Université de Montréal

Le problème de Coulomb-Dunkl dans le plan

par
Andréanne Lapointe

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Juillet, 2014

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Le problème de Coulomb-Dunkl dans le plan

présenté par:

Andréanne Lapointe

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Richard MacKenzie,	président-rapporteur
Luc Vinet,	directeur de recherche
Yvan Saint-Aubin,	membre du jury

Mémoire accepté le: 10 juillet 2014

RÉSUMÉ

Ce mémoire, composé d'un article en collaboration avec Monsieur Luc Vinet et Vincent X. Genest, est la suite du travail effectué sur les systèmes quantiques super-intégrables définis par des Hamiltoniens de type Dunkl. Plus particulièrement, ce mémoire vise l'analyse du problème de Coulomb-Dunkl dans le plan qui est une généralisation du système quantique de l'atome d'hydrogène impliquant des opérateurs de réflexion sur les variables x et y.

Le modèle est défini par un potentiel en r^{-1}. Nous avons tout d'abord remarqué que l'Hamiltonien est séparable en coordonnées polaires et que les fonctions d'onde s'écrivent en termes de produits de polynômes de Laguerre généralisés et des harmoniques de Dunkl sur le cercle. L'algèbre générée par les opérateurs de symétrie nous a également permis de confirmer le caractère maximalement super-intégrable du problème de Coulomb-Dunkl. Nous avons aussi pu écrire explicitement les représentations de cette même algèbre. Nous avons finalement trouvé le spectre de l'énergie de manière algébrique.

Mots clés : Super-intégrabilité, problème de Coulomb, opérateur de Dunkl, algèbre de symétrie, représentation.

ABSTRACT

This master's thesis, composed of an article in collaboration with Luc Vinet and Vincent X. Genest, is the result of a work done on superintegrable quantum systems defined by Hamiltonians of the Dunkl kind. More specifically, the aim of this paper is to analyse the Coulomb-Dunkl problem in the plane which is a generalization of the quantum system of hydrogen involving operators of reflection on the variables x and y.

The model is defined by a potential in r^{-1}. First, we notice that the Hamiltonian is separable in polar coordinates and the wave functions are written in terms of products of generalized Laguerre polynomials and Dunkl harmonics on the circle. The algebra generated by the symmetry operators has also allowed us to confirm the maximally superintegrable character of the Coulomb-Dunkl problem. We also write explicitly the representations of the same algebra. We finally found the energy spectrum algebraically.

Keywords: Superintegrability, Coulomb problem, Dunkl operator, symmetry algebra, representation.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

À mes parents et François.

REMERCIEMENTS

Avant de rentrer dans le vif du sujet, je veux tout d'abord remercier mon directeur de recherche Monsieur Luc Vinet pour tout son encadrement, ses conseils et pour avoir rendu cette maîtrise possible financièrement. Je suis très reconnaissante d'avoir pu travailler sur un projet aussi intéressant et qui m'a permis de découvrir un peu mieux le monde de la recherche. Je voudrais également remercier son étudiant au doctorat Vincent X. Genest qui n'a jamais compté son temps pour répondre à mes questions et calmer mes angoisses.

J'adresse à mes parents, mon amoureux François et mes amis qui m'ont suivi tout au long du baccalauréat : Patricia, Shannon, Fredéric, Olivier G., Olivier D., Alex, Dan et Maty la plus sincère reconnaissance pour leur soutien moral et leur écoute sans faille dont j'ai eu tant besoin tout au long de mon cheminement. Merci infiniment.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Les systèmes super-intégrables

Les systèmes super-intégrables ont acquis une grande importance et sont devenus une branche incontournable de la physique-mathématique au cours des 30 dernières années. Plus précisément, on peut penser aux potentiels associés aux problèmes de Coulomb-Kepler et de l'oscillateur harmonique qui sont des exemples majeurs de systèmes super-intégrables. Classiquement, les trajectoires bornées de ces systèmes ont la particularité d'être fermées et périodiques. En mécanique quantique, ceux-ci possèdent des fonctions d'onde connues en termes de polynômes orthogonaux ainsi qu'un spectre d'énergie dégénéré. Dans les années 60, étudiés par des chercheurs tels que Smorodinsky, Winternitz et leurs collaborateurs [7],[17], il s'est avéré que, bien que rares, d'autres systèmes physiques possédaient des propriétés similaires à ceux de l'oscillateur harmonique et du potentiel de Coulomb-Kepler. Il fut donc établi que ces propriétés remarquables étaient associées à des symétries géométriques et dynamiques, ce qui mena à la découverte de la super-intégrabilité initialement appelée "system with accidental degeneracy" [1], [6]. Celle-ci peut s'expliquer naïvement comme conférant à certains systèmes physiques la propriété d'avoir plus de quantités conservées que de degrés de liberté [18].

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'aspect quantique de la super-intégrabilité. Les observables s'exprimeront en terme des opérateurs position x et quantité de mouvement p,

$$\begin{aligned} x &\to x, \\ p &\to -i\hbar\nabla, \\ \mathscr{H} &\to \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $\mathscr{E}$ caractérisera les valeurs propres de l'Hamiltonien $\mathscr{H}$. Dans ce contexte, le commutateur s'écrira

$$[A,B] = AB - BA \tag{1.2}$$

tandis que les constantes du mouvement seront des opérateurs linéaires hermitiens qui commuteront avec l'Hamiltonien. On écrira donc la définition de super-intégrabilité de la manière suivante :

Définition : Un système quantique en n dimensions est super-intégrable s'il possède un Hamiltonien $\mathscr{H}$ qui commute avec $n+k$, $k \in \{1,...,m\}$ opérateurs L_j où l'un des opérateurs est l'Hamiltonien lui-même :

$$[\mathscr{H}, L_j] = 0, \quad j = 1,...,n+k \tag{1.3}$$

et qui satisfont les conditions suivantes :

• Ce sont des opérateurs hermitiens dans l'algèbre enveloppante engendrée par les opérateurs position et quantité de mouvement.

• Les opérateurs L_j sont algébriquement indépendants.

• Les constantes du mouvement L_j commutent par paire. Le système est dit minimalement super-intégrable si $m = 1$ et maximalement super-intégrable si $m = n-1$. De plus, un système est dit d'ordre $\mathscr{L}$ si $\mathscr{L}$ est l'ordre maximal dans les impulsions des opérateurs de symétries L_j.

Jusqu'ici on a observé que les systèmes quantiques scalaires répondant à la définition ci-dessus de super-intégrabilité possèdent les propriétés suivantes :

1) Une conjecture dit que tous les systèmes maximalement super-intégrables sont exactement résolubles, c'est-à-dire que les états propres ainsi que le spectre de l'Hamiltonien peuvent être obtenus algébriquement. [22]

2) Les niveaux d'énergie sont dégénérés.

3) Dans le cas où le système est super-intégrable de deuxième ordre, c'est-à-dire avec une algèbre de symétrie quadratique, l'équation de Schrödinger est séparable en plusieurs systèmes de coordonnées. Le système étudié dans ce mémoire offrira

une exception à cette observation empirique.

4) Les opérateurs de symétrie forment une algèbre non abélienne sous le commutateur et en particulier forment une algèbre de Lie si le système est super-intégrable de premier ordre [13].

1.2 Le problème de Coulomb

Le problème de Coulomb se révéla extrêmement important pour la compréhension de la physique quantique des atomes à $N > 1$ électrons [2]. Ce problème permet de décrire l'atome d'hydrogène, ce dernier étant l'atome le plus simple du tableau périodique ($Z = 1$). Celui-ci est composé d'un proton, une particule lourde chargée positivement et d'un électron, léger et chargé négativement. Quelques effets physiques seront négligés pour simplifier. Tout d'abord, l'électron orbite autour du proton en conséquence de l'attraction coulombienne des charges opposées des deux particules, on ne considérera cependant pas les effets relativistes provoqués par le mouvement de l'électron. De plus, le centre de masse du système sera considéré comme étant complètement superposé sur celui du proton, ce dernier étant beaucoup plus lourd que l'électron. Finalement, les effets gravitationnels dus aux masses de l'électron et du proton seront également complètement négligés de la description du système. On peut donc écrire l'Hamiltonien du problème de Coulomb dans le plan de la manière suivante :

$$\mathscr{H} = -\frac{1}{2}[\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2] + \frac{\alpha}{r} \tag{1.4}$$

où on a considéré $\hbar = 1$, $m = 1$ et $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Suite à l'analyse plus approfondie de l'Hamiltonien $\mathscr{H}$, on verra tout d'abord qu'il est complètement séparable en coordonnées polaires et que ses fonctions d'onde s'expriment de manière explicite en termes de polynômes de Legendre. De plus, les valeurs propres de l'Hamiltonien sont de la forme suivante :

$$E = -\frac{\alpha}{2n^2}, \qquad n > 0 \tag{1.5}$$

où chaque niveau d'énergie est dégénéré $2n+1$ fois. Les symétries du problème de Coulomb permettent d'expliquer la grande dégénérescence du spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène qui ne dépend que du nombre quantique principal n.

