

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

# Simulation de la nage anguilliforme

par

*David Lapierre*

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des arts et des sciences en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès Science en Mathématiques, option Mathématiques appliquées

mai 2014

© David Lapierre, 2014



RÉSUMÉ Ce document traite premièrement des diverses tentatives de modélisation et de simulation de la nage anguilliforme puis élabore une nouvelle technique, basée sur la méthode de la frontière immergée généralisée et la théorie des poutres de Reissner-Simo. Cette dernière, comme les équations des fluides polaires, est dérivée de la mécanique des milieux continus puis les équations obtenues sont discrétisées afin de les amener à une résolution numérique. Pour la première fois, la théorie des schémas de Runge-Kutta additifs est combinée à celle des schémas de Runge-Kutta-Munthe-Kaas pour engendrer une méthode d'ordre de convergence formel arbitraire. De plus, les opérations d'interpolation et d'étalement sont traitées d'un nouveau point de vue qui suggère l'usage des splines interpolatoires nodales en lieu et place des fonctions d'étalement traditionnelles. Enfin, de nombreuses vérifications numériques sont faites avant de considérer les simulations de la nage.

MOTS CLÉS Nage, simulation, analyse numérique, équations aux dérivées partielles, équations de Navier-Stokes, interaction fluide-structure, méthode de la frontière immergée, méthode de Runge-Kutta, théorie non-linéaire des poutres.



**ABSTRACT** This paper first discusses various attempts at modeling and simulating anguilliform swimming, then we develop a new technique, based on a method of generalized immersed boundary and the beam theory of Reissner-Simo. Subsequent to the derivation of the equations of polar fluids, the beam theory is derived from continuum mechanics and the resulting equations are then discretized, allowing a numerical solution. For the first time, the theory of additive Runge-Kutta schemes are combined with the Runge-Kutta-Munthe-Kaas method to generate schemes of arbitrarily high formal order of convergence. Moreover, the interpolation and spreading operations are handled from a new point of view that suggests the use of interpolatory nodal splines instead of spreading traditional functions. Finally, many numerical verifications are done before considering simulations of swimming.

**KEYWORDS** Swim, simulation, numerical analysis, partial differential equations, Navier-Stokes equations, fluid-structure interaction, immersed boundary method, Runge-Kutta method, non-linear beam theory.



---

# TABLE DES MATIÈRES

---

---

Liste des figures . . . . .	x
Liste des tableaux . . . . .	xi
Liste des algorithmes . . . . .	xiii
Liste des symboles . . . . .	xix
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Revue . . . . .	1
1.1.1 Modèles usant de forces hydrodynamiques approximatives . . . . .	1
1.1.2 Nage inaltérable . . . . .	3
1.1.3 Réseaux de ressorts et chaîne de tiges rigides . . . . .	4
1.1.4 Filament flexible . . . . .	5
1.2 Énoncé du problème . . . . .	5
1.3 Survol . . . . .	5
<b>2 Modèles</b>	<b>7</b>
2.1 Hydrodynamique polaire . . . . .	7
2.1.1 Introduction . . . . .	7
2.1.2 Équations d'équilibre . . . . .	8
2.1.2.1 Conservation du volume . . . . .	8
2.1.2.2 Conservation de la masse . . . . .	8
2.1.2.3 Conservation du moment linéaire . . . . .	9
2.1.2.4 Conservation du moment angulaire . . . . .	10
2.1.3 Caractérisation du fluide . . . . .	11
2.1.3.1 Relation constitutive . . . . .	11
2.1.3.2 Incompressibilité . . . . .	12
2.1.4 Synthèse . . . . .	12
2.2 La théorie géométriquement exacte des poutres . . . . .	12
2.2.1 Cinématique d'une tige de Cosserat . . . . .	13
2.2.1.1 Tige ayant une configuration de référence rectiligne . . . . .	13
2.2.1.2 Admissibilité d'une configuration . . . . .	16
2.2.1.3 Tige avec une configuration de référence déformée . . . . .	19
2.2.1.4 Simplifications . . . . .	22
2.2.1.5 Motivation du choix du modèle . . . . .	23
2.2.1.6 Cas d'une tige de Reissner-Simo . . . . .	25
2.2.1.7 Interprétation des mesures de déformation pour une tige de Reissner-Simo tridimensionnelle . . . . .	27
2.2.2 Dynamique . . . . .	30
2.2.2.1 Équilibre d'un segment . . . . .	30

2.2.2.2	Équilibre local . . . . .	31
2.2.2.3	Équations usuelles de l'équilibre local . . . . .	33
2.2.2.4	Condition aux bords . . . . .	34
2.2.2.5	Relation entre les moments et les vitesses . . . . .	34
2.2.2.6	Formulation matérielle des équations d'équilibre . . . . .	38
2.2.2.7	Puissance interne . . . . .	39
2.2.2.8	Loi constitutive . . . . .	40
2.3	Synthèse . . . . .	43
2.3.1	Interaction fluide-structure . . . . .	43
2.3.1.1	Couplage dynamique . . . . .	43
2.3.1.2	Couplage cinématique . . . . .	44
2.3.1.3	Expression en fonction du $\delta$ de Dirac . . . . .	44
2.3.1.4	Dilatation du noyau . . . . .	45
2.3.2	Adimensionalisation . . . . .	45
2.3.2.1	Équations de Navier-Stokes . . . . .	45
2.3.2.2	Équations de la tige . . . . .	46
2.3.2.3	Interaction fluide-structure . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Méthodes</b> . . . . .	<b>51</b>
3.1	Modèle numérique . . . . .	51
3.1.1	Itération temporelle . . . . .	51
3.1.1.1	Équations à résoudre . . . . .	51
3.1.1.2	Schémas de Runge-Kutta additifs . . . . .	52
3.1.1.3	Schémas de Runge-Kutta-Munthe-Kaas . . . . .	53
3.1.1.4	Schéma général . . . . .	56
3.1.2	Discrétisation spatiale . . . . .	58
3.1.2.1	Maillage eulérien . . . . .	58
3.1.2.2	Différences finies . . . . .	58
3.1.2.3	Calculs sur la tige . . . . .	60
3.1.3	Appariement . . . . .	63
3.1.3.1	Delta de Dirac discret . . . . .	63
3.1.3.2	Delta pour une grille homogène sans bord . . . . .	69
3.1.3.3	Assortiment de noyaux . . . . .	73
3.2	Méthodes de résolution . . . . .	80
3.2.1	Résolution des équations d'advection . . . . .	80
3.2.1.1	Déplacement de la tige . . . . .	80
3.2.2	Solution aux équations de Stokes-Brinkman . . . . .	86
3.2.3	Algorithmes d'interaction . . . . .	89
3.2.4	Algorithmes du calcul de forces dans la tige . . . . .	91
3.2.5	Algorithmes d'advection du fluide . . . . .	92

<b>4 Résultats et discussion</b>	<b>95</b>
4.1 Vérifications . . . . .	95
4.1.1 Méthodes générales . . . . .	95
4.1.1.1 Méthode de la solution fabriquée . . . . .	95
4.1.1.2 Solution fabriquée . . . . .	98
4.1.1.3 Vérification par subordination périodique du temps . . . . .	99
4.1.2 Tests de convergence . . . . .	99
4.1.2.1 Opérateurs différentiels . . . . .	99
4.1.2.2 Quadratures . . . . .	100
4.1.2.3 Convergences du transport de la tige avec interpolation exacte . . .	102
4.1.2.4 Convergences du transport de la tige avec interpolation inexacte . .	105
4.1.2.5 Advection du fluide . . . . .	105
4.1.2.6 Tests de l'interpolation et de l'étalement . . . . .	107
4.1.3 Simulations . . . . .	117
4.1.3.1 Comparaison avec la tige ouverte de Lim . . . . .	117
4.2 Nage . . . . .	120
4.2.1 Données expérimentales . . . . .	120
4.2.2 Hypothèses . . . . .	120
4.2.3 Paramétrisation de la nage simulée . . . . .	121
4.2.4 Ajustement à des données expérimentales . . . . .	123
4.2.5 Résultats . . . . .	127
<b>5 Conclusion</b>	<b>135</b>
5.1 Retour . . . . .	135
5.2 Perspectives . . . . .	135
<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>
<b>Index</b>	<b>149</b>
<b>Annexe A Résultats utiles</b>	<b>i</b>
A.1 Algèbre . . . . .	i
A.2 Calcul . . . . .	ix
<b>Annexe B Correspondances avec d'autres formulations et théories</b>	<b>xi</b>
B.1 Correspondances avec la théorie des tiges se déformant dans l'espace d'Antman . . .	xi
B.1.1 Correspondances des variables . . . . .	xi
B.1.2 Équations . . . . .	xii
B.1.3 Démonstration des équivalences . . . . .	xiii
B.2 Correspondances avec la théorie des tiges avec torsion et flexion dans un fluide visceux de Lim <i>et al.</i> . . . . .	xiv
B.2.1 Correspondances des variables . . . . .	xiv
B.2.2 Équations . . . . .	xv

B.2.3	Équivalences . . . . .	xvi
B.3	Correspondances avec la théorie des tiges en déformation finie de Simo . . . . .	xx
B.3.1	Variables . . . . .	xx
B.3.2	Équations . . . . .	xxii
B.4	Correspondances avec la théorie des tiges affines de Nardinocchi et al. . . . .	xxiii
B.4.1	Variables . . . . .	xxiii
B.4.2	Équations . . . . .	xxiv
B.5	Les poutres et arcs élastiques de Ballard et Millard . . . . .	xxv
B.5.1	Variables . . . . .	xxv
B.5.2	Équations . . . . .	xxvi
<b>Annexe C Méthodes de Runge-Kutta</b>		<b>xxix</b>
C.1	Méthodes usuelles . . . . .	xxix
C.1.1	Méthodes explicites . . . . .	xxix
C.1.2	Méthodes implicites . . . . .	xxix
C.2	Méthodes diagonalement-implicites-explicites . . . . .	xxx
<b>Annexe D Noyaux</b>		<b>xxxv</b>
D.1	Noyaux standards . . . . .	xxxv
D.1.1	Noyaux répondant à la condition des carrés . . . . .	xxxv
D.1.2	Noyaux répondant à la double condition des carrés et de normalisation bipartite xxxvi	
D.2	Noyaux alternatifs . . . . .	xxxvi
D.3	Noyaux d'ordre d'interpolation maximal . . . . .	xxxvii
D.4	Noyaux reproducteurs de moments . . . . .	xxxviii
D.5	Noyaux adoucis . . . . .	xxxviii

---

# TABLE DES FIGURES

---

---

1.1	Différentes nages et leur espèces représentatives . . . . .	2
2.1	Configuration d'une tige de Reissner-Simo tridimensionnelle . . . . .	25
3.1	Polynômes de Lagrange . . . . .	68
3.2	Étalement . . . . .	72
3.3	Noyaux . . . . .	76
3.4	Noyaux (suite de la figure 3.3) . . . . .	77
3.5	Test de l'invariance des noyaux . . . . .	78
3.6	Test de l'invariance des noyaux (suite de la figure 3.5) . . . . .	79
4.1	Exemples de champs scalaires générés aléatoirement . . . . .	96
4.2	Convergence des approximations aux opérateurs différentiels et des solutions à l'équation de Brinkman . . . . .	101
4.3	Convergence des approximations aux intégrales par la quadrature de Gregory . . . . .	103
4.4	Convergences du transport de la tige . . . . .	104
4.5	Convergences du transport de la tige avec interpolation inexacte pour la méthode RK4 et le noyau $\phi_{i,6}$ . . . . .	106
4.6	Convergences de l'advection du fluide . . . . .	108
4.7	Borne sur la convergence temporelle de l'advection du fluide causée par l'imprécision spatiale . . . . .	109
4.8	Convergence de l'interpolation en fonction du nombre de points dans le fluide et sur la tige . . . . .	111
4.9	Convergence de l'étalement en fonction du nombre de points dans le fluide et sur la tige . . . . .	113
4.10	Convergence de l'interpolation en fonction du rapport du nombre de points dans le fluide par le nombre de points sur la tige . . . . .	114
4.11	Convergence de l'étalement en fonction du rapport du nombre de points dans le fluide par le nombre de points sur la tige . . . . .	115
4.12	Convergence de l'étalement pour le noyau $\phi_{i,6}$ selon différentes méthodes d'intégration sur la tige . . . . .	116
4.13	Dissipation de l'énergie de la tige par le fluide pour une torsion égale à $4\pi$ . . . . .	118
4.14	État d'équilibre pour une torsion égale à $4\pi$ . . . . .	119
4.15	Fonctions de raccord . . . . .	122
4.16	Schémas d'activation des nages giratoires . . . . .	123
4.17	Comparaison entre l'onde de courbure mesurée et son approximation . . . . .	125
4.18	Formes, ou gabarits, des ondes superposées ajustées aux données expérimentales . . . . .	126
4.19	Ondes de courbure superposées ajustées aux données expérimentales . . . . .	127

4.20	Comparaison entre les courbures prescrite et simulée pour la simulation où la vitesse atteinte est la plus élevée . . . . .	129
4.21	Performance de la nage la plus rapide . . . . .	130
4.22	Instantanés de la nage la plus rapide . . . . .	131
4.23	Comparaison entre les courbures prescrite et simulée pour une simulation caractérisée par une forte oscillation le long du corps du nageur . . . . .	132

---

# LISTE DES TABLEAUX

---

---

3.I	Méthodes de Runge-Kutta . . . . .	59
3.II	Principales propriétés des noyaux . . . . .	80
4.I	Caenorhabditis elegans . . . . .	120
4.II	Paramètres de la simulation où la vitesse atteinte est la plus élevée . . . . .	128
4.III	Paramètres d'une simulation caractérisée par une forte oscillation le long du corps du nageur . . . . .	133



---

# LISTE DES ALGORITHMES

---

---

1	Itération d'Euler pour une tige . . . . .	84
2	Itération de Runge-Kutta-Munthe-Kaas implicite pour une tige . . . . .	85
3	Interpolation (évalue $\mathbf{Q} \leftarrow \mathfrak{A}_r^\dagger \mathbf{q}$ ) . . . . .	89
4	Interpolation directe du gradient (évalue $\mathbf{Q} \leftarrow (\mathfrak{A}_r^\dagger \nabla) \mathbf{q}$ ) . . . . .	89
5	Interpolation indirecte du gradient (évalue $\mathbf{Q} \leftarrow (\mathfrak{A}_r^\dagger \mathfrak{D}) \mathbf{q}$ ) . . . . .	90
6	Étalement (évalue $\mathbf{q} = \mathfrak{A}_r \mathbf{Q}$ ) . . . . .	90
7	Gradient direct de l'étalement (évalue $\mathbf{q} = (\nabla \mathfrak{A}_r) \mathbf{Q}$ ) . . . . .	90
8	Gradient indirect de l'étalement (évalue $\mathbf{q} = (\mathfrak{D} \mathfrak{A}_r) \mathbf{Q}$ ) . . . . .	91
9	Calcul de la force et du couple sur une tige fermée . . . . .	91
10	Calcul de la force et du couple sur une tige ouverte sans masse . . . . .	92
11	Calcul de la force et du couple sur une tige fermée sans masse avec une méthode d'ordre deux . . . . .	92
12	Advection du fluide . . . . .	93
13	Itération du système complet . . . . .	94



---

# LISTE DES SYMBOLES

---

---

- $(\blacksquare, \blacksquare)_{\mathcal{V}}$  Produit scalaire sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{V}$ .
- $\mathbf{I}$  Identité des opérateurs linéaires.
- $\mathbf{A}$  Tenseur des coefficients pour le couple dans une loi constitutive linéaire.
- $\blacksquare^\dagger$  Transposée ou adjoint d'un opérateur linéaire.
- asym Antisymétrisation d'un opérateur linéaire (voir la définition A.13).
- $\mathbf{B}$  Tenseur des coefficients pour la force dans une loi constitutive linéaire.
- $\mathcal{B}$  Espace de paramétrisation de la tige.
- $\bar{\mathbf{b}}$  Force exercée sur un sous-volume du fluide :  $\bar{\mathbf{b}}(\mathcal{P})$  est la force appliquée au volume  $\mathcal{P}$ .
- $\bar{\mathbf{g}}$  Force exercée sur un segment de la tige :  $\bar{\mathbf{g}}(\mathcal{J})$  est la force appliquée au segment  $\mathcal{B}(\mathcal{J})$ .
- $\mathbf{b}$  Densité de force s'exerçant sur le fluide.
- $\mathbf{b}$  Densité de force s'exerçant sur la tige.
- $\bar{\mathbf{C}}$  Couple exercé sur sous-volume du fluide :  $\bar{\mathbf{C}}(\mathcal{P})$  est le couple appliqué au volume  $\mathcal{P}$ .
- $\bar{\mathbf{G}}$  Couple exercé sur un segment de la tige :  $\bar{\mathbf{G}}(\mathcal{J})$  est le couple appliqué au segment  $\mathcal{B}(\mathcal{J})$ .
- $\mathbf{C}$  Densité de couple s'exerçant sur le fluide.
- $\mathbf{C}$  Tenseur des déformations de Cauchy-Green de la tige.
- Ca Nombre de Cauchy (voir l'équation 2.76).
- $\mathfrak{C}$  Opérateur de convection discret :  $(\mathfrak{C}(\mathbf{u})f)_k \simeq ((\nabla f) \cdot \mathbf{u})(x_k)$ .
- $\hat{\mathbf{d}}$  Directeur de référence de la tige : les directeurs  $\{\hat{\mathbf{d}}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$  forment une base du repère orthonormé le long de la tige de référence.
- $\mathbf{d}$  Directeur actuel de la tige : les directeurs  $\{\mathbf{d}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$  forment une base du repère orthonormé le long de la tige actuelle.
- $\mathfrak{S}$  Décalage discret :  $(\mathfrak{S}_l f)_k = f_{k+l}$
- $\delta$  Delta de Dirac.
- $\delta$  Delta de Kronecker.
- $\mathfrak{D}$  Dérivée discrète :  $(\mathfrak{D}f)_k \simeq (\partial_x f)(x_k)$
- dexp Dérivée de l'opérateur exponentiel sur les matrices (voir le lemme 3.1).
- $\blacksquare \div \blacksquare$  Division élément par élément.
- $e$  Base eulérienne.

$\mathbf{E}$	Base lagrangienne.
$\mathbf{E}$	Tenseur des déformations de Green-Lagrange de la tige.
$\eta$	Viscosité de volume du fluide.
$\mathcal{A}$	Opérateur d'étalement exact.
$\mathfrak{A}$	Opérateur d'étalement discret.
$\tilde{\mathbf{F}}$	Tenseur de déformation de la tige actuelle par rapport à la tige de référence.
$\mathcal{F}$	Ensemble des points occupés par le fluide.
$\mathfrak{F}$	Transformation de Fourier discrète.
$\hat{\mathbf{F}}$	Tenseur de déformation de la tige de référence.
$\mathbf{q}$	Densité linéaire de force appliquée sur la tige.
$\mathbf{F}$	Tenseur de déformation de la tige actuelle.
$l$	Densité linéaire de force interne (ou force de contact) exercée par un segment de la tige sur son voisin.
$\nabla$	Gradient.
$h$	Écart d'une grille cartésienne.
$\mathbf{Y}$	Moment de l'écart de la courbe de référence vis-à-vis de la courbe des centroïdes.
$\mathcal{I}$	Intervalle de paramétrisation le long de toute la tige.
$\mathcal{A}^\dagger$	Opérateur d'interpolation exact.
$\mathfrak{A}^\dagger$	Opérateur d'interpolation discret.
$\bar{\mathbf{J}}$	Moment angulaire d'un sous-volume du fluide : $\bar{\mathbf{J}}(\mathcal{P})$ est le moment angulaire d'un volume $\mathcal{P}$ .
$\bar{\mathbf{M}}$	Moment angulaire d'un segment de la tige : $\bar{\mathbf{M}}(\mathcal{J})$ est le moment angulaire du segment $\mathcal{B}(\mathcal{J})$ .
$\mathbf{J}'$	Moment angulaire d'une section de la tige relatif à la ligne moyenne.
$\mathcal{J}$	Intervalle de paramétrisation le long de la tige.
$\bar{l}$	Moment linéaire d'un sous-volume du fluide : $\bar{l}(\mathcal{P})$ est le moment linéaire d'un volume $\mathcal{P}$ .
$\bar{m}$	Moment linéaire d'un segment de la tige : $\bar{m}(\mathcal{J})$ est le moment linéaire du segment $\mathcal{B}(\mathcal{J})$ .
$L$	Longueur de référence pour l'adimensionalisation, du même ordre de grandeur que la longueur de la tige
$\mathcal{L}^2(\mathcal{F})$	Espace des fonctions de carré intégrable sur l'ensemble $\mathcal{F}$ .
$\tilde{\mathcal{L}}_{\Xi}^2(\mathcal{F})$	Espace des approximations aux fonctions de carré intégrable sur l'ensemble $\mathcal{F}$ utilisant $\Xi$ comme index. Le produit scalaire est asymptotiquement égal au cas exact.

$\lambda$	Densité linéaire de la tige.
$\Delta$	Laplacien.
$\mathfrak{L}$	Laplacien discret : $(\mathfrak{L}f)_k \simeq (\Delta f)(x_k)$
$\mathbf{M}$	Moment angulaire d'une section de la tige.
$\mathbf{m}$	Moment linéaire d'une section de la tige.
$m$	Masse d'un sous-volume du fluide : $m(\mathcal{P})$ est la masse contenue dans le volume $\mathcal{P}$ .
$m$	Masse d'un segment de la tige : $m(\mathcal{J})$ est la masse du segment $\mathcal{B}(\mathcal{J})$ .
$M$	Nombre de dimension d'un espace euclidien.
$\mathbf{Q}$	Densité linéaire de couple appliquée sur la tige.
■ ◇	Désigne une variable matérielle à partir de son équivalent spatial. Pour un vecteur sur la tige actuelle, nous avons $\mathbf{a} = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{a}$ alors que pour un tenseur, nous avons $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{R}$ .
$\mathbf{L}$	Densité linéaire de couple interne (ou couple de contact) exercée par un segment de la tige sur son voisin.
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide.
■ * ■	Multiplication élément par élément.
$\mathbf{n}$	Extension d'une grille cartésienne.
$N$	Nombre de dimensions de l'espace ambiant.
$\mathbf{n}$	Vecteur unitaire (dans la formulation eulérienne).
$\mathbf{N}$	Vecteur unitaire (dans la formulation lagrangienne).
$\mathbf{o}$	Origine d'une grille cartésienne.
$\tilde{\Omega}$	Courbure de la tige actuelle par rapport à la tige de référence.
$\tilde{\omega}$	Scission-étension de la tige actuelle par rapport à la tige de référence.
$\hat{\Omega}$	Courbure de la tige de référence.
$\hat{\omega}$	Scission-étension de la tige de référence.
$\Omega$	Courbure de la tige actuelle.
$\omega$	Scission-étension de la tige actuelle.
$p$	Pression dans le fluide (comprise comme un multiplicateur de Lagrange qui maintient l'incompressibilité).
$\mathcal{P}$	Sous-ensemble des points occupés par le fluide.
$\mathbf{P}$	Premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff.
$\hat{\psi}$	Position factorisée de la tige de référence (théorie générale).

$\hat{\phi}$	Position de référence de la tige.
$\psi$	Position factorisée de la tige actuelle (théorie générale).
$\phi$	Position actuelle de la tige.
$\tilde{\mathbf{P}}$	Loi constitutive donnant le premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de la déformation.
$\theta$	Écart de la courbe de référence vis-à-vis la courbe des centroïdes.
$\tilde{\mathbf{R}}$	Tenseur de transformation du repère de la tige de référence vers le repère de la tige actuelle.
$\mathcal{R}$	Sous-ensemble de l'espace de paramétrisation de la tige.
$\hat{r}$	Ligne moyenne de référence de la tige.
$\hat{\mathbf{R}}$	Tenseur de transformation du repère de la tige de référence ; est équivalent aux directeurs $\{\hat{\mathbf{d}}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ .
$r$	Ligne moyenne actuelle de la tige.
$\mathbf{R}$	Tenseur de transformation du repère de la tige actuelle ; est équivalent aux directeurs $\{\mathbf{d}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ .
Re	Nombre de Reynolds (voir l'équation 2.75).
$\rho$	Densité volumique du fluide.
$\rho$	Densité volumique de la tige.
$\mathcal{S}$	Surface d'un sous-ensemble de l'espace de paramétrisation de la tige sans les extrémités.
$\mathbf{S}$	Tenseur des contraintes de Cauchy.
$\mathbf{S}^a$	Tenseur des contraintes de Cauchy, partie active.
$\mathbf{S}^r$	Tenseur des contraintes de Cauchy, partie réactive.
$\hat{\varsigma}$	Déterminant du tenseur de déformation de la tige de référence.
$\varsigma$	Déterminant du tenseur de déformation de la tige actuelle.
$SO(N)$	Groupe orthogonal spécial opérant sur $\mathbb{R}^N$ . Correspond à l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant unité de $\mathbb{R}^{N \times N}$ .
$\mathfrak{so}(N)$	Algèbre de Lie associé au groupe spécial orthogonal opérant sur $\mathbb{R}^N$ . Correspond à l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathbb{R}^{N \times N}$ .
sym	Symétrisation d'un opérateur linéaire (voir la définition A.12).
$\mathcal{T}$	Intervalle de temps d'intérêt.
t	Temps.
$t$	Traction dans le fluide.
$\boldsymbol{\tau}$	Tangente normalisée de la ligne moyenne de la tige : $\boldsymbol{\tau} = \partial_{x_1} \mathbf{r} / \ \partial_{x_1} \mathbf{r}\ $ .

$\tau_{\mathbf{x}}$	Opérateur qui donne un tenseur axial (dans $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ et antisymétrique) à partir d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ (voir la définition A.15).
$\boldsymbol{\tau}$	Traction prescrite sur la surface de la tige.
$\mathbf{u}$	Vélocité du fluide.
$d^M \ell_{\mathbf{x}}$	Unité infinitésimale de « longueur » (de $M$ dimensions) dans une intégrale sur la variable $\mathbf{x}$ .
$d^M s_{\mathbf{x}}$	Unité infinitésimale de « surface » (de $M$ dimensions) dans une intégrale sur la variable $\mathbf{x}$ .
$d^M v_{\mathbf{x}}$	Unité infinitésimale de volume (de $M$ dimensions) dans une intégrale sur la variable $\mathbf{x}$ .
$\Upsilon$	Ensemble des indices d'un maillage.
$V$	Vitesse de référence pour l'adimensionalisation.
$v$	Vitesse (translationnelle) de la tige.
$v_{\mathbf{x}}$	Opérateur qui donne un vecteur axial (dans $\mathbb{R}^3$ ) à partir d'une matrice (dans $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ) (voir la définition A.16).
$\mathbf{W}$	Vitesse angulaire de la tige.
$\blacksquare \wedge \blacksquare$	Produit tensoriel antisymétrique entre deux vecteurs (voir la définition A.14).
$\mathbf{x}$	Position eulérienne.
$\mathbf{X}$	Position lagrangienne.
$\Xi$	Ensemble des indices d'un maillage.
$\boldsymbol{\xi}$	Propagateur du fluide : $\boldsymbol{\xi}_{t_0}(\mathbf{x}, t)$ est la position au temps $t$ de la particule au point $\mathbf{x}$ au temps $t_0$ .
$\mathbf{x}_{\mathbf{k}}$	Point d'indice $\mathbf{k}$ sur une grille
$Y$	Module de Young de référence pour l'adimensionalisation.
$\mathbf{y}$	Position eulérienne.



## REMERCIEMENTS

Je sais gré à Robert Owens, mon directeur de recherche, pour sa mansuétude,  
et aussi à ma famille, pour son indéfectible support.



---

# INTRODUCTION

---

La nage et le vol fascinent depuis toujours l'homme qui envie la grâce et l'agilité des poissons et des oiseaux, et cela encore après avoir maîtrisé lui-même l'art du voyage aérien ou sous-marin. D'ailleurs, c'est dans la perspective d'améliorer nos propres moyens de locomotion que plusieurs chercheurs étudient celles des animaux, car leurs performances, en efficacité et en manoeuvrabilité, dépassent encore ce que nous pouvons faire.

La nage anguilliforme, c'est-à-dire celles des animaux aquatiques filiformes (voir la figure 1.1), se démarque par le grand nombre de degrés de liberté du corps du nageur ainsi que par sa relative simplicité. En fait, cette locomotion est considérée comme primitive, se retrouvant chez les vers tandis que la plupart des poissons ont évolué vers la nage caudale. Les organismes les plus communs chez qui l'on retrouve ce moyen de propulsion sont, bien entendu, les anguilles, mais aussi les nématodes (un type de vers), les sangsues, et les lamproies. Ainsi, la nage anguilliforme est utilisée à des échelles largement différentes, d'un nombre de Reynolds de  $10^{-3}$  jusqu'à  $10^3$ .

Aussi simple qu'elle paraît, ce type de nage soulève déjà plusieurs questions : comment le mouvement du corps produit-il une poussée ? comment la morphologie affecte-t-elle la performance de la nage ? ou encore : quelle est la résistance des muscles ? Un bon modèle est en mesure de répondre à ces questions : il suffit en principe de modifier les paramètres et d'en identifier les conséquences. En affinant nos simulations, nous espérons étendre notre compréhension des organismes. Par exemple, il est difficile de croire que les nématodes, qui sont étudiés en sciences médicales comme des organismes multicellulaires très simples – avec seulement dans l'ordre de la centaine de cellules nerveuses – savent pourtant adapter leur mouvements à la viscosité du fluide : une simulation complète de ces vers de moins d'un millimètre pourrait élucider ce mystère.

## 1.1 REVUE

La nage d'organismes aquatiques<sup>1</sup>, et plus récemment, de robots nageurs, a intéressé de nombreux scientifiques qui en ont construit des modèles fidèles (voir [103]) dont l'analyse est d'autant plus facile que les capacités de l'informatique grandissent et que les méthodes numériques, qui en rendent l'usage possible, s'affinent.

### 1.1.1 MODÈLES USANT DE FORCES HYDRODYNAMIQUES APPROXIMATIVES

Il est possible, sans avoir à déterminer le champ de vitesse environnant, d'approximer les forces sur le nageur : cette méthode était la seule qui soit raisonnable avant l'arrivée d'ordinateurs suffi-

---

1. ou plutôt, les nages, car elles sont variées [96]

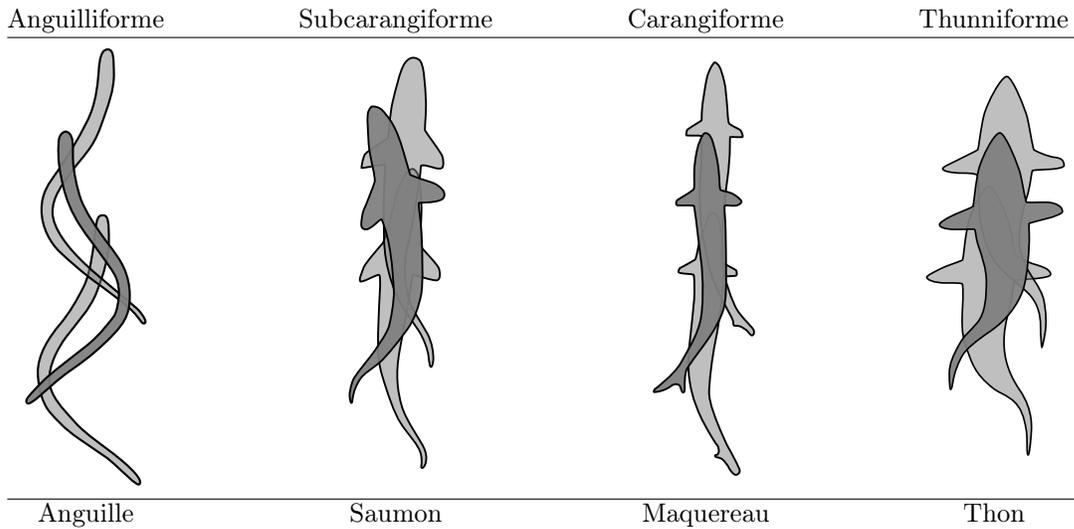


FIGURE 1.1 – Différentes nages et leur espèces représentatives

samment puissants pour permettre la résolution des équations de Navier-Stokes. Ce sont les travaux novateurs de Gray [46–48] qui ont inspiré les théories de Lighthill [68–72], de Taylor [111] et de Wu et Newman [83, 84, 118–123] qui forment maintenant la base des développements actuels dont [89] fait un résumé.

Un exemple est celui de Chen et al. [19] qui en 2011 « construisent » une sangsue, dont le mouvement est calqué sur celui observé en laboratoire, avec 18 liens rigides et 17 joints sans friction qu'ils immergent dans un fluide dont les forces sont données par la théorie des forces résistives de Taylor [110, 111] adjointe à la théorie des forces réactives de Lighthill [68]. L'approche de Lighthill est aussi choisie en 2008 par Singh et Pedley [102] pour étudier les virages. En 2007, Lauga [67] étudie analytiquement la nage flagellaire avec un modèle linéaire pour la flagelle et les forces résistives pour le fluide. Onze ans auparavant, Jordan [55] a développé un modèle comparable pour le nageur (aussi une sangsue) et les forces hydrodynamiques, mais le mouvement était généré par l'activation de « muscles » viscoélastiques. Dans son article de 1993, Ekeberg [33] emploie des forces hydrodynamiques et un modèle du corps comparables, mais l'activation musculaire est contrôlée par un réseau neural avec la déformation du corps du poisson comme entrée.

À la vue de la complexité des équations de Navier-Stokes, il est remarquable que ces techniques apparemment fort inexacts produisent des résultats convaincants dans la plupart des cas, mais c'est possible car ces cas ont été judicieusement choisis pour ne pas trop sortir de leur domaines de validité. À ce sujet, Eldredge [37], en donnant une équation du mouvement d'un corps (à la cinématique imposée) où les effets des forces inertielles et visqueuses sont clairement divisés, permet de mieux comprendre les biais des diverses approximations.

## 1.1.2 NAGE INALTÉRABLE

Une autre avenue très empruntée [8, 11, 16, 17, 20, 27, 34, 37, 38, 43, 51, 53, 57, 58, 64, 79, 80, 89, 125, 128] pour simplifier le modèle de la nage est d’omettre les forces internes de l’organisme et d’imposer la cinématique de la nage, c’est-à-dire que la forme du nageur est prescrite par une fonction issue, soit de l’observation, soit d’une optimisation sur une mesure de l’efficacité de la nage (comme la poussée, la distance parcourue ou l’énergie dépensée). De plus, la plupart des auteurs se concentrent sur la nage à vitesse de croisière contrairement à Hu et al. [52, 53] qui choisissent de simuler le freinage et l’inversion de la direction de la nage comme certaines espèces le font dans la nature.

Parmi les modèles les plus simples, on note ceux de Kajtar [57–59] et Eldredge [34–36] qui font nager, en deux dimensions et dans un fluide vérifiant les équations de Navier-Stokes, trois ellipses qui pivotent autour de deux articulation. Kajtar et Monaghan étudient aussi ces nageurs avec une « peau » empêchant le fluide de passer entre les ellipses [56, 59]. Cependant, la méthode utilisée pour la simulation diffère : SPH (*smoothed particle hydrodynamics* ou hydrodynamique de particule lissées) pour Kajtar et VVPM (*viscous vortex particle method* ou méthode des vortex visqueux discrets).

Afin de diminuer encore la complexité du problème, Kanso et al. [60] étudient analytiquement (et géométriquement) en détail le même cas, mais avec un fluide idéal irrotationnel, puis utilisent la méthode des éléments-frontières (BEM, *boundary element method*) pour obtenir quelques résultats numériques. Une approche comparable est celle de Munnier *et al.* [17, 79–81] où une théorie basée sur les équations d’Euler-Lagrange (qui décrivent à la fois la dynamique du fluide et des corps immergés) supporte la création d’un *toolbox* MATLAB (BIOHYDRODYNAMICS TOOLBOX ou BHT). Kelly et Xiong [61] s’intéressent aussi à un fluide parfait planaire, mais ils y immergent un hydroptère (une aile immergée ou *hydrofoil* en anglais) dont ils varient légèrement la forme afin de le propulser.

Afin d’étudier et de comparer les effets de la forme et de la cinématique de la nage, Borazjani et Sotiropoulos [8] (voir aussi [7, 9]) simulent en trois dimensions la nage carangiforme puis anguilliforme pour deux anatomies différentes, celles d’une anguille et d’un maquereau. Les calculs sont effectués par la méthode hybride cartésienne de la frontière immergée (*hybrid Cartesian immersed-boundary*) décrite dans [43], où la nage inentamable est utilisée pour tester la méthode numérique. Comme le mouvement du centre de masse n’est pas connu à l’avance, les équations de Navier-Stokes sont formulées dans le référentiel du nageur, contrairement à la technique utilisée par Yang et al. [125] où la position et l’angle (le modèle est bidimensionnel) sont des inconnues ; une autre différence est que dans ce dernier article, le fluide est discrétisé par la méthode des volumes finis.

Un exemple d’optimisation de la natation est donné par Kern et al. [63, 64] qui utilisent un algorithme évolutif pour déterminer les paramètres optimaux au point de vue de l’efficacité d’une nage à la cinématique imposée dans un fluide décrit par les équations de Navier-Stokes tridimensionnelle. Les équations sont résolues par la méthode des volumes finis (*finite volume element*) et des grilles Lagrangienne-Eulérienne arbitraire (*ALE*).

Une grande variété de méthodes sont utilisées autant pour discrétiser un fluide satisfaisant

les équations de Navier-Stokes et un nageur que pour lier les dynamiques des deux. Par exemple, Curet et al. [27] étendent l'algorithme SIMPLER (*semi-implicit method for pressure-linked equations revised*) [88] à l'interaction fluide-structure et obtiennent une méthode adaptée à des nombres de Reynolds de nul à modéré qu'ils utilisent pour simuler la nage d'une flagelle, d'une méduse et d'une larve de poisson zèbre. Pour leur part, Liu et Kawachi [75] utilisent une méthode de pseudo-compressibilité pour simuler la nage d'un têtard, alors que Zhang et al. [128] développent un algorithme combinant maillage adaptatif et solution itérative. Yao et al. [127] utilisent aussi un schéma avec maillage adaptatif, mais combinent les méthodes de volumes finis multigrilles, de la frontière immergée et VOF (*volume of fluid*). Les différences finies et la transformation de coordonnées permettent à Carling et al. [16] de faire nager une créature aquatique longiforme. Hieber et Koumoutsakos présentent dans [51] une méthode de particules lissées réinitialisées avec frontières immergées (*remeshed smoothed particle hydrodynamics/immersed boundary* ou *rSPH-IB*) qui leur permet la simulation de la nage en deux ou trois dimensions dans un fluide. Une autre façon de faire est celle de Shirgaonkar et al. [98] qui utilisent les multiplicateurs de Lagrange afin d'imposer le mouvement du nageur au fluide sous-jacent et développent une méthode numérique correspondante qui reprend certaines techniques de la méthode des frontières immergées. Enfin, Bergmann et Iollo [5] représentent l'espace occupé par le nageur par une méthode de courbes implicites (*level-set*) alors que l'interaction avec le fluide utilise la méthode de pénalisation [1] inspirée de la théorie de Brinkman des matériaux poreux.

### 1.1.3 RÉSEAUX DE RESSORTS ET CHAÎNE DE TIGES RIGIDES

La contrepartie à simuler les forces internes au nageur est qu'il devient difficile de résoudre à la fois les équations de la mécanique des corps déformables et les équations de Navier-Stokes, et surtout, de coupler ces deux systèmes de façon stable. C'est sans doute pourquoi Farnell et al. [39] étudient le cas d'une chaîne de tiges rigides d'épaisseur finie dont ils obtiennent les équations d'Euler-Lagrange avant d'y ajouter une force d'amortissement et la force du fluide (lequel est simulé par le méthode des éléments finis).

Plutôt que des liens rigides, Cortez et al. [24] prennent un réseau de ressorts activés périodiquement pour modéliser leur nageur ; ils utilisent la méthode des fonctions de Green régularisées (*method of regularized Stokeslets*) pour la simulation de la nage de microorganismes ( $10^{-6} \lesssim \text{Re} \lesssim 10^{-2}$ ) pour laquelle ils assument un écoulement de Stokes. Par contre, pour un nématode ( $0,4 \lesssim \text{Re} \lesssim 4$ ) et une sangsue ( $\text{Re} \sim 1000$ ), les équations de Navier-Stokes sont résolues et le couplage avec l'organisme est faite par la méthode de la frontière immergée. L'avenue empruntée par Tyson et al. [113] est comparable, mais leur réseau de ressorts viscoélastiques, qui devrait mieux modéliser les muscles d'un nématode, ne leur a pas permis de produire une nage réussie.

Cela n'a pas empêché Tytell et al. [114] d'adopter un modèle semblable (mais en deux dimensions) et d'être les premiers à avoir simulé la nage ondulatoire d'un organisme (une lamproie) en couplant un corps élastique avec un fluide visqueux incompressible (en deux dimensions,  $\text{Re} \sim 10^4$ ). La procédure numérique est celle de [49], elle-même un raffinement de la méthode de la frontière immergée créée par Peskin [90]. Le corps est modélisé par un réseau de ressorts avec au centre, le

*notochorde* et, de chaque côté, les muscles qui sont activés périodiquement et qui ont une résistance passive à l'étirement ; enfin, des ressorts relient les muscles aux ressorts centraux pour assurer une certaine rigidité.

### 1.1.4 FILAMENT FLEXIBLE

Pour un nageur oblong comme une lamproie, une anguille ou un nématode, modéliser le nageur comme une tige unidimensionnelle devient naturel : c'est ce qu'ont fait Fauci et Peskin qui développent dans [41] un modèle de filament activé pour simuler la nage (repris dans [40]). L'interaction entre le fluide (vérifiant les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles) et le filament est faite via la méthode de la frontière immergée ; la force du filament sur le fluide (déduite d'une énergie à dépendance temporelle) tend à donner au filament une forme prescrite. En comparaison, McMillen et al. [77, 78] modélisent le nageur par la théorie des poutres de Kirchhoff (adjointe à une relation constitutive régissant la courbure), mais où l'effet du fluide est simplifié par la théorie des forces réactives. Leur schéma peut être mis en parallèle avec celui de Boyer et al. [10–13] qui modélisent, en trois dimensions, le corps d'une anguille robotique par les équations de Poincaré de la théorie des poutres de Cosserat [99–101] tandis que les forces hydrodynamiques sont régies par la théorie des corps filiformes de Lighthill (*elongated body theory*) [68]. Puisqu'il est déraisonnable de modéliser un poisson non-filiforme comme une tige, Cheng et al. [21] combinent une théorie des plaques ondulantes immergées [22] à la théorie des poutres linéaire. On note aussi la recherche de Eloy et Schouveiler [38] (basée sur la théorie linéarisée des ailes instationnaires de Wu [120]) où le mouvement du nageur est prescrit (choisi comme celui qui optimise la poussée), mais est exprimé en fonction des modes vibratoires d'une poutre.

## 1.2 ÉNONCÉ DU PROBLÈME

Nous cherchons à résoudre numériquement le problème de la nage (dynamique interne du nageur, hydrodynamique et interaction), en particulier la nage anguilliforme des nématodes et des anguilles. Nous désirons éviter les diverses approximations qui la rendent analytiquement soluble ; en particulier, nous tentons de simuler une nage avec un nombre de Reynolds médian ( $Re \sim 1$ ), c'est-à-dire que le fluide n'est ni très visqueux, ni très peu, sans restriction sur l'amplitude du mouvement.

## 1.3 SURVOL

Nous traitons premièrement de la mécanique des milieux continus polaires, c'est-à-dire des corps supportant une densité de couple, avant de la spécialiser à l'hydrodynamique par l'introduction de la loi constitutive des fluides newtoniens incompressibles. Ensuite, nous reprenons la mécanique des corps déformables et étudions son application aux corps filiformes, d'une façon purement cinématique au départ, mais, après nous être convaincus que la théorie des poutres de Reissner-Simo

n'est ni trop approximative ni trop lourde pour notre problème, nous en établissons les équations dynamiques. Il faut encore relier les deux modèles : nous les apparions par la méthode de la frontière immergée que nous exprimons initialement dans une formulation exempte d'approximations numériques.

