothèse gaussienne. Enfin, à la section 7, nous appliquons les méthodes proposées à un modèle du P.I.B réel tunisien.

## 2. Modèle et notations

On considère le modèle AR(p) suivant:

$$(2.1) \quad y_t = \beta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t,$$

$$u_t \sim \text{ind } N[0, \sigma^2], \quad t = 1, \dots, T$$

où  $T \geq p + 1$ ,  $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}$  sont indépendants de  $u = (u_1, \dots, u_T)'$  et les paramètres  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \beta$  et  $\sigma^2$  sont inconnus. Afin de faciliter l'interprétation des résultats, il sera utile de reparamétriser le modèle de façon analogue à Dickey (1976), Fuller (1976) et Beveridge-Nelson (1981). Ainsi on voit facilement que

$$\begin{aligned} y_t &= \beta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t \\ &= \beta + (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p) y_{t-1} - (\phi_2 + \phi_3 + \dots + \phi_p)(y_{t-1} - y_{t-2}) \\ &\quad - (\phi_3 + \dots + \phi_p)(y_{t-2} - y_{t-3}) + \dots + (-\phi_p)(y_{t-p+1} - y_{t-p}) + u_t \\ &= \beta + \left( \sum_{j=1}^p \phi_j \right) y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \left( -\sum_{i=j+1}^p \phi_i \right) [y_{t-j} - y_{t-(j+1)}] + u_t, \end{aligned}$$

$t = 1, \dots, T$ , ou encore

$$(2.2) \quad \begin{aligned} y_t &= \beta + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 (y_{t-1} - y_{t-2}) + \dots + \theta_p (y_{t-(p-1)} - y_{t-p}) + u_t \\ &= \beta + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-1} + \dots + \theta_p \Delta y_{t-p+1} + u_t, \quad t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

où

$$\theta_1 = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p, \quad \theta_{j+1} = -\sum_{i=j+1}^p \phi_i, \quad \Delta y_{t-j} = y_{t-j} - y_{t-j-1}, \quad j \geq 1.$$

Les paramètres inconnus du modèle transformé (2.2) sont donc  $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ ,  $\beta$  et  $\sigma$ , et les variables explicatives sont  $y_{t-1}, \Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-p+1}$ . Les modèles (2.1) et (2.2) sont complètement équivalents.

### 3. Test de l'hypothèse $H_0(\underline{\theta}_0): \underline{\theta} = \underline{\theta}_0$

Nous allons maintenant étudier le problème qui consiste à tester l'hypothèse

$$(3.1) \quad H_0(\underline{\theta}_0): \underline{\theta} = \underline{\theta}_0 \text{ contre } H_a(\underline{\theta}_0): \underline{\theta} \neq \underline{\theta}_0.$$

On dénote par  $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$  le vecteur des vraies valeurs des paramètres et par  $\underline{\theta}_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{p0})'$  n'importe quel vecteur de valeurs hypothétiques. Sous  $H_0(\underline{\theta}_0)$ ,

$$(3.2) \quad y_t - \theta_{10}y_{t-1} - \theta_{20}\Delta y_{t-1} - \dots - \theta_{p0}\Delta y_{t-p+1} = \beta + u_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Définissons

$$z_t(\underline{\theta}) = y_t - \theta_1 y_{t-1} - \theta_2 \Delta y_{t-1} - \dots - \theta_p \Delta y_{t-p+1}, \quad t = 1, \dots, T,$$

et  $z(\underline{\theta}) = [z_1(\underline{\theta}), z_2(\underline{\theta}), \dots, z_T(\underline{\theta})]'$ . Sous  $H_0(\underline{\theta}_0)$ , la série  $\{z_t(\underline{\theta}_0): t = 1, \dots, T\}$  est un bruit blanc normal de moyenne  $\beta$ . Sous  $H_a(\underline{\theta}_0)$ , la même série sera autocorrélée et suivra un processus ARMA(p, p). On peut donc tester  $H_0(\underline{\theta}_0)$  en testant si les  $z_t(\underline{\theta}_0)$

sont indépendants contre la présence d'autocorrélation aux délais 1, 2, ..., p; voir Dufour et Neifar (1995 a). Comme la structure d'autocorrélation d'un processus ARMA(p, p) est complètement déterminée par les p premières autocorrélations, il sera suffisant pour tester l'indépendance des  $z_t(\theta_0)$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Pour ce faire, nous considérons p statistiques de la forme suivante:

$$(3.3) \quad D_j(\theta_0) = \frac{z(\theta_0)' \bar{A}_j z(\theta_0)}{z(\theta_0)' \bar{B}_j z(\theta_0)}, \quad j = 1, \dots, p$$

où  $\bar{A}_j = M A_j M$ ,  $\bar{B}_j = M B_j M$ ,  $M = I_T - \frac{1}{T} \mathbf{1}\mathbf{1}'$ ,  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)'$ , et  $B_j$  est une matrice positive définie. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $A_j$  et  $B_j$  (et donc  $\bar{A}_j$  et  $\bar{B}_j$ ) sont des matrices symétriques. L'intérêt de considérer de telles statistiques vient du fait que la distribution de chacune d'elles, sous  $H_0(\theta_0)$ , ne dépend d'aucun paramètre de nuisance et peut être calculée assez facilement [par exemple par l'algorithme d'Imhof (1961)]. En particulier, on peut considérer:

i) des statistiques de von Neumann généralisées:

$$(3.4) \quad VN_j(\theta_0) = \frac{T \sum_{t=1}^{T-j} [z_{t+j}(\theta_0) - z_t(\theta_0)]^2}{(T-j) \sum_{t=1}^T [z_t(\theta_0) - \bar{z}(\theta_0)]^2}, \quad j = 1, \dots, p$$

où  $\bar{z}(\theta_0) = \sum_{t=1}^T z_t(\theta_0)/T$ ;

ii) les coefficients d'autocorrélation:

$$(3.5) \quad r_j(\theta_0) = \frac{\sum_{t=1}^{T-j} [z_t(\theta_0) - \bar{z}(\theta_0)][z_{t+j}(\theta_0) - \bar{z}(\theta_0)]}{\sum_{t=1}^T [z_t(\theta_0) - \bar{z}(\theta_0)]^2}, \quad j = 1, \dots, p;$$

iii) des statistiques de Durbin-Watson généralisées

$$(3.6) \quad d_j(\theta_0) = \frac{\sum_{t=1}^{T-j} [z_{t+j}(\theta_0) - z_t(\theta_0)]^2}{\sum_{t=1}^T [z_t(\theta_0) - \bar{z}(\theta_0)]^2} = \frac{(T-j)}{T} VN_j(\theta_0), \quad j = 1, \dots, p.$$

Il est facile de voir que toutes ces statistiques s'écrivent sous la forme (3.3).<sup>2</sup>

Un test bilatéral de l'hypothèse  $H_0(\theta_0)$  contre la présence d'autocorrélation au délai  $j$  consiste alors à rejeter  $H_0(\theta_0)$  au niveau  $\alpha_j$  ( $0 < \alpha_j < 1$ ) lorsque

$$(3.7) \quad D_j(\theta_0) < d_{1j}(\alpha_{1j}) \text{ ou } D_j(\theta_0) > d_{2j}(\alpha_{2j})$$

où  $d_{1j}(\alpha_{1j})$  et  $d_{2j}(\alpha_{2j})$  sont choisis de façon telle que, sous l'hypothèse nulle,

$$P[ D_j(\theta_0) < d_{1j}(\alpha_{1j}) ] \leq \alpha_{1j}, \quad P[ D_j(\theta_0) > d_{2j}(\alpha_{2j}) ] \leq \alpha_{2j}$$

où  $\alpha_{1j} + \alpha_{2j} = \alpha_j$ ,  $0 \leq \alpha_{1j} \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha_{2j} \leq 1$ .

En combinant les statistiques  $D_j(\theta_0)$ ,  $j = 1, \dots, p$ , il est facile d'obtenir un test de  $H_0(\theta_0)$  contre la présence d'autocorrélation aux délais  $j = 1, \dots, p$ : il suffit de rejeter  $H_0(\theta_0)$  lorsqu'au moins un des tests  $D_j(\theta_0)$ ,  $j = 1, \dots, p$ , rejette  $H_0(\theta_0)$

---

<sup>2</sup>La théorie des tests de type Durbin-Watson contre l'autocorrélation à des délais plus grands que un a été discutée par plusieurs auteurs; voir, par exemple, Wallis (1972), Schmidt (1972), Vinod (1973) et King (1987).

(procédure de test induit). Pourvu que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p \leq \alpha$ , le niveau global de cette procédure n'excède pas  $\alpha$  (par l'inégalité de Boole-Bonferroni).

#### 4. Régions de confiance pour $\underline{\theta}$

Si on se sert du test induit décrit à la section précédente, l'hypothèse  $H_0(\underline{\theta}_0): \underline{\theta} = \underline{\theta}_0$  n'est pas rejetée lorsque  $d_{1j}(\alpha_{1j}) \leq D_j(\underline{\theta}_0) \leq d_{2j}(\alpha_{2j})$  pour  $j = 1, 2, \dots, p$ . Par conséquent, l'ensemble des valeurs  $\underline{\theta}_0$  qui ne sont pas rejetées par cette procédure,

$$(4.1) \quad I = \{ \underline{\theta}_0 : d_{1j}(\alpha_{1j}) \leq D_j(\underline{\theta}_0) \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), j = 1, \dots, p \}$$

est une région de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ :

$$(4.2) \quad P[ \underline{\theta} \in I ] \geq 1 - \alpha.$$

Autrement dit, la région est obtenue en "inversant" la famille de tests proposée pour des hypothèses de type  $H_0(\underline{\theta}_0)$ . Si, de plus, on restreint  $\underline{\theta}$  à un ensemble de valeurs admissibles  $S_p$ , l'ensemble  $I \cap S_p$  constitue aussi une région de confiance de niveau  $1 - \alpha$  (quand les conditions imposées sont correctes).

Nous allons maintenant étudier de façon plus précise comment construire la région de confiance  $I$ . Pour ce faire, il sera utile d'examiner d'abord des cas spéciaux, les processus AR(1) et AR(2), pour ensuite traiter le cas général d'un processus AR(p).

#### 4.1 Processus AR(1)

Dans le cas d'un processus AR(1), les équations (2.1) et (2.2) s'écrivent:

$$(4.3) \quad y_t = \beta + \phi y_{t-1} + u_t = \beta + \theta y_{t-1} + u_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $u_t \sim \text{ind} N[0, \sigma^2]$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,  $T \geq 2$ ,  $\theta = \phi$  et  $y_0$  est indépendant de

$\underline{u} = (u_1, \dots, u_T)'$ . Nous ne faisons pas d'hypothèses supplémentaires sur la

distribution de  $y_0$ . Afin de construire une région de confiance exacte pour  $\theta$ , on

considère une famille de tests de la forme (3.7) pour les hypothèses  $H_0(\theta_0)$ . Alors

l'ensemble des valeurs  $\theta_0$  qui ne sont pas rejetées par le test,

$$(4.4) \quad I = \{ \theta_0: d_{11}(\alpha_{11}) \leq D_1(\theta_0) \leq d_{21}(\alpha_{21}) \},$$

est une région de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\theta$ . Il est clair que

$$\theta \in I \text{ (si et seulement si) ssi } d_{11}(\alpha_{11}) \leq D_1(\theta) \leq d_{21}(\alpha_{21}),$$

ce qui équivaut à dire que  $\theta \in I_1$  et  $\theta \in I_2$ , où

$$(4.5) \quad I_1 = \{ \theta_0: D_1(\theta_0) \geq d_{11}(\alpha_{11}) \}, \quad I_2 = \{ \theta_0: D_1(\theta_0) \leq d_{21}(\alpha_{21}) \}.$$

En remplaçant  $D_1(\theta)$  par la formule (3.3), on aura:  $\theta \in I_1$  et  $\theta \in I_2$  ssi

$$(4.6) \quad D_1(\theta) = \frac{z(\theta)\bar{A}_1 z(\theta)}{z(\theta)\bar{B}_1 z(\theta)} \geq d_{11}(\alpha_{11}) \quad \text{et} \quad D_1(\theta) = \frac{z(\theta)\bar{A}_1 z(\theta)}{z(\theta)\bar{B}_1 z(\theta)} \leq d_{21}(\alpha_{21})$$

ou, de façon équivalente,

$$(4.7) \quad z(\theta)'[\bar{A}_1 - d_{11}\bar{B}_1]z(\theta) \geq 0 \quad \text{et} \quad z(\theta)'[\bar{A}_1 - d_{21}\bar{B}_1]z(\theta) \leq 0$$

où  $d_{11} \equiv d_{11}(\alpha_{11})$ ,  $d_{21} \equiv d_{21}(\alpha_{21})$ ,  $\alpha_{11} + \alpha_{21} = \alpha$ ,  $0 \leq \alpha_{11} \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha_{21} \leq 1$ ,

et

$$(4.8) \quad z(\theta) = y - \theta y_{-1}, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_T)', \quad y_{-1} = (y_0, y_1, \dots, y_{T-1})'$$

En remplaçant  $z(\theta)$  par sa valeur en (4.8) et après quelques manipulations on peut voir

que:  $\theta \in I_1$  et  $\theta \in I_2$  ssi

$$(4.9) \quad a_{11}\theta^2 + b_{11}\theta + c_{11} \geq 0, \quad a_{21}\theta^2 + b_{21}\theta + c_{21} \leq 0$$

où

$$(4.10) \quad a_{11} = y_{-1}'\bar{C}_{11}y_{-1}, \quad b_{11} = -2 y_{-1}'\bar{C}_{11}y, \quad c_{11} = y'\bar{C}_{11}y, \quad \bar{C}_{11} = \bar{A}_1 - d_{11}\bar{B}_1,$$

$$(4.11) \quad a_{21} = y_{-1}'\bar{C}_{21}y_{-1}, \quad b_{21} = -2 y_{-1}'\bar{C}_{21}y, \quad c_{21} = y'\bar{C}_{21}y, \quad \bar{C}_{21} = \bar{A}_1 - d_{21}\bar{B}_1.$$

Une fois qu'on a les racines des deux polynômes du second degré en (4.9), il est facile

de trouver les valeurs de  $\theta$ , pour lesquelles  $a_{11}\theta^2 + b_{11}\theta + c_{11} \geq 0$  et

$a_{21}\theta^2 + b_{21}\theta + c_{21} \leq 0$ . Ces dernières constituent la région de confiance  $I = I_1 \cap I_2$ .

Si de plus, on impose la condition de stationnarité  $|\theta| < 1$ , l'ensemble

$\tilde{I} = I_1 \cap I_2 \cap (-1, +1)$  constitue toujours une région de confiance de niveau  $\alpha$ . De même si on impose plutôt  $|\theta| \leq 1$ , l'ensemble  $\tilde{I} = I_1 \cap I_2 \cap [-1, +1]$  sera une région de confiance de niveau  $\alpha$ .

#### 4.2 Processus AR(2)

Dans le cas d'un processus AR(2), l'équation (2.2) devient:

$$(4.12) \quad y_t = \beta + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 (y_{t-1} - y_{t-2}) + u_t$$

$$= \beta + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 \Delta y_{t-1} + u_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\Delta y_{t-1} = y_{t-1} - y_{t-2}$ ,  $u_t \sim \text{ind} N [0, \sigma^2]$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,  $T \geq 3$  et  $y_{-1}, y_0$  sont indépendants de  $\underline{u} = (u_1, \dots, u_T)'$ . Afin de construire une région de confiance valide pour  $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2)'$ , on considère une famille de tests du type (3.7) avec  $j = 1, 2$ , pour des hypothèses de la forme  $H_0(\underline{\theta}_0): \underline{\theta} = \underline{\theta}_0$ , où  $\underline{\theta}_0 = (\theta_{10}, \theta_{20})'$  est le vecteur des valeurs hypothétiques. L'ensemble des valeurs de  $\underline{\theta}_0$  non rejetées par le test,

$$(4.13) \quad I = \{ \underline{\theta}_0 : d_{1j}(\alpha_{1j}) \leq D_j(\underline{\theta}_0) \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), \quad j = 1, 2 \},$$

est une région de confiance conjointe pour  $\underline{\theta}$  de niveau supérieur ou égal à  $1 - \alpha$ .

Nous avons:

$$\underline{\theta} \in I \text{ ssi } (\underline{\theta} \in I_1 \text{ et } \underline{\theta} \in I_2)$$

où

$$I_1 = \{ \underline{\theta}_0 : D_j(\underline{\theta}_0) \geq d_{1j}(\alpha_{1j}), j = 1, 2 \},$$

$$I_2 = \{ \underline{\theta}_0 : D_j(\underline{\theta}_0) \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), j = 1, 2 \}.$$

En remplaçant de nouveau  $D_j(\underline{\theta})$  par la formule (3.3), on voit que:

$$(\underline{\theta} \in I_1 \text{ et } \underline{\theta} \in I_2) \text{ ssi}$$

$$d_{1j}(\alpha_{1j}) \leq D_j(\underline{\theta}) = \frac{z(\underline{\theta})' \bar{A}_j z(\underline{\theta})}{z(\underline{\theta})' \bar{B}_j z(\underline{\theta})} \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), j = 1, 2,$$

ou, de façon équivalente,

$$(4.14) \quad z(\underline{\theta})' [\bar{A}_j - d_{1j} \bar{B}_j] z(\underline{\theta}) \geq 0 \text{ et } z(\underline{\theta})' [\bar{A}_j - d_{2j} \bar{B}_j] z(\underline{\theta}) \leq 0$$

où

$$(4.15) \quad z(\underline{\theta}) = (y - \theta_2 \Delta y_{-1}) - \theta_1 y_{-1}, y'_{-1} = (y_0, y_1, \dots, y_{T-1})',$$

$\Delta y_{-1} = (y_0 - y_{-1}, y_1 - y_0, \dots, y_{T-1} - y_{T-2})'$ ,  $d_{1j} \equiv d_{1j}(\alpha_{1j})$  et  $d_{2j} \equiv d_{2j}(\alpha_{2j})$ . En

(4.14)  $z(\underline{\theta})$  dépend de deux paramètres inconnus  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Si on fixe  $\theta_2 = \theta_{20}$ , la résolution de ces inéquations nécessite la recherche des racines de quatre polynôme du second degré comme dans le cas d'un processus AR(1). Pour  $\theta_{20}$  donné, définissons:

$$I_1(\theta_{20}) = \{ (\theta_1, \theta_{20})' : D_j(\theta_1, \theta_{20}) \geq d_{1j}, j = 1, 2 \},$$

$$I_2(\theta_{20}) = \{ (\theta_1, \theta_{20})' : D_j(\theta_1, \theta_{20}) \leq d_{2j}, j = 1, 2 \},$$

$$I(\theta_{20}) = \{ \underline{\theta} : \underline{\theta} \in I_1(\theta_{20}) \text{ et } \underline{\theta} \in I_2(\theta_{20}) \}.$$

$I(\theta_{20})$  représente le sous-ensemble conditionnel (possiblement vide) des éléments de  $I$  tels que  $\theta_2 = \theta_{20}$ . On voit facilement que  $I = \bigcup_{\theta_{20} \in S_2} I(\theta_{20})$  où  $S_2$  est l'ensemble des valeurs admissibles de  $\theta_2$ .  $(\theta_1, \theta_{20})' \in I(\theta_{20})$  ssi les inéquations (4.14) sont vérifiées pour

$$z(\underline{\theta}) = (y - \theta_{20} \Delta y_{-1}) - \theta_1 y_{-1} = \bar{z}(\theta_{20}) - \theta_1 y_{-1}.$$

De plus,

$$\underline{\theta} \in I_1(\theta_{20}) \text{ ssi } a_{1j} \theta_1^2 + b_{1j} \theta_1 + c_{1j} \geq 0, \quad j = 1, 2$$

et

$$\underline{\theta} \in I_2(\theta_{20}) \text{ ssi } a_{2j} \theta_1^2 + b_{2j} \theta_1 + c_{2j} \leq 0, \quad j = 1, 2$$

où

$$a_{1j} = y'_{-1} \bar{C}_{1j} y_{-1}, \quad b_{1j} = -2 y'_{-1} \bar{C}_{1j} \bar{z}(\theta_{20}), \quad c_{1j} = \bar{z}(\theta_{20})' \bar{C}_{1j} \bar{z}(\theta_{20}),$$

$$\bar{C}_{1j} = \bar{A}_j - d_{1j} \bar{B}_j,$$

$$a_{2j} = y'_{-1} \bar{C}_{2j} y_{-1}, \quad b_{2j} = -2 y'_{-1} \bar{C}_{2j} \bar{z}(\theta_{20}), \quad c_{2j} = \bar{z}(\theta_{20})' \bar{C}_{2j} \bar{z}(\theta_{20}),$$

$$\bar{C}_{2j} = \bar{A}_j - d_{2j} \bar{B}_j, \quad j = 1, 2.$$

Notons que le choix de fixer  $\theta_2$  plutôt que  $\theta_1$  n'est pas arbitraire, car si on impose les conditions de stabilité, le domaine des valeurs admissibles de  $\theta_2$  est plus restreint que

celui de  $\theta_1$ . On peut alors effectuer un balayage des valeurs admissibles de  $\theta_{20}$ , en résolvant à chaque fois les inéquations (4.14) correspondantes. On trouve ainsi:

$$I = \bigcup_{\theta_{20} \in S_2} I(\theta_{20}) = \bigcup_{\theta_{20} \in S_2} [I_1(\theta_{20}) \cap I_2(\theta_{20})].$$

En particulier, si on impose les conditions de stabilité sur  $\theta_2$  et  $\theta_1$ , la région de confiance

$$I = \bigcup_{\theta_{20} \in S_2} [I_1(\theta_{20}) \cap I_2(\theta_{20})] \cap S_2$$

où

$$S_2 = \{ (\theta_1, \theta_2) : -3 < \theta_1 < 1, |\theta_2| < 1, 2\theta_2 + \theta_1 > -1 \},^3$$

est de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\underline{\theta}$ .

#### 4.3 Processus AR(p)

Pour le cas d'un processus AR(p), où  $p \geq 1$ , on peut procéder de façon analogue. On considère  $p$  tests de la forme (3.7), alors l'ensemble des valeurs de  $\underline{\theta}_0$  qui ne sont rejetées par aucun de ces tests,

$$I = \{ \underline{\theta}_0 : d_{1j}(\alpha_{1j}) \leq D_j(\underline{\theta}_0) \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), j = 1, \dots, p \},$$

---

<sup>4</sup> $S_2$  est la région de stationnarité pour un processus autorégressif d'ordre deux; voir Farebrother (1973a, 1973b, 1974b, 1974c, 1976, 1987) pour les conditions de stabilité nécessaires et suffisantes pour les processus autorégressifs d'ordre 2, 3, 4 et 5.

constitue une région de confiance conjointe de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\underline{\theta}$ . Il est facile de voir que

$$\underline{\theta} \in I \text{ ssi } D_j(\underline{\theta}) \geq d_{1j}(\alpha_{1j}) \text{ et } D_j(\underline{\theta}) \leq d_{2j}(\alpha_{2j}), j = 1, \dots, p,$$

$$\text{ssi } \underline{\theta} \in I_1 \text{ et } \underline{\theta} \in I_2$$

où

$$I_1 = \{ \underline{\theta}: D_j(\underline{\theta}) \geq d_{1j}, j = 1, \dots, p \}$$

et

$$I_2 = \{ \underline{\theta}: D_j(\underline{\theta}) \leq d_{2j}, j = 1, \dots, p \}, d_{1j} \equiv d_{1j}(\alpha_{1j}), d_{2j} \equiv d_{2j}(\alpha_{2j}).$$

En particulier,

$$\underline{\theta} \in I_1 \text{ ssi } D_j(\underline{\theta}) \geq d_{1j} \text{ ssi } \frac{z'(\underline{\theta})\bar{A}_j z(\underline{\theta})}{z'(\underline{\theta})\bar{B}_j z(\underline{\theta})} \geq d_{1j},$$

ou, de façon équivalente,

$$(4.16) \quad z(\underline{\theta})' [\bar{A}_j - d_{1j}\bar{B}_j] z(\underline{\theta}) \geq 0, j = 1, \dots, p$$

où

$$z(\underline{\theta}) = (y - \theta_2 \Delta y_{-1} - \theta_3 \Delta y_{-2} - \dots - \theta_p \Delta y_{-p+1}) - \theta_1 y_{-1} = \bar{z}(\underline{\theta}_2) - \theta_1 y_{-1},$$

$$\underline{\theta}_2 = (\theta_2, \dots, \theta_p)', y = (y_1, y_2, \dots, y_T)', y_{-1} = (y_0, y_1, \dots, y_{T-1})',$$

$$\Delta y_{-k} = (\Delta y_{-k}, \dots, \Delta y_0, \dots, \Delta y_{T-k+1})', k \geq 1.$$

Les inéquations (4.16) dépendent de  $p$  paramètres inconnus. Si on fixe  $\theta_2 =$

$\theta_2^0 = (\theta_{20}, \dots, \theta_{p0})'$ , le problème se réduit à la résolution de polynômes du second degré

en  $\theta_1$ . Plus précisément,  $(\theta_1, \theta_2^0) \in I_1(\theta_2^0)$  ssi

$$(\bar{z}(\theta_2^0) - \theta_1 \gamma_{-1})'(\bar{A}_j - d_{1j} \bar{B}_j)(\bar{z}(\theta_2^0) - \theta_1 \gamma_{-1}) \geq 0, \quad j = 1, \dots, p$$

ssi

$$\begin{aligned} \bar{z}(\theta_2^0)'(\bar{A}_j - d_{1j} \bar{B}_j)\bar{z}(\theta_2^0) - 2 \theta_1 \gamma_{-1}'(\bar{A}_j - d_{1j} \bar{B}_j)\bar{z}(\theta_2^0) + \\ \theta_1^2 \gamma_{-1}'(\bar{A}_j - d_{1j} \bar{B}_j)\gamma_{-1} \geq 0. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de trouver les valeurs de  $\theta_1$  qui satisfont les inéquations

$$(4.17) \quad a_{1j} \theta_1^2 + b_{1j} \theta_1 + c_{1j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, p$$

où  $a_{1j} = \gamma_{-1}' \bar{C}_{1j} \gamma_{-1}$ ,  $b_{1j} = -2 \gamma_{-1}' \bar{C}_{1j} \bar{z}(\theta_2^0)$ ,  $c_{1j} = \bar{z}(\theta_2^0)' \bar{C}_{1j} \bar{z}(\theta_2^0)$  et  $\bar{C}_{1j} = \bar{A}_j - d_{1j} \bar{B}_j$ . De

la même façon:  $(\theta_1, \theta_2^0) \in I_2(\theta_2^0)$  ssi

$$(4.18) \quad a_{2j} \theta_1^2 + b_{2j} \theta_1 + c_{2j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, p$$

où  $a_{2j} = \gamma_{-1}' \bar{C}_{2j} \gamma_{-1}$ ,  $b_{2j} = -2 \gamma_{-1}' \bar{C}_{2j} \bar{z}(\theta_2^0)$ ,  $c_{2j} = \bar{z}(\theta_2^0)' \bar{C}_{2j} \bar{z}(\theta_2^0)$  et  $\bar{C}_{2j} = \bar{A}_j - d_{2j} \bar{B}_j$ .

Pour chaque  $\theta_2^0$  fixe, on obtient une région de confiance  $I_1(\theta_2^0) \cap I_2(\theta_2^0)$ , pour  $\theta_1$

(conditionnelle sur  $\theta_2^0$ ). En faisant ainsi un balayage de l'ensemble des valeurs possibles

de  $\theta_2^0$  et en résolvant les  $2p$  polynômes du second degré en (4.17) et (4.18), on construit alors la région de confiance conjointe

$$I = \bigcup_{\theta_2^0 \in S_2} [I_1(\theta_2^0) \cap I_2(\theta_2^0)]$$

où  $S_2$  est l'ensemble des valeurs de  $\theta_2^0$  admissibles (par exemple, sous l'hypothèse de stationnarité).

### 5. Tests d'hypothèses générales

Supposons maintenant que l'on s'intéresse à  $p$  fonctions  $g_1(\theta), \dots, g_p(\theta)$  de  $\theta$ .

Étant donnée la région  $I$ , on peut construire par une méthode de projection des régions de confiance simultanées de niveau  $1 - \alpha$  pour  $g_1(\theta), \dots, g_p(\theta)$ . En effet,

$$(5.1) \quad \theta \in I \rightarrow g_i(\theta) \in g_i(I), \quad i = 1, \dots, p,$$

et donc

$$(5.2) \quad P[ g_i(\theta) \in g_i(I), \quad i = 1, \dots, p ] \geq P[ \theta \in I ] \geq 1 - \alpha.$$

Comme cas spécial, on peut s'intéresser aux composantes individuelles  $\theta_i$  du vecteur  $\theta$ , ce qui permet d'obtenir des régions (ou intervalles) de confiance simultanés pour les différents coefficients  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ . Il est clair en outre que la condition (5.2) implique

$$(5.3) \quad P[ g_i(\theta) \in g_i(I) ] \geq 1 - \alpha, \quad i = 1, \dots, p,$$

c'est-à-dire les régions de confiance  $g_i(I)$  sont aussi des régions de confiance marginales au sens usuel du terme. Comme autre cas spécial, on peut s'intéresser à la construction des régions de confiance pour les racines du polynôme autorégressif en (2.1) et, à partir de là, examiner si ces racines se trouvent à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle unité.

Sur la base d'une région de confiance  $I$  pour  $\underline{\theta}$ , on peut aussi tester n'importe quelle restriction sur les paramètres du modèle. Considérons en effet une hypothèse générale de la forme

$$(5.4) \quad H_0: \underline{\theta} \in \Omega_0$$

où  $\Omega_0$  est un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}^p$ . Une façon simple de tester  $H_0$  consiste à

$$(5.5) \quad \text{rejeter } H_0 \text{ lorsque } I \cap \Omega_0 = \emptyset$$

où  $I$  est une région de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\underline{\theta}$ , c'est-à-dire

$$P[\underline{\theta} \in I] \geq 1 - \alpha.$$

Le test ainsi construit est de niveau  $\alpha$ . Sous  $H_0$ , l'événement  $\underline{\theta} \in I$  est équivalent à  $\underline{\theta} \in I \cap \Omega_0$ , et donc

$$(5.6) \quad P[I \cap \Omega_0 = \emptyset] \leq P[\underline{\theta} \notin I \cap \Omega_0] = P[\underline{\theta} \notin I] \leq \alpha.$$

Par exemple, on peut tester des hypothèses portant sur les racines du polynôme autorégressif en (2.1) ou (2.2), lesquelles constituent en général des transformations non-linéaires des coefficients de ces polynômes. Pour ce faire on peut associer à la

région I les régions correspondantes  $R_i(I)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , pour les racines de ces polynômes (qu'on peut ordonner de façon naturelle par ordre croissant des modules). De là, on peut tester n'importe quelle hypothèse sur la position de ces racines.

## 6. Validité asymptotique des tests

Dans cette section, nous étudions la "validité asymptotique" des tests proposés plus haut sous des conditions de régularité usuelles, telles que celles considérées par Brockwell et Davis (1991, chapitre 7, théorème 7.2.2). En particulier, sous l'hypothèse où  $\underline{\theta}_0$  est la vraie valeur de  $\underline{\theta}$ , nous supposons ici que les variables transformées  $z_t(\underline{\theta}_0)$ ,  $t = 1, \dots, T$  sont indépendantes et identiquement distribués (i.i.d.) de moyenne  $\beta$  et de variance  $0 < \sigma^2 < \infty$ . A partir de (3.6), il est facile de voir que  $d_j(\underline{\theta}_0)$  et  $VN_j(\underline{\theta}_0)$  ont la même distribution asymptotique. De plus, si on définit

$$\bar{z}_t(\underline{\theta}_0) = z_t(\underline{\theta}_0) - \bar{z}(\underline{\theta}_0),$$

ds plus (3.6)

$d_j(T, \underline{\theta}_0) \equiv d_j(\underline{\theta}_0)$  et  $r_j(T, \underline{\theta}_0) \equiv r_j(\underline{\theta}_0)$ , on peut réécrire  $d_j(T, \underline{\theta}_0)$  et

$$r_j(T, \underline{\theta}_0):$$

$$(6.1) \quad d_j(T, \underline{\theta}_0) = 2[1 - r_j(T, \underline{\theta}_0)] - \frac{\sum_{t=1}^T (\bar{z}_t^2(\underline{\theta}_0) + \bar{z}_{t+T-j}^2(\underline{\theta}_0))}{\sum_{t=1}^T \bar{z}_t^2(\underline{\theta}_0)}, \quad j = 1, \dots, p$$

où  $z_t(\underline{\theta}_0) = y_t - \theta_{01}y_{t-1} - \theta_{02}\Delta y_{t-1} - \dots - \theta_{0p}\Delta y_{t-p+1}$ ,  $t = 1, \dots, T$ , ou encore,

$$(6.2) \quad d_j(T, \theta_0) = 2[1 - r_j(T, \theta_0)] - E_j(T, \theta_0), \quad j = 1, \dots, p$$

où le terme

$$E_j(T, \theta_0) = \frac{\sum_{t=1}^j (\bar{z}_t(\theta_0)^2 + \bar{z}_{t+T-j}(\theta_0)^2)}{\sum_{t=1}^T \bar{z}_t(\theta_0)^2}$$

est asymptotiquement négligeable, c'est-à-dire

$$(6.3) \quad \sqrt{T} E_j(T, \theta_0) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{T}} \sum_{t=1}^j (\bar{z}_t(\theta_0)^2 + \bar{z}_{t+T-j}(\theta_0)^2)}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \bar{z}_t(\theta_0)^2} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

en probabilité. A partir de (6.2), on peut écrire

$$\sqrt{T} r_j(T, \theta_0) = \sqrt{T} [1 - (d_j(T, \theta_0)/2)] + \frac{\sqrt{T}}{2} E_j(T, \theta_0),$$

d'où

$$\sqrt{T} r_j(T, \theta_0) - \sqrt{T} [1 - (d_j(T, \theta_0)/2)] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0,$$

Par conséquent, pour T grand,

$$(6.4) \quad \sqrt{T} r_j(T, \theta_0) \doteq \sqrt{T} [1 - (d_j(T, \theta_0)/2)], \quad j = 1, \dots, p.$$

Dénotons par  $R(p, T, \theta_0)$  et  $D(p, T, \theta_0)$ , les vecteurs suivants:

$$(6.5) \quad R(p, T, \theta_0) = [r_1(T, \theta_0), \dots, r_p(T, \theta_0)]',$$

$$D(p, T, \theta_0) = [d_1(T, \theta_0), \dots, d_p(T, \theta_0)]'.$$

A partir de (6.4), on a la relation :

$$(6.6) \quad \sqrt{T} R(p, T, \theta_0) \doteq \sqrt{T}[\mathbf{1}_p - D(p, T, \theta_0)/2]$$

où le vecteur  $\mathbf{1}_p = (1, \dots, 1)'$  est de dimension  $p \times 1$ . De plus,

$$(6.7) \quad \sqrt{T} R(p, T, \theta_0) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{D} N[0, I_p].$$

Les tests obtenus sous l'hypothèse " restrictive" de normalité ont donc la propriété asymptotique suivante: sous l'hypothèse où les observations sont identiquement et indépendamment distribuées (i.i.d) de même moyenne et variance finie  $\sigma^2$ , la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle converge vers une valeur qui n'est supérieure au niveau affiché lorsque  $T \rightarrow \infty$ .

## 7. Application au P.I.B réel tunisien

Pour illustrer les méthodes proposées plus haut, nous allons étudier selon la méthode de Box et Jenkins (1976) la série du P.I.B réel tunisien (PIB) de 1961 à 1992 (annuel).<sup>4</sup> Si on commence par examiner le graphe de la série PIB<sub>t</sub>, on voit que cette dernière croît de façon exponentielle (voir figure 1 "page 68"). Il apparaît donc approprié de prendre le logarithme de la série, que nous noterons  $y_t = \log(\text{PIB}_t)$ : on

---

<sup>4</sup>Source: "Banque de Données Macro-économiques", Institut d'Économie Quantitative, Tunis, 1992.

voit sur la figure 2 "page 69" que cette dernière croît de façon linéaire. Après avoir examiné les autocorrélations et les autocorrélations partielles de cette série (voir les figures 3 "page 70" et 4 "page 71"), il nous est apparu qu'un modèle de type AR(2) serait approprié pour la série  $y_t$ . Si on estime un tel modèle par M.C.O, on trouve le résultat suivant:

$$(7.1) \quad y_t = 0.2987 + 0.9734 y_{t-1} - 0.2836 (y_{t-1} - y_{t-2}) + \hat{u}_t$$

|          |           |          |
|----------|-----------|----------|
| (0.1276) | (0.0146)  | (0.1661) |
| (2.3409) | (66.6637) | (-1.708) |

$$\bar{R}^2 = 0.9936, DW = 1.77, SSR = 0.0389$$

où les chiffres entre parenthèses sont respectivement les écarts-types et les statistiques t de Student. Si on suppose que les statistiques t de student pour tester différentes valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans ce modèle suivent approximativement une loi t(27), on peut calculer des intervalles de confiance pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Ainsi aux niveaux 0.95 et 0.975 [ $t_{0.025}(27) = 2.052$  et  $t_{0.0125}(27) = 2.3734$ ] on obtient de cette manière les intervalles suivants:

$$(7.2) \quad \theta_1 \in [ 0.9445, 1.0044 ] , \theta_2 \in [ -0.6244, 0.05712 ] ,$$

et

$$(7.3) \quad \theta_1 \in [ 0.9398, 1.0091 ] , \theta_2 \in [ -0.6778, 0.1105 ] .$$

Bien entendu, la fiabilité d'une telle approximation peut être fort mauvaise ici (même asymptotiquement), notamment dans le voisinage du cercle unité. Nous rapportons ces intervalles seulement pour fin de référence.

Maintenant, nous allons utiliser l'approche développée dans les sections précédentes pour construire une région de confiance de niveau 0.95 pour  $(\theta_1, \theta_2)'$ . Les points critiques  $d_{1j}$  et  $d_{2j}$ , utilisés pour les statistiques  $d_1$  et  $d_2$ , calculés par l'algorithme d'Imhof (1961), sont les suivants:  $d_{11} = 1.222$ ,  $d_{21} = 2.77797$ ,  $d_{12} = 1.1597$ ,  $d_{22} = 2.7135$ . Ces points correspondent à des probabilités de queue égales à  $\alpha/4 = 0.0125$ , de façon à ce que la probabilité de rejet du test global ne soit pas supérieure à  $\alpha = .05$ . Si on considère d'abord un ensemble admissible de valeur de  $\theta_2$  contraint sur

$[-2.0; 2.0]$ , sans imposer les conditions de stationnarité, on obtient la région de confiance conjointe pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sur la figure 5 "page 72". On remarque que cette région est petite par rapport au triangle de stationnarité, l'estimation de  $\theta_1$  étant toutefois beaucoup plus précise que celle de  $\theta_2$ . Ceci est dû au fait que le coefficient  $\theta_2$  est très proche d'être non identifié dans le cas où le processus  $y_t$  est fortement autocorrélé (colinéarité), comme c'est le cas ici. Pour obtenir des intervalles de confiance pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , il s'agit alors de procéder par projection, ce qui donne les intervalles de confiance (simultanés) suivants:

$$\theta_1 \in [ 0.84, 1.14 ] , \theta_2 \in [ -2, 2 ] .$$

On remarque que l'intervalle pour  $\theta_1$  est relativement plus précis, tandis que l'intervalle pour  $\theta_2$  n'est pas informatif. Ces résultats illustrent le fait que c'est la paire

de coefficients  $(\theta_1, \theta_2)'$  qui est importante pour déterminer la distribution des données et non les coefficients individuels  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Il est clair d'après ces résultats que l'hypothèse  $\theta_1 = 1$  ne peut être rejetée au niveau 0.05. Si on impose maintenant une condition de stationnarité sur  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , c'est-à-dire on restreint les coefficients à l'ensemble

$$(7.4) \quad S = \{ |\theta_2| < 1, -3 < \theta_1 < 1 \text{ et } 2\theta_2 + \theta_1 > -1 \},$$

on obtient alors la région de confiance située à l'intérieur du triangle de la figure 5 "page 72". Cette région est aussi de niveau au moins égal à 0.95. Les intervalles de confiance marginaux sont alors:

$$\theta_1 \in [ 0.92, 1 ) , \theta_2 \in ( -1; 1 ).$$

Nous remarquons enfin que ces résultats sont compatibles avec ceux que suggèrent l'équation (4.1), car les paramètres trouvés par la première méthode appartiennent aux intervalles de confiance exacts. En outre, les intervalles de confiance pour  $\theta_1$  sont très proches (notamment sous l'hypothèse de stationnarité), tandis que l'intervalle asymptotique pour  $\theta_2$  [voir (7.2)] est beaucoup plus petit que celui fondé sur la méthode exacte, ce qui jette un doute sur la fiabilité de l'approche asymptotique dans ce cas.