Par calcul direct, on voit aisément que le moment angulaire est une constante du mouvement, c'est-à-dire que $[L,\mathscr{H}]=0$ où $L=x_1\partial_{x_2}-x_2\partial_{x_1}$. Ceci s'explique par la symétrie de rotation en deux dimensions du problème. Une autre constante du mouvement de l'atome d'hydrogène est le vecteur de Runge-Lenz également nommé le vecteur de Laplace qui s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{x_1}{r}-\frac{1}{2\alpha}(\partial_{x_2}*L+L*\partial_{x_2}) \\ A_2 &= \frac{x_2}{r}+\frac{1}{2\alpha}(\partial_{x_1}*L+L*\partial_{x_1}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Il fut découvert à l'origine par Laplace dans le cadre du problème de Kepler. Il permet de décrire la forme et l'orientation de l'orbite d'un corps astronomique autour d'un autre, comme dans le cas d'une planète autour d'une étoile. Les trois constantes du mouvement A_1, A_2 et L commutent avec l'Hamiltonien et satisfont également aux relations de commutation suivantes :

$$[A_1,A_2]=\frac{-2}{\alpha^2}\mathscr{H}L, \quad [A_1,L]=A_2, \quad [L,A_2]=A_1 \tag{1.7}$$

L'analyse de l'algèbre du groupe de symétrie nous permet de le relier à $SO(3)$, le groupe des rotations en trois dimensions. De plus, l'existence d'opérateurs non commutatifs représentant les constantes du mouvement A_1 et A_2 explique la dégénérescence accidentelle des niveaux d'énergie. Nous pouvons également conclure que le système est super-intégrable [5], [19].

1.3 L'opérateur de Dunkl

Introduit par Charles Dunkl [3], l'opérateur de Dunkl se retrouve particulièrement dans l'étude des polynômes orthogonaux [4] et des fonctions symétriques [16]. Celui-ci est composé d'opérateurs différentiels, mais également d'opérateurs de réflexion [21]. Sur la droite, l'opérateur de Dunkl se réduit à l'équation suivante:

$$\mathscr{D}_{x_i}^{\mu_i} = \partial_{x_i} + \frac{\mu_i}{x_i}(1 - R_i), \quad i = 1,2 \tag{1.8}$$

où R_i est un opérateur de réflexion qui agit de la manière suivante :

$$R_i f(x_i) = f(-x_i).$$

1.4 Le problème de Coulomb-Dunkl

C'est dans [9] que l'on examine le premier système possédant un Hamiltonien impliquant des opérateurs de réflexion. Cet article, coécrit par Vincent X. Genest, Mourad E.H. Ismail, Luc Vinet, et Alexei Zhedanov, analyse le modèle de l'oscillateur de Dunkl dans le plan défini par l'Hamiltonien suivant :

$$\mathscr{H} = -\frac{1}{2}[(\mathscr{D}_{x_1}^{\mu_1})^2 + (\mathscr{D}_{x_2}^{\mu_2})^2] + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \tag{1.9}$$

où $\mathscr{D}_{x_i}^{\mu_i}$ est l'opérateur de Dunkl défini dans la section précédente. Super-intégrable de second ordre, l'Hamiltonien se révéla séparable en coordonnées polaires et cartésiennes avec des fonctions d'onde écrites explicitement en terme de polynômes généralisés d'Hermite, de Jacobi et de Laguerre. Par la suite, une série d'articles fut publiée ([12], [8], [11]) sur des systèmes quantiques super-intégrables définis par des Hamiltoniens qui impliquent des opérateurs de Dunkl. Ceux-ci font respectivement l'étude des représentations de l'algèbre de symétrie du système (1.9), de l'oscillateur de Dunkl en trois dimensions et finalement de l'oscillateur de Dunkl singulier et anisotropique dans le plan.

L'étude des polynômes qui satisfont une équation aux valeurs propres de la forme

$$\mathfrak{L}P_n(x) = \lambda_n P_n(x) \tag{1.10}$$

où $\mathfrak{L}$ est un opérateur de Dunkl a mené à la découverte de nouvelles familles de polynômes orthogonaux classiques à une variable connus sous le nom de polynômes

-1 ou de type Bannai-Ito ([24], [25], [26]). Ceux-ci correspondent à la limite $q \to -1$ des q-polynômes. L'étude de l'oscillateur harmonique de Dunkl s'est révélée être une étude de cas intéressante pour ces polynômes. [10]

Dans ce contexte, il était donc naturel de considérer dans la foulée de ces travaux, le potentiel en r^{-1} accompagné de réflexions. Ce fut donc dans [11] que fut pour la première fois mentionné l'Hamiltonien correspondant au problème de Coulomb-Dunkl qui s'écrit de la manière suivante:

$$\mathscr{H} = -\frac{1}{2}\nabla_{\mathscr{D}}^2 + \frac{\alpha}{r} \tag{1.11}$$

où $\nabla_{\mathscr{D}}^2$ est le Laplacien de Dunkl, qui s'écrit en coordonnées cartésiennes $(\mathscr{D}_{x_1}^{\mu_1})^2 + (\mathscr{D}_{x_2}^{\mu_2})^2$. Dans le prochain chapitre, nous allons donc présenter les résultats obtenus sur le problème de Coulomb-Dunkl sous la forme d'une lettre scientifique. En effet, de la même manière qu'avec l'atome d'hydrogène, nous avons résolu l'équation de Schrödinger et trouvé l'algèbre de symétrie.

1.5 Contributions à l'article

Dans cette section, je vais discuter de ma contribution à l'article présenté dans le prochain chapitre. J'ai commencé par résoudre l'équation de Schrödinger du problème de Coulomb-Dunkl par séparation de variables en coordonnées polaires en trouvant les fonctions d'onde et le spectre d'énergie de l'Hamiltonien. Par la suite, j'ai calculé les opérateurs de symétrie en me basant sur l'atome d'hydrogène, ce qui représente le cas où $\mu_1 = \mu_2 = 0$ dans l'opérateur de Dunkl. J'ai donc pu construire l'algèbre de symétrie et son opérateur de Casimir et ainsi en trouver les représentations. Finalement, je suis l'auteur du premier jet de certaines sections de l'article qui ont été complétées et modifiées par Monsieur Luc Vinet et Vincent X. Genest.

CHAPITRE 2

THE DUNKL-COULOMB PROBLEM IN THE PLANE

V. X. Genest [1], A. Lapointe[1], L. Vinet[1]

Submitted 22 May 2014 to the Physics Letters A

[1]Centre de Recherches Mathématiques et Département de Physique, Université de Montréal, CP 6128, Succursale Centre-Ville, Montréal (QC), H3C 3J7, Canada

2.1 Abstract

The Dunkl-Coulomb system in the plane is considered. The model is defined in terms of the Dunkl Laplacian, which involves reflection operators, with a r^{-1} potential. The system is shown to be maximally superintegrable and exactly solvable. The spectrum of the Hamiltonian is derived algebraically using a realization of $\mathfrak{so}(2,1)$ in terms of Dunkl operators. The symmetry operators generalizing the Runge-Lenz vector are constructed. On eigenspaces of fixed energy, the invariance algebra they generate is seen to correspond to a deformation of $\mathfrak{su}(2)$ by reflections. The exact solutions are given as products of Laguerre polynomials and Dunkl harmonics on the circle.