Notre premier effort de discrétisation des équations s'exerce sur l'évolution temporelle des systèmes couplés et résulte en l'usage combiné des méthodes de Runge-Kutta additives, qui permettent de diviser le processus de solution en une partie explicite et une autre implicite, et des méthodes de Runge-Kutta-Munthe-Kaas qui généralisent les méthodes de Runge-Kutta aux groupes de Lie et nous servent à préserver exactement les contraintes cinématiques du nageur. Nous passons ensuite aux discrétisations spatiales du fluide et du nageur qui font appel aux différences finies. Par la suite, nous nous intéressons à l'aspect numérique de la méthode de la frontière immergée généralisée, que nous développons analogiquement à partir de sa formulation exacte.

Les équations discrètes doivent encore être résolues, nous voyons en premier lieu comment accélérer par la méthode de Newton leurs résolutions. Ensuite, nous résolvons l'équivalent discret des équations de Stokes-Brinkman via les transformées de Fourier discrètes. De plus, nous présentons les nombreux algorithmes dont nous nous servons.

Avant de tenter de simuler la nage, nous vérifions exhaustivement nos techniques et leurs substantifications algorithmiques. Nous voyons ensuite comment nous paramétrons la nage et diverses mesures empiriques que nous tentons de reproduire dans nos résultats finaux.

# MODÈLES

## 2.1 HYDRODYNAMIQUE POLAIRE

Les équations de Navier-Stokes sont certainement les équations aux dérivées partielles non-linéaires les plus connues et étudiées, mais il est très rare que le cas d'un fluide sur lequel s'exerce, en plus d'une densité de force, une densité de couple, soit considéré. Cela introduit peu de changement dans les développements, nous les détaillons quand même par souci de complétude, mais aussi pour faire ressortir les similarités avec la théorie déployée à la section suivante portant sur les tiges.

### 2.1.1 INTRODUCTION

Nous déduisons ici les équations du mouvement locales à partir de la conservation des moments linéaire et angulaire ; la procédure est standard (voir, par exemple, [44, chap. 5]), sauf que nous introduisons, en plus d'une densité de force  $\mathbf{b}$ , une densité de couple  $\mathbf{C}$ . Nous montrons que ce dernier ajout amène un nouveau terme dans les équations de Navier-Stokes qui peut être assimilé à une densité de force supplémentaire.

Nous travaillons dans la formulation eulérienne, les quantités d'intérêt sont donc des fonctions de la position eulérienne  $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$  et du temps  $t \in \mathcal{T}$  où  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^N$  et  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$  sont, respectivement, le domaine occupé par le fluide et l'intervalle de temps considéré. Nous décrivons la dynamique du fluide par le champ de vitesse  $\mathbf{u} : \mathcal{F} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N$  et la densité (de masse)  $\rho : \mathcal{F} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}$ . Le fluide est soumis à une densité de force  $\mathbf{b} : \mathcal{F} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N$ , à une traction  $\mathbf{t} : \mathcal{F} \times \mathcal{T} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$  et à une densité de couple  $\mathbf{C} : \mathcal{F} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$ .

Avant de déterminer les équations d'équilibre, quelques définitions et résultats sont nécessaires. Soit  $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$  compact et dont la surface est lisse par morceaux et  $t_0 \in \mathcal{T}$  quelconque, on définit, à partir du champ de vitesse  $\mathbf{u}$ , la fonction  $\xi_{t_0}$  par  $\partial_t \xi_{t_0}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  et  $\xi_{t_0}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{x}$  de façon que  $\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)$  rassemble les positions au temps  $t$  des « particules » dans  $\mathcal{P}$  au temps  $t_0$  (en particulier  $\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t_0) = \mathcal{P}$ ).

**Théorème 2.1.** *Théorème de transport de Reynolds*

*Soit une fonction scalaire  $q : \mathcal{F} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}$  différentiable, alors*

$$\partial_t \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} q d^N v_{\mathbf{x}} = \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \partial_t q + \nabla \cdot (q\mathbf{u}) d^N v_{\mathbf{x}} \quad (2.1)$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser successivement la règle de Leibniz (pour la différentiation d'une intégrale) [42] et le théorème de Gauss–Ostrogradsky [94, thm 10.51] :

$$\partial_t \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} q d^N v_{\mathbf{x}} = \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \partial_t q d^N v_{\mathbf{x}} + \int_{\partial \xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} q\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA d^{N-1} s_{\mathbf{x}} = \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \partial_t q + \nabla \cdot (q\mathbf{u}) d^N v_{\mathbf{x}}.$$

Le développement est détaillé dans [44, résultat 4.10] et [76, thm 1.1, chap. 2].  $\square$

Ce résultat se généralise facilement à des champs vectoriels et à des tenseurs d'ordre supérieur, en particulier, pour une fonction vectorielle  $\mathbf{q}: \mathcal{F} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N$ , nous avons

$$\partial_t \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \mathbf{q} \, d^N v_{\mathbf{x}} = \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \partial_t \mathbf{q} + \nabla \cdot (\mathbf{q} \otimes \mathbf{u}) \, d^N v_{\mathbf{x}}. \quad (2.2)$$

**Théorème 2.2.** *Théorème de Cauchy*

Soit  $\mathbf{t}: \mathcal{F} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$  continue et telle que

$$\int_{\mathcal{P}} d^N v_{\mathbf{x}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \, d^{N-1} s_{\mathbf{x}}}{\int_{\partial \mathcal{P}} d^{N-1} s_{\mathbf{x}}} \rightarrow \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

alors il existe  $\mathbf{S}: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  telle que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{n}; \quad (2.4)$$

autrement dit,  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  est linéaire pour la normale  $\mathbf{n}$ .

*Démonstration.* Voir [76, thm 1.9, chap. 2] ou [44, résultat 3.3] pour deux versions différentes de la preuve.  $\square$

## 2.1.2 ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE

### 2.1.2.1 CONSERVATION DU VOLUME

Si nous imposons que le fluide soit incompressible, c'est-à-dire que

$$\int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t_a)} d^N v_{\mathbf{x}} = \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t_b)} d^N v_{\mathbf{x}} \quad \forall t_a, t_b \in \mathcal{T} \quad (2.5)$$

ou encore, en utilisant le théorème de transport,

$$0 = \partial_t \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} d^N v_{\mathbf{x}} = \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d^N v_{\mathbf{x}}, \quad (2.6)$$

en conséquence de l'arbitraire du choix de  $\mathcal{P}$  et de  $t_0$ , l'équation locale suivante est satisfaite

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.7)$$

### 2.1.2.2 CONSERVATION DE LA MASSE

La masse à l'intérieur d'un volume  $\mathcal{P}$  est

$$m_{t_0}(\mathcal{P}, t) = \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \rho \, d^N v_{\mathbf{x}} \quad (2.8)$$

où  $\rho: \mathcal{F} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}$  est la densité de masse. Comme la masse est conservée, nous avons

$$m_{t_0}(\mathcal{P}, t_a) = m_{t_0}(\mathcal{P}, t_b) \quad \forall t_a, t_b \in \mathcal{T}, \mathcal{P} \subset \mathcal{F} \quad (2.9)$$

ou, de façon équivalente

$$\partial_t m_{t_0}(\mathcal{P}, t) = 0 \quad \forall t_0 \in \mathcal{T}, \mathcal{P} \subset \mathcal{F} \quad (2.10)$$

ainsi, nous avons localement

$$0 = \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \partial_t \rho + \nabla \rho \cdot \mathbf{u} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2.11)$$

### 2.1.2.3 CONSERVATION DU MOMENT LINÉAIRE

Le moment linéaire total de  $\mathcal{P}$  est

$$\bar{\mathbf{l}}_{t_0}(\mathcal{P}, t) = \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \rho \mathbf{u} \, d^N v_{\mathbf{x}} \quad (2.12)$$

et est associé la force

$$\bar{\mathbf{b}}_{t_0}(\mathcal{P}, t) = \int_{\partial \xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \mathbf{t} \, d^{N-1} s_{\mathbf{x}} + \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \mathbf{b} \, d^N v_{\mathbf{x}} \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{t}: \mathcal{F} \times \mathcal{T} \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$  est la traction (dont le troisième argument est la normale à la surface) et  $\mathbf{b}: \mathcal{F} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N$  est la densité de force.

L'équilibre du taux de changement du moment et de la force sur  $\mathcal{P}$  donne

$$\partial_t \bar{\mathbf{l}}_{t_0}(\mathcal{P}, t) = \bar{\mathbf{b}}_{t_0}(\mathcal{P}, t). \quad (2.14)$$

En appliquant le théorème de transport et en utilisant la conservation de la masse, le terme de gauche devient

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\mathbf{l}}_{t_0}(\mathcal{P}, t) &= \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \, d^N v_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \rho (\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) \, d^N v_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \rho \dot{\mathbf{u}} \, d^N v_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

où nous avons introduit la dérivée matérielle d'un champ vectoriel eulérien

$$\dot{\mathbf{q}} = \partial_t \mathbf{q} + (\nabla \mathbf{q}) \mathbf{u} \quad (2.15)$$

et avons utilisé l'hypothèse simplificatrice que  $\rho$  est constant (dans le temps) que nous reprendrons dans les développements subséquents. L'application du théorème de Cauchy puis du théorème de

Gauss–Ostrogradsky au terme de droite nous amène :

$$\bar{\mathbf{b}}_{t_0}(\mathcal{P}, t) = \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{b} d^N v_{\mathbf{x}} \quad (2.16)$$

où  $\mathbf{S}: \mathcal{F} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  est le tenseur de Cauchy (i.e.  $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ ). La version localisée de l'équation de conservation est

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{b}. \quad (2.17)$$

#### 2.1.2.4 CONSERVATION DU MOMENT ANGULAIRE

Nous procédons à l'identique pour la conservation du moment angulaire; nous avons :

$$\partial_t \bar{\mathbf{J}}_{t_0}(\mathcal{P}, t) = \bar{\mathbf{C}}_{t_0}(\mathcal{P}, t) \quad (2.18)$$

où moment angulaire s'écrit<sup>1</sup>

$$\bar{\mathbf{J}}_{t_0}(\mathcal{P}, t) = \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{u} d^N v_{\mathbf{x}} \quad (2.19)$$

tandis que le couple pour le sous-domaine  $\mathcal{P}$  a pour expression

$$\bar{\mathbf{C}}_{t_0}(\mathcal{P}, t) = \int_{\partial \xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t} d^{N-1} s_{\mathbf{x}} + \int_{\xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)} \mathbf{C} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} d^N v_{\mathbf{x}} \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{C}: \mathcal{F} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  est la densité de couple, l'aspect original de cette dérivation. Nous explicitons l'équation d'équilibre pour trouver :

$$\int_{\mathcal{Q}} \mathbf{x} \wedge \rho \dot{\mathbf{u}} d^N v_{\mathbf{x}} = \int_{\partial \mathcal{Q}} \mathbf{x} \wedge (\mathbf{S} \mathbf{n}) d^{N-1} s_{\mathbf{x}} + \int_{\mathcal{Q}} \mathbf{C} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} d^N v_{\mathbf{x}} \quad (2.21)$$

---

1. Pour sa généralité, nous utilisons le produit tensoriel antisymétrique plutôt que l'usuel produit vectoriel qui n'est applicable qu'en dimension trois. La section A.1 traite des équivalences entre le produit vectoriel et le produit tensoriel antisymétrique (défini par A.7) ainsi que des relations entre tenseurs antisymétriques et pseudovecteurs.

avec  $\mathcal{Q} = \xi_{t_0}(\mathcal{P}, t)$ . Le premier terme de droite présente certaines difficultés, aussi nous le traitons séparément :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\mathcal{Q}} \mathbf{x} \wedge (\mathbf{S}\mathbf{n}) \, d^{N-1}s_{\mathbf{x}} &= \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{Q}} \mathbf{x} \otimes (\mathbf{S}\mathbf{n}) - (\mathbf{S}\mathbf{n}) \otimes \mathbf{x} \, d^{N-1}s_{\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{Q}} (x_i S_{j,k} \mathbf{n}_k - S_{i,k} \mathbf{n}_k x_j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \, d^{N-1}s_{\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \partial_{x_k} (x_i S_{j,k} - S_{i,k} x_j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \, d^N v_{\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} (\delta_{i,k} S_{j,k} + x_i \partial_{x_k} S_{j,k} - \partial_{x_k} S_{i,k} x_j - S_{i,k} \delta_{j,k}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \, d^N v_{\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} (S_{j,i} + x_i \partial_{x_k} S_{j,k} - \partial_{x_k} S_{i,k} x_j - S_{i,j}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \, d^N v_{\mathbf{x}} \\
&= \int_{\mathcal{Q}} \mathbf{x} \wedge (\nabla \cdot \mathbf{S}) - \text{asym}(\mathbf{S}) \, d^N v_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé momentanément la convention d'Einstein pour la summation. Nous revenons maintenant à l'équation de la conservation du moment angulaire sous sa forme locale

$$\mathbf{x} \wedge \rho \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{x} \wedge (\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{b}) + \mathbf{C} - \text{asym}(\mathbf{S})$$

que l'on peut réduire à

$$\text{asym}(\mathbf{S}) = \mathbf{C} \tag{2.22}$$

en utilisant l'équation 2.17. Nous remarquons que, dans le cas où  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$  nous avons  $\text{asym}(\mathbf{S}) = \mathbf{0}$  ou encore,  $\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}$ , ce qui est le résultat attendu en l'absence de couple.

Une version de l'équation 2.22 a été développée par les frères Cosserat [25] en 1909 : c'est une forme simplifiée d'une équation plus générale donnée par Dahler et Scriven [29], qui ajoutait à la théorie de Grad [45] la possibilité d'une densité de couple. Un fluide dont le tenseur de contrainte de Cauchy n'est pas symétrique est appelé un fluide polaire [23, 26, 105].

## 2.1.3 CARACTÉRISATION DU FLUIDE

### 2.1.3.1 RELATION CONSTITUTIVE

Nous supposons le fluide isotrope et Newtonien, c'est-à-dire que nous exigeons que la partie symétrique du tenseur de contrainte de Cauchy soit une fonction linéaire du gradient de vitesse ; ces conditions imposent (voir [44, résultat 1.16]) que :

$$\text{sym}(\mathbf{S}) = 2\mu \text{sym}(\nabla \mathbf{u}) + \eta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{1} \tag{2.23}$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique (ou absolue) et  $\eta$ , la viscosité de volume (ou de dilatation).

### 2.1.3.2 INCOMPRESSIBILITÉ

La condition d'incompressibilité ajoute une contrainte interne (ou contrainte matérielle) au fluide, il est alors naturel [44, §5.6] de séparer le tenseur de contrainte de Cauchy en les tenseurs de contrainte réactif et actif définis implicitement par

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^a + \mathbf{S}^r \text{ et } \mathbf{S}^r : \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (2.24)$$

c'est-à-dire que la séparation est additive et que la puissance de  $\mathbf{S}^r$  est nulle pour tout déplacement. Le choix  $\mathbf{S}^r = -p\mathbf{1}$  (où  $-p$  est un multiplicateur de Lagrange) s'impose puisque

$$\mathbf{S}^r : \nabla \mathbf{u} = (-p\mathbf{1}) : \nabla \mathbf{u} = -p \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u}) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Nous utilisons la relation constitutive d'un fluide newtonien isotrope et divisons le tenseur de contrainte de Cauchy en ses parties symétrique et antisymétrique, ainsi :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \nabla \cdot (\operatorname{sym}(\mathbf{S}^a) + \operatorname{asym}(\mathbf{S}^a) - p\mathbf{1}) \\ &= \nabla \cdot (2\mu \operatorname{sym}(\nabla \mathbf{u}) + \eta(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{1}) + \nabla \cdot \mathbf{C} - \nabla p \\ &= \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{C} - \nabla p \end{aligned}$$

### 2.1.4 SYNTHÈSE

Au final, nous avons donc les équations de Navier-Stokes

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b} + \nabla \cdot \mathbf{C} \quad (2.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.26)$$

Nous remarquons qu'en posant simplement  $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \nabla \cdot \mathbf{C}$ , nous obtenons leur formes usuelles.

## 2.2 LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUEMENT EXACTE DES POUTRES

Nous avons besoin, pour modéliser le nageur, d'une théorie qui permet une grande amplitude de mouvement, ce qui exclut d'emblée les linéarisations souvent utilisées en ingénierie. Par contraste à ces dernières, les modèles non-linéaires dits géométriquement exacts permettent de grandes déformations sans la complexité de l'entière des équations des milieux continus. Ils sont utilisés en particulier pour les sutures, les cathéters et les tendons dans le développement de simulateurs pour les chirurgiens [86], mais aussi pour des cordes ou des cheveux en animation par ordinateur. Enfin, ces modèles sont utilisés autant à très petites échelles pour les nanotubes de carbone [18] et les brins d'ADN qu'à grande échelle pour détecter d'éventuelles ondes gravitationnelles [112].

## 2.2.1 CINÉMATIQUE D'UNE TIGE DE COSSERAT

Cette sous-section a pour objectif de présenter une vue d'ensemble de différentes théories possibles pour un corps allongé afin de mettre en contexte le choix final et de mieux apprécier l'approximation qui l'engendre. Il est donc suffisant de ne traiter pour l'instant que la cinétique, et de réserver le développement de la dynamique à plus tard, d'autant plus qu'il en sera grandement simplifié.

### 2.2.1.1 TIGE AYANT UNE CONFIGURATION DE RÉFÉRENCE RECTILIGNE

En mécanique du milieu continu, la tige est un corps dont le mouvement peut être décrit par une fonction  $\phi: \mathcal{B} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N: (\mathbf{X}, t) \mapsto \phi(\mathbf{X}, t)$  paramétrée sur l'ensemble  $\mathcal{B}$  (contenu dans l'espace de paramétrisation  $\mathbb{R}^N$ ) des « étiquettes » des particules de la tige. Mais cette description n'exprime pas le caractère filiforme de la tige et nous en cherchons donc une qui soit plus géométrique. Or une tige est caractérisée par une dimension plus longue que les autres : à cette direction, nous associons la ligne moyenne, et aux autres, les sections droites attachées à cette ligne. Nous désignerons le mouvement de la ligne moyenne par  $\mathbf{r}: \mathcal{I} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N: (X_1, t) \mapsto \mathbf{r}(X_1, t)$  où  $\mathcal{I}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et, comme à la section 2.1,  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$  est l'intervalle de temps d'intérêt. La direction « allongée » sera désignée par  $\mathbf{d}_1$  et les directions perpendiculaires, par  $\{\mathbf{d}_\alpha\}_{\alpha=2}^N$ . Nous nommons les fonctions  $\mathbf{d}_\alpha: \mathcal{I} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N: (X_1, t) \mapsto \mathbf{d}_\alpha(X_1, t)$  les directeurs de la tige et imposons

$$\mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\beta = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N$$

ainsi les sections droites sont les plans normaux à  $\mathbf{d}_1$  ou, alternativement, les plans générés par les combinaisons linéaires de  $\{\mathbf{d}_\alpha\}_{\alpha=2}^N$ . Par contre, nous n'imposons pas la condition  $\partial_{X_1} \mathbf{r} = \mathbf{d}_1$  pour garder la généralité du développement actuel et par anticipation de la discussion de la section 2.2.1.5. Pour l'instant, nous ne choisissons pas non plus de critère de sélection de la ligne moyenne, quoique son nom soit suggestif.

**FACTORISATION DE LA POSITION** Nous pouvons maintenant réécrire  $\phi$  en fonction de la ligne moyenne, des directeurs et des déviations  $\{\psi_\alpha\}_{\alpha=1}^N$  à la ligne moyenne :

$$\phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{r}(X_1, t) + \sum_{\alpha=1}^N \psi_\alpha(\mathbf{X}, t) \mathbf{d}_\alpha(X_1, t) \quad (2.27)$$

Nous pouvons réécrire 2.27 de façon à expliciter la rotation  $\mathbf{R}$  qui relie les directeurs à une base de l'espace de paramétrisation

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi} &= \mathbf{r} + \sum_{\alpha=1}^N \psi_{\alpha} \mathbf{d}_{\alpha} \\ &= \mathbf{r} + \mathbf{R} \sum_{\alpha=1}^N \psi_{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha} \\ &= \mathbf{r} + \mathbf{R}\boldsymbol{\psi}\end{aligned}$$

le tenseur de rotation  $\mathbf{R}: \mathcal{I} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  est donc défini par

$$\mathbf{d}_{\alpha}(X_1, t) = \mathbf{R}(X_1, t) \mathbf{E}_{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, N$$

tandis que la position factorisée  $\boldsymbol{\psi}: \mathcal{B} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N$  est décomposée ainsi

$$\boldsymbol{\psi} = \sum_{\alpha=1}^N \psi_{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha}$$

Pour éviter d'être redondant en laissant prendre la place de  $\mathbf{r}$  par  $\boldsymbol{\psi}$ , et puisque nous nous intéressons à un objet filiforme, nous assumons que les déviations (par rapport à la ligne moyenne) soient petites<sup>2</sup>. Un critère pourrait être

$$\sup_{\mathcal{B} \times \mathcal{T}} \|\boldsymbol{\psi}\| \ll \inf_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{I}} \|\partial_{X_1} \mathbf{r}\| dX_1 \quad (2.28)$$

c'est-à-dire que la longueur de la tige doit être beaucoup plus grande que le plus grand écart à la ligne moyenne. Cette condition a aussi pour effet d'éviter que  $\mathbf{r}$  s'éloigne trop de la tige elle-même puisque  $\|\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}\| = \|\mathbf{R}\boldsymbol{\psi}\| = \|\boldsymbol{\psi}\|$ . Ainsi, (2.28) est équivalent à demander que (2.27) décrive bel et bien une tige au sens d'un objet longiligne. Dans le cas d'une tige circulaire de longueur constante  $L$  et de rayon constant  $k$ , la condition (2.28) donne simplement

$$k \ll L.$$

Une condition importante doit être imposée à  $\boldsymbol{\psi}$  : pour une position le long de la tige  $X_1$  fixée, ce doit être une bijection – continûment différentiable et qui préserve l'orientation de l'espace – de la section

$$\mathcal{B}(X_1) = \{\mathbf{Y} \in \mathcal{B} \mid Y_1 = X_1\}$$

vers son image. Cela fait en sorte qu'aucune section ne soit dégénérée. Nous remarquons que nous n'imposons pas que  $\boldsymbol{\psi}$  elle-même soit une bijection, cela serait d'ailleurs redondant puisque nous avons déjà  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{R}$ .

2. La nature de ces déviations est autre que celles des théories linéaires : la ligne moyenne  $\mathbf{r}$  est une courbe arbitraire (sauf qu'elle est continue et injective) représentative de la forme globale de l'objet filiforme qu'elle modélise. Par contraste, la position factorisée  $\boldsymbol{\psi}$  ne sert qu'à donner au corps son volume, par ailleurs concentré autour de la ligne moyenne.

Si  $\phi$  est connu, nous pouvons en déduire simplement  $\psi$  à l'aide de  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{R}$

$$\psi = \mathbf{R}^{-1}(\phi - \mathbf{r})$$

d'ailleurs,  $\psi$  prend alors la même forme que  $\phi$  si nous prenons  $\mathbf{R}' = \mathbf{R}^{-1}$ ,  $\mathbf{r}' = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}$  et  $\psi' = \phi$ . En fait,  $\phi$  est l'application d'une transformation euclidienne sur  $\psi$  qui est paramétrée sur  $\mathcal{I}$  et représentée par la paire  $(\mathbf{R}, \mathbf{r})$  dont l'inverse est  $(\mathbf{R}^{-1}, -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r})$ . Cependant, l'étude approfondie de cette voie nécessiterait les outils de la théorie des groupes de Lie, ce dont nous nous réfréons ; le lecteur avide de la poursuivre peut se référer à l'article de Nardinocchi *et al.* [82] ou à ceux de Boyer *et al.* [13, 14].

DÉFORMATION Nous souhaitons connaître le tenseur de déformation  $\mathbf{F}: \mathcal{B} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  de la tige ; il est défini comme le gradient de la déformation  $\phi$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla \phi \\ &= \sum_{\alpha=1}^N (\partial_{X_\alpha} \phi) \otimes \mathbf{E}_\alpha \\ &= (\partial_{X_1} \phi) \otimes \mathbf{E}_1 + \sum_{\alpha=2}^N (\partial_{X_\alpha} \phi) \otimes \mathbf{E}_\alpha \\ &= \left( \partial_{X_1} \mathbf{r} + (\partial_{X_1} \mathbf{R}) \sum_{\alpha=1}^N \psi_\alpha \mathbf{E}_\alpha + \mathbf{R} \sum_{\alpha=1}^N \partial_{X_1} \psi_\alpha \mathbf{E}_\alpha \right) \otimes \mathbf{E}_1 + \sum_{\alpha=2}^N \left( \mathbf{R} \sum_{\beta=1}^N \partial_{X_\alpha} \psi_\beta \mathbf{E}_\beta \right) \otimes \mathbf{E}_\alpha \\ &= \left( \partial_{X_1} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R} \sum_{\alpha=1}^N \psi_\alpha \mathbf{E}_\alpha \right) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{R} \sum_{\alpha=1}^N \left( \sum_{\beta=1}^N \partial_{X_\alpha} \psi_\beta \mathbf{E}_\beta \right) \otimes \mathbf{E}_\alpha \\ &= (\partial_{X_1} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}(\phi - \mathbf{r})) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{R} \sum_{\alpha=1}^N (\partial_{X_\alpha} \psi) \otimes \mathbf{E}_\alpha \\ &= (\partial_{X_1} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}(\phi - \mathbf{r})) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{R} \nabla \psi \end{aligned}$$

où nous avons été amené à définir la *courbure spatiale* du repère sur la tige  $\boldsymbol{\Omega}: \mathcal{I} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  par

$$\boldsymbol{\Omega} = (\partial_{X_1} \mathbf{R}) \mathbf{R}^\dagger$$

Puisque  $\mathbf{R}$  est orthogonal, nous pouvons vérifier que  $\boldsymbol{\Omega}$  est un tenseur antisymétrique

$$\mathbf{0} = \partial_{X_1} \mathbf{1} = \partial_{X_1} (\mathbf{R} \mathbf{R}^\dagger) = (\partial_{X_1} \mathbf{R}) \mathbf{R}^\dagger + \mathbf{R} (\partial_{X_1} \mathbf{R}^\dagger) = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^\dagger$$

et qu'il est la vitesse (spatiale) de rotation du repère formé par les directeurs

$$\partial_{X_1} \mathbf{d}_\alpha = \partial_{X_1} \mathbf{R} \mathbf{E}_\alpha = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R} \mathbf{E}_\alpha = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{d}_\alpha$$

VITESSE Il suffit de dériver pour trouver

$$\partial_t \phi = \partial_t \mathbf{r} + (\partial_t \mathbf{R}) \psi + \mathbf{R} (\partial_t \psi) = \mathbf{v} + \mathbf{W} (\phi - \mathbf{r}) + \mathbf{R} (\partial_t \psi)$$

où il est naturel de définir la *vitesse*  $\mathbf{v}: \mathcal{I} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N$  et la *vitesse angulaire*  $\mathbf{W}: \mathcal{I} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  du repère de la tige

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \partial_t \mathbf{r} \\ \mathbf{W} &= (\partial_t \mathbf{R}) \mathbf{R}^\dagger \end{aligned}$$

À l'instar de la courbure,  $\mathbf{W}$  est antisymétrique et décrit la vitesse (temporelle) de rotation des directeurs.

### 2.2.1.2 ADMISSIBILITÉ D'UNE CONFIGURATION

Une condition nécessaire pour qu'une configuration soit admissible est que le tenseur de déformation  $\mathbf{F}$  soit inversible et que son déterminant soit strictement positif partout à l'intérieur de la tige et en tout temps. La forme particulière de  $\mathbf{F}$  nous amène au lemme suivant.

**Lemme 2.3.** *Déterminant et inverse d'une matrice formée de l'addition d'une matrice inversible et d'une dyade :*

$$\det(\mathbf{M} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \det(\mathbf{M}) (1 + (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}) \quad (2.29)$$

$$(\mathbf{M} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{-1} = \mathbf{M}^{-1} - \frac{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \mathbf{M}^{-1}}{1 + (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}} \quad (2.30)$$

où l'inverse existe sous condition que  $\mathbf{M}^{-1}$  existe et  $(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \neq -1$ .

*Démonstration.* L'expression pour l'inverse se vérifie en montrant que  $(\mathbf{M} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{M} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{-1} = (\mathbf{M} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{1}$ . Le déterminant peut être trouvé en montrant que les vecteurs propres de  $\mathbf{1} + (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}$  forment l'ensemble des vecteurs orthogonaux à  $\mathbf{b}$  auquel est ajouté  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}$  : les valeurs propres associées aux premiers sont toutes 1 alors que la valeur propre associée à  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}$  est  $1 + (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ , or le déterminant est le produit des valeurs propres et vaut donc  $1 + (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ ; enfin, le déterminant d'un produit de matrices est le produit de leur déterminants respectifs, donc  $\det(\mathbf{M} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \det(\mathbf{M}) \det(\mathbf{1} + (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}) = \det(\mathbf{M}) (1 + (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b})$ .  $\square$

**REFORMULATION** Il paraît maintenant simple d'inverser  $\mathbf{F}$ , mais si  $\nabla \psi$  n'est pas inversible,  $\mathbf{R} \nabla \psi$  ne l'est pas non plus et le lemme précédent ne s'applique pas. Il suffit que  $\psi$  soit indépendant de  $X_1$ , c'est-à-dire que toutes les sections soient déformées identiquement, ou que  $\psi_1 = c$  avec  $c$  une constante, c'est-à-dire que les sections demeurent planes.

Pour palier à cette difficulté, nous posons

$$\chi = \psi + X_1 \mathbf{E}_1$$

ainsi la position de la tige s'écrit

$$\phi = \mathbf{r} - X_1 \mathbf{d}_1 + \mathbf{R}\chi$$

et nous avons la relation

$$\nabla\chi = \nabla\psi + \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1$$

Il suffit qu'aucune section de la tige ne soit dégénérée pour que  $\nabla\chi$  soit inversible ; en effet,

$$\sum_{\alpha=2}^N \sum_{\beta=2}^N \partial_{X_\alpha} \psi_\beta \mathbf{E}_\beta \otimes \mathbf{E}_\alpha$$

est dans ce cas inversible dans le sous-espace perpendiculaire à  $\mathbf{E}_1$ . Nous pouvons calculer le tenseur de déformation en fonction de  $\chi$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla\phi \\ &= \mathbf{R}\nabla\psi + (\partial_{X_1} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}(\phi - \mathbf{r})) \otimes \mathbf{E}_1 \\ &= \mathbf{R}(\nabla\chi - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1) + (\partial_{X_1} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}(\phi - \mathbf{r})) \otimes \mathbf{E}_1 \\ &= \mathbf{R}\nabla\chi + (\partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{d}_1 + \boldsymbol{\Omega}(\phi - \mathbf{r})) \otimes \mathbf{E}_1 \\ &= \mathbf{R}\nabla\chi + \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{E}_1 \end{aligned}$$

De façon à simplifier la notation, nous posons  $\boldsymbol{\nu} : \mathcal{B} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N$  tel que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} &= \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{d}_1 + \boldsymbol{\Omega}(\phi - \mathbf{r}) \\ &= \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}(\phi - \mathbf{r}) \end{aligned}$$

ainsi

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\nabla\chi + \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{E}_1 \tag{2.31}$$

avec  $\boldsymbol{\omega}$  la *scission-extension spatiale* de la tige.

Nous sommes prêts à inverser le tenseur de déformation, nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1} &= (\mathbf{R}\nabla\chi)^{-1} - \frac{(\mathbf{R}\nabla\chi)^{-1} \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{E}_1 (\mathbf{R}\nabla\chi)^{-1}}{1 + \left( (\mathbf{R}\nabla\chi)^{-1} \boldsymbol{\nu} \right) \cdot \mathbf{E}_1} \\ &= (\nabla\chi)^{-1} \mathbf{R}^{-1} - \frac{(\nabla\chi)^{-1} \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{E}_1 (\nabla\chi)^{-1} \mathbf{R}^{-1}}{1 + \left( (\nabla\chi)^{-1} \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\nu} \right) \cdot \mathbf{E}_1} \end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier quelles conditions sont nécessaires à l'admissibilité de la configuration  $\phi$  en calculant le déterminant de son gradient

$$0 < \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{R}) \det(\nabla\chi) \left( 1 + \left( (\nabla\chi)^{-1} \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\nu} \right) \cdot \mathbf{E}_1 \right)$$

puisque  $\mathbf{R}$  est une rotation,  $\det(\mathbf{R}) = 1$  ; de plus,  $\psi$  préserve l'orientation des sections, donc,

localement

$$\left( (\nabla \chi)^{-1} \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\nu} \right) \cdot \mathbf{E}_1 > -1$$

Globalement, il faut alors

$$\inf_{\mathbf{X} \in \mathcal{B}} \left( (\nabla \chi)^{-1} \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\nu} \right) \cdot \mathbf{E}_1 > -1$$

MESURES DE DÉFORMATION Il est intéressant d'expliciter le terme  $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\nu}$  qui intervient dans l'inverse et le déterminant

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\nu} \\ &= \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{R}^\dagger \mathbf{d}_1 + \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R} \boldsymbol{\psi} \\ &= \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{E}_1 + \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\psi} \\ &= \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\psi} \end{aligned}$$

où  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{E}_1$  est la *scission-extension matérielle* et  $\boldsymbol{\Omega}$  est la *courbure matérielle* qui s'exprime en fonction de  $\mathbf{R}$  par

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R} = \mathbf{R}^\dagger (\partial_{X_1} \mathbf{R} \mathbf{R}^\dagger) \mathbf{R} = \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{R}$$

En résumé, en excluant  $\boldsymbol{\psi}$  et  $\chi$ , les *mesures de déformation spatiales* forment la paire

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}) = (\partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{d}_1, \partial_{X_1} \mathbf{R} \mathbf{R}^\dagger)$$

tandis que les mesures de déformation matérielles forment la paire

$$\left( \boldsymbol{\omega}_{\diamond}, \boldsymbol{\Omega}_{\diamond} \right) = \left( \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{E}_1, \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{R} \right)$$

Ces mesures sont reliées par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega}_{\diamond} \mathbf{R}^\dagger && \iff && \boldsymbol{\Omega}_{\diamond} &= \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R} \\ \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_{\diamond} && \iff && \boldsymbol{\omega}_{\diamond} &= \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Nous pouvons facilement vérifier que si la tige subit, en plus, une déformation rigide, c'est-à-dire une composition de translations et de rotations – des transformations euclidiennes – (paramétrées par le temps seulement), les mesures de déformations matérielles restent inchangées. En effet, si nous notons la déformation après les transformations euclidiennes comme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}'(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{c}(t) + \boldsymbol{\Lambda}(t) \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) \\ &= \mathbf{c}(t) + \boldsymbol{\Lambda}(t) \mathbf{r}(X_1, t) + \boldsymbol{\Lambda}(t) \mathbf{R}(X_1, t) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{X}, t) \end{aligned}$$

alors, nous aurons

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(X_1, t) &= \mathbf{c}(t) + \mathbf{\Lambda}(t) \mathbf{r}(X_1, t), \\ \mathbf{d}'_\alpha(X_1, t) &= \mathbf{\Lambda}(t) \mathbf{d}'_\alpha(X_1, t), \\ \mathbf{R}'(X_1, t) &= \mathbf{\Lambda}(t) \mathbf{R}(X_1, t), \\ \psi'(\mathbf{X}, t) &= \psi(\mathbf{X}, t).\end{aligned}$$

où nous remarquons que la déformation factorisée  $\psi$  est invariante, ce qui est attendu puisqu'elle décrit justement la déformation hors transformations euclidiennes. Nous pouvons calculer les mesures de déformations matérielles

$$\omega'_\diamond = (\mathbf{R}')^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{r}' - \mathbf{E}_1 = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{\Lambda}^\dagger \mathbf{\Lambda} \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{E}_1 = \omega_\diamond, \quad (2.32)$$

$$\Omega'_\diamond = (\mathbf{R}')^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{R}' = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{\Lambda}^\dagger \mathbf{\Lambda} \partial_{X_1} \mathbf{R} = \Omega_\diamond, \quad (2.33)$$

et vérifier qu'elle sont invariables sous les transformation euclidiennes, ce qui n'est pas le cas de leurs équivalents spatiaux

$$\begin{aligned}\omega' &= \partial_{X_1} \mathbf{r}' - \mathbf{d}'_1 = \mathbf{\Lambda} (\partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{d}_1) = \mathbf{\Lambda} \omega, \\ \Omega' &= \partial_{X_1} \mathbf{R}' (\mathbf{R}')^\dagger = \mathbf{\Lambda} \partial_{X_1} \mathbf{R} \mathbf{R}^\dagger \mathbf{\Lambda}^\dagger = \mathbf{\Lambda} \Omega \mathbf{\Lambda}^\dagger.\end{aligned}$$

### 2.2.1.3 TIGE AVEC UNE CONFIGURATION DE RÉFÉRENCE DÉFORMÉE

Les développements précédents présupposaient une configuration de référence rectiligne, or, pour nos besoins, nous devons traiter le cas d'une configuration de référence arbitraire. Cependant, au lieu de paramétrer la configuration actuelle  $\phi$  sur la configuration de référence  $\hat{\phi}$ , nous choisissons de paramétrer les deux configurations sur le même ensemble  $\mathcal{B}$ . La déformation pertinente sera alors  $\phi \circ \hat{\phi}^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & \phi & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \hat{\phi}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\phi \circ \hat{\phi}^{-1}} & \phi(\mathcal{B}) \end{array}$$

$$\phi = \mathbf{r} - X_1 \mathbf{d}_1 + \mathbf{R} \chi,$$

$$\hat{\phi} = \hat{\mathbf{r}} - X_1 \hat{\mathbf{d}}_1 + \hat{\mathbf{R}} \hat{\chi}$$

$$\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{R} \mathbf{E}_\alpha,$$

$$\hat{\mathbf{d}}_\alpha = \hat{\mathbf{R}} \mathbf{E}_\alpha$$

$$\partial_{X_1} \hat{\mathbf{R}} = \hat{\Omega} \hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}} \hat{\Omega}_\diamond$$

Pour simplifier les développements subséquents, nous posons

$$\hat{\varsigma} = \frac{\det(\hat{\mathbf{F}})}{\det(\nabla\hat{\chi})} = 1 + \left( (\nabla\hat{\chi})^{-1} \hat{\mathbf{R}}^\dagger \hat{\nu} \right) \cdot \mathbf{E}_1$$

et

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}\nabla\chi, \quad \hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{R}}\nabla\hat{\chi}$$

Nous calculons maintenant le gradient de déformation de la configuration actuelle relativement à la configuration de référence  $\tilde{\mathbf{F}} = \nabla(\phi \circ \hat{\phi}^{-1})$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}} &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{F}}^{-1} \\ &= (\mathbf{R}\nabla\psi + \nu \otimes \mathbf{E}_1) \left( \hat{\mathbf{R}}\nabla\hat{\chi} + \hat{\nu} \otimes \mathbf{E}_1 \right)^{-1} \\ &= (\mathbf{Q} + \nu \otimes \mathbf{E}_1) \left( \hat{\mathbf{Q}} + \hat{\nu} \otimes \mathbf{E}_1 \right)^{-1} \\ &= (\mathbf{Q} + \nu \otimes \mathbf{E}_1) \left( \hat{\mathbf{Q}}^{-1} - \frac{1}{\hat{\varsigma}} \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\nu} \otimes \mathbf{E}_1 \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \right) \\ &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{Q}}^{-1} - \frac{1}{\hat{\varsigma}} \mathbf{Q}\hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\nu} \otimes \mathbf{E}_1 \hat{\mathbf{Q}}^{-1} + (\nu \otimes \mathbf{E}_1) \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{\hat{\varsigma}} (\nu \otimes \mathbf{E}_1) \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\nu} \otimes \mathbf{E}_1 \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \\ &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{Q}}^{-1} - \frac{1}{\hat{\varsigma}} \left( \mathbf{Q}\hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\nu} \right) \otimes \left( \hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger} \mathbf{E}_1 \right) + \nu \otimes \left( \hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger} \mathbf{E}_1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{\hat{\varsigma}} \left( \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\nu} \right) \cdot \mathbf{E}_1 \nu \otimes \left( \hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger} \mathbf{E}_1 \right) \\ &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{Q}}^{-1} + \frac{1}{\hat{\varsigma}} \left( \nu + \left( \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\nu} \right) \cdot \mathbf{E}_1 \nu - \mathbf{Q}\hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\nu} \right. \\ &\quad \left. - \left( \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\nu} \right) \cdot \mathbf{E}_1 \nu \right) \otimes \left( \hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger} \mathbf{E}_1 \right) \\ &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{Q}}^{-1} + \frac{1}{\hat{\varsigma}} \left( \nu - \mathbf{Q}\hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\nu} \right) \otimes \left( \hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger} \mathbf{E}_1 \right) \\ &= \mathbf{Q} \left( \mathbf{1} + \frac{1}{\hat{\varsigma}} \left( \mathbf{Q}^{-1} \nu - \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\nu} \right) \otimes \mathbf{E}_1 \right) \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \end{aligned}$$

si nous posons

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{Q}}^{-1}$$

alors

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{Q}} + \frac{1}{\hat{\varsigma}} \left( \nu - \tilde{\mathbf{Q}} \hat{\nu} \right) \otimes \left( \hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger} \mathbf{E}_1 \right) \quad (2.34)$$

Nous nous arrêtons momentanément pour se convaincre que (2.34) a la même forme que (2.31) malgré le terme  $\hat{\zeta}$ . Montrons que  $\frac{1}{\hat{\zeta}}\hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1 &= \left(\hat{\mathbf{Q}} + \hat{\nu} \otimes \mathbf{E}_1\right)^{-\dagger} \mathbf{E}_1 \\
&= \left(\hat{\mathbf{Q}}^{-1} - \frac{1}{\hat{\zeta}}\hat{\mathbf{Q}}^{-1}(\hat{\nu} \otimes \mathbf{E}_1)\hat{\mathbf{Q}}^{-1}\right)^{\dagger} \mathbf{E}_1 \\
&= \left(\hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger} - \frac{1}{\hat{\zeta}}\left(\hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1\right) \otimes \left(\hat{\mathbf{Q}}^{-1}\hat{\nu}\right)\right) \mathbf{E}_1 \\
&= \frac{1}{\hat{\zeta}}\left(\hat{\zeta} - \left(\hat{\mathbf{Q}}^{-1}\hat{\nu}\right) \cdot \mathbf{E}_1\right) \hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1 \\
&= \frac{1}{\hat{\zeta}}\left(1 + \left(\hat{\mathbf{Q}}^{-1}\hat{\nu}\right) \cdot \mathbf{E}_1 - \left(\hat{\mathbf{Q}}^{-1}\hat{\nu}\right) \cdot \mathbf{E}_1\right) \hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1 \\
&= \frac{1}{\hat{\zeta}}\hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1
\end{aligned}$$

or la base  $\left\{\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_\alpha\right\}_{\alpha=1}^N$  est la base réciproque<sup>3</sup> de la base naturelle  $\left\{\hat{\mathbf{F}}\mathbf{E}_\alpha\right\}_{\alpha=1}^N$  et  $\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_\alpha$  est la normale à la surface  $X_\alpha = 0$  après avoir été transformée par  $\hat{\phi}$ . Ainsi, le rôle que  $\frac{1}{\hat{\zeta}}\hat{\mathbf{Q}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1$  joue dans (2.34) est celui que  $\mathbf{E}_1$  joue dans (2.31). Nous posons donc

$$\tilde{\nu} = \nu - \tilde{\mathbf{Q}}\hat{\nu}$$

Calculons maintenant sous quelle condition le déterminant du gradient de déformation est positif :

$$0 < \det(\tilde{\mathbf{F}}) = \frac{\det(\mathbf{F})}{\det(\hat{\mathbf{F}})}.$$

Donc, si indépendamment  $\hat{\phi}$  et  $\phi$  sont admissibles, alors  $\phi \circ \hat{\phi}^{-1}$  l'est aussi. Une fois  $\tilde{\mathbf{F}}$  calculé, nous nous intéressons au tenseur des déformations de Cauchy-Green pour son invariance sous transformation euclidienne

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{C}} &= \tilde{\mathbf{F}}^{\dagger}\tilde{\mathbf{F}} \\
&= \left(\tilde{\mathbf{Q}}^{\dagger} + \left(\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1\right) \otimes \left(\nu - \tilde{\mathbf{Q}}\hat{\nu}\right)\right) \left(\tilde{\mathbf{Q}} + \left(\nu - \tilde{\mathbf{Q}}\hat{\nu}\right) \otimes \left(\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1\right)\right) \\
&= \tilde{\mathbf{Q}}^{\dagger}\tilde{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{Q}}^{\dagger}\left(\nu - \tilde{\mathbf{Q}}\hat{\nu}\right) \otimes \left(\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1\right) + \left(\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1\right) \otimes \left(\nu - \tilde{\mathbf{Q}}\hat{\nu}\right) \tilde{\mathbf{Q}} \\
&\quad + \left\|\nu - \tilde{\mathbf{Q}}\hat{\nu}\right\|^2 \left(\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1\right) \otimes \left(\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1\right) \\
&= \tilde{\mathbf{Q}}^{\dagger}\tilde{\mathbf{Q}} + \left(\tilde{\mathbf{Q}}^{\dagger}\nu - \tilde{\mathbf{Q}}^{\dagger}\tilde{\mathbf{Q}}\hat{\nu}\right) \otimes \left(\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1\right) + \left(\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1\right) \otimes \left(\tilde{\mathbf{Q}}^{\dagger}\nu - \tilde{\mathbf{Q}}^{\dagger}\tilde{\mathbf{Q}}\hat{\nu}\right) \\
&\quad + \left\|\nu - \tilde{\mathbf{Q}}\hat{\nu}\right\|^2 \left(\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1\right) \otimes \left(\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_1\right)
\end{aligned}$$

3. Nous pouvons facilement vérifier que  $\left(\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_\alpha\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{F}}\mathbf{E}_\beta\right) = \mathbf{E}_\alpha \cdot \left(\hat{\mathbf{F}}^{-1}\hat{\mathbf{F}}\mathbf{E}_\beta\right) = \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\beta = \delta_{\alpha,\beta}$ . Les vecteurs  $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{E}_\alpha$  (respectivement  $\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger}\mathbf{E}_\alpha$ ) sont dénoté par  $\mathbf{g}_\alpha$  (respectivement  $\mathbf{g}^\alpha$ ) comme dans [2, §11.3] ou [85, §1.5.4], en géométrie différentielle, il est commun de voir  $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$  (respectivement  $dx^\alpha$ ) quoique dans [76, chap. 1] la notation  $\mathbf{e}_\alpha$  (respectivement  $e^\alpha$ ) est utilisé.