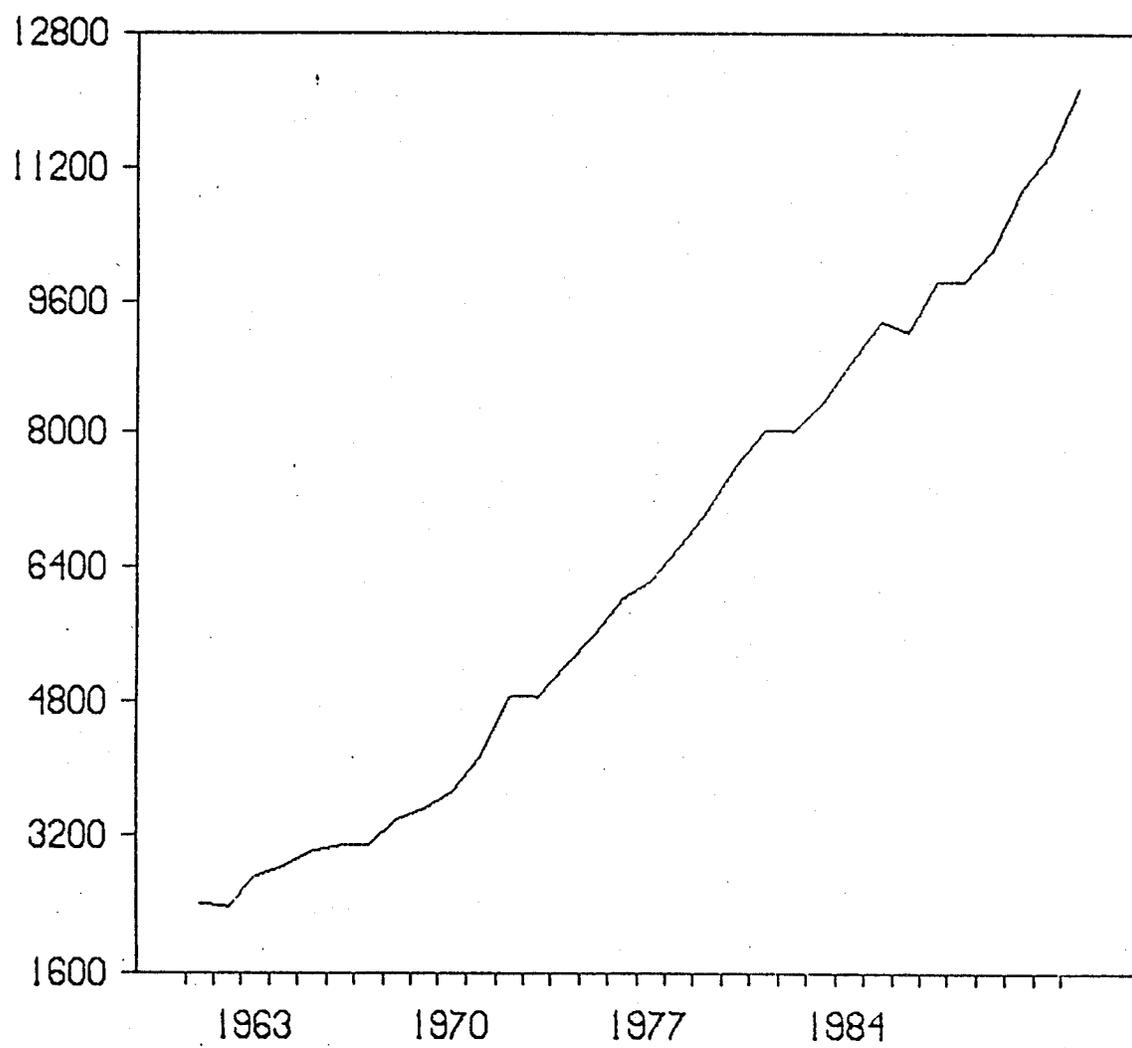
**Figure 1: La série du P.I.B réel tunisien**

Figure 2: La série des  $y_t = \log(PIB_t)$

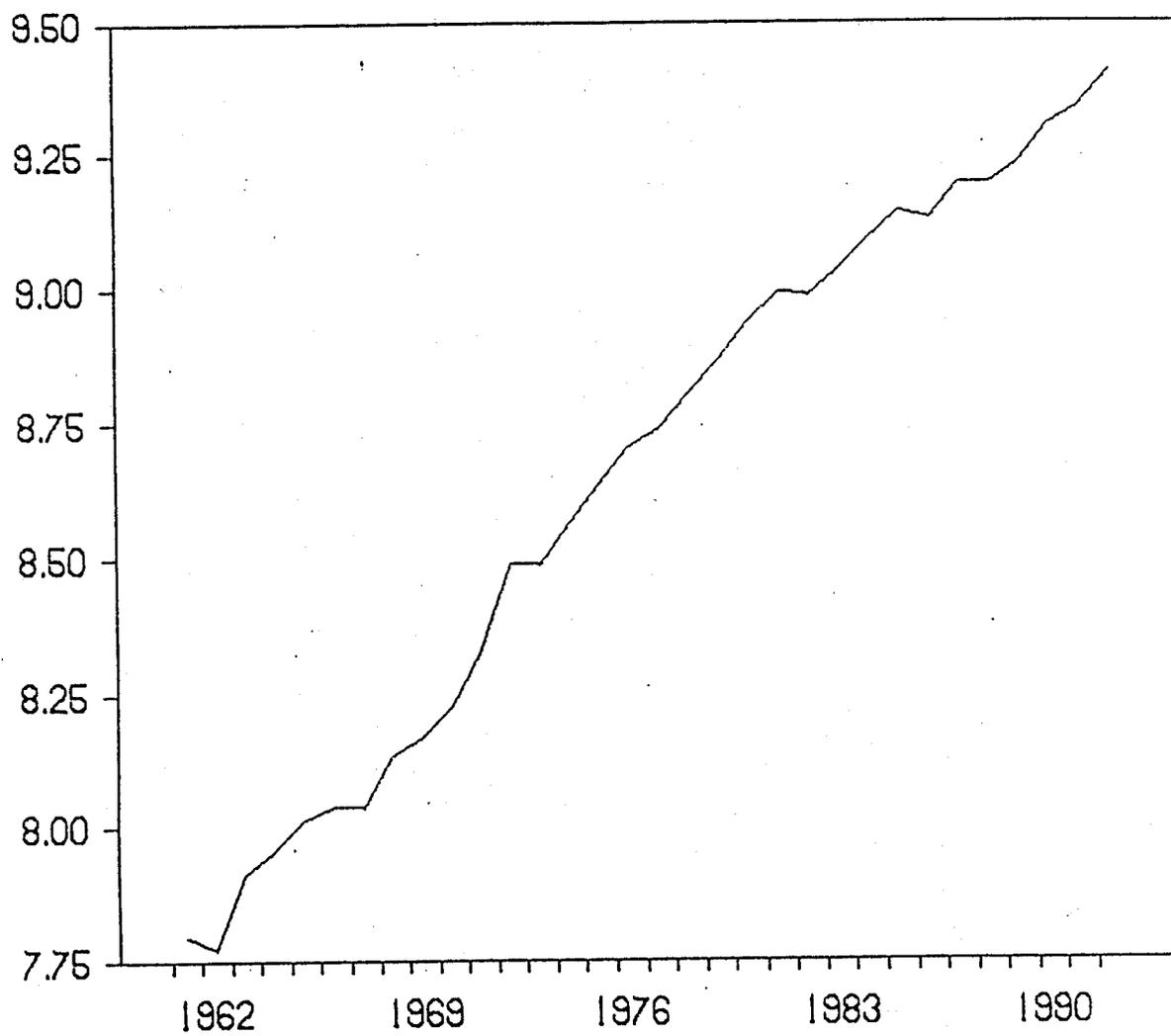


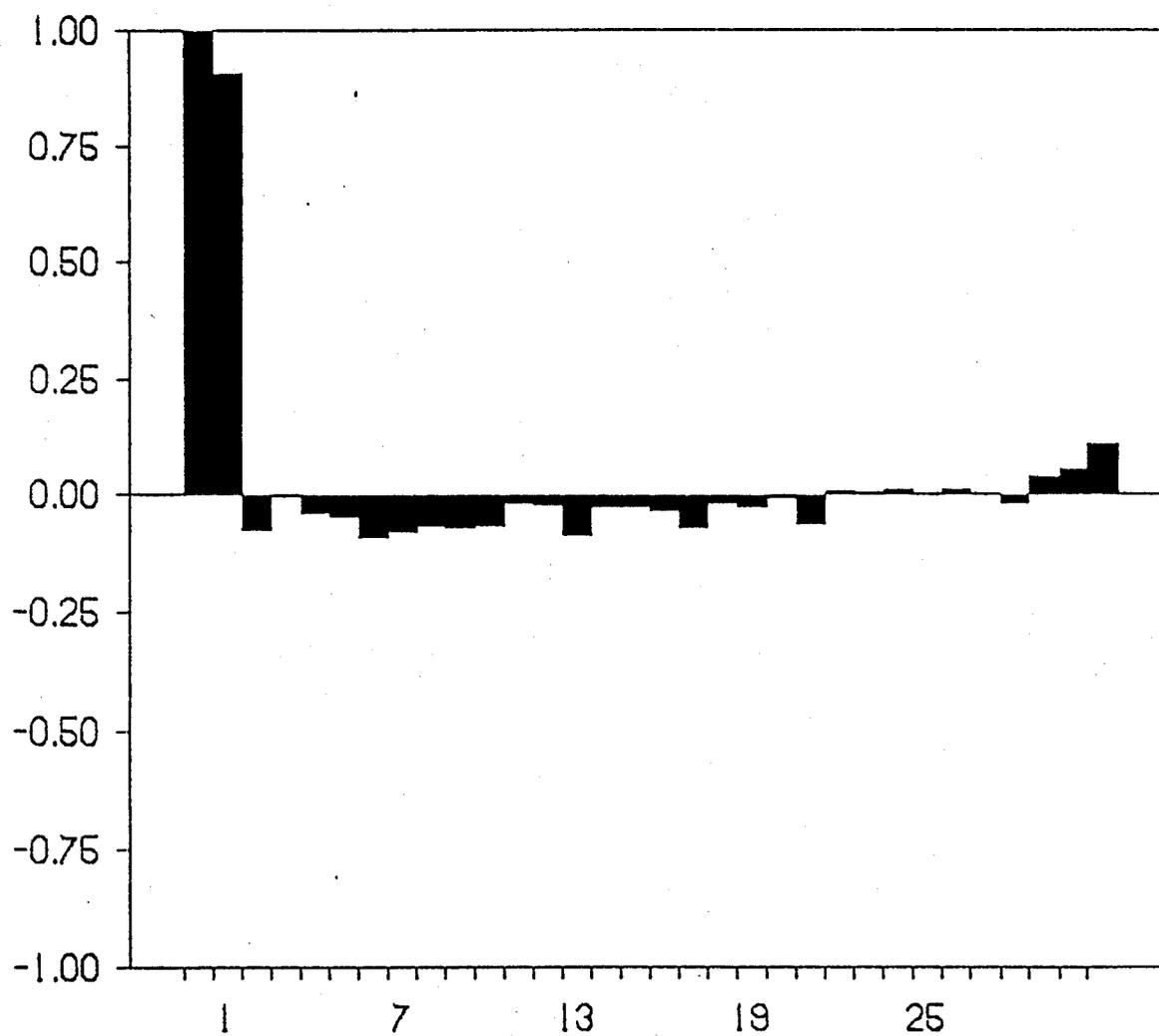
Figure 3: Les autocorrélations partielles des  $y_t$ 

Figure 4: Les autocorrélations des  $y_t$

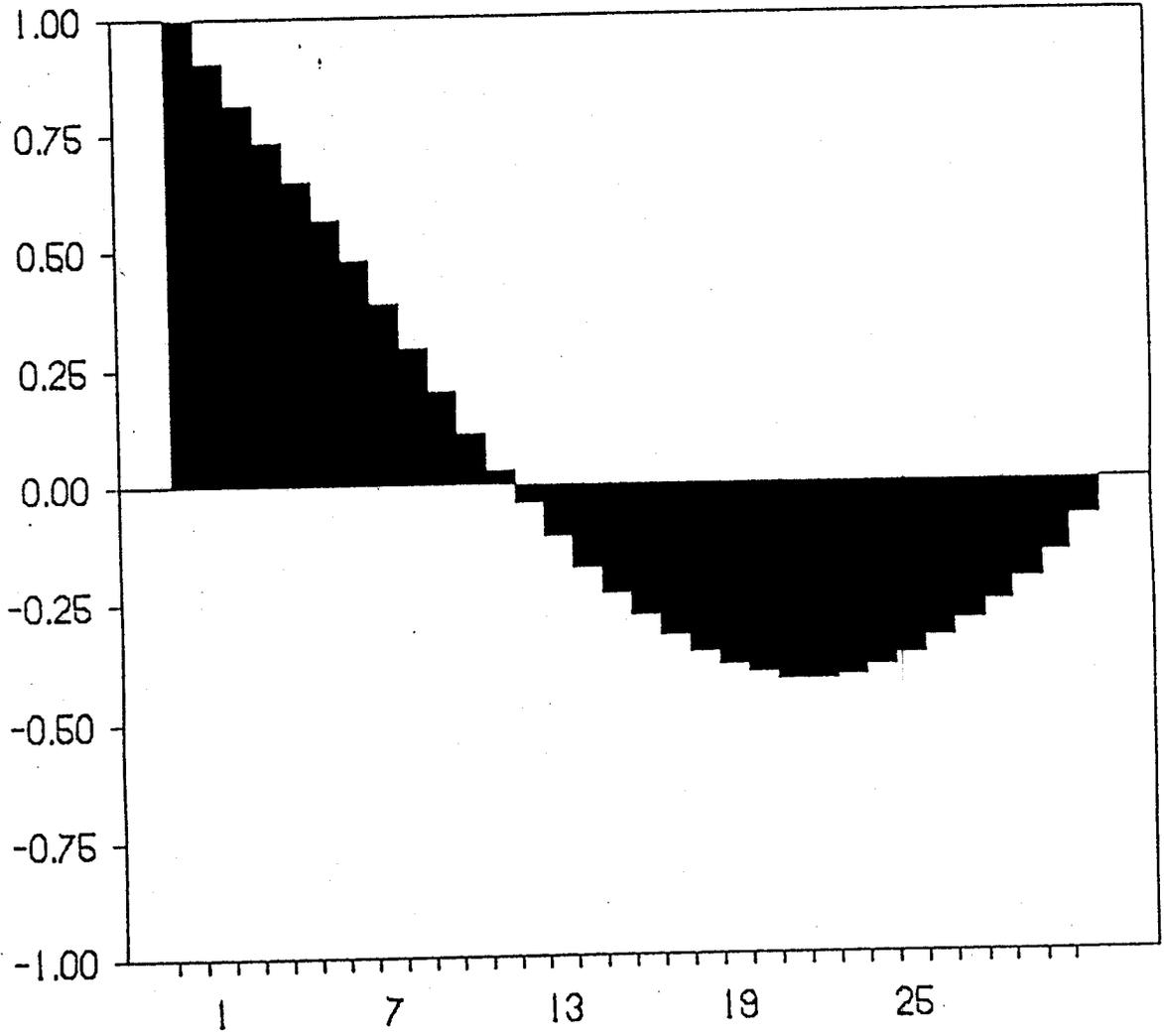
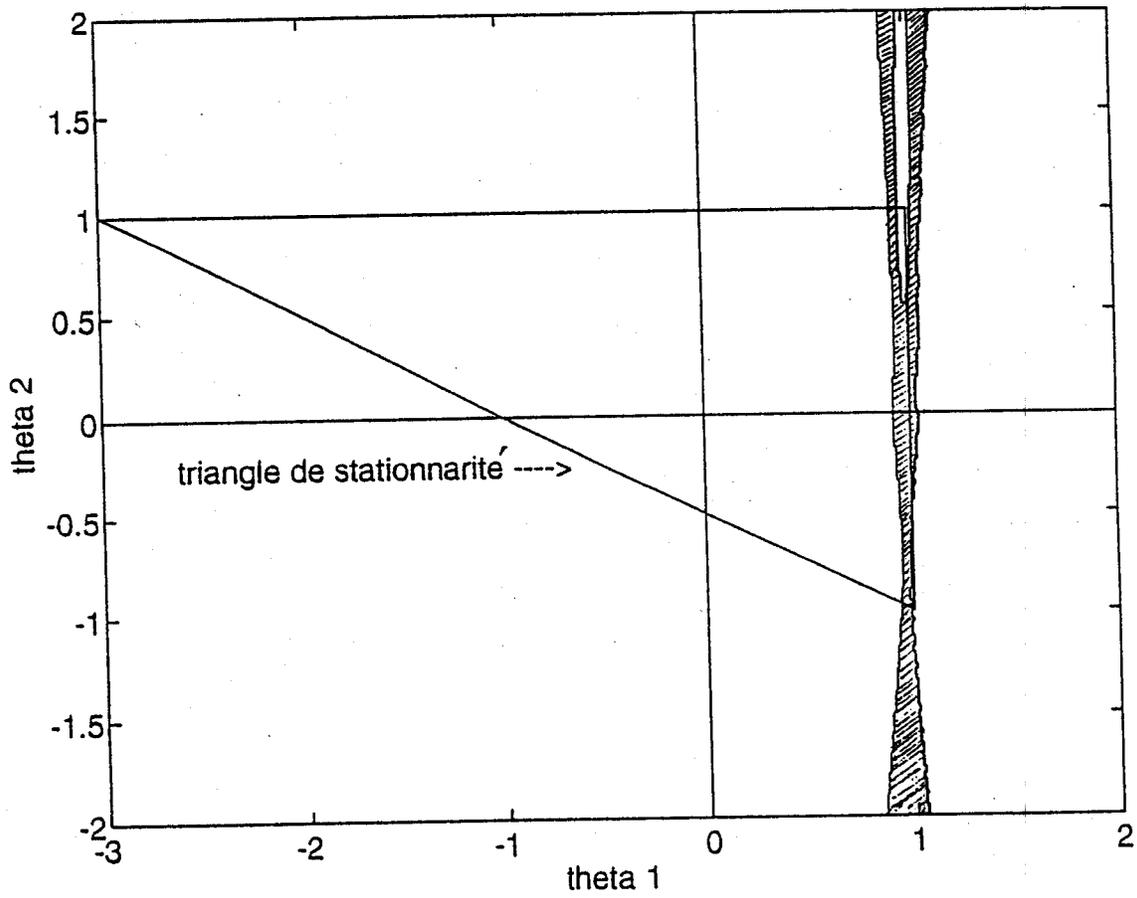


Figure 5: Région de confiance "valide" pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\alpha = 0.05$ )



### Références

- ANSLEY, G. F. , SHIVELY, T. S. , and KOHN, R., (1992):" *Computing P-Values for the Generalized Durbin-Watson and other Invariant Test Statistics*," Journal of Econometrics, 54, 277-300.
- BOX, G. P., et JENKINS, G. M., (1976):"*Time Series Analysis: Forecasting and Control*," Holden Day.
- BROCKWELL, P. J. , and DAVIS, R. A., (1991):" *Time Series: Theory and Methods*," Springer- Verlag.
- BEVERIDGE, S., and NELSON, C. R., (1981):" *A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the 'Business Cycles'*," Journal of Monetary Economics 7, 151- 174. North- Holland Publishing Company.
- DUFOUR, J.-M., (1990):" *Exact Tests and Confidence sets in Linear Regressions With Autocorrelated Errors*," Econometrica, 58, 2, 475- 494.
- DURBIN, J., and G. S. WATSON., (1950): " *Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression I*," Biometrika, 37, 409-420.
- (1951): " *Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression II*," Biometrika, 38, 159-178.
- DURBIN, J. and G. S. Watson., (1971): " *Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression III*," Biometrika, 58, 1-19.

DIEBOLD, F. X, and M. NERLOVE., (1990): " *Unit Root in Economic Time Series: A Selective Survey*," in T.B. Fomby and G.F. Rhodes (eds.), *Advances in Econometrics: Co-Integration, Spurious Regressions, and Unit Roots*, Greenwich CT: JAI Press.

FAREBROTHER, R. W., (1973a): " *Simplified Samuelson Conditions for Cubic and Quadratic Equation*," *Manchester School of Economic and Social Studies*, 41, 397-400.

FAREBROTHER, R. W., (1973b): " *Simplified Samuelson Conditions for Cubic and Quintic Equations*," *Manchester School of Economic and Social Studies*, 41, 396-409.

FAREBROTHER, R. W., (1974a): " *The Stability of Laidler's Simple Monetary Model*," *Manchester School of Economic and Social Studies*, 42, 277-278.

FAREBROTHER, R. W., (1974b): " *Simplified Samuelson Conditions for Quintic Equations*," *Manchester School of Economic and Social Studies*, 42, 279-282.

FAREBROTHER, R. W., (1974c): " *Recursive Relations for the Samuelson Transformation Coefficients*," *International Economic Review*, V 15, 3, 805-807.

FAREBROTHER, R. W., (1976): " *A Note on the Local Stability of the General First Order Difference Equation*," *Manchester School of Economic and Social Studies*, 44.

FAREBROTHER, R. W., (1987): " *Independent Conditions for the Stability of a Dynamic Linear Model*," *Manchester School of Economic and Social Studies*, 55, 305-309.

GOURIEROUX, C., et A. MONFORT., (1990): " *Séries Temporelles et Modèles Dynamiques*," *Economica*, Paris.

- HAMILTON, J. D., (1994): "*Time Series Analysis*," Princeton University Press, Princeton (N. J).
- HASZA, D. P. , and FULLER, W. A., (1979): "*Estimation for Autoregressive Processes with Unit Roots*," The Annals of Statistics, vol.7. no 5, 1106- 1120.
- IMHOF, J. P., (1961): "*Computing the Distribution of Quadratic Forms in Variables*," *Biometrika*, 48, 419- 426.
- KOERTS, J., and A. P. J. ABRAHAMSE., (1969): "*On the Theory and Application of the General Linear Model*." Rotterdam: Rotterdam University Preess, 61- 183.
- KING, M. L., (1987): "*Testing for Autocorrelation in Linear Regression Models: A Survey*," in *Specification Analysis in the Linear Model: Essays in Honour of Donald Cochrane*, ed. by M. L. King and D. E. A. Giles. London: Routledge and Kegan Paul, 19-73.
- MILLER, R.G., (1981): "*Simultaneous Statistical Inference*," Second Edition. New York: Springer-Verlag.
- STOCK. J. H., (1993): "*Unit Root, Structural Breaks and Trends*," Kennedy School of Government Harvard University Cambridge, Working paper MA 02138, 1- 124.
- SCHMIDT. P., (1972): "*A Generalisation of the Durbin-Watson Test*," *Australian Economic Papers*, 203-209.
- SAVIN, N. E., (1984): "*Multiple Hypothesis Testing*," in *Handbook of Econometrics*, Vol. II, ed. by Z. Griliches and M. D. Intrilligator. Amsterdam: North Holland, 827-879.

VINOD, H. D., (1973): " *Generalization of the Durbin-Watson Statistic for Higher Order Autoregressive Processes*," *Communications in Statistics*, 2, 115-144.

WALLIS, K. J., (1972):" *Testing for Fourth Order Autocorrelation in Quarterly Regression Equation*," *Econometrica*, 40, 617-636.

ESSAI III

**MÉTHODES D'INFÉRENCE EXACTES  
POUR DES PROCESSUS AUTORÉGRESSIFS PAR MAXIMUM  
DE VRAISEMBLANCE TRONQUÉ**

## 1. Introduction

L'inférence statistique sur des modèles autorégressifs est un problème de grande importance posé par l'analyse des séries chronologiques en économétrie et en statistique. Les méthodes utilisées sont habituellement basées sur des approximations asymptotiques souvent non fiables, même sous des hypothèses paramétriques précises (e.g., innovations gaussiennes). C'est le cas en particulier, lorsque le processus considéré est d'un ordre plus grand que un; voir Diebold et Nerlove (1990), Gouriéroux et Monfort (1990), Brockwell et Davis (1991), Stock (1991, 1993) et Hamilton (1994).

Dans ce texte nous développons deux méthodes d'inférence exactes pour des modèles autorégressifs d'ordre  $p$  avec constante, possiblement non stationnaires. Avant d'étudier l'inférence statistique sur ces modèles, nous discutons une généralisation de la paramétrisation de Dickey (1976), Fuller (1976), Hasza et Fuller (1979) et Beveridge-Nelson (1981), qui donne des modèles équivalents à la formulation originale mais qui a l'avantage de permettre d'exprimer plus facilement les hypothèses de racine unitaire simple ou multiple. Les approches développées ici sont fondées sur une méthode de "maximum de vraisemblance tronqué" qui consiste à tester l'hypothèse d'intérêt contre une alternative légèrement différente du modèle de départ, laquelle peut (en principe) approximer cette dernière de façon arbitrairement précise. La première approche permet d'obtenir des statistiques de test dont les distributions non seulement

ne dépendent pas de paramètres de nuisance, mais sont aussi "pivotales" dans le sens où la distribution de la statistique de test ne dépend pas de la valeur particulière du vecteur des paramètres autorégressifs testés. Cette caractéristique permet de simplifier considérablement la construction de régions de confiance. La seconde approche tient mieux compte des contraintes imposées par le modèle AR(p) mais ne conduit pas à des statistiques pivotales. Chacune de ces approches permet de tester des hypothèses qui fixent la valeur du vecteur des coefficients autorégressifs au moyen d'une statistique de type Fisher. Les points critiques de chaque statistique (différents de ceux de la distribution de Fisher habituelle) se calculent facilement par simulation. En outre on peut construire des régions de confiance exactes sur les coefficients du modèle en utilisant une approche semblable à celle décrite dans Dufour (1990), c'est-à-dire par "inversion" des tests proposés. Les méthodes exactes ainsi développées n'imposent pas l'hypothèse de stationnarité (racine à l'intérieur du cercle unité) sur le modèle et sont applicables à toutes les racines du processus, contrairement à Stock (1991) qui s'est intéressé à l'inférence asymptotique sur la racine dont le module est le plus grand (spécifiquement au voisinage de 1). Nous appliquons les différentes méthodes à un modèle du P.I.B réel tunisien.

Le texte est organisé comme suit. Dans la seconde section, nous énonçons le modèle et décrivons la paramétrisation proposée. Dans la troisième section, nous développons les tests exacts suggérés. Dans la quatrième section, nous décrivons comment construire une région de confiance conjointe exacte pour les paramètres

autorégressifs. Dans la cinquième section nous appliquons les méthodes proposées à un modèle de P.I.B réel tunisien.

## 2. Modèle et notations

Dans ce texte, nous considérons un modèle AR(p) de la forme:

$$(2.1) \quad y_t = \beta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t,$$

$$u_t \sim^{\text{ind}} N[0, \sigma^2], \quad t = 1, \dots, T, \quad \sigma > 0$$

où  $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}$  sont indépendants de  $u = (u_1, \dots, u_T)'$  et les paramètres

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \beta$  et  $\sigma$  sont inconnus. Le modèle (2.1) peut être réécrit sous la forme

$$\Phi(B)y_t = \beta + u_t, \quad \text{où}$$

$$(2.2) \quad \Phi(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j$$

et  $B$  est l'opérateur "retard" défini par  $By_t = y_{t-1}$ . Il sera utile ici de reparamétriser

le polynôme (2.2) tel que suggéré par le lemme suivant:

Lemme 2.1: Tout polynôme de la forme (2.2) peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$(2.3a) \quad \Phi(B) = 1 - \sum_{k=1}^p \theta_k (1 - B)^{k-1} B = 1 - \sum_{k=1}^p \theta_k \Delta^{k-1} B,$$

où

$$(2.3b) \quad \theta_k = (-1)^{k-1} \left[ \sum_{i=k}^p \binom{i-1}{k-1} \phi_i \right], \quad \phi_k = (-1)^{k-1} \left[ \sum_{i=k}^p \binom{i-1}{k-1} \theta_i \right],$$

$$\Delta = 1 - B \text{ et } \binom{n}{r} = n!/[r!(n-r)!].$$

Les preuves sont données dans l'annexe. Ainsi l'équation

$$(2.4) \quad y_t = \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + u_t = \beta + \sum_{j=1}^p \phi_j B^j y_t + u_t$$

peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} (2.5) \quad y_t &= \beta + \sum_{k=1}^p \theta_k (1 - B)^{k-1} y_{t-1} + u_t \\ &= \beta + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 (1 - B) y_{t-1} + \theta_3 (1 - B)^2 y_{t-1} + \dots \\ &\quad + \theta_p (1 - B)^{p-1} y_{t-1} + u_t \\ &= \beta + \sum_{k=1}^p \theta_k \Delta^{k-1} y_{t-1} + u_t. \end{aligned}$$

Pour  $p = 1, 2$ , cette paramétrisation coïncide avec les paramétrisations utilisées par Dickey (1976), Fuller (1976), Hasza et Fuller (1979), Beveridge et Nelson (1981) ainsi que Diebold et Nerlove (1990) pour effectuer les tests de racines unitaires. A partir des conditions de stationnarité sur les  $\phi_j$ , on peut déduire des conditions équivalentes sur

les  $\theta_j$  (voir l'Annexe). Les paramètres inconnus du modèle transformé (2.5) sont donc

$\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ ,  $\beta$  et  $\sigma$ , et les variables explicatives sont

$(1 - B)^{k-1} y_{t-1}$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Bien que les modèles (2.4) et (2.5) soient

complètement équivalents, les hypothèses de racine unitaire simple et multiple s'expriment facilement dans le cadre du modèle (2.5). Ce fait est démontré par le lemme suivant:

Lemme 2.2: Si  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_m = 1$  pour  $1 \leq m \leq p$ , le polynôme (2.3a) s'écrit:

$$(2.6) \quad \Phi(B) = (1 - B)^m \left[ 1 - \sum_{k=m+1}^p \theta_k (1 - B)^{k-1-m} B \right].$$

De plus, si le polynôme (2.3a) s'écrit sous la forme:

$$\bar{\Phi}(B) = (1 - B)^m \left[ 1 - \sum_{k=1}^{p-m} \bar{\phi}_k B^k \right]$$

où  $m \geq 1$  et  $\bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_{p-m}$  sont des coefficients quelconques, alors

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_m = 1.$$

L'hypothèse d'une racine unité de multiplicité  $m$  est donc équivalente à l'hypothèse

$$H_0: \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_m = 1$$

dans le modèle (2.5). Cette observation généralise à une valeur  $m$  quelconque un résultat utilisé de façon implicite par Hasza et Fuller (1990) pour  $m \leq 2$ . On notera ici que, contrairement à la remarque de Diebold et Nerlove (1990), la paramétrisation de Hasza et Fuller (1990) ne permet pas de tester des racines de multiplicité supérieure à 2. Nous allons donc étudier le modèle

$$(2.7) \quad y_t = \beta + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 \Delta^1 y_{t-1} + \dots + \theta_p \Delta^{p-1} y_{t-1} + u_t,$$

$$u_t \sim \text{ind } N [0, \sigma^2], \quad t = 1, \dots, T$$

où  $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}$  sont fixés. Il est facile de voir que la série  $y_1, \dots, y_T$  peut s'interpréter comme un segment de la série générée par le processus

$$(2.8) \quad y_t = \beta + \sum_{k=1}^p \theta_k \Delta^{k-1} y_{t-1} + u_t, \quad t = -p + 1, \dots, T$$

$$= 0, \quad t \leq -p$$

où  $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}$  ainsi que  $u_0, u_{-1}, \dots, u_{-p+1}$  sont fixés ( $u_0, u_{-1}, \dots, u_{-p+1}$  sont choisis de façon à reproduire les valeurs données de  $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}$ ),

$u_t = -\beta$  pour  $t \leq -p$ , et  $u_t \sim \text{ind } N [0, \sigma^2], \quad t = 1, \dots, T$ . Ceci provient du fait que la distribution conditionnelle de  $y_t$  étant donné le passé du processus ne dépend pas de  $y_t, t \leq -p$ . Ainsi, sans perte de généralité, on peut fixer ces dernières à zéro.

### 3. Test de l'hypothèse $H_0(\theta_0): \theta = \theta_0$

Nous allons maintenant étudier le problème qui consiste à tester l'hypothèse

$$(3.1) \quad H_0(\theta_0): \theta = \theta_0 \text{ contre } H_a(\theta_0): \theta \neq \theta_0$$

où  $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{p0})'$ . Soit

$$(3.2) \quad \bar{\Theta}(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2(1 - B)B - \theta_3(1 - B)^2 B - \dots - \theta_p(1 - B)^{p-1} B.$$

Sous  $H_0(\theta_0)$ , (3.2) devient

$$\bar{\Theta}_0(B) = 1 - \theta_{10} B - \theta_{20}(1 - B)B - \theta_{30}(1 - B)^2 B - \dots - \theta_{p0}(1 - B)^{p-1} B,$$

et l'hypothèse (3.1) est équivalente à

$$(3.3) \quad \bar{H}_0(\theta_0): \bar{\Theta}(B) = \bar{\Theta}_0(B).$$

On peut réécrire le modèle (2.7) comme suit:

$$(3.4) \quad \bar{\Theta}(B) y_t = \beta + u_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

ou de façon équivalente,

$$(3.5) \quad \frac{\bar{\Theta}(B)}{\bar{\Theta}_0(B)} \bar{\Theta}_0(B) y_t = \beta + u_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Soient maintenant

$$(3.6) \quad \Psi_0(B) = \frac{\bar{\Theta}(B)}{\bar{\Theta}_0(B)} = - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(\theta_0) B^j, \quad \psi_0(\theta_0) = -1,$$

$$(3.7) \quad \bar{\Theta}_0(B) y_t = y_t(\theta_0).$$

On voit alors que

$$(3.8) \quad y_t(\theta_0) = \beta + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(\theta_0) y_{t-j}(\theta_0) + u_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Étant donné (2.8), la série (3.8) converge nécessairement. Sous  $H_0(\theta_0)$ , on a

$$\frac{\bar{\Theta}(B)}{\bar{\Theta}_0(B)} = 1, \text{ et donc } \psi_j(\theta_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots. \text{ Nous voulons tester le modèle}$$

$$(3.9) \quad y_t(\theta_0) = \beta + u_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

contre

$$(3.10) \quad y_t(\theta_0) = \beta + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(\theta_0) y_{t-j}(\theta_0) + u_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où les  $\psi_j(\theta_0)$  satisfont (3.6). Si on tient compte du fait que  $y_t(\theta_0) = 0$  pour  $t \leq -p$ ,

on peut aussi réécrire (3.10) sous la forme:

$$(3.11) \quad y_t(\theta_0) = \beta + \sum_{j=1}^{t+p-1} \psi_j(\theta_0) y_{t-j}(\theta_0) + u_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $y_t(\theta_0)$ ,  $t \leq 0$ , sont fixés [avec  $y_t(\theta_0) = 0$  pour  $t \leq -p$ ]. On voit immédiatement que

l'hypothèse  $H_0(\theta_0)$  est équivalente à

$$(3.12) \quad H_0': \psi_j(\theta_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

dans le cadre du modèle (3.11). Nous allons maintenant considérer deux procédures différentes pour tester  $H_0'$ .

### 3.1 Approche fondée sur les moindres carrés ordinaires

La première approche consiste à "approximer" le modèle (3.11) sous l'alternative par un modèle de la forme

$$H_1(p_1): y_t(\theta_0) = \beta + \sum_{j=1}^{p_1} \psi_j(\theta_0) y_{t-j}(\theta_0) + u_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $p_1 \geq p$ . Ceci suggère de tester  $H_0(\theta_0)$  en testant une hypothèse de la forme

$$(3.13) \quad H_0(p_1^*): \psi_j(\theta_0) = 0, j = 1, \dots, p_1^*$$

où  $p_1^* \leq p_1$ , dans le cadre du modèle

$$(3.14) \quad y_t(\theta_0) = \beta + \sum_{j=1}^{p_1} \psi_j(\theta_0) y_{t-j}(\theta_0) + u_t, t = p_1 + 1, \dots, T.$$

L'échantillon considéré dans les régressions est écourté de  $p_1$  observations afin que la statistique de test suive une distribution qui ne dépend pas de la valeur inconnue de  $\beta$ .

Pour tester  $H_0(\theta_0)$  nous allons utiliser la statistique de Fisher correspondante:

$$(3.15) \quad F(\theta_0, p_1^*, p_1) = \left[ \frac{[S_0(\theta_0, p_1^*, p_1) - S_1(\theta_0, p_1)]/p_1^*}{S_1(\theta_0, p_1)/[(T - p_1) - (p_1 + 1)]} \right]$$

où  $S_0(\theta_0, p_1^*, p_1)$  et  $S_1(\theta_0, p_1)$  sont les sommes minimales de carrés des erreurs

contraintes et non contraintes correspondantes:

$$(3.16) \quad S_1(\theta_0, p_1) = \min_{\bar{\Psi}^0(p_1), \beta} [u(\bar{\Psi}^0(p_1), \theta_0, \beta) / u(\bar{\Psi}^0(p_1), \theta_0, \beta)],$$

$$S_0(\theta_0, p_1^*, p_1) = \min_{\bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1), \beta} [u(\beta, \theta_0, \bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1)) / u(\beta, \theta_0, \bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1))]$$

où

$$u(\bar{\Psi}^0(p_1), \theta_0, \beta) = Y(\theta_0) - \beta - Y_-(\theta_0, p_1) \bar{\Psi}^0(p_1),$$

$$u(\beta, \theta_0, \bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1)) = Y(\theta_0) - \beta - Y_-(\theta_0, p_1^*, p_1) \bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1),$$

$$Y(\theta_0) = (y_{p_1+1}(\theta_0), \dots, y_T(\theta_0)), \bar{\Psi}^0(p_1) = (\psi_1(\theta_0), \dots, \psi_{p_1}(\theta_0))',$$

$$\bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1) = (\psi_{p_1^*+1}(\theta_0), \dots, \psi_{p_1}(\theta_0)),$$

$$Y_-(\theta_0, p_1) = [Y_{-1}(\theta_0), \dots, Y_{-j}(\theta_0), \dots, Y_{-p_1}(\theta_0)],$$

$$Y_-(\theta_0, p_1^*, p_1) = [Y_{-p_1^*+1}(\theta_0), \dots, Y_{-p_1}(\theta_0)],$$

$$Y_{-j}(\theta_0) = (y_{p_1+1-j}(\theta_0), \dots, y_{T-j}(\theta_0))'.$$

Sous  $H_0(\theta_0)$ , on voit facilement que la distribution de  $F(\theta_0, p_1^*, p_1)$  ne dépend pas de

$\beta$  et  $\sigma$ , car  $S_1(\theta_0, p_1^*)$  et  $S_0(\theta_0, p_1^*, p_1)$  peuvent s'écrire:

$$(3.17) \quad S_1(\theta_0, p_1) = \min_{\bar{\Psi}^0(p_1)} [v_1(\bar{\Psi}^0(p_1), \theta_0) v_1(\bar{\Psi}^0(p_1), \theta_0)],$$

$$S_0(\theta_0, p_1^*, p_1) = \min_{\bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1)} [v_2(\theta_0, \bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1)) v_2(\theta_0, \bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1))]$$

où

$$v_1(\bar{\Psi}^0(p_1), \theta_0) = M(\mathbf{1})u(\bar{\Psi}^0(p_1), \theta_0, \beta)$$

$$= M(\mathbf{1})Y(\theta_0) - M(\mathbf{1})Y_-(\theta_0, p_1)\bar{\Psi}^0(p_1),$$

$$v_2(\theta_0, \bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1)) = M(\mathbf{1})u(\beta, \theta_0, \bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1))$$

$$= M(\mathbf{1})Y(\theta_0) - M(\mathbf{1})Y_-(\theta_0, p_1^*, p_1)\bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1),$$

$\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$  est un vecteur  $(T-p_1) \times 1$  et  $M(\mathbf{1}) = I - \mathbf{1}(\mathbf{1}'\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}'$ . Sous  $H_0(\theta_0)$ ,

$$Y(\theta_0) = \beta \mathbf{1} + \mathbf{u}, \quad Y_j(\theta_0) = \beta \mathbf{1} + \mathbf{u}_j, \quad j = 1, \dots, p_1$$

où  $\mathbf{u} = (u_{p_1+1}, \dots, u_T)'$  et  $\mathbf{u}_j = (u_{p_1+1-j}, \dots, u_{T-j})'$ , de sorte que

$$M(\mathbf{1})Y(\theta_0)/\sigma = M(\mathbf{1})\mathbf{u}/\sigma, \quad M(\mathbf{1})Y_j(\theta_0)/\sigma = M(\mathbf{1})\mathbf{u}_j/\sigma, \quad j = 1, \dots, p_1,$$

ont des distributions qui ne dépendent pas de paramètres de nuisance, et de même pour

$$v_1(\bar{\Psi}^0(p_1), \theta_0)/\sigma \text{ et } v_2(\theta_0, \bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1))/\sigma. \text{ Il s'ensuit que la distribution de } F(\theta_0, p_1^*, p_1)$$

ne dépend pas non plus de paramètres de nuisance sous l'hypothèse  $H_0(\theta_0)$ . En outre,

cette distribution ne dépend pas non plus du vecteur  $\theta_0$  considérée. Le test ainsi

construit rejette l'hypothèse nulle au niveau  $\alpha$  quand  $F(\theta_0, p_1^*, p_1) \geq c(\alpha)$ , où  $c(\alpha)$

est tel que

$$P[ F(\theta_0, p_1^*, p_1) \geq c(\alpha) ] = \alpha.$$

La distribution analytique de  $F(\theta_0, p_1^*, p_1)$  est inconnue mais peut être simulée

facilement. Soit la variable aléatoire

$$(3.18) \quad \bar{F}(p_1^*, p_1) = \frac{(T - p_1) - (p_1 + 1)}{p_1^*} \left[ \frac{S_0(p_1^*, p_1)}{S_1(p_1)} - 1 \right]$$

où

$$S_1(p_1) = \min_{\bar{\Psi}^0(p_1)} [v_1(\bar{\Psi}^0(p_1))' v_1(\bar{\Psi}^0(p_1))],$$

$$S_0(p_1^*, p_1) = \min_{\bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1)} [v_2(\bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1))' v_2(\bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1))],$$

$$v_1(\bar{\Psi}^0(p_1)) = M(\mathbf{1})[\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_{-}(p_1)\bar{\Psi}^0(p_1)],$$

$$v_2(\bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1)) = M(\mathbf{1})[\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_{-}(p_1^*, p_1)\bar{\Psi}^0(p_1^*, p_1)],$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{-}(p_1) = [\bar{\mathbf{u}}_{-1}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_{-p_1}], \quad \bar{\mathbf{u}}_{-}(p_1^*, p_1) = [\bar{\mathbf{u}}_{-(p_1^*+1)}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_{-p_1}],$$

$$\bar{\mathbf{u}} = (u_{p_1+1}, \dots, u_T)', \quad \bar{\mathbf{u}}_{-j} = (u_{p_1+1-j}, \dots, u_{T-j})',$$

et  $u_t \stackrel{\text{ind}}{\sim} N(0, 1)$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Il est clair que  $F(\theta_0, p_1^*, p_1)$  a la même

distribution que  $\bar{F}(p_1^*, p_1)$  sous  $H_0(\theta_0)$ . On peut ainsi procéder facilement à un test de

Monte Carlo.