2.2 Introduction

The purpose of this letter is to study the Dunkl-Coulomb system in the plane governed by the Hamiltonian

$$\mathscr{H} = -\frac{1}{2}\nabla_D^2 + \frac{\alpha}{r}, \tag{2.1}$$

with $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. In the above ∇_D^2 stands for the two-dimensional Dunkl-Laplace operator

$$\nabla_D^2 = \mathscr{D}_1^2 + \mathscr{D}_2^2,$$

defined in terms of the Dunkl derivative [6]

$$\mathscr{D}_i = \partial_{x_i} + \frac{\mu_i}{x_i}(1 - R_i), \quad i = 1,2, \tag{2.2}$$

where R_i is the reflection operator

$$R_i f(x_i) = f(-x_i),$$

with respect to the $x_i = 0$ axis and where $\mu_i > 0$ are real parameters. It will be shown that the model described by (2.1) is both maximally superintegrable and exactly solvable. The spectrum of the Hamiltonian will be derived algebraically using a realization of $\mathfrak{so}(2,1)$ with Dunkl operators. The constants of motion, which are analogous to the Runge-Lenz vector, will be constructed and it shall be seen that these symmetries are close rationally to a deformation of $\mathfrak{su}(2)$ by reflections. The exact solutions of the model will be given in terms of Laguerre polynomials and the Dunkl harmonics on the circle.

Generically, a quantum system with d degrees of freedom determined by a Hamiltonian H is said to be maximally superintegrable if it admits $2d-1$ algebraically independent symmetry operators S_j that commute with the Hamiltonian

$$[H, S_j] = 0, \quad j = 1, \ldots, 2d-1,$$

where one of the symmetries is the Hamiltonian itself. In this case, it is impossible for all the symmetries to be in involution and thus they generate non-Abelian invariance (or symmetry) algebras. Classical examples of superintegrable systems include the two-dimensional harmonic oscillator and the Coulomb-Kepler system.

In view of their numerous applications (see [23] for a recent review) there is a continued interest in enlarging the set of documented superintegrable systems. Progress in this regard was made recently with the introduction of a series of novel superintegrable systems involving reflections [10–13, 16]. These models are described by Hamiltonians involving the Dunkl-Laplace operator. They generalize the standard and singular oscillators in the plane and on the 2-sphere. Interestingly, these models have also been shown to serve as showcases for the recently introduced -1 orthogonal polynomials [9, 14, 25, 26, 28].

The investigation and characterization of superintegrable systems with reflections is pursued here with the study of the Dunkl-Coulomb problem. As shall be seen, this model exhibits many interesting properties.

2.3 Algebraic derivation of the spectrum

The spectrum of the Hamiltonian (2.1) governing the Dunkl-Coulomb system can be obtained algebraically using its underlying $\mathfrak{so}(2,1)$ dynamical symmetry. We first discuss the relevant realization of $\mathfrak{so}(2,1)$ introduced in [24] (see also [4]) and then establish the connection between this realization and the Dunkl-Coulomb problem.

2.3.1 A realization of $\mathfrak{so}(2,1)$ with Dunkl operators

Let E denote the dilation operator

$$E = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + (\mu_1 + \mu_2 + 1/2),$$

and define

$$\begin{aligned} L_0 &= -r\nabla_D^2 + \frac{r}{4}, \\ L_\pm &= -r\nabla_D^2 - \frac{r}{4} \pm E. \end{aligned} \tag{2.3}$$

It is directly checked that the operators L_0, $L_\pm$ satisfy the defining relations of the $\mathfrak{so}(2,1)$ algebra

$$[L_0, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad [L_+, L_-] = -2L_0.$$

In the realization (2.3), the $\mathfrak{so}(2,1)$ Casimir operator

$$C = L_0^2 - \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+),$$

is found to have the expression

$$C = J_3^2 + (\mu_1 R_1 + \mu_2 R_2)^2 - 1/4, \tag{2.4}$$

where J_3 is the Dunkl angular momentum generator

$$J_3 = -i(x_1\mathscr{D}_2 - x_2\mathscr{D}_1). \tag{2.5}$$

In irreducible representations of the positive-discrete series of $\mathfrak{so}(2,1)$, the Casimir operator acts as a multiple of the identity

$$C = \nu(\nu-1), \quad \nu > 0, \tag{2.6}$$

and the eigenvalues of the generator L_0, denoted by $\lambda_{L_0}(\ell)$, are of the form

$$\lambda_{L_0}(\ell) = \ell + \nu, \tag{2.7}$$

where ℓ is a non-negative integer (see [27]).

In view of (2.4) and considering representations of the positive-discrete series, it follows from (2.7) that the spectrum of the operator L_0 in the realization (2.3) can be obtained if the eigenvalues of the operator (2.5), which give the decomposition of the representation (2.3) in irreducible components, are known. In [12] and [13] the spectrum of (2.5) has been found. It splits into two sectors corresponding to the possible eigenvalues of the operator R_1R_2, which commutes with (2.5). In the sector $R_1R_2 = +1$, the eigenvalues of (2.5), denoted by $\lambda^{+}_{J_3}(m)$, read

$$\lambda^{+}_{J_3}(m) = \pm 2\sqrt{m(m+\mu_1+\mu_2)}, \tag{2.8}$$

where m is a non-negative integer. In the sector $R_1R_2 = -1$, the eigenvalues $\lambda^{-}_{J_3}(k)$ of (2.5) are given by

$$\lambda^{-}_{J_3}(k) = \pm 2\sqrt{(k+\mu_1)(k+\mu_2)}, \tag{2.9}$$

where k is a positive half-integer, i.e. $k \in \{1/2, 3/2, \ldots\}$. Note that the eigenvalue $\lambda^{+}_{J_3}(0) = 0$ is non-degenerate. Upon combining (2.8) and (2.9), one finds that the eigenvalues of the Casimir operator (2.4) in the realization (2.3) are of the form (2.6) with

$$\nu(n) = 2n + \mu_1 + \mu_2 + 1/2,$$

where n is a non-negative integer for $R_1R_2 = +1$ and a positive half-integer for $R_1R_2 = -1$. The irreducible $\mathfrak{so}(2,1)$ representations contained in the realization (2.3) thus belong to the positive-discrete series and one has the expression

$$\lambda_{L_0}(\ell, n) = \ell + 2n + \mu_1 + \mu_2 + 1/2, \tag{2.10}$$

for the spectrum of the compact generator L_0.

2.3.2 Connection with the Dunkl-Coulomb problem

The connection between the realization (2.3) and the Dunkl-Coulomb system works in a similar fashion to the standard case without reflections (see for example [2, 5, 8]). It is established as follows. Consider the Schrödinger equation for the Hamiltonian (2.1) of the Dunkl-Coulomb system

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla_D^2 + \frac{\alpha}{r}\right)\Psi_{\mathscr{E}} = \mathscr{E}\,\Psi_{\mathscr{E}}.$$

For bound states ($\mathscr{E} < 0$), one can multiply both sides of the above equation by r to find

$$\left(-\frac{r}{2}\nabla_D^2 - \mathscr{E}\, r\right)\Psi_{\mathscr{E}} = -\alpha\,\Psi_{\mathscr{E}}.$$

Upon rescaling the coordinates according to

$$x_i \to x_i/\sqrt{-8\,\mathscr{E}},$$

the eigenvalue equation is transformed into

$$L_0\Psi_{\mathscr{E}} = -\frac{2\alpha}{\sqrt{-8\mathscr{E}}}\Psi_{\mathscr{E}}.$$

From the formula (2.10) giving the eigenvalues of L_0 in the realization (2.3), the energy spectrum of the Hamiltonian (2.1) for the Dunkl-Coulomb system is thereby immediately found to have the expression

$$\mathscr{E}(\ell,n) = \frac{-\alpha^2}{2(\ell+2n+\mu_1+\mu_2+1/2)^2}, \tag{2.11}$$

where ℓ is a non-negative integer and where n is a non-negative integer in the sector $R_1R_2 = +1$ and a positive half-integer in the sector $R_1R_2 = -1$. Note that the Hamiltonian (2.1) commutes with both reflection operators, thus confirming that $\mathscr{H}$ and R_1R_2 can be diagonalized simultaneously.

As is seen from (2.2), when $\mu_1 = \mu_2 = 0$ the Dunkl-Coulomb system reduces to the standard Coulomb-Kepler problem. It is easily checked that in this case one recovers from (2.11) the standard expression for the energy spectrum of the Coulomb system.