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange en mesure la déviation par rapport à l'identité :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{Q}}^\dagger \tilde{\mathbf{Q}} - \mathbf{1}) + \text{sym} \left( (\tilde{\mathbf{Q}}^\dagger \boldsymbol{\nu} - \tilde{\mathbf{Q}}^\dagger \tilde{\mathbf{Q}} \hat{\boldsymbol{\nu}}) \otimes (\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger} \mathbf{E}_1) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{\nu} - \tilde{\mathbf{Q}} \hat{\boldsymbol{\nu}} \right\|^2 (\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger} \mathbf{E}_1) \otimes (\hat{\mathbf{F}}^{-\dagger} \mathbf{E}_1).\end{aligned}$$

#### 2.2.1.4 SIMPLIFICATIONS

Les développements ci-haut supposaient une forme relativement générale à  $\boldsymbol{\psi}$  de sorte que  $\phi$  permette tout les mouvements admissibles en mécanique des milieux continus « volumique » malgré le caractère filiforme du corps étudié. Cependant, il est utile, avant de passer à la discrétisation numérique, de passer en revue différentes approximations analytiques présentes dans la littérature.

**TIGE AFFINE** Si nous imposons que les sections subissent une transformation homogène qui les laissent planes, mais sans empêcher leur cisaillement nous obtenons la condition suivante

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}(X_1) \mathbf{X}$$

avec  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  symétrique et définie positive telle que  $\mathbf{U} \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1$ . Nous retrouvons [82].

**TIGE DONT LES DIRECTEURS SONT ORTHOGONAUX** Si nous imposons les mêmes conditions que ci-dessus, mais que nous demandons de plus que les sections ne puissent être que dilatées, et non pas aussi cisillées dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{d}_1$ , nous arrivons à

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha=2}^N \delta_\alpha(X_1) X_\alpha \mathbf{E}_\alpha$$

c'est-à-dire que le tenseur  $\mathbf{U}$  défini ci-dessus doit être diagonal :

$$\mathbf{U} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \sum_{\alpha=2}^N \delta_\alpha(X_1) \mathbf{E}_\alpha \otimes \mathbf{E}_\alpha$$

Nous pouvons interpréter cette cinématique introduisant les directeurs orthogonaux  $\mathbf{d}_\alpha^\# = \delta_\alpha \mathbf{d}_\alpha$  avec  $\delta_1 = 1$  pour ainsi écrire

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{r} + \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \mathbf{d}_\alpha^\#$$

et retrouver [2, §16.8].

**TIGE DONT LES DIRECTEURS SONT ORTHONORMAUX** Si maintenant nous choisissons que les sections demeurent rigides, il advient que

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$$

ou encore

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}$$

Ainsi, la position s'écrit simplement en fonction des directeurs orthonormaux

$$\phi = \mathbf{r} + \sum_{\alpha=2}^N X_{\alpha} \mathbf{d}_{\alpha}$$

et nous retrouvons la théorie de Reissner-Simo ou de Cosserat restreinte [4], [99], [2, §8].

**TIGE DE KIRCHHOFF EXTENSIBLE** Une condition supplémentaire peut être adjointes aux précédentes : il est commun de demander que les sections soient perpendiculaire à la ligne moyenne, ainsi, en plus de

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}$$

nous pouvons demander

$$(\mathbf{1} - \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1) \partial_{X_1} \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

ce qui est équivalent à  $\partial_{X_1} \mathbf{r} \parallel \mathbf{d}_1$ .

**TIGE DE KIRCHHOFF** La condition la plus sévère que nous considérons est d'ajouter aux précédentes l'inextensibilité de la tige, d'où

$$\mathbf{U} = \mathbf{1}$$

et

$$\mathbf{d}_1 = \partial_{X_1} \mathbf{r} \quad \iff \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$

Nous notons que cela implique que  $\partial_{X_1} \mathbf{r}$  est unitaire, ce qui amène que  $X_1$  est l'abscisse curviligne de la courbe  $\mathbf{r}$ . Cette théorie est celle développée par Kirchhoff [32] et correspond, lorsque la tige est contrainte à se déplacer dans un plan à la théorie des elastica d'Euler-Bernouilli développée au début du 18<sup>e</sup> siècle (voir [2, §8.21]).

### 2.2.1.5 MOTIVATION DU CHOIX DU MODÈLE

**TRANSFERT DES CONTRAINTES DE LA TIGE AU FLUIDE** Maintenant que nous avons exposé des modèles simplifiés possibles pour la tige, nous montrons que certaines conditions poseraient problème dans l'interaction fluide-structure puisqu'il faudrait alors aussi imposer des contraintes au fluide.

Sans s'avancer aussi loin dans l'interaction fluide-structure que dans la section 2.3.1, il nous faut savoir que la ligne moyenne se déplace à la vitesse du fluide là où elle se trouve

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \circ \mathbf{r}$$

et que les directeurs tournent avec la même vitesse que le fluide

$$\mathbf{W} = \text{asym}(\nabla \mathbf{u}) \circ \mathbf{r}$$

où  $\text{asym}(\nabla \mathbf{u})$  est la vorticité du fluide.

**INEXTENSIBILITÉ** Que la tige ne subisse aucune élongation implique que la quantité  $\|\partial_{X_1} \mathbf{r}\|$  est constante, d'où

$$0 = \partial_t \|\partial_{X_1} \mathbf{r}\| = \frac{\partial_{X_1} \mathbf{r} \cdot \partial_t \partial_{X_1} \mathbf{r}}{\|\partial_{X_1} \mathbf{r}\|} \quad (2.35)$$

or, la condition de non-glissement nécessite  $\partial_t \mathbf{r}(X_1, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(X_1, t), t)$  donc

$$\partial_{X_1} \partial_t \mathbf{r} = (\nabla \mathbf{u}) \partial_{X_1} \mathbf{r} \quad (2.36)$$

Ainsi, puisque nous supposons que  $\mathbf{r}$  est continûment différentiable, nous trouvons

$$0 = \frac{\partial_{X_1} \mathbf{r} \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \partial_{X_1} \mathbf{r})}{\|\partial_{X_1} \mathbf{r}\|} \quad (2.37)$$

ou, afin de retrouver la formulation de [74],  $\boldsymbol{\tau} \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau}) = 0$  avec  $\boldsymbol{\tau}$  tel que  $\|\partial_{X_1} \mathbf{r}\| \boldsymbol{\tau} = \partial_{X_1} \mathbf{r}$ .

**NON-SCISSION** Si la tige est sans cisaillement, cela impose que la tangente à la fibre moyenne  $\mathbf{r}$  soit aligné à l'un des vecteurs de la triade que nous choisissons comme étant  $\mathbf{d}_1$ . Nous remarquons que, bien que  $\partial_{X_1} \mathbf{r}$  et  $\mathbf{d}_1$  soient parallèles, ils ne sont en général pas égaux, cependant nous pouvons écrire  $\partial_{X_1} \mathbf{r} = \|\partial_{X_1} \mathbf{r}\| \mathbf{d}_1$ . Par définition de  $\mathbf{W}$  nous avons

$$\partial_t \mathbf{d}_1 = \mathbf{W} \mathbf{d}_1 \quad (2.38)$$

or

$$\partial_t \mathbf{d}_1 = \partial_t \left( \frac{\partial_{X_1} \mathbf{r}}{\|\partial_{X_1} \mathbf{r}\|} \right) = \frac{\partial_t \partial_{X_1} \mathbf{r}}{\|\partial_{X_1} \mathbf{r}\|} - \frac{\partial_{X_1} \mathbf{r} \cdot \partial_t \partial_{X_1} \mathbf{r}}{\|\partial_{X_1} \mathbf{r}\|^2} \partial_{X_1} \mathbf{r}$$

mais nous savons que  $\mathbf{W} = \text{asym}(\nabla \mathbf{u})$  et que l'équation (2.36) est vérifiée d'où

$$\text{asym}(\nabla \mathbf{u}) \partial_{X_1} \mathbf{r} = \left( \nabla \mathbf{u} - \frac{\partial_{X_1} \mathbf{r} \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \partial_{X_1} \mathbf{r})}{\|\partial_{X_1} \mathbf{r}\|} \mathbf{1} \right) \partial_{X_1} \mathbf{r}$$

ou encore

$$\text{asym}(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{d}_1 = (\nabla \mathbf{u} - \|\partial_{X_1} \mathbf{r}\| \mathbf{d}_1 \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{d}_1) \mathbf{1}) \mathbf{d}_1.$$

Nous obtenons finalement

$$\|\partial_{X_1} \mathbf{r}\| \text{sym}(\nabla \mathbf{u}) \partial_{X_1} \mathbf{r} = \partial_{X_1} \mathbf{r} \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \partial_{X_1} \mathbf{r}) \partial_{X_1} \mathbf{r} \quad (2.39)$$

ou, de façon équivalente

$$\text{sym}(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{d}_1 = \|\partial_{X_1} \mathbf{r}\| \mathbf{d}_1 \cdot ((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{d}_1) \mathbf{d}_1. \quad (2.40)$$

Ainsi, comme le remarquent Lim *et al.* [74], immerger une tige inextensible et sans cisaillement dans un fluide impose des contraintes sur le champ de vitesse de ce dernier. Nous sommes donc amené à prendre un modèle au moins aussi complexe que celui de Reissner-Simo où une chaque section

de la tige a  $\frac{N(N+1)}{2}$  degrés de liberté :  $N$  pour la translation via  $\mathbf{r}$  et  $\frac{N(N-1)}{2}$  pour la rotation via  $\mathbf{R}$ . Or, les équilibres des forces et des couples déterminent exactement une cinématique ayant ce nombre de degrés de liberté. Ainsi, nous choisissons le modèle de Reissner-Simo afin de ne pas avoir à développer des équations d'équilibre supplémentaires que celles, usuelles, des forces et des couples, quoiqu'il est tout à fait possible d'établir une équation d'équilibre pour les moments des directeurs [93] ou de balance de l'étirement [82].

### 2.2.1.6 CAS D'UNE TIGE DE REISSNER-SIMO

RÉCAPITULATIF ET SIMPLIFICATIONS Nous reprenons ici l'exposition de la section 2.2.1.3 en opérant toute les simplifications qu'amène le choix du modèle de Cosserat restreint. Les positions des configurations de référence et actuelle sont

$$\hat{\phi} = \hat{\mathbf{r}} + \sum_{\alpha=2}^N X_{\alpha} \hat{\mathbf{d}}_{\alpha}, \quad \phi = \mathbf{r} + \sum_{\alpha=2}^N X_{\alpha} \mathbf{d}_{\alpha}$$

et leur tenseurs de déformation respectifs sont

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{R}} + \hat{\nu} \otimes \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{F} = \mathbf{R} + \nu \otimes \mathbf{E}_1$$

où

$$\hat{\nu} = \hat{\omega} + \hat{\Omega} (\hat{\phi} - \hat{\mathbf{r}}), \quad \nu = \omega + \Omega (\phi - \mathbf{r})$$

avec les mesures de déformation spatiales

$$\begin{aligned} \hat{\omega} &= \partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{d}}_1, & \omega &= \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{d}_1, \\ \hat{\Omega} &= \partial_{X_1} \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}}^{\dagger}, & \Omega &= \partial_{X_1} \mathbf{R} \mathbf{R}^{\dagger}. \end{aligned}$$

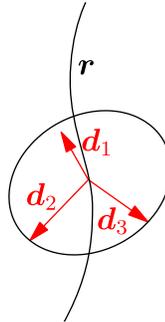


FIGURE 2.1 – Configuration d'une tige de Reissner-Simo tridimensionnelle

Les tenseurs de déformation peuvent aussi s'écrire en fonction des mesures de déformation matérielles

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}} &= \hat{\mathbf{R}} \left( \mathbf{1} + \hat{\boldsymbol{\nu}} \otimes \mathbf{E}_1 \right), & \mathbf{F} &= \mathbf{R} \left( \mathbf{1} + \boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{E}_1 \right), \\ \hat{\boldsymbol{\nu}} &= \hat{\boldsymbol{\omega}} + \hat{\boldsymbol{\Omega}} \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \mathbf{E}_\alpha, & \boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega} \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \mathbf{E}_\alpha, \\ \hat{\boldsymbol{\omega}} &= \hat{\mathbf{R}}^\dagger \partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{E}_1, & \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{E}_1, \\ \hat{\boldsymbol{\Omega}} &= \hat{\mathbf{R}}^\dagger \partial_{X_1} \hat{\mathbf{R}}, & \boldsymbol{\Omega} &= \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{R}.\end{aligned}\tag{2.41}$$

$$\tag{2.42}$$

Le tenseur de déformation de la position actuelle relatif à la position de référence est

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}} &= \tilde{\mathbf{R}} + \frac{1}{\hat{\zeta}} \left( \boldsymbol{\nu} - \tilde{\mathbf{R}} \hat{\boldsymbol{\nu}} \right) \otimes \hat{\mathbf{d}}_1 \\ &= \mathbf{R} \left( \mathbf{1} + \frac{1}{\hat{\zeta}} \left( \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\nu} - \hat{\mathbf{R}}^\dagger \hat{\boldsymbol{\nu}} \right) \otimes \mathbf{E}_1 \right) \hat{\mathbf{R}}^\dagger \\ &= \mathbf{R} \left( \mathbf{1} + \frac{1}{\hat{\zeta}} \left( \boldsymbol{\nu} - \hat{\boldsymbol{\nu}} \right) \otimes \mathbf{E}_1 \right) \hat{\mathbf{R}}^\dagger \\ &= \mathbf{R} \left( \mathbf{1} + \frac{1}{\hat{\zeta}} \hat{\boldsymbol{\nu}} \otimes \mathbf{E}_1 \right) \hat{\mathbf{R}}^\dagger\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\hat{\zeta} &= \det \left( \hat{\mathbf{F}} \right) \\ &= 1 + \hat{\mathbf{R}}^\dagger \hat{\boldsymbol{\nu}} \cdot \mathbf{E}_1 \\ &= 1 + \hat{\boldsymbol{\nu}} \cdot \mathbf{E}_1 \\ &= 1 + \hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{E}_1 + \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \left( \hat{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{E}_\alpha \right) \cdot \mathbf{E}_1 \\ &= \hat{\mathbf{R}}^\dagger \left( \partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \mathbf{E}_1 + \sum_{\alpha=2}^N \hat{\Omega}_{\diamond 1, \alpha} X_\alpha \\ &= \left( \partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \hat{\mathbf{d}}_1 + \sum_{\alpha=2}^N \hat{\Omega}_{\diamond 1, \alpha} X_\alpha.\end{aligned}$$

Nous rappelons qu'une condition nécessaire à ce que  $\phi \circ \hat{\phi}^{-1}$  soit une déformation admissible est que les déterminants des gradients de  $\hat{\phi}$  et  $\phi$  soient strictement positifs :

$$\begin{aligned}0 &< \hat{\zeta} & 0 &< \varsigma \\ &< 1 + \hat{\boldsymbol{\nu}} \cdot \mathbf{E}_1 & &< 1 + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E}_1\end{aligned}$$

Nous pouvons expliciter  $\tilde{\nu}_\diamond$  :

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}_\diamond &= \nu_\diamond - \hat{\nu}_\diamond \\
&= \left( \omega_\diamond + \hat{\Omega} \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \mathbf{E}_\alpha \right) - \left( \hat{\omega}_\diamond + \hat{\hat{\Omega}} \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \mathbf{E}_\alpha \right) \\
&= \left( \omega_\diamond - \hat{\omega}_\diamond \right) + \left( \hat{\Omega} - \hat{\hat{\Omega}} \right) \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \mathbf{E}_\alpha \\
&= \tilde{\omega}_\diamond + \tilde{\hat{\Omega}} \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \mathbf{E}_\alpha
\end{aligned}$$

pour conclure que les mesures de déformation matérielles sont additives. L'expression pour le tenseur de Cauchy-Green se simplifie

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{1} + \frac{1}{\zeta} \left( \tilde{\mathbf{R}}^\dagger \nu - \hat{\nu} \right) \otimes \hat{\mathbf{d}}_1 + \frac{1}{\zeta} \hat{\mathbf{d}}_1 \otimes \left( \tilde{\mathbf{R}}^\dagger \nu - \hat{\nu} \right) + \frac{1}{\zeta^2} \left\| \tilde{\mathbf{R}}^\dagger \nu - \hat{\nu} \right\|^2 \hat{\mathbf{d}}_1 \otimes \hat{\mathbf{d}}_1 \\
&= \mathbf{1} + \frac{2}{\zeta} \text{sym} \left( \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\nu}_\diamond \otimes \hat{\mathbf{d}}_1 \right) + \frac{1}{\zeta^2} \left\| \tilde{\nu}_\diamond \right\|^2 \hat{\mathbf{d}}_1 \otimes \hat{\mathbf{d}}_1
\end{aligned}$$

tout comme celui de Green-Lagrange

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\zeta} \text{sym} \left( \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\nu}_\diamond \otimes \hat{\mathbf{d}}_1 \right) + \frac{1}{2\zeta^2} \left\| \tilde{\nu}_\diamond \right\|^2 \hat{\mathbf{d}}_1 \otimes \hat{\mathbf{d}}_1.$$

Nous sommes alors tenté de calculer sa trace

$$\text{tr} \left( \tilde{\mathbf{E}} \right) = \frac{1}{\zeta} \tilde{\nu}_\diamond \cdot \mathbf{E}_1 + \frac{1}{2\zeta^2} \left\| \tilde{\nu}_\diamond \right\|^2$$

afin de pouvoir utiliser le modèle de St-Venant Kirchhoff [44, eq. 7.2]

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{F}} \left( \lambda \text{tr} \left( \tilde{\mathbf{E}} \right) \mathbf{1} + 2\mu \tilde{\mathbf{E}} \right)$$

où  $\tilde{\mathbf{P}}$  est une loi constitutive pour le premier tenseur de Piola-Kirchhoff. Cependant, intégrer cette dernière expression s'avère difficile, et ce, alors que nous verrons qu'une loi constitutive linéaire en les mesures de déformations est suffisante pour nos besoins.

### 2.2.1.7 INTERPRÉTATION DES MESURES DE DÉFORMATION POUR UNE TIGE DE REISSNER-SIMO TRIDIMENSIONNELLE <sup>4</sup>

ÉLONGATION PURE Soit une tige de configurations

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mu} X_1 \mathbf{e}_1, & \hat{\mathbf{d}}_\alpha &= \mathbf{e}_\alpha, \\
\mathbf{r} &= \mu X_1 \mathbf{e}_1, & \mathbf{d}_\alpha &= \mathbf{e}_\alpha
\end{aligned}$$

4. Cette section s'inspire largement de [2, chap. 8, §6].

alors

$$\begin{aligned}\hat{\omega} &= \partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{d}}_1 = (\hat{\mu} - 1) \hat{\mathbf{d}}_1, \\ \omega &= \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{d}_1 = (\mu - 1) \mathbf{d}_1, \\ \tilde{\omega} &= \omega - \tilde{\mathbf{R}} \hat{\omega} = (\mu - \hat{\mu}) \mathbf{d}_1\end{aligned}$$

et les courbures sont nulles. L'*extension* est définie comme

$$\tilde{\omega} \cdot \mathbf{d}_1 = \tilde{\omega}_{\diamond} \cdot \mathbf{E}_1 = \mu - \hat{\mu}.$$

CISAILLEMENT PUR Soit une tige de configurations

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= X_1 (\mathbf{e}_1 + \hat{\mu}_2 \mathbf{e}_2), & \hat{\mathbf{d}}_\alpha &= \mathbf{e}_\alpha, \\ \mathbf{r} &= X_1 (\mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2), & \mathbf{d}_\alpha &= \mathbf{e}_\alpha\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\hat{\omega} &= \partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{d}}_1 = \hat{\mu}_2 \hat{\mathbf{d}}_2, \\ \omega &= \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{d}_1 = \mu_2 \mathbf{d}_2, \\ \tilde{\omega} &= \omega - \tilde{\mathbf{R}} \hat{\omega} = (\mu_2 - \hat{\mu}_2) \mathbf{d}_2\end{aligned}$$

et les courbures sont nulles. La *scission* (dans le plan généré par  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$ ) est définie comme

$$\tilde{\omega} \cdot \mathbf{d}_2 = \tilde{\omega}_{\diamond} \cdot \mathbf{E}_2 = \mu_2 - \hat{\mu}_2.$$

TORSION PURE Soit une tige de configurations

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= X_1 \mathbf{e}_1, & \hat{\mathbf{d}}_1 &= \mathbf{e}_1, & \hat{\mathbf{d}}_2 &= \cos(\hat{\mu} X_1) \mathbf{e}_2 + \sin(\hat{\mu} X_1) \mathbf{e}_3, & \hat{\mathbf{d}}_3 &= \cos(\hat{\mu} X_1) \mathbf{e}_3 - \sin(\hat{\mu} X_1) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{r} &= X_1 \mathbf{e}_1, & \mathbf{d}_1 &= \mathbf{e}_1, & \mathbf{d}_2 &= \cos(\mu X_1) \mathbf{e}_2 + \sin(\mu X_1) \mathbf{e}_3, & \mathbf{d}_3 &= \cos(\mu X_1) \mathbf{e}_3 - \sin(\mu X_1) \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{d}}_1, & \partial_{X_1} \hat{\mathbf{d}}_1 &= 0, & \partial_{X_1} \hat{\mathbf{d}}_2 &= \mu \hat{\mathbf{d}}_3, & \partial_{X_1} \hat{\mathbf{d}}_3 &= -\mu \hat{\mathbf{d}}_2, \\ \partial_{X_1} \mathbf{r} &= \mathbf{d}_1, & \partial_{X_1} \mathbf{d}_1 &= 0, & \partial_{X_1} \mathbf{d}_2 &= \mu \mathbf{d}_3, & \partial_{X_1} \mathbf{d}_3 &= -\mu \mathbf{d}_2\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}} &= \hat{\mathbf{d}}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \hat{\mathbf{d}}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \hat{\mathbf{d}}_3 \otimes \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{E}_3\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\hat{\Omega} &= \left( \partial_{X_1} \hat{\mathbf{R}} \right) \hat{\mathbf{R}}^\dagger = 2\hat{\mu} \hat{\mathbf{d}}_3 \wedge \hat{\mathbf{d}}_2, \\ \Omega &= \left( \partial_{X_1} \mathbf{R} \right) \mathbf{R}^\dagger = 2\mu \mathbf{d}_3 \wedge \mathbf{d}_2, \\ \tilde{\Omega} &= \Omega - \tilde{\mathbf{R}} \hat{\Omega} \tilde{\mathbf{R}}^\dagger = 2(\mu - \hat{\mu}) \mathbf{d}_3 \wedge \mathbf{d}_2.\end{aligned}$$

La *torsion* est <sup>5</sup>

$$\mathbf{d}_3 \wedge \mathbf{d}_2 : \tilde{\Omega} = \mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{E}_2 : \underset{\diamond}{\tilde{\Omega}} = \mu - \hat{\mu}.$$

COURBURE PURE Soit une tige de configurations

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mu} (\sin(\hat{\gamma} X_1) \mathbf{e}_2 - \cos(\hat{\gamma} X_1) \mathbf{e}_3), \\ \mathbf{r} &= \mu (\sin(\gamma X_1) \mathbf{e}_2 - \cos(\gamma X_1) \mathbf{e}_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{d}}_1 &= \cos(\hat{\gamma} X_1) \mathbf{e}_2 + \sin(\hat{\gamma} X_1) \mathbf{e}_3, & \hat{\mathbf{d}}_2 &= \mathbf{e}_1, & \hat{\mathbf{d}}_3 &= \sin(\hat{\gamma} X_1) \mathbf{e}_2 - \cos(\hat{\gamma} X_1) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{d}_1 &= \cos(\gamma X_1) \mathbf{e}_2 + \sin(\gamma X_1) \mathbf{e}_3, & \mathbf{d}_2 &= \mathbf{e}_1, & \mathbf{d}_3 &= \sin(\gamma X_1) \mathbf{e}_2 - \cos(\gamma X_1) \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mu} \hat{\gamma} \hat{\mathbf{d}}_1, & \partial_{X_1} \hat{\mathbf{d}}_1 &= -\hat{\gamma} \hat{\mathbf{d}}_3, & \partial_{X_1} \hat{\mathbf{d}}_2 &= 0, & \partial_{X_1} \hat{\mathbf{d}}_3 &= \hat{\gamma} \hat{\mathbf{d}}_2, \\ \partial_{X_1} \mathbf{r} &= \mu \gamma \mathbf{d}_1, & \partial_{X_1} \mathbf{d}_1 &= -\gamma \mathbf{d}_3, & \partial_{X_1} \mathbf{d}_2 &= 0, & \partial_{X_1} \mathbf{d}_3 &= \gamma \mathbf{d}_2,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\hat{\omega} &= \partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{d}}_1 = (\hat{\mu} \hat{\gamma} - 1) \hat{\mathbf{d}}_1, \\ \omega &= \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{d}_1 = (\mu \gamma - 1) \mathbf{d}_1, \\ \tilde{\omega} &= \omega - \tilde{\mathbf{R}} \hat{\omega} = (\mu \gamma - \hat{\mu} \hat{\gamma}) \mathbf{d}_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{\Omega} &= \left( \partial_{X_1} \hat{\mathbf{R}} \right) \hat{\mathbf{R}}^\dagger = 2\hat{\gamma} \hat{\mathbf{d}}_1 \wedge \hat{\mathbf{d}}_3, \\ \Omega &= \left( \partial_{X_1} \mathbf{R} \right) \mathbf{R}^\dagger = 2\gamma \mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_3, \\ \tilde{\Omega} &= \Omega - \tilde{\mathbf{R}} \hat{\Omega} \tilde{\mathbf{R}}^\dagger = 2(\gamma - \hat{\gamma}) \mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_3.\end{aligned}$$

La *flexion* (dans le plan généré par  $\mathbf{d}_1$  et  $\mathbf{d}_2$ ) est définie comme

$$\mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_3 : \tilde{\Omega} = \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_3 : \underset{\diamond}{\tilde{\Omega}} = \gamma - \hat{\gamma}.$$

---

5. Nous notons que  $\mathbf{d}_3 \wedge \mathbf{d}_2 : \mathbf{d}_3 \wedge \mathbf{d}_2 = \frac{1}{2}$  (voir l'identité A.24).

RÉSUMÉ En somme, nous décomposons les mesures de déformation comme

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 \mathbf{d}_1 + \tilde{\omega}_2 \mathbf{d}_2 + \tilde{\omega}_3 \mathbf{d}_3, \quad \tilde{\Omega} = 2\tilde{\kappa}_1 \mathbf{d}_3 \wedge \mathbf{d}_2 + 2\tilde{\kappa}_2 \mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_3 + 2\tilde{\kappa}_3 \mathbf{d}_2 \wedge \mathbf{d}_1 \quad (2.43)$$

ou, de façon équivalente

$$\tilde{\omega}_{\diamond} = \tilde{\omega}_1 \mathbf{E}_1 + \tilde{\omega}_2 \mathbf{E}_2 + \tilde{\omega}_3 \mathbf{E}_3, \quad \tilde{\Omega}_{\diamond} = 2\tilde{\kappa}_1 \mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{E}_2 + 2\tilde{\kappa}_2 \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_3 + 2\tilde{\kappa}_3 \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{E}_1 \quad (2.44)$$

ou encore (dans la base  $\{\mathbf{d}_\alpha\}_{\alpha=1}^3$  pour les quantités spatiales et dans la base  $\{\mathbf{E}_\alpha\}_{\alpha=1}^3$  pour les quantités matérielles)

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{\diamond} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_{\diamond} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\kappa}_3 & \tilde{\kappa}_2 \\ \tilde{\kappa}_3 & 0 & -\tilde{\kappa}_1 \\ -\tilde{\kappa}_2 & \tilde{\kappa}_1 & 0 \end{pmatrix} = \text{tax}(\tilde{\kappa})$$

avec  $\tilde{\omega}_1$  une mesure d'*extension*,  $\tilde{\omega}_2$  et  $\tilde{\omega}_3$  des mesures de *scission*;  $\kappa_1$  une mesure de *torsion*,  $\kappa_2$  et  $\kappa_3$  des mesures de *flexion*. Toutes ces mesures sont invariante sous transformation euclidienne puisqu'elles sont les composantes de  $\tilde{\omega}_{\diamond}$  et  $\tilde{\Omega}_{\diamond}$ , des quantités invariantes (voir les équations 2.32 et 2.33).

Nous nommons  $\Omega$  la courbure puisque si une tige est astreinte à

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_1 &= \frac{\partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}}}{\|\partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}}\|}, & \hat{\mathbf{d}}_2 &= \frac{\partial_{X_1}^2 \hat{\mathbf{r}} - \left(\partial_{X_1}^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{d}}_1\right) \hat{\mathbf{d}}_1}{\left\|\partial_{X_1}^2 \hat{\mathbf{r}} - \left(\partial_{X_1}^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{d}}_1\right) \hat{\mathbf{d}}_1\right\|}, & \hat{\mathbf{d}}_3 &= \hat{\mathbf{d}}_1 \times \hat{\mathbf{d}}_2 \\ \mathbf{d}_1 &= \frac{\partial_{X_1} \mathbf{r}}{\|\partial_{X_1} \mathbf{r}\|}, & \mathbf{d}_2 &= \frac{\partial_{X_1}^2 \mathbf{r} - \left(\partial_{X_1}^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}_1\right) \mathbf{d}_1}{\left\|\partial_{X_1}^2 \mathbf{r} - \left(\partial_{X_1}^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}_1\right) \mathbf{d}_1\right\|}, & \mathbf{d}_3 &= \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 \end{aligned}$$

donc  $\mathbf{d}_1$  est la tangente à la courbe,  $\mathbf{d}_2$  est la normale et  $\mathbf{d}_3$  est la binormale (idem pour la configuration de référence). L'équation

$$\partial_{X_1} \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\Omega} \tilde{\mathbf{R}}$$

est alors la translittération des formules de Frenet-Serret et nous avons

$$\tilde{\Omega} = 2 \|\partial_{X_1} \mathbf{r}\| \left( (\kappa^* - \hat{\kappa}^*) \mathbf{d}_2 \wedge \mathbf{d}_1 + (\tau^* - \hat{\tau}^*) \mathbf{d}_3 \wedge \mathbf{d}_2 \right)$$

où  $\kappa^*$  est la courbure et  $\tau^*$  la torsion de la ligne moyenne  $\mathbf{r}$  (idem pour la configuration de référence).

## 2.2.2 DYNAMIQUE

### 2.2.2.1 ÉQUILIBRE D'UN SEGMENT

Nous notons par  $\rho: \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{b}: \mathcal{B} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{P}: \mathcal{B} \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  la densité, la densité de force externe et la premier tenseur de stress de Piola-Kirchhoff. Cela nous permet d'écrire les moments

linéaire et angulaire totaux :

$$\bar{\mathbf{m}}(\mathcal{J}, t) = \int_{\mathcal{B}(\mathcal{J})} \rho(\mathbf{X}) \partial_t \phi(\mathbf{X}, t) \hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{X}, t) d^N v_{\mathbf{X}}, \quad (2.45)$$

$$\bar{\mathbf{M}}'(\mathcal{J}, t) = \int_{\mathcal{B}(\mathcal{J})} \rho(\mathbf{X}) \phi(\mathbf{X}, t) \wedge \partial_t \phi(\mathbf{X}, t) \hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{X}, t) d^N v_{\mathbf{X}} \quad (2.46)$$

ainsi que les totaux des forces et des couples sur la tige :

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathcal{J}, t) = \int_{\mathcal{B}(\mathcal{J})} \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{X}, t) d^N v_{\mathbf{X}} + \int_{\partial \mathcal{B}(\mathcal{J})} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}, t) d^{N-1} s_{\mathbf{X}}, \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}(\mathcal{J}, t) &= \int_{\mathcal{B}(\mathcal{J})} \phi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{X}, t) d^N v_{\mathbf{X}} \\ &+ \int_{\partial \mathcal{B}(\mathcal{J})} \phi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}(\mathbf{X}, t) d^{N-1} s_{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

La balance des moments linéaire et angulaire donnent

$$\partial_t \bar{\mathbf{m}}(\mathcal{J}, t) = \bar{\mathbf{g}}(\mathcal{J}, t), \quad (2.49)$$

$$\partial_t \bar{\mathbf{M}}'(\mathcal{J}, t) = \bar{\mathbf{G}}(\mathcal{J}, t). \quad (2.50)$$

### 2.2.2.2 ÉQUILIBRE LOCAL

Il reste à réécrire les équations d'équilibre (2.49) et (2.50) de façon locale. À cette fin, définissons les moments linéaire et angulaire des sections par

$$\bar{\mathbf{m}}(\mathcal{J}, t) = \int_{\mathcal{J}} \mathbf{m}(X_1, t) dX_1,$$

$$\bar{\mathbf{M}}'(\mathcal{J}, t) = \int_{\mathcal{J}} \mathbf{M}'(X_1, t) dX_1,$$

d'où

$$\mathbf{m}(X_1, t) = \int_{\mathcal{B}(X_1)} \partial_t (\rho(\mathbf{X}) \phi(\mathbf{X}, t)) \hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{X}, t) d^{N-1} s_{\mathbf{X}}, \quad (2.51)$$

$$\mathbf{M}'(X_1, t) = \int_{\mathcal{B}(X_1)} \phi(\mathbf{X}, t) \wedge \partial_t (\rho(\mathbf{X}) \phi(\mathbf{X}, t)) \hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{X}, t) d^{N-1} s_{\mathbf{X}}. \quad (2.52)$$

Posons aussi les force et couple internes

$$\mathbf{l}(X_1, t) = \int_{\mathcal{B}(X_1)} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \hat{\mathbf{d}}_1(X_1, t) d^{N-1} s_{\mathbf{X}},$$

$$\mathbf{L}'(X_1, t) = \int_{\mathcal{B}(X_1)} \phi(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \hat{\mathbf{d}}_1(X_1, t) d^{N-1} s_{\mathbf{X}}$$

ainsi que les force et couple appliqués

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(X_1, t) &= \int_{\mathcal{B}(X_1)} \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{X}, t) d^{N-1}s_{\mathbf{X}} + \int_{\partial\mathcal{B}(X_1)} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{X}, t) d^{N-2}\ell_{\mathbf{X}}, \\ \mathbf{Q}'(X_1, t) &= \int_{\mathcal{B}(X_1)} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) \wedge \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{X}, t) d^{N-1}s_{\mathbf{X}} \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{B}(X_1)} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) \wedge \boldsymbol{\tau}(\mathbf{X}, t) d^{N-2}\ell_{\mathbf{X}}.\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant retranscrire (2.49) en fonction des valeurs locales : commençons par la force totale  $\bar{\mathbf{g}}$  sur un segment  $\mathcal{J} = [a, b]$  :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}(\mathcal{J}, t) &= \bar{\mathbf{q}}(\mathcal{J}, t) + \int_{\mathcal{B}(\partial\mathcal{J})} \mathbf{P}\mathbf{N} d^{N-1}s \\ &= \bar{\mathbf{q}}(\mathcal{J}, t) + \int_{\mathcal{B}(b)} \mathbf{P}\hat{\mathbf{d}}_1 d^{N-1}s - \int_{\mathcal{B}(a)} \mathbf{P}\hat{\mathbf{d}}_1 d^{N-1}s \\ &= \bar{\mathbf{q}}(\mathcal{J}, t) + \mathbf{l}(b, t) - \mathbf{l}(a, t) \\ &= \bar{\mathbf{q}}(\mathcal{J}, t) + \int_{\mathcal{J}} \partial_{X_1} \mathbf{l}(X_1, t) dX_1 \\ &= \int_{\mathcal{J}} \mathbf{q}(X_1, t) + \partial_{X_1} \mathbf{l}(X_1, t) dX_1\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème fondamental du calcul<sup>6</sup>. Le développement est semblable pour le couple total  $\bar{\mathbf{G}}$  :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{G}}(\mathcal{J}, t) &= \bar{\mathbf{Q}}'(\mathcal{J}, t) + \int_{\mathcal{B}(\partial\mathcal{J})} \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{P}\mathbf{N} d^{N-1}s \\ &= \bar{\mathbf{Q}}'(\mathcal{J}, t) + \int_{\mathcal{B}(b)} \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{P}\mathbf{N} d^{N-1}s - \int_{\mathcal{B}(a)} \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{P}\mathbf{N} d^{N-1}s \\ &= \bar{\mathbf{Q}}'(\mathcal{J}, t) + \int_{\mathcal{B}(b)} \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{P}\hat{\mathbf{d}}_1 d^{N-1}s - \int_{\mathcal{B}(a)} \boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{P}\hat{\mathbf{d}}_1 d^{N-1}s \\ &= \bar{\mathbf{Q}}'(\mathcal{J}, t) + \mathbf{L}(b, t) - \mathbf{L}(a, t) \\ &= \bar{\mathbf{Q}}'(\mathcal{J}, t) + \int_{\mathcal{J}} \partial_{X_1} \mathbf{L} dX_1.\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les équations (2.49) et (2.50) sous une nouvelle forme

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{J}} \partial_t \mathbf{m} dX_1 &= \int_{\mathcal{J}} \partial_{X_1} \mathbf{l} + \mathbf{q} dX_1, \\ \int_{\mathcal{J}} \partial_t \mathbf{M}' dX_1 &= \int_{\mathcal{J}} \partial_{X_1} \mathbf{L}' + \mathbf{Q}' dX_1\end{aligned}$$

6. Qui peut être compris comme l'équivalent en une dimension du théorème de Gauss–Ostrogradsky utilisé à la section 2.1.

que nous pouvons localiser, puisque  $\mathcal{J}$  est un intervalle arbitraire, sous la forme

$$\partial_t \mathbf{m} = \partial_{X_1} \mathbf{l} + \mathbf{q}, \quad (2.53)$$

$$\partial_t \mathbf{M}' = \partial_{X_1} \mathbf{L}' + \mathbf{Q}' \quad (2.54)$$

pourvu que les fonctions soient suffisamment lisses, ce que nous assumeront par la suite.