### 3.2 Approche fondée sur les moindres carrés contraints

La procédure que nous venons de décrire a l'avantage d'être relativement facile à implanter. Toutefois, elle ne tient pas compte de toutes les contraintes imposées par le modèle AR(p) sur les coefficients  $\psi_j(\theta_0)$  de la représentation (3.11). En effet par

(3.6) les coefficients  $\psi_j(\theta_0)$  du modèle non contraint solutionnent l'équation

$$(3.19) \quad (1 - \sum_{j=1}^p \phi_{j0} B^j) (\sum_{k=0}^{\infty} -\psi_k^0 B^k) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j$$

où  $\psi_j^0 = \psi_j(\theta_0)$ ,  $\phi_j$  et  $\phi_{j0}$  vérifient (2.3b),  $j = 1, \dots, p$ . On voit alors que

$$(3.20a) \quad \psi_0^0 = -1,$$

$$(3.20b) \quad \psi_k^0 = \phi_k + \sum_{j=1}^k \phi_{j0} \psi_{k-j}^0, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$(3.20c) \quad \psi_k^0 = \sum_{j=1}^p \phi_{j0} \psi_{k-j}^0, \quad k \geq p + 1.$$

A partir de (2.3b) et (3.20c) on peut calculer les  $\psi_j(\theta_0)$ . Sous le modèle (3.11) les

coefficients  $\psi_j(\theta_0)$ ,  $j = 1, \dots, p$ , peuvent être considérés comme libres tandis que

les autres coefficients  $\psi_j(\theta_0)$ ,  $j > p$ , sont liés à ces derniers par la relation (3.20c). On

peut donc réécrire le modèle (3.11) comme suit:

$$(3.21) \quad y_t(\theta_0) = \beta + \sum_{j=1}^{t-1} \psi_j^0 y_{t-j}(\theta_0) + u_t, \quad t = p + 1, \dots, T$$

où on voit que les coefficients sont contraints par (3.20). On peut aussi écrire cette

dernière équation sous la forme matricielle

$$(3.22) \quad y(\theta_0) = \beta \mathbf{1} + Z(\theta_0) \bar{\Psi}^0(T-1) + u$$

où

$$y(\theta_0) = (y_{p+1}(\theta_0), \dots, y_T(\theta_0))',$$

$$Z(\theta_0) = [y_{-1}(\theta_0), \dots, y_{-p}(\theta_0), \bar{y}_{-(p+1)}(\theta_0), \dots, \bar{y}_{-(T-1)}(\theta_0)],$$

$$\tilde{y}_{-j}(\theta_0) = (0, \dots, 0, y_1(\theta_0), \dots, y_{T-j}(\theta_0))',$$

$$y_{-j}(\theta_0) = (y_{p+1-j}(\theta_0), \dots, y_{T-j}(\theta_0))',$$

$$\bar{\Psi}^0(T-1) = (\psi_1^0, \psi_2^0, \dots, \psi_{T-1}^0)', \mathbf{1} = (1, \dots, 1)',$$

ou bien encore

$$(3.23) \quad y(\theta_0) = \beta \mathbf{1} + Z_p(\theta_0) \bar{\Psi}^0(p) + \bar{Z}_p(\theta_0) \bar{\Psi}^0(T-1-p) + u$$

où

$$Z_p(\theta_0) = [y_{-1}(\theta_0), \dots, y_{-p}(\theta_0)],$$

$$\bar{Z}_p(\theta_0) = [\tilde{y}_{-(p+1)}(\theta_0), \dots, \tilde{y}_{-(T-1)}(\theta_0)],$$

$$\bar{\Psi}^0(p) = (\psi_1^0, \dots, \psi_p^0)', \bar{\Psi}^0(T-1-p) = (\psi_{p+1}^0, \dots, \psi_{T-1}^0)'.$$

On peut alors démontrer la proposition suivante.

**Proposition 1:** Si les coefficients  $\psi_k^0$ ,  $k \geq 0$ , vérifient les relations de récurrence

(3.20), alors

$$\bar{\Psi}^0(T-1-p) = A \bar{\Psi}^0(p)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} \delta'_{p+1} \\ \delta'_{p+2} \\ \dots \\ \delta'_{T-1} \end{bmatrix}, \quad \delta'_i = \mathbf{1}'_p C^{i-p}, \quad \mathbf{1}_p = (0, \dots, 0, 1)'_{p \times 1}, \quad i = p+1, \dots, T-1,$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & & & \dots & 1 \\ \phi_{p0} & \phi_{(p-1)0} & & & \dots & \phi_{10} \end{bmatrix}_{p \times p}.$$

Le modèle (3.23) peut donc s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} (3.24) \quad \mathbf{y}(\theta_0) &= \beta \mathbf{1} + [Z_p(\theta_0) + \bar{Z}_p(\theta_0)A] \bar{\Psi}^0(p) + \mathbf{u} \\ &= \beta \mathbf{1} + \tilde{Z}(\theta_0) \bar{\Psi}^0(p) + \mathbf{u} \end{aligned}$$

où

$$(3.25) \quad \tilde{Z}(\theta_0) = [Z_1(\theta_0), \dots, Z_p(\theta_0)],$$

$$\begin{aligned} Z_j(\theta_0) &= \mathbf{y}_{-j}(\theta_0) + \bar{\mathbf{y}}_{-(p+1)}(\theta_0) \delta_{p+1,j} + \dots + \bar{\mathbf{y}}_{-(T-1)}(\theta_0) \delta_{T-1,j} \\ &= \mathbf{y}_{-j}(\theta_0) + \sum_{k=p+1}^{T-1} \bar{\mathbf{y}}_{-k} \delta_{kj}, \end{aligned}$$

et  $\delta_{ij}$  est le  $j^{\text{ième}}$  élément du vecteur ligne  $\delta'_i$ .

Proposition 2: Pour  $j = 1, \dots, p$ , le vecteur

$$\underline{Z}_j(\theta_0) = \bar{\Gamma}_j(\theta_0) \underline{Y}_j(\theta_0)$$

où

$$\bar{\Gamma}_j(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta_{p+1,j} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta_{p+2,j} & \delta_{p+1,j} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \delta_{T-1,j} & \delta_{T-2,j} & \dots & \delta_{p+2,j} & \delta_{p+1,j} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(T-p) \times (T-j)}$$

$$\underline{Y}_j(\theta_0) = (y_1(\theta_0), \dots, y_{T-j}(\theta_0))'$$

est un vecteur dont chacun des éléments a une distribution non dégénérée.

Ainsi, le modèle (3.24) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(3.26) \quad \gamma(\theta_0) = \beta \mathbf{1} + \bar{\Gamma}_1(\theta_0) \underline{Y}_{-1}(\theta_0) \psi_1^0 + \dots + \bar{\Gamma}_p(\theta_0) \underline{Y}_{-p}(\theta_0) \psi_p^0 + \underline{u}.$$

On testera donc le modèle (3.9):  $\gamma(\theta_0) = \beta \mathbf{1} + \underline{u}$ , où  $\mathbf{1}' = (1, \dots, 1)'_{(T-p) \times 1}$ , contre

l'alternative (3.26). Ceci suggère de tester  $H_0(\theta_0)$  en testant l'hypothèse équivalente

$$(3.27) \quad H_0(p): \psi_j^0 = 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

dans le cadre du modèle (3.26) au moyen d'une statistique de type Fisher:

$$(3.28) \quad F(\theta_0, p) = \frac{(T-p) - (p+1)}{p} \left[ \frac{S_0(\theta_0) - S_1(\theta_0, p)}{S_1(\theta_0, p)} \right]$$

où

$$(3.29) \quad S_1(\theta_0, p) = \min_{\bar{\Psi}^0(p)} [\underline{u}(\bar{\Psi}^0(p), \theta_0)' \underline{u}(\bar{\Psi}^0(p), \theta_0)],$$

$$S_0(\theta_0) = \underline{u}(\theta_0)' \underline{u}(\theta_0), \quad \underline{u}(\theta_0) = M(\mathbf{1})\underline{y}(\theta_0)/\sigma,$$

$$\underline{u}(\bar{\Psi}^0(p), \theta_0) = M(\mathbf{1})[\underline{y}(\theta_0) - \bar{Z}(\theta_0)\bar{\Psi}^0(p)]/\sigma,$$

$$\bar{\Psi}^0(p) = (\psi_1(\theta_0), \dots, \psi_p(\theta_0))'.$$

On notera toutefois que la statistique  $F(\theta_0, p)$  a une distribution qui dépend sous l'hypothèse nulle du paramètre de nuisance  $\beta$ , car  $\bar{Z}(\theta_0)$  dépend de  $\beta$  à travers les vecteurs de  $\bar{Z}_p(\theta_0)$ : en effet,

$$(3.30) \quad \bar{Z}_i(\theta_0) = \bar{\Gamma}_i(\theta_0)[\bar{\mathbf{i}}_i\beta + \bar{u}_i] = \bar{\mathbf{i}}_i\beta + \bar{\Gamma}_i(\theta_0)\bar{u}_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

où  $\bar{\mathbf{i}}_i = (1, \dots, 1)'_{(T-i) \times 1}$ ,  $\bar{u}_i$  est un vecteur  $(T-i) \times 1$  et  $\bar{\mathbf{i}}_i = \bar{\Gamma}_i(\theta_0)\bar{\mathbf{i}}_i$  est un vecteur

$(T-p) \times 1$ . Comme  $M(\bar{\mathbf{i}}_i)\bar{Z}_i(\theta_0)/\sigma = M(\bar{\mathbf{i}}_i)\bar{\Gamma}_i(\theta_0)\bar{u}_i/\sigma$ ,  $i = 1, \dots, p$ , où

$M(\bar{\mathbf{i}}_i) = I - \bar{\mathbf{i}}_i(\bar{\mathbf{i}}_i'\bar{\mathbf{i}}_i)^{-1}\bar{\mathbf{i}}_i'$ , on peut éliminer  $\beta$  de la distribution en ajoutant une matrice

$(T-p) \times p$  de  $p$  régresseurs supplémentaires:

$$X = [\bar{\mathbf{i}}_1, \dots, \bar{\mathbf{i}}_p]$$

où  $\bar{\mathbf{i}}_k = \bar{\Gamma}_k(\theta_0)\bar{\mathbf{i}}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Nous testerons donc le modèle contraint (3.9) contre

$$(3.31) \quad y(\theta_0) = \beta \mathbf{1} + \bar{Z}(\theta_0) \bar{\Psi}^0(p) + X\gamma + u$$

où  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)'$ . Ceci suggère de tester  $H_0(\theta_0)$  en testant l'hypothèse équivalente:

$$H_0(2p): \psi_j^0 = 0, \gamma_j = 0, j = 1, \dots, p,$$

dans le cadre du modèle (3.31) au moyen d'une statistique de type Fisher:

$$(3.32) \quad F(\theta_0, p) = \frac{(T-p) - (2p+1)}{2p} \left[ \frac{S_0(\theta_0) - S_1(\theta_0, p)}{S_1(\theta_0, p)} \right]$$

où

$$(3.33) \quad S_0(\theta_0) = u(\theta_0)'u(\theta_0), \quad u(\theta_0) = M [\mathbf{1}]y(\theta_0)/\sigma,$$

$$S_1(\theta_0, p) = \min_{\bar{\Psi}^0(p)} [u(\bar{\Psi}^0(p), \theta_0)'u(\bar{\Psi}^0(p), \theta_0)],$$

$$u(\bar{\Psi}^0(p), \theta_0) = M [\mathbf{1} \ X] [y(\theta_0) - \bar{Z}(\theta_0) \bar{\Psi}^0(p)]/\sigma.$$

Il est clair que  $F(\theta_0, p)$  ne dépend pas des paramètres de nuisance  $\beta$  et  $\sigma$ . Le test

ainsi construit rejette donc l'hypothèse nulle au niveau  $\alpha$  quand  $F(\theta_0, p) > c(\alpha, \theta_0)$ ,

où  $c(\alpha, \theta_0)$  est tel que  $P[F(\theta_0, p) > c(\alpha, \theta_0)] = \alpha$ . Il est clair que les points critiques

$c(\alpha, \theta_0)$  dépendent des valeurs de  $\theta_0$ , ce qui requiert donc la construction d'un tableau

statistique pour les quadruplés  $(T, p, \theta_0, \alpha)$ , où  $\theta_0$  est l'élément d'un ensemble

admissible  $S$  qui contient l'ensemble de stationnarité  $S_p$  tel que définit en Annexe (pour  $p = 2, \dots, 5$ ). La distribution analytique de  $F(\theta_0, p)$  est inconnue mais elle peut être facilement simulée.

Si on emploie l'un des tests ainsi décrits à la section précédente, l'hypothèse  $H_0(\theta_0): \theta = \theta_0$  n'est pas rejetée lorsque  $\tilde{F}(\theta_0) \leq \tilde{c}(\alpha_1)$ , où  $\tilde{F}(\theta_0)$  et  $\tilde{c}(\alpha_1)$  sont respectivement la statistique de test et le point critique correspondant. Par conséquent, l'ensemble des valeurs  $\theta_0$  qui ne sont pas rejetées par cette procédure

$$(3.34) \quad I = \{ \theta_0: \tilde{F}(\theta_0) \leq \tilde{c}(\alpha_1) \}$$

est une région de confiance de niveau  $1 - \alpha_1$  pour  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)'$ :

$$(3.35) \quad P[ \theta \in I ] \geq 1 - \alpha_1;$$

autrement dit, la région est obtenue en " inversant " la famille de tests proposée pour des hypothèses de type  $H_0(\theta_0)$ . Si, de plus, on restreint  $\theta$  à un ensemble de valeurs admissibles  $S_p$ , l'ensemble  $I \cap S_p$  constitue aussi une région de confiance de niveau  $1 - \alpha_1$  (quand les conditions imposées sont correctes)

Pour des fins d'illustration, nous donnons dans l'annexe quelques exemples numériques qui suggèrent que la deuxième approche est supérieure à la première. Ce résultat est confirmé aussi par l'exemple économique de la section prochaine.

#### 4. Application au P.I.B réel tunisien

Pour illustrer les méthodes proposées plus haut, nous allons étudier la série du P.I.B réel tunisien ( $PIB_t$ ) de 1961 à 1992 (annuel).<sup>1</sup> L'analyse de cette série nous suggère qu'un modèle de type AR(2) serait approprié pour  $\log(P.I.B.) = y_t$ ; voir Dufour et Neifar (1995 b). Si on estime un tel modèle par M.C.O, on trouve le résultat suivant:

$$(4.1) \quad y_t = 0.2987 + 0.9734 y_{t-1} - 0.2836 (y_{t-1} - y_{t-2}) + \hat{u}_t$$

|          |           |          |
|----------|-----------|----------|
| (0.1276) | (0.0146)  | (0.1661) |
| (2.3409) | (66.6637) | (-1.708) |

$$\bar{R}^2 = 0.9936, DW = 1.77, SSR = 0.0389$$

où les chiffres entre parenthèses sont les écarts-types et les statistiques t de Student. Si on suppose que les statistiques t de Student pour tester différentes valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans ce modèle suivent approximativement une loi t(27), on peut calculer des intervalles de confiance pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Ainsi aux niveaux 0.95 et 0.975 [  $t_{0.025}(27) = 2.052$  et  $t_{0.0125}(27) = 2.3734$  ] on obtient de cette manière les intervalles suivants:

$$\theta_1 \in [ 0.9445; 1.0044 ], \theta_2 \in [ -0.6244; 0.05712 ],$$

et

$$\theta_1 \in [ 0.9398; 1.0091 ], \theta_2 \in [ -0.6778; 0.1105 ].$$

---

(5)Source: "Banque de Données Macro-économiques", Institut d'Économie Quantitative, Tunis, 1992.

Bien entendu, la fiabilité d'une telle approximation peut être fort mauvaise ici (même asymptotiquement), notamment dans le voisinage du cercle unité (nous rapportons ces intervalles seulement pour fin de référence).

Maintenant, nous allons utiliser la première approche développée dans les sections précédentes pour construire une région de confiance de niveau 0.95 pour  $(\theta_1, \theta_2)'$ . Pour  $p_1 = p_1^* = 5$ ,  $T = 32$  et  $p = 2$ , le point critique simulé pour la statistique de type Fisher est égale à 2.455 (avec un nombre de réplifications fixé à 100), ce point correspond à la probabilité de queue égale à 5%. Si on impose les conditions de stationnarité sur les paramètres  $\theta_j$ , on obtient la région de confiance simultanée de la figure 1 "page 100". On voit que cette région est petite, allongée et concentrée autour de la ligne  $\theta_1 = 1$ . En particulier, elle est beaucoup plus informative pour  $\theta_1$  que pour  $\theta_2$ . Le point (1, 1) est clairement hors de la région. Par projection on trouve des intervalles de confiance individuels pour les  $\theta_j$ :

$$(4.2) \quad \theta_1 \in [0.94, 1.0], \quad \theta_2 \in [-1.0, 0.65].$$

Nous appliquons maintenant la deuxième approche avec un nombre de réplifications fixé à 100. En imposant les conditions de stationnarité sur les paramètres  $\theta_j$ , on obtient la région de confiance de la figure 2 "page 101" de niveau de confiance globale 95%. Cette région ressemble à la région de la figure 1 "page 100" mais elle est

encore plus petite. Elle est concentrée autour de la borne  $\theta_1 = 1$  du triangle de stationnarité, et a l'avantage d'être aussi informative pour  $\theta_1$  que pour  $\theta_2$ . Le point  $(1, 1)$  "de racine unitaire double" est hors la région de confiance. Par projection nous obtenons alors les intervalles de confiance individuels

$$(4.3) \quad \theta_1 \in [0.95, 1.0], \quad \theta_2 \in [-0.79, 0.51].$$

L'examen des régions de confiance de la figure 1 "page 100" et la figure 2 "page 101", ainsi que les intervalles de confiance en (4.2) et en (4.3) nous permet de conclure que les résultats de la deuxième approche sont plus précis que ceux de la première approche notamment pour le paramètre  $\theta_2$ .

Figure 1: Région de confiance "valide" pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\alpha = 0.05$ )

"première approche"

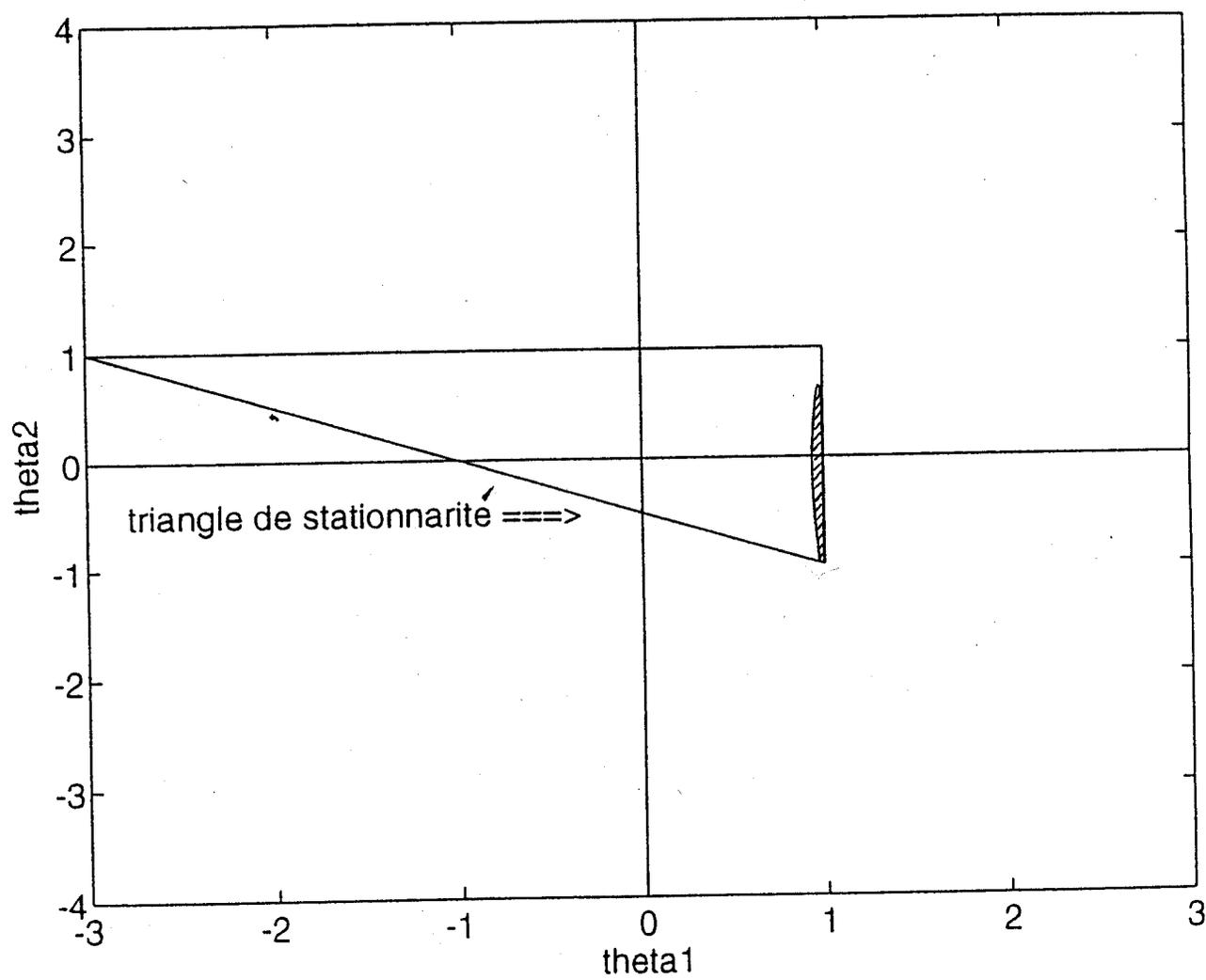
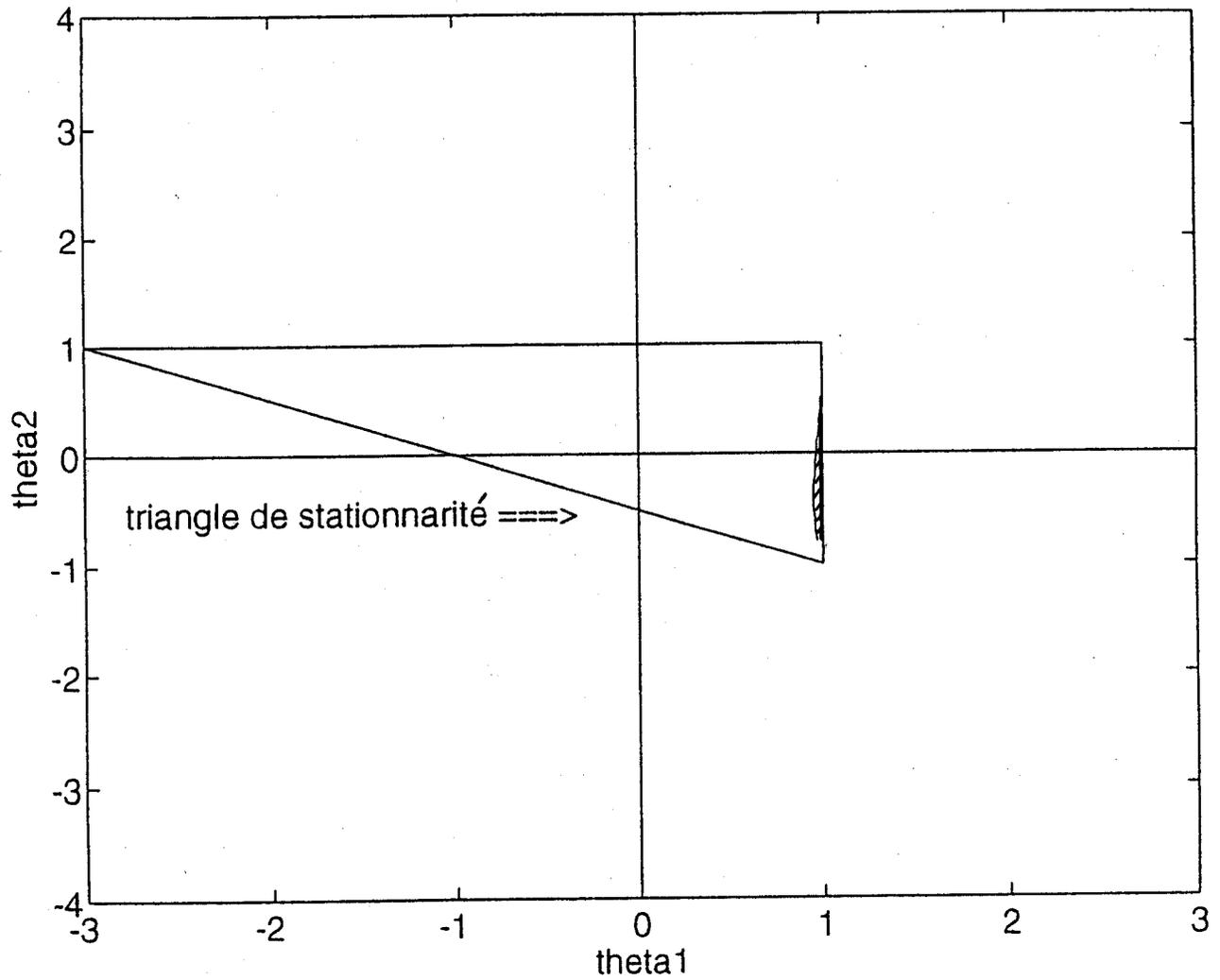


Figure 2: Région de confiance "valide" pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ( $\alpha = 0.05$ )

"deuxième approche"



ANNEXE

Preuve du lemme 2.1

Par définition,

$$\begin{aligned}
(2.2) \quad \Phi(B) &= 1 - \sum_{k=1}^p \phi_k B^k = 1 - \sum_{k=1}^p \phi_k B^{k-1} B \\
&= 1 - \sum_{k=1}^p \phi_k (1 - (1 - B))^{k-1} B \\
&= 1 - \sum_{k=1}^p \phi_k \left[ \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} (1 - B)^j \right] B \\
&= 1 - \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{k-1} \phi_k (-1)^j \binom{k-1}{j} (1 - B)^j B \\
&= 1 - \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^k \phi_k (-1)^{j-1} \binom{k-1}{j-1} (1 - B)^{j-1} B \\
&= 1 - \sum_j \left[ \sum_{j \leq k \leq p} \phi_k (-1)^{j-1} \binom{k-1}{j-1} \right] (1 - B)^{j-1} B \\
&= 1 - \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \left[ \sum_{k=j}^p \binom{k-1}{j-1} \phi_k \right] (1 - B)^{j-1} B \\
&= 1 - \sum_{j=1}^p \theta_j (1 - B)^{j-1} B
\end{aligned}$$

$$\text{où } \theta_j = (-1)^{j-1} \sum_{k=j}^p \binom{k-1}{j-1} \phi_k.$$

Preuve du lemme 2.2

a) Pour démontrer la première partie du lemme, nous allons procéder par récurrence.

\* Si  $\theta_1 = 1$  ( $m = 1$ )

$$\begin{aligned}\Phi(B) &= (1 - B) - \sum_{k=2}^p \theta_k (1 - B)^{k-1} B \\ &= (1 - B) - (1 - B) \sum_{k=2}^p \theta_k (1 - B)^{k-2} B \\ &= (1 - B)^m [1 - \sum_{k=m+1}^p \theta_k (1 - B)^{k-1-m} B].\end{aligned}$$

\* Supposons maintenant que (2.6) est vrai jusqu'à  $m = \bar{m} < p$ . Alors,

$$(A.1) \quad \Phi(B) = (1 - B)^{\bar{m}} [1 - \sum_{k=\bar{m}+1}^p \theta_k (1 - B)^{k-1-\bar{m}} B].$$

\* Si  $\theta_{\bar{m}+1} = 1$ , (A.1) devient:

$$\begin{aligned}\Phi(B) &= (1 - B)^{\bar{m}} [(1 - B) - \sum_{k=\bar{m}+2}^p \theta_k (1 - B)^{k-1-\bar{m}} B] \\ &= (1 - B)^{\bar{m}} [(1 - B) - (1 - B) \sum_{k=\bar{m}+2}^p \theta_k (1 - B)^{k-2-\bar{m}} B], \\ &= (1 - B)^{\bar{m}+1} [1 - \sum_{k=(\bar{m}+1)+1}^p \theta_k (1 - B)^{k-1-(\bar{m}+1)} B].\end{aligned}$$

L'équation (2.6) est donc établie par récurrence.

b) Supposons maintenant que le polynôme s'écrit sous la forme

$$\Phi(B) = (1 - B)^m [1 - \sum_{k=1}^{p-m} \bar{\phi}_k B^k].$$

Alors

$$\begin{aligned}\Phi(B) &= 1 - \sum_{k=1}^p \theta_k (1 - B)^{k-1} B \\ &= (1 - B)^m [1 - \sum_{k=1}^{p-m} \bar{\phi}_k B^k].\end{aligned}$$

Par le lemme 2.1

$$1 - \sum_{k=1}^{p-m} \bar{\phi}_k B^k = 1 - \sum_{k=1}^{p-m} \bar{\theta}_k (1 - B)^{k-1} B$$

où les  $\bar{\theta}_k$  sont uniques. Par conséquent

$$\begin{aligned}\Phi(B) &= (1 - B)^m [1 - \sum_{k=1}^{p-m} \bar{\theta}_k (1 - B)^{k-1} B] \\ &= (1 - B)^m - \sum_{k=1}^{p-m} \bar{\theta}_k (1 - B)^{k+m-1} B \\ &= (1 - B)^m - \sum_{k=m+1}^p \bar{\theta}_k (1 - B)^{k-1} B \\ &= 1 - \sum_{k=1}^m (1 - B)^{k-1} B - \sum_{k=m+1}^p \bar{\theta}_k (1 - B)^{k-1} B\end{aligned}$$

car

$$(A.2) \quad (1 - B)^m = 1 - \sum_{k=1}^m (1 - B)^{k-1} B.$$

En effet, si  $m = 1$

$$1 - B = 1 - (1 - B)^0 B$$

(A.2) est vrai. Supposons que (A.2) est vrai pour  $m \leq \bar{m}$ . Alors

$$(1 - B)^{\bar{m}+1} = (1 - B)^{\bar{m}} (1 - B)$$

$$\begin{aligned}
&= [1 - \sum_{k=1}^{\bar{m}} (1 - B)^{k-1} B](1 - B) \\
&= 1 - B - \sum_{k=1}^{\bar{m}} (1 - B)^{k+1-1} B \\
&= 1 - B - \sum_{k=2}^{\bar{m}+1} (1 - B)^{k-1} B \\
&= 1 - (1 - B)^{1-1} B - \sum_{k=2}^{\bar{m}+1} (1 - B)^{k-1} B \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{\bar{m}+1} (1 - B)^{k-1} B
\end{aligned}$$

et donc (A.2) tient pour  $m = \bar{m} + 1$ . Donc

$$\Phi(B) = 1 - \sum_{k=1}^p \bar{\theta}_k (1 - B)^{k-1} B$$

où  $\bar{\theta}_k = 1$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Comme par le lemme 1 la représentation (2.3a) est unique,

on doit avoir  $\theta_k = \bar{\theta}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , et en particulier  $\theta_k = 1$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

### Preuve de la proposition 1

Si on note  $\bar{\psi}^0(k) = (\psi_{k-p+1}^0, \dots, \psi_k^0)'_{p \times 1}$  et  $\bar{\psi}^0(k-1) = (\psi_{k-p}^0, \dots, \psi_{k-1}^0)'_{p \times 1}$ , la

représentation d'état correspondante [voir Gourieroux et Monfort (1990), p 331- 352]

est:

$$\bar{\psi}^0(k) = C \bar{\psi}^0(k-1)$$

où

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & & & \dots & 1 \\ \phi_{p0} & \phi_{(p-1)0} & & & \dots & \phi_{10} \end{bmatrix}.$$

Ainsi pour  $k \geq 1$ , on aura la relation:

$$\bar{\Psi}^0(k+p) = C^k \bar{\Psi}^0(p)$$

ou encore

$$\bar{\Psi}^0(j) = C^{j-p} \bar{\Psi}^0(p), \quad \forall j \geq p+1.$$

On peut calculer maintenant les  $\psi_j^0$ ,  $j \geq p+1, \dots, T-1$  en fonction de  $\bar{\Psi}^0(p)$ ,

$$\psi_j^0 = \delta_j' \bar{\Psi}^0(p), \quad j = p+1, \dots, T-1$$

où  $\delta_j' = \mathbf{v}_p' C^{j-p}$  et  $\mathbf{v}_p = (0, \dots, 0, 1)_{p \times 1}'$ , et donc la matrice A est égale à

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{p+1}' \\ \delta_{p+2}' \\ \dots \\ \delta_{T-1}' \end{bmatrix}_{(T-p-1) \times p}$$

### Preuve de la proposition 2

Par l'équation (3.25) on a:

$$Z_j(\theta_0) = [y_{-j}(\theta_0), \bar{y}_{-(p+1)}(\theta_0), \dots, \bar{y}_{-(T-1)}(\theta_0)] \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_{p+1,j} \\ \delta_{p+2,j} \\ \dots \\ \delta_{T-1,j} \end{bmatrix}$$

où  $\delta_{i,j}$  est le  $j^{\text{ième}}$  élément de  $\delta'_i$ .  $Z_j(\theta_0)$  peut s'écrire aussi comme suit:

$$Z_j(\theta_0) = \begin{bmatrix} y_{p+1-j}(\theta_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y_{p+2-j}(\theta_0) & y_1(\theta_0) & 0 & \dots & 0 \\ y_{p+3-j}(\theta_0) & y_2(\theta_0) & y_1(\theta_0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{T-j}(\theta_0) & y_{T-p-1}(\theta_0) & y_{T-2-p}(\theta_0) & \dots & y_1(\theta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_{p+1,j} \\ \delta_{p+2,j} \\ \dots \\ \delta_{T-1,j} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta_{p+1,j} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta_{p+2,j} & \delta_{p+1,j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ \delta_{T-1,j} & \delta_{T-2,j} & \dots & \delta_{p+2,j} & \delta_{p+1,j} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(\theta_0) \\ y_2(\theta_0) \\ \dots \\ y_{p+1-j}(\theta_0) \\ y_{p+2-j}(\theta_0) \\ \dots \\ y_{T-p-2}(\theta_0) \\ y_{T-p-1}(\theta_0) \\ \dots \\ y_{T-j}(\theta_0) \end{bmatrix}$$

$$= \bar{\Gamma}_j(\theta_0) Y_{-j}(\theta_0).$$

### Conditions de stationnarité

Les conditions pour que les racines d'un modèle autorégressif d'ordre  $p$ , tel que celui décrit en (2.1), se trouvent à l'extérieur du cercle unité sont disponibles sous une

forme explicite pour  $p = 2, 3, 4, 5$  [voir Farebrother (1973a, 1973b, 1974a, 1974b, 1974c, 1976, 1987)]. Les ensembles admissibles sont les suivants:

(i) processus AR(2):

$$S_2 = \{ (\phi_1, \phi_2) : |\phi_2| < 1, |\phi_1| < 2, 1 - \phi_2 + \phi_1 > 0, 1 - \phi_1 - \phi_2 > 0 \};$$

(ii) processus AR(3):

$$S_3 = \{ (\phi_1, \phi_2, \phi_3) : |\phi_3| < 1, |\phi_1| < 3, -3 < \phi_2 < 1, \\ 1 + \phi_2 + \phi_1\phi_3 - \phi_3^2 > 0, (1 - \phi_2)^2 - (\phi_1 + \phi_3)^2 > 0 \};$$

(iii) processus AR(4):

$$S_4 = \{ (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) : |\phi_4| < 1, |\phi_3| < 4, |\phi_2| < 6, |\phi_1| < 4, \\ (3 + \phi_2 - 3\phi_4)(1 - \phi_2 - \phi_4) > 0, (1 - \phi_2 - \phi_4)^2 - (\phi_1 + \phi_3)^2 > 0, \\ (1 + \phi_4)(1 - \phi_4^2) + \phi_2(1 + \phi_4)^2 - (\phi_3 - \phi_1)(\phi_3 - \phi_1\phi_4) > 0 \};$$

(iv) processus AR(5):

$$S_5 = \{ (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5) : |\phi_1| < 5, |\phi_2| < 10, |\phi_3| < 10, |\phi_4| < 5, \\ |\phi_5| < 1, (\phi_4 + 5)^2 - (\phi_2 - 2\phi_4)^2 > 0, \\ \phi_1 + \phi_2 + \phi_4 < 1, (1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_4)^2 - (\phi_3 - \phi_5)^2 > 0, \\ (1 + \phi_4)(3 - \phi_2 + \phi_4) + (\phi_5 - \phi_1)(\phi_1 - \phi_3 - 3\phi_5) > 0, \\ (1 + \phi_4)(5 + \phi_2 - \phi_4) + (\phi_5 - \phi_1)(\phi_1 + \phi_3 - 5\phi_5) > 0, \\ [1 + \phi_4 - \phi_5(\phi_5 - \phi_1)][(1 + \phi_4)(1 + \phi_2 - \phi_4) + (\phi_5 - \phi_1) \\ (\phi_3 - \phi_1 - \phi_5)] > [\phi_3 - \phi_1 - \phi_5(\phi_2 - \phi_4)]^2 \};$$

Si on utilise la paramétrisation modifiée de l'équation (2.5), ces conditions peuvent être réécrites de la façon suivante:

(i) processus AR(2):

$$S_2 = \{ (\theta_1, \theta_2) : -3 < \theta_1 < 1, |\theta_2| < 1, 2\theta_2 + \theta_1 > -1 \};$$

(ii) processus AR(3):

$$S_3 = \{ (\theta_1, \theta_2, \theta_3) : -9 < \theta_1 < 7, -3 < \theta_2 < 5, |\theta_3| < 1, \\ -1 < \theta_2 + 2\theta_3 < 3, -3 < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 < 3, \\ 1 - (\theta_2 + 2\theta_3) + (\theta_1 + \theta_2)\theta_3 > 0, \\ 1 - \theta_1^2 + 2(1 - \theta_1)(\theta_2 + 2\theta_3) > 0 \};$$

(iii) processus AR(4):

$$S_4 = \{ (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) : |\theta_1| < 35, |\theta_2| < 23, |\theta_3| < 7, |\theta_4| < 1, \\ -4 < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 < 4, -4 < \theta_3 + 3\theta_4 < 4, \\ -6 < \theta_2 + 2\theta_3 + 3\theta_4 < 6, \\ (3 - \theta_2 - 2\theta_3)(1 + \theta_2 + 2\theta_3 + 4\theta_4) > 0, \\ (1 + \theta_2 + 2\theta_3 + 4\theta_4)^2 - (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 + 4\theta_4)^2 > 0, \\ (1 - \theta_4)^2(1 - \theta_2 - 2\theta_3 - 2\theta_4) + (\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_4) \\ [ \theta_3 + 3\theta_4 + \theta_4(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) ] > 0 \};$$

(iv) processus AR(5):

$$S_5 = \{ (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) : |\theta_1| < 181, |\theta_2| < 127, |\theta_3| < 43, \\ |\theta_4| < 9, |\theta_5| < 1, (5 - \theta_4 - 4\theta_5)^2 - (4\theta_5 - \theta_2 - 2\theta_3 - \theta_4)^2 > 0, \\ \theta_1 - \theta_3 - 3\theta_4 - 7\theta_5 < 1, -5 < \theta_4 + 4\theta_5 < 5, \\ -5 < \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 < 5, \\ -10 < \theta_2 + 2\theta_3 + 3\theta_4 + 4\theta_5 < 10, \\ -10 < \theta_3 + 3\theta_4 + 6\theta_5 < 10, \\ (1 - \theta_1 + \theta_3 + 3\theta_4 + 7\theta_5)^2 - (\theta_3 + 3\theta_4 + \theta_5)^2 > 0, \\ (1 - \theta_4 - 4\theta_5)(3 + \theta_2 + 2\theta_3 + 2\theta_4) - \\ (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_5)(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_4 - 8\theta_5) > 0, \}$$

$$\begin{aligned}
& (1 - \theta_4 - 4\theta_5)(5 - \theta_2 - 2\theta_3 - 2\theta_4) - \\
& (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 + 4\theta_4 + 2\theta_5) > 0, \\
& [1 - \theta_4 - 4\theta_5 + \theta_5(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)] \\
& [(1 - \theta_4 - 4\theta_5)(1 - \theta_2 - 2\theta_3 - 2\theta_4) - \\
& (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)(2\theta_4 + 4\theta_5 - \theta_1 - \theta_2)] > \\
& [(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - \theta_5(\theta_2 + 2\theta_3 + 2\theta_4)]^2.
\end{aligned}$$

### Illustrations des méthodes par des modèles simulés

Dans ce qui suit nous allons illustrer les deux approches décrites dans la section 3 par quatre modèles dont chacun suit un processus autorégressif d'ordre 2. Étant donnée que la distribution des statistiques ne dépend pas des valeurs initiales de  $y_0$  et  $y_{-1}$ , ces dernières seront fixées à zéro. Par ailleurs, pour chaque vecteur de paramètres autorégressifs trente autres observations ont été générées ( $T + p = 32$ ). Les résultats asymptotiques et exacts sont regroupés dans les tableaux 1 à 4 "pages 104 à 107". Pour la première approche exacte, le nombre  $N$  de réplifications choisi pour le calcul des points critiques est fixé à 1000; le nombre de retard  $p_1$  utilisé varie de 2 à 8 ( $p_1^* = p_1$ ), et les points critiques correspondants sont respectivement 2.934, 2.675, 2.618, 2.455, 2.298, 2.237, 2.190. En utilisant des calculs de Monte Carlo nous avons tenté de trouver le nombre de retard optimal. Notre conclusion est que ce nombre dépend des vraies valeurs des paramètres autorégressives. Néanmoins, il semble que, globalement

pour  $p_1$  égal à 5, les résultats seraient acceptables. Pour la deuxième méthode exacte, le nombre  $N$  de réplifications choisi pour le calcul des  $p$ -values est fixé à 100. En examinant les résultats des tableaux 1 à 4 "pages 104 à 107", la deuxième approche est remarquablement plus précise que la première.