2.4 Superintegrability and invariance algebra

To establish the superintegrability of the Dunkl-Coulomb system in the plane, one needs to find two algebraically independent operators that commute with the Hamiltonian. This can be done in the following way. Let $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ be the operators defined as

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_1 &= \frac{x_1}{r} - \frac{\mu_1}{\alpha}\mathscr{D}_1 R_1 - \frac{1}{2\alpha}\{\mathscr{J},\mathscr{D}_2\},\\ \mathscr{A}_2 &= \frac{x_2}{r} - \frac{\mu_2}{\alpha}\mathscr{D}_2 R_2 + \frac{1}{2\alpha}\{\mathscr{J},\mathscr{D}_1\},\end{aligned} \tag{2.12}$$

where

$$\mathscr{J} = (x_1\mathscr{D}_2 - x_2\mathscr{D}_1) = iJ_3, \tag{2.13}$$

and where $\{x,y\} = xy + yx$ stands for the anticommutator. A direct computation shows that $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ and $\mathscr{J}$ are constants of motion for the Dunkl-Coulomb system, i.e.

$$[\mathscr{H}, \mathscr{J}] = [\mathscr{H}, \mathscr{A}_1] = [\mathscr{H}, \mathscr{A}_2] = 0, \tag{2.14}$$

with $\mathscr{H}$ given by (2.1). Since (2.1) commutes with the reflections R_1, R_2, these operators are also (discrete) symmetries of the Dunkl-Coulomb Hamiltonian. The constants of motion $\mathscr{A}_1$ and $\mathscr{A}_2$ are analogous to the components of the Runge-Lenz vector for the standard Coulomb-Kepler system in two dimensions.

The invariance algebra generated by the constants of motion $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{J}$ is found to be

$$\begin{aligned} &[\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2] = -\frac{2}{\alpha^2}\mathscr{H}\mathscr{J}, \\ &[\mathscr{A}_1, \mathscr{J}] = \mathscr{A}_2(1 + 2\mu_1 R_1), \\ &[\mathscr{J}, \mathscr{A}_2] = \mathscr{A}_1(1 + 2\mu_2 R_2), \end{aligned} \tag{2.15}$$

and the commutation relations involving the reflections are seen to take the form

$$\begin{aligned} &\{\mathscr{J}, R_1\} = 0, \qquad \{\mathscr{J}, R_2\} = 0, \\ &\{\mathscr{A}_1, R_1\} = 0, \qquad [\mathscr{A}_1, R_2] = 0, \\ &\{\mathscr{A}_2, R_2\} = 0, \qquad [\mathscr{A}_2, R_1] = 0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

with $[R_1, R_2] = 0$. The symmetry algebra (2.15) has the Casimir operator

$$Q = \mathscr{A}_1^2 + \mathscr{A}_2^2 + \frac{2\mathscr{H}}{\alpha^2}\mathscr{J}^2 - \frac{2\mathscr{H}}{\alpha^2}(\mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 + 2\mu_1\mu_2 R_1 R_2), \tag{2.17}$$

which commutes with all symmetries. A direct computation shows that the Casimir operator Q is related to the Hamiltonian by

$$Q = \frac{\mathscr{H}}{\alpha^2}(2\mu_1^2 + 2\mu_2^2 + 1/2) + 1. \tag{2.18}$$

On an eigenspace of $\mathscr{H}$ with a given value of the energy $\mathscr{E}$, one can introduce the renormalized operators

$$J_1 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{-2\mathscr{H}}}\mathscr{A}_1, \quad J_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{-2\mathscr{H}}}\mathscr{A}_2.$$

In terms of the operators J_1, J_2 and J_3 (with J_3 given by (2.5)), the invariance algebra of the Dunkl-Coulomb systems becomes

$$\begin{aligned}
&[J_1, J_2] = iJ_3, \\
&[J_2, J_3] = iJ_1(1 + 2\mu_2 R_2), \\
&[J_3, J_1] = iJ_2(1 + 2\mu_1 R_1),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

with

$$\{J_1, R_1\} = \{J_2, R_2\} = \{J_3, R_1\} = \{J_3, R_2\} = 0,$$
$$[J_1, R_2] = [J_2, R_1] = [R_1, R_2] = 0.$$

The Casimir operator can then be expressed as

$$Q = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 + 2\mu_1\mu_2 R_1 R_2.$$

It is apparent from (2.19) that the symmetry algebra of the Dunkl-Coulomb problem corresponds to deformation of $\mathfrak{su}(2)$ by reflections. The standard $\mathfrak{su}(2)$ commutation relations are recovered when one takes $\mu_1 = \mu_2 = 0$. The physical representations of the algebra (2.19) can be obtained in a straightforward fashion. The computations are somewhat tedious and the action of the generators on the basis states are involved. The corresponding formulas are not reproduced here but can be found in [21].

2.5 Exact solutions

The Schrödinger equation associated to the Dunkl-Coulomb Hamiltonian

$$\mathscr{H}\Psi = \mathscr{E}\Psi, \tag{2.20}$$

can be exactly solved using separation of variables in polar coordinates

$$x_1 = r\cos\phi \quad x_2 = r\sin\phi.$$

Since the Hamiltonian commutes with both reflections, it is convenient to look for the joint eigenfunctions of $\mathscr{H}$, R_1 and R_2. In polar coordinates, the Hamiltonian (2.1) has the expression

$$\mathscr{H} = A_r + \frac{1}{r^2}B_\phi,$$

where A_r is given by

$$A_r = -\frac{1}{2}\partial_r^2 - \frac{1}{2r}(1+2\mu_1+2\mu_2)\,\partial_r + \frac{\alpha}{r},$$

and where B_ϕ reads

$$B_\phi = -\frac{1}{2}\partial_\phi^2 + (\mu_1 \operatorname{tg}\phi - \mu_2 \operatorname{ctg}\phi)\partial_\phi + \frac{\mu_1(1-R_1)}{2\cos^2\phi} + \frac{\mu_2(1-R_2)}{2\sin^2\phi}.$$

Upon taking $\Psi = R(r)\,\Phi(\phi)$, one finds that (2.20) becomes

$$\left(A_r - \mathscr{E} + \frac{m^2}{2\rho^2}\right)R(r) = 0, \tag{2.21a}$$

$$\left(B_\phi - \frac{m^2}{2}\right)\Phi(\phi) = 0, \tag{2.21b}$$

where $m^2/2$ is the separation constant.

The equation (2.21b) is similar to the one arising in the study of the two-dimensional Dunkl harmonic oscillator system [12]. The solutions are labeled by the quantum numbers (e_1,e_2) corresponding to the eigenvalues $(1-2e_1,1-2e_2)$ of the reflection operators (R_1,R_2) ($e_i \in \{0,1\}$). They are given by

$$\Phi_n^{(e_1,e_2)}(\phi)=\eta_n^{(e_1,e_2)}\cos^{e_1}\phi\,\sin^{e_2}\phi\,P_{n-e_1/2-e_2/2}^{(\mu_1-1/2+e_1,\mu_2-1/2+e_2)}(-\cos 2\phi), \tag{2.22}$$

where $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ are the Jacobi polynomials [20]. When $(e_1,e_2)\in\{(0,0),(1,1)\}$, n is a non-negative integer and when $(e_1,e_2)\in\{(1,0),(0,1)\}$, n is a positive half-integer. The normalization constant

$$\eta_n^{(e_1,e_2)}=\sqrt{\left(\frac{2n+\mu_1+\mu_2}{2}\right)\left(n-\frac{e_1+e_2}{2}\right)!}\\ \times\sqrt{\frac{\Gamma(n+\mu_1+\mu_2+\frac{e_1+e_2}{2})}{\Gamma(n+\mu_1+\frac{1+e_1-e_2}{2})\,\Gamma(n+\mu_2+\frac{1+e_2-e_1}{2})}},$$

where $\Gamma(x)$ is the classical gamma function [1], ensures that the wavefunctions satisfy the orthogonality relation

$$\int_0^{2\pi}\Phi_n^{(e_1,e_2)}(\phi)\,\Phi_{n'}^{(e_1',e_2')}(\phi)\,|\cos\phi\,|^{2\mu_1}|\sin\phi\,|^{2\mu_2}\,\mathrm{d}\phi=\delta_{nn'}\delta_{e_1e_1'}\delta_{e_2e_2'}.$$

Note that B_ϕ is related to J_3 as follows:

$$J_3^2=2B_\phi+2\mu_1\mu_2(1-R_1R_2).$$

Furthermore, it is readily seen that the wavefunctions (2.22) correspond to the so-called Dunkl harmonics on the circle (see [7]).