### 2.2.2.3 ÉQUATIONS USUELLES DE L'ÉQUILIBRE LOCAL

Dans l'essentiel de la littérature sur la théorie des poutres, nous retrouvons facilement l'équation (2.53), par contre, l'équilibre pour le moment angulaire est rarement présenté comme à l'équation (2.54). Cela est dû à ce que le moment angulaire et les couples sont mesurés à partir de la ligne moyenne  $\mathbf{r}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{X}_1, t) &= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{X}_1, t)) \wedge \partial_t (\rho \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t)) \hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{X}, t) d^{N-1} s_{\mathbf{X}}, \\ \mathbf{L}(\mathbf{X}_1, t) &= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{X}_1, t)) \wedge \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \hat{\mathbf{d}}_1(\mathbf{X}_1, t) d^{N-1} s_{\mathbf{X}}, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{X}_1, t) &= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{X}_1, t)) \wedge \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) \hat{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{X}, t) d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\ &\quad + \int (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{X}_1, t)) \wedge \boldsymbol{\tau}(\mathbf{X}, t) d^{N-2} \ell_{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

Les relations entre ces fonctions et celles exposées précédemment sont simplement

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{m},$$

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{l},$$

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{q},$$

par conséquent, les équations d'équilibre se transforment en

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{M}' &= \partial_{X_1} \mathbf{L}' + \mathbf{Q}', \\ \partial_t \mathbf{M} + \partial_t \mathbf{r} \wedge \mathbf{m} + \mathbf{r} \wedge \partial_t \mathbf{m} &= \partial_{X_1} \mathbf{L} + \partial_{X_1} \mathbf{r} \wedge \mathbf{l} + \mathbf{r} \wedge \partial_{X_1} \mathbf{l} + \mathbf{Q} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Nous remarquons que la conservation du moment linéaire (2.53) implique que

$$\mathbf{r} \wedge \partial_t \mathbf{m} = \mathbf{r} \wedge (\partial_{X_1} \mathbf{l} + \mathbf{q})$$

d'où

$$\partial_t \mathbf{M} + \partial_t \mathbf{r} \wedge \mathbf{m} = \partial_{X_1} \mathbf{L} + \partial_{X_1} \mathbf{r} \wedge \mathbf{l} + \mathbf{Q}. \quad (2.55)$$

## 2.2.2.4 CONDITION AUX BORDS

Les équations globales (2.47) et (2.48) pour un segment comprennent naturellement les conditions aux bords, cependant, leur versions locales (2.53) et (2.55) doivent être augmentées de conditions aux bords. Nous supposons que le bout  $X_1 = a$  est soumis à une force  $\mathbf{l}_a(t)$  et à un couple  $\mathbf{L}_a(t)$  alors que le bout  $X_1 = b$  est soumis à une force  $\mathbf{l}_b(t)$  et à un couple  $\mathbf{L}_b(t)$  : alors nous avons, en tenant compte de l'orientation de la normale aux extrémités :

$$\mathbf{l}(a, t) = -\mathbf{l}_a(t), \quad \mathbf{l}(b, t) = \mathbf{l}_b(t), \quad (2.56)$$

$$\mathbf{L}(a, t) = -\mathbf{L}_a(t), \quad \mathbf{L}(b, t) = \mathbf{L}_b(t). \quad (2.57)$$

## 2.2.2.5 RELATION ENTRE LES MOMENTS ET LES VÉLOCITÉS

Définissons maintenant les moments d'inertie des sections

$$\lambda(X_1, t) = \int_{\mathcal{B}(X_1)} \rho(\mathbf{X}) \hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) d^{N-1}s_{\mathbf{X}}, \quad (2.58a)$$

$$\boldsymbol{\theta}(X_1, t) = \int_{\mathcal{B}(X_1)} \rho(\mathbf{X}) (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(X_1, t)), \hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) d^{N-1}s_{\mathbf{X}}, \quad (2.58b)$$

$$\mathbf{Y}(X_1, t) = \int_{\mathcal{B}(X_1)} \rho(\mathbf{X}) (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(X_1, t)) \otimes (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(X_1, t)) \hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) d^{N-1}s_{\mathbf{X}} \quad (2.58c)$$

qui nous permettent de réécrire les moments linéaire et angulaire en fonction des vitesses. Premièrement, le moment linéaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \int_{\mathcal{B}(X_1)} \partial_t(\rho\boldsymbol{\phi}) \hat{\zeta} d^{N-1}s_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\mathcal{B}(X_1)} \partial_t(\rho\mathbf{r} + \rho(\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r})) \hat{\zeta} d^{N-1}s_{\mathbf{X}} \\ &= \int_{\mathcal{B}(X_1)} (\rho\partial_t\mathbf{r} + \rho\mathbf{W}(\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r})) \hat{\zeta} d^{N-1}s_{\mathbf{X}} \\ &= \lambda\mathbf{v} + \mathbf{W}\boldsymbol{\theta} \end{aligned}$$

ensuite, le moment angulaire

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}'' + \int_{\mathcal{B}(X_1)} \rho(\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \wedge \partial_t\boldsymbol{\phi} \hat{\zeta} d^{N-1}s_{\mathbf{X}} \\ &= \mathbf{M}'' + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{v} \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{M}''(X_1, t) = \int_{\mathcal{B}(X_1)} (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(X_1, t)) \wedge \partial_t\rho(\mathbf{X}) (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(X_1, t)) \hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) d^{N-1}s_{\mathbf{X}}$$

une expression que nous pouvons simplifier en

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}'' &= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \wedge \partial_t \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \wedge \mathbf{W} (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho \operatorname{asym} ((\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \otimes \mathbf{W} (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r})) \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \operatorname{asym} \left( \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \otimes (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \mathbf{W}^\dagger \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \right) \\
&= \operatorname{asym} (\mathbf{Y} \mathbf{W}^\dagger) \\
&= - \operatorname{asym} (\mathbf{W} \mathbf{Y})
\end{aligned}$$

pour ainsi trouver

$$\mathbf{m} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{v} - \operatorname{asym} (\mathbf{W} \mathbf{Y}). \quad (2.60)$$

Au final, nous avons donc

$$\partial_t (\lambda \mathbf{v} + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}) = \partial_{X_1} \mathbf{l} + \mathbf{q}, \quad (2.61a)$$

$$\partial_t (\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{v} - \operatorname{asym} (\mathbf{W} \mathbf{Y})) + \mathbf{v} \wedge (\lambda \mathbf{v} + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}) = \partial_{X_1} \mathbf{L} + \partial_{X_1} \mathbf{r} \wedge \mathbf{l} + \mathbf{Q}. \quad (2.61b)$$

**DÉRIVÉES TEMPORELLES DES MOMENTS** Puisque la configuration de référence est mouvante, les moments d'inertie (2.58) sont dépendant du temps. Calculons cette dépendance pour la densité linéaire

$$\begin{aligned}
\partial_t \lambda &= \partial_t \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho \partial_t \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \dot{\lambda},
\end{aligned}$$

le moment linéaire d'inertie

$$\begin{aligned}
\partial_t \boldsymbol{\theta} &= \partial_t \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho \partial_t (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \hat{\zeta} + \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \partial_t \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho \mathbf{W} (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \hat{\zeta} + \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \partial_t \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta},
\end{aligned}$$

et le moment quadratique d'inertie

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{Y} &= \partial_t \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \otimes (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho \partial_t (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \otimes (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \hat{\zeta} + \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \otimes \partial_t (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \hat{\zeta} + \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \otimes (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \partial_t \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho \mathbf{W} (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \otimes (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \hat{\zeta} + \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \otimes \mathbf{W} (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \hat{\zeta} + \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \otimes (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \partial_t \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \mathbf{W} \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \mathbf{W} + \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \otimes (\boldsymbol{\phi} - \mathbf{r}) \partial_t \hat{\zeta} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \dot{\mathbf{Y}} + [\mathbf{W}, \mathbf{Y}].
\end{aligned}$$

Nous avons au passage défini les dérivées matérielles (en temps) de ces quantités

$$\dot{\lambda}(\mathbf{X}_1, t) = \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho(\mathbf{X}) \partial_t \hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}}, \quad (2.62)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}_1, t) = \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho(\mathbf{X}) (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{X}_1, t)) \partial_t \hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}}, \quad (2.63)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}_1, t) = \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho(\mathbf{X}) (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{X}_1, t)) \otimes (\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{r}(\mathbf{X}_1, t)) \partial_t \hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}}, \quad (2.64)$$

qui tirent leur noms des relations

$$\dot{\lambda} = \partial_t \lambda, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{R} \partial_t \boldsymbol{\theta}, \quad \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{R} \partial_t \mathbf{Y} \mathbf{R}^\dagger,$$

où

$$\lambda_{\diamond}(\mathbf{X}_1, t) = \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho(\mathbf{X}) \hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}}, \quad (2.65)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{\diamond}(\mathbf{X}_1, t) = \sum_{\alpha=2}^N \left( \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho(\mathbf{X}) X_{\alpha} \hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \right) \mathbf{E}_{\alpha}, \quad (2.66)$$

$$\mathbf{Y}_{\diamond}(\mathbf{X}_1, t) = \sum_{\alpha=2}^N \sum_{\beta=2}^N \left( \int_{\mathcal{B}(\mathbf{X}_1)} \rho(\mathbf{X}) X_{\alpha} X_{\beta} \hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \right) \mathbf{E}_{\alpha} \otimes \mathbf{E}_{\beta}, \quad (2.67)$$

avec, nous le rappelons (voir §2.2.1.6),

$$\hat{\zeta}(\mathbf{X}, t) = (\partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}}) \cdot \hat{\mathbf{d}}_1 + \sum_{\alpha=2}^N \hat{\Omega}_{1,\alpha} X_{\alpha}. \quad (2.68)$$

En fonction des variables spatiales, nous obtenons donc

$$\lambda_{\diamond} = \lambda, \quad \boldsymbol{\theta}_{\diamond} = \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{Y}_{\diamond} = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{Y} \mathbf{R}.$$

Nous sommes enfin prêt à expliciter la dérivée temporelle du moment cinétique linéaire

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{m} &= \partial_t (\lambda \mathbf{v} + \mathbf{W}\boldsymbol{\theta}) \\ &= \dot{\lambda} \mathbf{v} + \lambda \partial_t \mathbf{v} + \partial_t \mathbf{W}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{W} (\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{W}\boldsymbol{\theta})\end{aligned}$$

mais avant de passer à celle du moment cinétique angulaire, calculons d'abord

$$\begin{aligned}\partial_t \text{asym}(\mathbf{W}\mathbf{Y}) &= \frac{1}{2} \partial_t \text{asym}(\mathbf{W}\mathbf{Y} + \mathbf{W}\mathbf{Y}) \\ &= \frac{1}{2} \partial_t \text{asym}(\mathbf{W}\mathbf{Y} - (\mathbf{W}\mathbf{Y})^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} \partial_t \text{asym}(\mathbf{W}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{W}) \\ &= \frac{1}{2} \text{asym}(\partial_t \mathbf{W}\mathbf{Y} + \mathbf{W}\partial_t \mathbf{Y} + \partial_t \mathbf{Y}\mathbf{W} + \mathbf{Y}\partial_t \mathbf{W}) \\ &= \frac{1}{2} \text{asym}(\partial_t \mathbf{W}\mathbf{Y} + \mathbf{W}(\dot{\mathbf{Y}} + [\mathbf{W}, \mathbf{Y}]) \\ &\quad + (\dot{\mathbf{Y}} + [\mathbf{W}, \mathbf{Y}])\mathbf{W} + \mathbf{Y}\partial_t \mathbf{W}) \\ &= \frac{1}{2} \text{asym}(\partial_t \mathbf{W}\mathbf{Y} + \mathbf{W}\dot{\mathbf{Y}} + \dot{\mathbf{Y}}\mathbf{W} + \mathbf{Y}\partial_t \mathbf{W}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{asym}(\mathbf{W}[\mathbf{W}, \mathbf{Y}] + [\mathbf{W}, \mathbf{Y}]\mathbf{W}) \\ &= \text{asym}(\partial_t \mathbf{W}\mathbf{Y} + \mathbf{W}\dot{\mathbf{Y}}) + \frac{1}{2} \text{asym}(\mathbf{W}[\mathbf{W}, \mathbf{Y}] - ([\mathbf{W}, \mathbf{Y}]\mathbf{W})^\dagger) \\ &= \text{asym}(\partial_t \mathbf{W}\mathbf{Y} + \mathbf{W}\dot{\mathbf{Y}}) + \frac{1}{2} \text{asym}(\mathbf{W}[\mathbf{W}, \mathbf{Y}] - \mathbf{W}[\mathbf{W}, \mathbf{Y}]) \\ &= \text{asym}(\partial_t \mathbf{W}\mathbf{Y} + \mathbf{W}\dot{\mathbf{Y}}),\end{aligned}$$

pour arriver à

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{M} &= \partial_t (\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{v} - \text{asym}(\mathbf{W}\mathbf{Y})) \\ &= (\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{W}\boldsymbol{\theta}) \wedge \mathbf{v} + \boldsymbol{\theta} \wedge \partial_t \mathbf{v} - \text{asym}(\partial_t \mathbf{W}\mathbf{Y} + \mathbf{W}\dot{\mathbf{Y}}).\end{aligned}$$

Nous remarquons que dans le cas où la configuration de référence est statique, nous avons

$$\partial_t \mathbf{m} = \lambda \partial_t \mathbf{v} + (\partial_t \mathbf{W} + \mathbf{W})\boldsymbol{\theta}, \quad \partial_t \mathbf{M} = \mathbf{W}\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{v} + \boldsymbol{\theta} \wedge \partial_t \mathbf{v} - \text{asym}(\partial_t \mathbf{W}\mathbf{Y}).$$

## 2.2.2.6 FORMULATION MATÉRIELLE DES ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE

Nous souhaitons réécrire les équations d'équilibre (2.53) et (2.55) en fonctions de variables matérielles, nous définissons donc les quantités suivantes

$$\begin{aligned} \underset{\diamond}{\mathbf{m}} &= \mathbf{R}^\dagger \mathbf{m}, & \underset{\diamond}{\mathbf{M}} &= \mathbf{R}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{R}, \\ \underset{\diamond}{\mathbf{l}} &= \mathbf{R}^\dagger \mathbf{l}, & \underset{\diamond}{\mathbf{L}} &= \mathbf{R}^\dagger \mathbf{L} \mathbf{R}, \\ \underset{\diamond}{\mathbf{q}} &= \mathbf{R}^\dagger \mathbf{q}, & \underset{\diamond}{\mathbf{Q}} &= \mathbf{R}^\dagger \mathbf{Q} \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Maintenant, soient  $\left(\underset{\diamond}{\gamma}, \underset{\diamond}{\Gamma}\right) = \left(\mathbf{R}^\dagger \gamma, \mathbf{R}^\dagger \Gamma \mathbf{R}\right)$  une paire de variables matérielles quelconques, nous avons alors pour la dérivée temporelle

$$\begin{aligned} \partial_t \underset{\diamond}{\gamma} &= \partial_t \left( \mathbf{R} \underset{\diamond}{\gamma} \right) & \partial_t \underset{\diamond}{\Gamma} &= \partial_t \left( \mathbf{R} \underset{\diamond}{\Gamma} \mathbf{R}^\dagger \right) \\ &= (\partial_t \mathbf{R}) \underset{\diamond}{\gamma} + \mathbf{R} \partial_t \underset{\diamond}{\gamma} & &= (\partial_t \mathbf{R}) \underset{\diamond}{\Gamma} \mathbf{R}^\dagger + \mathbf{R} \partial_t \underset{\diamond}{\Gamma} \mathbf{R}^\dagger + \mathbf{R} \underset{\diamond}{\Gamma} (\partial_t \mathbf{R})^\dagger \\ &= \mathbf{R} \underset{\diamond}{\mathbf{W}} \underset{\diamond}{\gamma} + \mathbf{R} \partial_t \underset{\diamond}{\gamma} & &= \mathbf{R} \underset{\diamond}{\mathbf{W}} \underset{\diamond}{\Gamma} \mathbf{R}^\dagger + \mathbf{R} \partial_t \underset{\diamond}{\Gamma} \mathbf{R}^\dagger + \mathbf{R} \underset{\diamond}{\Gamma} \mathbf{W}^\dagger \mathbf{R}^\dagger \\ &= \mathbf{R} \left( \partial_t \underset{\diamond}{\gamma} + \underset{\diamond}{\mathbf{W}} \underset{\diamond}{\gamma} \right), & &= \mathbf{R} \left( \partial_t \underset{\diamond}{\Gamma} + \underset{\diamond}{\mathbf{W}} \underset{\diamond}{\Gamma} - \underset{\diamond}{\Gamma} \underset{\diamond}{\mathbf{W}} \right) \mathbf{R}^\dagger, \end{aligned}$$

où nous avons défini

$$\underset{\diamond}{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{W} \mathbf{R} = \mathbf{R}^\dagger \partial_t \mathbf{R}.$$

Le développement est identique pour la dérivée spatiale, il suffit de substituer  $\partial_t$  par  $\partial_{X_1}$  et  $\underset{\diamond}{\mathbf{W}}$  par  $\underset{\diamond}{\Omega}$  pour arriver à

$$\partial_{X_1} \underset{\diamond}{\gamma} = \mathbf{R} \left( \partial_{X_1} \underset{\diamond}{\gamma} + \underset{\diamond}{\Omega} \underset{\diamond}{\gamma} \right) \quad \partial_{X_1} \underset{\diamond}{\Gamma} = \mathbf{R} \left( \partial_{X_1} \underset{\diamond}{\Gamma} + \underset{\diamond}{\Omega} \underset{\diamond}{\Gamma} - \underset{\diamond}{\Gamma} \underset{\diamond}{\Omega} \right) \mathbf{R}^\dagger$$

Ainsi, il suffit de transcrire les expressions ci-haut et d'éliminer les  $\mathbf{R}$  superflus pour trouver

$$\begin{aligned} \partial_t \underset{\diamond}{\mathbf{m}} + \underset{\diamond}{\mathbf{W}} \underset{\diamond}{\mathbf{m}} &= \partial_{X_1} \underset{\diamond}{\mathbf{l}} + \underset{\diamond}{\Omega} \underset{\diamond}{\mathbf{l}} + \underset{\diamond}{\mathbf{q}}, \\ \partial_t \underset{\diamond}{\mathbf{M}} + \left[ \underset{\diamond}{\mathbf{W}}, \underset{\diamond}{\mathbf{M}} \right] + (\mathbf{R}^\dagger \partial_t \mathbf{r}) \wedge \underset{\diamond}{\mathbf{m}} &= \partial_{X_1} \underset{\diamond}{\mathbf{L}} + \left[ \underset{\diamond}{\Omega}, \underset{\diamond}{\mathbf{L}} \right] + (\mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{r}) \wedge \underset{\diamond}{\mathbf{l}} + \underset{\diamond}{\mathbf{Q}}. \end{aligned}$$

avec

$$\underset{\diamond}{\mathbf{m}} = \underset{\diamond}{\lambda} \mathbf{R}^\dagger \partial_t \mathbf{r} + \underset{\diamond}{\mathbf{W}} \underset{\diamond}{\theta}, \quad \underset{\diamond}{\mathbf{M}} = \underset{\diamond}{\theta} \wedge \mathbf{R}^\dagger \partial_t \mathbf{r} - \text{asym} \left( \underset{\diamond}{\mathbf{W}} \underset{\diamond}{\mathbf{Y}} \right)$$

Ces équations n'apportent aucun avantage par rapport à celles dont elles sont issues, cependant, il est parfois plus facile de travailler avec les quantités matérielles que spatiales et nous aurons ici introduit les variables matérielles dynamiques.

## 2.2.2.7 PUISSANCE INTERNE

Nous souhaitons expliciter la puissance interne : celle-ci s'écrit

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{P} : \partial_t \tilde{\mathbf{F}} \, d^N v_{\mathbf{X}}.$$

Nous calculons premièrement la dérivée temporelle du tenseur de déformation

$$\partial_t \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{W} \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{W}} + \mathbf{R} \partial_t \left( \tilde{\nu} \otimes \frac{1}{\hat{\zeta}} \mathbf{E}_1 \right) \hat{\mathbf{R}}^\dagger,$$

puis prenons son produit avec le tenseur de Piola-Kirchhoff

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \partial_t \tilde{\mathbf{F}} &= \text{tr} \left( \mathbf{P} \left( \mathbf{W} \tilde{\mathbf{F}} \right)^\dagger \right) - \text{tr} \left( \mathbf{P} \left( \tilde{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{W}} \right)^\dagger \right) + \text{tr} \left( \mathbf{P} \left( \mathbf{R} \partial_t \left( \tilde{\nu} \otimes \frac{1}{\hat{\zeta}} \mathbf{E}_1 \right) \hat{\mathbf{R}}^\dagger \right)^\dagger \right) \\ &= \text{tr} \left( \mathbf{P} \tilde{\mathbf{F}}^\dagger \mathbf{W}^\dagger \right) + \text{tr} \left( \mathbf{P} \hat{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{F}}^\dagger \right) + \text{tr} \left( \mathbf{P} \hat{\mathbf{R}} \partial_t \left( \frac{1}{\hat{\zeta}} \mathbf{E}_1 \otimes \tilde{\nu} \right) \mathbf{R}^\dagger \right) \\ &= \mathbf{P} \tilde{\mathbf{F}}^\dagger : \mathbf{W} + \text{tr} \left( \mathbf{P} \hat{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{F}}^\dagger \right) + \text{tr} \left( \mathbf{P} \hat{\mathbf{R}} \left( \frac{1}{\hat{\zeta}} \mathbf{E}_1 \otimes \partial_t \tilde{\nu} - \frac{\partial_t \hat{\zeta}}{\hat{\zeta}^2} \mathbf{E}_1 \otimes \tilde{\nu} \right) \mathbf{R}^\dagger \right) \\ &= \text{tr} \left( \mathbf{P} \hat{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{F}}^\dagger \right) + \frac{1}{\hat{\zeta}} \text{tr} \left( \mathbf{R}^\dagger \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}_1 \otimes \partial_t \tilde{\nu} \right) - \frac{\partial_t \hat{\zeta}}{\hat{\zeta}^2} \text{tr} \left( \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}_1 \otimes \tilde{\nu} \mathbf{R}^\dagger \right) \\ &= \frac{1}{\hat{\zeta}} \mathbf{R}^\dagger \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \partial_t \tilde{\nu} + \text{tr} \left( \mathbf{P} \left( \hat{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{F}}^\dagger - \frac{\partial_t \hat{\zeta}}{\hat{\zeta}^2} \hat{\mathbf{d}}_1 \otimes \tilde{\nu} \mathbf{R}^\dagger \right) \right) \end{aligned}$$

où le terme  $\mathbf{P} \tilde{\mathbf{F}}^\dagger : \mathbf{W}$  s'annule car  $\mathbf{P} \tilde{\mathbf{F}}^\dagger$  est symétrique par conservation du moment angulaire<sup>7</sup> et que  $\mathbf{W}$  est antisymétrique or le lemme A.12 nous indique que leur produit de Frobenius est nul.

Le terme  $\text{tr} \left( \mathbf{P} \left( \hat{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{F}}^\dagger - \frac{\partial_t \hat{\zeta}}{\hat{\zeta}^2} \hat{\mathbf{d}}_1 \otimes \tilde{\nu} \mathbf{R}^\dagger \right) \right)$  provient du fait que nous ne supposons pas l'état de référence statique et correspond donc à la puissance nécessaire pour « activer » la tige. Si la configuration de référence est immobile, alors  $\hat{\mathbf{W}}$  et  $\partial_t \hat{\zeta}$  s'annulent et ne demeure que le terme

<sup>7</sup>  $\mathbf{P} \tilde{\mathbf{F}}^\dagger$  correspond au tenseur de Cauchy, or s'il n'y a pas de couple appliqué à l'intérieur de la tige, l'équation (2.22) implique sa symétrie.

$\frac{1}{\zeta} \mathbf{R}^\dagger \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \partial_t \tilde{\boldsymbol{\nu}}$ . Dans ce cas, l'intégrale sur les sections de  $\mathbf{P}$  :  $\partial_t \tilde{\mathbf{F}}$  est

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}(X_1)} \mathbf{R}^\dagger \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \partial_t \tilde{\boldsymbol{\nu}} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} &= \int_{\mathcal{B}(X_1)} \mathbf{R}^\dagger \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \partial_t \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \mathbf{E}_\alpha \right) \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \int_{\mathcal{B}(X_1)} \mathbf{R}^\dagger \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \partial_t \tilde{\boldsymbol{\omega}} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&\quad + \int_{\mathcal{B}(X_1)} \left( \mathbf{R}^\dagger \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}_1 \wedge \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \mathbf{E}_\alpha \right) : \partial_t \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \\
&= \left( \int_{\mathcal{B}(X_1)} \mathbf{R}^\dagger \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}_1 \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \right) \cdot \partial_t \tilde{\boldsymbol{\omega}} \\
&\quad + \left( \int_{\mathcal{B}(X_1)} \mathbf{R}^\dagger \mathbf{P} \hat{\mathbf{d}}_1 \wedge \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \mathbf{E}_\alpha \, d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \right) : \partial_t \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \\
&= \mathbf{l} \cdot \partial_t \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{L} : \partial_t \tilde{\boldsymbol{\Omega}}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le résultat (A.23). Nous pouvons réexprimer cette puissance en fonction des variables spatiales

$$\begin{aligned}
\mathbf{l} \cdot \partial_t \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{L} : \partial_t \tilde{\boldsymbol{\Omega}} &= (\mathbf{R}^\dagger \mathbf{l}) \cdot \partial_t (\mathbf{R}^\dagger \tilde{\boldsymbol{\omega}}) - (\mathbf{R}^\dagger \mathbf{L} \mathbf{R}) : \partial_t (\mathbf{R}^\dagger \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{R}) \\
&= \mathbf{l} \cdot \mathbf{R} \left( (\partial_t \mathbf{R})^\dagger \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{R}^\dagger \partial_t \tilde{\boldsymbol{\omega}} \right) - \mathbf{L} : \mathbf{R} \left( (\partial_t \mathbf{R})^\dagger \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{R} + \mathbf{R}^\dagger \partial_t \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{R} + \mathbf{R}^\dagger \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \partial_t \mathbf{R} \right) \mathbf{R}^\dagger \\
&= \mathbf{l} \cdot \mathbf{R} (\mathbf{R}^\dagger \partial_t \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{R}^\dagger \mathbf{W} \tilde{\boldsymbol{\omega}}) - \mathbf{L} : \mathbf{R} \left( \mathbf{R}^\dagger \partial_t \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{R} + \mathbf{R}^\dagger \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{W} \mathbf{R} - \mathbf{R}^\dagger \mathbf{W} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{R} \right) \mathbf{R}^\dagger \\
&= \mathbf{l} \cdot (\partial_t \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{W} \tilde{\boldsymbol{\omega}}) - \mathbf{L} : \left( \partial_t \tilde{\boldsymbol{\Omega}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{W} - \mathbf{W} \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \right).
\end{aligned}$$

### 2.2.2.8 LOI CONSTITUTIVE

Si la tige est élastique, la force interne dépend du tenseur de déformation

$$\begin{aligned}
\mathbf{l} &= \check{\mathbf{l}} \left( \tilde{\mathbf{F}} \right) \\
&= \check{\mathbf{l}} \left( \tilde{\mathbf{R}} + \frac{1}{\zeta} (\boldsymbol{\nu} - \tilde{\mathbf{R}} \hat{\boldsymbol{\nu}}) \otimes \hat{\mathbf{d}}_1 \right) \\
&= \check{\mathbf{l}} \left( \tilde{\mathbf{R}} \left( \mathbf{1} + \frac{1}{\zeta} (\tilde{\mathbf{R}}^\dagger \boldsymbol{\nu} - \hat{\boldsymbol{\nu}}) \otimes \hat{\mathbf{d}}_1 \right) \right)
\end{aligned}$$

mais, la loi constitutive ne doit pas dépendre des rotations

$$= \check{\mathbf{l}} \left( \mathbf{1} + \frac{1}{\zeta} (\tilde{\mathbf{R}}^\dagger \boldsymbol{\nu} - \hat{\boldsymbol{\nu}}) \otimes \hat{\mathbf{d}}_1 \right)$$

ni de la position de la configuration de référence, ainsi, nous pouvons réécrire  $\check{\mathbf{l}}_{\diamond}$

$$\begin{aligned} &= \check{\mathbf{l}}_{\diamond} \left( \tilde{\mathbf{R}}^\dagger \boldsymbol{\nu} - \hat{\boldsymbol{\nu}} \right) \\ &= \check{\mathbf{l}}_{\diamond} \left( \left( \mathbf{R} \hat{\mathbf{R}}^\dagger \right)^\dagger \boldsymbol{\nu} - \hat{\boldsymbol{\nu}} \right) \\ &= \check{\mathbf{l}}_{\diamond} \left( \hat{\mathbf{R}} \left( \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\nu} - \hat{\mathbf{R}}^\dagger \hat{\boldsymbol{\nu}} \right) \right) \\ &= \check{\mathbf{l}}_{\diamond} \left( \hat{\mathbf{R}} \hat{\boldsymbol{\nu}} \right) \end{aligned}$$

nous utilisons une nouvelle fois que la loi constitutive ne doit pas dépendre des rotations

$$\begin{aligned} &= \check{\mathbf{l}}_{\diamond} \left( \hat{\boldsymbol{\nu}} \right) \\ &= \check{\mathbf{l}}_{\diamond} \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond} \sum_{\alpha=2}^N X_{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha} \right) \end{aligned}$$

par conséquent, la loi constitutive est une fonction de la paire  $\left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond}, \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond} \right)$

$$= \check{\mathbf{l}}_{\diamond} \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond}, \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond} \right).$$

Le même procédé peut être appliqué au cas du couple.

En général, nous pouvons obtenir une loi constitutive linéaire en linéarisant – autour de la configuration de référence – une loi constitutive non-linéaire. Nous pouvons ajouter les conditions supplémentaires que la loi constitutive pour la force ne dépend que de la scission-extension et que celle pour le couple ne dépend que de la courbure<sup>8</sup>, nous aurions donc :

$$\mathbf{l}_{\diamond}(X_1, t) = \check{\mathbf{l}}_{\diamond} \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond}(X_1, t) \right) = \mathbf{B}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond}}(X_1, t), \quad (2.69a)$$

$$\mathbf{L}_{\diamond}(X_1, t) = \check{\mathbf{L}}_{\diamond} \left( \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond}(X_1, t) \right) = \mathbf{A}_{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond}}(X_1, t) \quad (2.69b)$$

où  $\mathbf{B}: \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$  linéaire est le coefficient de Hooke pour la force et  $\mathbf{A}: \mathfrak{so}(N) \mapsto \mathfrak{so}(N)$  linéaire est le coefficient de Hooke pour le couple. Dans ce cas, la puissance interne d'une tige ayant une configuration de référence statique est

$$\mathbf{l}_{\diamond} \cdot \partial_t \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond} - \mathbf{L}_{\diamond} : \partial_t \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond} = \left( \mathbf{B}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond}}(X_1, t) \right) \cdot \partial_t \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond} - \left( \mathbf{A}_{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond}}(X_1, t) \right) : \partial_t \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond}. \quad (2.70)$$

LOI CONSTITUTIVE LINÉAIRE POUR UNE TIGE TRIDIMENSIONNELLE En trois dimensions, nous pouvons exprimer les mesures de déformation comme (voir les équations 2.43 et 2.44)

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond} = \tilde{\omega}_1 \mathbf{E}_1 + \tilde{\omega}_2 \mathbf{E}_2 + \tilde{\omega}_3 \mathbf{E}_3, \quad \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond} = 2\tilde{\kappa}_1 \mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{E}_2 + 2\tilde{\kappa}_2 \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_3 + 2\tilde{\kappa}_3 \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{E}_1$$

8. Nous excluons dès lors des possibles termes dépendants des dérivées temporelles des mesures de déformations qui pourraient servir à introduire une force et un couple de viscosité.

et la force et le couple comme

$$\mathbf{l} = l_1 \mathbf{d}_1 + l_2 \mathbf{d}_2 + l_3 \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{L} = 2L_1 \mathbf{d}_3 \wedge \mathbf{d}_2 + 2L_2 \mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_3 + 2L_3 \mathbf{d}_2 \wedge \mathbf{d}_1,$$

ou, de façon équivalente

$$\underset{\diamond}{\mathbf{l}} = l_1 \mathbf{E}_1 + l_2 \mathbf{E}_2 + l_3 \mathbf{E}_3, \quad \underset{\diamond}{\mathbf{L}} = 2L_1 \mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{E}_2 + 2L_2 \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_3 + 2L_3 \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{E}_1.$$

Si la loi constitutive est linéaire, c'est qu'il existe une matrice  $C \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  telle que

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \\ \tilde{\kappa}_1 \\ \tilde{\kappa}_2 \\ \tilde{\kappa}_3 \end{pmatrix}$$

Dans le cas où les équations (2.69a) et (2.69b) sont vérifiées,  $C$  sera composée de deux blocs

$$C = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où  $B$  est la matrice des composantes de  $\mathbf{B}$  et  $A$  est la matrice des composantes de  $\mathbf{A}$  elle-même définie par (voir aussi la section B.2)

$$\mathbf{A} \text{vax}(\boldsymbol{\Theta}) = -2 \text{vax}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Theta})$$

La loi constitutive la plus simple correspond à une matrice des coefficients de Hooke diagonale

$$C = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

Au vu des explications de la section 2.2.1.7, nous pouvons interpréter  $b_1$  comme la rigidité en extension,  $b_2$  et  $b_3$  comme la rigidité en scission;  $a_1$  comme la rigidité en torsion,  $a_2$  et  $a_3$  comme la rigidité en flexion.

## 2.3 SYNTHÈSE

### 2.3.1 INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

Nous utilisons une extension de la méthode de la frontière immergée due à Lim et Peskin [74] établie pour étudier le mouvement d'un anneau élastique unidimensionnel (le cas d'une tige ouverte est traité dans [73] et l'étude est poursuivie dans [50]) immergé dans une fluide obéissant aux équations de Navier-Stokes.

La méthode de la frontière immergée nécessite de connaître la vitesse du fluide (et son spin) à chaque point du vers, c'est-à-dire qu'il faut passer d'un champ vectoriel (ou tensoriel) défini dans l'espace à un champ d'égale valeur, mais défini sur la membrane (ou tige) immergée : nous nommerons cette opération l'*interpolation* pour une raison qui deviendra claire une fois le problème discrétisé. Il faut aussi transmettre la force (et le couple) de la membrane vers le fluide, cependant nous faisons aussi l'approximation que la membrane n'a pas d'épaisseur, la force est donc singulière, ainsi aucune fonction de l'espace ne saurait représenter son *étalement* dans le fluide : il nous faudra donc, du moins dans le cas exact, utiliser une distribution.

#### 2.3.1.1 COUPLAGE DYNAMIQUE

Nous supposons que la tige est la seule source de mouvement dans le fluide (nous ignorons en particulier la gravité) : il faut donc que pour tout sous-ensemble du fluide, les forces et les couples soient en équilibre :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} \, d^N v_{\mathbf{x}} + \int_{\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{r}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{P})} \mathbf{q} \, dX_1 &= \mathbf{0}, \\ \int_{\mathcal{P}} \mathbf{C} \, d^N v_{\mathbf{x}} + \int_{\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{r}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{P})} \mathbf{Q} \, dX_1 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \forall \mathcal{P} \subset \mathcal{F}. \quad (2.71)$$

Si nous voulons être plus rigoureux, et comme nous savons que la force et le couple sont dans cette situation une distribution, alors nous écrivons

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}, \theta \rangle_{\mathcal{P}} &= - \langle \mathbf{q}, \theta \circ \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{r}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{P})}, \\ \langle \mathbf{C}, \theta \rangle_{\mathcal{P}} &= - \langle \mathbf{Q}, \theta \circ \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{r}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{P})} \end{aligned}$$

pour l'application de  $\mathbf{b}$  à une fonction test  $\theta: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ . Or si c'est vrai pour n'importe quel  $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ , c'est aussi vrai pour  $\mathcal{F}$ , mais nous assumons que la tige est complètement immergée dans le fluide, c'est-à-dire que  $\mathbf{r}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{P}$  d'où

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b}, \theta \rangle_{\mathcal{F}} &= - \langle \mathbf{q}, \theta \circ \mathbf{r} \rangle_{\mathcal{I}}, \\ \langle \mathbf{C}, \theta \rangle_{\mathcal{F}} &= - \langle \mathbf{Q}, \theta \circ \mathbf{r} \rangle_{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Nous remarquons que le choix  $\theta = \chi_{\mathcal{P}}$  avec  $\chi_{\mathcal{P}}$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $\mathcal{P}$

$$\chi_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

nous redonne (2.71). Définissons maintenant l'opérateur d'étalement  $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}: (\mathcal{I} \mapsto \mathcal{V}) \mapsto (\mathcal{F} \mapsto \mathcal{V})^\dagger$  associé à  $\mathbf{r}$  par

$$\langle \mathcal{A}_{\mathbf{r}}\zeta, \theta \rangle_{\mathcal{F}} = \langle \zeta, \theta \circ \mathbf{r} \rangle_{\mathcal{I}}$$

pour qu'ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -\mathcal{A}_{\mathbf{r}}\mathbf{q}, \\ \mathbf{C} &= -\mathcal{A}_{\mathbf{r}}\mathbf{Q}. \end{aligned}$$

### 2.3.1.2 COUPLAGE CINÉMATIQUE

Passons maintenant à la condition de non-glissement, c'est à dire que la vitesse de la tige doit correspondre avec celle du fluide là où elle se trouve :

$$\partial_t \mathbf{r}(X_1, t) = \mathbf{v}(X_1, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(X_1, t), t),$$

de plus, la vorticité du fluide doit équivaloir à celle de la tige d'où

$$\mathbf{W}(X_1, t) = \text{asym}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}(X_1, t), t)).$$

En somme, nous avons

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \circ \mathbf{r}, \quad \mathbf{W} = \text{asym}(\nabla \mathbf{u}) \circ \mathbf{r},$$

or nous observons que l'opérateur adjoint de  $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ , c'est-à-dire l'opérateur d'interpolation, est défini par

$$\langle \zeta, \mathcal{A}_{\mathbf{r}}^\dagger \theta \rangle_{\mathcal{I}} = \langle \mathcal{A}_{\mathbf{r}} \zeta, \theta \rangle_{\mathcal{F}} = \langle \zeta, \theta \circ \mathbf{r} \rangle_{\mathcal{I}} \quad (2.72)$$

donc  $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}^\dagger \theta = \theta \circ \mathbf{r}$  et en particulier

$$\mathbf{v} = \mathcal{A}_{\mathbf{r}}^\dagger \mathbf{u}, \quad \mathbf{W} = \mathcal{A}_{\mathbf{r}}^\dagger \text{asym}(\nabla \mathbf{u}).$$

Il est à noté que les forces singulières de la formulation de la méthode de la frontière immergée impliquent une discontinuité dans la pression (et dans le gradient de vitesse) de part et d'autre de la frontière [66, 124].

### 2.3.1.3 EXPRESSION EN FONCTION DU $\delta$ DE DIRAC

Puisque la méthode de la frontière immergée a été développée dans une approche numérique, il est naturel de présenter les opérateurs d'interpolation et d'étalement dans une forme qui rappelle

celle de leur équivalents approchés. Nous écrivons donc

$$(\mathcal{A}_r \zeta)(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{I}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(X_1, t)) \zeta(X_1) dX_1, \quad (2.73)$$

$$(\mathcal{A}_r^\dagger \theta)(X_1) = \int_{\mathcal{F}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(X_1, t)) \theta(\mathbf{x}) d^N v_{\mathbf{x}}. \quad (2.74)$$

Le  $\delta$  peut être interprété comme le noyau d'une transformation intégrale<sup>9</sup>.

#### 2.3.1.4 DILATATION DU NOYAU

Une tige immergée infiniment mince ne peut pas transmettre une force au fluide, contrairement, par exemple, à une membrane d'épaisseur nulle<sup>10</sup>. Nous sommes donc obligé de « dilater » le  $\delta$  de Dirac : c'est-à-dire qu'il nous faut choisir une fonction  $\delta_c: \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$  telle que

$$\lim_{c \rightarrow 0} \delta_c = \delta$$

au sens des distributions et où  $c$  est proportionnel au rayon de la tige.

### 2.3.2 ADIMENSIONALISATION

#### 2.3.2.1 ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Nous débutons par les équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} p &= \mu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \mathbf{b} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{C}, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

et définissons une longueur de référence  $L^*$  et une vitesse de référence  $V^*$  dont nous nous servons pour définir une position  $\mathbf{x}^*$ , un temps  $t^*$  et un champ de vitesse  $\mathbf{u}^*$  :

$$L^* \mathbf{x}^* = \mathbf{x}, \quad L^* t^* = V^* t, \quad V^* \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

Une fonction  $f$  sans unité définie sur l'espace et le temps peut être adimensionalisée comme suit :

$$f^*(\mathbf{x}^*, t^*) = f(\mathbf{x}, t) = f\left(L^* \mathbf{x}^*, \frac{L^*}{V^*} t^*\right)$$

tandis que pour ses dérivées nous avons<sup>11</sup>

$$\partial_{\mathbf{x}^*}^\alpha f^* = (L^*)^{|\alpha|} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha f, \quad \partial_{t^*}^n f^* = \left(\frac{L^*}{V^*}\right)^n \partial_t^n f.$$

9. À l'instar de  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$  pour la transformée de Fourier.

10. Nous notons qu'en deux dimensions, une membrane (objet de codimension 1) et une tige (objet de dimension 1) sont équivalents, nous préférons cependant parler de membrane dans ce cas car, indépendamment du nombre de dimension dans laquelle elle est plongée, une membrane fermée divise le fluide en deux sous-ensembles.

11. Nous utilisons la notation des multi-indices, voir la définition A.1.

En appliquant ces règles aux équations de Navier-Stokes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_{t^*} \mathbf{u}^* + (\nabla_{\mathbf{x}^*} \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* + \nabla_{\mathbf{x}^*} p^* &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta_{\mathbf{x}^*} \mathbf{u}^* + \mathbf{b}^* + \nabla_{\mathbf{x}^*} \cdot \mathbf{C}^*, \\ \nabla_{\mathbf{x}^*} \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \end{aligned}$$

où nous avons défini le nombre de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho L^* V^*}{\mu}, \quad (2.75)$$

ainsi que

$$p^* = \frac{1}{\rho V^{*2}} p, \quad \mathbf{b}^* = \frac{L^*}{\rho V^{*2}} \mathbf{b}, \quad \mathbf{C}^* = \frac{1}{\rho V^{*2}} \mathbf{C}.$$

### 2.3.2.2 ÉQUATIONS DE LA TIGE

RÉCAPITULATIF DES ÉQUATIONS À ADIMENSIONALISER L'équilibre des forces et des couples

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{m} &= \partial_{X_1} \mathbf{l} + \mathbf{q}, \\ \partial_t \mathbf{M} + \partial_t \mathbf{r} \wedge \mathbf{m} &= \partial_{X_1} \mathbf{L} + \partial_{X_1} \mathbf{r} \wedge \mathbf{l} + \mathbf{Q} \end{aligned}$$

les moments d'inertie

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \lambda \mathbf{v} + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}, \\ \mathbf{M} &= \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{v} - \text{asym}(\mathbf{W} \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

la cinétique de la tige

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\mathbf{r}} &= \hat{\mathbf{v}}, & \partial_t \hat{\mathbf{R}} &= \hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{R}}, \\ \partial_t \mathbf{r} &= \mathbf{v}, & \partial_t \mathbf{R} &= \mathbf{W} \mathbf{R}, \end{aligned}$$

les mesures de déformations lagrangiennes

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{\diamond} &= \hat{\mathbf{R}}^\dagger \partial_{X_1} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{E}_1, & \hat{\Omega}_{\diamond} &= \hat{\mathbf{R}}^\dagger \partial_{X_1} \hat{\mathbf{R}}, \\ \omega_{\diamond} &= \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{r} - \mathbf{E}_1, & \Omega_{\diamond} &= \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{R}, \\ \tilde{\omega}_{\diamond} &= \omega_{\diamond} - \hat{\omega}_{\diamond}, & \tilde{\Omega}_{\diamond} &= \Omega_{\diamond} - \hat{\Omega}_{\diamond}, \end{aligned}$$

et les relations constitutives

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{R} \mathbf{l}_{\diamond}, & \mathbf{L} &= \mathbf{R} \mathbf{L}_{\diamond} \mathbf{R}^\dagger, \\ \mathbf{l}_{\diamond} &= \check{\mathbf{l}}_{\diamond}(\check{\omega}_{\diamond}, \check{\Omega}_{\diamond}), & \mathbf{L}_{\diamond} &= \check{\mathbf{L}}_{\diamond}(\check{\omega}_{\diamond}, \check{\Omega}_{\diamond}). \end{aligned}$$

INTRODUCTION DES VARIABLES ADIMENSIONNELLES En premier lieu, nous introduisons des longueurs spatiale et temporelle adimensionnelles

$$\mathbf{L}^* \mathbf{X}^* = \mathbf{X}, \quad \mathbf{L}^* \mathbf{t}^* = \mathbf{V}^* \mathbf{t}$$

avant de définir des fonctions qui les prennent en arguments

$$\mathbf{L}^* \mathbf{r}^* (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) = \mathbf{r} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), \quad \mathbf{R}^* (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) = \mathbf{R} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}).$$

Nous avons donc

$$\partial_{\mathbf{t}^*} \mathbf{r}^* = \mathbf{v}^*, \quad \partial_{\mathbf{t}^*} \mathbf{R}^* = \mathbf{W}^* \mathbf{R}^*$$

où nous avons défini

$$\mathbf{V}^* \mathbf{v}^* (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) = \mathbf{v} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), \quad \mathbf{V}^* \mathbf{W}^* (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) = \mathbf{L}^* \mathbf{W} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}).$$

Posons aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^* &= \mathbf{R}^* \mathbf{l}^*_{\diamond}, & \mathbf{L}^* &= \mathbf{R}^* \mathbf{L}^*_{\diamond} \mathbf{R}^{*\dagger}, \\ \mathbf{l}^*_{\diamond} &= \check{\mathbf{l}}^*_{\diamond} (\check{\omega}^*_{\diamond}, \check{\Omega}^*_{\diamond}), & \mathbf{L}^*_{\diamond} &= \check{\mathbf{L}}^*_{\diamond} (\check{\omega}^*_{\diamond}, \check{\Omega}^*_{\diamond}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^*_{\diamond} (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \hat{\omega}_{\diamond} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), & \hat{\Omega}^*_{\diamond} (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \mathbf{L}^* \hat{\Omega}_{\diamond} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), \\ \omega^*_{\diamond} (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \omega_{\diamond} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), & \Omega^*_{\diamond} (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \mathbf{L}^* \Omega_{\diamond} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), \\ \tilde{\omega}^*_{\diamond} (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \tilde{\omega}_{\diamond} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), & \tilde{\Omega}^*_{\diamond} (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \mathbf{L}^* \tilde{\Omega}_{\diamond} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}). \end{aligned}$$

De plus, choisissons une constante  $\mathbf{Y}$  ayant des unités de Pascal<sup>12</sup> et représentant un module d'élasticité caractéristique. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}^*)^{N-1} \mathbf{Y} \mathbf{l}^* (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \mathbf{l} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), & \mathbf{L}^{*N} \mathbf{Y} \mathbf{L}^* (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \mathbf{L} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), \\ (\mathbf{L}^*)^{N-1} \mathbf{Y} \check{\mathbf{l}}^*_{\diamond} (\check{\omega}^*_{\diamond}, \check{\Omega}^*_{\diamond}) &= \check{\mathbf{l}}_{\diamond} (\check{\omega}_{\diamond}, \check{\Omega}_{\diamond}), & \mathbf{L}^{*N} \mathbf{Y} \check{\mathbf{L}}^*_{\diamond} (\check{\omega}^*_{\diamond}, \check{\Omega}^*_{\diamond}) &= \check{\mathbf{L}}_{\diamond} (\check{\omega}_{\diamond}, \check{\Omega}_{\diamond}), \\ (\mathbf{L}^*)^{N-2} \mathbf{Y} \mathbf{q}^* (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \mathbf{q} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), & (\mathbf{L}^*)^{N-1} \mathbf{Y} \mathbf{Q}^* (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \mathbf{Q} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), \\ (\mathbf{L}^*)^{N-1} \mathbf{Y} \mathbf{m}^* (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \mathbf{V}^* \mathbf{m} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}), & (\mathbf{L}^*)^{N-1} \mathbf{Y} \mathbf{M}^* (\mathbf{X}_1^*, \mathbf{t}^*) &= \mathbf{V}^* \mathbf{M} (\mathbf{X}_1, \mathbf{t}) \end{aligned}$$

12. Comme nous n'avons pas spécifié le nombre de dimensions  $N$  de l'espace dans lequel nous travaillons, nous considérons qu'un champ ayant des unités de pression est tel que son intégration sur une variété de cosimension 1 a les dimensions d'une force.