Tableau # 1

Données simulées du modèle AR(2)

avec  $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = 0$ ,  $\beta = 0$ 

| Résultats asymptotiques                                     |   |                     |         |
|---|---|---------------------|---------|
| paramètres  | $\theta_1$  | $\theta_2$          | $\beta$ |
| valeurs estimées  | 0.96729   | 0.031699            | .34198  |
| régions de confiance à 95 %                                 | [0.83172, 1.1029]                                       | [-0.37587, 0.43927] |         |
| Résultats de l'approche fondée sur les M.C.O non contraints |   |                     |         |
| paramètres  | $\theta_1$  | $\theta_2$          | $P_1$   |
| régions de confiance à 95 %                                 | [0.65, 1.00]  | [-0.51, 1.00]       | 2       |
|   | [0.77, 1.00]  | [-0.44, 0.64]       | 3       |
|   | [0.70, 1.00]  | [-0.41, 1.00]       | 4       |
|   | [0.68, 1.00]  | [-0.37, 1.00]       | 5       |
|   | [0.64, 1.00]  | [-0.34, 1.00]       | 6       |
|   | [0.65, 1.00]  | [-0.34, 1.00]       | 7       |
|   | [0.66, 1.00]  | [-0.26, 1.00]       | 8       |
|   | Résultats de l'approche fondée sur les M.C.O contraints |                     |         |
| régions de confiance à 95 %                                 | [0.72, 1.00]  | [-0.39, 0.51]       |         |

Tableau # 2

Données simulées du modèle AR(2)

avec  $\theta_1 = .5$ ,  $\theta_2 = .5$ ,  $\beta = 0$ 

| Résultats asymptotiques                                     |   |                    |                |
|---|---|--------------------|----------------|
| paramètres  | $\theta_1$  | $\theta_2$         | $\beta$        |
| valeurs estimées  | 0.57661   | 0.56555            | 0.21473        |
| régions de confiance à 95 %                                 | [0.3374, 0.81582]                                       | [0.23905, 0.89205] |                |
| Résultats de l'approche fondée sur les M.C.O non contraints |   |                    |                |
| paramètres  | $\theta_1$  | $\theta_2$         | P <sub>1</sub> |
| régions de confiance à 95 %                                 | [-0.09, 1.00]   | [-0.08, 1.00]      | 2              |
|   | [-0.03, 1.00]   | [0.04, 1.00]       | 3              |
|   | [0.06, 1.00]  | [0.02, 1.00]       | 4              |
|   | [0.12, 1.00]  | [0.11, 1.00]       | 5              |
|   | [0.27, 1.00]  | [0.40, 1.00]       | 6              |
|   | [0.35, 0.85]  | [0.41, 1.00]       | 7              |
|   | [0.19, 1.00]  | [0.30, 1.00]       | 8              |
|   | Résultats de l'approche fondée sur les M.C.O contraints |                    |                |
| régions de confiance à 95 %                                 | [0.12, 0.81]  | [0.19, 1.00]       |                |

Tableau # 3

Données simulées du modèle AR(2)

avec  $\theta_1 = -2.0$ ,  $\theta_2 = 0.8$ ,  $\beta = 0$ 

| Résultats asymptotiques                                     |   |                   |          |
|---|---|-------------------|----------|
| paramètres  | $\theta_1$  | $\theta_2$        | $\beta$  |
| valeurs estimées  | -1.9177   | 0.75160           | 0.051803 |
| régions de confiance à 95 %                                 | [-2.4047, 1.4307]                                       | [0.48267, 1.0205] |          |
| Résultats de l'approche fondée sur les M.C.O non contraints |   |                   |          |
| paramètres  | $\theta_1$  | $\theta_2$        | $P_1$    |
| régions de confiance à 95 %                                 | [-2.85, -1.31]  | [0.40, 1.00]      | 2        |
|   | [-2.77, -1.14]  | [0.34, 1.00]      | 3        |
|   | [-2.67, -1.01]  | [0.30, 1.00]      | 4        |
|   | [-2.69, -1.18]  | [0.34, 1.00]      | 5        |
|   | [-2.73, -1.02]  | [0.26, 1.00]      | 6        |
|   | [-2.52, -1.17]  | [0.37, 1.00]      | 7        |
|   | [-2.56, -1.06]  | [0.30, 1.00]      | 8        |
|   | Résultats de l'approche fondée sur les M.C.O contraints |                   |          |
| régions de confiance à 95 %                                 | [-2.59, -1.19]  | [0.39, 1.00]      |          |

Tableau # 4  
Données simulées du modèle AR(2)  
avec  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0$ ,  $\beta = 0$

| Résultats asymptotiques                                     |                  |            |                               |
|---|------------------|------------|-------------------------------|
| paramètres  | valeurs estimées | paramètres | paramètres                    |
| $\theta_1$  | -0.33559         | $\theta_1$ | 95%<br>régions de confiance à |
| $\theta_2$  | 0.14704          | $\theta_2$ | 95%<br>régions de confiance à |
| $\beta$   | -0.0062095       |            | 95%<br>régions de confiance à |
| Résultats de l'approche fondée sur les M.C.O non contraints |                  |            |                               |
| paramètres  |                  | paramètres | paramètres                    |
| $\theta_1$  |                  | $\theta_1$ | 95%<br>régions de confiance à |
| $\theta_2$  |                  | $\theta_2$ | 95%<br>régions de confiance à |
| $p_1$   |                  |            | 95%<br>régions de confiance à |
| 2   |                  |            |                               |
| 3   |                  |            |                               |
| 4   |                  |            |                               |
| 5   |                  |            |                               |
| 6   |                  |            |                               |
| 7   |                  |            |                               |
| 8   |                  |            |                               |
| Résultats de l'approche fondée sur les M.C.O contraints     |                  |            |                               |
|   |                  |            | 95%<br>régions de confiance à |
|   |                  |            | 95%<br>régions de confiance à |
|   |                  |            | 95%<br>régions de confiance à |

## Références

- BROCKWELL, P. J. , and DAVIS, R. A., (1987, 1991): "*Time Series: Theory and Methods* ," Springer- Verlag.
- BEVERIDGE, S., and NELSON, C. R., (1981): "*A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the 'Business Cycles'*," *Journal of Monetary Economics* 7, 151- 174. North- Holland Publishing Company.
- DICKEY, D. A., (1976): "*Estimation and Testing of non Stationary Time Series*," Ph. D thesis, Iowa state university.
- DICKEY, D. A., et FULLER, W. A., (1979): "*Distribution of the Estimators for autoregressive Time Series with a Unit Root*," *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427-431.
- DUFOUR, J. M., (1990): "*Exact Tests and Confidence sets in Linear Regressions With Autocorrelated Errors*," *Econometrica*, 58, 2, 475- 494.
- DUFOUR, J. M., et NEIFAR, M., (1995 b): "*Méthodes d'Inférence Exactes pour des Processus Autorégressifs: une Approche fondée sur des Tests Induits*,".
- DIEBOLD, F. X, and M. NERLOVE., (1990): "*Unit Root in Economic Time Series: A Selective Survey*," in T.B. Fomby and G.F. Rhodes (eds.), *Advances in Econometrics: Co-Integration, Spurious Regressions, and Unit Roots*, Greenwich CT: JAI Press.

- FULLER, W. A., (1976): " *Time Series*," New York: John Wiley.
- FAREBROTHER, R. W., (1973a): " *Simplified Samuelson Conditions for Cubic and Quadratic Equation*," Manchester School of Economic and Social Studies, 41, 397-400.
- FAREBROTHER, R. W., (1973b): " *Simplified Samuelson Conditions for Cubic and Quintic Equations*," Manchester School of Economic and Social Studies, 41, 396-409.
- FAREBROTHER, R. W., (1974a): " *The Stability of Laidler's Simple Monetary Model*," Manchester School of Economic and Social Studies, 42, 277-278.
- FAREBROTHER, R. W., (1974b): " *Simplified Samuelson Conditions for Quintic Equations*," Manchester School of Economic and Social Studies, 42, 279-282.
- FAREBROTHER, R. W., (1974c): " *Recursive Relations for the Samuelson Transformation Coefficients*," International Economic Review, V 15, 3, 805-807.
- FAREBROTHER, R. W., (1976): " *A Note on the Local Stability of the General First Order Difference Equation*," Manchester School of Economic and Social Studies, 44.
- FAREBROTHER, R. W., (1987): " *Independent Conditions for the Stability of a Dynamic Linear Model*," Manchester School of Economic and Social Studies, 55, 305-309.
- GOURIEROUX, C., et MONFORT, A., (1990): " *Series Temporelles et Modèles Dynamiques*," Economica, p 331-352.
- HAMILTON, J. D., (1994): " *Time Series Analysis*," Princeton University Press, Princeton (N. J).

HASZA, D. P. , and FULLER, W. A., (1979):" *Estimation for Autoregressive Processes with Unit Roots*," The Annals of Statistics, vol.7. no 5, 1106- 1120.

KING, M. L., (1987): "*Testing for Autocorrelation in Linear Regression Models: A Survey*," in Specification Analysis in the Linear Model: Essays in Honour of Donald Cochrane, ed. by M. L. King and D. E. A. Giles. London: Routledge and Kegan Paul, 19-73.

KIVIET. J. F., et DUFOUR, J, M., (1994):" *Exact Tests in Single équation Autoregressive Distributed Lag Models*,".

STOCK. J. H., (1991):" *Confidence Intervals for Largest Autoregressive Root in U.S. macroeconomic Time Series*," Journal of Monetary Economics 28 (1991) 435-459. North-Holland.

STOCK. J. H., (1993):" *Unit Root, Structural Breaks and Trends*," Kennedy School of Government Harvard University Cambridge, Working paper MA 02138, 1- 124.

**ESSAI IV**

**MÉTHODES D'INFÉRENCE EXACTES  
POUR DES MODÈLES DE RÉGRESSION AVEC  
ERREURS AUTORÉGRESSIVES: EXTENSIONS DE L'APPROCHE  
DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE TRONQUÉ**

## 1. Introduction

L'inférence statistique sur les paramètres des modèles de régression avec erreurs autocorrélées est un des problèmes fondamentaux posés en économétrie. Les méthodes utilisées sont habituellement basées sur des approximations asymptotiques dont la fiabilité est souvent remise en cause dans les échantillons finis.

Quelques méthodes d'inférences exactes ont été proposées pour les modèles linéaires avec des erreurs qui suivent des processus AR(1) ou MA(1). En particulier, divers tests contre la présence d'autocorrélation d'ordre supérieur ou égal à un ont été développés; pour un survol, voir King (1983, 1987). Sur la construction de régions de confiance pour les coefficients du processus autorégressif, le lecteur pourra consulter Vinod (1976), Vinod et Ullah (1981, ch.4), King (1984, 1987), Hillier et King (1987), Zinde-Walsh et Ullah (1987), Kiviet (1980, 1991), Dufour (1990), Kiviet (1991), Krämer, Kiviet et Breitung (1991), Dufour et Neifar (1995 b) et Neifar et Dufour (1995 a). A nouveau, un problème central ici consiste à tenir compte de la présence possible de paramètres de nuisance (par exemple, les coefficients de régression) dans les distributions des statistiques de tests. Les solutions suggérées consistent soit à choisir des statistiques dont les distributions ne dépendent pas de ces paramètres [voir Hillier (1987), Kiviet et Phillips (1990, 1992)] soit à borner les distributions des statistiques considérées. Pour une combinaison des deux approches, voir Dufour et Kiviet (1993).

Dans ce texte nous allons nous concentrer sur la seconde approche pour faire de l'inférence exacte sur les paramètres autorégressifs "d'intérêt". Ainsi pour éliminer les coefficients de régression, nous proposons trois méthodes différentes d'élimination. La première consiste à considérer d'abord la régression originale, à réécrire celle-ci sous la forme de  $p+1$  régressions basées sur des ensembles d'observations légèrement décalées, et à estimer ensuite les résidus de chaque régression. La seconde méthode considère une régression transformée (pour un vecteur de paramètres autorégressifs donné) et élargie par les régresseurs nécessaires. La troisième méthode est fondée sur la régression orthogonalisée sous l'hypothèse nulle. Dans chacun de ces cas, nous considérons trois approches pour construire des statistiques de test. Les deux premières approches consistent à régresser des résidus orthogonalisés estimés sur des valeurs retardées de ces derniers (suivant deux variantes), tandis que la troisième régresse des résidus orthogonalisés estimés sur des résidus non orthogonalisés retardés. Neuf statistiques différentes sont ainsi obtenues et on montre qu'elles sont pivotales (par rapport aux paramètres de régression, à la variance des erreurs et possiblement aux coefficients autorégressifs). Étant donné que la distribution analytique de chacune d'elles est inconnue, nous proposons d'utiliser la technique des tests de Monte Carlo pour les rendre opérationnels.

Ce texte est subdivisé comme suit. La seconde section décrit le modèle et les notations utilisées. La troisième section étudie les méthodes d'estimation des résidus ou des résidus transformés et propose différentes statistiques de test. Enfin nous illustrons

ces approches par un exemple numérique équivalent à celui étudié dans Dufour et Neifar (1995 a) ainsi que par une application à un modèle du P.I.B réel tunisien. L'examen des différents résultats montre que certaines approches fondées sur le maximum de vraisemblance tronqué sont plus précises que la méthode basée sur les tests induits.

## 2. Modèle et notations

Considérons le modèle de régression avec erreurs autocorrélées suivant:

$$(2.1) \quad y_t = X_{1t} \beta_1 + \dots + X_{kt} \beta_k + u_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \dots + \phi_p u_{t-p} + e_t,$$

$$e_t \overset{\text{ind}}{\sim} N(0, \sigma^2), \quad \sigma > 0,$$

où  $y_t$  est une variable dépendante, les  $X_{it}$  sont des régresseurs fixes, les  $e_t$  sont des erreurs aléatoires mutuellement indépendantes,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)'$ ,  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$  et  $\sigma^2$  sont des paramètres inconnus. Il est facile de voir que la série  $y_1, \dots, y_T$  peut s'interpréter comme un segment de la série générée par le modèle

$$(2.2) \quad y_t = X_t \beta + u_t, \quad t = -p + 1, \dots, T,$$

$$= 0, \quad \text{pour } t \leq -p,$$

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \dots + \phi_p u_{t-p} + e_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$e_t \sim^{ind} N(0, \sigma^2), \sigma > 0,$$

où  $\underline{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{kt})$ ,  $y_0, \dots, y_{-p+1}$  et donc  $u_0, \dots, u_{-p+1}$  sont fixés de façon à reproduire les valeurs données de  $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}$ , et  $u_t = -\underline{X}_t \underline{\beta}$  pour  $t \leq -p$ .

La distribution du vecteur  $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_T)'$  conditionnelle à ses valeurs passées ne dépend pas des  $y_t, t \leq -p$ , et on peut donc fixer ces derniers à zéro sans perte de généralité.

Si on utilise la paramétrisation du lemme 2.1 dans Neifar et Dufour (1995 a), le modèle (2.1) peut aussi s'écrire

$$(2.3) \quad y_t = \underline{X}_t \underline{\beta} + u_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$u_t = \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 (1 - B) u_{t-1} + \dots + \theta_p (1 - B)^{p-1} u_{t-1} + e_t,$$

$$e_t \sim^{ind} N(0, \sigma^2), \sigma > 0,$$

où  $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$ ,  $\underline{\beta}$  et  $\sigma$  sont des paramètres inconnus. C'est cette paramétrisation que nous allons utiliser dans la suite de ce texte.

### 3. Test de l'hypothèse $H_0(\theta_0): \theta = \theta_0$

Nous allons maintenant étudier le problème qui consiste à tester l'hypothèse  $H_0(\theta_0): \theta = \theta_0$  où  $\theta_0 = (\theta_{10}, \dots, \theta_{p0})'$  contre l'alternative  $H_a(\theta_0): \theta \neq \theta_0$ . Pour ce faire nous allons étendre au modèle (2.3) l'approche de type maximum de vraisemblance étudiée dans Neifar et Dufour (1995 a). Nous proposons dans ce qui suit deux types d'approche qui sont basées sur des transformations différentes de l'équation autorégressive. La première consiste à régresser les erreurs transformées sur les erreurs transformées retardées, alors que la deuxième régresse des erreurs transformées sur des erreurs retardées. Chaque approche permet de tester une hypothèse équivalente à  $H_0(\theta_0)$ .

#### 3.1 Méthodes fondées sur des autorégressions de résidus transformés

##### 3.1.1 Approches fondées sur les moindres carrées ordinaires

L'équation autorégressive du modèle (2.3) peut s'écrire comme suit:

$$(3.1) \quad \bar{\Theta}(B)u_t = e_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\bar{\Theta}(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 (1 - B)B - \dots - \theta_p (1 - B)^{p-1} B$ , ou de façon équivalente

$$\frac{\bar{\Theta}(B)}{\bar{\Theta}_0(B)} \bar{\Theta}_0(B) u_t = e_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\bar{\Theta}_0(B) = 1 - \theta_{10}B - \theta_{20}(1 - B)B - \dots - \theta_{p0}(1 - B)^{p-1}B$ . Si on définit

$$(3.2) \quad \bar{\Psi}_0(B) = \frac{\bar{\Theta}(B)}{\bar{\Theta}_0(B)} = - \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\Psi}_j(\theta_0) B^j, \quad \bar{\Psi}_0(\theta_0) = -1, \quad u_t(\theta_0) = \bar{\Theta}_0(B) u_t,$$

L'équation (3.1) peut aussi s'écrire sous la forme

$$(3.3) \quad u_t(\theta_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Psi}_j(\theta_0) u_{t-j}(\theta_0) + e_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Il est clair que sous  $H_0(\theta_0)$  on a  $\bar{\Psi}_0(B) = 1$ , ce qui suggère de tester  $H_0(\theta_0)$  en testant

l'hypothèse

$$H_0(p_1): \bar{\Psi}_j^0 = 0, \quad j = 1, \dots, p_1,$$

dans le cadre du modèle

$$(3.4) \quad u_t(\theta_0) = \sum_{j=1}^{p_1} \bar{\Psi}_j^0 u_{t-j}(\theta_0) + e_t, \quad t = p_1 + 1, \dots, T$$

où  $p_1 \geq p$  et  $\bar{\Psi}_j^0 = \bar{\Psi}_j(\theta_0)$ .

Puisque les  $u_t(\theta_0)$  ainsi que les  $u_t$  ne sont pas observables, nous allons maintenant examiner différentes méthodes pour estimer les résidus et/ou les résidus transformés. Chacune d'entre elles conduit à une statistique différente pour tester

l'hypothèse nulle. En outre, il sera important de construire ces statistiques de façon à éliminer tout paramètre de nuisance de la distribution de ces statistiques (au moins sous l'hypothèse nulle). On doit en particulier éliminer le vecteur  $\beta$  des coefficients de régression. Pour ce faire, nous allons examiner trois méthodes différentes. La première consiste à considérer d'abord la régression originale, à estimer celle-ci sous la forme de  $p + 1$  régressions basées sur des ensembles d'observations légèrement décalées, puis à estimer les résidus de chaque régression et les résidus transformés. Algébriquement on peut résumer cette méthode d'élimination des paramètres de nuisance comme suit. A partir du modèle (2.2), on peut écrire  $p + 1$  régressions basées sur des ensembles d'observations légèrement décalées:

$$(3.5) \quad y_{(-j)} = X_{(-j)}\beta + u_{(-j)}, \quad j = 0, \dots, p$$

où  $y_{(-j)} = (y_{1-j}, \dots, y_{T-j})'$ ,  $X_{(-j)} = [X_{1(-j)}, \dots, X_{k(-j)}]$  est une matrice  $T \times k$ ,

$X_{i(-j)} = (X_{i(1-j)}, \dots, X_{i(T-j)})'$ ,  $i = 1, \dots, k$ , et  $u_{(-j)} = (u_{1-j}, \dots, u_{T-j})'$ . On peut ainsi

calculer  $p + 1$  vecteurs de résidus  $\hat{u}_{(-j)}$ :

$$(3.6) \quad \hat{u}_{(-j)} = M(X_{(-j)})y_{(-j)} = M(X_{(-j)})u_{(-j)}$$

$j = 0, \dots, p$ , où  $M(X_{(-j)}) = I - X_{(-j)}(X_{(-j)}'X_{(-j)})^{-1}X_{(-j)}'$ . Il est clair que la distribution de

ces derniers ne dépend pas de  $\beta$  ou  $\sigma$ . On considèrera alors les résidus transformés:

$$(3.7) \quad \hat{u}^{(1)}(\theta) = \hat{u} - \hat{u}_{(-1)}\phi_1 - \dots - \hat{u}_{(-p)}\phi_p.$$

La seconde méthode consiste à élargir la régression transformée par des régresseurs appropriés. Réécrivons le modèle (2.3) comme suit:

$$(3.8) \quad y_t(\theta) = X_t(\theta)\beta + u_t(\theta) = X_t(\theta)\beta + e_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$u_t(\theta) = e_t \sim \text{ind} N(0, \sigma^2)$$

où

$$y_t(\theta) = y_t - \theta_1 y_{t-1} - \theta_2 \tilde{y}_{t-2} - \dots - \theta_p \tilde{y}_{t-p}, \quad \tilde{y}_{t-j} = (1 - B)^{j-1} y_{t-1},$$

$$X_t(\theta) = (X_{1t}(\theta), \dots, X_{kt}(\theta)), \quad \tilde{X}_{j(t-1)} = (1 - B)^{j-1} X_{j(t-1)},$$

$$X_{jt}(\theta) = X_{jt} - \theta_1 X_{j(t-1)} - \theta_2 \tilde{X}_{j(t-2)} - \dots - \theta_p \tilde{X}_{j(t-p)}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Le modèle ainsi transformé peut s'écrire sous la forme compacte suivante:

$$(3.9) \quad \bar{\Theta}(B)y_t = \bar{\Theta}(B)X_t\beta + e_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

ou de façon équivalente,

$$\bar{\Psi}_0(B)\bar{\Theta}_0(B)y_t = \bar{\Theta}(B)X_t\beta + e_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\bar{\Psi}_0(B)$  satisfait les conditions (3.2). Si on définit  $\bar{\Theta}_0(B)y_t = y_t(\theta_0)$ , on obtient alors

la régression

$$(3.10) \quad y_t(\theta_0) = \bar{\Theta}(B)X_t\beta + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Psi}_j^0 y_{t-j}(\theta_0) + e_t, \quad t = 1, \dots, T.$$

Proposition 1: L'équation (3.10) peut s'écrire sous la forme matricielle:

$$(3.11) \quad y(\theta_0) = \bar{X} \bar{\theta} \beta + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Psi}_j^0 y_{(-j)}(\theta_0) + \varepsilon$$

où

$$\bar{X} = [X, X_{(-1)}, \bar{X}_{(-2)}, \dots, \bar{X}_{(-p)}], \quad \bar{X}_{(-j)} = (1 - B)^{j-1} X_{(-1)},$$

$$y_{(-j)}(\theta_0) = (y_{1-j}(\theta_0), \dots, y_{T-j}(\theta_0))', \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$y(\theta_0) = (y_1(\theta_0), \dots, y_T(\theta_0))', \quad \bar{\theta} = [1, -\theta]' \otimes I_k,$$

et  $\otimes$  est le produit de Kronecker. De plus, si on dénote  $\tilde{X}$  la matrice de plein rang dont les colonnes forment une base dans l'espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice  $\bar{X}$ , les erreurs transformées

$$(3.12) \quad \underline{u}^{(2)}(\theta_0) = M(\tilde{X})y(\theta_0) = M(\tilde{X})\underline{u}(\theta_0) = M(\tilde{X})\varepsilon$$

où

$$M(\tilde{X}) = I - \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}', \quad \underline{u}(\theta_0) = (u_1(\theta_0), \dots, u_T(\theta_0))'$$

et  $\underline{u}^{(2)}(\theta_0) = (\hat{u}_1(\theta_0), \dots, \hat{u}_T(\theta_0))'$  ont une distribution qui ne dépend pas de  $\beta$ ,  $\theta$  ou des conditions initiales (valeurs de  $u_0, u_{-1}, \dots, u_{-p}$ ).

La troisième méthode est fondée sur l'estimation de la régression transformée sous l'hypothèse nulle. Si  $\theta = \theta_0$  fixe, la régression (3.12) peut aussi s'écrire

$$(3.13) \quad y_t(\theta_0) = X_t(\theta_0) \beta + u_t(\theta_0), \quad t = 1, \dots, T$$

où

$$y_t(\theta_0) = y_t - \theta_{10}y_{t-1} - \theta_{20}\tilde{y}_{t-2} - \dots - \theta_{p0}\tilde{y}_{t-p}, \quad X_t(\theta_0) = (X_{1t}(\theta_0), \dots, X_{kt}(\theta_0)),$$

$$X_{jt}(\theta_0) = X_{jt} - \theta_{10}X_{j(t-1)} - \theta_{20}\tilde{X}_{j(t-2)} - \dots - \theta_{p0}\tilde{X}_{j(t-p)}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Alors les résidus

$$(3.14) \quad \hat{u}^{(3)}(\theta_0) = M [\bar{X}(\theta_0)] y(\theta_0) = M [\bar{X}(\theta_0)] u(\theta_0),$$

où  $M [\bar{X}(\theta_0)] = I - \bar{X}(\theta_0) [\bar{X}(\theta_0)' \bar{X}(\theta_0)]^{-1} \bar{X}(\theta_0)'$  et  $\bar{X}(\theta_0)$  est une matrice dont les colonnes engendrent le même espace que celui engendré par les colonnes de la matrice  $X(\theta_0)$ , ont une distribution qui ne dépend pas de  $\beta$ ,  $\sigma$  ou des conditions initiales (valeurs choisies pour  $u_0, u_{-1}, \dots, u_{-p}$ ). En effet, sous  $H_0(\theta_0)$ ,  $u_t(\theta_0) = e_t$  et donc  $\hat{u}(\theta_0) = M [\bar{X}(\theta_0)] \underline{e}$  où  $\underline{e} = (e_1, \dots, e_T)' \sim N [0, \sigma^2 I_T]$ . Il est clair que si une constante est présente dans la régression, le paramètre  $\beta_1$  (qui lui correspond) n'est pas identifiable lorsque  $\theta_{10} = 1$  ( $X_{1t}(\theta_0) = 1 - \theta_{10}$ ). Pour éviter ce problème, nous allons considérer le paramètre  $\bar{\beta}_1 = (1 - \theta_{10})\beta_1$  qui est identifiable pour tout vecteur  $\theta_0$ .

Si dans l'équation (3.4) nous remplaçons les erreurs  $u_t(\theta_0)$  par l'un des estimés  $\hat{u}_t^{(i)}(\theta_0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , nous pouvons alors tester  $H_0(\theta_0)$  en testant  $H_0(p_1)$  dans le cadre du modèle

$$(3.15) \quad \hat{u}_t^{(i)}(\theta_0) = \sum_{j=1}^{p_1} \bar{\Psi}_j^0 \hat{u}_{t-j}^{(i)}(\theta_0) + \hat{\varepsilon}_t, \quad t = p_1 + 1 + h, \dots, T,$$

au moyen d'une statistique de type Fisher:

$$(3.16) \quad F_{(i)}(\theta_0) = \frac{(T - p_1 - h) - p_1}{p_1} \left[ \frac{S_{(i)0}(\theta_0) - S_{(i)1}(\theta_0)}{S_{(i)1}(\theta_0)} \right], \quad i = 1, 2, 3$$

où  $h = p$  si  $i = 1$  ( $= 0$  sinon),  $S_{(i)0}(\theta_0)$  et  $S_{(i)1}(\theta_0)$  sont les sommes minimums de carrés des erreurs contraintes et non contraintes obtenues à partir de l'équation (3.15).

Les tests ainsi construits rejettent l'hypothèse nulle au niveau  $\alpha_1$  quand

$$F_{(i)}(\theta_0) \geq c_{(i)}(\alpha_1), \quad \text{où } c_{(i)}(\alpha_1) \text{ est tel que } P[F_{(i)}(\theta_0) \geq c_{(i)}(\alpha_1)] = \alpha_1.$$

Les distributions analytiques des statistiques  $F_{(i)}(\theta_0)$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont inconnues mais on peut les simuler facilement.

### 3.1.2 Approches fondées sur les moindres carrés contraints

L'équation (3.1) peut aussi s'écrire:

$$(3.17) \quad u_t(\theta_0) = \sum_{j=1}^{t-1} \psi_j(\phi_0) u_{t-j}(\theta_0) + e_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où les coefficients  $\psi_j(\phi_0)$  sont solution de l'équation

$$(3.18) \quad (1 - \sum_{j=1}^p \phi_{j0} B^j) (\sum_{k=0}^{\infty} -\psi_k^0 B^k) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j$$

où  $\psi_j^0 = \psi_j(\phi_0)$ ,  $\phi_j$  et  $\phi_{j0}$  vérifient (2.3b) [voir lemme 2.1 dans Neifar et Dufour

(1995 a)],  $j = 1, \dots, p$ . On voit alors que ces coefficients sont contraints par les relations linéaires suivantes:

$$\psi_0^0 = -1, \quad \psi_k^0 = \phi_k + \sum_{j=1}^k \phi_{j0} \psi_{k-j}^0, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$\psi_k^0 = \sum_{j=1}^p \phi_{j0} \psi_{k-j}^0, \quad k \geq p + 1.$$

En utilisant les propositions 1 et 2 dans Neifar et Dufour (1995 a), le modèle (3.17) peut s'écrire comme suit:

$$(3.19) \quad \underline{u}(\theta_0) = \tilde{Z}(\theta_0) \bar{\Psi}^0(p) + \underline{\varepsilon}$$

où

$$\tilde{Z}(\theta_0) = [z_1(\theta_0), \dots, z_p(\theta_0)], \quad \bar{\Psi}^0(p) = (\psi_1^0, \dots, \psi_p^0)',$$

$$\underline{u}(\theta_0) = (u_{p+1}(\theta_0), \dots, u_T(\theta_0))',$$

$$z_j(\theta_0) = \Gamma_j(\phi_0) \underline{U}_{-j}(\theta_0), \quad \underline{U}_{-j}(\theta_0) = (u_1(\theta_0), \dots, u_{T-j}(\theta_0))'$$

$$\bar{\Gamma}_j(\phi_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta_{p+1,j} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \delta_{p+2,j} & \delta_{p+1,j} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \delta_{T-1,j} & \delta_{T-2,j} & \dots & \delta_{p+2,j} & \delta_{p+1,j} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(T-p) \times (T-j)}, \quad j = 1, \dots, p,$$

$\delta_{i,j}$  est le  $j^{\text{ième}}$  élément du vecteur ligne  $\delta'_i$ ,  $\delta'_i = \mathbf{1}'_p C^{i-p}$ ,  $\mathbf{1}_p = (0, \dots, 0, 1)_{p \times 1}$ ,

$\delta_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{ip})'$ ,  $i = p + 1, \dots, T - 1$  et

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \phi_{p0} & \phi_{(p-1)0} & \dots & \phi_{10} & \dots & \dots \end{bmatrix}_{p \times p}$$

Sous l'hypothèse nulle,  $\psi_j^0 = 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Ce qui suggère de tester  $H_0(\theta_0)$  en

testant l'hypothèse

$$(3.20) \quad \bar{H}_0(p): \psi_j^0 = 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

dans le cadre du modèle (3.19).

Si nous remplaçons maintenant  $\mu(\theta_0)$  par l'un des estimés, nous pouvons tester

l'hypothèse  $\bar{H}_0(p)$  dans le cadre du modèle

$$(3.21) \quad \hat{u}_t^{(i)}(\theta_0) = \sum_{j=1}^p \bar{\Psi}_j^0 \hat{z}_{jt}^{(i)}(\theta_0) + \hat{e}_t, \quad t = p + 1 + h, \dots, T, \quad i = 1, 2, 3,$$

au moyen d'une statistique de type Fisher dont la distribution ne dépend pas de  $\beta$  et  $\sigma$ , mais qui dépend de  $\theta_0$  :

$$(3.22) \quad F_{(3+i)}(\theta_0) = \frac{(T - p - h) - p}{p} \left[ \frac{S_{(3+i)0}(\theta_0)}{S_{(3+i)1}(\theta_0)} - 1 \right], \quad i = 1, 2, 3$$

où  $h = p$  si  $i = 1$  ( $= 0$  sinon),  $S_{(3+i)0}(\theta_0)$  et  $S_{(3+i)1}(\theta_0)$  sont les sommes minimums des carrés des erreurs contraintes et non contraintes obtenues à partir de l'équation (3.21).  
chaque test rejette l'hypothèse nulle au niveau  $\alpha_1$  quand  $F_{(3+i)}(\theta_0) \geq c_{(3+i)}(\alpha_1)$ , où  $c_{(3+i)}(\alpha_1)$  est tel que

$$P[F_{(3+i)}(\theta_0) \geq c_{(3+i)}(\alpha_1)] = \alpha_1.$$

Les distributions analytiques des statistiques  $F_{(j)}(\theta_0)$ ,  $j = 4, 5, 6$  sont inconnues mais on peut les simuler facilement.

### 3.2 Méthodes fondées sur des régressions de résidus transformés sur des résidus

Pour tester l'hypothèse  $H_0(\theta_0)$ :  $\theta = \theta_0$ , réécrivons maintenant l'équation (3.1)

comme suit:

$$(3.23) \quad u_t(\theta_0) = (\theta_1 - \theta_{10})u_{t-1} + (\theta_2 - \theta_{20})(1 - B)u_{t-1} + \dots +$$

$$(\theta_p - \theta_{p0})(1 - B)^{p-1}u_{t-1} + e_t, t = 1, \dots, T.$$

Sous  $H_0(\theta_0)$ , on a  $\theta_i - \theta_{i0} = 0, i = 1, \dots, p$ , et alors on peut tester l'hypothèse équivalente

$$H_0(p): \theta_i^* = 0, i = 1, \dots, p$$

où  $\theta_i^* = \theta_i - \theta_{i0}$ , dans le cadre du modèle

$$(3.24) \quad u_t(\theta_0) = \sum_{j=1}^p \theta_j^* u_{t-j} + e_t, t = 2p + 1, \dots, T.$$

Puisque les  $u_t$  ne sont pas observables, on les remplacera par des estimateurs appropriés. Afin d'obtenir des statistiques de tests qui ne dépendent pas des conditions initiales [valeurs choisies pour  $u_0, u_{-1}, \dots, u_{-p}$ ], nous avons éliminé  $p$  observations supplémentaires. Les matrices des régresseurs fixes et les vecteurs transformés et non transformés seront donc écourtées de  $p$  autres observations.

Si nous remplaçons maintenant les  $u_j$  par leurs estimés  $\hat{u}_{(-j)}$ ,  $j = 0, \dots, p$  et  $u(\theta_0)$  par un des estimateurs  $\hat{u}^{(i)}(\theta_0)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tels que calculés plus haut, dans l'équation (3.24), nous pouvons alors tester l'hypothèse  $H_0(p)$  dans le cadre du modèle

$$(3.25) \quad \hat{u}_t^{(i)}(\theta_0) = \sum_{j=1}^p \theta_j^* \hat{u}_{t-j} + e_t, t = 2p + 1, \dots, T, i = 1, 2, 3$$

au moyen de la statistique

$$(3.26) \quad F_{(6+i)}(\underline{\theta}_0) = \frac{(T - 2p) - p}{p} \left[ \frac{S_{(6+i)0}(\underline{\theta}_0)}{S_{(6+i)1}(\underline{\theta}_0)} - 1 \right], \quad i = 1, 2, 3$$

où  $S_{(6+i)0}(\underline{\theta}_0)$  et  $S_{(6+i)1}(\underline{\theta}_0)$  sont les sommes minimums des carrés des erreurs contraintes

et non contraintes correspondantes. Ces statistiques ne dépendent ni de  $\beta$  ni de  $\sigma$ .

Chaque test rejette l'hypothèse nulle au niveau  $\alpha_1$  quand  $F_{(6+i)}(\underline{\theta}_0) \geq c_{(6+i)}(\alpha_1)$ , où

$c_{(6+i)}(\alpha_1)$  est tel que

$$P[F_{(6+i)}(\underline{\theta}_0) \geq c_{(6+i)}(\alpha_1)] = \alpha_1.$$

On notera de nouveau que les distributions analytiques des statistiques

$F_{(j)}(\underline{\theta}_0)$ ,  $j = 7, 8, 9$  sont également inconnues mais qu'on peut les simuler facilement.

Si on emploie l'un des tests ainsi construits plus haut, l'hypothèse  $H_0(\underline{\theta}_0): \underline{\theta} = \underline{\theta}_0$  n'est pas rejetée lorsque

$$F_{(j)}(\underline{\theta}_0) \leq c_{(j)}(\alpha_1)$$

où  $j = 1, \dots, 9$ ,  $F_{(j)}(\underline{\theta}_0)$  et  $c_{(j)}(\alpha_1)$  sont successivement la statistique utilisée et le point

critique correspondant. Par conséquent, l'ensemble des valeurs  $\underline{\theta}_0$  qui ne sont pas

rejetées par la procédure choisie

$$I = \{ \underline{\theta}_0: F_{(j)}(\underline{\theta}_0) \leq c_{(j)}(\alpha_1) \}, \quad j = 1, 2, \dots, 9,$$

est une région de confiance de niveau  $1 - \alpha_1$ , avec

$$P[\theta \in I] \geq 1 - \alpha_1.$$

#### 4. Illustrations numériques

Dans ce qui suit, nous allons appliquer les différentes approches développées plus haut à des données artificiellement engendrées par le modèle suivant:<sup>2</sup>

$$(4.1) \quad y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + u_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$u_t = \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 (u_{t-1} - u_{t-2}) + e_t,$$

$$\beta_1 = 10.0, \beta_2 = \beta_3 = 1.0, \theta_1 = -0.9, \theta_2 = 0.0, T = 47$$

où les variables  $x_{2t}$  et  $x_{3t}$  sont générées par les processus suivants:

$$x_{2t} = 5x_{2t-1} + v_{2t}, \quad x_{3t} = t + v_{3t}, \quad x_{20} = v_{20}/\sqrt{0.75},$$

$$v_{2t} \sim^{ind} N(0.0, 1.0), \quad v_{3t} \sim^{ind} N(0.0, 10.0), \quad t = 1, \dots, T,$$

$v_{2t}$  et  $v_{3t}$  sont indépendants, les  $u_t$  sont autocorrélés d'ordre deux et  $e_t \sim^{ind} N(0.0, 4.0)$ . Si on estime ce modèle par maximum de vraisemblance conditionnel [le logiciel utilisé est Shazam], en laissant tomber les deux premières observations, nous obtenons les résultats suivants:

---

<sup>2</sup>Ce modèle est équivalent au modèle utilisé dans Dufour et Neifar (1995 a).

$$(4.2) \quad y_t = 9.9095 + 0.87069 x_{2t} + 1.0983 x_{3t} + \hat{u}_t, \quad R^2 = 0.929$$

$$\quad \quad \quad (0.238) \quad (0.0952) \quad (0.0856)$$

$$\hat{\theta}_1 = -1.10052, \quad \hat{\theta}_2 = 0.07586$$

$$\quad \quad \quad (0.2937) \quad (0.148627)$$

$$SSE = 101.03, \quad SSR = 1321.4, \quad SST = 1422.4, \quad d_1 = 1.995496, \quad d_2 = 1.758913.$$

Les valeurs entre parenthèses sont des écarts-types; voir Tableau I(3) "page 144" pour les intervalles de confiance asymptotiques avec les niveaux de signification usuels  $\alpha_1 = \alpha_2 = .05$  [ $\alpha_1$  pour les coefficients autorégressives et  $\alpha_2$  pour les paramètres de régression] et la figure 11 "page 158" pour la région de confiance simultanée pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Nous attribuons des niveaux de signification égaux pour les coefficients autorégressives  $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_1/2 = 0.025$ . Nous permettons aux racines du processus autorégressif dans les erreurs de se trouver sur le cercle unité [ $-3 \leq \theta_1 \leq 1$ ,  $|\theta_2| \leq 1$ ,  $2\theta_2 + \theta_1 \geq -1$ ]. Les régions de confiance pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  obtenues par l'application des différentes méthodes proposées dans la section 3 sont présentées sur les figures 1 à 9 "pages 148 à 156" tandis que les intervalles de confiance correspondants (obtenus par projection) sont dans le tableau II[(1) et (2)] "pages 143 et 144" (de même pour les coefficients de régression). L'examen des différentes figures, nous permet de conclure que les régions de confiance les plus précises sont obtenues à l'aide des statistiques de test  $F_{(5)}(\theta_0)$ ,  $F_{(6)}(\theta_0)$  et  $F_{(7)}(\theta_0)$ . Cependant, chaque région contient les vrais paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  du modèle simulé.

Afin de comparer ces résultats avec ceux obtenus par l'application de l'approche basée sur des tests induits [proposée par Dufour et Neifar (1995 a)]. Nous rapportons ces derniers au tableau I(4) "page 145" et figure 10 "page 157". Il est à noter que la région ainsi obtenue est assez précise. Elle contient aussi les vrais paramètres autorégressifs du modèle simulé et elle est comparable aux régions obtenues à l'aide des statistiques de test  $F_{(5)}(\theta_0)$ ,  $F_{(6)}(\theta_0)$  et  $F_{(7)}(\theta_0)$ .

Dans ce qui suit, nous allons appliquer ces derniers à un modèle du P.I.B réel tunisien.

### 5. Application à un modèle du P.I.B réel tunisien

L'analyse de la série du P.I.B réel tunisien avec les techniques de Box et Jenkins (1976) suggère que la série  $y_t = \log(P.I.B_t)$  suit un processus AR(2); voir Dufour et Neifar (1995 b). Nous réécrivons le processus  $y_t$  comme suit:

$$(5.1) \quad y_t = \beta_1 + u_t, \quad u_t = \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 (u_{t-1} - u_{t-2}) + e_t,$$

$$e_t \sim^{ind} N[0, \sigma^2].$$

Remarquons que dans ce cas, les statistiques  $F_5(\theta_0)$  et  $F_6(\theta_0)$  sont équivalentes. Si on applique maintenant les statistiques de test  $F_{(5)}(\theta_0)$  (ou bien  $F_6(\theta_0)$ ) et  $F_{(7)}(\theta_0)$  au

modèle (5.1),<sup>3</sup> par inversion, nous obtenons les régions de confiance sur les figures 12 "page 159" et 13 "page 160". Au tableau II(1) "page 146", on présente les intervalles de confiance simultanés obtenus par projection sur les axes, ainsi que les intervalles de confiance pour la constante. Toutes les tests acceptent l'hypothèse de racine unitaire  $\theta_1 = 1$ . L'application des tests induits (calcul par Imhof) nous offre la région de confiance de la figure 14 "page 161". Cette région est plus précise pour  $\theta_1$  que pour  $\theta_2$ , elle est comparable à la région de la figure 12 "page 159". La région obtenue à l'aide de la septième statistique (voir figure 13) est assez précise pour le paramètre  $\theta_1$  que pour  $\theta_2$ . Les intervalles de confiances correspondants sont au tableau II(1) et (2) "page 146". L'estimation du modèle (5.1) par maximum de vraisemblance conditionnel (en laissant tomber les deux premières observations) nous offre les résultats suivants:

$$y_t = 10.627 + \hat{u}_t$$

(0.1955)

$$\hat{u}_t = 0.96559 \hat{u}_{t-1} - 0.26506 (\hat{u}_{t-1} - \hat{u}_{t-2}) + \hat{e}_t$$

(0.05385)            (0.17604)

La région de confiance asymptotique pour  $\theta$  est sur la figure 15 "page 162". Les intervalles de confiance asymptotiques sont au tableau II(2) "page 146".