For the solutions (2.22), the separation constant has the expression

$$m^2=4n(n+\mu_1+\mu_2).$$

Upon substituting this value in the equation (2.21a), the radial wavefunctions can be obtained. One finds

$$R_{\ell,n}(r) = \xi_{\ell,n} \times e^{-\beta r/2} (\beta r)^{2n} L_{\ell}^{(4n+2\mu_1+2\mu_2)}(\beta r) \tag{2.23}$$

where $L_n^{(\alpha)}(x)$ are the Laguerre polynomials [20] and where β is given by

$$\beta = \sqrt{-8\,\mathscr{E}(\ell,n)},$$

with $\mathscr{E}(\ell,n)$ given by (2.11). The normalization factor

$$\xi_{\ell,n} = \sqrt{\frac{\ell!}{\Gamma(\ell+4n+2\mu_1+2\mu_2+1)}}\sqrt{\frac{\beta^{2\mu_1+2\mu_2+2}}{(2\ell+4n+2\mu_1+2\mu_2+1)}},$$

ensures that one has

$$\int_0^\infty R_{\ell,n}(r)\, R_{\ell',n}(r)\, r^{2\mu_1+2\mu_2+1} \mathrm{d}r = \delta_{\ell\ell'}.$$

$$\Psi_{\ell,n}(r,\phi) = R_{n,\ell}(r)\, \Phi_n^{(e_1,e_2)}(\phi), \tag{2.24}$$

where the radial and angular parts are respectively given by (2.22) and (2.23). The wavefunctions are orthogonal under the scalar product

$$\langle f,g\rangle = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f^*(r,\phi)\, g(r,\phi)\, |r\cos\phi|^{2\mu_1} |r\sin\phi|^{2\mu_2}\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi,$$

with respect to which the Dunkl-Laplace operator is self-adjoint [12]. It is easily checked that if one takes $\mu_1 = \mu_2 = 0$, the usual wavefunctions of the 2D Coulomb-Kepler system are recovered from (2.24).

The Schrödinger equation associated to the Dunkl-Coulomb system does not seem to admit separation of variables in any other coordinate system.This is in contradistinction with the classical two-dimensional Coulomb-Kepler Hamiltonian whose separability in parabolic coordinates can be traced back to the existence of the Runge-Lenz vector (see for example [18]). Let us remark also that the Dunkl-Coulomb problem is not related to the Dunkl oscillator by the Levi-Civita transformation [3, 22] or the coupling constant metamorphosis [17].

2.6 Conclusion

In this letter we studied the Dunkl-Coulomb system in the plane. We showed that this model is both superintegrable and exactly solvable. The constants of motion were obtained and the symmetry algebra they satisfy was given. In addition, the separated solutions were given explicitly in polar coordinates.

This adds to the expanding set of superintegrable systems in two dimensions with reflections. A classification of those systems would now deserve attention. In the scalar case and without reflections, it is known that all superintegrable systems whose constants of motion are of second degree in the momenta can be obtained by limits and contractions of the generic model on the 2-sphere [15, 19]. It would be enlightening to show that similarly the Dunkl-Coulomb problem is a limit of a more generic system.

Acknowledgements

V.X.G. holds an Alexander-Graham-Bell fellowship from the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC). The research of L.V. is supported in part by NSERC.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. B. Arfken, H. Weber, and F. E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 7 edition, 2012.

[2] A. Bohm, Y. Ne'eman, A. O. Barut, et al. *Dynamical Groups and Spectrum Generating Algebras*. World Scientific, Singapore.

[3] M. Boiteux. Theory of nonbijective canonical transformations in mechanics: Application to the Coulomb problem. *J. Math. Phys.*, 23:1311–1314, 1982.

[4] H. DeBie, B. Ørsted, P. Somberg, and V. Souček. Dunkl Operators and a family of realizations of $osp(1|2)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364:3875–3902, 2012.

[5] E. D'Hoker and L. Vinet. Spectrum (super-) Symmetries of Particles in a Coulomb Potential. *Nucl. Phys. B*, 260:79–102, 1985.

[6] C. F. Dunkl. Differential-difference operators associated to reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 311:167–183, 1989.

[7] C. F. Dunkl and Y. Xu. *Orthogonal Polynomials of Several Variables*. Cambridge University Press, 2001.

[8] R. Floreanini, J. LeTourneux, and L. Vinet. Quantum Mechanics and Polynomials of a Discrete Variable. *Ann. Phys.*, 226:331–349, 1993.

[9] V. X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov. A "continuous" limit of the Complementary Bannai-Ito polynomials: Chihara polynomials. *SIGMA*, 10:38–55, 2014.

[10] V. X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov. The Bannai-Ito algebra and a superintegrable system with reflections on the 2-sphere. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 47:205202, 2014.

[11] V. X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov. The Dunkl oscillator in three dimensions. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 512:012010, 2014.

[12] V.X. Genest, M.E.H. Ismail, L. Vinet, and A. Zhedanov. The Dunkl oscillator in the plane: I. Superintegrability, separated wavefunctions and overlap coefficients. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 46:145201, 2013.

[13] V.X. Genest, M.E.H. Ismail, L. Vinet, and A. Zhedanov. The Dunkl oscillator in the plane: II. Representations of the symmetry algebra. *Comm. Math. Phys. (to appear)*, 2014.

[14] V.X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov. Bispectrality of the Complementary Bannai–Ito polynomials. *SIGMA*, 9:18–37, 2013.

[15] V.X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov. Superintegrability in two dimensions and the Racah-Wilson algebra. *ArXiv:1307.5539*, 2013.

[16] V.X. Genest, L. Vinet, and A. Zhedanov. The singular and 2:1 anisotropic Dunkl oscillators in the plane. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 46:325201, 2013.

[17] E. G. Kalnins, W. Miller, and S. Post. Coupling constant metamorphosis and Nth-order symmetries in classical and quantum mechanics . *J. Phys. A: Math. Theor.*, 438:035202, 2010.

[18] E.G. Kalnins, W. Miller, and G. S. Pogosyan. Superintegrability and associated polynomial solutions: Euclidean space and the sphere in two dimensions. *J. Math. Phys.*, 37:6439, 1996.

[19] E.G. Kalnins, W. Miller, and S. Post. Contractions of 2D 2^{nd} order quantum superintegrable systems and the Askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials. *SIGMA*, 9:57–84, 2013.

[20] R. Koekoek, P.A. Lesky, and R.F. Swarttouw. *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues.* Springer, 1^{st} edition, 2010.

[21] A. Lapointe. Le problème de Dunkl-Coulomb. Master's thesis, 2014.

[22] T. Levi-Civita. Sur la régularisation du problème des trois corps. *Act. Math.*, 424:99–144, 1920.

[23] W. Miller, S. Post, and P. Winternitz. Classical and quantum superintegrability with applications. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 46:423001, 2013.

[24] S. Ben SaÃŕd, T. Kobayshi, and B. Ørsted. Laguerre semigroup and Dunkl operators. *Compo. Math.*, 148:1265–1336, 2012.

[25] S. Tsujimoto, L. Vinet, and A. Zhedanov. Dunkl shift operators and Bannai–Ito polynomials. *Adv. Math.*, 229:2123–2158, 2012.

[26] S. Tsujimoto, L. Vinet, and A. Zhedanov. Dual -1 Hahn polynomials: "Classical" polynomials beyond the Leonard duality. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141:959–970, 2013.

[27] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk. *Representation of Lie Groups and Special Functions*. Kluwer Academic Publishers, 1991.

[28] L. Vinet and A. Zhedanov. A limit $q = -1$ for the Big q-Jacobi polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364:5491–5507, 2012.