il reste les moments d'inertie

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}^*)^{N-1} \mathbf{Y} \lambda^* (\mathbf{X}_1^*, t^*) &= (\mathbf{V}^*)^2 \lambda (\mathbf{X}_1, t), \\ (\mathbf{L}^*)^N \mathbf{Y} \boldsymbol{\theta}^* (\mathbf{X}_1^*, t^*) &= (\mathbf{V}^*)^2 \boldsymbol{\theta} (\mathbf{X}_1, t), \\ (\mathbf{L}^*)^{N+1} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^* (\mathbf{X}_1^*, t^*) &= (\mathbf{V}^*)^2 \mathbf{Y} (\mathbf{X}_1, t), \end{aligned}$$

et leur dérivées matérielles

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}^*)^{N-2} \mathbf{Y} \dot{\lambda}^* (\mathbf{X}_1^*, t^*) &= \mathbf{V}^* \dot{\lambda} (\mathbf{X}_1, t), \\ (\mathbf{L}^*)^{N-1} \mathbf{Y} \dot{\boldsymbol{\theta}}^* (\mathbf{X}_1^*, t^*) &= \mathbf{V}^* \dot{\boldsymbol{\theta}} (\mathbf{X}_1, t), \\ (\mathbf{L}^*)^N \mathbf{Y} \dot{\mathbf{Y}}^* (\mathbf{X}_1^*, t^*) &= \mathbf{V}^* \dot{\mathbf{Y}} (\mathbf{X}_1, t). \end{aligned}$$

### 2.3.2.3 INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

Considérons les équations

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathcal{A}_r^\dagger \mathbf{u}, & \mathbf{W} &= \mathcal{A}_r^\dagger \text{asym}(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}), \\ \mathbf{b} &= -\mathcal{A}_r \mathbf{q}, & \mathbf{C} &= -\mathcal{A}_r \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Nous avons d'abord la condition selon laquelle la tige se déplace à la vitesse du fluide

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* (\mathbf{X}_1^*, t^*) &= \frac{1}{\mathbf{V}^*} \mathbf{v} \left( \mathbf{L}^* \mathbf{X}_1^*, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \\ &= \frac{1}{\mathbf{V}^*} (\mathcal{A}_r^\dagger \mathbf{u}) \left( \mathbf{L}^* \mathbf{X}_1^*, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \\ &= \frac{1}{\mathbf{V}^*} \mathbf{u} \left( \mathbf{r} \left( \mathbf{L}^* \mathbf{X}_1^*, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right), \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \\ &= \frac{1}{\mathbf{V}^*} \mathbf{u} \left( \mathbf{L}^* \mathbf{r}^* (\mathbf{X}_1^*, t^*), \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \\ &= \frac{\mathbf{V}^*}{\mathbf{V}^*} \mathbf{u}^* \left( \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{L}^*} \mathbf{r}^* (\mathbf{X}_1^*, t^*), \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \end{aligned}$$

et tourne aussi d'après la vitesse de rotation du fluide

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^* (\mathbf{X}_1^*, t^*) &= \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} \mathbf{W} \left( \mathbf{L}^* \mathbf{X}_1^*, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \\ &= \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} \text{asym} \left( (\mathcal{A}_r^\dagger \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \left( \mathbf{L}^* \mathbf{X}_1^*, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \right) \\ &= \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} \text{asym} \left( (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \left( \mathbf{r} \left( \mathbf{L}^* \mathbf{X}_1^*, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right), \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \right) \\ &= \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} \text{asym} \left( (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}) \left( \mathbf{L}^* \mathbf{r}^* (\mathbf{X}_1^*, t^*), \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \right) \\ &= \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} \text{asym} \left( (\nabla_{\mathbf{x}^*} \mathbf{u}^*) \left( \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{L}^*} \mathbf{r}^* (\mathbf{X}_1^*, t^*), \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \right). \end{aligned}$$

La force exercée par la tige sur le fluide

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^*(\mathbf{x}^*, t^*) &= \frac{\mathbf{L}^*}{\rho V^{*2}} \mathbf{b} \left( \mathbf{L}^* \mathbf{x}^*, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \\
&= -\frac{\mathbf{L}^*}{\rho V^{*2}} (\mathcal{A} \mathbf{r} \mathbf{q}) \left( \mathbf{L}^* \mathbf{x}^*, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \\
&= -\frac{\mathbf{L}^*}{\rho V^{*2}} \int_{\mathcal{I}} \mathbf{q} \left( X_1, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \delta \left( \mathbf{L}^* \mathbf{x}^* - \mathbf{r} \left( X_1, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \right) dX_1 \\
&= -\frac{\mathbf{L}^*}{\rho V^{*2}} \int_{\mathcal{I}} \mathbf{Y} (\mathbf{L}^*)^{N-2} \mathbf{q}^* \left( \frac{X_1}{\mathbf{L}^*}, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \delta \left( \mathbf{L}^* \mathbf{x}^* - \mathbf{L}^* \mathbf{r}^* \left( \frac{X_1}{\mathbf{L}^*}, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \right) dX_1 \\
&= -\frac{\mathbf{L}^* (\mathbf{L}^*)^{N-1} \mathbf{Y}}{\rho V^{*2}} \int_{\mathcal{I}^*} \mathbf{q}^* \left( X_1^*, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \delta \left( \mathbf{L}^* \mathbf{x}^* - \mathbf{L}^* \mathbf{r}^* \left( X_1^*, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \right) dX_1^* \\
&= -\frac{\mathbf{Y}}{\rho V^{*2}} \left( \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{L}^*} \right)^{N-1} \int_{\mathcal{I}^*} \mathbf{q}^* \left( X_1^*, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \delta \left( \mathbf{x}^* - \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{L}^*} \mathbf{r}^* \left( X_1^*, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \right) dX_1^*
\end{aligned}$$

et c'est quasiment la même chose pour le couple

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^*(\mathbf{x}^*, t^*) &= \frac{1}{\rho V^{*2}} \mathbf{C} \left( \mathbf{L}^* \mathbf{x}^*, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \\
&= -\frac{1}{\rho V^{*2}} (\mathcal{A} \mathbf{r} \mathbf{Q}) \left( \mathbf{L}^* \mathbf{x}^*, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \\
&= -\frac{1}{\rho V^{*2}} \int_{\mathcal{I}} \mathbf{Q} \left( X_1, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \delta \left( \mathbf{L}^* \mathbf{x}^* - \mathbf{r} \left( X_1, \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^*} t^* \right) \right) dX_1 \\
&= -\frac{1}{\rho V^{*2}} \int_{\mathcal{I}} (\mathbf{L}^*)^{N-1} \mathbf{Y} \mathbf{Q}^* \left( \frac{X_1}{\mathbf{L}^*}, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \delta \left( \mathbf{L}^* \mathbf{x}^* - \mathbf{L}^* \mathbf{r}^* \left( \frac{X_1}{\mathbf{L}^*}, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \right) dX_1 \\
&= -\frac{\mathbf{L}^{*N} \mathbf{Y}}{\rho V^{*2}} \int_{\mathcal{I}^*} \mathbf{Q}^* \left( X_1^*, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \delta \left( \mathbf{L}^* \mathbf{x}^* - \mathbf{L}^* \mathbf{r}^* \left( X_1^*, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \right) dX_1^* \\
&= -\frac{\mathbf{Y}}{\rho V^{*2}} \left( \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{L}^*} \right)^N \int_{\mathcal{I}^*} \mathbf{Q}^* \left( X_1^*, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \delta \left( \mathbf{x}^* - \frac{\mathbf{L}^*}{\mathbf{L}^*} \mathbf{r}^* \left( X_1^*, \frac{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*}{\mathbf{V}^* \mathbf{L}^*} t^* \right) \right) dX_1^*.
\end{aligned}$$

RÉCAPITULATIF Si nous posons finalement  $\mathbf{L} = \mathbf{L}^* = \mathbf{L}^*$  et  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^* = \mathbf{V}^*$  nous obtenons, en rassemblant premièrement les équations de la tige : les mesures matérielles de déformations

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond}^* = \mathbf{R}^{*\dagger} \partial_{X_1^*} \mathbf{r}^* - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond}^*, \quad \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond}^* = \mathbf{R}^{*\dagger} \partial_{X_1^*} \mathbf{R}^* - \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond}^*$$

les lois constitutives

$$\mathbf{l}^* = \mathbf{R}^* \check{\mathbf{l}}_{\diamond}^* \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond}^*, \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond}^* \right), \quad \mathbf{L}^* = \mathbf{R}^* \check{\mathbf{L}}_{\diamond}^* \left( \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\diamond}^*, \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\diamond}^* \right) \mathbf{R}^{*\dagger}$$

les équations d'équilibres

$$\begin{aligned}
\partial_{t^*} \mathbf{m}^* &= \partial_{X_1^*} \mathbf{l}^* + \mathbf{q}^*, \\
\partial_{t^*} \mathbf{M}^* + \partial_{t^*} \mathbf{r}^* \wedge \mathbf{m}^* &= \partial_{X_1^*} \mathbf{L}^* + (\partial_{X_1^*} \mathbf{r}^*) \wedge \mathbf{l}^* + \mathbf{Q}^*
\end{aligned}$$

les dérivées des moments cinétiques

$$\begin{aligned}\partial_{t^*} \mathbf{m}^* &= \dot{\lambda}^* \mathbf{v}^* + \lambda^* \partial_{t^*} \mathbf{v}^* + \partial_{t^*} \mathbf{W}^* \boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{W}^* (\dot{\boldsymbol{\theta}}^* + \mathbf{W}^* \boldsymbol{\theta}^*), \\ \partial_{t^*} \mathbf{M}^* &= (\dot{\boldsymbol{\theta}}^* + \mathbf{W}^* \boldsymbol{\theta}^*) \wedge \mathbf{v}^* + \boldsymbol{\theta}^* \wedge \partial_{t^*} \mathbf{v}^* - \text{asym} (\partial_{t^*} \mathbf{W}^* \mathbf{Y}^* + \mathbf{W}^* \dot{\mathbf{Y}}^*)\end{aligned}$$

les vitesses

$$\partial_{t^*} \mathbf{r}^* = \mathbf{v}^*, \quad \partial_{t^*} \mathbf{R}^* = \mathbf{W}^* \mathbf{R}^*.$$

Ensuite, écrivons les équations d'interaction

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^* &= \mathcal{A}_{r^*}^\dagger \mathbf{u}^*, & \mathbf{W}^* &= \mathcal{A}_{r^*}^\dagger \text{asym} (\nabla_{\mathbf{x}^*} \mathbf{u}^*), \\ \mathbf{b}^* &= -\frac{1}{\text{Ca}} \mathcal{A}_{r^*} \mathbf{q}^*, & \mathbf{C}^* &= -\frac{1}{\text{Ca}} \mathcal{A}_{r^*} \mathbf{Q}^*\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le nombre de Cauchy

$$\text{Ca} = \frac{\rho V^2}{Y} \quad (2.76)$$

qui peut être déplacé dans les équations de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}\partial_{t^*} \mathbf{u}^* + (\nabla_{\mathbf{x}^*} \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* + \nabla_{\mathbf{x}^*} p^* &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta_{\mathbf{x}^*} \mathbf{u}^* - \frac{1}{\text{Ca}} (\mathcal{A}_{r^*} \mathbf{q}^* + \nabla_{\mathbf{x}^*} \cdot \mathcal{A}_{r^*} \mathbf{Q}^*), \\ \nabla_{\mathbf{x}^*} \cdot \mathbf{u}^* &= 0\end{aligned}$$

où sa signification devient plus apparente : il indique à quelle point la force élastique est grande par rapport à la force d'inertie.

# MÉTHODES

## 3.1 MODÈLE NUMÉRIQUE

### 3.1.1 ITÉRATION TEMPORELLE

#### 3.1.1.1 ÉQUATIONS À RÉSOUDRE

Une tige, paramétrée sur l'intervalle  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$  se déplace dans un fluide incompressible qui occupe l'ensemble  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^N$ . Nous devons résoudre les équations adimensionalisées<sup>1</sup> suivantes

$$\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Ca}} \mathcal{A}_r \mathbf{q} - \frac{1}{\text{Ca}} \nabla \cdot \mathcal{A}_r \mathbf{Q}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.2)$$

$$\partial_t \mathbf{r} = \mathcal{A}_r^\dagger \mathbf{u}, \quad (3.3)$$

$$\partial_t \mathbf{R} = (\mathcal{A}_r^\dagger \text{asym}(\nabla \mathbf{u})) \mathbf{R} \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{u}: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}^N$  est le champ de vitesse,  $p: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$  la pression (complètement déterminée à un facteur additif près par les autres variables et la condition d'incompressibilité),  $\mathbf{q}: \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}^N$  et  $\mathbf{Q}: \mathcal{I} \mapsto \mathfrak{so}(N)$  la force et le couple, qui dépendent tout deux de  $\mathbf{r}: \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}^N$  et de  $\mathbf{R}: \mathcal{I} \mapsto SO(N)$ , la position de la tige et son orientation (et de leurs deux premières dérivées temporelles<sup>2</sup>), qui définissent ensemble la *configuration* de la tige. L'opérateur linéaire  $\mathcal{A}_r: (\mathcal{I} \mapsto \mathcal{V}) \mapsto (\mathcal{F} \mapsto \mathcal{V})^\dagger$  étale une fonction  $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{V}$  vers une fonctionnelle sur l'espace des fonctions  $\Omega \mapsto \mathcal{V}$  dans le fluide, alors que l'opérateur  $\mathcal{A}_r^\dagger: (\mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}) \mapsto (\mathcal{I} \mapsto \mathcal{V})$  interpole une fonction  $f: \mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}$  dans le fluide vers une fonction  $f \circ \mathbf{r}: \mathcal{I} \mapsto \mathcal{V}$  sur la tige.

Pour la suite, nous réécrivons les équations ci-dessus sous la forme

$$\partial_t y = (f_{\mathbf{u},L} + f_{\mathbf{u},N}, f_{\mathbf{r}}, f_{\mathbf{R}} \mathbf{R}), \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

où nous avons défini l'état

$$y = (\mathbf{u}, \mathbf{r}, \mathbf{R})$$

1. Nous déléstons, à partir d'ici, les décorations rendant compte de l'adimensionalisation.

2. À moins que tout les moments d'inertie soient nuls.

et

$$f_{\mathbf{u},L}(y, t) = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}, \quad (3.5)$$

$$f_{\mathbf{u},N}(y, t) = -(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Ca}} \mathcal{A}_r \mathbf{q} - \frac{1}{\text{Ca}} \nabla \cdot \mathcal{A}_r \mathbf{Q}, \quad (3.6)$$

$$f_r(y, t) = \mathcal{A}_r^\dagger \mathbf{u}, \quad (3.7)$$

$$f_{\mathbf{R}}(y, t) = \mathcal{A}_r^\dagger \text{asym}(\nabla \mathbf{u}) \quad (3.8)$$

avec

$$\mathbf{q} = \partial_t \mathbf{m} - \partial_{X_1} l,$$

$$\mathbf{Q} = \partial_t \mathbf{M} + \partial_t \mathbf{r} \wedge \mathbf{m} - \partial_{X_1} \mathbf{L} - \partial_{X_1} \mathbf{r} \wedge l$$

et

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{m} &= \dot{\lambda} \mathbf{v} + \lambda \partial_t \mathbf{v} + \partial_t \mathbf{W} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{W} (\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}), \\ \partial_t \mathbf{M} &= (\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{W} \boldsymbol{\theta}) \wedge \mathbf{v} + \boldsymbol{\theta} \wedge \partial_t \mathbf{v} - \text{asym}(\partial_t \mathbf{W} \mathbf{Y} + \mathbf{W} \dot{\mathbf{Y}}). \end{aligned}$$

### 3.1.1.2 SCHÉMAS DE RUNGE-KUTTA ADDITIFS

Résoudre les équations de Navier-Stokes couplées aux équations de la théorie des poutres pose des difficultés certaines. La première étape de notre démarche est de rendre orthogonales les résolutions temporelle et spatiale. Nous transformons donc les équations aux dérivées partielles en une équation aux dérivées ordinaires par la méthode des lignes<sup>3</sup>. Nous choisissons les méthodes de Runge-Kutta puisque leur théorie est bien établie et qu'elles ont déjà été utilisées pour résoudre des problèmes comparables avec succès. Cependant, afin d'équilibrer l'efficacité et la stabilité de notre méthode, nous choisissons pas parmi les méthodes de Runge-Kutta classiques qui ne sont que purement implicite ou explicite, mais nous utilisons les schémas additifs qui permettent de résoudre implicitement certaines parties et explicitement les autres. Nous préservons donc la stabilité des méthodes implicites pour la partie diffusive mais gagnons en rapidité en utilisant des méthodes explicites pour la partie convective.

Pour résoudre une équation aux dérivées ordinaires du type

$$\partial_t y(t) = \sum_{\nu=1}^m f_\nu(y(t), t)$$

nous suivons [62]:

$$\tilde{y}_{n,i} = y_n + (t_{n+1} - t_n) \sum_{\nu=1}^m \sum_{j=1}^{n_c} a_{i,j}^\nu f_\nu(\tilde{y}_{n,j}, (1 - c_j) t_n + c_j t_{n+1}), \quad i = 1, \dots, n_c,$$

3. Comme nous ne traitons de la partie spatiale qu'à la section 3.1.2, nous traitons ici  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{r}$  comme des fonctions du temps vers des espaces linéaires sans plus de précision. Même chose pour  $\mathbf{R}$ , mais vers un groupe de Lie.

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^{n_c} b_i^\nu f_\nu(\tilde{y}_{n,i}, (1 - c_i)t_n + c_i t_{n+1})$$

où  $y_n \simeq y(t_n)$  et  $\tilde{y}_{n,i} \simeq y((1 - c_i)t_n + c_i t_{n+1})$ . Les coefficients peuvent être écrits sous la forme de tableaux de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{1,1}^\nu & \cdots & a_{1,n_c}^\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n_c} & a_{n_c,1}^\nu & \cdots & a_{n_c,n_c}^\nu \\ \hline & b_1^\nu & \cdots & b_{n_c}^\nu \end{array}, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Alternativement, on définit  $\tilde{t}_{n,i} = (1 - c_i)t_n + c_i t_{n+1} = t_n + c_i(t_{n+1} - t_n) = t_n + c_i h_n$  et

$$K_{n,i}^\nu = f_\nu(\tilde{y}_{n,i}, (1 - c_i)t_n + c_i t_{n+1}), \quad i = 1, \dots, n_c, \quad \nu = 1, \dots, m$$

pour obtenir

$$K_{n,i}^\nu = f_\nu \left( y_n + h_n \sum_{\nu=1}^m \sum_{j=1}^{n_c} a_{i,j}^\nu K_{n,j}^\nu, \tilde{t}_{n,i} \right), \quad i = 1, \dots, n_c, \quad \nu = 1, \dots, m,$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^{n_c} b_i^\nu K_{n,i}^\nu.$$

Nous présentons à l'annexe C.2 les tableaux de Butcher de toutes les méthodes de Runge-Kutta additives que nous utilisons. Les méthodes d'Euler et du trapèze sont les seules que nous utilisons en pratique pour la résolution complète du problème de la nage car les méthodes d'ordre plus élevé nécessitent plus d'espace mémoire, suffisamment pour dépasser la capacité de beaucoup d'ordinateurs. Néanmoins, nous utilisons toutes les méthodes lorsque nous effectuons des tests de certains sous-problèmes (voir la section 4.1).

### 3.1.1.3 SCHÉMAS DE RUNGE-KUTTA-MUNTHE-KAAS

L'idée fondamentale des schémas de Runge-Kutta-Munthe-Kaas (RKMK) est basée sur le lemme suivant (légèrement adapté de [54, lemme 3.1]).

**Lemme 3.1.** *Avec la fonction exponentielle matricielle et sa tangente trivialisée à droite  $\text{dexp}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$  définie par*

$$(\exp(A(t)))' = \text{dexp}_{A(t)}(A'(t)) \exp(A(t))$$

*nous avons que, pour  $t$  petit, l'équation*

$$\mathbf{\Lambda}'(t) = A(t, \mathbf{\Lambda}(t)) \mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda} B(t, \mathbf{\Lambda}(t)), \quad t \geq 0, \quad \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0 \quad (3.9)$$

*pour  $\mathbf{\Lambda}: \mathbb{R} \mapsto \mathcal{G}$ ,  $A: \mathbb{R} \times \mathcal{G} \mapsto \mathfrak{g}$ ,  $B: \mathbb{R} \times \mathcal{G} \mapsto \mathfrak{g}$  et  $X_0 \in \mathcal{G}$  a pour solution*

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \exp(\mathbf{\Theta}(t)) \mathbf{\Lambda}_0 \exp(-\mathbf{\Upsilon}(t))$$

où les fonctions  $\Theta: \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{g}$  et  $\Upsilon: \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{g}$  satisfont à

$$\begin{aligned}\Theta'(t) &= \text{dexp}_{\Theta(t)}^{-1}(A(t, \Lambda(t))), & \Theta(0) &= \mathbf{0}, \\ \Upsilon'(t) &= \text{dexp}_{\Upsilon(t)}^{-1}(B(t, \Lambda(t))), & \Upsilon(0) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

*Démonstration.* Nous dérivons l'équation (3.9) pour obtenir, si nous prenons compte de  $\text{dexp}_{\Psi}\Phi \exp(\Psi) = \exp(\Psi) \text{dexp}_{-\Psi}\Phi$  et de la linéarité de  $\text{dexp}$  selon son deuxième argument [54, eq. 2.42 & 2.47]:

$$\begin{aligned}\Lambda'(t) &= \text{dexp}_{\Theta(t)}(\Theta'(t)) \exp(\Theta(t)) \Lambda_0 \exp(-\Upsilon(t)) \\ &\quad + \exp(\Theta(t)) \Lambda_0 \exp(-\Upsilon(t)) \text{dexp}_{\Upsilon(t)}(-\Upsilon'(t)) \\ &= \text{dexp}_{\Theta(t)}(\Theta'(t)) \Lambda(t) - \Lambda(t) \text{dexp}_{\Upsilon(t)}(\Upsilon'(t))\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}\text{dexp}_{\Theta(t)}(\Theta'(t)) &= A(t, \Lambda(t)), \\ \text{dexp}_{\Upsilon(t)}(\Upsilon'(t)) &= B(t, \Lambda(t)),\end{aligned}$$

reste à inverser  $\text{dexp}$ . □

Nous pouvons donc résoudre les équations différentielles sur l'algèbre de Lie plutôt que de le faire directement sur le groupe de Lie: cela a l'important avantage que les méthodes de Runge-Kutta ordinaires s'appliquent puisque les algèbres de Lie sont des espaces vectoriels.

Puisqu'un algèbre de Lie est un espace vectoriel, les approches usuelles de solution d'équations aux dérivés ordinaires s'y appliquent directement, contrairement à un groupe de Lie où il n'est pas aisé de contraindre la solution numérique à la variété du groupe. Une méthode de solution apparaît donc du lemme 3.1: résoudre, pour de petit intervalle, les équations (3.10) plutôt que (3.9). Cette idée, combinée avec les méthodes de Runge-Kutta standard, constitue le point de départ des méthodes de Runge-Kutta-Munthe-Kaas (RK-MK).

Nous souhaitons résoudre l'équation (3.9) en utilisant les coefficients d'une méthode de Runge-Kutta déjà connue. Si pour résoudre une équation du genre  $x'(t) = f(t, x(t))$  avec  $x$  membre d'un espace vectoriel, la méthode choisie s'écrit

$$\left. \begin{aligned}\tilde{x}_{n,i} &= (t_{n+1} - t_n) \sum_{j=1}^{n_c} a_{i,j} \tilde{f}_{n,j} \\ \tilde{f}_{n,i} &= f(\tilde{t}_{n,i}, \tilde{x}_{n,i})\end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, n_c,\tag{3.11}$$

$$x_{n+1} = (t_{n+1} - t_n) \sum_{i=1}^{n_c} b_i \tilde{f}_{n,i}$$

où nous avons défini

$$\tilde{t}_{n,i} = (1 - c_i) t_n + c_i t_{n+1}$$

alors, pour  $\Lambda'(t) = A(t, \Lambda(t)) \Lambda - \Lambda B(t, \Lambda(t))$  nous aurons

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{\Theta}_{n,i} &= (t_{n+1} - t_n) \sum_{j=1}^{n_c} a_{i,j} \Phi_{n,j} \\
 \tilde{\Upsilon}_{n,i} &= (t_{n+1} - t_n) \sum_{j=1}^{n_c} a_{i,j} \Psi_{n,j} \\
 \Phi_{n,i} &= \text{dexp}_{\Theta_{n,i}}^{-1} \left( A(\tilde{t}_{n,i}, \tilde{\Lambda}_{n,i}) \right) \\
 \Psi_{n,i} &= \text{dexp}_{\tilde{\Upsilon}_{n,i}}^{-1} \left( B(\tilde{t}_{n,i}, \tilde{\Lambda}_{n,i}) \right) \\
 \tilde{\Lambda}_{n,i} &= \exp(\tilde{\Theta}_{n,i}) \Lambda_n \exp(-\tilde{\Upsilon}_{n,i})
 \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n_c, \quad (3.12)$$

$$\Theta_{n+1} = (t_{n+1} - t_n) \sum_{i=1}^{n_c} b_i \Phi_{n,i},$$

$$\Upsilon_{n+1} = (t_{n+1} - t_n) \sum_{i=1}^{n_c} b_i \Psi_{n,i},$$

$$\Lambda_{n+1} = \exp(\Theta_{n+1}) \Lambda_n \exp(-\Upsilon_{n+1}).$$

Nous bénéficions ainsi de toute la recherche effectuée sur les méthodes de Runge-Kutta pour obtenir un schéma rapide et efficace ; cependant, il faut calculer les fonctions  $\exp$  et  $\text{dexp}^{-1}$  constamment, et cela, dans le cas général, peut être très coûteux. Heureusement, dans les cas des groupes  $SO(2)$  et  $SO(3)$ , des formules analytiques simples existent.

ÉVALUATION EXPLICITE DE L'EXPONENTIELLE POUR  $SO(2)$  Le cas de  $SO(2)$  est très simple : pour un « angle »

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2)$$

nous avons <sup>4</sup>

$$\exp(\Theta) = \cos(\theta) \mathbf{1} + \frac{\sin(\theta)}{\theta} \Theta, \quad (3.13)$$

$$\text{dexp}_{\Theta} = \mathbf{1}, \quad (3.14)$$

$$\text{dexp}_{\Theta}^{-1} = \mathbf{1}. \quad (3.15)$$

Les deux dernières égalités proviennent de la commutativité des rotations dans le plan.

4. Pour que la formule pour l'exponentielle coïncide avec sa définition, il faut la comprendre comme une écriture commode de la série correspondante. En particulier, lorsque  $\Theta = \mathbf{0}$  alors  $\theta = 0$  or il y a une indétermination  $\frac{0}{0}$ , mais l'exponentielle est bien définie :  $\exp(\Theta) = \mathbf{1}$ .

ÉVALUATION EXPLICITE DE L'EXPONENTIELLE POUR  $SO(3)$  La fonction  $\exp: \mathfrak{so}(3) \mapsto SO(3)$ , s'explique [54, eq. B.6, B.10-11], en prenant

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$$

comme<sup>5</sup>

$$\exp(\Theta) = \mathbf{1} + \frac{\sin(\varphi)}{\varphi} \Theta + \frac{1 - \cos(\varphi)}{\varphi^2} \Theta^2, \quad (3.16)$$

$$\text{dexp}_{\Theta} = \mathbf{1} + \frac{1 - \cos(\varphi)}{\varphi^2} \Theta + \frac{\varphi - \sin(\varphi)}{\varphi^3} \Theta^2, \quad (3.17)$$

$$\text{dexp}_{\Theta}^{-1} = \mathbf{1} - \frac{1}{2} \Theta - \frac{\varphi \cot(\frac{\varphi}{2}) - 2}{2\varphi^2} \Theta^2 \quad (3.18)$$

où  $\varphi = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} = \|\text{vax}(\Theta)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Theta\|_F$ .

#### 3.1.1.4 SCHÉMA GÉNÉRAL

Nous collectons les équations pour trouver

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_{n,i} &= \mathbf{u}_n + h_n \sum_{j=1}^{n_c} a_{i,j}^{\mathbf{u},L} f_{\mathbf{u},L}(\tilde{y}_{n,j}, \tilde{t}_{n,j}) + a_{i,j}^{\mathbf{u},N} f_{\mathbf{u},N}(\tilde{y}_{n,j}, \tilde{t}_{n,j}) \\ 0 &= \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{n,i} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{n,i} &= \mathbf{r}_n + h_n \sum_{j=1}^{n_c} a_{i,j}^{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}}(\tilde{y}_{n,j}, \tilde{t}_{n,j}) \\ \tilde{\Theta}_{n,i} &= h_n \sum_{j=1}^{n_c} a_{i,j}^{\mathbf{R}} \Psi_{n,j} \\ \Psi_{n,i} &= \text{dexp}_{\tilde{\Theta}_{n,i}}^{-1}(f_{\mathbf{R}}(\tilde{y}_{n,i}, \tilde{t}_{n,i})) \\ \tilde{\mathbf{R}}_{n,i} &= \exp(\tilde{\Theta}_{n,i}) \mathbf{R}_n \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n_c, \quad (3.19a)$$

5. Encore ici, pour que les formules coïncident avec leur définitions, il faut les comprendre comme une écriture commode des séries correspondantes. En particulier, lorsque  $\Theta = \mathbf{0}$  alors  $\theta = 0$  or il y a des indéterminations  $\frac{0}{0}$ , mais l'exponentielle et ses dérivées sont bien définies :  $\exp(\Theta) = \mathbf{1}$ ,  $\text{dexp}_{\Theta} \Upsilon = \mathbf{1}$  et  $\text{dexp}_{\Theta}^{-1} \Upsilon = \mathbf{1} \forall \Upsilon$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + h_n \sum_{i=1}^{n_c} b_i^{\mathbf{u},L} f_{\mathbf{u},L}(\tilde{y}_{n,i}, \tilde{t}_{n,i}) + b_i^{\mathbf{u},N} f_{\mathbf{u},N}(\tilde{y}_{n,i}, \tilde{t}_{n,i}), \\
\mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{r}_n + h_n \sum_{i=1}^{n_c} b_i^{\mathbf{r}} f_{\mathbf{r}}(\tilde{y}_{n,i}, \tilde{t}_{n,i}), \\
\Theta_{n+1} &= h_n \sum_{i=1}^{n_c} b_i^{\mathbf{R}} \Psi_{n,i}, \\
\mathbf{R}_{n+1} &= \exp(\Theta_{n+1}) \mathbf{R}_n
\end{aligned} \tag{3.19b}$$

où  $\tilde{y}_{n,i} = (\tilde{\mathbf{u}}_{n,i}, \tilde{\mathbf{r}}_{n,i}, \tilde{\mathbf{R}}_{n,i})$ .

Nous nous rappelons que  $f_{\mathbf{u},N}(\tilde{y}_{n,i}, \tilde{t}_{n,i})$  dépend des accélérations  $\tilde{\mathbf{v}}_{n,i} \simeq \partial_t \mathbf{v}(\tilde{t}_{n,i})$  et  $\tilde{\mathbf{W}}_{n,i} \simeq \partial_t \mathbf{W}(\tilde{t}_{n,i})$  dans le cas où les moments d'inertie sont non-nuls, or il est possible de les obtenir par

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n,i} = \mathcal{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^{\dagger}(\tilde{\mathbf{u}}_{n,i}), \quad \tilde{\mathbf{W}}_{n,i} = \mathcal{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^{\dagger} \text{asym}(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_{n,i})$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}_{n,i}$  approxime  $\partial_t \mathbf{u}(\tilde{t}_{n,i})$  par

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n,i} = \dot{\mathbf{u}}_n + h_n \sum_{j=1}^{n_c} a_{i,j}^{\dot{\mathbf{u}}} \left( -\nabla \tilde{p}_{n,j} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{n,j} - \frac{1}{\text{Ca}} \mathcal{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^{\dagger} \tilde{\mathbf{q}}_{n,j} - \frac{1}{\text{Ca}} \nabla \cdot \mathcal{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^{\dagger} \tilde{\mathbf{Q}}_{n,j} \right).$$

Pour des soucis d'efficacité évident, nous nous concentrons sur des méthodes diagonalement implicites (DIRK) pour la partie linéaire des équations de Navier-Stokes et des méthodes explicites pour la partie non-linéaire, y compris le calcul de l'accélération. Pour l'avancement de la configuration, autant les méthodes explicites qu'implicites sont considérées. Aussi, il faut, pour maintenir l'incompressibilité, que les conditions suivantes soient remplies :

$$b_i^{\mathbf{u},L} = a_{n_c,i}^{\mathbf{u},L}, \quad b_i^{\mathbf{u},N} = a_{n_c,i}^{\mathbf{u},N}.$$

Nous pouvons cependant modifier une méthode déjà existante au prix de l'ajout d'une étape :

$$\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{1,1}^{\nu} & \dots & a_{1,n_c}^{\nu} & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
c_{n_c} & a_{n_c,1}^{\nu} & \dots & a_{n_c,n_c}^{\nu} & 0 \\
1 & b_1^{\nu} & \dots & b_{n_c}^{\nu} & 0 \\
\hline
& b_1^{\nu} & \dots & b_{n_c}^{\nu} & 0
\end{array}, \quad \nu = \mathbf{u}, L; \mathbf{u}, N$$

mais puisque cela est sans aucun bénéfice sur la précision, nous préférons les méthodes dont la dernière ligne des coefficients  $a$  correspond à celle des  $b$ . Cependant, les paires de méthodes IMEX-DIRK qui répondent à ces conditions et qui sont explicitées dans la littérature étant rares, il est nécessaire de modifier des méthodes (celle de [62] par exemple) pour obtenir un ordre de convergence supérieur à 3 (à moins, bien sûr, d'en produire *ab initio*). Nous notons aussi qu'il est

possible de contrôler l'erreur comme dans [62].

## 3.1.2 DISCRÉTISATION SPATIALE

### 3.1.2.1 MAILLAGE EULÉRIEN

Bien que notre schéma soit particulièrement simple, il est utile de définir précisément ce que nous entendons par grille.

**Définition 3.2.**

1. Un *maillage régulier* (ou *grille*) *homogène*<sup>6</sup> en dimension  $N$  est décrit par un triplet  $(\mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{o})$  avec  $\mathbf{h}, \mathbf{o} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^N$  et  $h_\alpha > 0$  pour  $\alpha = 1, \dots, N$ .
2. Les *indices* d'une telle grille sont donnés<sup>7</sup> par

$$\Xi(\mathbf{n}) = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \mid 0 \leq k_\alpha < n_\alpha, \alpha = 1, \dots, N\}$$

3. Ses points par  $\mathbf{x}_\mathbf{k} = \mathbf{o} + \mathbf{k} * \mathbf{h}$  avec  $\mathbf{k} \in \Xi(\mathbf{n})$ . Le vecteur  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$  détermine donc les écarts entre les points selon la dimension.
4. Les *longueurs* des côtés sont  $L_\alpha = n_\alpha h_\alpha$  dans le cas d'une grille périodique et  $L_\alpha = (n_\alpha - 1) h_\alpha$  dans le cas d'une grille finie.
5. L'*échantillonnage* (ou *discrétisation*) d'une fonction  $\phi: \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{V}$  sur une grille homogène  $(\mathbf{h}, \mathbf{n}, \mathbf{o})$  est une fonction  $\tilde{\phi}: \Xi(\mathbf{n}) \mapsto \mathcal{V}: \mathbf{k} \mapsto \tilde{\phi}_\mathbf{k} = \phi(\mathbf{x}_\mathbf{k})$ . Par abus de notation, nous écrirons parfois  $\phi_\mathbf{k} = \tilde{\phi}_\mathbf{k} = \phi(\mathbf{x}_\mathbf{k})$ .

### 3.1.2.2 DIFFÉRENCES FINIES

Nous choisissons d'utiliser les différences finies d'ordre deux dans la discrétisation des équations de Navier-Stokes. Comme notre grille est périodique, l'arithmétique sur les indices est modulaire ; dans un souci de concision, nous écrirons cependant  $\mathbf{k} + \mathbf{l}$  pour  $\mathbf{k} + \mathbf{l} \bmod \mathbf{n}$ .

Si nous supposons que la fonction  $\phi$  est analytique, nous pouvons tronquer ses séries de Taylor à des points voisins pour obtenir, dans un développement consacré, une approximation au gradient :

$$\mathcal{D}_\mathbf{h}: (\Xi \mapsto \mathcal{V}) \mapsto (\Xi \mapsto \mathcal{V} \otimes \mathbb{R}^N)$$

$$(\mathcal{D}_\mathbf{h}\phi)_\mathbf{k} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\phi_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_\alpha} - \phi_{\mathbf{k}-\mathbf{e}_\alpha}}{2h_\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha \quad (3.20)$$

6. Nous désignons par maillage n'importe quels ensembles de points reliés entre eux selon leurs distances. Les triangulations de Delaunay sont les plus utilisées, après les maillages réguliers (ou grilles), qui sont caractérisés par leur topologies identiques aux grilles homogènes, dont la distance entre deux noeuds, pour un axe donné, est toujours la même.

7. Nous remarquons que le compte des dimension débute à 1 alors que celui des indices, dont l'ordre est significatif, commence à 0.

TABLE 3.1 – Méthodes de Runge-Kutta

Nom	Nom court	Type	Ordre	Étapes	Références
Runge-Kutta d'ordre 3	RK3	ex	3	3	[54, §11.4, eq. 11.15]
Runge-Kutta d'ordre 4	RK4	ex	4	4	[54, Appendix A, eq. A.7]
Euler	Euler	ex-di	1	1	[65, §1, eq. 1.7]
règle du trapèze à trois étapes	trapèze	ex-di	2	3	[3, §2.6][65, §3, eq. 3.2]
Koto P-stable, four-stage	Koto	ex-di	2	4	[65, §4, eq. 4.7]
L-stable Ascher–Ruuth–Spiteri (2,2,2)	ARS(2,2,2)	ex-di	2	3	[65, §4, eq. 4.6]
L-stable Ascher–Ruuth–Spiteri (4,4,3)	ARS(4,4,3)	ex-di	3	5	[87, tableau 7][3, §2.8]
ARK3(2)4L[2]SA	KARK3	ex-di	3	4	[62, Appendix C]
ARK4(3)6L[2]SA	KARK4	ex-di	4	6	[62, Appendix C]
ARK5(4)8L[2]SA	KARK5	ex-di	5	8	[62, Appendix C]
Gauss-Legendre d'ordre 2 <sup>a</sup>	GLe2	im	2	1	[91, §11.8.3][54, Appendix A, p. 355]
Gauss-Legendre d'ordre 4	GLe4	im	4	2	[91, §11.8.3][54, Appendix A, eq. A.4]
Gauss-Legendre d'ordre 6	GLe6	im	6	3	[54, Appendix A, eq. A.5]
Gauss-Lobatto IIIA d'ordre 2 <sup>b</sup>	GLo2	im	2	2	[91, §11.8.3][54, Appendix A, eq. A.6]
Gauss-Lobatto IIIA d'ordre 4	GLo4	im	4	3	[91, §11.8.3][54, Appendix A, eq. A.6]

<sup>a</sup>. Plus connu sous le nom de règle du point-milieu.

<sup>b</sup>. Plus connu sous le nom de règle du trapèze.

et, conjointement, une autre pour la divergence :

$$\mathfrak{D}_h : (\Xi \mapsto \mathcal{V} \otimes \mathbb{R}^N) \mapsto (\Xi \mapsto \mathcal{V})$$

$$(\mathfrak{D}_h \cdot \phi)_k = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\phi_{\mathbf{k}+e_\alpha} - \phi_{\mathbf{k}-e_\alpha}}{2h_\alpha} \cdot e_\alpha \quad (3.21)$$

Un procédé semblable nous donne une expression approchant le laplacien :

$$\mathfrak{L}_h : (\Xi \mapsto \mathcal{V}) \mapsto (\Xi \mapsto \mathcal{V})$$

$$(\mathfrak{L}_h \phi)_k = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\phi_{\mathbf{k}+e_\alpha} - 2\phi_{\mathbf{k}} + \phi_{\mathbf{k}-e_\alpha}}{h_\alpha^2} \quad (3.22)$$

Nous adoptons l'opérateur de convection (par un champ de vitesse  $\mathbf{u}$ ) discret utilisé dans [90, eq. 4.10] :

$$\mathfrak{C} : (\Xi \mapsto \mathbb{R}^N) \mapsto ((\Xi \mapsto \mathcal{V}) \mapsto (\Xi \mapsto \mathcal{V}))$$

$$\mathfrak{C}_h(\mathbf{u})\phi = \frac{1}{2} ((\mathfrak{D}_h \phi) \cdot \mathbf{u} + \mathfrak{D}_h \cdot (\phi \otimes \mathbf{u})), \quad (3.23)$$

c'est-à-dire

$$(\mathfrak{C}_h(\mathbf{u})\phi)_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N u_{\mathbf{k},\alpha} \frac{\phi_{\mathbf{k}+e_\alpha} - \phi_{\mathbf{k}-e_\alpha}}{2h_\alpha} + \frac{u_{\mathbf{k}+e_\alpha,\alpha} \phi_{\mathbf{k}+e_\alpha} - u_{\mathbf{k}-e_\alpha,\alpha} \phi_{\mathbf{k}-e_\alpha}}{2h_\alpha}.$$

Nous avons maintenant tous les opérateurs différentiels apparaissant dans les équations de Navier-Stokes, mais nous devons encore en calculer le terme source qui lui provient de l'interaction fluide-structure.

### 3.1.2.3 CALCULS SUR LA TIGE

**DÉRIVÉS DE CHAMPS VECTORIELS** Nous discrétisons la tige de la même manière qu'avec le fluide, mais nous devons traiter le cas où elle est ouverte. La dérivée le long de la tige, sur une grille  $(h, n, o)$ , est approximée par

$$(\mathfrak{D}\phi)_k = \frac{1}{2h} \begin{cases} -3\phi_0 + 4\phi_1 - \phi_2 & \text{si } k = 0 \\ \phi_{k+1} - \phi_{k-1} & \text{si } 0 < k < n-1 \\ 3\phi_{n-1} - 4\phi_{n-2} + \phi_{n-3} & \text{si } k = n-1 \end{cases}$$

dans le cas ouvert et par

$$(\mathfrak{D}\phi)_k = \frac{\phi_{k+1} - \phi_{k-1}}{2h}$$

(en utilisant implicitement l'arithmétique modulaire) dans le cas fermé.

**DÉRIVÉS DE CHAMPS DE MATRICES ORTHOGONALES** Les différences finies appliquées à une fonction vectorielle (dans le sens général : ses valeurs sont dans un espace vectoriel) donnent naturellement une autre fonction vectorielle, néanmoins, nous ne pouvons pas assumer qu'une dérivation approximative sur un groupe de Lie résultera en une fonction prenant ses valeurs dans son algèbre de Lie comme le ferait une dérivé exacte. Heureusement, nous nous intéressons seulement aux matrices orthogonales,  $SO(N)$  dont l'algèbre de Lie,  $\mathfrak{so}(N)$ , est le sous-espace des matrices antisymétriques sur lequel il est facile de projeter une matrice quelconque. La courbure approchée du trièdre de la tige sera donc

$$\underset{\diamond}{\Omega} = \text{asym}(\mathbf{R}^\dagger \mathfrak{D} \mathbf{R}) \quad (3.24)$$

**ÉQUATIONS DISCRÈTES** Une fois l'opérateur de dérivation  $\mathfrak{D}$  choisi, nous pouvons aisément transcrire les équations (2.41), (2.42), (2.61) et (2.69)

$$\begin{aligned} \underset{\diamond}{\omega} &= \mathbf{R}^\dagger \mathfrak{D} \mathbf{r} - \mathbf{E}_1, & \underset{\diamond}{\Omega} &= \text{asym}(\mathbf{R}^\dagger \mathfrak{D} \mathbf{R}), \\ \mathbf{l} &= \mathbf{R} \mathbf{B} \left( \underset{\diamond}{\omega} - \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \right), & \mathbf{L} &= \mathbf{R} \mathbf{A} \left( \underset{\diamond}{\Omega} - \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) \mathbf{R}^\dagger, \\ \mathbf{q} &= -\mathfrak{D} \mathbf{l}, & \mathbf{Q} &= -\mathfrak{D} \mathbf{L} - (\mathfrak{D} \mathbf{r}) \wedge \mathbf{l}. \end{aligned}$$

**MÉTHODE DE LIM ET PESKIN** Notre approche diffère légèrement de celle employée par Peskin et Lim [73, 74] qui se base sur un pas de  $h/2$  au lieu de  $h$  engendrant des valeurs à mi-chemin entre chaque pair de noeuds :

$$\left( \hat{\mathfrak{D}} \phi \right)_{k+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{h}$$

Cela nécessite de calculer  $\mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}}^\dagger$  dans l'équivalent de (3.24) par

$$\mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}}^\dagger = \sqrt{\mathbf{R}_{k+1}^\dagger \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k^\dagger}$$

Or, même si la racine carrée peut être calculée directement comme le montre Saccon [95, eq. A6] en trois dimensions<sup>8</sup> :

$$\sqrt{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{1} + \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tr}(\mathbf{\Lambda})}} \text{asym}(\mathbf{\Lambda}) + \frac{2}{(1 + \text{tr}(\mathbf{\Lambda})) \left( 2 + \sqrt{1 + \text{tr}(\mathbf{\Lambda})} \right)} \text{asym}(\mathbf{\Lambda})^2 \quad (3.25)$$

cela reste coûteux<sup>9</sup> (à cause des racines carrées) comparativement à doubler le nombre de points sur la tige. Néanmoins, cette formulation a l'avantage d'une plus grande localité (les force et couple appliqués sur un noeud sont calculés à partir de ce noeud et de ses deux voisins par rapport à quatre pour l'autre méthode d'ordre deux) et d'un meilleur couplage entre les noeuds. Par contre, dans le cas d'une tige ouverte, Lim [73] doit utiliser des noeuds fantômes aux extrémités, placés de façon à annuler les forces aux bouts.