Si on ajoute une tendance à la régression du modèle (5.1), on obtient le modèle

---

<sup>3</sup>On a appliqué les différents tests proposés au modèle du P.I.B réel tunisien. L'examen des différentes figures, nous a permis de conclure que ces statistiques donnent les résultats les plus précis.

suivant:

$$(5.2) \quad y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t, \quad u_t = \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 (u_{t-1} - u_{t-2}) + e_t,$$

$$e_t \stackrel{\text{ind}}{\sim} N[0, \sigma^2].$$

Remarquons dans ce cas aussi, les statistiques  $F_5(\theta_0)$  et  $F_6(\theta_0)$  sont équivalentes. Si on applique maintenant les statistiques de test  $F_{(5)}(\theta_0)$  (ou bien  $F_6(\theta_0)$ ) et  $F_{(7)}(\theta_0)$  au modèle, par inversion, nous obtenons les régions de confiance (de niveau de signification  $\alpha_1 = 0.05$ ) des figures 16 "page 163" et 17 "page 164". Les intervalles de confiance simultanés obtenus par projection sur les axes sont au tableau III(1) "page 147"; ces intervalles sont dits "simultanés" (au niveau  $1 - \alpha_1$ ) parce que la probabilité que les coefficients  $\theta_1$  et  $\theta_2$  soient conjointement couverts par ces intervalles est plus grand ou égale à  $1 - \alpha_1$ . Le test induit nous permet de construire la région de confiance de la figure 18 "page 165", elle ressemble aux figures 16 et 17. L'estimation par maximum de vraisemblance conditionnel (en laissant tomber les deux premières observations) du modèle (5.2) donne les résultats asymptotiques suivants:

$$y_t = 7.9952 + 0.044708 t + \hat{u}_t$$

$$(0.1583) \quad (0.005846)$$

$$\hat{\theta}_1 = 0.86741, \quad \hat{\theta}_2 = -0.21504.$$

$$(0.1036) \quad (0.178297)$$

La région de confiance asymptotique au niveau 0.95 est sur la figure 19 "page 166".

Les intervalles de confiance correspondants sont au tableau III(2) "page 147". Il est à

noter que tous les tests exacts acceptent l'hypothèse de racine unitaire:  $\theta_1 = 1$ . Les régions obtenues pour les paramètres autorégressifs du modèle (5.1) sont plus précises que celles du modèle (5.2). Cependant dans les deux cas, toutes les régions de confiance sont précises pour le paramètre  $\theta_1$  mais rarement pour  $\theta_2$ .

Tableau I "exemple numérique"  
 Intervalles de confiance pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
 et pour les paramètres de régression

$$\theta_1 = -0.9, \theta_2 = 0.0, \bar{\beta}_1 = (1 - \theta_1)\beta_1 = 19, p = 2, k = 3, T = 47$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.05, N = 100$$

1) Résultats des méthodes fondées sur des autorégressions de résidus transformés

a) Résultats de l'approche fondée sur les moindres carrés ordinaires ( $p_1 = 5$ )

| Paramètres      | Statistique<br>$F_{(1)}(\theta_0)$ | Statistique<br>$F_{(2)}(\theta_0)$ | Statistique<br>$F_{(3)}(\theta_0)$ |
|-----------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| $\theta_1$      | [-2.99, 0.99]                      | [-2.99, 0.99]                      | [-2.99, 0.99]                      |
| $\theta_2$      | [-0.99, 0.99]                      | [-0.99, 0.99]                      | [-0.99, 0.99]                      |
| $\bar{\beta}_1$ | [-10.96, 36.93]                    | [-4.87, 40.44]                     | [-9.65, 40.43]                     |
| $\beta_2$       | [-0.24, 7.14]                      | [-0.44, 4.58]                      | [-0.33, 6.95]                      |
| $\beta_3$       | [-1.42, 14.04]                     | [-1.38, 11.75]                     | [-1.38, 12.58]                     |

b) Résultats de l'approche fondée sur les moindres carrés contraints

| Paramètres      | Statistique<br>$F_{(4)}(\theta_0)$ | Statistique<br>$F_{(5)}(\theta_0)$ | Statistique<br>$F_{(6)}(\theta_0)$ |
|-----------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| $\theta_1$      | [-2.99, 0.99]                      | [-1.99, -0.09]                     | [-1.88, -0.29]                     |
| $\theta_2$      | [-2.99, 0.99]                      | [-0.44, 0.49]                      | [-0.33, 0.44]                      |
| $\bar{\beta}_1$ | [-9.05, 31.18]                     | [9.52, 31.05]                      | [11.61, 30.03]                     |
| $\beta_2$       | [-0.17, 7.01]                      | [0.61, 1.28]                       | [0.62, 1.22]                       |
| $\beta_3$       | [-0.72, 13.66]                     | [0.69, 1.52]                       | [0.77, 1.43]                       |

(Suite du Tableau I)

2) Résultats de la méthode fondée sur des régressions de résidus transformés sur des résidus

| Paramètres      | Statistique<br>$F_{(7)}(\theta_0)$ | Statistique<br>$F_{(8)}(\theta_0)$ | Statistique<br>$F_{(9)}(\theta_0)$ |
|-----------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| $\theta_1$      | [-2.39, 0.10]                      | [-2.99, 0.99]                      | [-2.99, 0.99]                      |
| $\theta_2$      | [-0.50, 0.69]                      | [-0.99, 0.99]                      | [-0.99, 0.99]                      |
| $\bar{\beta}_1$ | [7.33, 34.69]                      | [-8.62, 41.69]                     | [-6.04, 47.55]                     |
| $\beta_2$       | [0.60, 1.33]                       | [-0.45, 6.29]                      | [-1.42, 8.64]                      |
| $\beta_3$       | [0.61, 1.67]                       | [-1.04, 14.57]                     | [-2.42, 5.06]                      |

3) Résultats asymptotiques

| Paramètres | $t_{.05/2p}(42) = 2.325$ | $F_{.05}(2, 42) = 3.15$ |
|------------|--------------------------|-------------------------|
| $\theta_1$ | [-1.8369, -0.3641]       | [-1.7833, -0.4178]      |
| $\theta_2$ | [-0.2972, 0.4489]        | [-0.2696, 0.4214]       |
| $\beta_1$  | [9.43, 10.39]            | [9.43, 10.39]           |
| $\beta_2$  | [0.68, 1.06]             | [0.68, 1.06]            |
| $\beta_3$  | [0.93, 1.27]             | [0.93, 1.27]            |

Pour la deuxième colonne les intervalles de confiance des paramètres autorégressives sont construits par projection de l'ellipsoïde (figure 11) sur les axes.

(Suite du tableau I)

## 4) Résultats du test induit

| Paramètres      | Calculs par Imhof |
|-----------------|-------------------|
| $\theta_1$      | [-2.04, -0.34]    |
| $\theta_2$      | [-0.31, 0.62]     |
| $\bar{\beta}_1$ | [12.41, 31.20]    |
| $\beta_2$       | [0.62, 1.19]      |
| $\beta_3$       | [0.81, 1.38]      |

Tableau II "modèle (5.1)"  
 Intervalles de confiance pour  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\tilde{\beta}_1$

1)

| Paramètres        | Statistique $F_{(5)}(\theta_0)$ | Statistique $F_{(7)}(\theta_0)$ |
|-------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $\theta_1$        | [0.81, 0.99]                    | [0.91, 0.99]                    |
| $\theta_2$        | [-0.99, 0.99]                   | [-0.889, 0.68]                  |
| $\tilde{\beta}_1$ | [0.106, 1.77]                   | [0.085, 0.888]                  |

2)

| Paramètres        | test induit       | résultats asymptotiques |
|-------------------|-------------------|-------------------------|
| $\theta_1$        | [0.92, 0.99]      | [0.855, 1.076]          |
| $\theta_2$        | [-0.95, 0.99]     | [-0.625, 0.0949]        |
| $\tilde{\beta}_1$ | [0.0954, 0.77204] | [10.227, 11.027]        |

CENTRE DE DOCUMENTATION  
 05 MARS 1996  
 SCIENCES ECONOMIQUES U de M

Tableau III "modèle (5.2)"  
 Intervalles de confiance pour  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\tilde{\beta}_1$  et  $\beta_2$

1)

| Paramètres        | Statistique $F_{(5)}(\theta_0)$ | Statistique $F_{(7)}(\theta_0)$ |
|-------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $\theta_1$        | [0.34, 0.99]                    | [0.52, 0.99]                    |
| $\theta_2$        | [-0.99, 0.99]                   | [-0.91, 0.89]                   |
| $\tilde{\beta}_1$ | [-0.166, 5.186]                 | [-0.115, 3.813]                 |
| $\beta_2$         | [-0.377, 0.382]                 | [-0.452, 0.415]                 |

2)

| Paramètres        | Test induit      | Résultats asymptotique |
|-------------------|------------------|------------------------|
| $\theta_1$        | [0.49, 0.99]     | [0.655, 1.079]         |
| $\theta_2$        | [-0.99, 0.99]    | [-0.58, 0.15]          |
| $\tilde{\beta}_1$ | [-0.0394, 4.017] | [7.671, 8.3195]        |
| $\beta_2$         | [-0.373, 0.269]  | [0.0327, 0.0567]       |

Figure 1: "exemple numérique"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(1)}(\theta_0)$ "

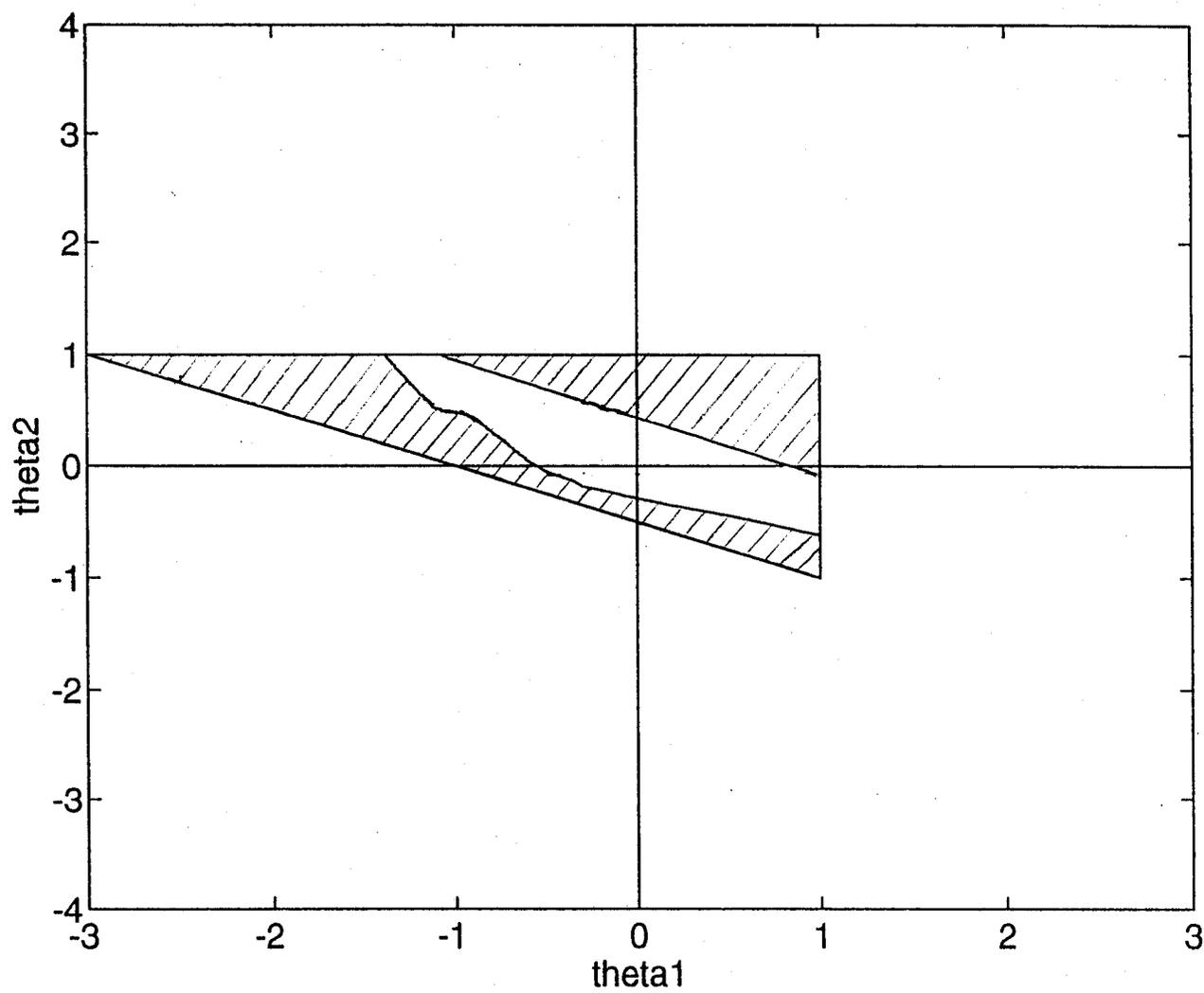


Figure 2: "exemple numérique"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(2)}(\theta_0)$ "

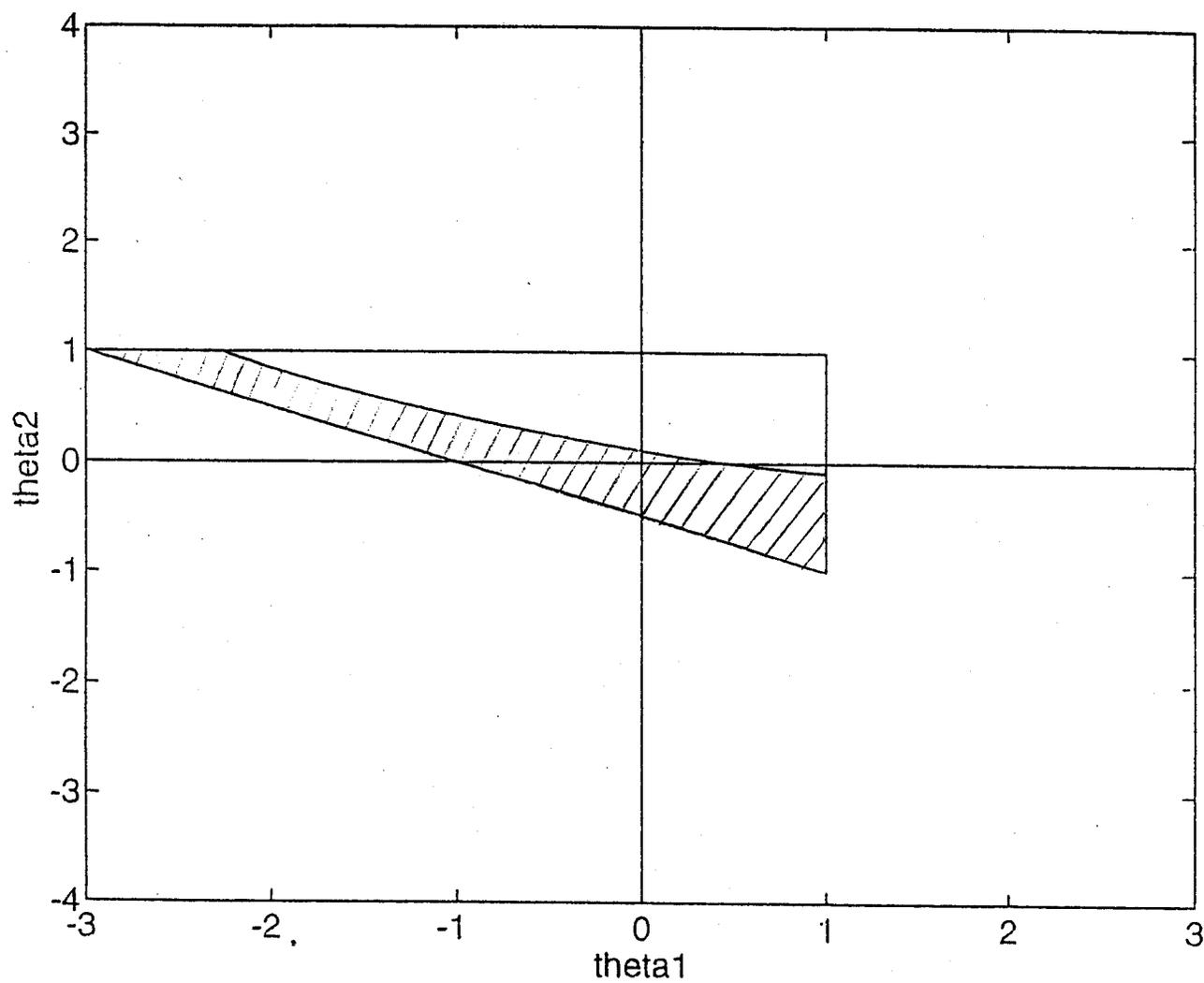


Figure 3: "exemple numérique"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(3)}(\theta_0)$ "

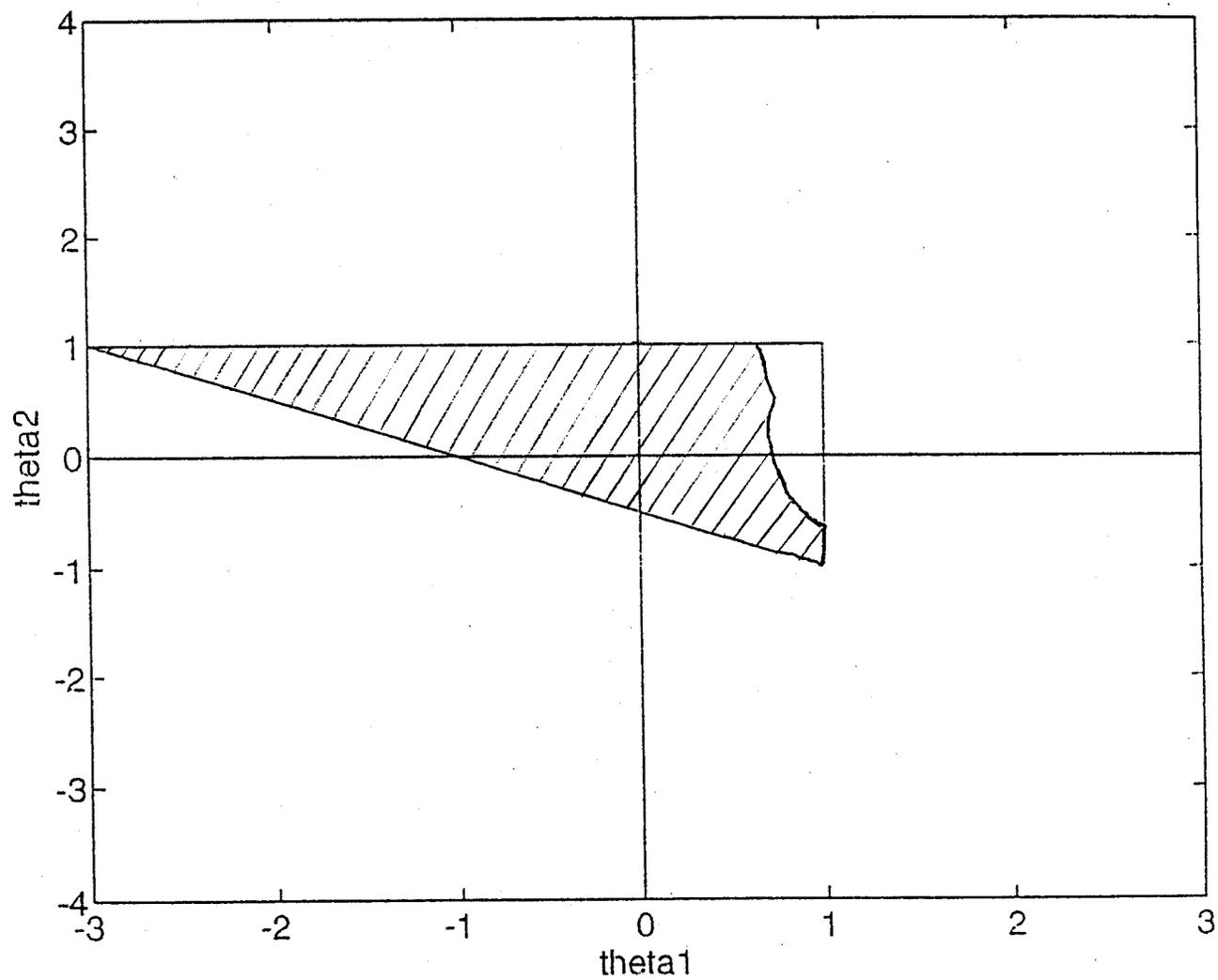


Figure 4: "exemple numérique"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(4)}(\theta_0)$ "

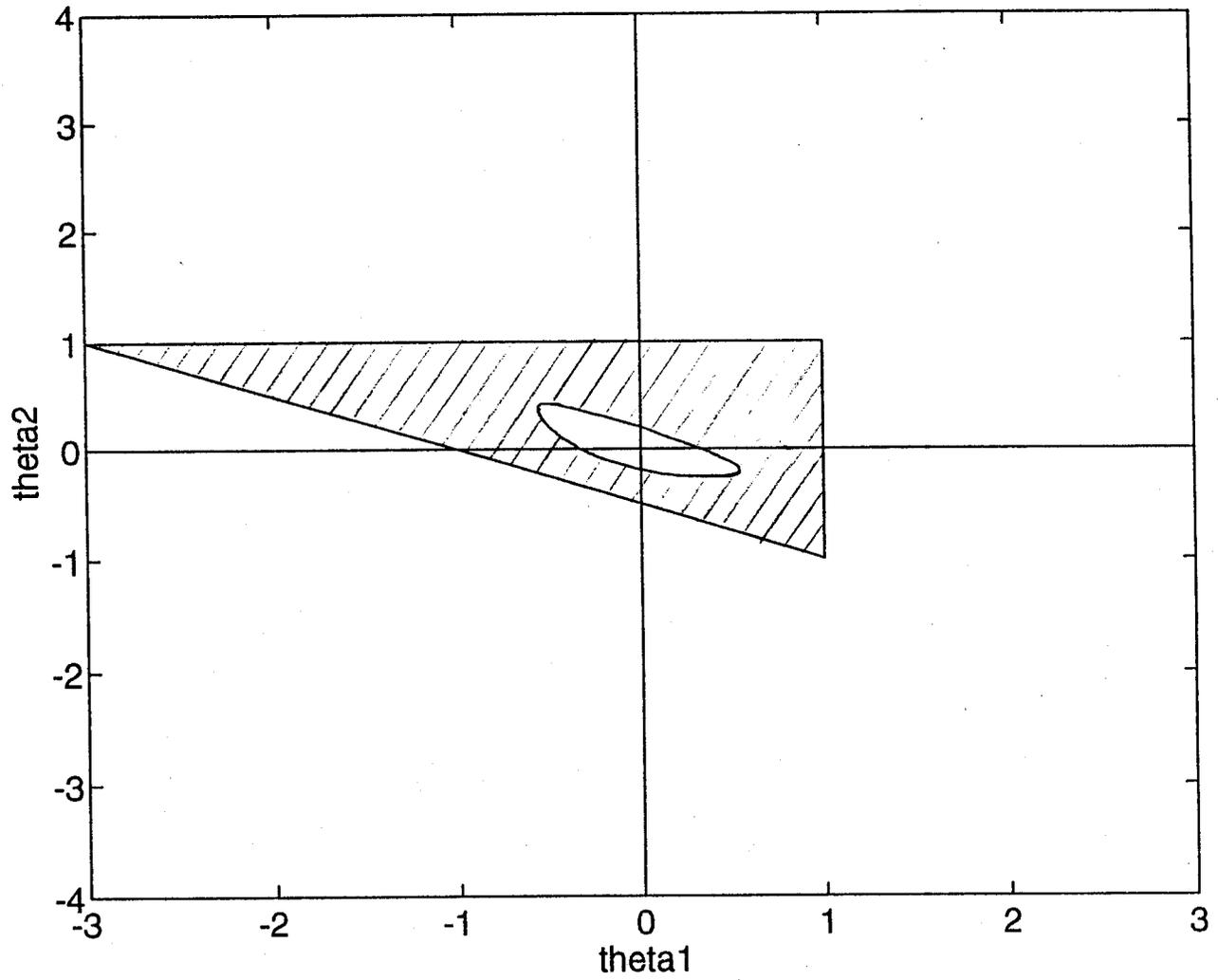


Figure 5: "exemple numérique"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(5)}(\theta_0)$ "

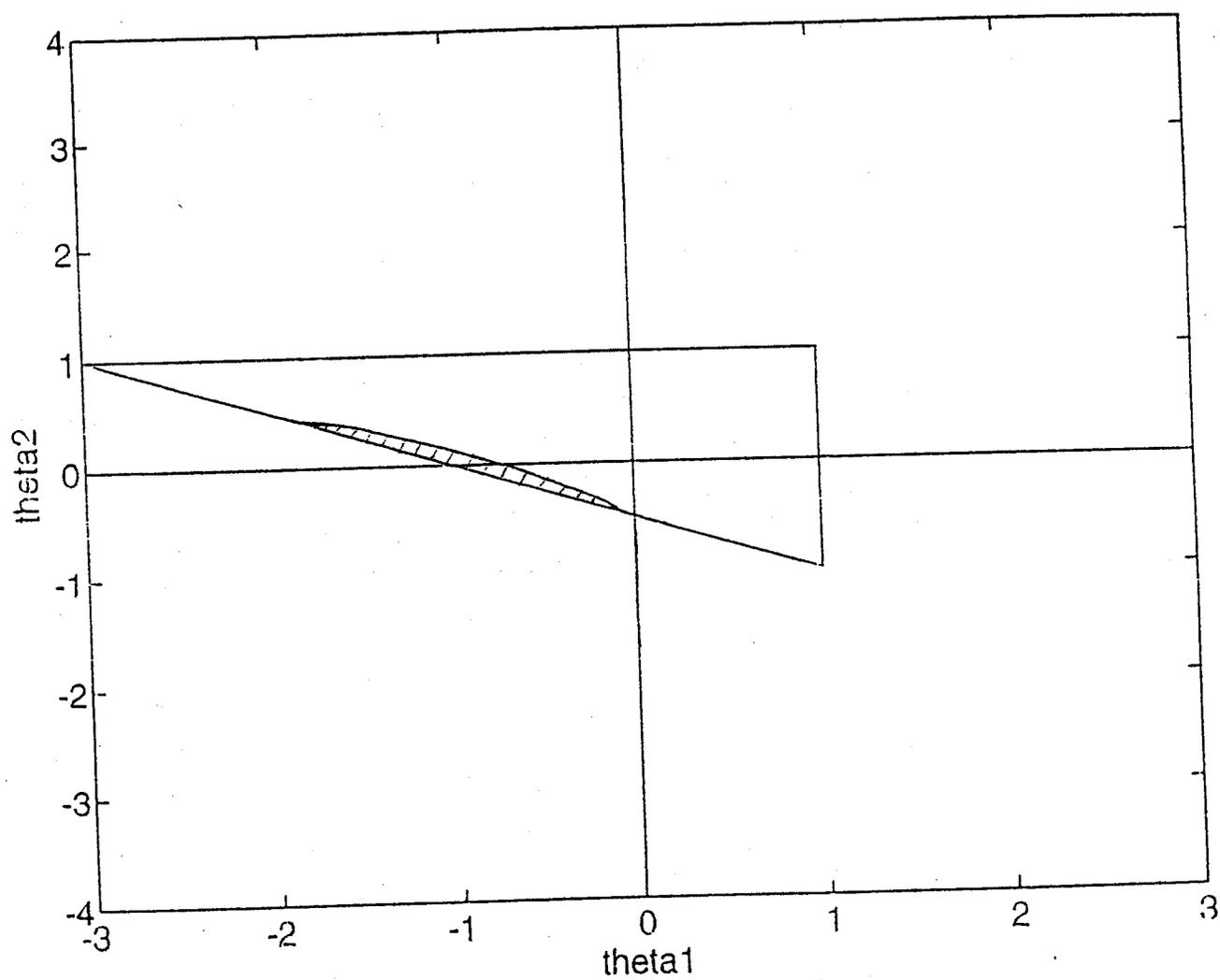


Figure 6: "exemple numérique"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(6)}(\theta_0)$ "

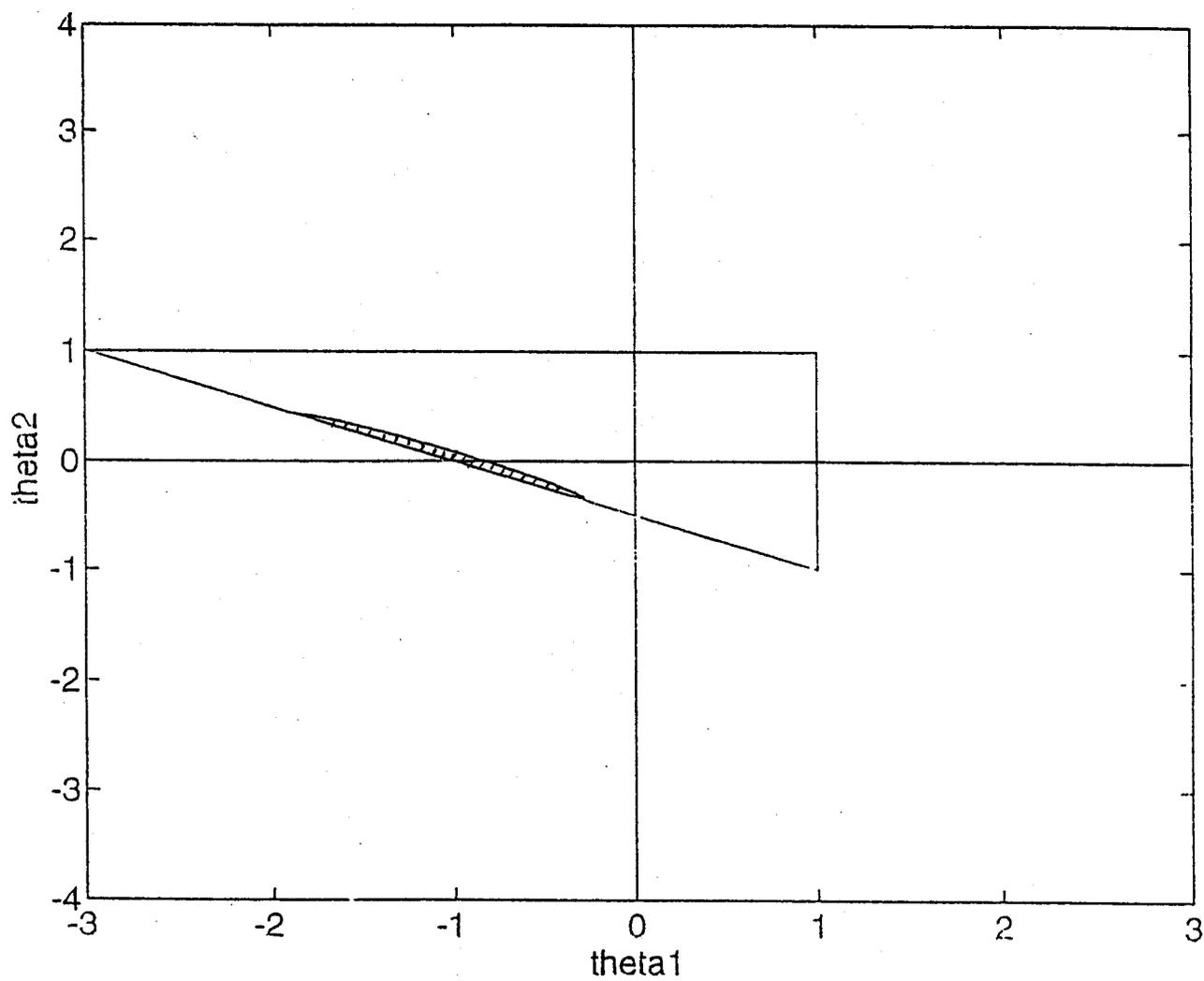


Figure 7: "exemple numérique"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(7)}(\theta_0)$ "

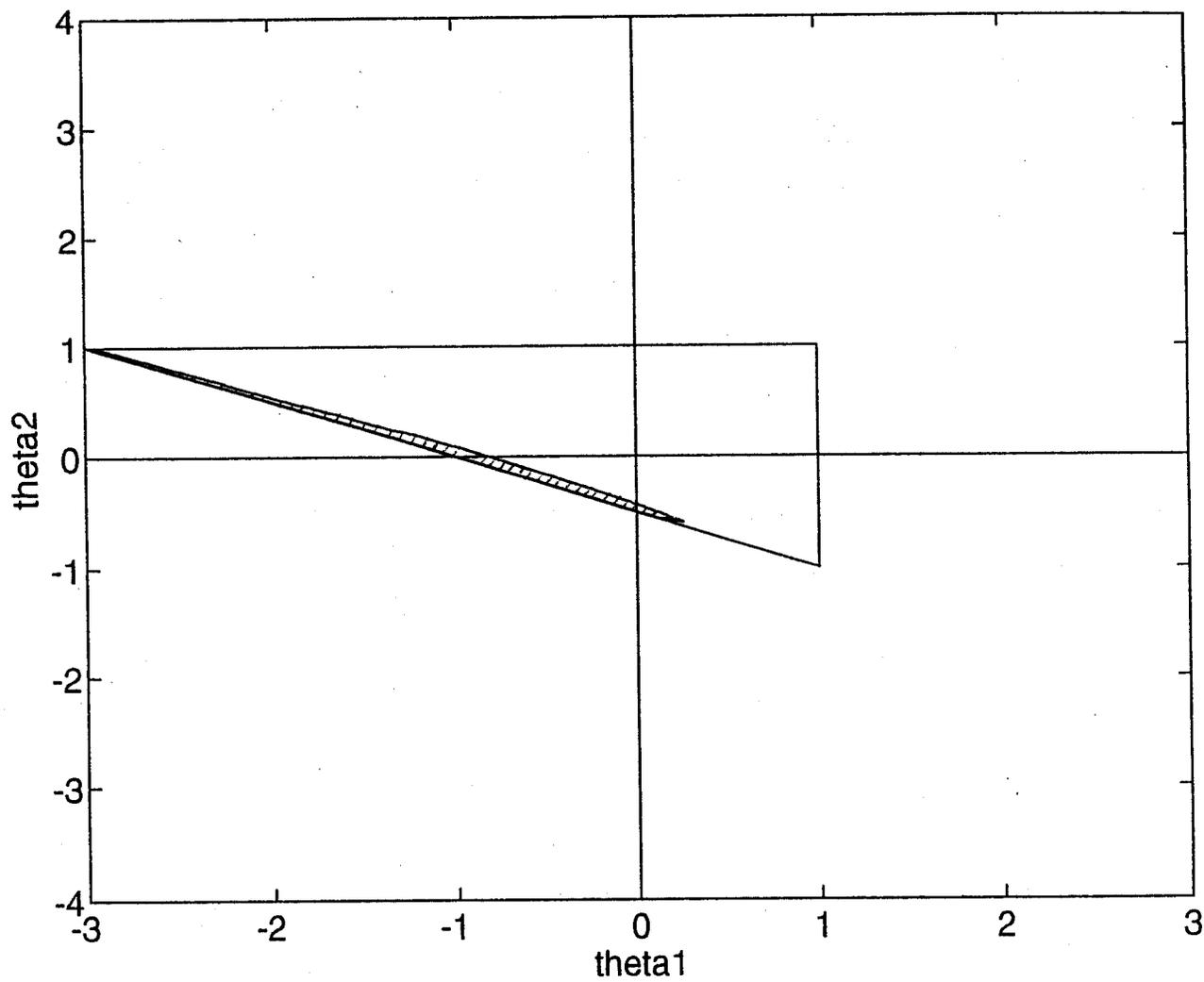


Figure 8: "exemple numérique"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(8)}(\theta_0)$ "

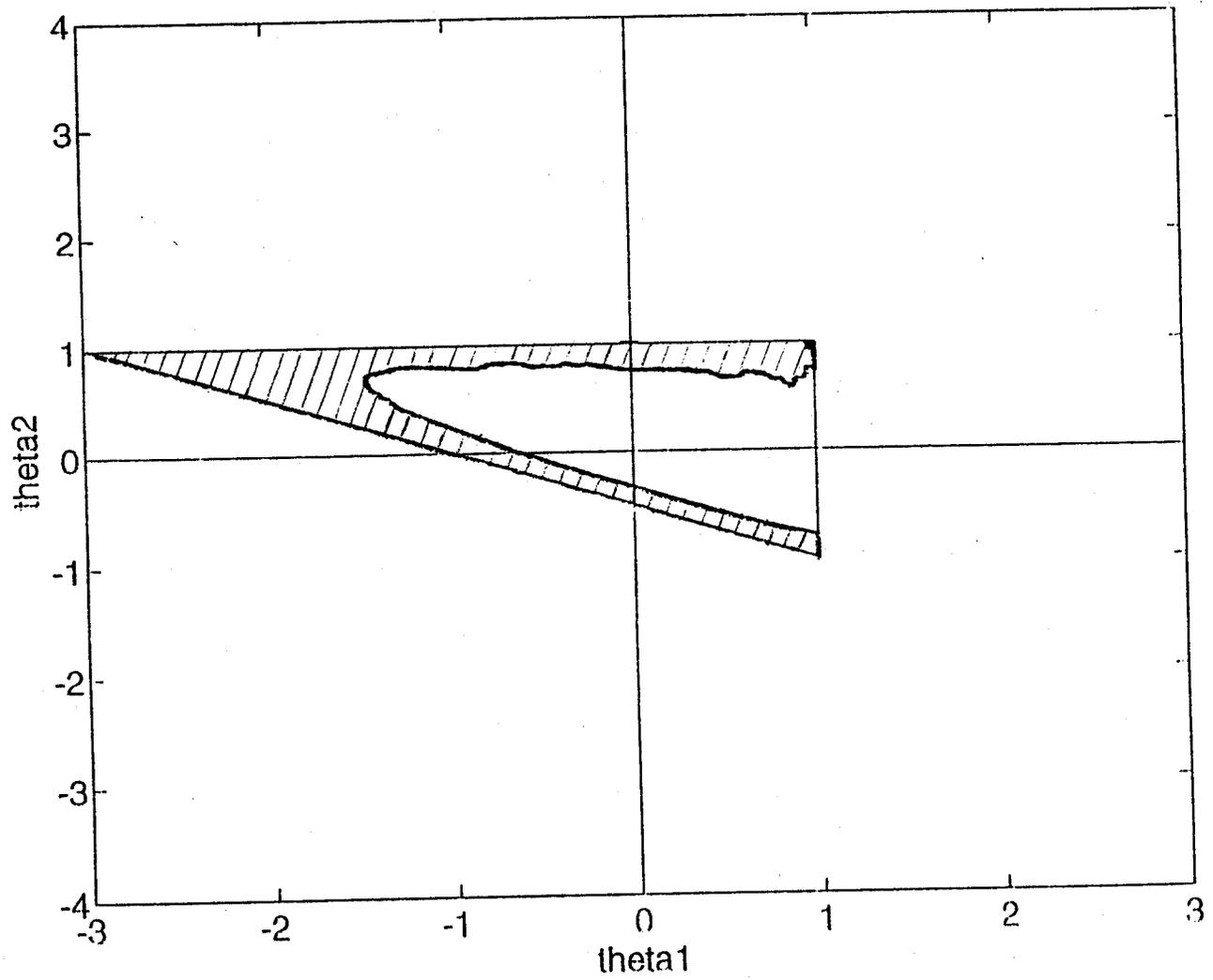


Figure 9: "exemple numérique"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(9)}(\underline{\theta}_0)$ "

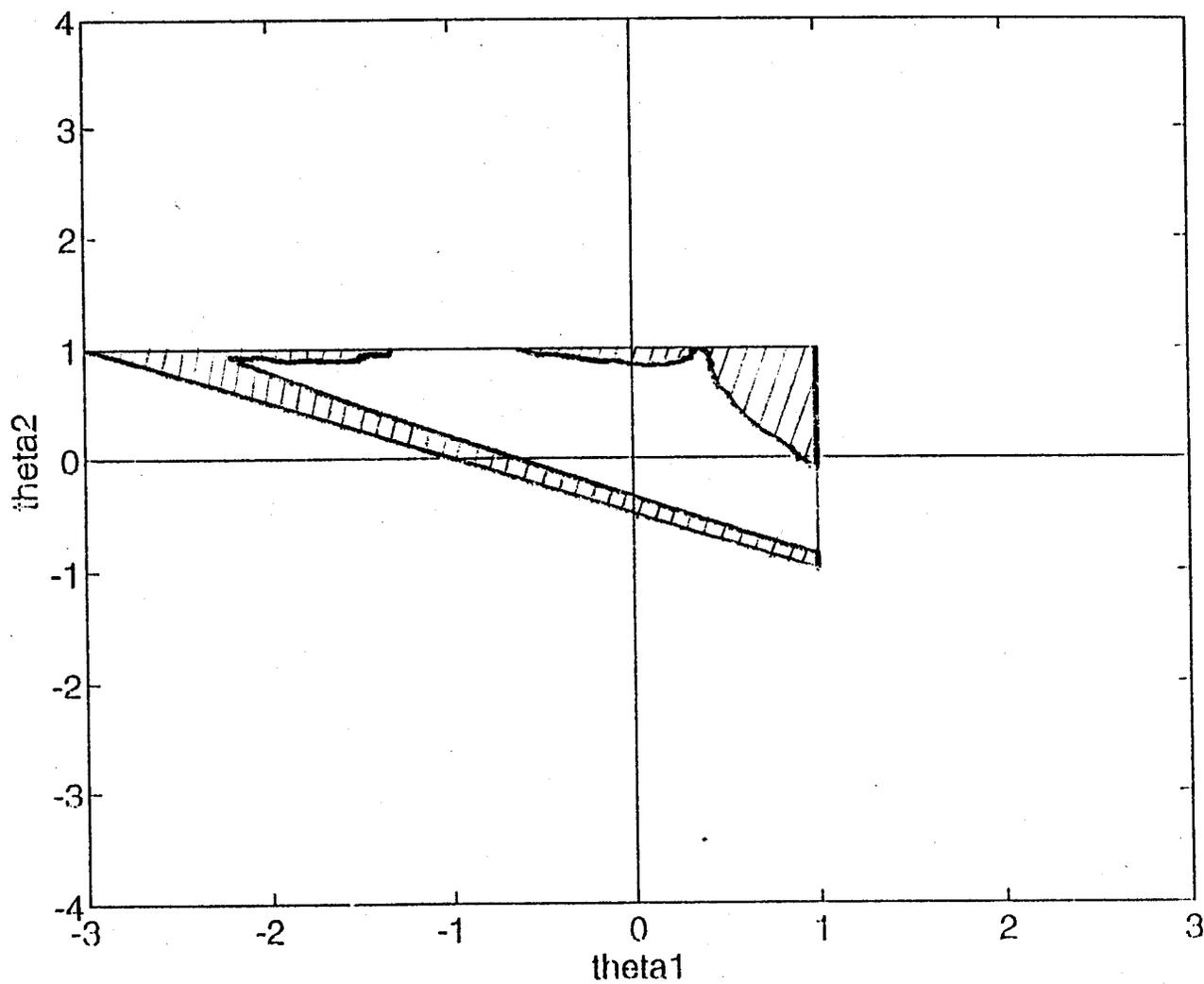


Figure 10: "exemple numérique"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"Approche basée sur des tests induits"