CHAPITRE 3

LES REPRÉSENTATIONS

Dans ce chapitre, nous allons présenter les représentations de l'algèbre de symétrie du problème de Coulomb-Dunkl introduite dans le chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
&[J_3, J_1] = iJ_2(1 + 2\mu_1 R_1), \quad [J_2, J_3] = iJ_1(1 + 2\mu_2 R_2), \\
&\{J_1, R_1\} = 0, \quad \left\{J_2, R_y\right\} = 0, \quad [J_1, R_2] = 0, \quad [J_2, R_1] = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Pour trouver les représentations, nous avons choisi de prendre J_3 diagonal où $iJ_3 = \mathscr{J} = x_1 \mathscr{D}_{x_2}^{\mu_2} - x_2 \mathscr{D}_{x_1}^{\mu_1}$. Pour identifier les valeurs propres de J_3 nous avons, par un simple calcul, relié J_3 qui s'écrit en coordonnées polaires

$$J_3 = i[\partial_\phi + \mu_2 \cot\phi(\mathbb{I} - R_2) + \mu_1 \tan\phi(\mathbb{I} - R_1)] \tag{3.2}$$

à B_φ de la manière suivante :

$$J_3^2 = 2B_\phi + 2\mu_1\mu_2(\mathbb{I} - R_1 R_2) \tag{3.3}$$

On considère alors l'équation aux valeurs propres:

$$J_3 F_\varepsilon(\phi) = \lambda_\varepsilon F_\varepsilon(\phi) \tag{3.4}$$

où $\varepsilon = \pm 1 = 1 - 2e_1 - 2e_2 + 4e_1 e_2$ sont les valeurs propres du produit des réflexions en x_1 et x_2, $R_1 R_2$. La solution complète de (3.4) peut être trouvée en [9]. Pour $\varepsilon = +1$, les fonctions propres $F_+(\varphi)$ de $\mathscr{J}_3$ et leurs valeurs propres correspondantes sont données par :

$$F_+(\varphi) = \Phi_n^{(0,0)} \pm i\Phi_n^{(1,1)}(\phi), \quad \lambda_+ = \pm 2\sqrt{n(n + \mu_1 + \mu_2)} \tag{3.5}$$

où $\Phi_n^{(e_1,e_2)}$ à été défini à l'équation 2.22 et n est un entier. Pour $\varepsilon = -1$ on a :

$$F_-(\phi) = \Phi_n^{(1,0)} \mp i\Phi_n^{(0,1)}(\phi), \quad \lambda_- = \pm 2\sqrt{(n+\mu_1)(n+\mu_2)} \tag{3.6}$$

où n est un demi-entier.

Dans notre recherche des représentations, nous avons imposé la condition que celles-ci doivent être des matrices hermitiennes et ainsi représenter des observables physiques. Les états de base dans la base polaire sont donc dénotés par $|l,n,\varepsilon,\eta\rangle$ et satisfont les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathscr{H}|l,n,\varepsilon,\eta\rangle &= \mathscr{E}|l,n,\varepsilon,\eta\rangle, \quad \mathscr{E} = \frac{-\alpha^2}{2(l+1/2+2n+\mu_1+\mu_2)^2} \\ R_1R_2|l,n,\varepsilon,\eta\rangle &= \varepsilon|l,n,\varepsilon,\eta\rangle \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $l \in \mathbb{N}$ est un entier non négatif, $n \in 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$, $\varepsilon = \pm 1$ et finalement, $\eta = \pm$ donne le signe des valeurs propres de J_3. On peut également relier les fonctions d'onde $\Psi_{\ell,n}(r,\phi)$ de l'équation 2.24 aux états de base :

$$\begin{aligned} \Psi_{\ell,n}(r,\phi) &= R_{n,\ell}(r)\, \Phi_n^{(e_1,e_2)}(\phi) \\ &= \langle r,\phi|l,n,\varepsilon,\eta\rangle \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $\varepsilon = 1 - 2e_1 - 2e_2 + 4e_1e_2$. En appliquant l'opérateur de Casimir $Q = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + \mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 + 2\mu_1\mu_2 R_1 R_2$ présenté au chapitre 2 sur un état de base on obtient :

$$Q|l,n,\varepsilon,\eta\rangle = N + N^2 + \mu_1 + 2N\mu_1 + \mu_2 + 2N\mu_2 + 2\mu_1\mu_2|l,n,\varepsilon,\eta\rangle. \tag{3.9}$$

où $N = l + 2n$. Les éléments de matrices des opérateurs de réflexion ont été trouvés en appliquant ceux-ci sur les fonctions propres de J_3.

À partir de l'équation (3.7), on voit que les états avec une énergie donnée $\mathscr{E} = \frac{-\alpha^2}{2(N+1/2+\mu_1+\mu_2)^2}$ possèdent une dégénérescence d'ordre $2N+1$. Le tableau (3.I) représente la dégénérescence des premiers états propres. La présence de

N	$\vert l,n,\varepsilon,\eta\rangle$
0	$\vert 0,0,+1,+\rangle$
1	$\vert 1,0,+1,+\rangle$, $\vert 0,1/2,-1,+\rangle$, $\vert 0,1/2,-1,-\rangle$
2	$\vert 2,0,+1,+\rangle$, $\vert 0,1,+1,+\rangle$, $\vert 0,1,+1,-\rangle$,$\vert 1,1/2,-1,+\rangle$, $\vert 1,1/2,-1,-\rangle$
3	$\vert 3,0,+1,+\rangle$, $\vert 0,3/2,-1,+\rangle$, $\vert 0,3/2,-1,-\rangle$, $\vert 1,1,+1,+\rangle$, $\vert 1,1,+1,-\rangle$, $\vert 2,1/2,-1,+\rangle$, $\vert 2,1/2,-1,-\rangle$

Table 3.I: Dégénérescence pour les premiers états propres

ces dégénérescences est attribuée à l'existence de l'algèbre de symétrie discutée précédemment.

3.1 Le cas $\varepsilon = +1$

Nous allons commencer par étudier le cas $\varepsilon = +1$, la valeur propre positive de R_1R_2. Soit n un entier positif, l'action de J_3 sur les états de base s'écrit de la manière suivante :

$$J_3|l,n,1,\pm\rangle = \pm 2\sqrt{n(n+\mu_1+\mu_2)}|l,n,1,\pm\rangle \equiv \pm 2X_n|l,n,1,\pm\rangle \tag{3.10}$$

où $X_n = \sqrt{n(n+\mu_1+\mu_2)}$ par définition. Voici l'action des opérateurs de réflexion sur les états de base.

$$\begin{aligned} R_1|l,n,+1,\pm\rangle &= |l,n,+1,\mp\rangle \\ R_2|l,n,+1,\pm\rangle &= |l,n,+1,\mp\rangle \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nous allons maintenant donner la forme de l'action de J_1 sur les états de base. Les constantes $\alpha_{j,k}$, $S_{j,k}$, $\gamma_{j,k}$ et $C_{m,n}$ seront données explicitement dans la section 3.3.

$$\begin{aligned} J_1|l,n,+1,+\rangle &= \sum_{i\in\{-1,1\}} C_{n+i/2,n}(|l,n+i/2,-1,+\rangle + \alpha_{n+(i-1)/2,n}|l,n+i/2,-1,-\rangle) \\ J_1|l,n,+1,-\rangle &= \sum_{i\in\{-1,1\}} C_{n+i/2,n}(\alpha_{n+(i-1)/2,n}|l,n+i/2,-1,+\rangle + |l,n+i/2,-1,-\rangle) \\ J_1|l,0,+1,+\rangle &= C_{1/2,0}(|l,1/2,-1,+\rangle + |l,1/2,-1,-\rangle) \end{aligned} \tag{3.12}$$

L'action de J_2 sur les états de base est donnée par :

$$
\begin{aligned}
J_2|l,n,+1,+\rangle &= \sum_{i\in\{-1,1\}} C_{n+i/2,n}S_{n+(i-1)/2,n}(|l,n+i/2,-1,+\rangle - \gamma_{n,n+(i-1)/2}|l,n+i/2,-1,-\rangle)\\
J_2|l,n,+1,-\rangle &= \sum_{i\in\{-1,1\}} C_{n+i/2,n}S_{n+(i-1)/2,n}(\gamma_{n,n+(i-1)/2}|l,n+i/2,-1,+\rangle - |l,n+i/2,-1,-\rangle)\\
J_2|l,0,+1,+\rangle &= S_{0,0}C_{1/2,0}(|l,1/2,-1,+\rangle - |l,1/2,-1,-\rangle)
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