8. Nous remarquons que cette formule permet de vérifier que  $\sqrt{\mathbf{\Lambda}^\dagger} = \sqrt{\mathbf{\Lambda}}^\dagger$ .

9. Néanmoins, la méthode est environ trois fois plus rapide que de calculer  $\exp\left(\frac{1}{2} \log(\mathbf{\Lambda})\right)$  (ce qui nécessite le calcul de fonctions trigonométriques) et approximativement soixante fois plus rapide que de prendre l'algorithme général présenté dans [6].

MÉTHODE ALTERNATIVE Nous pouvons modifier la méthode de Lim *et al.* afin d'éviter un surcroît de calcul en discrétisant  $\mathbf{R}$  à mi-point. Nous aurons donc besoin de faire la moyenne des vitesses angulaires des points voisins afin de faire tourner le repère mais comme cette vélocité est dans un espace vectoriel, cette moyenne est additive et nul besoin de racine carrée

$$\partial_t \mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}_k + \mathbf{W}_{k+1}) \mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}}.$$

Pour une tige ouverte, il est nécessaire de connaître en tout temps  $\mathbf{R}$  aux extrémités pour calculer les forces aux bouts.

Cette façon de faire a cependant le désavantage que la courbure doit être calculée à partir de voisins distant de  $h$

$$(\mathcal{D}\mathbf{R})_{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{R}_{k+\frac{3}{2}} - \mathbf{R}_{k-\frac{1}{2}}}{2h}.$$

Nous ne pouvons pas non plus décider de calculer la courbure aux noeuds entiers et de transmettre le couple au fluide à mi-noeuds car cela impliquerait de calculer  $\mathbf{R}$  au noeuds entiers, nous ne serions ainsi pas plus avancés.

TRAITEMENT DES EXTRÉMITÉS Si une tige ouverte est soumise à des forces et des couples  $(\check{\mathbf{l}}_a, \check{\mathbf{L}}_a)$  et  $(\check{\mathbf{l}}_b, \check{\mathbf{L}}_b)$  alors, en assumant le temps du développement l'existence de noeuds fantômes  $-\frac{1}{2}$  et  $n - \frac{3}{2}$ , nous écrivons

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 &= -\frac{\mathbf{l}_{\frac{1}{2}} - \mathbf{l}_{-\frac{1}{2}}}{h}, & \mathbf{Q}_0 &= -\frac{\mathbf{L}_{\frac{1}{2}} - \mathbf{L}_{-\frac{1}{2}}}{h} - \check{\boldsymbol{\tau}}_a \wedge \check{\mathbf{l}}_a, \\ \mathbf{q}_{n-1} &= -\frac{\mathbf{l}_{n-\frac{1}{2}} - \mathbf{l}_{n-\frac{3}{2}}}{h}, & \mathbf{Q}_{n-1} &= -\frac{\mathbf{L}_{n-\frac{1}{2}} - \mathbf{L}_{n-\frac{3}{2}}}{h} - \check{\boldsymbol{\tau}}_b \wedge \check{\mathbf{l}}_b \end{aligned}$$

où la dérivée de la ligne moyenne est contrainte de prendre les valeurs suivantes aux extrémités

$$\check{\boldsymbol{\tau}}_a = \mathbf{R}_0 \left( \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_0^\dagger \check{\mathbf{l}}_a + \mathbf{E}_1 + \hat{\boldsymbol{\omega}}_0 \right), \quad \check{\boldsymbol{\tau}}_b = \mathbf{R}_{n-1} \left( \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_{n-1}^\dagger \check{\mathbf{l}}_b + \mathbf{E}_1 + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{n-1} \right).$$

Si nous supposons aussi que

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{l}}_a &= -\frac{1}{2} \left( \mathbf{l}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{l}_{-\frac{1}{2}} \right), & \check{\mathbf{l}}_b &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{l}_{n-\frac{3}{2}} + \mathbf{l}_{n-\frac{1}{2}} \right), \\ \check{\mathbf{L}}_a &= -\frac{1}{2} \left( \mathbf{L}_{\frac{1}{2}} + \mathbf{L}_{-\frac{1}{2}} \right), & \check{\mathbf{L}}_b &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{L}_{n-\frac{3}{2}} + \mathbf{L}_{n-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{-\frac{1}{2}} &= -2\check{\mathbf{l}}_a - \mathbf{l}_{\frac{1}{2}}, & \mathbf{l}_{n-\frac{1}{2}} &= 2\check{\mathbf{l}}_b - \mathbf{l}_{n-\frac{3}{2}}, \\ \mathbf{L}_{-\frac{1}{2}} &= -2\check{\mathbf{L}}_a - \mathbf{L}_{\frac{1}{2}}, & \mathbf{L}_{n-\frac{1}{2}} &= 2\check{\mathbf{L}}_b - \mathbf{L}_{n-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 &= -\frac{2}{h} \left( \tilde{\mathbf{l}}_a + \mathbf{l}_{\frac{1}{2}} \right), & \mathbf{Q}_0 &= -\frac{2}{h} \left( \tilde{\mathbf{L}}_a + \mathbf{L}_{\frac{1}{2}} \right) + \check{\boldsymbol{\tau}}_a \wedge \tilde{\mathbf{l}}_a, \\ \mathbf{q}_{n-1} &= -\frac{2}{h} \left( \tilde{\mathbf{l}}_b - \mathbf{l}_{n-\frac{3}{2}} \right), & \mathbf{Q}_{n-1} &= -\frac{2}{h} \left( \tilde{\mathbf{L}}_b - \mathbf{L}_{n-\frac{3}{2}} \right) - \check{\boldsymbol{\tau}}_b \wedge \tilde{\mathbf{l}}_b. \end{aligned}$$

### 3.1.3 APPARIEMENT

#### 3.1.3.1 DELTA DE DIRAC DISCRET

**DÉVELOPPEMENT ANALOGIQUE** Dans le cas exact, l'ensemble des points sur la tige  $\gamma \subset \mathbb{R}^N$  est contenu dans le domaine  $\mathcal{F}$  du fluide et est paramétré sur un domaine  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\mathbf{r}: \mathcal{I} \mapsto \mathcal{F}$  – la ligne moyenne de la tige – telle que  $\gamma = \mathbf{r}(\mathcal{I})$ . L'opérateur d'interpolation  $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}^\dagger: (\mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}) \mapsto (\mathcal{I} \mapsto \mathcal{V})$  est une simple composition de la fonction à interpoler  $q: \mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}$  avec  $\mathbf{r}$

$$\mathcal{A}_{\mathbf{r}}^\dagger q = q \circ \mathbf{r}.$$

Pour obtenir son équivalent discret, nous devons premièrement pouvoir interpoler  $\tilde{q}: \Xi \mapsto \mathcal{V}: l \mapsto \tilde{q}_l = q(\mathbf{x}_l)$ , l'échantillonnage de  $q$  sur le maillage  $\{\mathbf{x}_l\}_{l \in \Xi}$ , par

$$(\mathfrak{J}\tilde{q})(\mathbf{x}) = \sum_{l \in \Xi} \lambda_l(\mathbf{x}) \tilde{q}_l \quad (3.26)$$

où  $\mathfrak{J}: (\Xi \mapsto \mathcal{V}) \mapsto (\mathcal{F} \mapsto \mathcal{V})$  est un opérateur défini tel que  $\mathfrak{J}\tilde{q}$  converge vers  $q$  à mesure que la grille sous-jacente est affinée. Cette propriété dépend à la fois des fonctions  $\{\lambda_l\}_{l \in \Xi}$  et du maillage  $\{\mathbf{x}_l\}_{l \in \Xi}$ . Deuxièmement, après avoir pris un échantillon  $\tilde{\mathbf{r}}: \Upsilon \mapsto \mathcal{F}$  de la ligne moyenne et en notant  $\mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger: (\Xi \mapsto \mathcal{V}) \mapsto (\Upsilon \mapsto \mathcal{V})$  l'opérateur discret d'interpolation – le pendant discret de  $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}^\dagger$  – nous posons simplement

$$\left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \tilde{q} \right)_k = (\mathfrak{J}\tilde{q})(\tilde{\mathbf{r}}_k) = \sum_{l \in \Xi} \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \tilde{q}_l. \quad (3.27)$$

Ainsi, nous avons, moyennant la connaissance de  $\lambda$ , une expression pour  $\mathfrak{A}^\dagger$ ; avant d'aller plus loin et de s'attarder à son adjoint, définissons les produits scalaires discrets définis sur les fonctions discrétisées sur  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{F}$

$$\left( \tilde{P}, \tilde{Q} \right)_{\tilde{\mathcal{L}}_{\Upsilon}^2(\mathcal{I})} = \sum_{k \in \Upsilon} \left( \tilde{P}_k, \tilde{Q}_k \right)_{\mathcal{V}} \varpi_k, \quad (3.28)$$

$$\left( \tilde{p}, \tilde{q} \right)_{\tilde{\mathcal{L}}_{\Xi}^2(\mathcal{F})} = \sum_{l \in \Xi} \left( \tilde{p}_l, \tilde{q}_l \right)_{\mathcal{V}} w_l \quad (3.29)$$

de telle sorte qu'ils approximent les produits scalaires sur  $\mathcal{L}^2(\mathcal{I})$  et  $\mathcal{L}^2(\mathcal{F})$  (remarquons que nous pouvons choisir  $w_l = \int_{\mathcal{F}} \lambda_l(\mathbf{x}) d^N v_{\mathbf{x}}$  si ces poids vérifient  $w_l > 0$ ). Maintenant, inspirons-nous de l'identité  $(\mathcal{A}_{\mathbf{r}}^\dagger q, P)_{\mathcal{L}^2(\mathcal{I})} = (q, \mathcal{A}_{\mathbf{r}} P)_{\mathcal{L}^2(\mathcal{F})}$  pour imposer

$$\sum_{k \in \Upsilon} \left( \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \tilde{q} \right)_k, \tilde{P}_k \right)_{\mathcal{V}} \varpi_k = \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \tilde{q}, \tilde{P} \right)_{\tilde{\mathcal{L}}_{\Upsilon}^2(\mathcal{I})} = \left( \tilde{q}, \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}} \tilde{P} \right)_{\tilde{\mathcal{L}}_{\Xi}^2(\mathcal{F})} = \sum_{l \in \Xi} \left( \tilde{q}_l, \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}} \tilde{P} \right)_l \right)_{\mathcal{V}} w_l.$$

Or, cela implique que

$$\sum_{k \in \Upsilon} \left( \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^{\dagger} \tilde{q} \right)_k, \tilde{P}_k \right)_{\mathcal{V}} \varpi_k = \sum_{k \in \Upsilon} \left( \left( \sum_{l \in \Xi} \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \tilde{q}_l \right), \tilde{P}_k \right)_{\mathcal{V}} \varpi_k = \sum_{l \in \Xi} \left( \tilde{q}_l, \left( \sum_{k \in \Upsilon} \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \tilde{P}_k \varpi_k \right) \right)_{\mathcal{V}}$$

d'où nous avons une expression pour l'opérateur d'étalement discret

$$\left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}} \tilde{P} \right)_l w_l = \sum_{k \in \Upsilon} \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \tilde{P}_k \varpi_k$$

et enfin

$$\left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}} \tilde{P} \right)_l = \sum_{k \in \Upsilon} \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \tilde{P}_k \frac{\varpi_k}{w_l}. \quad (3.30)$$

NOYAUX ET QUADRATURE Les termes  $\{\varpi_k\}_{k \in \Upsilon}$  et  $\{w_l\}_{l \in \Xi}$  sont effectivement des poids de quadrature, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{I}} P dX_1 &\simeq \sum_{k \in \Upsilon} \tilde{P}_k \varpi_k, \\ \int_{\mathcal{F}} q d^N v_{\mathbf{x}} &\simeq \sum_{l \in \Xi} \tilde{q}_l w_l. \end{aligned}$$

Revenons temporairement au cas exact. Pour un champ  $q: \mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}$ , nous avons par définition du delta de Dirac

$$q(\mathbf{x}) = \langle \delta(\mathbf{x} - \cdot), q \rangle_{\mathcal{F}} = \int_{\mathcal{F}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) d^N v_{\mathbf{y}}$$

cela ressemble à l'équation

$$q(\mathbf{x}) = (\mathcal{I}q)(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{F}} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) d^N v_{\mathbf{y}}$$

qui se vérifie, pour une fonction  $K: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$  particulière (un noyau reproducteur), dans certains espaces de fonctions. Cette formulation est moins générale que la précédente car nous passons d'une distribution à une fonction, par contre, nous délaissions l'invariance sous translation (car  $K$  est bivarié). À l'opérateur  $\mathcal{I}$  correspond, dans le cas discret, l'opérateur  $\mathfrak{J}: (\Xi \mapsto \mathcal{V}) \mapsto (\mathcal{F} \mapsto \mathcal{V})$  que nous écrivons maintenant en utilisant  $\kappa: \Xi \times \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$  – l'équivalent discret de  $K$  – et les poids de quadrature  $\{w_l\}_{l \in \Xi}$  pour trouver

$$(\mathfrak{J}q)(\mathbf{x}) = \sum_{l \in \Xi} \kappa_l(\mathbf{x}) \tilde{q}_l w_l \quad (3.31)$$

donc  $\kappa_l w_l = \lambda_l$  et

$$\begin{aligned} \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \tilde{q} \right)_k &= \sum_{l \in \Xi} \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \tilde{q}_l = \sum_{l \in \Xi} \kappa_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \tilde{q}_l w_l, \\ \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}} \tilde{P} \right)_l &= \sum_{k \in \Upsilon} \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \tilde{P}_k \frac{\varpi_k}{w_l} = \sum_{k \in \Upsilon} \kappa_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \tilde{P}_k \varpi_k. \end{aligned}$$

Ces dernières expressions sont plus proches de (2.73) et (2.74).

**DÉRIVÉES** Dans la formulation de la méthode de la frontière immergée généralisée, nous devons calculer l'interpolation du gradient et le gradient de l'étalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \text{asym} \left( \mathcal{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \nabla \mathbf{u} \right), \\ \mathbf{C} &= -\nabla \cdot \mathcal{A}_{\tilde{\mathbf{r}}} \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Comme nous disposons déjà d'un opérateur pour le gradient dans le fluide (3.20), nous pouvons prendre

$$\mathcal{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \nabla q \sim \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \mathfrak{D}_{\mathbf{h}} \right) \tilde{q} = \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger (\mathfrak{D}_{\mathbf{h}} \tilde{q}), \quad (3.32)$$

$$\nabla \mathcal{A}_{\tilde{\mathbf{r}}} P \sim (\mathfrak{D}_{\mathbf{h}} \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}) \tilde{P} = \mathfrak{D}_{\mathbf{h}} \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}} \tilde{P} \right) \quad (3.33)$$

mais ce n'est pas la seule possibilité, (3.31) et (3.27) nous amènent à considérer

$$\mathcal{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \nabla q \sim \left( \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \nabla \right) \tilde{q} \right)_k = \sum_{l \in \Xi} \tilde{q}_l \otimes \nabla \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k), \quad (3.34)$$

$$\nabla \mathcal{A}_{\tilde{\mathbf{r}}} P \sim \left( (\nabla \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}) \tilde{P} \right)_l = - \sum_{k \in \Upsilon} \tilde{P}_k \otimes \nabla \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \frac{\varpi_k}{w_l}. \quad (3.35)$$

Nous remarquons que

$$\left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \nabla \right) q \neq \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \mathfrak{D} \right) q$$

en général : il faudrait que  $(\nabla \lambda_l)(\mathbf{x}) = -(\mathfrak{D} \lambda_l)(\mathbf{x})_l \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \forall l \in \Xi$ .

**REPRODUCTION DES MOMENTS** Pour garantir que la transmission de la force et du couple de la tige au fluide soit balancée (c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de création ou d'annihilation de moment linéaire, angulaire ou d'énergie) il faut, pour n'importe quel  $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$  que [90, §5]

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \Xi} \lambda_l(\mathbf{x}) &= 1, \\ \sum_{l \in \Xi} \mathbf{x}_l \lambda_l(\mathbf{y}) &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

afin que, par analogie aux équations

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, d^N v_{\mathbf{x}} = - \int_{\mathcal{I}} \mathbf{q}(X_1) \, dX_1 \quad (3.36)$$

et

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, d^N v_{\mathbf{x}} = - \int_{\mathcal{I}} \mathbf{r}(X_1) \wedge \mathbf{q}(X_1) \, dX_1 \quad (3.37)$$

nous ayons

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \Xi} \tilde{\mathbf{b}}_l w_l &= - \sum_{l \in \Xi} (\mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}} \tilde{\mathbf{q}}_k)_l w_l \\ &= - \sum_{l \in \Xi} \left( \sum_{k \in \Upsilon} \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \tilde{\mathbf{q}}_k \frac{\varpi_k}{w_l} \right) w_l \\ &= - \sum_{k \in \Upsilon} \left( \sum_{l \in \Xi} \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \right) \tilde{\mathbf{q}}_k \varpi_k \\ &= - \sum_{k \in \Upsilon} \tilde{\mathbf{q}}_k \varpi_k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \Xi} \mathbf{x}_l \wedge \tilde{\mathbf{b}}_l w_l &= - \sum_{l \in \Xi} \mathbf{x}_l \wedge (\mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}} \tilde{\mathbf{q}}_k)_l w_l \\ &= - \sum_{l \in \Xi} \mathbf{x}_l \wedge \left( \sum_{k \in \Upsilon} \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \tilde{\mathbf{q}}_k \frac{\varpi_k}{w_l} \right) w_l \\ &= - \sum_{k \in \Upsilon} \left( \sum_{l \in \Xi} \mathbf{x}_l \lambda_l(\tilde{\mathbf{r}}_k) \right) \wedge \tilde{\mathbf{q}}_k \varpi_k \\ &= - \sum_{k \in \Upsilon} \tilde{\mathbf{r}}_k \wedge \tilde{\mathbf{q}}_k \varpi_k. \end{aligned}$$

Des conditions plus strictes pourrait être ajoutées, par exemple

$$\sum_{\substack{l \in \Xi \\ \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_l\| \leq \Delta}} \mathbf{x}_l^\mu \lambda_l(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^\mu, \quad \forall \mu \text{ t. q. } |\mu| \leq n \quad (3.38)$$

avec  $\mu$  un multi-indice (voir la définition A.1),  $n \in \mathbb{N}$  et  $\Delta \in ]0, \infty]$  fixés. Avec  $n$  nous contrôlerions la capacité de l'opérateur d'interpolation à bien reproduire des polynômes (de degré inférieur ou égal à  $n$ ) tandis qu'avec  $\Delta$  et une métrique appropriée, nous astreindrions les  $\{\lambda_l\}_{l \in \Xi}$  à une certaine localité.

**Définition 3.3.** Un ensemble de fonction  $\{\lambda_l\}_{l \in \Xi}$  sur une grille  $\{\mathbf{x}_l\}_{l \in \Xi}$  d'un domaine  $\mathcal{F}$  est dit *reproducteur* d'un espace vectoriel de fonctions  $\mathcal{V}$  si

$$\sum_{l \in \Xi} v(\mathbf{x}_l) \lambda_l(\mathbf{y}) = v(\mathbf{y}), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{F}.$$

**Définition 3.4.** Un ensemble de fonction  $\{\lambda_l\}_{l \in \Xi}$  sur une grille  $\{\mathbf{x}_l\}_{l \in \Xi}$  d'un domaine  $\mathcal{F}$  est dit

interpolatoire d'un ensemble de fonctions  $\mathcal{U}$  si

$$\sum_{l \in \Xi} u(\mathbf{x}_l) \lambda_l(\mathbf{x}_{l'}) = u(\mathbf{x}_{l'}), \quad \forall u \in \mathcal{U}, \forall l' \in \Xi.$$

*Remarque 3.5.* La condition

$$\lambda_l(\mathbf{x}_{l'}) = \delta_{l,l'}$$

est suffisante pour que  $\{\lambda_l\}_{l \in \Xi}$  soit interpolatoire pour toute fonction prenant valeur dans un espace vectoriel, mais elle n'est pas nécessaire pour que  $\{\lambda_l\}_{l \in \Xi}$  soit interpolatoire pour un espace de fonctions plus restreint puisqu'il suffit que  $\{\lambda_l\}_{l \in \Xi}$  soit reproducteur d'un espace vectoriel de fonctions  $\mathcal{V}$  pour être aussi interpolatoire sur ce même espace.

Il reste à trouver une expression convenable pour  $\lambda$ .

**POLYNÔME DE LAGRANGE** En une dimension, il est bien connu que les polynômes de Lagrange

$$\xi_k(x) = \prod_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq k}} \frac{x - t_l}{t_k - t_l}$$

satisfont à

$$\xi_k(t_l) = \delta_{k,l}.$$

De même, les polynômes de Lagrange trigonométriques (de période  $2\pi$ )

$$\tau_k(x) = \prod_{\substack{1 \leq l \leq n \\ l \neq k}} \frac{\sin\left(\frac{x-t_l}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t_k-t_l}{2}\right)}$$

vérifient

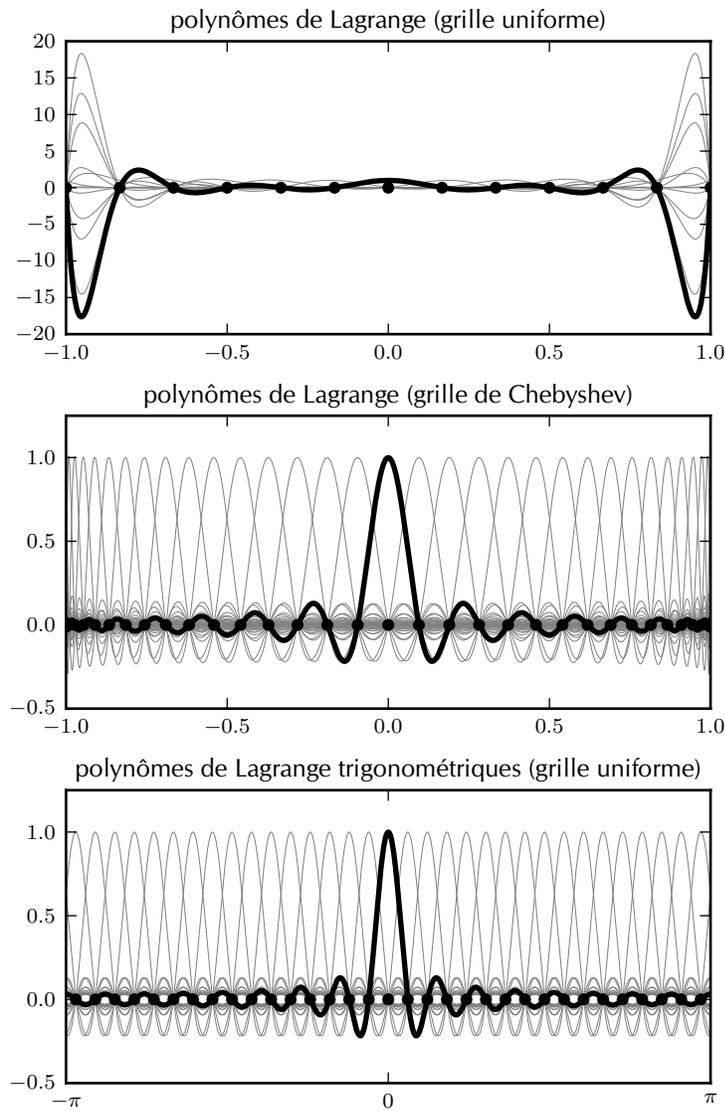
$$\tau_k(t_l) = \delta_{k,l}.$$

Nous avons donc des candidats pour  $\lambda$  autant dans le cas d'un intervalle fini que dans celui d'un intervalle périodique puisque le produit tensoriel de ces fonctions permet de les généraliser à  $N$  dimensions. De plus, ces possibilités sont tentantes puisqu'elles sont assurées de reproduire les polynômes (trigonométriques dans le cas des  $\tau$ ).

Nous pouvons voir à la figure 3.1 que les polynômes sur une grille uniforme dans le cas d'un intervalle fini ont un comportement particulièrement aberrant<sup>10</sup>, même pour un nombre réduit de noeuds, tandis que sur une grille construite à partir des noeuds de Chebyshev ou une grille uniforme d'un intervalle périodique, ils sont mieux localisés (bien qu'ils ne s'annulent jamais que ponctuellement). En fait, nous souhaitons que, dans la limite où la grille s'affine infiniment, nos deltas discrets tendent vers le delta de Dirac. Cependant, cette limite peut être observée sans qu'ils s'annulent à partir d'une certaine distance du centre, or, comme il deviendra évident avec l'observation des algorithmes 3 et 6, cela les rend très coûteux en calculs.

10. C'est le phénomène de Runge. Dans le cas qui nous intéresse, une telle délocalisation est catastrophique puisque nous souhaitons, justement, transmettre des forces *localisées* au fluide.

FIGURE 3.1 – Polynômes de Lagrange



### 3.1.3.2 DELTA POUR UNE GRILLE HOMOGENÈME SANS BORD

Nous cherchons donc un delta à support minimal qui, néanmoins, reproduit le plus fidèlement possible une large classe de fonction. De surcroît, en plus d'être continu, il serait souhaitable qu'il soit invariant sous translation :

$$\kappa_l(\mathbf{y}) = \tilde{\delta}(\mathbf{x}_l - \mathbf{y}),$$

ce que le choix d'une grille uniforme périodique rend possible.

Pour simplifier notre recherche, et puisque nous ne considérons que le cas d'un domaine rectangulaire (au sens qu'il est le produit cartésien d'intervalles de  $\mathbb{R}$ ) sans bord, nous assumons que le delta ait la forme

$$\tilde{\delta}_{\mathbf{h},c}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{ch_i} \phi\left(\frac{x_i}{ch_i}\right) \quad (3.39)$$

où  $c \in \mathbb{N}$  est un facteur de dilatation et  $\phi$  est le noyau du delta. Nous notons que  $\prod_{\alpha}^N h_{\alpha} = w_l$  (voir eq. 3.29 ou 3.31).

Afin de voir dans quelle mesure le delta multidimensionnel  $\tilde{\delta}_{\mathbf{h},c}$  préserve les propriétés de son noyau  $\phi$ , nous devons d'abord montrer l'égalité suivante

$$\sum_{\mathbf{k} \in \times_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha}} \prod_{\alpha=1}^N \eta_{\alpha}(k_{\alpha}) = \prod_{\alpha=1}^N \sum_{k_{\alpha} \in \Gamma_{\alpha}} \eta_{\alpha}(k_{\alpha})$$

où  $\times_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha}$  est le produit cartésien des ensembles  $\{\Gamma_{\alpha}\}_{\alpha=1}^N$  et  $\eta_{\alpha}: \Gamma_{\alpha} \mapsto \mathbb{R}$ . Cette égalité est trivialement vraie pour  $N = 1$ ; si nous supposons vraie pour  $N \in \mathbb{N}$  arbitraire alors vérifions que ce soit encore le cas pour  $N + 1$  :

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha=1}^{N+1} \sum_{k_{\alpha} \in \Gamma_{\alpha}} \eta_{\alpha}(k_{\alpha}) &= \left( \sum_{k_{N+1} \in \Gamma_{N+1}} \eta_{N+1}(k_{N+1}) \right) \left( \prod_{\alpha=1}^N \sum_{k_{\alpha} \in \Gamma_{\alpha}} \eta_{\alpha}(k_{\alpha}) \right) \\ &= \left( \sum_{k_{N+1} \in \Gamma_{N+1}} \eta_{N+1}(k_{N+1}) \right) \left( \sum_{\mathbf{k} \in \times_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha}} \prod_{\alpha=1}^N \eta_{\alpha}(k_{\alpha}) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \times_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha}} \left( \left( \sum_{k_{N+1} \in \Gamma_{N+1}} \eta_{N+1}(k_{N+1}) \right) \prod_{\alpha=1}^N \eta_{\alpha}(k_{\alpha}) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \times_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha}} \sum_{k_{N+1} \in \Gamma_{N+1}} \left( \eta_{N+1}(k_{N+1}) \prod_{\alpha=1}^N \eta_{\alpha}(k_{\alpha}) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \times_{\alpha=1}^{N+1} \Gamma_{\alpha}} \prod_{\alpha=1}^{N+1} \eta_{\alpha}(k_{\alpha}). \end{aligned}$$

**Lemme 3.6.** *Soit un noyau  $\phi$  qui reproduit un espace de fonction  $\mathcal{U}$  alors  $\tilde{\delta}_{\mathbf{h},c}$  défini par (3.39)*

reproduit l'ensemble des fonctions du type

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{\alpha=1}^N \tilde{u}_{\alpha} \left( \frac{x - o_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right), \quad \tilde{u}_{\alpha} \in \tilde{\mathcal{U}}_c$$

où

$$\tilde{\mathcal{U}}_c = \{u \in \mathcal{U} \mid u' : x \mapsto u(cx + p) \in \mathcal{U}, \forall p < c, p \in \mathbb{N}\}$$

si  $c > 0$ ,  $c \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* Pour simplifier les calculs, nous supposons que le support de  $\tilde{\delta}_{\mathbf{h},c}$  est plus petit que la grille car nous pouvons alors remplacer les sommes sur  $\Xi(\mathbf{n})$  par des sommes sur  $\mathbb{Z}^N$ . Nous rappelons que  $\mathbf{x}_{\mathbf{k}} = \mathbf{o} + \mathbf{k} * \mathbf{h} \Leftrightarrow x_{\mathbf{k},\alpha} = o_{\alpha} + k_{\alpha} h_{\alpha}$  (voir les définitions 3.2).

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N} f(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}) \tilde{\delta}_{\mathbf{h},c}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_{\mathbf{k}}) \prod_{\alpha=1}^N h_{\alpha} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N} \left( \prod_{\alpha=1}^N \tilde{u}_{\alpha} \left( \frac{x_{\mathbf{k},\alpha} - o_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right) \frac{1}{ch_{\alpha}} \phi \left( \frac{y_{\alpha} - x_{\mathbf{k},\alpha}}{ch_{\alpha}} \right) \right) \prod_{\alpha=1}^N h_{\alpha}$$

nous intervertissons la somme et le produit

$$= \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{c} \sum_{k_{\alpha} \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{\alpha}(k_{\alpha}) \phi \left( \frac{y_{\alpha} - o_{\alpha}}{ch_{\alpha}} - \frac{k_{\alpha}}{c} \right)$$

nous posons  $k = cl + m$

$$\begin{aligned} &= \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{c} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{m=0}^{c-1} \tilde{u}_{\alpha}(cl + m) \phi \left( \frac{y_{\alpha} - o_{\alpha}}{ch_{\alpha}} - \frac{cl + m}{c} \right) \\ &= \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{c} \sum_{m=0}^{c-1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{u}_{\alpha}(cl + m) \phi \left( \frac{y_{\alpha} - o_{\alpha} - mh_{\alpha}}{ch_{\alpha}} - l \right) \end{aligned}$$

nous utilisons la reproduction des  $u \in \mathcal{U}$  par le noyau

$$\begin{aligned} &= \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{c} \sum_{m=0}^{c-1} \tilde{u}_{\alpha} \left( c \left( \frac{y_{\alpha} - o_{\alpha} - mh_{\alpha}}{ch_{\alpha}} \right) + m \right) \\ &= \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{c} \sum_{m=0}^{c-1} \tilde{u}_{\alpha} \left( \frac{y_{\alpha} - o_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right) \\ &= \prod_{\alpha=1}^N \tilde{u}_{\alpha} \left( \frac{y_{\alpha} - o_{\alpha}}{h_{\alpha}} \right) \\ &= f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

□

*Remarque 3.7.* Il est évident que  $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}_c$ ,  $\forall c \in \mathbb{N}$  si  $\mathcal{U}$  est un ensemble de polynômes de degré maximal donné. Si par contre  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré maximal

$n$  alors

$$\tilde{\mathcal{U}}_c = \{x \mapsto 1\} \cup \bigcup_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{c} \rfloor} \{x \mapsto \cos(2\pi kx), x \mapsto \sin(2\pi kx)\}$$

c'est-à-dire que la grandeur de la famille de fonctions reproduites par  $\tilde{\delta}_{h,c}$  décroît à mesure que  $c$  augmente.

CRITÈRES POUR LES DELTAS Nous collectons nos critères minimaux pour  $\tilde{\delta}$  et les transposons à  $\phi$  pour obtenir :

$$\phi \text{ est continu,} \quad (3.40a)$$

$$\phi \text{ est à support compact,} \quad (3.40b)$$

$$\phi(k) = \delta_{k,0} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (3.40c)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x-k) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.40d)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k\phi(x-k) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.40e)$$

Ces conditions sont différentes de celle présentées par Peskin dans sa revue de 2002 [90, eq. 6.2-6.6] :

$$\phi \text{ est continu,} \quad (3.41a)$$

$$|x| \geq 2 \Rightarrow \phi(x) = 0, \quad (3.41b)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x-2k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x-2k-1) = \frac{1}{2}, \quad (3.41c)$$

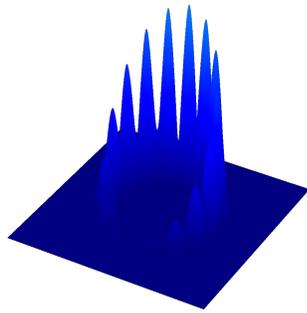
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (x-k)\phi(x-k) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.41d)$$

$$\exists C > 0 \text{ telle que } \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\phi(x-k))^2 = C \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.41e)$$

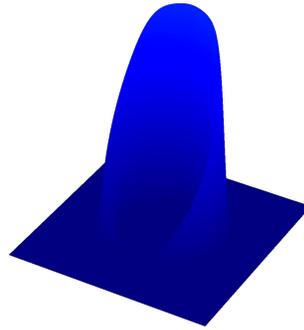
La condition de continuité (eq. (3.40a) et (3.41a)) permet que l'interpolation du champ de vitesse varie doucement lorsque la tige se déplace. La différence entre (3.40b) et (3.41b) s'explique par la volonté de Peskin de trouver le plus « petit » noyau . La séparation de la condition de normalisation (ou de reproduction des fonctions constantes) en parts paire et impaire (i.e. : (3.41c)) empêche une oscillation d'un point à ses voisins dans la vitesse du fluide. De notre côté, une transformée de

FIGURE 3.2 – Étalement

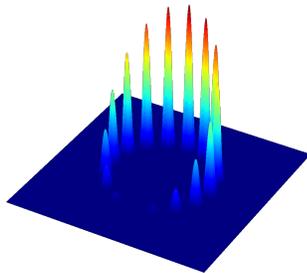
$$\phi_{s,4} (n_F = 32, n_T = 16)$$



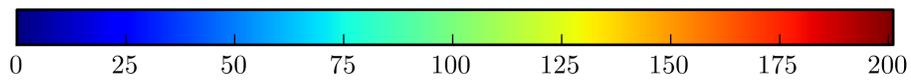
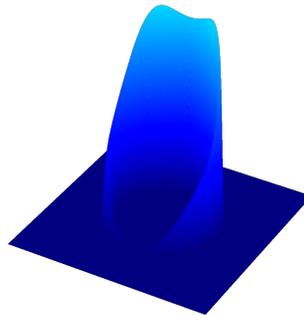
$$\phi_{s,4} (n_F = 32, n_T = 256)$$



$$\phi_{spl,2} (n_F = 32, n_T = 16)$$



$$\phi_{spl,2} (n_F = 32, n_T = 256)$$



Étalement de la fonction  $P(X_1) = 1 + \sin(X_1)$  pour la tige  $\mathbf{r}(X_1) = \cos(X_1) \mathbf{e}_1 + \sin(X_1) \mathbf{e}_2$ .

Fourier nous donne l'occasion d'annuler aisément ce mode (voir la section 3.2.2). La capacité de reproduire un polynôme de degré un est assurée dans les deux cas (eq. (3.40d) et (3.40e), (3.41c) et (3.41d)), d'ailleurs (3.40d) est une conséquence de (3.41c). La condition (3.41e) nous assure que (en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x-k) \phi(x'-k) \leq C \quad \forall x, x' \in \mathbb{R} \quad (3.42)$$

ce qui tend à montrer que l'interaction entre deux points est plus forte lorsqu'ils sont superposés<sup>11</sup>. Enfin, Peskin n'astreint pas le noyau à être interpolatoire, ce qui serait d'ailleurs impossible étant donné la condition (3.41c). Remarquons qu'un noyau pouvant reproduire les monômes jusqu'à un certain degré sera interpolatoire pour les polynômes de même degré, mais ne le sera pas en général, à moins qu'une condition supplémentaire, comme (3.40c), ne soit exigée. Notons de plus qu'un  $\tilde{\delta}$  issu des considérations de la section 3.1.3.1 a, sous réserve d'en choisir un bien conditionné, son amplitude maximale à son origine ( $\mathbf{x}_l$  pour  $\kappa_l$ ), nous aurons donc aussi que l'interaction est plus forte lorsque deux points coïncident.

### 3.1.3.3 ASSORTIMENT DE NOYAUX

Avant que les conditions (3.41) ci-haut ne soient connues dans leur ensemble, la fonction

$$\phi_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + \cos(\frac{\pi x}{2})) & \text{si } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

était souvent utilisée. Elle l'est encore puisqu'elle approxime très bien la fonction usuelle

$$\phi_{s,4}(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} (3 - 2|x| + \sqrt{4(1-|x|)|x|+1}) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{8} (5 - 2|x| - \sqrt{4(3-|x|)|x|-7}) & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.43)$$

qui, elle, est construite en appliquant uns à uns les critères (3.41) (voir [90, section 6]). Si nous sommes prêt à affaiblir la condition (3.41b), il est possible d'obtenir une fonction  $\phi_{s,6}$  qui satisfait

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (x-k)^2 \phi_{s,6}(x-k) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.44)$$

comme le montre Stockie [104, section 2.3.1], ce noyau est ainsi capable de reproduire exactement les fonctions quadratiques au prix d'un élargissement, et donc d'un coût plus élevé en calcul.

**TENTATIVES D'AMÉLIORATION** Wang et Liu dans leur formulation de méthode de la frontière immergée étendue (EIBM : extended immersed boundary method) [117] remplacent le noyau  $\phi_{s,4}$  défini

<sup>11</sup>. Cette condition semble avoir un autre effet : les travaux de Bringley et Peskin relatés dans [15] suggèrent que le rayon effectif d'un delta de Dirac discret est plus petit pour les noyaux interpolateurs qui ne répondent pas à la cette condition (en particulier  $\phi_{i,4}$  et  $\phi_{i,6}$ , voir le tableau 3.II), que pour les noyaux qui la satisfont (en particulier  $\phi_{s,4}$  et  $\phi_{s,6}$ ). Nous notons aussi que (3.42) n'a pas d'équivalent continu.

à l'équation (3.43) par les noyaux utilisés dans la méthode à particule reproductrice de moment (RKPM : reproducing kernel particle method). Cependant, c'est le critère de moments continus qui est retenu, c'est-à-dire qu'au lieu d'imposer

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^m \phi(x - k) = x^m \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N} \text{ t.q. } m < n \quad (3.45)$$

pour un  $n \in \mathbb{N}$  choisi (cf. (3.38)), Wang et Liu requièrent

$$\int_{\mathbb{R}} y^m \phi(x - y) dy = x^m \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.46)$$

ce qui ne sied pas à notre problème ; surtout que  $\phi_{w1,4}$ , une fonction proposée par eux, ne répond pas au critère – fondamental – (3.40d).

Pour leur part, Yang *et al.* [126] proposent d'adoucir un noyau  $\phi$  par une intégration

$$\phi_*(r) = \int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \phi(r') dr'$$

ce qui a pour effets d'ajouter une dérivée continue à la fonction originale et, en contrepartie, d'en élargir le support.

Il existe aussi un homologue à trois points  $\phi_{s,3}$  au noyau usuel  $\phi_{s,4}$  qui est fondé sur les mêmes conditions (3.41) à l'exception de (3.41c) qui est remplacée par (3.40d).

**SPLINE NODALE** L'approche exposée dans la partie 3.1.3.1 n'a pas de réalisation publiée connue de l'auteur, et le problème de trouver un noyau à support compact n'a pas été abordé. Toutefois, les splines nodaux [28, 116] semblent idéaux : ce sont des polynômes par morceaux, interpolatoires et reproducteurs de polynômes. Ils sont donc, une fois leur formule explicitée, faciles à évaluer et satisfont toutes les contraintes 3.40 en plus de se plier, si nécessaire, à des contraintes plus sévères pour le degré des polynômes reproduits et le nombre de dérivés continus. De surcroît, et bien que ce ne soit pas utilisé ici, les splines nodales peuvent être adaptées à des grilles inhomogènes. Malgré cela, nous nous contenterons du spline nodal quadratique  $\phi_{spl,2}$  tel qu'explicité dans [31].

Nous remarquons cependant que des noyaux interpolatoires et reproducteurs ont déjà été proposés par Bringley et Peskin [15], mais ceux-ci n'ont pas de dérivées continues.

**CHOIX DES POIDS DE QUADRATURE** Le choix d'un domaine périodique pour le fluide nous a permis de simplifier l'expression du noyau  $\kappa$  ainsi que celle des poids de quadrature

$$w_l = \prod_{\alpha}^N h_{\alpha}$$

qui sont alors indépendant de la position dans la grille. La quadrature sur une tige fermée peut être choisie pareillement

$$\varpi_k = h.$$

Ces choix sont ceux de la méthode du trapèze qui, pour des fonctions périodiques lisses, est superconvergente (voir [30, §5.1.4]); c'est-à-dire que son erreur diminue plus vite que n'importe quel puissance<sup>12</sup> or l'interpolation, nous le verrons, a une erreur qui diminue comme une puissance. Donc, il est raisonnable de croire que pour l'étalement l'erreur due à la quadrature sera dominée par celle issue des fonctions d'interpolation.

Par contre, nous devons considérer des tiges ouvertes pour lesquelles la méthode du trapèze correspond à

$$\varpi_k = \begin{cases} \frac{1}{2}h & \text{si } k \in \{0, n-1\} \\ h & \text{sinon} \end{cases}$$

or cette méthode a une erreur qui diminue avec le carré de  $h$ . Si nous souhaitons obtenir un ordre de convergence plus élevé, nous utiliserons la méthode de Gregory [30, §5.2.1][31, eq. 1.4], qui corrige la méthode du trapèze en tentant d'annuler les premiers termes de l'expansion de son erreur par des approximations des dérivées aux bouts<sup>13</sup>. Il suffira donc d'accorder le choix d'un noyau avec les poids de quadrature afin de conserver, pour l'étalement, l'ordre de convergence du premier. Nous remarquons cependant que les différences finies qui entrent dans la méthode de Gregory sont nécessairement unilatérales et sont donc potentiellement instables sous perturbations<sup>14</sup>; nous ne croyons donc pas qu'il soit toujours avantageux d'aller chercher l'ordre de convergence le plus élevé puisque dans la simulation finale, un haut degré de continuité des différentes variables n'est pas assuré. Mais surtout, au-delà d'un ordre de convergence de 9, la méthode génère – pour des noeuds équidistants – des poids de quadratures négatifs pour certains noeuds, ainsi, bien qu'elle approxime encore son équivalente continue, (3.28) n'est plus une norme discrète.