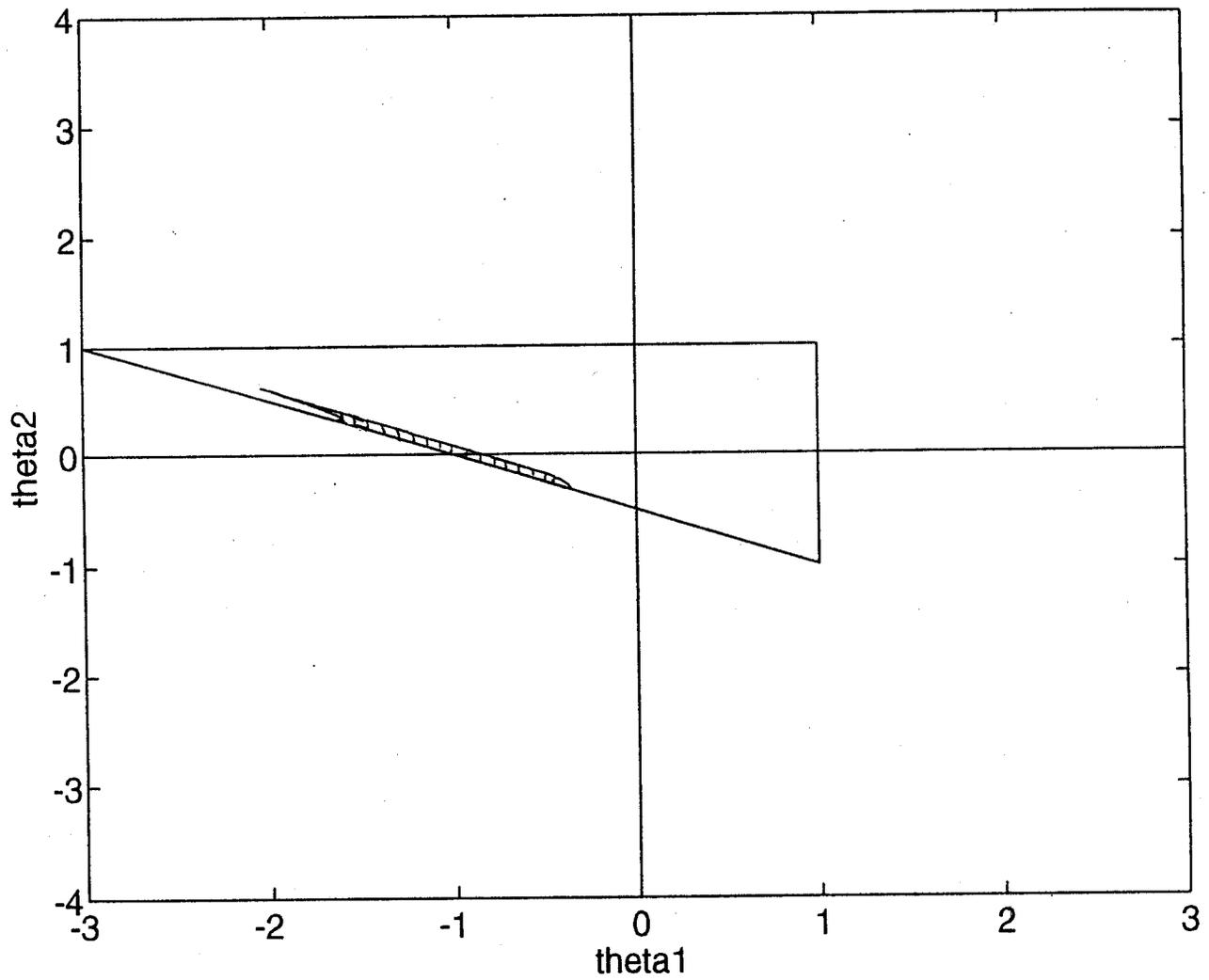


Figure 11: "exemple numérique"  
Région de confiance asymptotique pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$

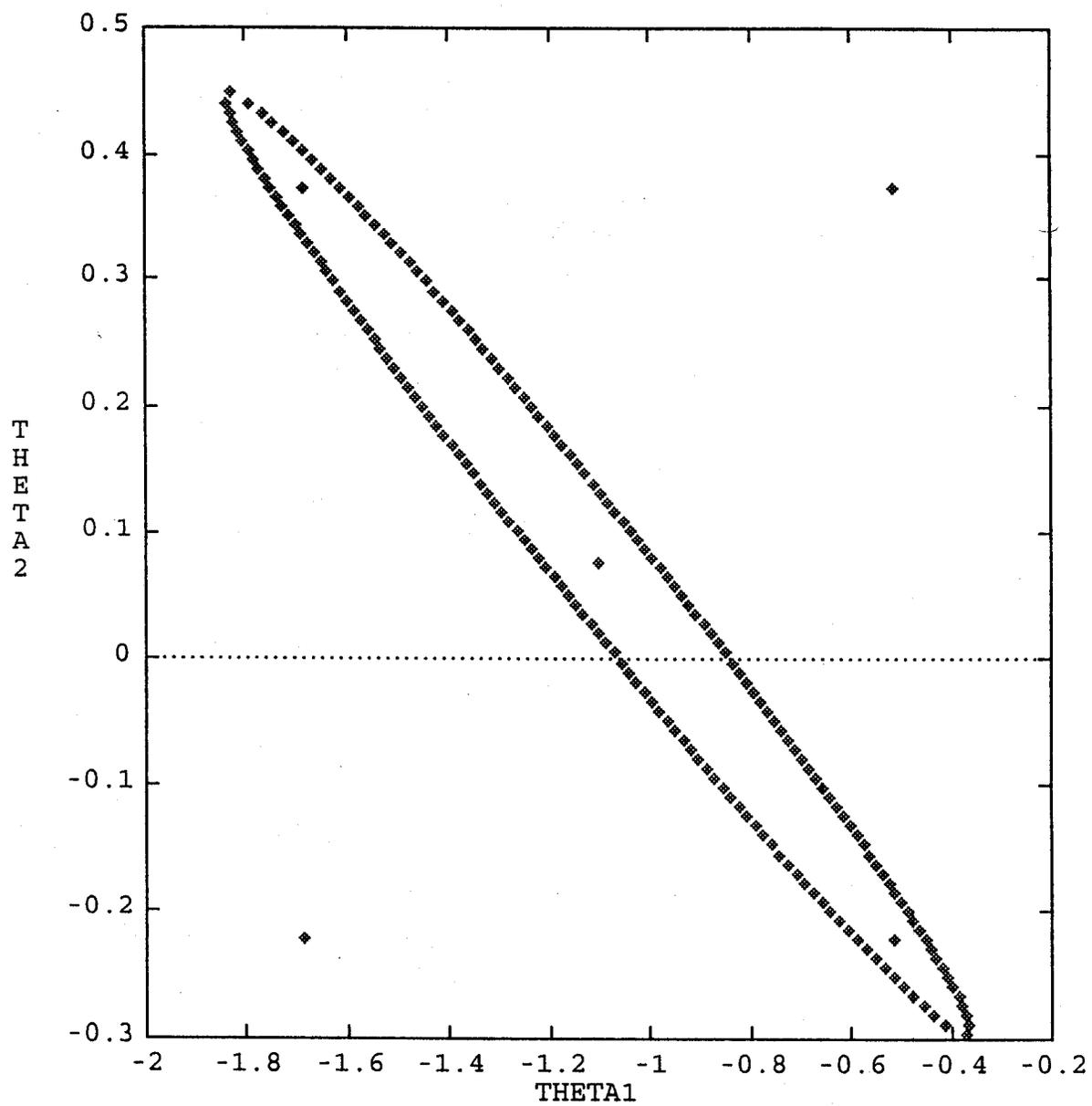


Figure 12: "modèle (5.1)"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(5)}(\theta_0)$ "

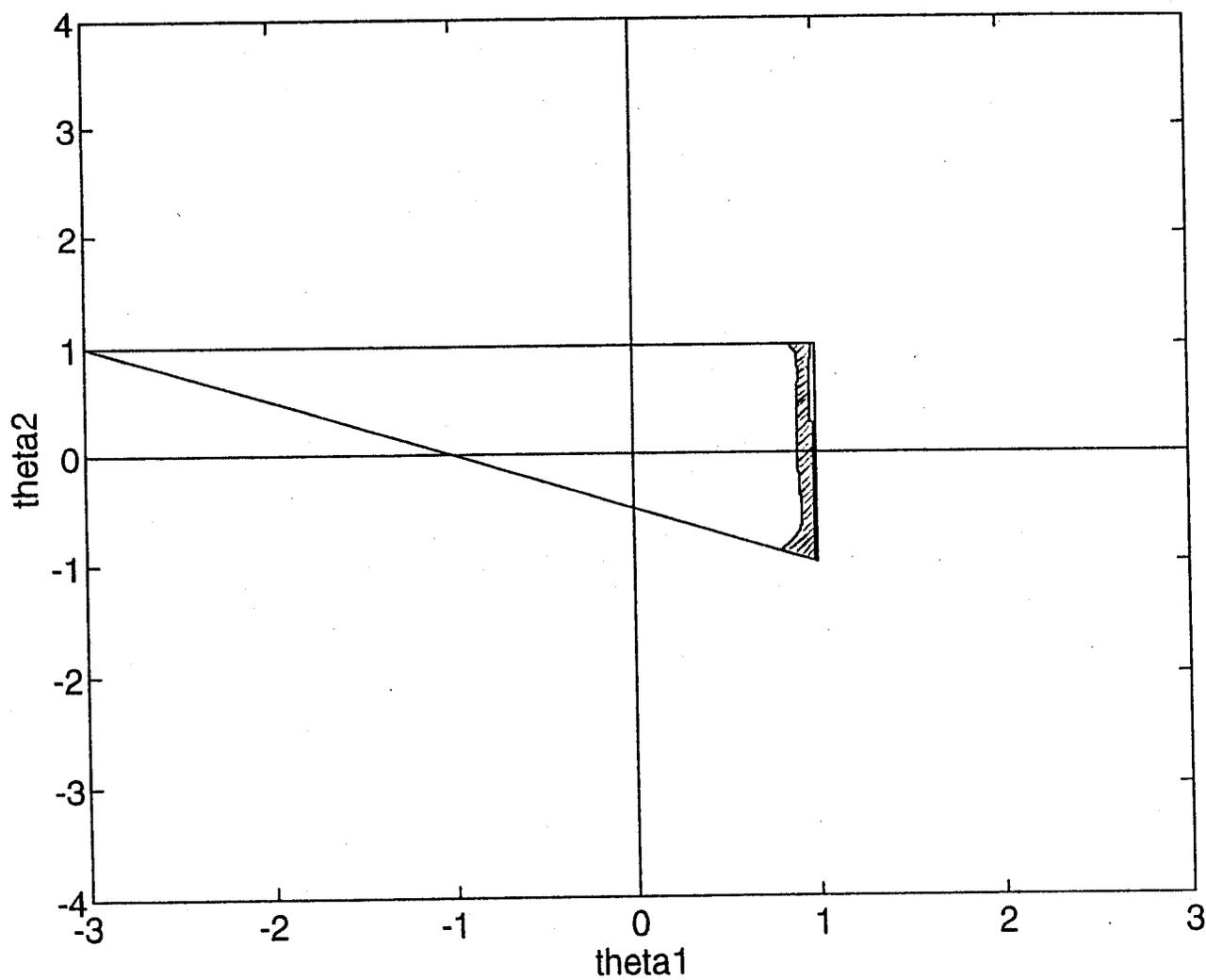


Figure 13: "modèle (5.1)"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(n)}(\theta_0)$ "

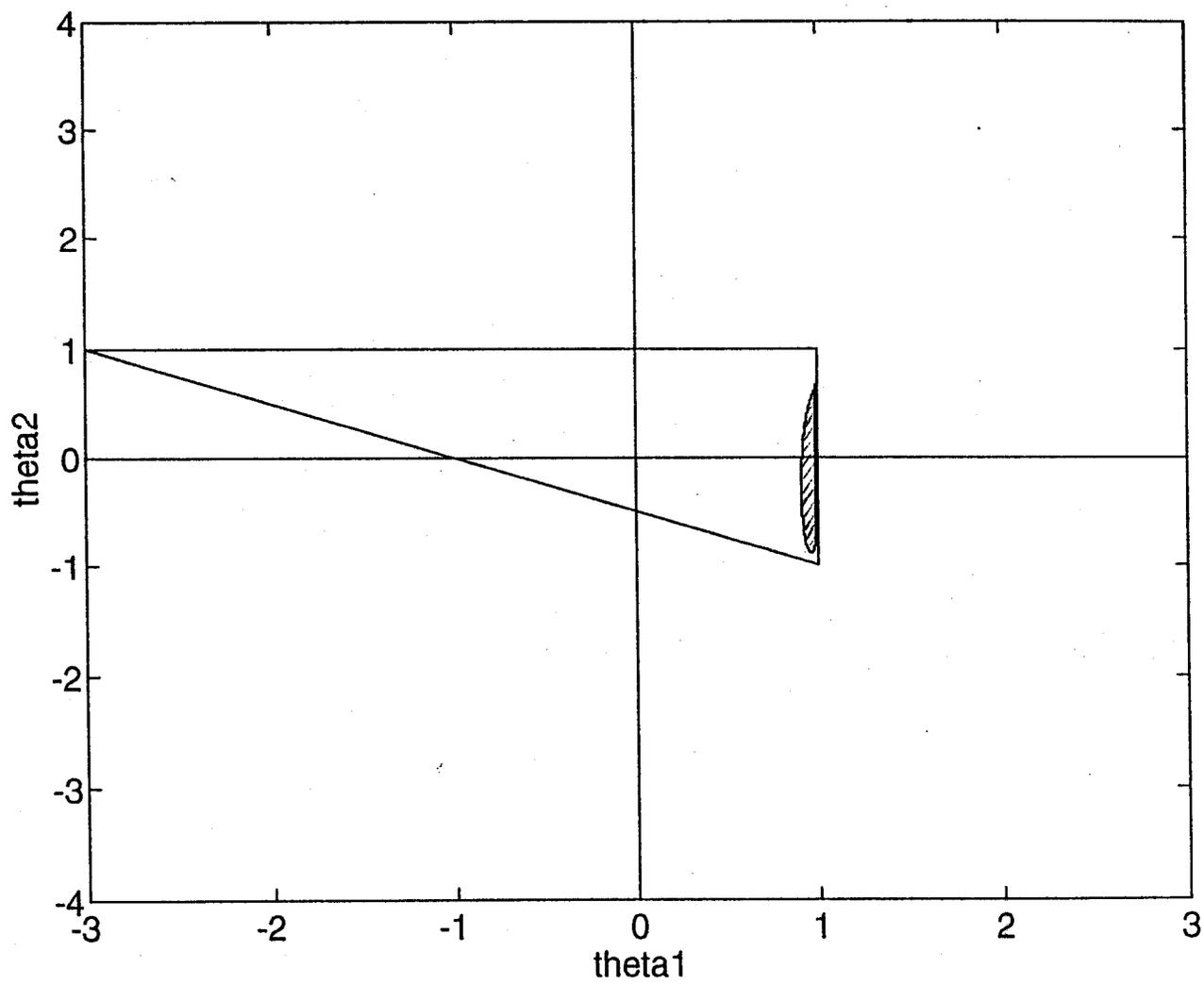


Figure 14: "modèle (5.1)"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"Approche basée sur des tests induits"

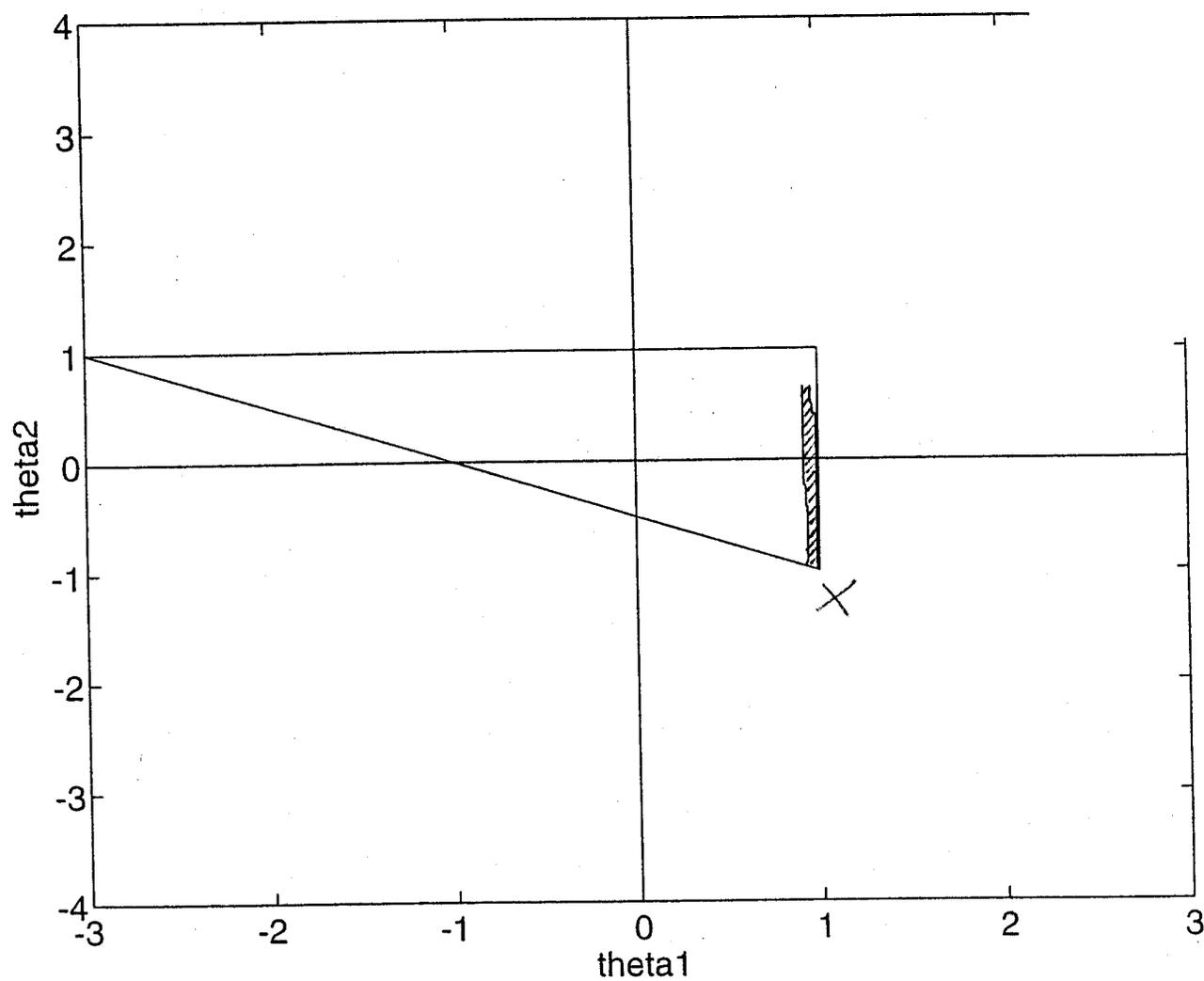


Figure 15: "modèle (5.1)"  
Région de confiance asymptotique pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$

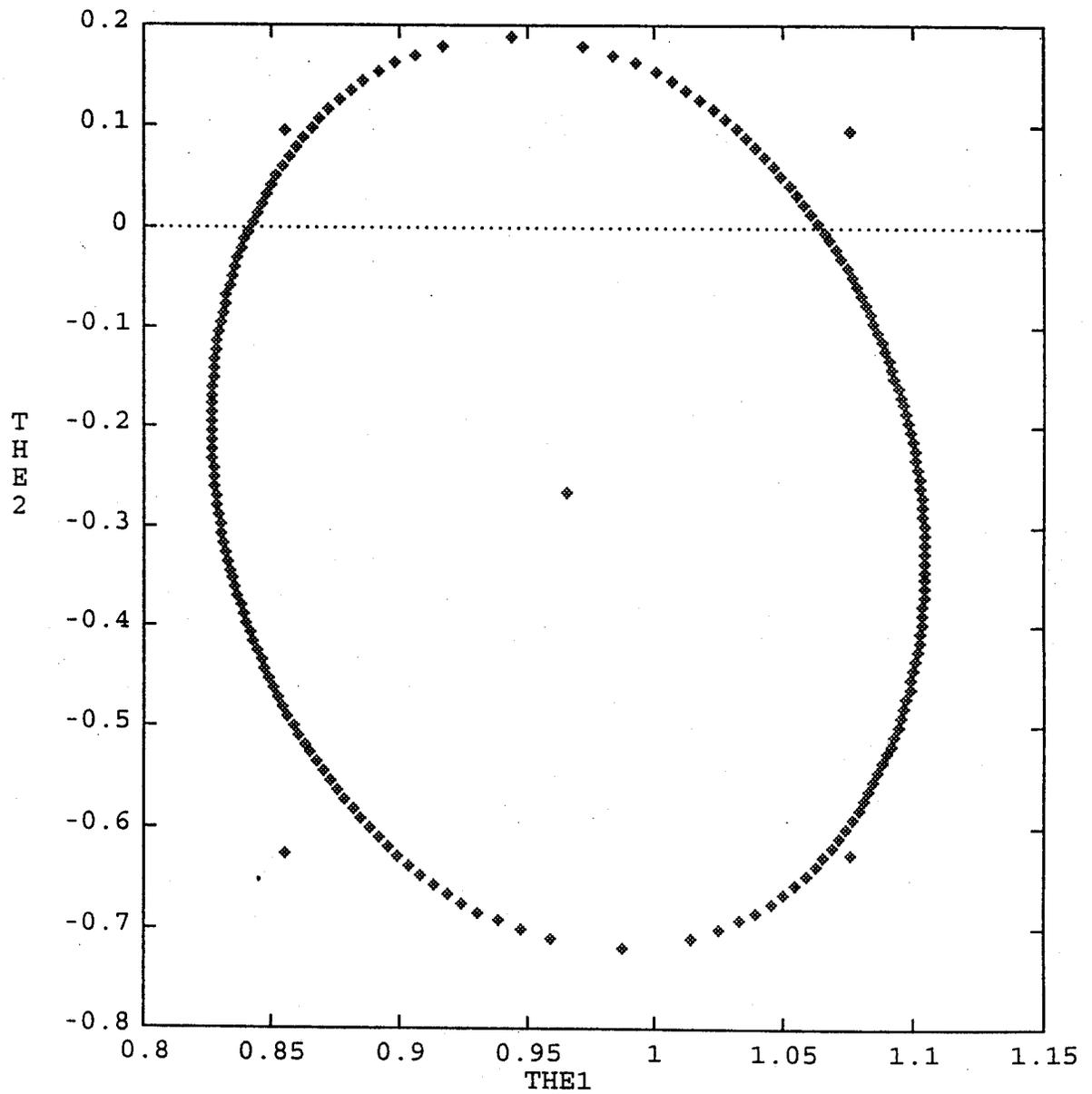


Figure 16: "modèle (5.2)"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(5)}(\theta_0)$ "

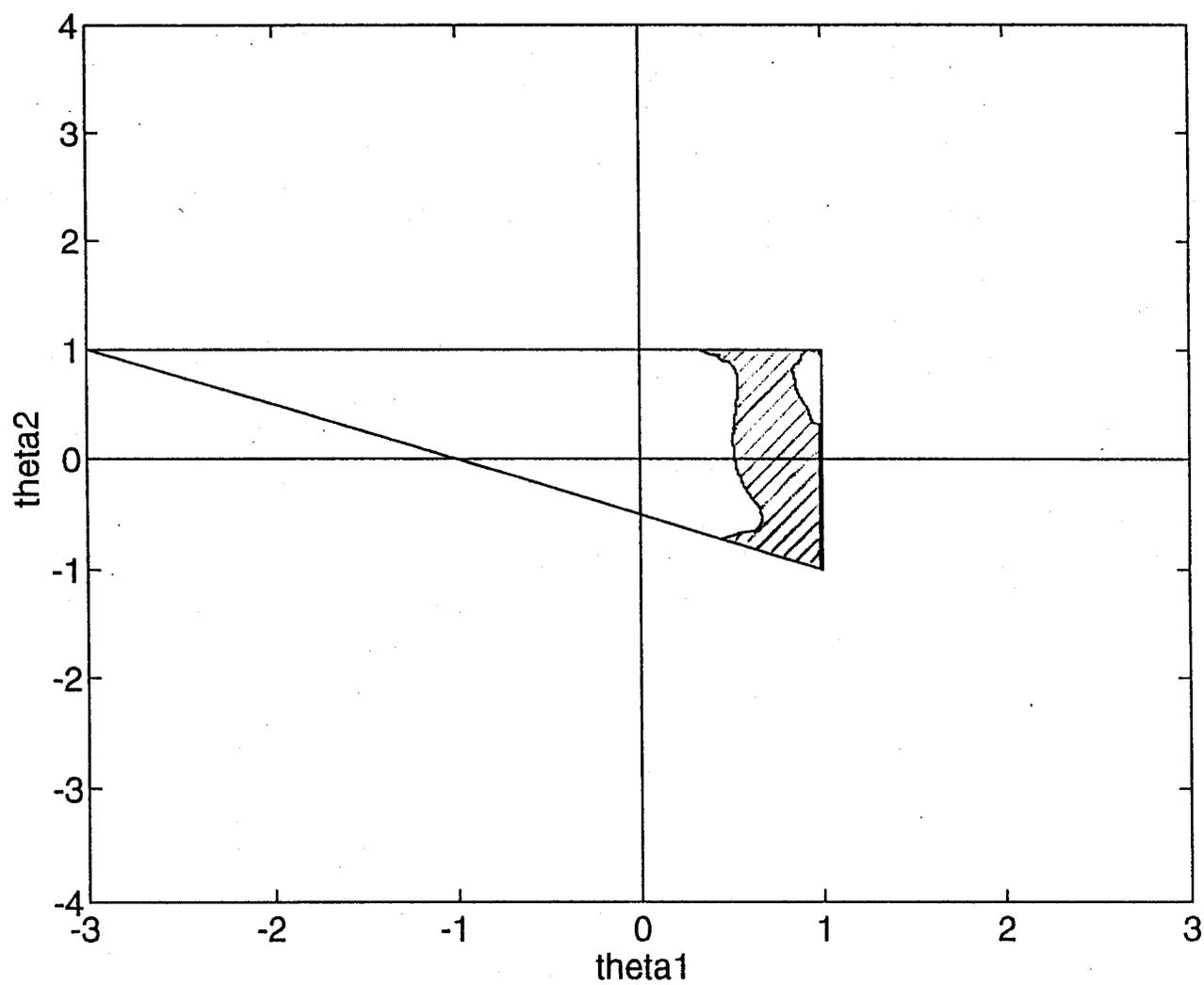


Figure 17: "modèle (5.2)"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"statistique  $F_{(7)}(\theta_0)$ "

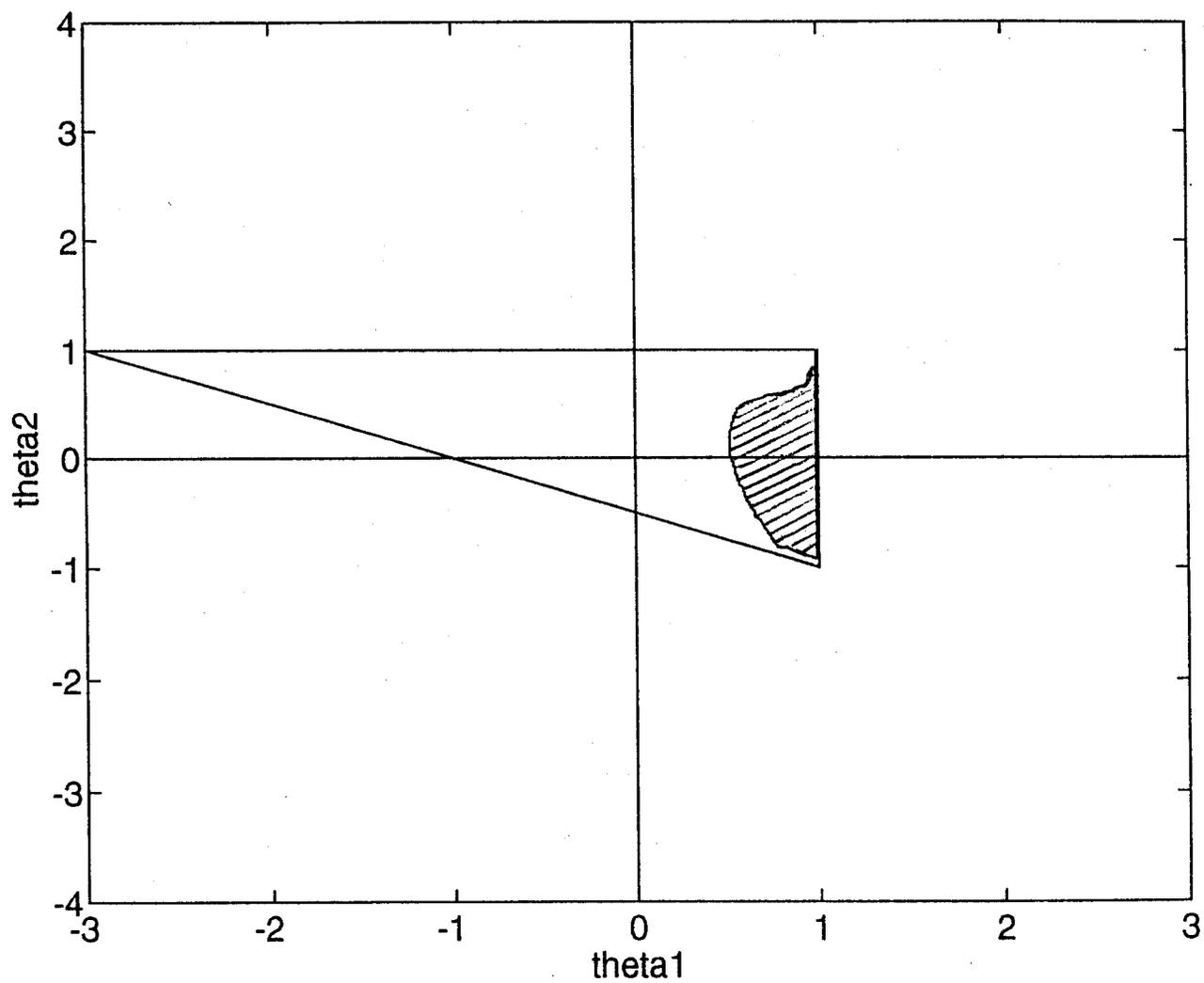


Figure 18: "modèle (5.2)"  
Région de confiance valide pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$   
"Approche basée sur des tests induits"

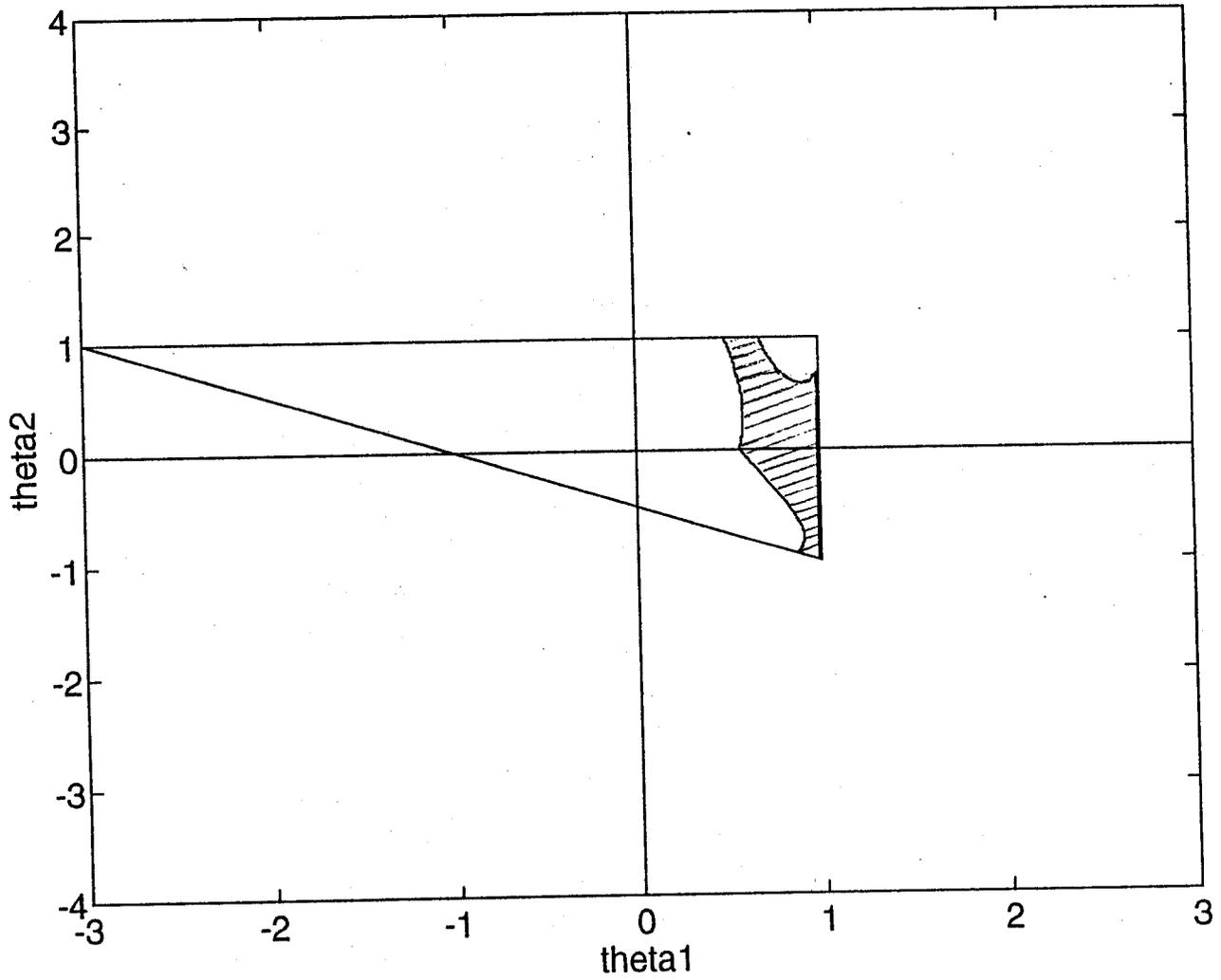
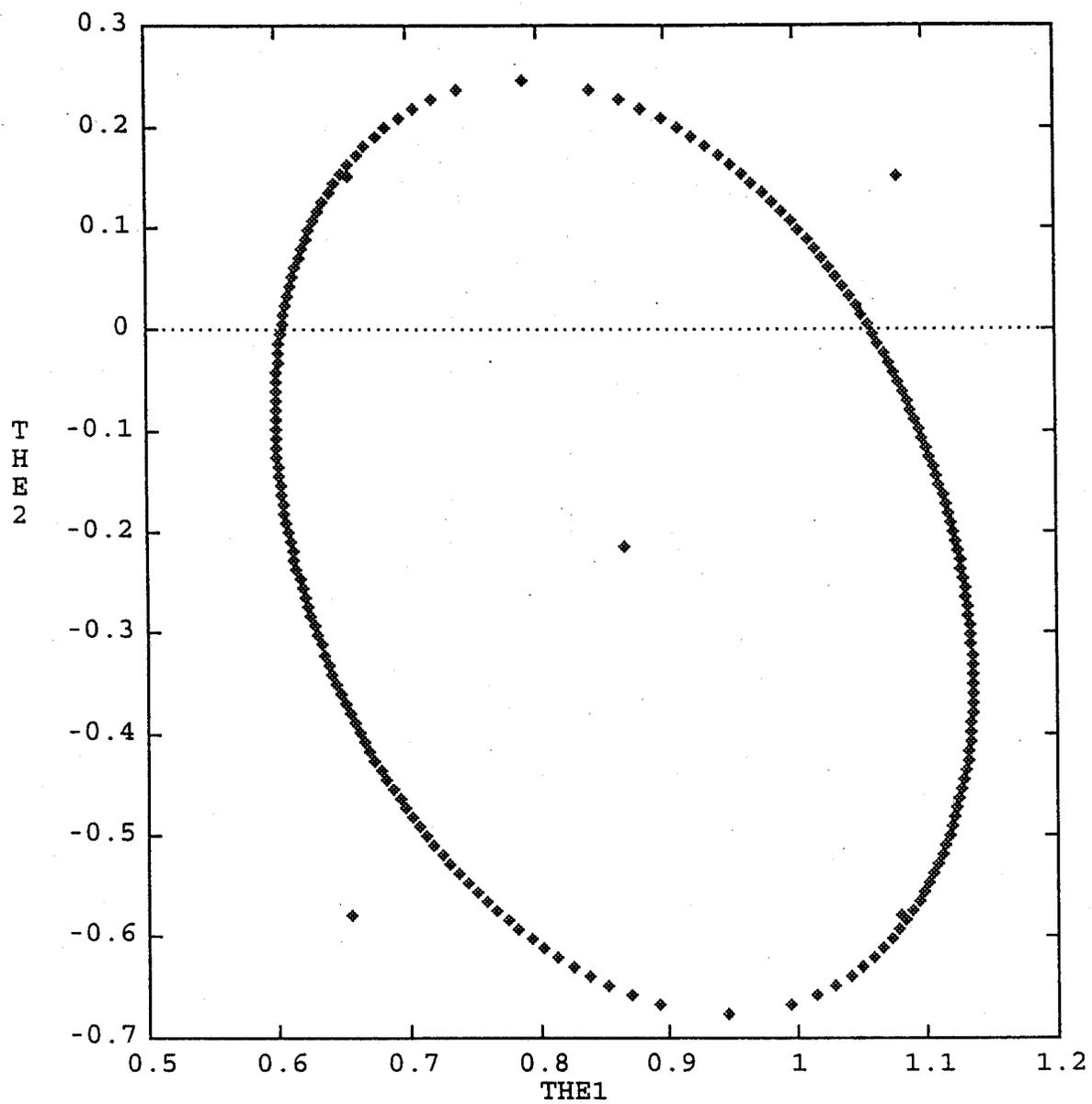


Figure 19: "modèle (5.2)"  
Région de confiance asymptotique pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$



ANNEXE

Preuve de la proposition 1: Le premier terme de l'équation (3.10) peut s'écrire aussi comme suit:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Theta}(B)\underline{X}_t\beta &= [ 1 - \theta_1 B - \theta_2(1 - B)B - \dots - \theta_p(1 - B)^{p-1}B ] \underline{X}_t\beta \\
 &= ( X_{1t} - \theta_1 X_{1t-1} - \theta_2 \bar{X}_{1t-1} - \dots - \theta_p \bar{X}_{1t-p+1}, \\
 &\quad \dots, X_{kt} - \theta_1 X_{kt-1} - \theta_2 \bar{X}_{kt-1} - \dots - \theta_p \bar{X}_{kt-p+1} ) \beta \\
 &= [ ( X_{1t}, X_{1t-1}, \bar{X}_{1t-1}, \dots, \bar{X}_{1t-p+1} ) ( 1, -\underline{\theta}' )', \\
 &\quad \dots, ( X_{kt}, X_{kt-1}, \bar{X}_{kt-1}, \dots, \bar{X}_{kt-p+1} ) ( 1, -\underline{\theta}' )' ] \beta \\
 &= ( X_{1t}, X_{1t-1}, \bar{X}_{1t-1}, \dots, \bar{X}_{1t-p+1} ) ( 1, -\underline{\theta}' )' \beta_1 + \\
 &\quad ( X_{2t}, X_{2t-1}, \bar{X}_{2t-1}, \dots, \bar{X}_{2t-p+1} ) ( 1, -\underline{\theta}' )' \beta_2 \\
 &\quad + \dots + ( X_{kt}, X_{kt-1}, \bar{X}_{kt-1}, \dots, \bar{X}_{kt-p+1} ) ( 1, -\underline{\theta}' )' \beta_k \\
 &= ( X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt} ) \beta + ( X_{1t-1}, X_{2t-1}, \dots, X_{kt-1} ) (-\theta_1) \beta \\
 &\quad + \dots + ( \bar{X}_{1t-p+1}, \bar{X}_{2t-p+1}, \dots, \bar{X}_{kt-p+1} ) (-\theta_p) \beta \\
 &= \underline{X}_t \beta + \underline{X}_{(-1)t} (-\theta_1) \beta + \underline{X}_{(-2)t} (-\theta_2) \beta + \dots + \underline{X}_{(-p)t} (-\theta_p) \beta \\
 &= ( \underline{X}_t, \underline{X}_{(-1)t}, \underline{X}_{(-2)t}, \dots, \underline{X}_{(-p)t} ) \begin{bmatrix} I_k \\ -\theta_1 I_k \\ \dots \\ -\theta_p I_k \end{bmatrix} \beta \\
 &= ( \underline{X}_t, \underline{X}_{(-1)t}, \underline{X}_{(-2)t}, \dots, \underline{X}_{(-p)t} ) [ (1, -\underline{\theta}') \otimes I_k ] \beta,
 \end{aligned}$$

d'où l'équation matricielle

$$(A.1) \quad y(\theta_0) = \bar{X} \bar{\theta} \beta + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\psi}_j^0 y_{(-j)}(\theta_0) + \varepsilon.$$

Comme il peut facilement y avoir collinéarité exacte entre les colonnes de la matrice  $\bar{X}$ , nous allons introduire une matrice  $\tilde{X}$  de plein rang dont les colonnes constituent une base dans l'espace engendré par les vecteurs de la matrice  $\bar{X}$  (par exemple on éliminera les régresseurs redondants qui correspondent à la constante, la tendance ...). Sous l'hypothèse nulle  $H_0(\theta_0)$ , on a  $\bar{\psi}_j^0 = 0$ ,  $j = 1, \dots$ , et la régression (A.1) s'écrit comme suit:

$$y(\theta_0) = \bar{X} \bar{\theta}_0 \beta + u(\theta_0) = \bar{X} \bar{\theta}_0 \beta + \varepsilon.$$

Si on régresse  $y(\theta_0)$  sur  $\tilde{X}$ , on obtient les résidus

$$\hat{u}(\theta_0) = M(\tilde{X})y(\theta_0) = M(\tilde{X})u(\theta_0) = M(\tilde{X})\varepsilon$$

où

$$M(\tilde{X}) = I - \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}', \quad u(\theta_0) = (u_1(\theta_0), \dots, u_T(\theta_0))'$$

et  $\hat{u}(\theta_0) = (\hat{u}_1(\theta_0), \dots, \hat{u}_T(\theta_0))'$ .