3.2 Le cas $\varepsilon = -1$

Nous allons maintenant étudier le cas $\varepsilon = -1$, la valeur propre négative de R_1R_2. Soit n un entier positif, voici l'action de J_3 sur les états de base

$$
\begin{aligned}
J_3|l,n+1/2,-1,\pm\rangle &= \pm 2\sqrt{(n+1/2+\mu_1)(n+1/2+\mu_2)}|l,n+1/2,-1,\pm\rangle\\
&\equiv \pm 2Y_{n+1/2}|l,n+1/2,-1,\pm\rangle
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

où $Y_n = \sqrt{(n+\mu_1)(n+\mu_2)}$ par définition. L'action des opérateurs de réflexion sur les états de base s'écrit de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
R_1|l,n+1/2,-1,\pm\rangle &= -|l,n+1/2,-1,\mp\rangle\\
R_2|l,n+1/2,-1,\pm\rangle &= |l,n+1/2,-1,\mp\rangle
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

L'action de J_1 sur les états de base est donnée par :

$$
\begin{aligned}
J_1|l,n+1/2,-1,+\rangle &= \sum_{i\in\{0,1\}} C_{n+1/2,n+i}(|l,n+i,+1,+\rangle + \alpha_{n,n+i}|l,n+i,+1,-\rangle)\\
J_1|l,n+1/2,-1,-\rangle &= \sum_{i\in\{-1,1\}} C_{n+1/2,n+i}(\alpha_{n,n+i}|l,n+i,+1,+\rangle + |l,n+i,+1,-\rangle)\\
J_1|l,1/2,-1,+\rangle &= C_{1/2,0}|l,0,+1,+\rangle + C_{1/2,1}(|l,1,+1,+\rangle + \alpha_{0,1}|l,1,+1,-\rangle)\\
J_1|l,1/2,-1,-\rangle &= C_{1/2,0}|l,0,+1,+\rangle + C_{1/2,1}(\alpha_{0,1}|l,1,+1,+\rangle + |l,1,+1,-\rangle)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

J_2 agit sur les états de base de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
J_2|l,n+1/2,-1,+\rangle &= \sum_{i\in\{0,1\}} C_{n+1/2,n+i}S_{n,n+i}(|l,n+i,+1,+\rangle - \gamma_{n+i,n}|l,n+i,+1,-\rangle) \\
J_2|l,n+1/2,-1,-\rangle &= \sum_{i\in\{0,1\}} C_{n+1/2,n+i}S_{n,n+i}(\gamma_{n+i,n}|l,n+i,+1,\rangle - |l,n+i,+1,-\rangle) \\
J_2|l,1/2,-1,+\rangle &= -C_{1/2,0}S_{0,0}|l,0,+1,+\rangle - C_{1/2,1}S_{0,1}(|l,1,+1,+\rangle - \gamma_{1,0}|l,1,+1,-\rangle) \\
J_2|l,1/2,-1,-\rangle &= C_{1/2,0}S_{0,0}|l,0,+1,+\rangle + C_{1/2,1}S_{0,1}(\gamma_{1,0}|l,1,+1,+\rangle + |l,1,+1,-\rangle)
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

3.3 Les solutions

Pour trouver les constantes $\alpha_{j,k}, \gamma_{j,k}$, $S_{j,k}$ et $C_{m,n}$, nous avons commencé par poser que l'action de J_1 et J_2 sur un état quantique donne une combinaison linéaire d'états de base. Par la suite, il a suffit d'appliquer un commutateur, par exemple celui de J_2 avec J_3, $[J_2, J_3]$, sur un état de base général. Puisque nous connaissions déjà l'action de J_3 et des opérateurs de réflexion ainsi que la valeur du commutateur, $iJ_1(1+2\mu_2 R_2)$ dans notre exemple, nous avons pu trouver les conditions nécessaires pour relier les coefficients linéaires avec $\alpha_{j,k}, \gamma_{j,k}$, $S_{j,k}$. Nous nous sommes également servis de l'équation 3.9 de l'action de l'opérateur de Casimir Q pour trouver la constante particulière pour que les opérateurs soient bien hermitiens $C_{m,n}$. Suite à ce travail, on obtient donc les résultats suivants pour les constantes $\alpha_{j,k}, \gamma_{j,k}$ et $S_{j,k}$ pour j et k des entiers positifs :

$$
\begin{aligned}
\alpha_{j,k} &= 2\frac{\mu_2(-X_k+Y_{j+1/2}) + \mu_1(X_k+Y_{j+1/2}))}{X_k - Y_{j+1/2} + 4(j+1/2-k)(j+k+1/2+\mu_1+\mu_2)(Y_{j+1/2}+X_k)} \\
\gamma_{j,k} &= 2\frac{\mu_1(-X_j+Y_{k+1/2}) + \mu_2(X_j+Y_{k+1/2})}{(X_j - Y_{k+1/2}) + 4(k-j+1/2)(j+k+1/2+\mu_1+\mu_2)(X_j+Y_{k+1/2})} \\
S_{j,k} &= \frac{2i(X_k - Y_{j+1/2})}{1+2\mu_1\gamma_{k,j}}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Pour les coefficients $C_{m,n} = C_{n,m}$ où $|m-n| = 1/2$, on obtient

$$C^2_{1/2,0} = \frac{N+N^2+2N\mu_1+2N\mu_2}{2(1-S^2_{0,0})} \tag{3.19}$$

où $2N+1$ est la dimension de la représentation matricielle. Si $n = N/2$, un entier et $\varepsilon = +1$

$$C^2_{n-1/2,n} = -\frac{iX_n}{(-1+\alpha_{n-1,n}\gamma_{n,n-1})S_{n,n-1}} \tag{3.20}$$

Si $n = N/2$, un demi-entier et $\varepsilon = -1$

$$C^2_{n-1/2,n} = -\frac{iY_n}{(1+\alpha_{n-1/2,n-1/2}\gamma_{n-1/2,n-1/2})S_{n-1/2,n-1/2}} \tag{3.21}$$

Pour les autres valeurs entières de n

$$\begin{aligned} &C^2_{n+1/2,n} = \\ &(i(1+\alpha^2_{n-1,n})X_n - i(1+\gamma^2_{n,n-1})S^2_{n-1,n}X_n + (-1+\alpha_{n-1,n}\gamma_{n,n-1})S_{n-1,n}(\mu_1+\mu_2+N(1+ \\ &N+2\mu_1+2\mu_2)-4X^2_n))(-(1+\alpha^2_{n-1,n})(-1+\alpha_{n,n}\gamma_{n,n})S_{n,n}+(1+\gamma^2_{n,n-1})(-1+ \\ &\alpha_{n,n}\gamma_{n,n})S^2_{n-1,n}S_{n,n}+(-1+\alpha_{n-1,n}\gamma_{n,n-1})S_{n-1,n}(1+\alpha^2_{n,n}-(1+\gamma^2_{n,n})S^2_{n,n}))^{-1} \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} &C^2_{n-1/2,n} = \\ &(i(1+\alpha^2_{n,n})X_n + i(1+\gamma^2_{n,n})S^2_{n,n}X_n - (-1+\alpha_{n,n}\gamma_{n,n})S_{n,n}(\mu_1+\mu_2+ \\ &N(1+N+2\mu_1+2\mu_2)-4X^2_n))((-(1+\alpha^2_{n-1,n})(-1+\alpha_{n,n}\gamma_{n,n})S_{n,n}+(1+\gamma^2_{n,n-1})(-1+ \\ &\alpha_{n,n}\gamma_{n,n})S^2_{n-1,n}S_{n,n}+(-1+\alpha_{n-1,n}\gamma_{n,n-1})S_{n-1,n}(1+\alpha^2_{n,n}-(1+\gamma^2_{n,n})S^2_{n,n})))^{-1} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pour le cas des matrices de dimensions 5 par 5 avec $N = 2$ on obtient donc le résultat suivant:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & C_{1/2,0} & C_{1/2,0} & 0 & 0 \\ C_{1/2,0} & 0 & 0 & C_{1/2,1} & \alpha_{0,1} * C_{1/2,1} \\ C_{1/2,0} & 0 & 0 & \alpha_{0,1} * C_{1/2,1} & C_{1/2,1} \\ 0 & C_{1/2,1} & \alpha_{0,1} * C_{1/2,1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{0,1} * C_{1/2,1} & C_{1/2,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & S_{0,0} * C_{1/2,0} & -S_{0,0} * C_{1/2,0} & 0 & 0 \\ S_{0,0} * C_{1/2,0} & 0 & 0 & S_{0,1} * C_{1/2,1} & S_{0,1} * \gamma_{1,0} * C_{1/2,1} \\ -S_{0,0} * C_{1/2,0} & 0 & 0 & -S_{0,1} * \gamma_{1,0} * C_{1/2,1} & -S_{0,1} * C_{1/2,1} \\ 0 & -S_{0,1} * C_{1/2,1} & S_{0,1} * \gamma_{1,0} * C_{1/2,1} & 0 & 0 \\ 0 & -S_{0,1} * \gamma_{1,0} * C_{1/2,1} & S_{0,1} * C_{1/2,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2Y_{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2Y_{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2X_1 \end{pmatrix}$$

Les matrices J_1, J_2, R_1 et R_2 sont donc tridiagonales par bloc de matrices deux par deux avec la diagonale nulle tandis que J_3 est diagonale par construction.