**RÉCAPITULATIF** Bien que nous ayons la possibilité d'utiliser de nombreux noyaux dont l'ordre d'interpolation est élevé, nous rappelons que nous interpolons le champ de vitesse du fluide, lequel n'est pas lisse là où est la tige immergée. De plus, comme pour cette raison un ordre plus élevé serait inutile, la discrétisation spatiale est basée sur les différences finies d'ordre deux. Par conséquent, l'ordre de la méthode dans son ensemble est limité indépendamment du noyau choisi, mais certains noyaux n'en peuvent pas moins être plus précis et produire des sauts plus francs, car il ne faut pas oublier que le noyau sert aussi à l'étalement.

Le tableau 3.II résume les caractéristiques importantes des noyaux entrevus jusqu'ici alors que les figures 3.3 et 3.4 nous les donnent à voir, les figures 3.5 et 3.6 nous permettent de constater la sujétion des différents noyaux à la contrainte (3.41e), enfin l'annexe D les détaille.

12. Cela s'explique facilement : la somme  $\sum_{l \in \Xi} u_l w_l$  correspond l'évaluation, par une transformée de Fourier discrète, de l'intégrale; or les méthodes spectrales convergent exponentiellement : plus rapidement que n'importe quelle puissance (pour les fonctions lisses).

13. La règle de Simpson est exclue car elle nécessite un nombre pair de points. Les formules de Newton-Cotes ne sont pas applicables puisqu'elles prescrivent les noeuds.

14. Une grille raffinée aux extrémités, sur un nombre de points proportionnel à l'ordre de convergence, pourrait, peut-être, mitiger ce problème.

FIGURE 3.3 – Noyaux

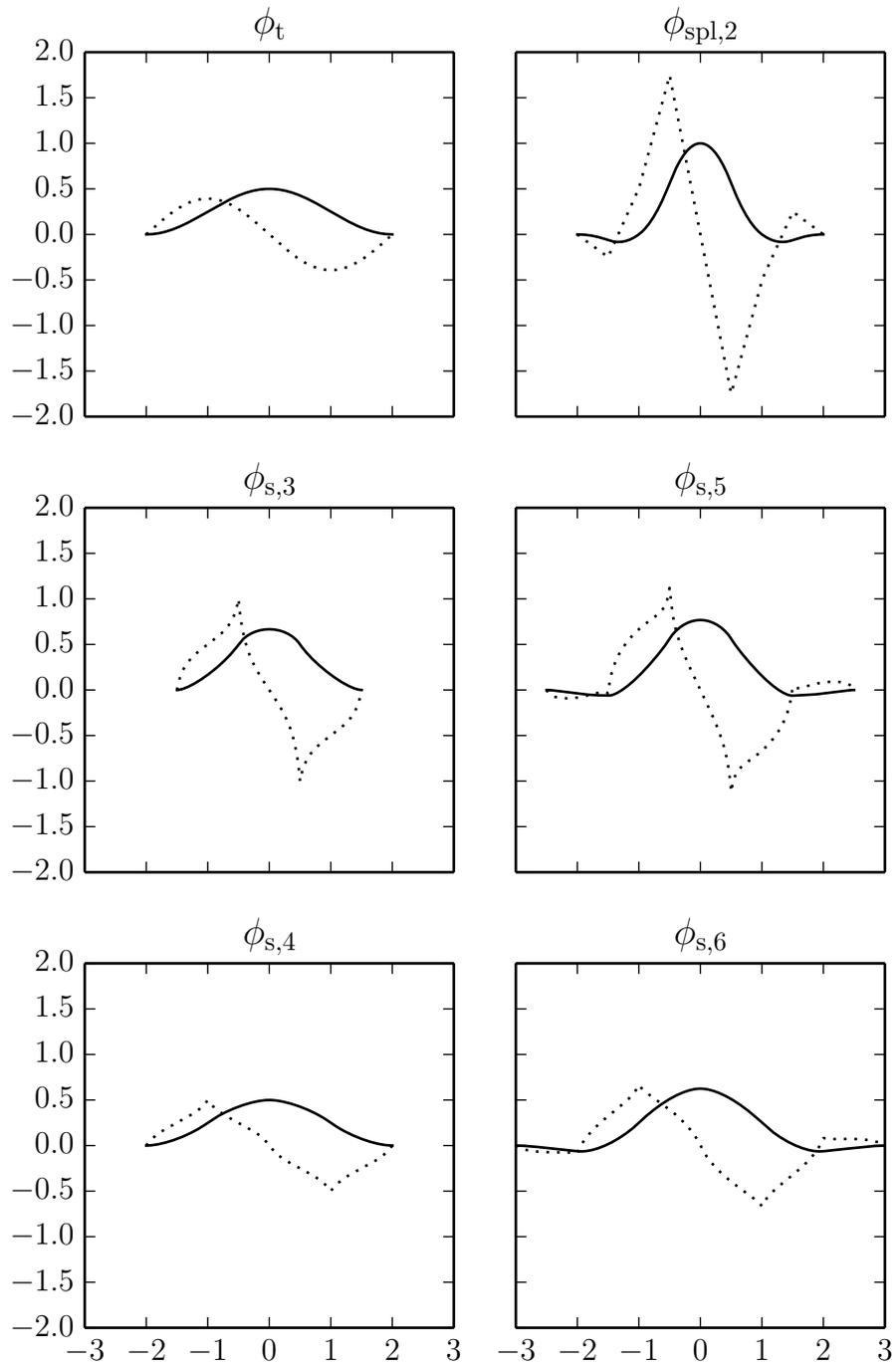


FIGURE 3.4 – Noyaux (suite de la figure 3.3)

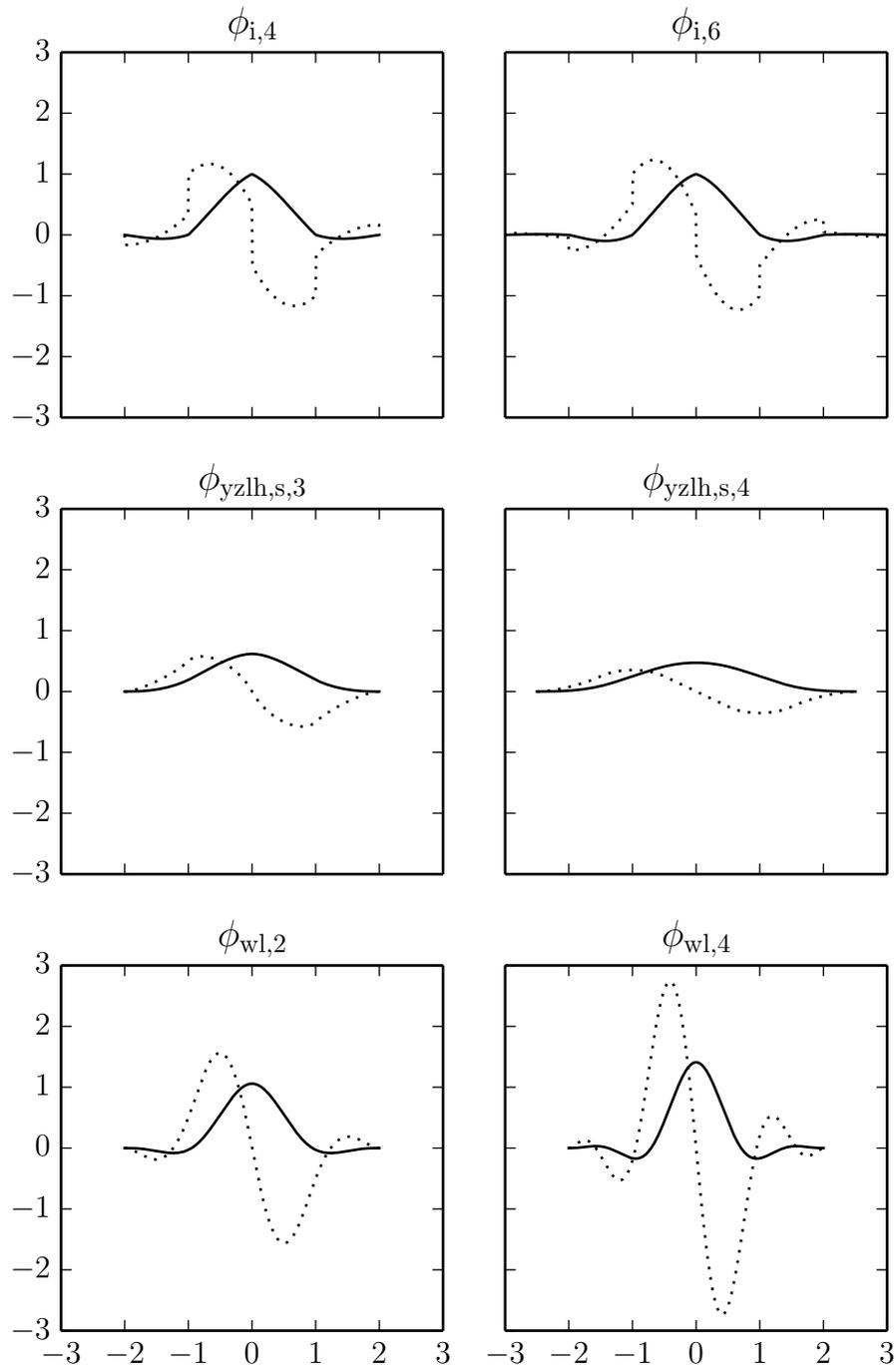
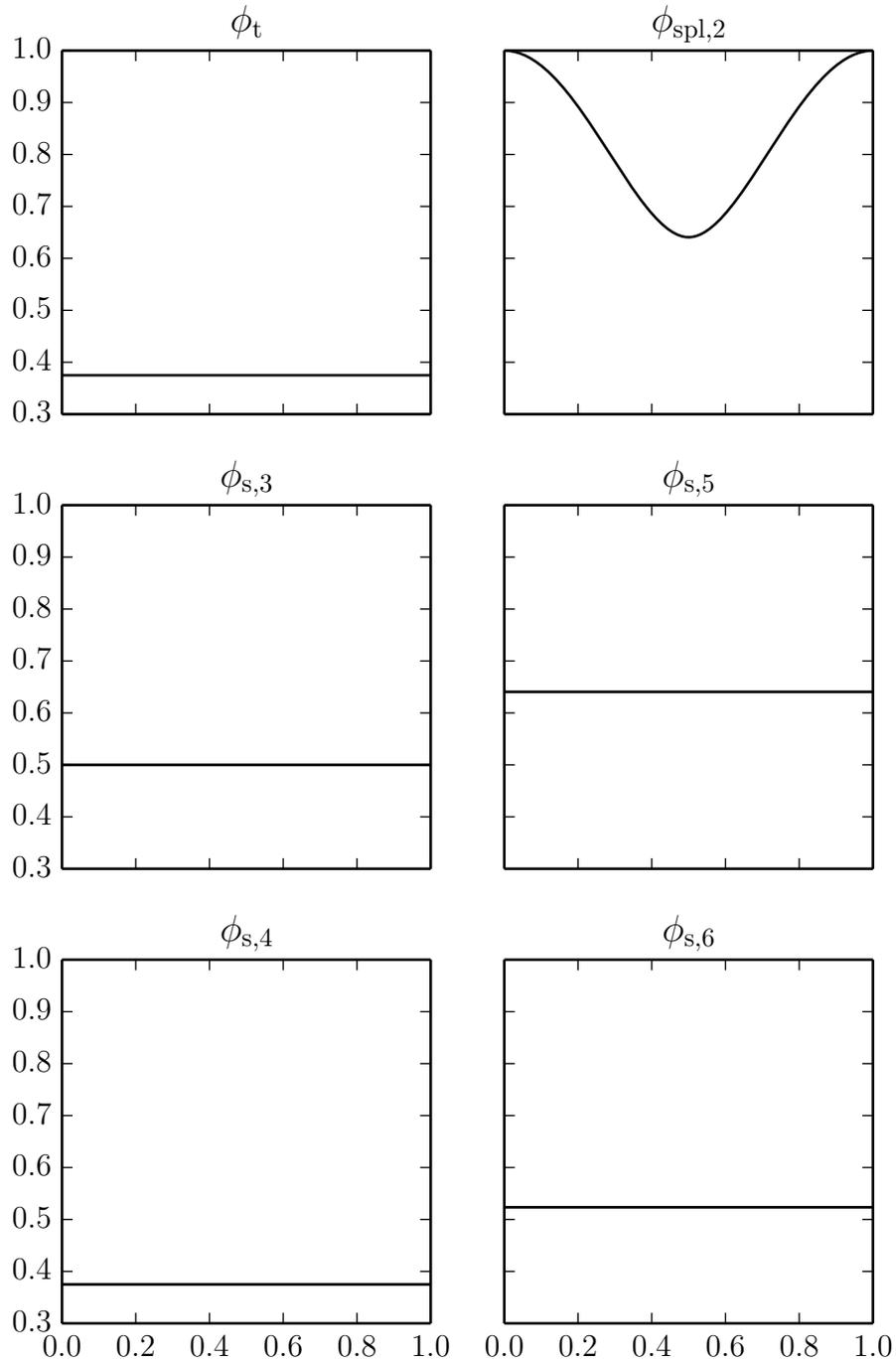
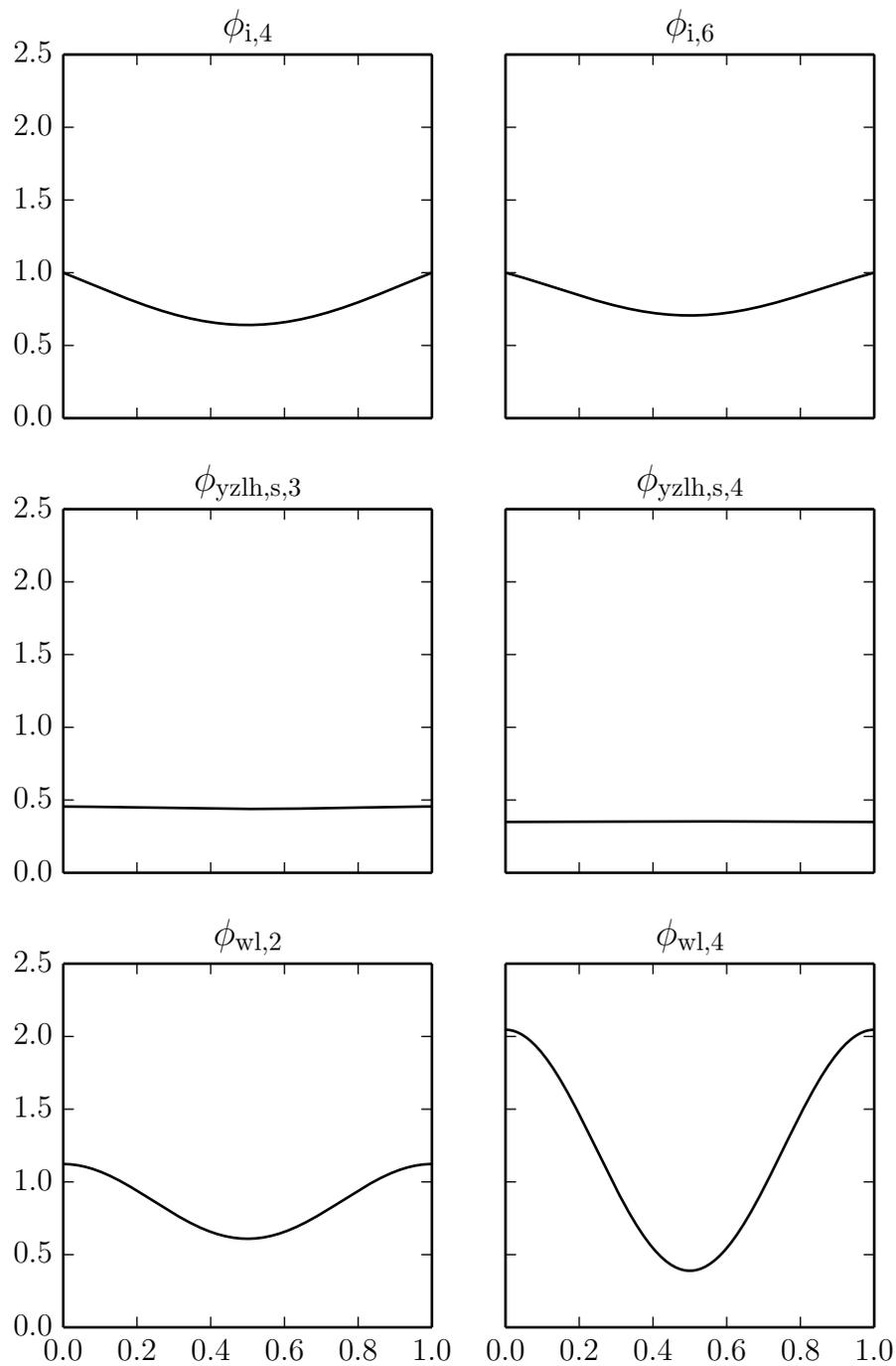


FIGURE 3.5 – Test de l'invariance des noyaux



Tracé de  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\phi(x-k))^2$  pour  $x \in [0, 1]$

FIGURE 3.6 – Test de l’invariance des noyaux (suite de la figure 3.5)



Tracé de  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\phi(x - k))^2$  pour  $x \in [0, 1]$

TABLE 3.II – Principales propriétés des noyaux

	largeur	continuité	moments	modèle	références
$\phi_{s,3}$	3	1	2	-	[92, eq. 22][126, eq. 16][15, eq. A.4]
$\phi_{s,5}$	5	1	4	-	[15, eq. A.5]
$\phi_{s,4}$	4	1	2	-	[90, eq. 6.27][126, eq. 17][15, eq. A.6]
$\phi_{s,6}$	6	1	4	-	[104, eq. 2.18][15, eq. A.7]
$\phi_t$	4	1	1	-	[90, eq. 6.28][126, eq. 15]
$\phi_{spl,2}$	4	1	3	-	[115, eq. 4.10]
$\phi_{i,2}$	2	0	2	-	[126, eq. 14][15, eq. A.1]
$\phi_{i,4}$	4	0	4	-	[15, eq. A.2]
$\phi_{i,6}$	6	0	6	-	[15, eq. A.3]
$\phi_{wl,0}$	4	2	1	-	[117, eq. 25]
$\phi_{wl,2}$	4	2	2	$\phi_{wl,0}$	[117, eq. 25]
$\phi_{wl,4}$	4	2	0	$\phi_{wl,0}$	[117, eq. 25-26]
$\phi_{yzlh,i,2}$	3	1	1	$\phi_{i,2}$	[126, eq. 18]
$\phi_{yzlh,t}$	5	2	1	$\phi_t$	[126, eq. 19]
$\phi_{yzlh,s,3}$	4	2	2	$\phi_{s,3}$	[126, eq. 20]
$\phi_{yzlh,s,4}$	5	2	2	$\phi_{s,4}$	[126, eq. 21]

Pour la continuité, nous comptons le nombre de dérivées continues (à partir de zéro). Pour les moments nous comptons le nombre de moments correctement reproduits, ce qui équivaut à  $d + 1$  où  $d$  est le degré maximal des polynômes reproduits.

## 3.2 MÉTHODES DE RÉOLUTION

### 3.2.1 RÉOLUTION DES ÉQUATIONS D'ADVECTION

#### 3.2.1.1 DÉPLACEMENT DE LA TIGE

Tel que vu à la section 3.1.1, la ligne moyenne  $\mathbf{r}$  et l'orientation  $\mathbf{R}$  de la tige obéissent aux équations différentielles :

$$\partial_t \mathbf{r}(X_1, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(X_1, t), t), \quad \partial_t \mathbf{R}(X_1, t) = \text{asym}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}(X_1, t), t)) \mathbf{R}(X_1, t) \quad (3.47)$$

La forme de ces équations nous amène à chercher en premier lieu une solution pour  $\mathbf{r}$ , nous reprenons les éléments pertinents des équations (3.19)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_{n,i} &= \mathbf{r}_n + h_n \sum_{j=1}^{n_c} a_{i,j}^r f_{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{y}}_{n,j}, \tilde{t}_{n,j}) \quad i = 1, \dots, n_c, \\ \mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{r}_n + h_n \sum_{i=1}^{n_c} b_i^r f_{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{y}}_{n,i}, \tilde{t}_{n,i}) \end{aligned}$$

en nous rappelant notre choix de méthodes de Runge-Kutta diagonalement implicites, c'est-à-dire que  $j > i \Rightarrow a_{i,j}^r = 0$ .

Il nous faut résoudre  $n_c$  systèmes  $\mathfrak{N}_{n,i}(\tilde{\mathbf{r}}_{n,i}) = \mathbf{0}$  avec

$$\mathfrak{N}_{n,i}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} - \mathbf{r}_n - h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}^r \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{n,j}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{n,j} - h_n a_{i,i}^r \mathfrak{A}_{\mathbf{q}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{n,i} = \mathbf{0}$$

pour  $\{\tilde{\mathbf{r}}_{n,i}\}_{i=1}^{n_c}$ . En vue de résoudre ce problème avec la méthode de Newton, nous prenons la dérivée de  $\mathfrak{N}_i$  :

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{\mathbf{q}} \mathfrak{N}_{n,i}(\mathbf{q})) \mathbf{d} &= (\partial_\lambda \mathfrak{N}_{n,i}(\mathbf{q} + \lambda \mathbf{d}))|_{\lambda=0} \\ &= \left( \partial_\lambda \left( \mathbf{q} + \lambda \mathbf{d} - \mathbf{r}_n - h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}^r \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{n,j}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{n,j} - h_n a_{i,i}^r \mathfrak{A}_{\mathbf{q} + \lambda \mathbf{d}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{n,i} \right) \right) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \mathbf{d} - h_n a_{i,i}^r (\mathcal{D}_{\mathbf{q}} \mathfrak{A}_{\mathbf{q}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{n,i}) \mathbf{d} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} ((\mathcal{D}_{\mathbf{q}} \mathfrak{A}_{\mathbf{q}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{n,j}) \mathbf{d})_k &= \left( \partial_\lambda \left( \mathfrak{A}_{\mathbf{q} + \lambda \mathbf{d}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{n,j} \right)_k \right) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \left( \partial_\lambda \sum_{l \in \Xi} \kappa_l(\mathbf{q}_k + \lambda \mathbf{d}_k) \tilde{\mathbf{u}}_{n,j,l} \right) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \left( \sum_{l \in \Xi} (\nabla \kappa_l(\mathbf{q}_k + \lambda \mathbf{d}_k)) \cdot \mathbf{d}_k \tilde{\mathbf{u}}_{n,j,l} \right) \Big|_{\lambda=0} \\ &= \sum_{l \in \Xi} (\nabla \kappa_l(\mathbf{q}_k)) \cdot \mathbf{d}_k \tilde{\mathbf{u}}_{n,j,l} \\ &= \left( \sum_{l \in \Xi} \tilde{\mathbf{u}}_{n,j,l} \otimes \nabla \kappa_l(\mathbf{q}_k) \right) \mathbf{d}_k. \end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$((\mathcal{D}_{\mathbf{q}} \mathfrak{A}_{\mathbf{q}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{n,j}) \mathbf{d})_k = ((\mathfrak{A}_{\mathbf{q}}^\dagger \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_{n,i})_k \mathbf{d}_k$$

(cf. eq. 3.34) donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{\mathbf{q}} \mathfrak{N}_{n,i}(\mathbf{q})) \mathbf{d} &= \mathbf{d} - h_n a_{i,i}^r \left( \sum_{l \in \Xi} \tilde{\mathbf{u}}_{n,i,l} \otimes \nabla \kappa_l(\mathbf{q}) \right) \mathbf{d} \\ &= \mathbf{d} - h_n a_{i,i}^r ((\mathfrak{A}_{\mathbf{q}}^\dagger \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_{n,i}) \mathbf{d}, \end{aligned}$$

ainsi, les itérés de Newton seront

$$\left( \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{r}}_{n,i}} \mathfrak{N}_{n,i} \left( \tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^{(m)} \right) \right) \left( \tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^{(m)} - \tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^{(m+1)} \right) = \mathfrak{N}_{n,i} \left( \tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^{(m)} \right)$$

ou, plus précisément

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^{(m)} - \tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^{(m+1)} - h_n a_{i,i}^{\mathbf{r}} \left( \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^{(m)}}^\dagger \nabla \right) \tilde{\mathbf{u}}_{n,i} \right) \left( \tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^{(m)} - \tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^{(m+1)} \right) \\ = \tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^{(m)} - \mathbf{r}_n - h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}^{\mathbf{r}} \left( \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{n,j}^{(\infty)}}^\dagger \nabla \right) \tilde{\mathbf{u}}_{n,j} \right) - h_n a_{i,i}^{\mathbf{r}} \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^{(m)}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{n,i} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}^{\mathbf{r}} \left( \sum_{l \in \Xi} \kappa_l \left( \tilde{\mathbf{r}}_{n,j,k}^{(\infty)} \right) \tilde{\mathbf{u}}_{n,j,l} \right) + h_n a_{i,i}^{\mathbf{r}} \left( \sum_{l \in \Xi} \left( \kappa_l \left( \tilde{\mathbf{r}}_{n,i,k}^{(m)} \right) - \nabla \kappa_l \left( \tilde{\mathbf{r}}_{n,i,k}^{(m)} \right) \cdot \tilde{\mathbf{r}}_{n,i,k}^{(m)} \right) \tilde{\mathbf{u}}_{n,i,l} \right) \\ = \tilde{\mathbf{r}}_{n,i,k}^{(m+1)} - h_n a_{i,i}^{\mathbf{r}} \left( \sum_{l \in \Xi} \tilde{\mathbf{u}}_{n,i,l} \otimes \nabla \kappa_l \left( \tilde{\mathbf{r}}_{n,i,k}^{(m)} \right) \right) \tilde{\mathbf{r}}_{n,i,k}^{(m+1)}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de résoudre un système indépendant pour chaque sous-étape  $i$  et chaque noeud  $k$  sur la tige ayant la forme

$$(\mathbf{I} - h_n \mathbf{M}) \mathbf{q}^{(m+1)} = \mathfrak{G} \left( \mathbf{q}^{(m)} \right)$$

il est donc attendu que ces systèmes aient chacun une solution si  $h_n$ , le pas de temps, est suffisamment petit.

**ROTATION DU REPÈRE** Nous nous intéressons maintenant à la cinétique du repère sur la tige qui obéit à l'équation  $\partial_t \mathbf{R} = \mathbf{W} \mathbf{R}$  avec  $\mathbf{W} = \text{asym} \left( \mathcal{A}_{\mathbf{r}}^\dagger \nabla \mathbf{u} \right)$  qui, lorsque discrétisé comme à la section 3.1.1.3 donne

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Theta}_{n,i} &= h_n \sum_{j=1}^i a_{i,j}^{\mathbf{R}} \Phi_{n,j} \\ \Phi_{n,i} &= \text{dexp}_{\tilde{\Theta}_{n,i}}^{-1} \text{asym} \left( \tilde{\mathbf{W}}_{n,i} \right) \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, n_c, \quad (3.48a)$$

$$\Theta_{n+1} = h_n \sum_{i=1}^{n_c} b_i^{\mathbf{R}} \Phi_{n,i}, \quad (3.48b)$$

$$\mathbf{R}_{n+1} = \exp(\Theta_{n+1}) \mathbf{R}_n$$

avec

$$\tilde{\mathbf{W}}_{n,i} = \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^\dagger}^\dagger \nabla \right) \tilde{\mathbf{u}}_{n,i} \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{W}}_{n,i} = \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{n,i}^\dagger}^\dagger \mathfrak{D} \right) \tilde{\mathbf{u}}_{n,i}.$$

En deux dimensions, nous nous rappelons que  $\text{dexp}_A^{-1} B = B$  ce qui rend ces équations explicites ; par contre, en dimensions supérieures, ce sont des équations non-linéaires que nous devons résoudre pour les  $\left\{ \tilde{\Theta}_{n,i} \right\}_{i=1}^{n_c}$  à l'aide, encore une fois, de la méthode de Newton. Pour ce faire, définissons

$$\mathfrak{M}_{n,i}(\Upsilon) = \Upsilon - h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}^{\mathbf{R}} \text{dexp}_{\tilde{\Theta}_{n,j}}^{-1} \left( \tilde{\mathbf{W}}_{n,j} \right) - h_n a_{i,i}^{\mathbf{R}} \text{dexp}_{\Upsilon}^{-1} \left( \tilde{\mathbf{W}}_{n,i} \right) = \mathbf{0}$$

et prenons sa dérivée

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_{\mathbf{r}} \mathfrak{M}_{n,i}(\mathbf{r})) \Delta &= (\partial_\lambda \mathfrak{M}_{n,i}(\mathbf{r} + \lambda \Delta))|_{\lambda=0} \\
&= \left( \partial_\lambda \left( \mathbf{r} + \lambda \Delta - h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}^{\mathbf{R}} \operatorname{dexp}_{\mathbf{e}_{n,j}}^{-1}(\tilde{\mathbf{W}}_{n,j}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - h_n a_{i,i}^{\mathbf{R}} \operatorname{dexp}_{\mathbf{r} + \lambda \Delta}^{-1}(\tilde{\mathbf{W}}_{n,i}) \right) \right) \Big|_{\lambda=0} \\
&= \Delta - h_n a_{i,i}^{\mathbf{R}} \left( \mathcal{D}_{\mathbf{r}} \operatorname{dexp}_{\mathbf{r}}^{-1}(\tilde{\mathbf{W}}_{n,i}) \right) \Delta.
\end{aligned}$$

Il faut donc connaître la dérivée de (3.18). Pour faciliter les développements, nous altérons légèrement notre définition de  $\operatorname{dexp}^{-1}$  en utilisant les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  au lieu des matrices antisymétriques de  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Ainsi, nous aurons

$$\operatorname{dexp}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{x} \times \mathbf{y} - \frac{\|\mathbf{x}\| \cot\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{2}\right) - 2}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}). \quad (3.49)$$

Le temps des calculs, posons

$$f(\varphi) = \frac{\varphi \cot\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 2}{\varphi^2}$$

et récrivons (3.49) en coordonnées

$$(\operatorname{dexp}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{y})_i = y_i - \frac{1}{2} \varepsilon_{i,j,k} x_j y_k - f(\|\mathbf{x}\|) (x_i x_j y_j - y_i x_j x_j)$$

pour ensuite la dériver

$$\begin{aligned}
\partial_{x_l} (\operatorname{dexp}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{y})_i &= \partial_{x_l} \left( y_i - \frac{1}{2} \varepsilon_{i,j,k} x_j y_k - f(\|\mathbf{x}\|) (x_i x_j y_j - y_i x_j x_j) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \varepsilon_{i,j,k} (\partial_{x_l} x_j) y_k - \frac{f'(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} x_l (x_i x_j y_j - y_i x_j x_j) \\
&\quad - f(\|\mathbf{x}\|) \partial_{x_l} (x_i x_j y_j - y_i x_j x_j) \\
&= -\frac{1}{2} \varepsilon_{i,j,k} \delta_{j,l} y_k - \frac{f'(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} x_l (x_i x_j y_j - y_i x_j x_j) \\
&\quad - f(\|\mathbf{x}\|) ((\partial_{x_l} x_i) x_j + x_i (\partial_{x_l} x_j)) y_j - 2y_i (\partial_{x_l} x_j) x_j \\
&= -\frac{1}{2} \varepsilon_{i,l,k} y_k - \frac{f'(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} x_l (x_i x_j y_j - y_i x_j x_j) \\
&\quad - f(\|\mathbf{x}\|) ((\delta_{i,l} x_j + x_i \delta_{j,l}) y_j - 2y_i \delta_{j,l} x_j) \\
&= -\frac{1}{2} \varepsilon_{i,l,k} y_k - \frac{f'(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} x_l (x_i x_j y_j - y_i x_j x_j) \\
&\quad - f(\|\mathbf{x}\|) (\delta_{i,l} x_j y_j + x_i y_l - 2y_i x_l)
\end{aligned}$$

et revenir à une notation vectorielle

$$\nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{dexp}_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{y} = -\frac{1}{2} \operatorname{tax}(\mathbf{y}) - \frac{f'(\|\mathbf{x}\|)}{\|\mathbf{x}\|} (\mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y})) \otimes \mathbf{x} - f(\|\mathbf{x}\|) ((\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{1} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x})$$

où

$$f'(\varphi) = \frac{8 - (\varphi \operatorname{csc}(\frac{\varphi}{2}))^2 - 2\varphi \cot(\frac{\varphi}{2})}{4\varphi^3}.$$

Les itérées de Newton suivrons donc la loi de récurrence suivante :

$$\left( \mathcal{D}_{\tilde{\Theta}_{n,i}} \mathfrak{M}_{n,i} \left( \tilde{\Theta}_{n,i}^{(m)} \right) \right) \left( \tilde{\Theta}_{n,i}^{(m)} - \tilde{\Theta}_{n,i}^{(m+1)} \right) = \mathfrak{M}_{n,i} \left( \tilde{\Theta}_{n,i}^{(m)} \right)$$

ou, avec plus de détail,

$$\begin{aligned} h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}^{\mathbf{R}} \operatorname{dexp}_{\tilde{\Theta}_{n,j}}^{-1} \left( \tilde{\mathbf{W}}_{n,j} \right) + h_n a_{i,i}^{\mathbf{R}} \operatorname{dexp}_{\tilde{\Theta}_{n,i}}^{-1} \left( \tilde{\mathbf{W}}_{n,i} \right) - \left( \mathcal{D}_{\tilde{\Theta}_{n,i}} \operatorname{dexp}_{\tilde{\Theta}_{n,i}}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{n,i} \right) \tilde{\Theta}_{n,i}^{(m)} \\ = \tilde{\Theta}_{n,i}^{(m+1)} - \left( \mathcal{D}_{\tilde{\Theta}_{n,i}} \operatorname{dexp}_{\tilde{\Theta}_{n,i}}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{n,i} \right) \tilde{\Theta}_{n,i}^{(m+1)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons désormais décrire précisément la résolution des équations 3.47 : dans le cas simple de la méthode d'Euler par l'algorithme 1 puis dans le cas le plus général par l'algorithme 2.

---

**Algorithme 1** Itération d'Euler pour une tige
 

---

Permet de résoudre les équations

$$\partial_t \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), \mathbf{R}(t), t), \quad \partial_t \mathbf{R}(t) = \mathbf{W}(\mathbf{r}(t), \mathbf{R}(t), t) \mathbf{R}(t)$$

**procédure** ITÉRATION( $\mathbf{r}_0, \mathbf{R}_0, t, \mathbf{v}, \mathbf{W}$ )

[Types]

$\mathbf{v}: \mathbb{R}^N \times SO(N) \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N$

$\mathbf{W}: \mathbb{R}^N \times SO(N) \times \mathcal{T} \mapsto \mathfrak{so}(N)$

$\mathbf{r}_0: \mathbb{R}^N$

$\mathbf{R}_0: SO(N)$

$t: \mathcal{T}^{n_t}$

[Calculs]

**pour**  $i \in 0, \dots, n_t - 2$  **faire**

▷ Pour chaque pas de temps

$h_i \leftarrow t_{i+1} - t_i$

$\mathbf{r}_{i+1} \leftarrow \mathbf{r}_i + h_i \mathbf{v}(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_i, t_i)$

$\mathbf{R}_{i+1} \leftarrow \exp(h_i \mathbf{W}(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_i, t_i)) \mathbf{R}_i$

**fin pour**

**fin procédure**

---

**Algorithme 2** Itération de Runge-Kutta-Munthe-Kaas implicite pour une tige

Permet de résoudre les équations

$$\partial_t \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), \mathbf{R}(t), t), \quad \partial_t \mathbf{R}(t) = \mathbf{W}(\mathbf{r}(t), \mathbf{R}(t), t) \mathbf{R}(t)$$

**procédure** IMRKMKTIGE( $\mathbf{r}_0, \mathbf{R}_0, t, \mathbf{v}, \mathbf{W}$ )

[Types]

$$\mathbf{v}: \mathbb{R}^N \times SO(N) \times \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^N$$

$$\mathbf{W}: \mathbb{R}^N \times SO(N) \times \mathcal{T} \mapsto \mathfrak{so}(N)$$

$$\mathbf{r}_0: \mathbb{R}^N$$

$$\mathbf{R}_0: SO(N)$$

$$t: \mathcal{T}^{n_t}$$

[Calculs]

**pour**  $i \leftarrow 0, \dots, n_t - 2$  **faire**

$$h_i \leftarrow t_{i+1} - t_i$$

$$\tilde{t}_{i,0} \leftarrow (1 - c_0) t_i + c_0 t_{i+1}$$

[Début de la première estimation par la méthode d'Euler explicite]

$$\hat{\mathbf{r}}_{i,0} \leftarrow \mathbf{r}_i + c_0 h_i \mathbf{v}(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_i, t_i)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{i,0} \leftarrow \exp(c_0 h_i \mathbf{W}(\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_i, t_i)) \mathbf{R}_i$$

**pour**  $j \leftarrow 1, \dots, n_c - 1$  **faire**

$$\tilde{t}_{i,j} \leftarrow (1 - c_j) t_i + c_j t_{i+1}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{i,j} \leftarrow \hat{\mathbf{r}}_{i,j-1} + (c_j - c_{j-1}) h_i \mathbf{v}(\hat{\mathbf{r}}_{i,j-1}, \hat{\mathbf{R}}_{i,j-1}, \tilde{t}_{i,j-1})$$

$$\hat{\Theta}_{i,j} \leftarrow (c_j - c_{j-1}) h_i \mathbf{W}(\hat{\mathbf{r}}_{i,j-1}, \hat{\mathbf{R}}_{i,j-1}, \tilde{t}_{i,j-1})$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{i,j} \leftarrow \exp(\hat{\Theta}_{i,j}) \hat{\mathbf{R}}_{i,j-1}$$

**fin pour**

[Solution du système implicite]

$$\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}, \tilde{\Theta}_{i,j}, \tilde{\mathbf{R}}_{i,j} \leftarrow \text{solution à } \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{r}}_{i,j} = \mathbf{r}_i + h_i \sum_{k=0}^{n_c-1} a_{j,k} \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{r}}_{i,k}, \tilde{\mathbf{R}}_{i,k}, \tilde{t}_{i,k}) \\ \tilde{\Theta}_{i,j} = h_i \sum_{k=0}^{n_c-1} a_{j,k} \text{dexp}_{\tilde{\Theta}_{i,k}}^{-1}(\mathbf{W}(\tilde{\mathbf{r}}_{i,k}, \tilde{\mathbf{R}}_{i,k}, \tilde{t}_{i,k})) \\ \tilde{\mathbf{R}}_{i,j} = \exp(\tilde{\Theta}_{i,j}) \mathbf{R}_i \end{array} \right\} \text{ d'après } \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{r}} \leftarrow \hat{\mathbf{r}} \\ \tilde{\Theta} \leftarrow \hat{\Theta} \\ \tilde{\mathbf{R}} \leftarrow \hat{\mathbf{R}} \end{array}$$

$$\mathbf{r}_{i+1} \leftarrow \mathbf{r}_i + h_i \sum_{j=0}^{n_c-1} b_j \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}, \tilde{t}_{i,j})$$

$$\mathbf{R}_{i+1} \leftarrow \exp\left(h_i \sum_{j=0}^{n_c-1} b_j \text{dexp}_{\tilde{\Theta}_{i,j}}^{-1}(\mathbf{W}(\tilde{\mathbf{r}}_{i,k}, \tilde{\mathbf{R}}_{i,k}, \tilde{t}_{i,k}))\right) \mathbf{R}_i$$

**fin pour****fin procédure**

### 3.2.2 SOLUTION AUX ÉQUATIONS DE STOKES-BRINKMAN<sup>15</sup>

Pour résoudre les équations de Navier-Stokes, nous devons résoudre répétitivement les équations de Stokes-Brinkman qui ont la forme

$$(\alpha \mathbf{I} - \beta \Delta) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{z}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.50)$$

Ces équations sont discrétisées comme décrit dans la section 3.1.2.2 dont nous reprenons les définitions :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{D}_h \phi)_k &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\phi_{\mathbf{k}+e_\alpha} - \phi_{\mathbf{k}-e_\alpha}}{2h_\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha, \\ (\mathfrak{D}_h \cdot \phi)_k &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\phi_{\mathbf{k}+e_\alpha} - \phi_{\mathbf{k}-e_\alpha}}{2h_\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \\ (\mathfrak{L}_h \phi)_k &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\phi_{\mathbf{k}+e_\alpha} - 2\phi_{\mathbf{k}} + \phi_{\mathbf{k}-e_\alpha}}{h_\alpha^2} \end{aligned}$$

pour obtenir directement

$$(\alpha \mathbf{I} - \beta \mathfrak{L}_h) \mathbf{u} + \mathfrak{D}_h p = \mathbf{z}, \quad \mathfrak{D}_h \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.51)$$

Nous avons donc un système linéaire discret correspondant aux équations (3.50), cependant, au lieu de résoudre directement ce système par des méthodes usuelles, nous profitons de la possibilité de le diagonaliser : comme nous utilisons un domaine rectangulaire périodique, les équations aux différences finies à coefficients constants, comme leurs contreparties continues, sont diagonalisables par une transformation de Fourier.