### Références

- BOX, G.E.P., et G.M. JENKINS., (1976): "*Time Series Analysis: Forecasting and Control*," Holden Day, Oakland, California.
- DUFOUR, J.-M., (1990): "*Exact Tests and Confidence Sets in Linear Regressions With Autocorrelated Errors*," *Econometrica*, Vol 58, 2, 475- 494.
- DUFOUR, J.-M., et M. NEIFAR., (1995 a): "*Methodes d'Inférence Exacte pour un Modèle de Régression avec Erreurs AR(2): une Approche Fondée sur des Tests Induits contre l'Autocorrélation*,".
- DUFOUR, J.-M., et M. NEIFAR., (1995 b): "*Methodes d'Inférence Exacte pour des processus autorégressives: une Approche Fondée sur des Tests Induits*,".
- HILLIER, G.H., (1987): "*Classes of Similar Regions and Their Power Properties for some Econometric Testing Problems*", *Econometric Theory*, 3, 1-44.
- HILLIER, G.H., and M.L. KING., (1987): "*Linear Regression With Correlated Errors: Bounds on Coefficient Estimates and t-Values*" in *Specification Analysis in the Linear Model: Essays in Honour of Donald Cochrane*, ed. by M.L. King and D.E.A. Gilees. London: Routledge and Kegan Paul, 74-80.
- IMHOF, P., (1961): "*Computing the Distribution of Quadratic Forms in Normal Variates*", *Biometrika*, 48, 419-426.
- KING, M. L., (1983): "*Testing for Autocorrelation in Linear Regression Model :A Survey*," Working Paper 7183.

- (1987): "*Testing for Autocorrelation in Linear Regression Models: A Survey*," in *Specification Analysis in the Linear Model: Essays in Honour of Donald Cochrane*, ed. by M. L. King., and D. E. A. Giles. London: Routledge and Kegan Paul, 19-73.
- KIVIET, J. F., and G. D. A. PHILLIPS., (1990): "*Exact Similar Tests for the Root of a First-Order Autoregressive Regression Model*", University of Amsterdam, AE Report 12/90, paper presented at ESEM'90, Barcelona.
- KIVIET, J. F., (1980): "*Effects of ARMA Errors on Tests for Regression Coefficients: Comments on Vinod's Article; Improved and Additional Results*", *Journal of the American Statistical Association*, 75, 353-358.
- KIVIET, J. F., (1991): "*Tighter Bounds for the Effects of ARMA Disturbances on Tests for Regression Coefficients*" in: Gruber, J. (Ed.), *Econometric Decision Models: New Methods of Modeling and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 404-418.
- KIVIET, J. F., and G. D. A. Phillips., (1992): "*Exact Similar Tests for Unit Roots and Cointegration*", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, 349-367.
- KRAMER, W., J. F. KIVIET., and J. BREITUNG., (1991): "*True versus Nominal Size of the F-Test in the Linear Regression Model with Autocorrelated Disturbances*" in: Gruber, J. (Ed.), *Econometric Decision Models: New Methods of Modeling and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 419-428.
- NEIFAR, M., et DUFOUR, J.-M., (1995 a): "*Méthodes d'Inférence Exactes pour des Processus Autorégressifs par Maximum de Vraisemblance Tronqué*".
- VINOD, H.D., (1976): "*Effects of ARMA Errors on the Significance Tests for Regression Coefficients*", *Journal of the American Statistical Association*, 71, 929-933.

VINOD, H.D., and A. ULLAH., (1981): "*Recent Advances in Regression Methods*", New York: Marcel Dekker.

WATSON, G. S., and E. J. HANNAN., (1956): "*Serial Correlation in Regression Analysis II*," *Biometrika*, 43, 436-448.

ZINDE-WALSH, V., and A. ULLAH., (1987): "*On Robustness of Tests of Linear Restrictions in Regression Models with Elliptical Errors Distributions*", in *Time Series and Econometric Modelling, Advances in the Statistical Sciences, Vol. III*, ed. by J.B.

MACNEIL and G.J., Umphrey, Dordrecht, Holland: D. Reidel, 235-251.

**ESSAI V**

**TESTS EXACTS CONTRE LE CHANGEMENT STRUCTUREL POUR DES  
MODÈLES DE RÉGRÉSSION AVEC ERREURS  
AUTORÉGRESSIVES**

## 1. Introduction

Dans ce texte, nous développons, en particulier, des tests de changement structurel valides pour les modèles de régression avec  $k$  régresseurs fixes et des erreurs autocorrélées d'ordre  $p \geq 1$ . Pour appliquer les différentes approches développées ici nous devons commencer par construire des régions de confiance valides pour les paramètres autorégressifs, ceci se fait facilement à l'aide de l'une des méthodes proposées dans Dufour et Neifar (1995 a) et Neifar et Dufour (1995 a). L'approche générale que nous utilisons est une extension de celle utilisée dans Dufour et Kiviet (1995). Nous considérons deux catégories de tests: des tests de type analyse de covariance et des tests prédictifs.

Dans la première catégorie, nous proposons quatre procédures. La première est un "test induit" fondée sur comparaison de deux régions de confiance obtenues sur deux-sous périodes. La seconde généralise les procédures proposés par Kullback et Rosenblatt (1957), Chow (1960), Dufour (1982a) et Dufour et Kiviet (1993). La troisième combine les deux précédentes. Ce test consiste en première étape à appliquer le test induit aux coefficients autorégressifs; si on ne peut pas rejeter la stabilité de ces derniers, on transforme le modèle et on teste dans une deuxième étape la stabilité des paramètres de régression à l'aide du test de Chow généralisé. La quatrième procédure examine la stabilité des paramètres de régression en autorisant une instabilité des

coefficients autorégressifs. Le dernier test permet la vérification de la stabilité des paramètres de régression avec une alternative de date de rupture inconnue.

Dans la deuxième classe, nous proposons des tests de type prédictifs. Le premier est un test prédictif global qui suppose sous l'alternative un changement de régime, c'est-à-dire que les paramètres du modèle sont différents entre les régimes mais stables dans les deux sous périodes. Le deuxième est un test prédictif individuel qui suppose l'instabilité sous l'alternative des paramètres du modèle à une date isolée.

Ce texte est divisé de la manière suivante. Dans la seconde section nous définissons le modèle et les notations utilisés. Dans la troisième section, nous développons les tests d'analyse de covariance. Dans la quatrième section, nous présentons les tests de type prédictifs. Enfin, nous appliquons le test induit à un modèle du P.I.B réel tunisien.

## 2. Modèle et notations

Nous considérons le modèle de régression avec erreurs autocorrélées suivant:

$$(2.1) \quad y_t = X_{1t} \beta_1 + \dots + X_{kt} \beta_k + u_t,$$

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \dots + \phi_p u_{t-p} + e_t,$$

$$e_t \sim^{ind} N(0, \sigma^2), \quad t = 1, \dots, T, \quad \sigma > 0$$

où  $y_t$  est la variable dépendante, les  $X_{it}$  sont des régresseurs fixes, les  $e_t$  sont des erreurs aléatoires mutuellement indépendantes,  $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}$  sont fixés, et les paramètres  $\phi_i, i = 1, \dots, p, \beta_j, j = 1, \dots, k$  et  $\sigma^2$  sont inconnus. La série  $y_1, \dots, y_T$  peut s'interpréter comme un segment de la série générée par le modèle

$$(2.2) \quad y_t = X_{1t}\beta_1 + \dots + X_{kt}\beta_k + u_t, \quad t = -p + 1, \dots, T$$

$$= 0, \quad t \leq -p,$$

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \dots + \phi_p u_{t-p} + e_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

$$e_t \sim^{ind} N(0, \sigma^2), \quad \sigma > 0$$

où  $y_0, \dots, y_{-p+1}$  ainsi que  $u_0, \dots, u_{-p+1}$  sont fixés ( $u_0, \dots, u_{-p+1}$  sont choisis de façon à reproduire les valeurs données de  $y_0, \dots, y_{-p+1}$ ) et  $u_t = -X_t\beta$  pour  $t \leq -p$ .

La distribution de  $y_t$  conditionnelle à ses valeurs passées ne dépend pas des  $y_t, t \leq -p$ , et donc on peut fixer ces dernières à zéro sans perte de généralité. En utilisant la paramétrisation du lemme 2.1 dans Neifar et Dufour (1995 a), le modèle (2.1) peut alors s'écrire comme suit:

$$(2.3) \quad y_t = X_t\beta + u_t, \quad t = -p + 1, \dots, T,$$

$$u_t = \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 (1 - B)u_{t-1} + \dots + \theta_p (1 - B)^{p-1} u_{t-1} + e_t,$$

$$e_t \sim^{ind} N(0, \sigma^2), \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\underline{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{kt})$ , ou sous la forme matricielle,

$$(2.4) \quad y = X \beta + u, \quad u = u_- \underline{\theta} + e$$

où  $u_- = [u_{-1}, \tilde{u}_{-2}, \dots, \tilde{u}_{-p}]$ ,  $\tilde{u}_{-j} = (1 - B)^{j-1} u_{-1}$ ,  $\underline{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]'$ ,

$X = [X_1, X_2, \dots, X_k]$ .  $\underline{\theta}$  est un vecteur  $p \times 1$ ,  $y$  un vecteur  $T \times 1$ ,  $u_-$  une matrice

$T \times p$ ,  $X$  une matrice  $T \times k$  et  $B$  est l'opérateur retard. Supposons maintenant que

$\underline{\theta} = \underline{\theta}_0 = (\theta_{10}, \dots, \theta_{p0})'$ , élément d'un ensemble de valeurs admissibles  $S_p$ . Alors on

peut transformer le modèle (2.3) comme suit:

$$(2.5) \quad y_t(\underline{\theta}_0) = X_t(\underline{\theta}_0) \beta + u_t(\underline{\theta}_0), \quad t = 1, \dots, T$$

où

$$y_t(\underline{\theta}_0) = y_t - \theta_{10} y_{t-1} - \theta_{20} (1 - B) y_{t-1} - \dots - \theta_{p0} (1 - B)^{p-1} y_{t-1},$$

$$X_t(\underline{\theta}_0) = X_t - \theta_{10} X_{t-1} - \theta_{20} (1 - B) X_{t-1} - \dots - \theta_{p0} (1 - B)^{p-1} X_{t-1},$$

$$X_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt}), \quad X_{t-1} = (X_{1(t-1)}, \dots, X_{k(t-1)}),$$

$$u_t(\underline{\theta}_0) = u_t - \theta_{10} u_{t-1} - \theta_{20} (1 - B) u_{t-1} - \dots - \theta_{p0} (1 - B)^{p-1} u_{t-1},$$

ou en notation matricielle,

$$(2.6) \quad y(\underline{\theta}_0) = X(\underline{\theta}_0) \beta + u(\underline{\theta}_0)$$

$$o \quad \dot{u} \quad y(\theta_0) = (y_1(\theta_0), \dots, y_T(\theta_0))', \quad X(\theta_0) = [X_1(\theta_0), \dots, X_k(\theta_0)],$$

$X_j(\theta_0) = (X_{j1}(\theta_0), \dots, X_{jT}(\theta_0))'$ . Si le modèle initial contient une constante, on a

$X_t = (1, Z_t)$  et (2.5) peut s'écrire:

$$y_t(\theta) = (1 - \theta_1)\beta_1 + (Z_t - \theta_1 Z_{t-1} - \dots - \theta_p Z_{t-p})\gamma + \bar{u}_t, \quad t = 1, \dots, T$$

où  $\beta = (\beta_1, \gamma)'$  et  $\gamma = (\beta_2, \dots, \beta_k)'$ . Il est clair que  $\beta_1$  n'est pas identifiable si

$\theta_1 = 1$ . Pour éviter ce problème, nous allons reparamétriser le modèle en remplaçant  $\beta_1$

par  $\bar{\beta}_1 = (1 - \theta_1)\beta_1$ .  $\bar{\beta}_1$  est donc identifiable peu importe la valeur du vecteur

$(\theta_1, \dots, \theta_p)'$ . On peut donc écrire le modèle sous la forme

$$(2.7) \quad y(\theta) = \tilde{X}(\theta)\beta(\theta) + u(\theta)$$

où

$$y(\theta) = (y_1(\theta), \dots, y_T(\theta))', \quad u(\theta) = (u_1(\theta), \dots, u_T(\theta))',$$

$$\tilde{X}(\theta) = [1, X_2(\theta), \dots, X_k(\theta)], \quad \beta(\theta) = [\bar{\beta}_1, \beta_2, \dots, \beta_k]',$$

$X_j(\theta) = (X_{j1}(\theta), \dots, X_{jT}(\theta))'$ ,  $j = 2, \dots, k$ . Nous supposons que le rang  $[x(\theta)]$

$= k < T$ , où  $x(\theta)$  représente soit  $X(\theta)$  soit  $\tilde{X}(\theta)$  et on notera par  $\tilde{\beta}$  le vecteur qui

représente  $\beta$  ou  $\beta(\theta)$ .

### 3. Tests d'analyse de covariance

Dans cette section, nous proposons divers tests du type "analyse de covariance" pour tester la stabilité des coefficients du modèle. D'abord, nous proposons une procédure de type "test induit" pour tester la stabilité des coefficients du vecteur autorégressif  $\theta$ . Cette dernière est fondée sur l'examen des deux régions de confiance  $I_{\theta(\omega)}(\alpha_1')$  et  $I_{\theta(\omega)}(\alpha_1'')$  obtenues à partir de deux sous-périodes. Deuxièmement nous proposons une procédure conçue contre une alternative de changement dans les coefficients de régression  $\beta$  à des dates pré-déterminées (en supposant que  $\theta$  et  $\sigma^2$  sont stables), laquelle généralise les tests proposés par Kullback et Rosenblatt (1957), Chow (1960), Dufour (1982a) et Dufour et Kiviet (1995). Troisièmement, nous proposons une procédure conçue contre des ruptures à la fois dans les paramètres autorégressifs et les coefficients de régression. Ce test comporte deux étapes: la première consiste à appliquer le test induit aux coefficients autorégressifs; si on ne peut pas rejeter la stabilité de ces derniers, on transforme le modèle pour tester la stabilité des coefficients de régression à l'aide du test de Chow généralisé. Quatrièmement, nous proposons un test de stabilité des paramètres de régression permet une instabilité des coefficients autorégressifs. Finalement, nous proposons un test de stabilité des coefficients de régression contre une alternative avec date de rupture inconnue.

### 3.1 Test induit pour la stabilité de $\theta$

Nous proposons maintenant un test induit pour vérifier la stabilité des coefficients autorégressifs sans faire d'hypothèse sur le restant des paramètres du modèle. Considérons le modèle (2.3), nous supposons que sous l'alternative les paramètres  $\theta_j$  peuvent changer à une date connue  $T_1$ . En se servant de l'une des approches décrites dans Neifar et Dufour (1995 a), nous pouvons construire les régions de confiance  $I_{\theta_{(1)}}(\alpha'_1, T_1)$ ,  $I_{\theta_{(2)}}(\alpha''_1, T_2)$  pour  $\theta$  fondées sur deux sous-périodes de longueurs  $T_1$  et  $T_2$  ( $T_i \leq T$ ,  $i = 1, 2$ ). Pour tester l'hypothèse suivante

$$(3.1) \quad H_0(\theta): \theta_{(1)} = \theta_{(2)},$$

on rejettera  $H_0(\theta)$  si

$$(3.2) \quad I_{\theta_{(1)}}(\alpha'_1, T_1) \cap I_{\theta_{(2)}}(\alpha''_1, T_2) = \emptyset.$$

Puisque  $I_{\theta_{(1)}}(\alpha'_1, T_1)$  et  $I_{\theta_{(2)}}(\alpha''_1, T_2)$  sont des régions de confiance pour  $\theta_{(1)}$  et  $\theta_{(2)}$ ,

respectivement de niveau  $(1 - \alpha'_1)$  et  $(1 - \alpha''_1)$ , on aura

$$(3.3) \quad P[\theta \in I_{\theta_{(1)}}(\alpha, T_1)] \geq 1 - \alpha'_1, \quad P[\theta \in I_{\theta_{(2)}}(\alpha, T_2)] \geq 1 - \alpha''_1.$$

Il est alors facile de constater que le test ainsi construit est de niveau plus petit ou égal

à  $\alpha_1 = \alpha'_1 + \alpha''_1$ . Sous  $H_0(\theta)$ , l'événement  $\theta \in I_{\theta_0}(\alpha'_1, T_1)$  implique que

$\theta \in I_{\theta_0}(\alpha'_1, T_1) \cap I_{\theta_0}(\alpha''_1, T_2)$ , d'où

$$\begin{aligned} P [ I_{\theta_0}(\alpha'_1, T_1) \cap I_{\theta_0}(\alpha''_1, T_2) = \emptyset ] &\leq P [ \theta \notin I_{\theta_0}(\alpha'_1, T_1) \cap I_{\theta_0}(\alpha''_1, T_2) ] \\ &\leq P [ \theta \notin I_{\theta_0}(\alpha'_1, T_1) ] + P [ \theta \notin I_{\theta_0}(\alpha''_1, T_2) ] = \alpha'_1 + \alpha''_1 = \alpha_1. \end{aligned}$$

### 3.2 Tests de Chow généralisés

Afin de généraliser le test de Chow à des modèles de régression avec erreurs autocorrélées, nous supposons que sous l'alternative il y a  $m$  ruptures de la valeur de  $\beta$  à des dates préséparées. Pour ce faire, nous considérons une partition de  $u_-$ ,  $y_-$ ,  $X$  et  $\underline{u}$  telle que définie en (3.4) en  $m$  sous-vecteurs (matrices) pour  $m \geq 2$  :

$$(3.4) \quad y = \begin{bmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \\ \dots \\ y_{(m)} \end{bmatrix}, \quad u_- = \begin{bmatrix} u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ \dots \\ u_{(m)} \end{bmatrix}, \quad y_- = \begin{bmatrix} y_{(1)} \\ y_{(2)} \\ \dots \\ y_{(m)} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \\ \dots \\ X_{(m)} \end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{(1)} \\ \underline{u}_{(2)} \\ \dots \\ \underline{u}_{(m)} \end{bmatrix}$$

où  $u_{(i)} = [\underline{u}_{-1}^{(i)}, \underline{u}_{-2}^{(i)}, \dots, \underline{u}_{-p}^{(i)}]$ ,  $y_{(i)} = [y_{-1}^{(i)}, \tilde{y}_{-2}^{(i)}, \dots, \tilde{y}_{-p}^{(i)}]$ ,  $\tilde{y}_{-j}^{(i)} = (1 - B)^{j-1} y_{-1}^{(i)}$ ,  $y_{(i)}$  est

un vecteur  $T_i \times 1$ ,  $u_{(i)}$ ,  $y_{(i)}$  sont des matrices  $T_i \times p$ ,  $X_{(i)}$  est une matrice  $T_i \times k$ , et  $\underline{u}_{(i)}$

est un vecteur  $T_i \times 1$ ,  $T_i \geq k$ ,  $i = 1, \dots, m$  et  $T = \sum_{i=1}^m T_i \geq m k$ . On peut alors

écrire le modèle (2.4) sous la forme

$$(3.5) \quad y_{(i)} = X_{(i)} \beta_{(i)} + u_{(i)}, \quad u_{(i)} = u_{-}^{(i)} \theta + \varepsilon_{(i)},$$

$$\varepsilon_{(i)} \sim \text{ind} N(0, \sigma^2 I_{T_i}), \quad i = 1, \dots, m$$

où  $u_{-}^{(i)} = [u_{-1}^{(i)}, (1 - B)u_{-1}^{(i)}, \dots, (1 - B)^{p-1}u_{-1}^{(i)}]$  est une matrice  $T_i \times p$ , et  $\beta_{(i)}$  est un

vecteur  $k \times 1$  de paramètres inconnus;  $\beta_{(1)}, \beta_{(2)}, \dots, \beta_{(m)}$  peuvent changer, mais on

supposera ici que  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$  et  $\sigma$  ne changent pas. On veut tester

$H_0(\beta)$ :  $\beta_{(1)} = \beta_{(2)} = \dots = \beta_{(m)}$  contre l'alternative où les paramètres  $\beta_{(i)}$  peuvent

changer. Pour développer un test d'analyse de covariance de  $H_0(\beta)$ , on écrira le

modèle (3.5) sous la forme compacte:

$$(3.6) \quad y = \bar{X} \bar{\beta} + u, \quad u = u_{-} \theta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_T)$$

où  $u_{-}$  est une matrice  $T \times (mp)$ ,  $\bar{X}$  une matrice  $T \times (km)$ ,  $\bar{\beta}$  un vecteur  $(km) \times 1$ ,

$$u_{-} = [u_{-1}, \tilde{u}_{-2}, \dots, \tilde{u}_{-p}] \quad , \quad \tilde{u}_{-j} = (1 - B)^{j-1} u_{-1} \quad , \quad \bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{(1)} \\ \beta_{(2)} \\ \dots \\ \beta_{(m)} \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\bar{X} = \text{diag}(X_{(i)}) = \begin{bmatrix} X_{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X_{(m)} \end{bmatrix}.$$

Supposons que l'on connaît  $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0$ . Alors le modèle (3.6) peut être transformé comme

suit:

$$(3.7) \quad y(\underline{\theta}_0) = \bar{x}(\underline{\theta}_0)\bar{\beta} + u(\underline{\theta}_0) = y - y_0 - \underline{\theta}_0$$

où

$$\bar{x}(\underline{\theta}_0) = \text{diag}(x_{(i)}(\underline{\theta}_0)), \quad x_{(i)}(\underline{\theta}_0) = [x_{1(i)}(\underline{\theta}_0), \dots, x_{k(i)}(\underline{\theta}_0)], \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_{j(i)}(\underline{\theta}_0) = [x_{jt}(\underline{\theta}_0)]', \quad t = \bar{T}_{k-1} + 1, \dots, \bar{T}_k, \quad \bar{T}_k = \sum_{j=1}^k T_k, \quad x_{j1}(\underline{\theta}_0) = 1,$$

$$x_{jt}(\underline{\theta}_0) = X_{jt} - \theta_{10}X_{j(t-1)} - \dots - \theta_{p0}(1 - B)^{p-1}X_{j(t-1)}, \quad j = 2, \dots, k,$$

$$\bar{\beta} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_{(m)} \end{bmatrix}.$$

Il est clair que le modèle (3.7) satisfait toutes les hypothèses du modèle linéaire classique. La statistique de test de Chow généralisé pour tester l'hypothèse

$$H_0(\tilde{\beta}): \tilde{\beta}_{(1)} = \tilde{\beta}_{(2)} = \dots = \tilde{\beta}_{(m)}$$

contre l'alternative où les paramètres  $\tilde{\beta}_{(i)}$  peuvent changer est:

$$D(H_0(\tilde{\beta}), \theta_0) = \frac{v}{v_0} \left[ \frac{S_0(\theta_0) - S_1(\theta_0)}{S_1(\theta_0)} \right]$$

où  $S_0(\theta_0)$  et  $S_1(\theta_0)$  sont les sommes des carrés des erreurs sous et sans contraintes :

$$S_0(\theta_0) = \min_{\tilde{\beta}} [y(\theta_0) - x(\theta_0)\tilde{\beta}]' [y(\theta_0) - x(\theta_0)\tilde{\beta}],$$

$$S_1(\theta_0) = \min_{\tilde{\beta}} [y(\theta_0) - \bar{x}(\theta_0)\tilde{\beta}]' [y(\theta_0) - \bar{x}(\theta_0)\tilde{\beta}],$$

$$x(\theta_0) = \begin{bmatrix} x_{(1)}(\theta_0) \\ \vdots \\ x_{(m)}(\theta_0) \end{bmatrix},$$

$v$  et  $v_0$  sont les degrés de liberté appropriés,  $v = \sum_{i=1}^m (T_i - r_i)$ ,  $v_0 = \sum_{i=1}^m r_i - r_0$

où  $r_0 = \text{rang}(x(\theta_0))$  et  $r_i = \text{rang}(x_{(i)}(\theta_0))$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Si les matrices  $x_{(i)}(\theta_0)$  sont de

plein rang, les degrés de libertés seront  $v = T - m k$  et  $v_0 = (m - 1)k$ . Comme la

distribution de  $D(H_0(\tilde{\beta}), \theta_0)$  sous  $H_0$  est une Fisher  $F(v_0, v)$ , la région critique

$D(H_0(\tilde{\beta}), \theta_0) \geq F(\alpha; v_0, v)$  est de niveau  $\alpha$ , où  $P[F(v_0, v) \geq F(\alpha; v_0, v)] = \alpha$

avec  $0 < \alpha < 1$ . Puisque  $\theta$  est inconnu, on va se servir de chaque  $\theta_0$  élément d'une

région de confiance exacte pour  $\theta$  de niveau  $(1 - \alpha_1)$ :  $I_{\theta}(\alpha_1)$  tel que

$$(3.8) \quad P[\underline{\theta} \in I_{\underline{\theta}}(\alpha_1)] \geq 1 - \alpha_1$$

où  $0 \leq \alpha_1 < \alpha < 1$ . On considère alors les statistiques:

$$(3.9) \quad D_L(\alpha_1) = \inf \{ D(H_0(\tilde{\beta}), \underline{\theta}_0) : \underline{\theta}_0 \in I_{\underline{\theta}}(\alpha_1) \},$$

$$D_U(\alpha_1) = \sup \{ D(H_0(\tilde{\beta}), \underline{\theta}_0) : \underline{\theta}_0 \in I_{\underline{\theta}}(\alpha_1) \}.$$

En prenant  $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$  et  $\alpha'_2 = \alpha + \alpha_1 < 1$  [voir lemme 1 dans Dufour et Kiviet

(1993)], il est facile de déduire que sous l'hypothèse  $H_0(\tilde{\beta})$

$$(3.10) \quad P[D_L(\alpha_1) \geq F(\alpha_2; \nu_0, \nu)] \leq \alpha_2 + \alpha_1 = \alpha,$$

$$P[D_U(\alpha_1) < F(\alpha'_2; \nu_0, \nu)] \leq 1 - \alpha'_2 + \alpha_1 = 1 - \alpha.$$

Ainsi on construit le test à borne généralisé de niveau  $\alpha$  pour  $H_0(\tilde{\beta})$ :

$$(3.11) \quad \text{rejeter } H_0(\tilde{\beta}) \text{ si } D_L(\alpha_1) \geq F(\alpha_2; \nu_0, \nu),$$

$$\text{ne pas rejeter } H_0(\tilde{\beta}) \text{ si } D_U(\alpha_1) < F(\alpha'_2; \nu_0, \nu).$$

Dans les autres cas le test est considéré comme non concluant.

### 3.3 Test de Chow en deux étapes

Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de combiner les procédures que nous venons de décrire pour obtenir une procédure conçue pour détecter des

instabilités tant dans les coefficients autorégressifs que dans les coefficients de régression à une date pré-spécifiée  $T_1$ . Pour ce faire, on considère à nouveau la contre-hypothèse

$$(3.12) \quad y_{(i)} = X_{(i)}\beta_{(i)} + u_{(i)}, \quad u_{(i)} = u_{(i)}^{(1)}\theta + \varepsilon_{(i)},$$

$$\varepsilon_{(i)} \sim \text{ind} N(0, \sigma^2 I_{T_i}), \quad i = 1, 2,$$

où  $\beta_{(1)}$ ,  $\beta_{(2)}$ ,  $\theta_{(1)}$ ,  $\theta_{(2)}$  peuvent différer. Nous voulons tester l'hypothèse nulle

$$H_0(\beta, \theta): \beta_{(1)} = \beta_{(2)}, \quad \theta_{(1)} = \theta_{(2)}$$

contre (3.12).  $H_0(\beta, \theta)$  s'écrit comme la conjonction de deux hypothèses:

$$H_0(\beta, \theta) = H_0(\beta) \cap H_0(\theta) \quad \text{où} \quad H_0(\theta): \theta_{(1)} = \theta_{(2)} \quad \text{et} \quad H_0(\beta): \beta_{(1)} = \beta_{(2)}. \quad \text{Par conséquent,}$$

on peut procéder en deux étapes. On commence par tester  $H_0(\theta)$  au niveau  $\alpha/2$  en appliquant le test induit développé plus haut. Ensuite, à la lumière du résultat du test  $H_0(\theta)$ , on décide de tester ou non  $H_0(\beta)$ . Il y a deux cas possibles: (1) on rejette  $H_0(\theta)$ ,  $H_0(\beta, \theta)$  est rejeté; (2) si on accepte  $H_0(\theta)$ , on teste alors  $H_0(\beta, \theta)$  en testant  $H_0(\beta)$  au niveau  $\alpha/2$  contre l'alternative où seulement les paramètres de régression peuvent changer à l'aide du test de Chow généralisé (pour  $m = 2$ ) tel que développé plus haut.

Il est facile de voir que le niveau de cette procédure n'est pas supérieur à  $\alpha$ .

### 3.4 Test de Chow permettant l'instabilité des paramètres autorégressifs

Les procédures précédentes ne permettent pas de tester la stabilité des coefficients de régression séparément de celle des coefficients autorégressifs. Nous allons maintenant décrire une procédure qui permet de tester la stabilité des coefficients de régression tout en permettant que les coefficients autorégressifs changent. Utilisant une des approches proposées dans Neifar et Dufour (1995 b) si  $p \geq 2$ , et Dufour et Neifar (1995 a) si  $p = 2$ , nous pouvons construire une région de confiance conjointe pour  $\theta_{(1)}$  et  $\theta_{(2)}$  que l'on note par  $I_{(\theta_{(1)}, \theta_{(2)})}(\alpha_1)$ . Considérons maintenant l'hypothèse

$$H_0(\beta, \theta_0): \beta_{(1)} = \beta_{(2)}, \theta_{(1)} = \theta_{(10)}, \theta_{(2)} = \theta_{(20)}$$

contre une alternative où les paramètres de régression peuvent changer, nous supposons que  $\sigma$  est stable. Sous  $H_0(\beta, \theta_0)$ , on peut transformer le modèle (3.12) comme suit:

$$(3.13) \quad y_i(\theta_{(i0)}) = x_{(i)}(\theta_{(i0)})\tilde{\beta}_{(i)} + u_{(i)}(\theta_{(i0)}), \quad i = 1, 2,$$

un modèle qui satisfait toutes les hypothèses du modèle linéaire classique. On peut réécrire (3.13) sous la forme

$$(3.14) \quad y(\theta_{(10)}, \theta_{(20)}) = x(\theta_{(10)}, \theta_{(20)})\tilde{\beta} + u(\theta_{(10)}, \theta_{(20)})$$

où

$$y(\theta_{(10)}, \theta_{(20)}) = \begin{bmatrix} y_{(1)}(\theta_{(10)}) \\ y_{(2)}(\theta_{(20)}) \end{bmatrix}, \quad x(\theta_{(10)}, \theta_{(20)}) = \begin{bmatrix} x_{(1)}(\theta_{(10)}) \\ x_{(2)}(\theta_{(20)}) \end{bmatrix},$$

$$\underline{u}(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)}) = \begin{bmatrix} \underline{u}_{(1)}(\underline{\theta}_{(10)}) \\ \underline{u}_{(2)}(\underline{\theta}_{(20)}) \end{bmatrix}.$$

Sous l'alternative, l'équation (3.13) prend plutôt la forme:

$$(3.15) \quad y(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)}) = \bar{x}(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)}) \bar{\beta} + \underline{u}(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)})$$

où

$$\bar{x}(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)}) = \begin{bmatrix} x_{(1)}(\underline{\theta}_{(10)}) & 0 \\ 0 & x_{(2)}(\underline{\theta}_{(20)}) \end{bmatrix}, \quad \bar{\beta} = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{(1)} \\ \tilde{\beta}_{(2)} \end{bmatrix}.$$

On testera donc l'hypothèse

$$H_0(\tilde{\beta}, \underline{\theta}_0): \tilde{\beta}_{(1)} = \tilde{\beta}_{(2)}, \underline{\theta}_{(1)} = \underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(2)} = \underline{\theta}_{(20)},$$

au moyen de la statistique

$$(3.16) \quad CDE(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)}) = \frac{v}{v_0} \left[ \frac{S_0(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)}) - S_1(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)})}{S_1(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)})} \right]$$

où  $S_0(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)})$  et  $S_1(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)})$  sont les sommes minimums des carrés des erreurs

sous et sans contraintes

$$S_0(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)}) = \min_{\tilde{\beta}} \left[ \underline{u}(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)})' \underline{u}(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)}) \right],$$

$$S_1(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)}) = \min_{\tilde{\beta}} \left[ \bar{\underline{u}}(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)})' \bar{\underline{u}}(\underline{\theta}_{(10)}, \underline{\theta}_{(20)}) \right],$$

$$\underline{u}(\theta_{(10)}, \theta_{(20)}) = \underline{y}(\theta_{(10)}, \theta_{(20)}) - \underline{x}(\theta_{(10)}, \theta_{(20)})\underline{\beta} ,$$

$$\bar{u}(\theta_{(10)}, \theta_{(20)}) = \bar{y}(\theta_{(10)}, \theta_{(20)}) - \bar{x}(\theta_{(10)}, \theta_{(20)})\bar{\beta} ,$$

et  $v, v_0$  sont les degrés de liberté appropriés,  $v = T - 2k$ ,  $v_0 = k$ . Si maintenant on définit

$$(3.17) \quad CDE_L(\alpha_1) = \inf \{ CDE(\theta_{(10)}, \theta_{(20)}): (\theta_{(10)}, \theta_{(20)}) \in I_{(\theta_{(10)}, \theta_{(20)})}(\alpha_1) \},$$

$$CDE_U(\alpha_1) = \sup \{ CDE(\theta_{(10)}, \theta_{(20)}): (\theta_{(10)}, \theta_{(20)}) \in I_{(\theta_{(10)}, \theta_{(20)})}(\alpha_1) \},$$

on peut construire un test à bornes similaire à celui de (3.11). Il est à noter que cette procédure s'étend aisément au cas de  $m$  ruptures. Il s'agit simplement de l'appliquer  $m$  fois sur les  $m$  sous échantillons. A chaque fois on utilise les observations allant de la date de rupture  $[T_1 - (k + p)]$  observations à la date de rupture  $[T_2 + (k + p)]$  observations.

### 3.5 Test de Chow avec date de rupture inconnue sous l'alternative

Supposons à présent, que sous l'alternative, il y a rupture à une date inconnue  $[\pi T]$  des coefficients de régression  $\underline{\beta}$  du modèle (2.2), où  $\pi \in (0,1)$  et  $[x]$  indique la partie entière de  $x$ . Considérons alors une partition de  $u_-, y_-, X$  et  $\underline{u}$  semblable à (3.4) avec  $m = 2$ , ce qui fait que le modèle (2.2) peut s'écrire:

$$(3.18) \quad y_{(i)}(\pi) = X_{(i)}(\pi)\beta_{(i)}(\pi) + u_{(i)}(\pi), \quad u_{(i)}(\pi) = u_{-}^{(i)}(\pi)\theta + \varepsilon_{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

$$\varepsilon \sim N[0, \sigma^2 I_T]$$

où  $u_{(1)}(\pi)$  et  $y_{(1)}(\pi)$  sont des vecteurs  $[\pi T] \times 1$ ,  $X_{(1)}(\pi)$  est une matrice  $[\pi T] \times k$ ,  $u_{(2)}(\pi)$  et  $y_{(2)}(\pi)$  sont des vecteurs  $(T - [\pi T]) \times 1$ ,  $X_{(2)}(\pi)$  une matrice  $(T - [\pi T]) \times k$ , et  $\beta_{(i)}(\pi)$  est un vecteur  $k \times 1$ . Nous voulons tester  $H_0(\beta, \pi): \beta_{(1)}(\pi) = \beta_{(2)}(\pi)$  contre l'alternative où les paramètres  $\beta_{(i)}(\pi)$  peuvent changer.  $\pi$  est un paramètre de nuisance qui s'ajoute à  $\theta$  et  $\sigma$ . Ce type de problème est analysé d'un point de vue asymptotique par Davies (1977, 19887), Andrews et Ploberger (1991), Hansen (1991) et King et Shively (1993). Pour une procédure à distance finie, voir Andrews, Lee et Ploberger (1993). Pour développer un test d'analyse de covariance de l'hypothèse nulle lorsque  $\pi$  est inconnue, nous allons commencer par écrire le modèle (3.18) sous la forme compacte suivante:

$$(3.19) \quad y(\pi) = \bar{X}(\pi)\bar{\beta}(\pi) + u(\pi), \quad u(\pi) = u_{-}(\pi)\theta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N[0, \sigma^2 I_T]$$

où

$$\bar{X}(\pi) = \text{diag}(X_{(i)}(\pi)), \quad i = 1, 2, \quad y(\pi) = (y_{(1)}(\pi), y_{(2)}(\pi))'$$

et  $\bar{\beta}(\pi) = (\beta_{(1)}(\pi), \beta_{(2)}(\pi))'$ . Supposons qu'on fixe  $\theta = \theta_0$  avec  $\theta_0$  est un vecteur de l'ensemble admissible  $S_p$ . Le modèle (3.19) après transformation s'écrit

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \gamma(\theta_0, \pi) &= \bar{x}(\theta_0, \pi) \bar{\beta}(\pi) + \mu(\theta_0, \pi) \\ &= \gamma(\pi) - y_-(\pi) \theta_0 \end{aligned}$$

où

$$\bar{x}(\theta_0, \pi) = \text{diag}(x_{(i)}(\theta_0, \pi)), \quad i = 1, 2,$$

$$x_{(i)}(\theta_0, \pi) = [x_{1(i)}(\theta_0, \pi), \dots, x_{k(i)}(\theta_0, \pi)], \quad \bar{\beta}(\pi) = \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_{(1)}(\pi) \\ \tilde{\beta}_{(2)}(\pi) \end{bmatrix}.$$

Le modèle (3.20) satisfait toutes les hypothèses du modèle linéaire classique. Supposons aussi que  $\pi$  soit connue; la statistique de Chow pour tester l'hypothèse équivalente à l'hypothèse nulle  $H_0(\tilde{\beta}, \pi): \tilde{\beta}_{(1)}(\pi) = \tilde{\beta}_{(2)}(\pi)$  est:

$$D(\pi, \theta_0) = \frac{v(\pi)}{v_0(\pi)} \left[ \frac{S_0(\theta_0) - S_1(\theta_0, \pi)}{S_1(\theta_0, \pi)} \right]$$

où  $S_0(\theta_0)$  et  $S_1(\theta_0, \pi)$  sont les sommes minimums des carrés des erreurs sous et sans contraintes:

$$S_0(\theta_0) = \min_{\tilde{\beta}} [y(\theta_0) - x(\theta_0)\tilde{\beta}]' [y(\theta_0) - x(\theta_0)\tilde{\beta}],$$

$$S_1(\theta_0, \pi) = \min_{\tilde{\beta}(\pi)} [\underline{u}(\theta_0, \pi)' \underline{u}(\theta_0, \pi)]$$

où

$$\underline{u}(\theta_0, \pi) = y(\theta_0, \pi) - \bar{x}(\theta_0, \pi)\bar{\beta}(\pi)$$

$$x(\theta_0, \pi) = \begin{bmatrix} x_{(1)}(\theta_0, \pi) \\ x_{(2)}(\theta_0, \pi) \end{bmatrix}, \quad v(\pi) = T - 2k, \quad v_0(\pi) = k.$$

Puisque  $\pi$  est inconnue, nous allons nous servir de chaque  $\pi$  élément de  $(k/T, 1 - k/T)$ .<sup>2</sup> Considérons la statistique suivante:

$$(3.21) \quad DMU(\theta_0) = \max \left\{ D(\pi, \theta_0) : \pi \in \left( \frac{k}{T}, \frac{T-k}{T} \right) \right\}.$$

Puisque  $\theta$  est inconnu, on va se servir de chaque  $\theta_0$  élément d'une région de confiance exacte pour  $\theta$  de niveau  $1 - \alpha_1$  que l'on note par  $I_{\theta}(\alpha_1)$  où  $0 < \alpha_1 < 1$ . Considérons les statistiques suivantes:

$$(3.22) \quad DMU_L(\alpha_1) = \inf \{ DMU(\theta_0) : \theta_0 \in I_{\theta}(\alpha_1) \},$$

$$(3.23) \quad DMU_U(\alpha_1) = \sup \{ DMU(\theta_0) : \theta_0 \in I_{\theta}(\alpha_1) \}.$$

---

<sup>2</sup>Andrews (1993) propose l'utilisation de l'intervalle (.15, .85) pour des gains de puissance des tests asymptotiques.

Les distributions analytiques de ces statistiques sont inconnues, mais peuvent être simulées facilement par des expériences de Monte Carlo. On construit ainsi le test à borne suivant:

rejeter l'hypothèse nulle si  $DMU_L(\alpha_1) \geq c(\alpha_2)$ ,

accepter l'hypothèse nulle si  $DMU_U(\alpha_1) < c(\alpha_2')$ ,

où  $c(\alpha_2)$  et  $c(\alpha_2')$  sont des points critiques qui peuvent être calculés par simulation.

#### 4. Tests prédictifs de Chow

Dans cette section, nous proposons des généralisations de tests de stabilité de type prédictif similaires à ceux proposés par Chow (1960), Dufour (1980 - 1982), Dufour, Ghysels et Hall (1994) et Dufour et Kiviet (1995). Nous considérons deux catégories de tests: des tests globaux qui considèrent simultanément toutes les erreurs de prévision, et des tests individuels qui permettent d'analyser la forme du changement structurel.