3.3.1 Cas $\mu_1 = \mu_2 = 0$

Le cas où $\mu_1 = \mu_2 = 0$ se réduit à l'algèbre $SO(3)$ avec les opérateurs de réflexion. La solution est composée des constantes suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k} &= 0 \\ \gamma_{j,k} &= 0 \\ S_{j,k} &= 2i(k-j+1/2) \end{aligned} \tag{3.24}$$

avec

$$C^2_{1/2,0} = \frac{N}{4}(1+N) \tag{3.25}$$

Si $n = N/2$ est un entier positif et $\varepsilon = +1$

$$C^2_{n-1/2,n} = n \tag{3.26}$$

Si $n = N/2$ est demi-entier positif et $\varepsilon = -1$

$$C^2_{n+1/2,n} = n + 1/2 \tag{3.27}$$

Pour les autres valeurs de n, un entier positif :

$$C^2_{n+1/2,n} = \frac{1}{4}(-2n - 4n^2 + N + N^2) \tag{3.28}$$

$$C^2_{n-1/2,n} = \frac{1}{4}(2n - 4n^2 + N + N^2) \tag{3.29}$$

3.3.2 Cas $\mu_1 = \mu_2$

Le cas $\mu_1 = \mu_2$ a la particularité suivante:

$$\alpha_{j,k} = \gamma_{k,j}. \tag{3.30}$$

CHAPITRE 4

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire était de faire l'étude complète du problème de Coulomb-Dunkl défini par un potentiel en r^{-1}. Il s'inscrit dans la suite des travaux commencés dans [9] par Vincent X. Genest, Mourad E. H. Ismail, Luc Vinet, et Alexei Zhedanov sur les systèmes définis par des Hamiltoniens ayant des opérateurs de réflexion. Nous avons tout d'abord résolu analytiquement l'équation de Schrödinger pour identifier les fonctions d'onde en terme de polynômes généralisés de Laguerre et des harmoniques de Dunkl sur le cercle ce qui nous a permis de trouver le spectre d'énergie. La dégénérescence de ce spectre put ainsi être expliquée par l'identification de l'algèbre de symétrie. Comme on l'a montré, cette dernière est composée du vecteur de Runge-Lenz et du moment cinétique de Dunkl ainsi que des opérateurs de réflexion. L'algèbre nous a donc permis de conclure que le système de Coulomb-Dunkl est super-intégrable. Par la suite, une grande partie du travail de ce mémoire a porté sur le calcul des représentations de l'algèbre du problème de Coulomb-Dunkl.

Depuis quelques années, beaucoup de recherches ont été faites sur la classification des systèmes super-intégrables. En particulier, on peut citer les travaux de W. Miller et de ses collaborateurs qui ont conduit à une classification des systèmes super-intégrables de deuxième ordre [15], [14]. Il serait maintenant intéressant d'entreprendre de la même manière une classification des systèmes super-intégrables en deux dimensions avec réflexions. La généralisation du problème Tremblay-Turbiner-Winternitz (TTW) [23] avec réflexions mériterait aussi d'être étudiée, voir aussi [20]. Enfin, il pourrait être également pertinent, pour des raisons évidentes, d'étudier le problème de Coulomb-Dunkl en trois dimensions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V Bargmann. Zur theorie des wasserstoffatoms. *Zeitschrift für Physik*, 99(7-8): 576–582, 1936.

[2] Niels Bohr. I. on the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26 (151):1–25, 1913.

[3] Charles F Dunkl. Differential-difference operators associated to reflection groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 311(1):167–183, 1989.

[4] Charles F Dunkl et Yuan Xu. *Orthogonal polynomials of several variables*, volume 81. Cambridge University Press, 2001.

[5] Michael J Englefield. Group theory and the coulomb problem. 1972.

[6] V Fock. Zur theorie des Wasserstoffatoms. *Zeitschrift für Physik*, 98(3-4): 145–154, 1935.

[7] J Friš, V Mandrosov, Ya A Smorodinsky, M Uhlíř et P Winternitz. On higher symmetries in quantum mechanics. *Physics Letters*, 16(3):354–356, 1965.

[8] V. X. Genest, L. Vinet et A. Zhedanov. The Dunkl oscillator in three dimensions. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 512:012010, 2014.

[9] Vincent X Genest, Mourad EH Ismail, Luc Vinet et Alexei Zhedanov. The Dunkl oscillator in the plane:I. Superintegrability, separated wavefunctions and overlap coefficients. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(14):145201, 2013.

[10] Vincent X Genest, Luc Vinet et Alexei Zhedanov. Bispectrality of the complementary Bannai-Ito polynomials. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 9(0):18–20, 2013.

[11] Vincent X Genest, Luc Vinet et Alexei Zhedanov. The singular and the 2: 1 anisotropic Dunkl oscillators in the plane. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(32):325201, 2013.

[12] V.X. Genest, M.E.H. Ismail, L. Vinet et A. Zhedanov. The Dunkl oscillator in the plane: II. Representations of the symmetry algebra. *Comm. Math. Phys. (to appear)*, 2014.

[13] JM Jauch et EL Hill. On the problem of degeneracy in quantum mechanics. *Physical Review*, 57(7):641, 1940.

[14] Ernie G Kalnins, Jonathan M Kress et W Miller Jr. Second-order superintegrable systems in conformally flat spaces. i. two-dimensional classical structure theory. *Journal of mathematical physics*, 46(5):053509, 2005.

[15] Ernie G Kalnins, Jonathan M Kress et W Miller Jr. Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. ii. the classical two-dimensional stäckel transform. *Journal of mathematical physics*, 46(5):053510, 2005.

[16] Ian Grant Macdonald. *Symmetric functions and orthogonal polynomials*, volume 12. American Mathematical Soc., 1998.

[17] AA Makarov, Ja A Smorodinsky, Kh Valiev et P Winternitz. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries. *Il Nuovo Cimento A Series 10*, 52(4):1061–1084, 1967.

[18] Willard Miller Jr, Sarah Post et Pavel Winternitz. Classical and quantum superintegrability with applications. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(42):423001, 2013.

[19] DGW Parfitt et ME Portnoi. The two-dimensional hydrogen atom revisited. *Journal of Mathematical Physics*, 43(10):4681–4691, 2002.

[20] Sarah Post, Satoshi Tsujimoto et Luc Vinet. Families of superintegrable hamiltonians constructed from exceptional polynomials. *arXiv preprint arXiv:1206.0480*, 2012.

[21] Margit Rösler. Dunkl operators: theory and applications. Dans *Orthogonal polynomials and special functions*, pages 93–135. Springer, 2003.

[22] P Tempesta, AV Turbiner et P Winternitz. Exact solvability of superintegrable systems. *Journal of Mathematical Physics*, 42(9):4248–4257, 2001.

[23] Frédérick Tremblay, Alexander V Turbiner et Pavel Winternitz. An infinite family of solvable and integrable quantum systems on a plane. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(24):242001, 2009.

[24] Satoshi Tsujimoto, Luc Vinet et Alexei Zhedanov. Dunkl shift operators and Bannai–Ito polynomials. *Advances in Mathematics*, 229(4):2123–2158, 2012.

[25] Luc Vinet et Alexei Zhedanov. A missing family of classical orthogonal polynomials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(8):085201, 2011.

[26] Luc Vinet et Alexei Zhedanov. A limit $q=-1$ for the big q-jacobi polynomials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(10):5491–5507, 2012.