##### 4.1 Test prédictif global

Nous allons développer maintenant un test de stabilité prédictif global du modèle (2.1). Pour ce faire on va partitionner toutes les variables du modèle de la même façon

que les équations (3.4) avec  $m = 2$ . Par hypothèse  $1 \leq r_1 = \text{rang}(X_{(1)}) = k < T_1$  (pas de condition de rang à imposer sur  $X_{(2)}$ ). On veut tester  $H_0(\beta, \theta, \sigma): \beta_{(1)} = \beta_{(2)}, \theta_{(1)} = \theta_{(2)}, \sigma_{(1)} = \sigma_{(2)}$  contre l'alternative où chacun des paramètres de l'hypothèse nulle peut changer. Sous  $H_0(\beta, \theta, \sigma)$  et quand  $\theta_{(1)} = \theta_{(2)} = \theta_0$ , les éléments du vecteur des erreurs de prévision  $\hat{u}_{(2)}(\theta_0) = y_{(2)}(\theta_0) - x_{(2)}(\theta_0)\hat{\beta}_{(1)}(\theta_0)$  sont de moyenne nulle, où  $\hat{\beta}_{(1)}(\theta_0) = [x'_{(1)}(\theta_0)x_{(1)}(\theta_0)]^{-1}x'_{(1)}(\theta_0)y_{(1)}(\theta_0)$  est l'estimateur des moindres carrés ordinaires de  $\tilde{\beta}_{(1)}$  de la régression transformée  $y_{(1)}(\theta_0) = x_{(1)}(\theta_0)\tilde{\beta}_{(1)} + u_{(1)}(\theta_0)$ . Pour tester  $H_0(\beta, \theta, \sigma)$ , on considère alors la statistique prédictive de Chow

$$PC(\theta_0) = \frac{T_1 - k}{T_2} \left[ \frac{S_0(\theta_0) - \bar{S}_1(\theta_0)}{\bar{S}_1(\theta_0)} \right],$$

où  $S_0(\theta_0)$  et  $\bar{S}_1(\theta_0)$  sont les sommes minimums des carrés des erreurs sous et sans contraintes:

$$S_0(\theta_0) = \min_{\tilde{\beta}} [y(\theta_0) - x(\theta_0)\tilde{\beta}]'[y(\theta_0) - x(\theta_0)\tilde{\beta}],$$

$$\bar{S}_1(\theta_0) = \min_{\tilde{\beta}_{(1)}} [y_{(1)}(\theta_0) - x_{(1)}(\theta_0)\tilde{\beta}_{(1)}]'[y_{(1)}(\theta_0) - x_{(1)}(\theta_0)\tilde{\beta}_{(1)}],$$

$$S_0(\theta_0) - \bar{S}_1(\theta_0) = \hat{u}'_{(2)}(\theta_0)[S(\theta_0)]^{-1}\hat{u}_{(2)}(\theta_0),$$

$$S(\theta_0) = [I_{T_2} + x_{(2)}(\theta_0)[x'_{(1)}(\theta_0)x_{(1)}(\theta_0)]^{-1}x_{(2)}(\theta_0)'].$$

Supposons maintenant que l'on dispose d'une région de confiance valide pour  $\theta_{(1)}$  de niveau  $(1 - \alpha_1)$ :  $I_{\theta_{(1)}}(\alpha_1)$  tel que  $P[\theta_{(1)} \in I_{\theta_{(1)}}(\alpha_1)] \geq 1 - \alpha_1$ . Dès lors, on peut définir les statistiques:

$$(4.1) \quad PC_L(\alpha_1) = \inf \{ PC(\theta_0) : \theta_0 \in I_{\theta_{(1)}}(\alpha_1) \},$$

$$PC_U(\alpha_1) = \sup \{ PC(\theta_0) : \theta_0 \in I_{\theta_{(1)}}(\alpha_1) \}.$$

En appliquant le lemme 1 proposé dans Dufour et Kiviet (1993) et en prenant  $\alpha_1$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha'_2$  tels que  $0 \leq \alpha_1 < \alpha < 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$  et  $\alpha'_2 = \alpha + \alpha_1 < 1$ , on peut déduire que

$$P[PC_L(\alpha_1) \geq F(\alpha_2; T_2, T_1 - k)] \leq \alpha,$$

$$P[PC_U(\alpha_1) < F(\alpha'_2; T_2, T_1 - k)] \leq 1 - \alpha.$$

Ainsi on construit le test à bornes suivant :

$$(4.2) \quad \text{rejeter l'hypothèse nulle si } PC_L(\alpha_1) \geq F(\alpha_2; T_2, T_1 - k),$$

$$\text{accepter l'hypothèse nulle si } PC_U(\alpha_1) < F(\alpha'_2; T_2, T_1 - k).$$

## 4.2 Tests prédictifs individuels

Le test précédent est un test global qui considère le vecteur complet des erreurs de prévision  $\hat{u}_{(2)}(\theta_0)$ . Pour analyser la forme du changement structurel, il sera utile de considérer les erreurs de prévision individuelles  $\hat{u}_t(\theta_0) = y_t(\theta_0) - x_t(\theta_0)\hat{\beta}_{(1)}(\theta_0)$ ,  $t = T_1 + 1, \dots, T$ , où  $\hat{\beta}_{(1)}(\theta_0)$  est l'estimateur des moindres carrés ordinaires de  $\tilde{\beta}_{(1)}$  de la régression transformée. Pour tester l'hypothèse nulle, on considère alors les statistiques

$$(4.3) \quad PCO(\theta_0, t) = \frac{\hat{u}_t(\theta_0)}{s_{(1)}\Delta_t}, \quad t = T_1 + 1, \dots, T$$

où

$$\Delta_t = [1 + x_t(\theta_0)(x_{(1)}'(\theta_0)x_{(1)}(\theta_0))^{-1}x_t(\theta_0)]^{-\frac{1}{2}}, \quad s_{(1)}^2 = \hat{u}_{(1)}'(\theta_0)\hat{u}_{(1)}(\theta_0)/(T_1 - k),$$

qui lorsque  $\theta = \theta_0$  et sous l'hypothèse nulle de stabilité suivent des distributions  $t$  de student avec  $T_1 - k$  degrés de liberté. Pour tenir compte du fait que  $\theta$  est inconnu, on considère les statistiques

$$PCO_L(\alpha_1, t) = \inf \{ PCO(\theta_0): \theta_0 \in I_{\theta_0}(\alpha_1, T_1) \},$$

$$PCO_U(\alpha_1, t) = \sup \{ PCO(\theta_0): \theta_0 \in I_{\theta_0}(\alpha_1, T_1) \},$$

où  $I_{\theta}(\alpha_1, T_1)$  est la région de confiance pour  $\theta$  obtenue à l'aide des  $T_1$  premières observations. En prenant  $\alpha_1$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_2'$  tels que  $0 < \alpha_1 < \alpha < 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$  et  $\alpha_2' = \alpha + \alpha_1 < 1$ , on aura

$$(4.4) \quad P[ | PCO(\alpha_1, t) | \geq t(\alpha_2/2; T_1 - k) ] \leq \alpha ,$$

$$P[ | PCO(\alpha_1, t) | < t(\alpha_2'/2; T_1 - k) ] \leq 1 - \alpha .$$

On obtient ainsi le test à borne suivant:

$$(4.5) \quad \text{rejeter l'hypothèse nulle si } PCO_2(\alpha_1, T_1) \geq t(\alpha_2/2; T_1 - k),$$

$$\text{accepter l'hypothèse nulle si } PCO_2(\alpha_1, T_1) < t(\alpha_2'/2; T_1 - k).$$

## 5. Applications économiques

Nous allons dans ce qui suit étudier deux séries. La première est le P.I.B réel tunisien (données annuelles allant de 1961 à 1992). La seconde est la série de l'investissement domestique brut aux Etats-Unis (données en dollars de 1982, trimestrielles, allant de 1952:1 à 1986:4 ; source: Berndt [1995, p.278, série IS de Kopckel]). Nous commençons par l'analyse de la première. Considérant une alternative où il y a un changement dans la série en 1972, date d'une politique de promulgation d'un code des investissements très libéral pour attirer les investisseurs étrangers et

promouvoir les exportations, l'estimation du modèle par M.C.O pour la première période (allant de 1961 à 1971) donne:

$$y_t = 0.51439 + 0.94617 y_{t-1} - 0.42672 (y_{t-1} - y_{t-2}) + \hat{e}_t$$

|          |         |          |           |
|----------|---------|----------|-----------|
| (0.9100) | (0.115) | (0.3163) | (0.04407) |
| (0.5591) | (8.229) | (-1.349) |           |

$$\bar{R}^2 = 0.8919, \quad DW = 1.3356, \quad SSR = 0.011653;$$

les valeurs entre parenthèses sont les écarts-types et les statistiques t de student. Les intervalles de confiance asymptotiques (avec  $t_{0.05/4}(6) = 2.969$ ) pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont:

$$\theta_1 \in [0.60482, 1.2875], \quad \theta_2 \in [-1.3656, 0.51215].$$

Par l'application de l'approche fondée sur les M.C.O non contraints [voir Neifar et Dufour (1995 a)] (pour un niveau 0.975) on obtient la région de confiance de la figure 1 "page 206", et par projection on obtient les intervalles simultanés

$$\theta_1 \in [-3.0, 1.0], \quad \theta_2 \in [-1.0, 1.0].$$

Pour la deuxième période (allant de 1973 à 1992), on obtient:

$$y_t = 0.46532 + 0.95467 y_{t-1} - 0.23214 (y_{t-1} - y_{t-2}) + \hat{e}_t$$

|          |           |          |            |
|----------|-----------|----------|------------|
| (0.2206) | (0.02445) | (0.2068) | (0.026246) |
| (2.109)  | (39.05)   | (-1.123) |            |

$$\bar{R}^2 = 0.9886, \quad DW = 2.0201, \quad SSR = 0.011021,$$

et les intervalles de confiance asymptotiques (avec  $t_{0.05/4}(16) = 2.473$ )

$$\theta_1 \in [0.89421, 1.0151], \quad \theta_2 \in [-0.74348, 0.27921].$$

Si on applique de nouveau l'approche exacte, on obtient la région de confiance de la figure 2 "page 207" (pour un niveau de 0.975), et par projection sur les axes on obtient les intervalles de confiance simultanés

$$\theta_1 \in [0.77, 1.0] , \theta_2 \in [-1.0, 1.0].$$

L'examen des régions des figures 1 et 2 suggère que le processus change d'une période à l'autre, mais l'intersection de ces deux régions est non vide "test induit", ce qui ne permet pas de rejeter l'hypothèse que les coefficients autorégressifs du modèle AR(2) sont stables. Si nous réécrivons le processus  $y_t$  sous la forme

$$(5.1) \quad y_t = \beta_1 + u_t, \quad t = 1, \dots, T$$

$$u_t = \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 (u_{t-1} - u_{t-2}) + e_t,$$

nous pouvons appliquer d'autres tests, par exemple, des tests prédictifs. Les estimations par maximum de vraisemblance conditionnel d'un tel modèle sur la première sous-période (allant de 1961 à 1971), la deuxième sous-période (allant de 1972 à 1992) et sur tout l'échantillon sont au tableau I "page 202". Le test prédictif global donne les statistiques et les points critiques (pour les niveaux  $\alpha_1 = 0.05$ ,  $\alpha_2 = 0.05$ ,  $\alpha = 0.10$ ,  $\alpha'_2 = 0.15$ ) suivants:

$$PC_L(\alpha_1) = 0.89208 > F(\alpha_2; T_2, T_1 - k) = 3.140607$$

$$PC_U(\alpha_1) = 17.77151 > F(\alpha'_2; T_2, T_1 - k) = 2.04306$$

où  $T_1 = 9$ ,  $T_2 = 21$ ,  $k = 1$ . Il est clair que ce test ne permet pas de rejeter la stabilité des paramètres du modèle (5.1). Ce résultat sera confirmé aussi avec l'application des tests prédictifs individuels; voir les statistiques et les points critiques (aux niveaux  $\alpha_1 = 0.05$ ,  $\alpha_2 = 0.05$ ,  $\alpha = 0.10$ ,  $\alpha'_2 = 0.15$ ) reportés au tableau II

"page 203". La région de confiance construit pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  pour la première partie de l'échantillon (utilisée pour l'application des tests prédictifs) est fondée sur la statistique  $F_{(5)}(\theta_0)$  (voir essai IV). Il se trouve que tout le triangle de stationnarité est accepté par la procédure et donc les intervalles de confiances simultanés pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  obtenus par projection sur les axes sont:

$$\theta_1 \in [-2.99, 0.99], \theta_2 \in [-0.99, 0.99].$$

Nous allons maintenant appliquer des tests de changement structurels à un modèle de régression avec constante, une tendance et des erreurs autocorrélées d'ordre deux. Les données de la série (en logarithme) des investissements domestiques bruts aux U.S.A peuvent être raisonnablement décrite par le modèle:

$$(5.2) \quad I_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t, \quad t = 1, \dots, T$$

$$u_t = \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 (u_{t-1} - u_{t-2}) + e_t$$

où  $T = 140$ ,  $e_t \sim^{ind} N(0, \sigma^2)$ . Les paramètres autorégressifs sont contraints par les inégalités suivantes:  $-3 \leq \theta_1 \leq 1$ ,  $|\theta_2| \leq 1$  et  $2\theta_2 + \theta_1 \geq 1$ . Les estimations par maximum de vraisemblance conditionnel du modèle (5.2) pour les deux moitiés de l'échantillon et pour l'échantillon au complet sont présentées au tableau III "page 204". Afin d'appliquer quelques tests de changement structurel exacts, on construit en premier lieu la région de confiance pour les paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (avec  $\alpha_1 = 0.05$ ). Après

l'application des diverses méthodes proposées (dans les essais I et IV) à la première moitié de l'échantillon (division utilisée par Dufour et Kiviet (1995)), nous choisissons la région la plus précise qui est fondée sur la statistique  $F_{(5)}(\theta_0)$  (voir figure 3 "page 208").<sup>3</sup> Les intervalles de confiance simultanés ainsi obtenus par projection sur les axes sont:

$$\theta_1 \in [0.78, 1.0] , \theta_2 \in [-0.2389, 0.551].$$

Il est à noter que la valeur de  $\theta_2 = 0$  n'est pas rejetée par cette procédure. Ceci n'est pas le cas pour la deuxième moitié de l'échantillon; voir la région de confiance pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sur la figure 4 "page 209". Par projection sur les axes nous obtenons les intervalles de confiance simultanés suivants:

$$\theta_1 \in [0.769, 0.99] , \theta_2 \in [0.13, 0.80].$$

Le test prédictif global (avec les niveaux  $\alpha_2 = 0.05$  ,  $\alpha = 0.10$  ,  $\alpha'_2 = 0.15$ ) permet le rejet de l'hypothèse de stabilité des paramètres du modèle (5.2). En effet les statistiques et les points critiques calculés sont:

$$PC_L(\alpha_1) = 1.680214 > F(\alpha_2; T_2, T_1 - k) = 1.494376$$

$$PC_U(\alpha_1) = 8.48457 > F(\alpha'_2; T_2, T_1 - k) = 1.28743$$

---

<sup>3</sup>Le nombre de réplication choisit pour générer les données pour le calcul des p-values est égal à  $N = 200$ .

où  $T_2 = 68$ ,  $T_1 - k = 66$ ,  $k = 2$ . Les tests prédictifs individuels suggèrent des changements aux dates suivantes: 71:2, 71:4, 74:1, 74:3, 75:1, 75:2, 77:4, 80:2, 82:2, 83:1, 86:1 et 86:2. Notons que les dates de rupture trouvées par Dufour et Kiviet (1995) sont incluses dans cette série. Le tableau IV "page 205" illustre les statistiques calculées à ces dates et les points critiques du test.

Tableau I  
 Estimation par maximum de vraisemblance  
 du modèle (5.1) pour le logarithme des  
 P.I.B réels tunisiens

| Estimateurs                               | $\hat{\beta}_1$    | $\hat{\theta}_1$    | $\hat{\theta}_2$     | $\hat{\sigma}$ | $R^2$  |
|---|--------------------|---------------------|----------------------|----------------|--------|
| premier<br>sous-période<br>( $T_1 = 9$ )  | 8.6559<br>(0.1053) | 0.87521<br>(0.1931) | -0.3441<br>(0.3129)  | 0.03941        | 0.9583 |
| second sous-<br>période<br>( $T_2 = 21$ ) | 9.9446<br>(0.0977) | 0.9413<br>(0.08614) | -0.1999<br>(0.2248)  | 0.02501        | 0.9929 |
| tout<br>l'échantillon<br>( $T = 30$ )     | 10.627<br>(0.1955) | 0.9656<br>(0.0539)  | -0.2651<br>(0.17604) | 0.03685        | 0.9952 |

Les valeurs entre parenthèses sont des écarts-types.

Tableau II "P.I.B"  
 Tests prédictifs individuels au niveau  $\alpha = 0.10$

| Année: t | $PCO_L(\alpha_1, T_1)$ | $PCO_U(\alpha_1, T_1)$ |
|----------|------------------------|------------------------|
| 1972     | 1.03163                | 4.5154                 |
| 1973     | 1.21426                | 3.45918                |
| 1974     | 0.28079                | 3.96468                |
| 1975     | 0.40609                | 4.26099                |
| 1976     | 0.69752                | 4.83375                |
| 1977     | 0.14907                | 5.19549                |
| 1978     | 1.12905                | 5.6835                 |
| 1979     | 0.84487                | 6.09357                |
| 1980     | 1.017615               | 6.63848                |
| 1981     | 0.77586                | 7.09623                |
| 1982     | 0.311059               | 7.39084                |
| 1983     | 0.73526                | 7.72379                |
| 1984     | 1.26184                | 7.92195                |
| 1985     | 1.19517                | 8.33186                |
| 1986     | 0.37133                | 8.55698                |
| 1987     | 1.30532                | 8.98091                |
| 1988     | 0.50359                | 8.96681                |
| 1989     | 1.11336                | 9.30164                |
| 1990     | 1.87254                | 9.61286                |
| 1991     | 0.97837                | 9.91407                |
| 1992     | 1.95745                | 10.4379                |

Les points critiques sont  $t(\alpha_2/2, T_1 - k) = 2.306$  et  $t(\alpha'_2/2, T_1 - k) = 1.5922$  où  $\alpha_2 = 0.05$ ,  $\alpha'_2 = 0.15$ .

Tableau III  
 Estimation par maximum de vraisemblance  
 du modèle (5.2) pour le logarithme des  
 investissements domestiques bruts aux U.S.A  
 [source: Berndt(1991, p.278; série IS de Kopcke)]

| Estimateurs                                       | $\hat{\beta}_1$   | $\hat{\beta}_2$  | $\hat{\theta}_1$ | $\hat{\theta}_2$ | $\hat{\sigma}$ | $R^2$ |
|---|-------------------|------------------|------------------|------------------|----------------|-------|
| premier<br>sous-<br>échantillon<br>( $T_1 = 70$ ) | 10.986<br>(0.068) | 0.009<br>(0.001) | 0.907<br>(0.047) | 0.192<br>(0.117) | 0.022          | 0.989 |
| second sous-<br>échantillon<br>( $T_2 = 68$ )     | 11.176<br>(0.176) | 0.005<br>(0.002) | 0.888<br>(0.041) | 0.518<br>(0.105) | 0.027          | 0.959 |
| tout<br>l'échantillon<br>( $T = 138$ )            | 11.126<br>(0.068) | 0.005<br>(0.001) | 0.930<br>(0.025) | 0.391<br>(0.078) | 0.025          | 0.992 |

Tableau IV "investissement"  
 Tests prédictifs individuels au niveau  $\alpha = 0.10$

| Semestre: t | $PCO_L(\alpha_1, T_1)$ | $PCO_U(\alpha_1, T_1)$ |
|-------------|------------------------|------------------------|
| 70:1        | 4.335                  | 7.105                  |
| 71:2        | 2.239                  | 6.269                  |
| 71:4        | 3.462                  | 7.902                  |
| 74:1        | 2.275                  | 4.995                  |
| 74:3        | 8.230                  | 11.989                 |
| 75:1        | 6.315                  | 13.121                 |
| 75:2        | 2.01                   | 12.121                 |
| 77:4        | 2.089                  | 10.256                 |
| 80:2        | 4.736                  | 8.298                  |
| 82:2        | 4.053                  | 7.779                  |
| 83:1        | 6.992                  | 12.922                 |
| 86:1        | 2.852                  | 8.146                  |
| 86:2        | 8.153                  | 15.089                 |

Les points critiques sont  $t(\alpha_2/2, T_1 - k) = 1.995$  et  $t(\alpha'_2/2, T_1 - k) = 1.456$   
 où  $\alpha_2 = 0.05$ ,  $\alpha'_2 = 0.15$ .

Figure 1: région de confiance exacte pour  $(\theta_1, \theta_2)'$  ( $\alpha_1 = 0.05$ ,  $T_1 = 9$ )

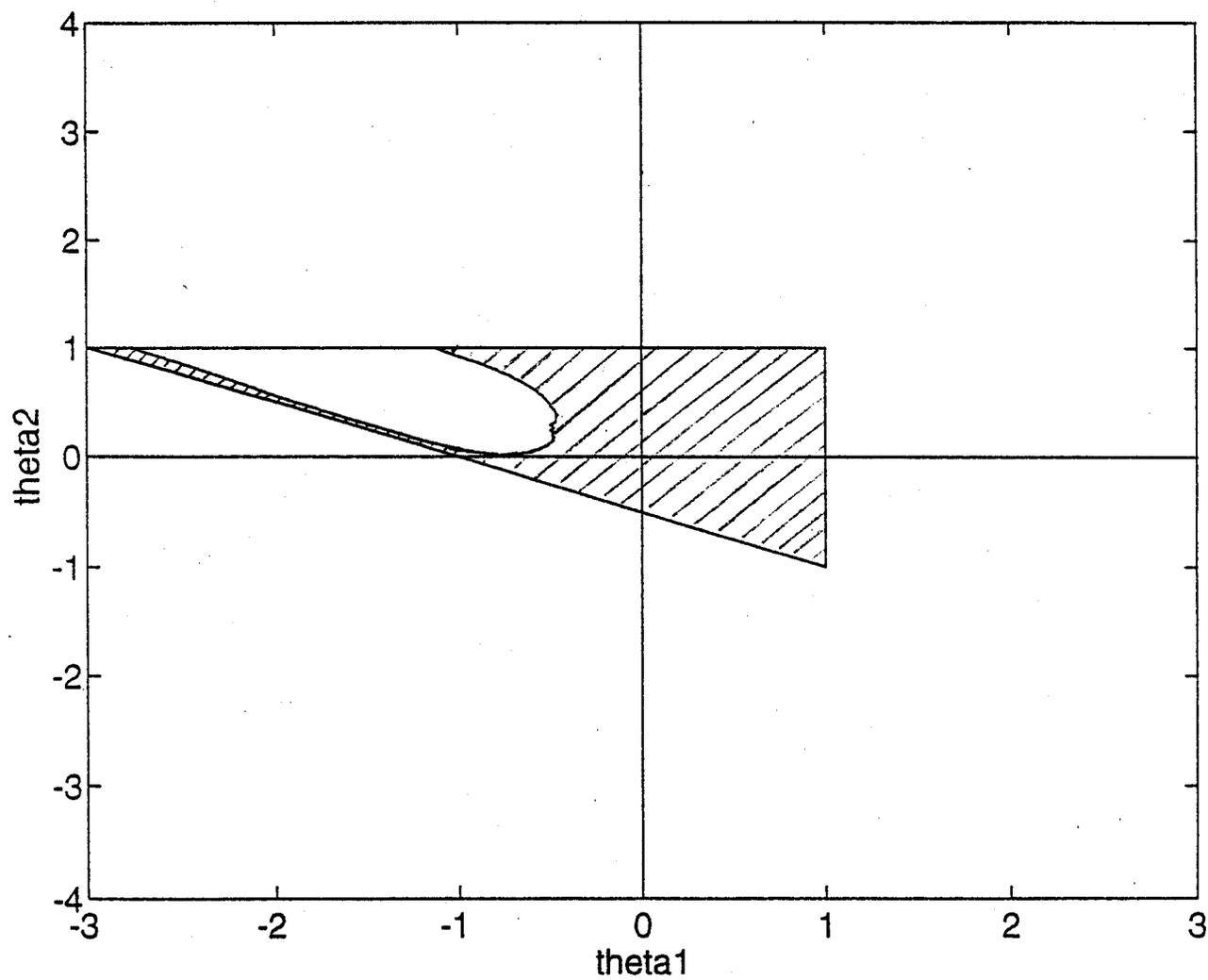


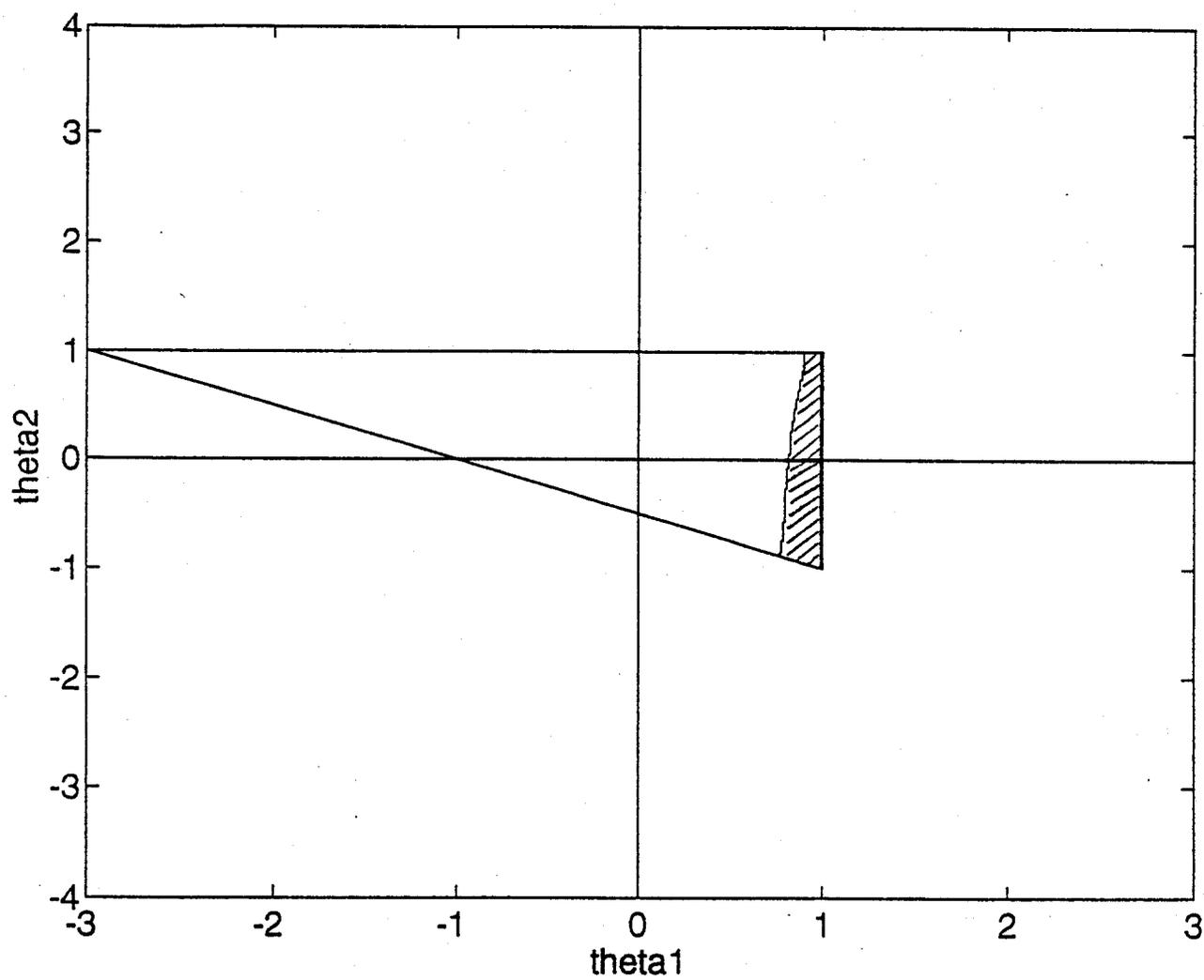
Figure 2: région de confiance exacte pour  $(\theta_1, \theta_2)'$  ( $\alpha_1 = 0.05$ ,  $T_2 = 21$ )

Figure 3: région de confiance exacte pour  $(\theta_1, \theta_2)'$  ( $\alpha_1 = 0.05$ ,  $T_1 = 70$ )  
"Modèle (5.1)"

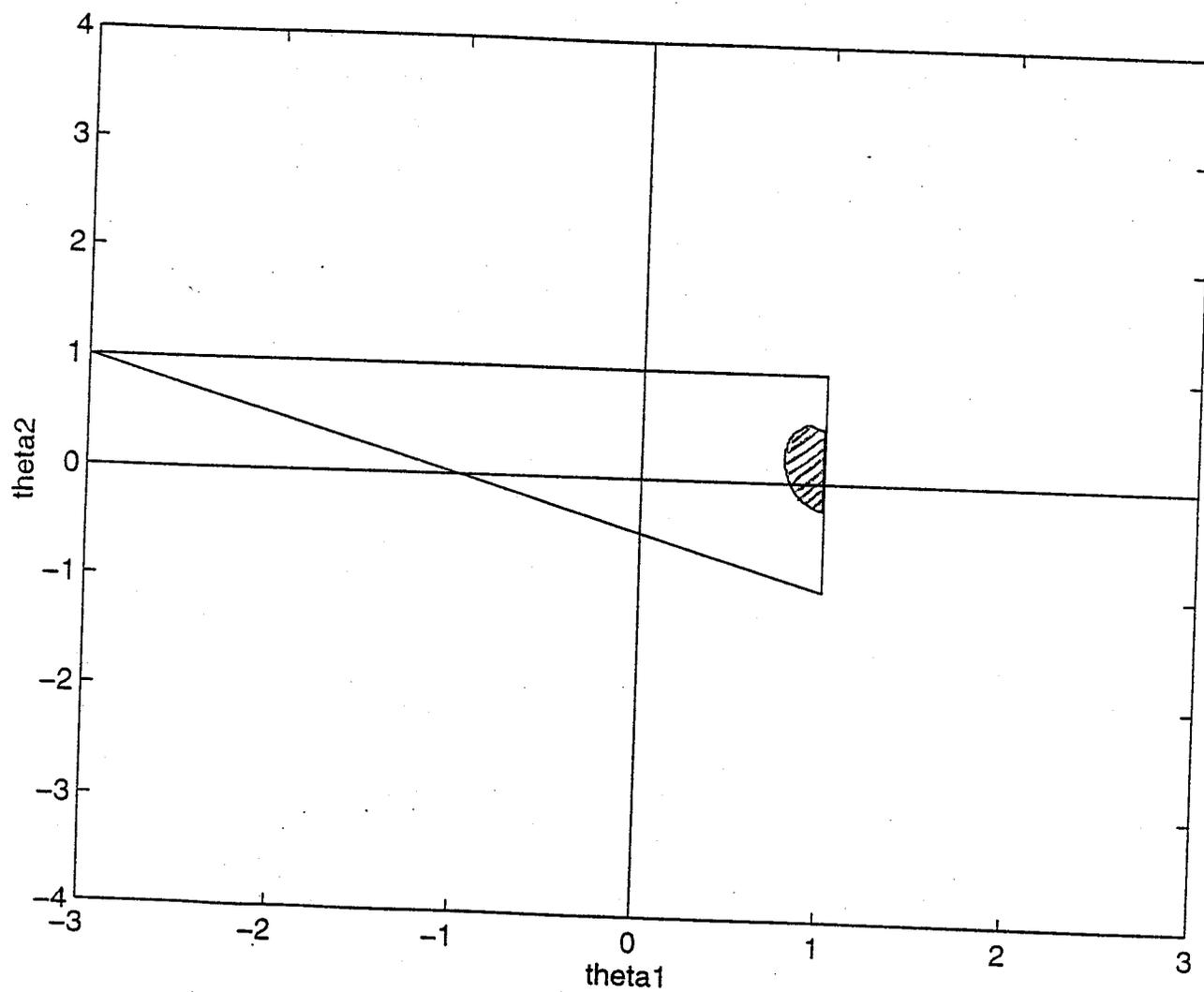
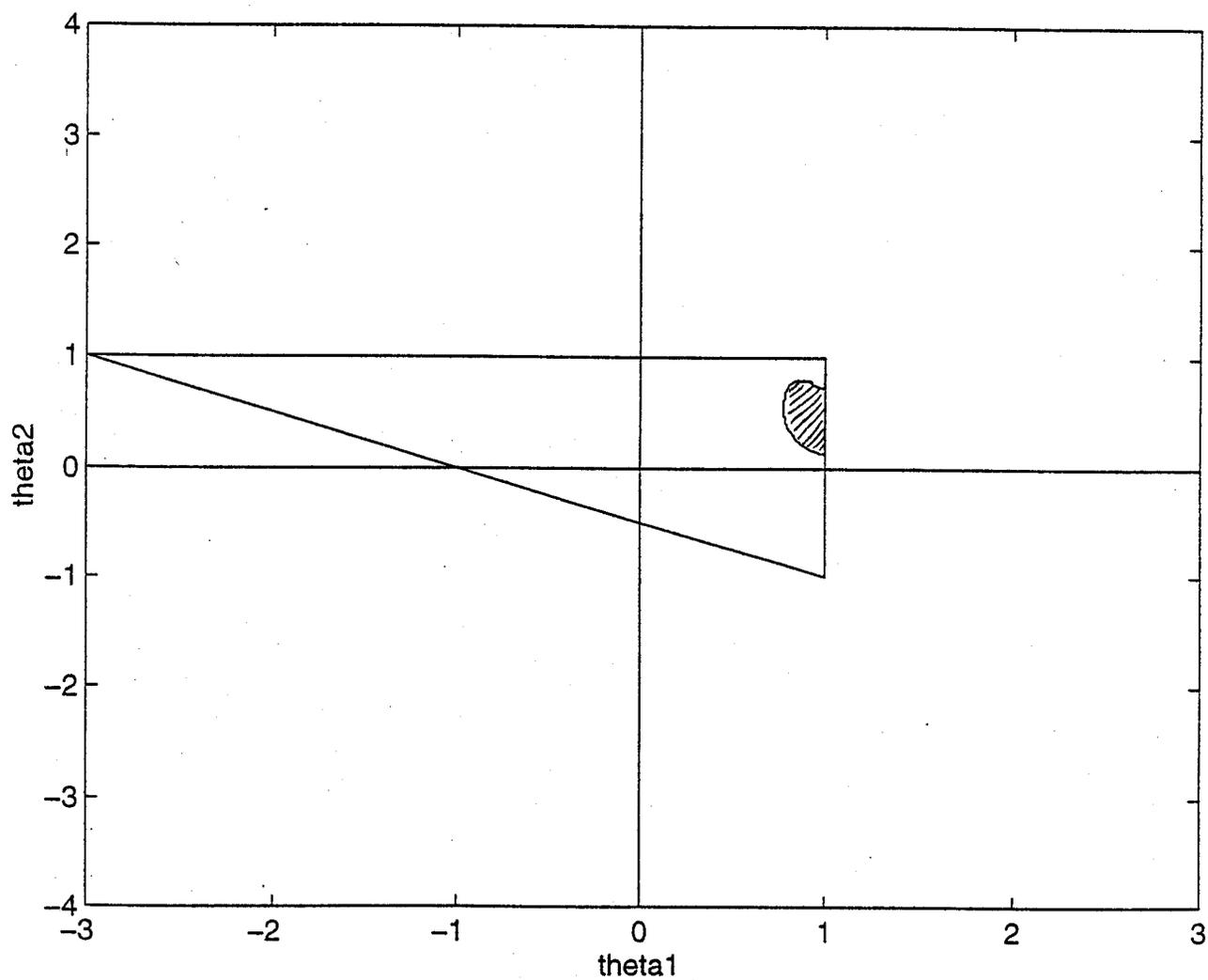


Figure 4: région de confiance exacte pour  $(\theta_1, \theta_2)'$  ( $\alpha_1 = 0.05$ ,  $T_2 = 68$ )  
"Modèle (5.1)"



## Références

- ANDREWS, D. W. K., (1993): "*Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point*," *Econometrica*, vol.61, No.4, 821-856.
- ANDREWS, D. W. K., I. LEE., and W. PLOBERGER., (1992): "*Optimal Changepoint Tests for Linear Regression*," Cowles Foundation Discussion Paper No. 1016, Yale University.
- BERNDT, E.R., (1991): "*The Practice of Econometrics: Classic and Contemporary*," Addison-Wesley, Reading, Mass.
- BROWN, R.L., J. DURBIN., et J.M. EVANS., (1975): "*Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over time (with discussion)*," *Journal of the Royal Statistical Society B* 37, 149-192.
- CHENERY, H., (1988): "*Introduction to Part 2*," *Handbook of Development Economics*, Volume I.
- CHOW, G.C., (1960): "*Tests of Equality between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions*," *Econometrica* 28, 591-605.
- DAVIES, R. B., (1977): "*Hypothesis Testing When a Nuisance Parameter is Present Only under the Alternative*," *Biometrika*, 64, 247-254.
- DAVIES, R. B., (1987): "*Hypothesis Testing When a Nuisance Parameter is Present Only under the Alternative*," *Biometrika*, 74, 33-43.
- DUFOUR, J.-M., (1980a): "*Dummy Variables and Predictive Tests for Structural Change*," *Economics Letters* 6, 241-247.

DUFOUR, J.-M., (1982a): "*Generalized Chow Tests for Structural Change: a Coordinate-free Approach*," *International Economic Review* 23, 565-575.

DUFOUR, J.-M., (1982b): "*Predictive Tests for Structural Change and the St. Louis Equation*," *American Statistical Association, Proceedings of the Business and Economic Statistics Section*, Washington (D.C.), 323-327.

DUFOUR, J.-M., (1982C): "*Recursive Stability Analysis of Linear Regression Relationships, An Exploratory Methodology*," *Journal of Econometrics* 19, 31-76.

DUFOUR, J.-M., E. GHYSELS., et A. HALL., (1994): "*Generalized Predictive Tests and Structural Change Analysis in Econometrics*," *International Economic Review* 35(1), February 1994, 199-229.

DUFOUR, J.-M., and J. F. KIVIET., (1995): "*Exact Tests for Structural Change in First-Order Dynamic Models*," à paraître dans *Journal of Econometrics*.

DUFOUR, J.-M., et M. NEIFAR., (1995 a): "*Méthodes d'Inférence Exactes pour un Modèle de Régression avec Erreurs AR(2): une Approche Fondée sur des Tests Induits contre l'Autocorrélation*," .

HANSEN, B. E., (1991): "*Inference When a Nuisance Parameter is not Identified Under the Null Hypothesis*," Working Paper No. 296, Rochester Center for Economic Research, University of Rochester.

HANSEN, B. E., (1992): "*Tests for Parameter Instability in Regressions with I(1) Processes*," *American Statistical Association*.

- KING, M. L., and T. S. SHIVELY., (1993): "*Locally Optimal Testing When a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative*," *Review of Economics and Statistics* 75, 1-7.
- KIVIET, J.F., and G.D.A. PHILLIPS., (1993): "*Alternative Bias Approximations in Regressions with a Lagged-dependent Variable*," *Econometric Theory* 9, 62-80.
- KULLBACK, S., and H. M. ROSENBLAT., (1957): "*On the Analysis of Multiple Regression in  $k$  Categories*," *Biometrika* 44, 67-83.
- NANKERVIS, J.C., and N.E. SAVIN., (1987): "*Finite Sample Distribution of  $t$  and  $F$  Statistics in an AR(1) Model with an Exogenous Variable*," *Econometric Theory* 3, 387-408.
- NEIFAR, M., et J.-M. DUFOUR., (1995 a): "*Méthodes d'Inférence Exactes pour des Processus Autorégressifs par Maximum de Vraisemblance Tronqué*,".
- NEIFAR, M., et J.-M. DUFOUR., (1995 b): "*Méthodes d'Inférence Exactes pour des Modèles de régression avec Erreurs Autorégressives: Extensions de l'Approche du Maximum de Vraisemblance Tronqué*,".
- SCHMIDT, P., and R. SICKLES., (1977): "*Some Further Evidence on the Use of the Chow Test under Heteroskedasticity*" *Econometrica*, vol.45, No.5.
- SYRQUIN, M., (1988): "*Patterns of Structural Change*," *Handbook of Development Economics*, Volume I, Chapter 7, 205-273.
- THEIL, H., and J.S. SHONKWILER., (1986): "*Monte Carlo Tests of Autocorrelation*," *Economics Letters* 20, 157-160.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, nous avons proposé des méthodes d'inférence exactes pour deux catégories de modèles:

- (1) des modèles autorégressifs d'ordre  $p$ , possiblement non-stationnaires, avec erreurs gaussiennes;
- (2) des modèles de régressions avec régresseurs fixes et erreurs  $AR(p)$  gaussiennes.

Nous avons apporté une grande attention au problème de construction de région de confiance, par opposition au problème plus "élémentaire" des tests d'hypothèse, et proposé des tests de changement structurel "exacts" dans le cadre des modèles considérés.

Les méthodes proposées sont fondées sur la conjonction de plusieurs techniques:

- (1) utilisation de tests induits (dont les niveaux sont relativement faciles à borner) et de tests à bornes généralisés obtenus par des techniques de projection;
- (2) transformations (par exemple, par inclusion de régresseurs appropriés) permettant d'éliminer les paramètres de nuisance;
- (3) utilisation de tests de Monte Carlo permettant l'utilisation de statistiques dont les distributions sont difficiles à calculer de façon analytique.

Parmi les résultats obtenus, on notera en outre l'introduction de tests de quotient de vraisemblance "tronqués" au moyen desquels on simplifie les propriétés numériques

et distributionnels des procédures, ainsi qu'une généralisation de la paramétrisation de Dickey-Fuller permettant de tester aisément des hypothèses de racines unitaires multiples.

Nous avons aussi montré que les procédures peuvent s'opérationnaliser aisément et illustré celles-ci sur des séries macroéconomiques tunisiennes (P.I.B) et américaines (investissement).

Bien que notre étude de ces procédures reste encore principalement théorique, les approches proposées nous semblent très prometteuses. Dans des travaux ultérieurs, nous entendons en particulier analyser les propriétés de puissance de celles-ci et les appliquer à une plus grande variété de données.