**Définition 3.8.** La transformation de Fourier discrète est définie sur une grille  $(\mathbf{h}, \mathbf{n})$  par

$$(\mathfrak{F}\phi)_k = \hat{\phi}_k = \sum_{\mathbf{l} \in \Xi(\mathbf{n})} \phi_{\mathbf{l}} \exp(-2\pi i (\mathbf{l} \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}).$$

Son inverse est

$$\left(\mathfrak{F}^{-1}\hat{\phi}\right)_l = \phi_l = \frac{1}{|\Xi(\mathbf{n})|} \sum_{\mathbf{k} \in \Xi(\mathbf{n})} \hat{\phi}_k \exp(2\pi i (\mathbf{l} \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}).$$

Introduisons maintenant un opérateur de décalage  $\mathfrak{S}$  par son effet sur une fonction  $\phi$  :

$$(\mathfrak{S}_a \phi)_l = \phi_{l+a}$$

---

<sup>15</sup>. Cette équation porte parfois aussi le nom de Darcy.

et observons son interaction avec la transformée de Fourier discrète :

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{S}_a \phi)_l &= \phi_{l+a} \\
&= \frac{1}{|\Xi(\mathbf{n})|} \sum_{\mathbf{k} \in \Xi(\mathbf{n})} \hat{\phi}_{\mathbf{k}} \exp(2\pi i ((l + a) \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}) \\
&= \frac{1}{|\Xi(\mathbf{n})|} \sum_{\mathbf{k} \in \Xi(\mathbf{n})} \hat{\phi}_{\mathbf{k}} \exp(2\pi i (a \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}) \exp(2\pi i (l \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}) \\
&= \frac{1}{|\Xi(\mathbf{n})|} \sum_{\mathbf{k} \in \Xi(\mathbf{n})} (\mathfrak{F}(\mathfrak{S}_a \phi))_{\mathbf{k}} \exp(2\pi i (l \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}),
\end{aligned}$$

donc

$$(\mathfrak{F}(\mathfrak{S}_a \phi))_{\mathbf{k}} = (\mathfrak{F}(\phi))_{\mathbf{k}} \exp(2\pi i (a \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}),$$

c'est-à-dire que  $\mathfrak{F}$  diagonalise  $\mathfrak{S}_a$ , et de même toutes les différences finies puisque celles-ci se réécrivent en des combinaisons linéaires d'opérateurs de décalage. De

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_h &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\mathfrak{S}_{e_\alpha} - \mathfrak{S}_{-e_\alpha}}{2h_\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha, \\
\mathfrak{L}_h &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\mathfrak{S}_{e_\alpha} - 2\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_{-e_\alpha}}{h_\alpha^2}
\end{aligned}$$

nous avons donc immédiatement

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{F}(\mathfrak{D}_h \phi))_{\mathbf{k}} &= (\mathfrak{F}(\phi))_{\mathbf{k}} \otimes \sum_{\alpha=1}^N \frac{\exp(2\pi i (e_\alpha \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}) - \exp(2\pi i (-e_\alpha \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k})}{2h_\alpha} \mathbf{e}_\alpha \\
&= (\mathfrak{F}(\phi))_{\mathbf{k}} \otimes \sum_{\alpha=1}^N \frac{\exp\left(\frac{2\pi i k_\alpha}{n_\alpha}\right) - \exp\left(-\frac{2\pi i k_\alpha}{n_\alpha}\right)}{2h_\alpha} \mathbf{e}_\alpha \\
&= (\mathfrak{F}(\phi))_{\mathbf{k}} \otimes i \sum_{\alpha=1}^N \frac{\sin\left(\frac{2\pi k_\alpha}{n_\alpha}\right)}{h_\alpha} \mathbf{e}_\alpha
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{F}(\mathfrak{L}_h \phi))_{\mathbf{k}} &= (\mathfrak{F}(\phi))_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\exp(2\pi i (e_\alpha \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k}) - 2 + \exp(2\pi i (-e_\alpha \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{k})}{h_\alpha^2} \\
&= (\mathfrak{F}(\phi))_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\exp\left(\frac{2\pi i k_\alpha}{n_\alpha}\right) - 2 + \exp\left(-\frac{2\pi i k_\alpha}{n_\alpha}\right)}{h_\alpha^2} \\
&= (\mathfrak{F}(\phi))_{\mathbf{k}} 2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{\cos\left(\frac{2\pi k_\alpha}{n_\alpha}\right) - 1}{h_\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans l'espace de Fourier, les équations (3.51) s'écrivent

$$\begin{aligned} \left( \alpha - 2\beta \sum_{\alpha=1}^N \frac{\cos\left(\frac{2\pi k_\alpha}{n_\alpha}\right) - 1}{h_\alpha^2} \right) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} + i \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{\sin\left(\frac{2\pi k_\alpha}{n_\alpha}\right)}{h_\alpha} \mathbf{e}_\alpha \right) \hat{p}_{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{z}}_{\mathbf{k}}, \\ i \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{\sin\left(\frac{2\pi k_\alpha}{n_\alpha}\right)}{h_\alpha} \mathbf{e}_\alpha \right) \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} &= 0. \end{aligned}$$

Nous sommes donc passé d'un système à  $|\Upsilon|(N+1)$  inconnues à  $|\Upsilon|$  systèmes à  $N+1$  inconnues, et cela par une opération ayant un coût asymptotique proportionnel à  $|\Upsilon| \log(|\Upsilon|)$ . De plus, les équations obtenues, que nous pouvons réécrire sous la forme

$$c\mathbf{x} + \mathbf{g}y = \mathbf{z}, \quad \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = 0,$$

sont faciles à résoudre : si nous prenons le produit scalaire de la première par  $\mathbf{g}$ , nous trouvons

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}y = \mathbf{g} \cdot \mathbf{z}$$

c'est dire que, si  $\mathbf{g}$  est non-nul,

$$y = \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{z}}{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}}$$

par conséquent, si  $c$  est lui aussi non-nul

$$\mathbf{x} = \frac{1}{c} \left( \mathbf{z} - \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{z}}{\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}} \mathbf{g} \right).$$

Reste à considérer les cas où  $\mathbf{g}$  ou  $c$  sont nuls. Comme  $\mathbf{k} \in \Xi(\mathbf{n})$ , c'est-à-dire que  $k_\alpha \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k_\alpha < n_\alpha$  pour tout  $\alpha = 1, \dots, N$ ,  $\mathbf{g}$  ne peut être nul que pour  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{n}$ . Nous remarquons que

$$\hat{p}_0 = (\mathfrak{F}p)_0 = \sum_{\mathbf{l} \in \Xi(\mathbf{n})} p_{\mathbf{l}},$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_{\frac{1}{2}\mathbf{n}} &= (\mathfrak{F}p)_{\frac{1}{2}\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{l} \in \Xi(\mathbf{n})} p_{\mathbf{l}} \exp(-\pi i (\mathbf{l} \div \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) \\ &= \sum_{\mathbf{l} \in \Xi(\mathbf{n})} p_{\mathbf{l}} \exp\left(-\pi i \sum_{\alpha=1}^N l_\alpha\right) \\ &= \sum_{\mathbf{l} \in \Xi(\mathbf{n})} p_{\mathbf{l}} \cos\left(\pi \sum_{\alpha=1}^N l_\alpha\right) \end{aligned}$$

donc les endroits où  $\hat{p}$  est indéterminé (et  $\hat{\mathbf{u}}$  puisqu'il en dépend) correspondent aux moyennes pondérées par un vecteur de valeur constante 1 et un vecteur alternant entre 1 et  $-1$  qui sont, justement, des générateurs du noyau de  $\mathfrak{D}$ . Nous pouvons poser  $\hat{p}_0 = 0$  car dans notre formulation des équations de Navier-Stokes, la pression est un multiplicateur de Lagrange qui n'est défini qu'à

un facteur additif près. Quant à  $\hat{p}_{\frac{1}{2}n}$ , son indétermination est due à l'usage des différences finies d'ordre deux et nous pouvons le choisir nul sans affecter la précision du schéma (nous ne nous attendons pas non plus à ce que les solutions soient aussi oscillatoires). Le cas de  $c$  est différent, il faudrait que

$$\alpha \neq 2\beta \sum_{\alpha=1}^N \frac{\cos\left(\frac{2\pi k_\alpha}{n_\alpha}\right) - 1}{h_\alpha^2}$$

or cela dépend entièrement des valeurs des constantes  $\alpha$  et  $\beta$ .

### 3.2.3 ALGORITHMES D'INTERACTION

Nous regroupons ici les algorithmes d'appariement qui explicitent les développements de la section 3.1.3. Nous notons qu'autant pour l'interpolation que l'étalement, nous nous assurons, dans un soucis d'efficacité évident, de ne considérer que les points du fluide voisins de la tige dans les calculs.

---

**Algorithme 3** Interpolation (évalue  $\mathbf{Q} \leftarrow \mathfrak{A}_r^\dagger \mathbf{q}$ )

---

**procédure** INTERPOLE( $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{x}_0, c, \phi, L$ )

$\mathbf{Q} \leftarrow 0$

**pour**  $k \in \Upsilon$  **faire**

▷ Pour chaque point du corps immergé

$$J_{k,\alpha} \leftarrow \frac{\mathbf{r}_{k,\alpha} - \mathbf{x}_{0,\alpha}}{h_\alpha}$$

**pour**  $l_k \in \mathbb{Z}^N$  **tel que**  $\lceil J_{k,\alpha} - cL \rceil \leq l_{k,\alpha} \leq \lfloor J_{k,\alpha} + cL \rfloor$  **faire**

$$\tilde{l}_k \leftarrow l_k \bmod n$$

$$\mathbf{Q}_k \leftarrow \mathbf{Q}_k + \mathbf{q}_{\tilde{l}_k} \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{c} \phi\left(\frac{J_{k,\alpha} - l_{k,\alpha}}{c}\right)$$

**fin pour**

**fin pour**

**fin procédure**

---



---

**Algorithme 4** Interpolation directe du gradient (évalue  $\mathbf{Q} \leftarrow (\mathfrak{A}_r^\dagger \nabla) \mathbf{q}$ )

---

**procédure** INTERPOLEGRADIENTINDIRECT( $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{x}_0, c, \phi, L$ )

$\mathbf{Q} \leftarrow 0$

**pour**  $k \in \Upsilon$  **faire**

▷ Pour chaque point du corps immergé

$$J_{k,\alpha} \leftarrow \frac{\mathbf{r}_{k,\alpha} - \mathbf{x}_{0,\alpha}}{h_\alpha}$$

**pour**  $l_k \in \mathbb{Z}^N$  **tel que**  $\lceil J_{k,\alpha} - cL \rceil \leq l_{k,\alpha} \leq \lfloor J_{k,\alpha} + cL \rfloor$  **faire**

$$\tilde{l}_k \leftarrow l_k \bmod n$$

$$\mathbf{Q}_k \leftarrow \mathbf{Q}_k + \mathbf{q}_{\tilde{l}_k} \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{1}{c^2 h_\alpha} \phi' \left( \frac{J_{k,\alpha} - l_{k,\alpha}}{c} \right) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{1}{c} \phi \left( \frac{J_{k,\beta} - l_{k,\beta}}{c} \right) \right) \otimes \mathbf{e}_\alpha$$

**fin pour**

**fin pour**

**fin procédure**

---

---

**Algorithme 5** Interpolation indirecte du gradient (évalue  $\mathbf{Q} \leftarrow (\mathfrak{A}_r^\dagger \mathfrak{D}) \mathbf{q}$ )

---

**procédure** INTERPOLEGRADIENTINDIRECT( $\mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{x}_0, c, \phi, L$ )
 $\mathbf{Q} \leftarrow 0$ **pour**  $k \in \Upsilon$  **faire**

▷ Pour chaque point du corps immergé

$$J_{k,\alpha} \leftarrow \frac{\mathbf{r}_{k,\alpha} - x_{0,\alpha}}{h_\alpha}$$

**pour**  $l_k \in \mathbb{Z}^N$  **tel que**  $\lceil J_{k,\alpha} - cL \rceil \leq l_{k,\alpha} \leq \lfloor J_{k,\alpha} + cL \rfloor$  **faire**

$$\mathbf{Q}_k \leftarrow \mathbf{Q}_k + \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{\mathbf{q}(l+\mathbf{e}_\alpha) \bmod \mathbf{n} - \mathbf{q}(l-\mathbf{e}_\alpha) \bmod \mathbf{n}}{2h_\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha \right) \prod_{\beta=1}^N \frac{1}{c} \phi \left( \frac{J_{k,\beta} - l_{k,\beta}}{c} \right)$$

**fin pour****fin pour****fin procédure**


---

**Algorithme 6** Étalement (évalue  $\mathbf{q} = \mathfrak{A}_r \mathbf{Q}$ )

---

**procédure** ÉTALE( $\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \mathbf{x}_0, c, \phi, L$ )
 $\mathbf{q} \leftarrow 0$ **pour**  $k \in \Upsilon$  **faire**

▷ Pour chaque point du corps immergé

$$J_{k,\alpha} \leftarrow \frac{X_{k,\alpha} - x_{0,\alpha}}{h_\alpha}$$

**pour**  $l_k \in \mathbb{Z}^N$  **tel que**  $\lceil J_{k,\alpha} - cL \rceil \leq l_{k,\alpha} \leq \lfloor J_{k,\alpha} + cL \rfloor$  **faire**

$$\tilde{l}_k \leftarrow l_k \bmod \mathbf{n}$$

$$\mathbf{q}_{\tilde{l}_k} \leftarrow \mathbf{q}_{\tilde{l}_k} + \mathbf{Q}_k \frac{\varpi_k}{w} \prod_{\alpha=1}^N \frac{1}{c} \phi \left( \frac{J_{k,\alpha} - l_{k,\alpha}}{c} \right)$$

**fin pour****fin pour****fin procédure**


---

**Algorithme 7** Gradient direct de l'étalement (évalue  $\mathbf{q} = (\nabla \mathfrak{A}_r) \mathbf{Q}$ )

---

**procédure** ÉTALE( $\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \mathbf{x}_0, c, \phi, L$ )
 $\mathbf{q} \leftarrow 0$ **pour**  $k \in \Upsilon$  **faire**

▷ Pour chaque point du corps immergé

$$J_{k,\alpha} \leftarrow \frac{X_{k,\alpha} - x_{0,\alpha}}{h_\alpha}$$

**pour**  $l_k \in \mathbb{Z}^N$  **tel que**  $\lceil J_{k,\alpha} - cL \rceil \leq l_{k,\alpha} \leq \lfloor J_{k,\alpha} + cL \rfloor$  **faire**

$$\tilde{l}_k \leftarrow l_k \bmod \mathbf{n}$$

$$\mathbf{q}_{\tilde{l}_k} \leftarrow \mathbf{q}_{\tilde{l}_k} - \mathbf{Q}_k \frac{\varpi_k}{w} \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{1}{c^2 h_\alpha} \phi' \left( \frac{J_{k,\alpha} - l_{k,\alpha}}{c} \right) \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{1}{c} \phi \left( \frac{J_{k,\beta} - l_{k,\beta}}{c} \right) \right) \otimes \mathbf{e}_\alpha$$

**fin pour****fin pour****fin procédure**


---

**Algorithme 8** Gradient indirect de l'étalement (évalue  $\mathbf{q} = (\mathcal{D}\mathcal{A}_r)\mathbf{Q}$ )

---

```

procédure ÉTALEGRADIENTINDIRECT( $\mathbf{Q}, \mathbf{r}, \mathbf{x}_0, c, \phi, L$ )
   $\mathbf{q} \leftarrow 0$ 
  pour  $k \in \Upsilon$  faire ▷ Pour chaque point du corps immergé
     $J_{k,\alpha} \leftarrow \frac{X_{k,\alpha} - x_{0,\alpha}}{h_\alpha}$ 
    pour  $l_k \in \mathbb{Z}^N$  tel que  $[J_{k,\alpha} - cL - 1] \leq l_{k,\alpha} \leq [J_{k,\alpha} + cL + 1]$  faire
       $\tilde{l}_k \leftarrow l_k \bmod n$ 
       $q_{\tilde{l}_k} \leftarrow q_{\tilde{l}_k} + \mathbf{Q}_k \frac{\varpi_k}{w} \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2h_\alpha} \left( \prod_{\beta=1}^N \frac{1}{c} \phi \left( \frac{J_{k,\beta} - l_{k,\beta} - \delta_{\alpha,\beta}}{c} \right) \right. \right.$ 
       $\left. \left. - \prod_{\beta=1}^N \frac{1}{c} \phi \left( \frac{J_{k,\beta} - l_{k,\beta} + \delta_{\alpha,\beta}}{c} \right) \right) \otimes e_\alpha$ 
    fin pour
  fin pour
fin procédure

```

---

**3.2.4 ALGORITHMES DU CALCUL DE FORCES DANS LA TIGE**

Avant de présenter l'algorithme complet qui nous permet de simuler la nage, il est préférable de formuler ceux du calcul de la force : premièrement pour une tige fermée (algorithme 9), puis dans le cas d'une tige ouverte sans masse (algorithme 10) et, enfin pour le même cas mais en utilisant méthode d'ordre deux (algorithme 11).

**Algorithme 9** Calcul de la force et du couple sur une tige fermée

---

```

procédure FORCETIGE( $\mathbf{r}, \mathbf{R}, \mathbf{v}, \mathbf{W}, \dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{W}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ )
   $\underset{\diamond}{\boldsymbol{\omega}} \leftarrow \mathbf{R}^\dagger \mathcal{D}\mathbf{r} - \mathbf{E}_1$ 
   $\underset{\diamond}{\boldsymbol{\Omega}} \leftarrow \text{asym}(\mathbf{R}^\dagger \mathcal{D}\mathbf{R})$ 
   $\mathbf{l} \leftarrow \mathbf{R}\mathbf{B}(\underset{\diamond}{\boldsymbol{\omega}} - \hat{\boldsymbol{\omega}})$ 
   $\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{R}\mathbf{A}(\underset{\diamond}{\boldsymbol{\Omega}} - \hat{\boldsymbol{\Omega}})\mathbf{R}^\dagger$ 
   $\mathbf{q} \leftarrow \dot{\lambda} + \lambda\dot{\mathbf{v}} + (\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W}^2)\boldsymbol{\theta} + \mathbf{W}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathcal{D}\mathbf{l}$ 
   $\mathbf{Q} \leftarrow (\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{W}\boldsymbol{\theta}) \wedge \mathbf{v} + \boldsymbol{\theta} \wedge \dot{\mathbf{v}} - \text{asym}(\dot{\mathbf{W}}\mathbf{Y} + \mathbf{W}\dot{\mathbf{Y}}) - \mathcal{D}\mathbf{L} - (\mathcal{D}\mathbf{r}) \wedge \mathbf{l}$ 
fin procédure

```

---

---

**Algorithme 10** Calcul de la force et du couple sur une tige ouverte sans masse
 

---

**procédure** FORCES\_TIGE\_OUVERTE( $\mathbf{r}, \mathbf{R}, \hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{l}_a, \mathbf{l}_b, \mathbf{L}_a, \mathbf{L}_b$ )

$$\underset{\diamond}{\boldsymbol{\omega}} \leftarrow \mathbf{R}^\dagger \mathcal{D}\mathbf{r} - \mathbf{E}_1$$

$$\underset{\diamond}{\boldsymbol{\Omega}} \leftarrow \text{asym}(\mathbf{R}^\dagger \mathcal{D}\mathbf{R})$$

$$\mathbf{l} \leftarrow \mathbf{R}\mathbf{B} \left( \underset{\diamond}{\boldsymbol{\omega}} - \underset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\omega}}} \right)$$

$$\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{R}\mathbf{A} \left( \underset{\diamond}{\boldsymbol{\Omega}} - \underset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Omega}}} \right) \mathbf{R}^\dagger$$

$$\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_{n-1} \leftarrow -\mathbf{l}_a, \mathbf{l}_b$$

$$\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_{n-1} \leftarrow -\mathbf{L}_a, \mathbf{L}_b$$

$$(\mathcal{D}\mathbf{r})_0, (\mathcal{D}\mathbf{r})_{n-1} \leftarrow \mathbf{R}_0 \left( \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_0^\dagger \mathbf{l}_0 + \mathbf{E}_1 + \underset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\omega}}}_0 \right), \mathbf{R}_{n-1} \left( \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R}_{n-1}^\dagger \mathbf{l}_{n-1} + \mathbf{E}_1 + \underset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\omega}}}_{n-1} \right)$$

$$\mathbf{q} \leftarrow -\mathcal{D}\mathbf{l}$$

$$\mathbf{Q} \leftarrow -\mathcal{D}\mathbf{L} - (\mathcal{D}\mathbf{r}) \wedge \mathbf{l}$$

**fin procédure**


---

**Algorithme 11** Calcul de la force et du couple sur une tige fermée sans masse avec une méthode d'ordre deux
 

---

**procédure** FORCES\_TIGE\_FERMEE( $\mathbf{r}, \mathbf{R}, \hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ )

$$\mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}} \leftarrow \sqrt{\mathbf{R}_{k+1} \mathbf{R}_k^\dagger \mathbf{R}_k}$$

▷ Voir (3.25) pour le calcul de la racine carrée

$$(\mathcal{D}\mathbf{r})_{k+\frac{1}{2}} \leftarrow \frac{\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k}{h}$$

$$(\mathcal{D}\mathbf{R})_{k+\frac{1}{2}} \leftarrow \frac{\mathbf{R}_{k+1} - \mathbf{R}_k}{h}$$

$$\underset{\diamond}{\boldsymbol{\omega}}_{k+\frac{1}{2}} \leftarrow \mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}}^\dagger (\mathcal{D}\mathbf{r})_{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{E}_1$$

$$\underset{\diamond}{\boldsymbol{\Omega}}_{k+\frac{1}{2}} \leftarrow \text{asym} \left( \mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}}^\dagger (\mathcal{D}\mathbf{R})_{k+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\mathbf{l}_{k+\frac{1}{2}} \leftarrow \mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{B} \left( \underset{\diamond}{\boldsymbol{\omega}}_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (\underset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\omega}}}_{k+1} + \underset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\omega}}}_k) \right)$$

$$\mathbf{L}_{k+\frac{1}{2}} \leftarrow \mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}} \mathbf{A} \left( \underset{\diamond}{\boldsymbol{\Omega}}_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (\underset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Omega}}}_{k+1} + \underset{\diamond}{\hat{\boldsymbol{\Omega}}}_k) \right) \mathbf{R}_{k+\frac{1}{2}}^\dagger$$

$$\mathbf{q}_k \leftarrow -\frac{\mathbf{l}_{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{l}_{k-\frac{1}{2}}}{h}$$

$$\mathbf{Q}_k \leftarrow -\frac{\mathbf{L}_{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{L}_{k-\frac{1}{2}}}{h} - \frac{1}{2} \left( (\mathcal{D}\mathbf{r})_{k-\frac{1}{2}} \wedge \mathbf{l}_{k-\frac{1}{2}} + (\mathcal{D}\mathbf{r})_{k+\frac{1}{2}} \wedge \mathbf{l}_{k+\frac{1}{2}} \right)$$

**fin procédure**


---

### 3.2.5 ALGORITHMES D'ADVECTION DU FLUIDE

Enfin, nous rapportons l'algorithme complet de la simulation (algorithme 13) élaboré d'après les considérations de la section 3.1.1, mais non sans avoir auparavant exposé dans le détail la résolution du sous-problème que constituent les équations de Navier-Stokes (algorithme 12).

**Algorithme 12** Advection du fluide

Permet de résoudre les équations

$$\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

**procédure** ITÉRATION( $\mathbf{u}_0, t, \check{\mathbf{b}}, \text{Re}, a^{\text{im}}, a^{\text{ex}}$ ) $\mathbf{v}_0 \leftarrow \mathbf{u}_0$ **pour**  $i \in 0, \dots, n_t - 2$  **faire**

▷ Pour chaque pas de temps

 $h_i \leftarrow t_{i+1} - t_i$ **pour**  $j \in 1, \dots, n_c - 1$  **faire** $\tilde{\mathbf{g}}_{i,j-1} \leftarrow \check{\mathbf{b}}(\mathbf{v}_{j-1}, t_i + c_{j-1} h_i) - (\nabla \mathbf{v}_{j-1}) \mathbf{v}_{j-1}$  $\mathbf{z} \leftarrow \frac{1}{\text{Re}} h_i \Delta \left( \sum_{k=0}^{j-1} a_{j,k}^{\text{im}} \mathbf{v}_k \right) + \mathbf{v}_0 + h_i \sum_{k=0}^{j-1} a_{j,k}^{\text{ex}} \tilde{\mathbf{g}}_{i,k}$  $\mathbf{v}_j \leftarrow \mathbf{u}$  tel que  $\mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} h_i a_{j,j}^{\text{im}} \Delta \mathbf{u} + h_i \nabla p = \mathbf{z}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ **fin pour** $\mathbf{v}_0 \leftarrow \mathbf{v}_{n_c-1}$ **fin pour****fin procédure**

**Algorithme 13** Itération du système complet

Permet de résoudre les équations

$$\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} - \mathcal{A}_r \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathcal{A}_r \mathbf{Q}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\partial_t \mathbf{r} = \mathcal{A}_r^\dagger \mathbf{u}, \quad \partial_t \mathbf{R} = (\mathcal{A}_r^\dagger \text{asym}(\nabla \mathbf{u})) \mathbf{R}.$$

procédure ITÉRATION( $\hat{\omega}_\diamond, \hat{\Omega}_\diamond, \mathbf{r}_0, \mathbf{R}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \text{Re}, \text{Ca}, t$ )

$$\tilde{\mathbf{r}}_{0,0} \leftarrow \mathbf{r}_0$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{0,0} \leftarrow \mathbf{R}_0$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{0,0} \leftarrow \mathbf{u}_0$$

pour  $i \in 0, \dots, n_t - 2$  faire

$$h_i \leftarrow t_{i+1} - t_i$$

$$\tilde{t}_{i,0} \leftarrow (1 - c_0) t_i + c_0 t_{i+1}$$

pour  $j \in 1, \dots, n_c - 1$  faire

$$\tilde{t}_{i,j} \leftarrow (1 - c_j) t_i + c_j t_{i+1}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i,j-1} \leftarrow \dot{\mathbf{u}}_i + h_i \sum_{k=0}^{j-1} a_{i,k}^{\text{im}} \left( -\mathcal{D} \tilde{p}_{i,k} + \frac{1}{\text{Re}} \mathcal{L} \tilde{\mathbf{u}}_{i,k} - \frac{1}{\text{Ca}} \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,k}} \tilde{\mathbf{q}}_{i,k} - \frac{1}{\text{Ca}} \mathcal{D} \cdot \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,k}} \tilde{\mathbf{Q}}_{i,k} \right)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{i,j-1} \leftarrow \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,j-1}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{i,j-1}$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{i,j-1} \leftarrow \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,j-1}}^\dagger \text{asym}(\mathcal{D} \tilde{\mathbf{u}}_{i,j-1})$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{v}}}_{i,j-1} \leftarrow \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,j-1}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{i,j-1}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{W}}}_{i,j-1} \leftarrow \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,j-1}}^\dagger \text{asym}(\mathcal{D} \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_{i,j-1})$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{i,j-1}, \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j-1} \leftarrow \text{FORCETIGE} \left( \tilde{\mathbf{r}}_{i,j-1}, \tilde{\mathbf{R}}_{i,j-1}, \tilde{\mathbf{v}}_{i,j-1}, \tilde{\mathbf{W}}_{i,j-1}, \tilde{\tilde{\mathbf{v}}}_{i,j-1}, \tilde{\tilde{\mathbf{W}}}_{i,j-1}, \hat{\omega}_\diamond(\tilde{t}_{i,j-1}), \hat{\Omega}_\diamond(\tilde{t}_{i,j-1}), \mathbf{A}, \mathbf{B} \right)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{i,j-1} \leftarrow \frac{1}{\text{Ca}} \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,j-1}} \tilde{\mathbf{q}}_{i,j-1} + \frac{1}{\text{Ca}} \mathcal{D} \cdot \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,j-1}} \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j-1} - \mathfrak{C}(\tilde{\mathbf{u}}_{i,j-1}) \tilde{\mathbf{u}}_{i,j-1}$$

$$\mathbf{z} \leftarrow \frac{1}{\text{Re}} h_i \mathcal{L} \left( \sum_{k=0}^{j-1} a_{j,k}^{\text{im}} \tilde{\mathbf{u}}_{i,k} \right) + \tilde{\mathbf{u}}_{i,0} + h_i \sum_{k=0}^{j-1} a_{j,k}^{\text{ex}} \tilde{\mathbf{g}}_{i,k}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i,j} \leftarrow \mathbf{u} \quad \text{tel que} \quad \mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}} h_i a_{j,j}^{\text{im}} \mathcal{L} \mathbf{u} + h_i \mathcal{D} p = \mathbf{z}, \quad \mathcal{D} \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{i,j} \leftarrow \mathbf{r} \quad \text{tel que} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_i + h_i \sum_{k=0}^{j-1} a_{j,k}^{\text{im}} \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,k}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{i,k} + h_i a_{j,j}^{\text{im}} \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}}^\dagger \tilde{\mathbf{u}}_{i,j}$$

$$\tilde{\Theta}_{i,j} \leftarrow \Theta \quad \text{tel que} \quad \Theta = h_i \sum_{k=0}^{j-1} a_{j,k}^{\text{im}} \text{dexp}_{\Theta_{i,k}}^{-1} \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,k}}^\dagger \text{asym}(\mathcal{D} \tilde{\mathbf{u}}_{i,k}) \right) + h_i a_{j,j}^{\text{im}} \text{dexp}_{\Theta}^{-1} \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}_{i,j}}^\dagger \text{asym}(\mathcal{D} \tilde{\mathbf{u}}_{i,j}) \right)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{i,j} \leftarrow \exp(\tilde{\Theta}_{i,j}) \mathbf{R}_i$$

fin pour

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i+1,0} \leftarrow \tilde{\mathbf{u}}_{i,n_c-1}$$

fin pour

fin procédure

# RÉSULTATS ET DISCUSSION

## 4.1 VÉRIFICATIONS

### 4.1.1 MÉTHODES GÉNÉRALES

#### 4.1.1.1 MÉTHODE DE LA SOLUTION FABRIQUÉE

Supposons que nous souhaitons vérifier une méthode de résolution approchée de l'équation  $f(x) = 0$  augmentée d'une condition subsidiaire  $g(x) = 0$ . Ce qui différencie la contrainte accessoire de l'équation principale, c'est qu'il est relativement facile de trouver une variable  $x^*$  qui satisfasse  $g(x^*) = 0$ . Supposons que notre méthode soit aussi applicable aux équations de la forme  $f(x) = h$  pour  $h$  arbitraire, alors pour la vérifier, il suffit, sous l'hypothèse supplémentaire que le problème admette une solution unique, de comparer la solution approchée  $\tilde{x}$  à  $f(x) = f(x^*)$  (où  $x$  est l'inconnue) à la solution exacte  $x^*$  en prenant la norme  $\|\tilde{x} - x^*\|$ .

Le procédé peut s'étendre aux cas plus généraux où l'approximation est discrète et la solution exacte, de dimension infinie. Notons  $\tilde{f}: \tilde{\mathcal{U}} \mapsto \tilde{\mathcal{V}}$  l'équivalent discret de  $f: \mathcal{U} \mapsto \mathcal{V}$  construite conformément aux opérateurs de discrétisation  $\mathfrak{E}_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \mapsto \tilde{\mathcal{U}}$ ,  $\mathfrak{E}_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \mapsto \tilde{\mathcal{V}}$ , alors nous chercherons la solution  $\tilde{x}$  à  $\tilde{f}(x) = \mathfrak{E}_{\mathcal{V}}f(x^*)$  et mesurerons l'erreur  $\|\tilde{x} - \mathfrak{E}_{\mathcal{U}}x^*\|$ .

Idéalement, le  $x^*$  choisi devrait être représentatif des solutions attendues. Cependant, pour éviter de le choisir trop facile par inadvertance, et de mieux vérifier la robustesse générale de la méthode utilisée, il sera utile de générer des fonctions de façon (pseudo)aléatoire. Soulignons que l'erreur d'une solution approchée est assez peu informative : ce que nous souhaitons vraiment obtenir, c'est la vérification de la convergence, car de toute façon, l'erreur ne peut que varier entre chaque  $x^*$  générée.

**FONCTIONS DE BASE** Nous cherchons une fonction analytique qui ne soit ni un polynôme, ni un polynôme trigonométrique qui soit cependant périodique. La fonction

$$\eta(x, \mathbf{c}) = \exp(c_1 (\cos(x + c_2) - 1)) \cos(x + c_3) \quad (4.1)$$

est relativement compacte, est paramétrable et satisfait à nos critères<sup>1</sup>. Néanmoins, il faut encore décider comment produire des fonctions du type

$$f: \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}: \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}).$$

1. La soustraction a pour effet de borner  $\eta$  entre  $-1$  et  $1$  quand  $c_1 \geq 0$ .

C'est chose faite en introduisant les constantes  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N \times p}$  et  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{3 \times p}$  et en posant

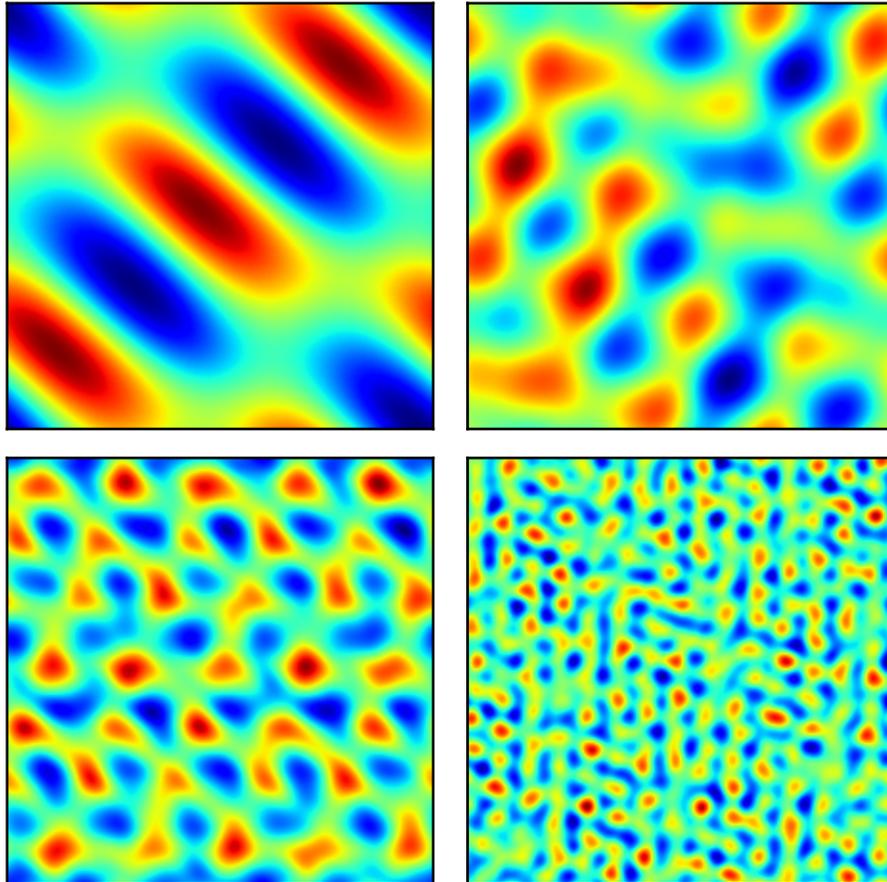
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p a_i \eta(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}, \mathbf{c}_i) \quad (4.2)$$

où les vecteurs  $\mathbf{b}_i$  sont définis par  $b_{i,j} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{b}_j$ . Nous notons que si

$$b_{i,j} = \frac{2\pi m_{i,j}}{L_j} \quad (4.3)$$

avec  $m_{i,j}$  entier pour tout  $i, j$  alors la fonction  $f$  est périodique dans un domaine de longueurs  $\mathbf{L}$ . En variant les paramètres  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  il est possible d'engendrer des fonctions d'apparences diverses comme cela est montré à la figure 4.1.

FIGURE 4.1 – Exemples de champs scalaires générés aléatoirement



DÉRIVÉES Le gradient de  $f$  s'exprime facilement en fonction de la dérivée de  $\eta$  :

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p a_i \partial_x \eta(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}, c_i) \mathbf{b}_i, \quad (4.4)$$

et, de façon semblable, nous obtenons pour n'importe quelle dérivée partielle<sup>2</sup>

$$\partial^\alpha f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p a_i \partial_x^{|\alpha|} \eta(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}, c_i) \mathbf{b}_i^\alpha \quad (4.5)$$

d'où nous déduisons, par exemple :

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p a_i \partial_x^2 \eta(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}, c_i) \|\mathbf{b}_i\|^2. \quad (4.6)$$

DÉPENDANCE TEMPORELLE Si nous souhaitons avoir un champ dépendant du temps, il nous suffit d'ajouter une dimension en remplaçant  $\mathbf{x}$  par  $(\mathbf{x}, t)$  en utilisant une nouvelle constante  $v \in \mathbb{R}^p$  :

$$f(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^p a_i \eta(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x} + v_i t, c_i). \quad (4.7)$$

CHAMP SOLÉNOÏDAL En utilisant une base, il nous est aussi possible de construire une fonction vectorielle, or cela est insuffisant, car puisque nous nous intéressons à des fluides incompressibles, il faut disposer de champ vectoriels à divergence nulle. Cependant, il suffit de remarquer que la divergence de la divergence d'un tenseur antisymétrique est nulle<sup>3</sup> :

2. Nous utilisons la notation des multi-indices, voir la définition A.1.

3. Ceci est à comparer avec le lemme A.12 ou encore le résultat A.23.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \cdot \Theta) &= \nabla \cdot (\nabla \cdot \text{asym}(\Theta)) \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_j} \text{asym}(\Theta)_{i,j} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_j} (\Theta_{i,j} - \Theta_{j,i}) \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Theta_{i,j} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Theta_{j,i} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Theta_{i,j} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} \partial_{x_i} \Theta_{j,i} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Theta_{i,j} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Theta_{i,j} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Theta_{i,j} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Theta_{i,j} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Un tel tenseur peut être construit de façon semblable à (4.2), d'ailleurs, en trois dimensions, un champ tensoriel antisymétrique est équivalent à un champ vectoriel.

Avec un champ tensoriel  $\Theta: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  de la forme

$$\Theta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \Upsilon_i \eta(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}, \mathbf{c}_i)$$

avec  $\Upsilon_i$  antisymétrique pour tout  $i$ , nous pouvons définir un champ incompressible par sa divergence

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \Theta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \Upsilon_i \mathbf{b}_i \partial_x \eta(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}, \mathbf{c}_i).$$

Dans le cas d'un champ dépendant du temps, ce sera

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \Theta(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^p \Upsilon_i \mathbf{b}_i \partial_x \eta(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x} + v_i t, \mathbf{c}_i).$$

#### 4.1.1.2 SOLUTION FABRIQUÉE

Ayant en mains l'expression (4.5), nous pouvons tester directement les différences finies en évaluant les dérivées et en les comparant aux résultats numériques.

Par contre, le cas de la vérification du solveur des équations de Navier-Stokes est plus difficile, mais il suffit de choisir adéquatement le terme source (ou terme de forçage) : nous générons une

paire de fonctions  $\mathbf{u}^*$  (incompressible) et  $p^*$  – la solution fabriquée – à partir de laquelle nous définissons

$$\mathbf{f} = \partial_t \mathbf{u}^* + (\nabla \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* + \nabla p^* - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}^*$$

ensuite nous comparons les solutions calculées  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}$  aux équations

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla p &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

à  $\mathbf{u}^*$  et  $p^*$  évaluées aux mêmes points<sup>4</sup>.

### 4.1.1.3 VÉRIFICATION PAR SUBORDINATION PÉRIODIQUE DU TEMPS

Si nous avons une équation aux dérivées ordinaires et que la méthode de la solution fabriquée s'applique mal ou qu'il est trop coûteux de garder en mémoire la solution pour chaque temps  $t$ , nous pouvons quand même vérifier la convergence d'une méthode de solution en rendant périodique la solution. Si

$$\partial_t y(t) = f(y(t), t)$$

alors

$$\partial_t (y \circ \tau)(t) = (\partial_t y \circ \tau)(t) \partial_t \tau(t) = f((y \circ \tau)(t), \tau(t)) \partial_t \tau(t)$$

donc  $z = y \circ \tau$  satisfait

$$\partial_t z(t) = g(z(t), t)$$

avec

$$g(z, t) = f(z, \tau(t)) \partial_t \tau(t)$$

or, si, par exemple  $\tau = \cos$ , alors  $z(\pi) = z(0)$  et il suffit de comparer la valeur approchée au temps  $\pi$  à la valeur au temps initial pour tester une méthode de solution.

## 4.1.2 TESTS DE CONVERGENCE

### 4.1.2.1 OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

La simulation qui nous intéresse est complexe et cela rend plus importante la vérification de ses éléments constitutifs parmi lesquels les multiples approximations par les différences finies aux opérateurs différentiels : le gradient, la divergence, le laplacien et d'autres procédures associées telle la résolution des équations de Stokes-Brinkman et le calcul du terme convectif.

Nous générons une paire de fonctions  $\mathbf{u}^*$  (incompressible) et  $p^*$  et calculons

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{x}} \mathfrak{E}_{\Xi} p^* - \mathfrak{E}_{\Xi} \nabla_{\mathbf{x}} p^* \tag{4.8a}$$

4. Notons qu'il faut tenir compte de l'indétermination à une constante additive près de la pression. Il suffit de soustraire leur moyennes respectives aux pressions avant de les comparer.

$$\mathfrak{D}_x \mathfrak{E}_\Xi \mathbf{u}^* - \mathfrak{E}_\Xi \nabla_x \mathbf{u}^* \quad (4.8b)$$

$$\mathfrak{D}_x \cdot \mathfrak{E}_\Xi \mathbf{u}^* \quad (4.8c)$$

$$\mathfrak{L}_x \mathfrak{E}_\Xi \mathbf{u}^* - \mathfrak{E}_\Xi \Delta_x \mathbf{u}^* \quad (4.8d)$$

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{E}_\Xi \mathbf{u}^*) \mathfrak{E}_\Xi \mathbf{u}^* - \mathfrak{E}_\Xi (\nabla_x \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* \quad (4.8e)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} - \mathfrak{E}_\Xi \mathbf{u}^* \quad (4.8f)$$

$$(\tilde{p} - \mathfrak{E}_\Xi p^*) - \sum_{l \in \Xi} (\tilde{p} - \mathfrak{E}_\Xi p^*)_l w_l \quad (4.8g)$$

où l'évaluation sur la grille  $\mathfrak{E}_\Xi: (\mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}) \mapsto (\Xi \mapsto \mathbb{R})$  est définie par

$$\mathfrak{E}_\Xi \beta: \mathbf{l} \mapsto (\mathfrak{E}_\Xi \beta)_l = \beta(\mathbf{x}_l)$$

et où  $\tilde{\mathbf{u}}$  et  $\tilde{p}$  sont les solutions trouvées à l'équation de Stokes-Brinkman par la méthode discutée à la section 3.2.2. Le terme à droite dans l'équation (4.8g) provient de la nécessité de palier à l'indétermination à une constante additive près de la pression en soustrayant la différence des moyennes.

La figure 4.2 montre les moyennes des erreurs (selon la norme  $\tilde{\mathcal{L}}_\Xi^2(\mathcal{F})$ ) pour 1000 champs générés aléatoirement : comme attendu, il y a clairement une convergence d'ordre deux pour tous les opérateurs considérés. La valeur plus élevée du laplacien<sup>5</sup> explique que ses erreurs soient aussi plus élevées. Un raisonnement semblable s'applique pour le terme de convection. Malgré tout, le graphique est tracé avec les erreurs absolues plutôt que relatives car sans cela il n'aurait pas été possible de comparer la divergence (dont la valeur attendue est nulle) aux autres opérateurs.

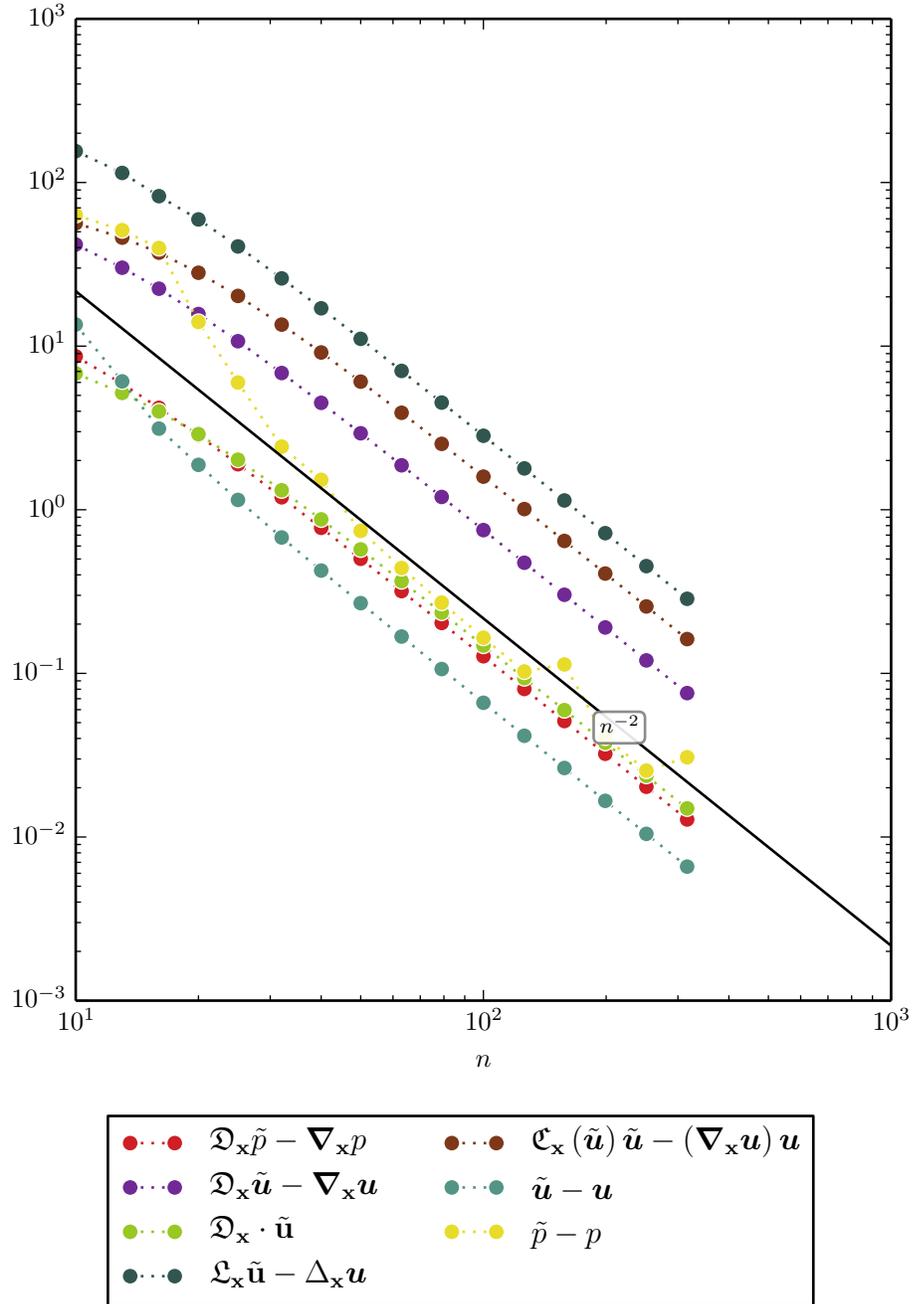
#### 4.1.2.2 QUADRATURES

Notre formulation de l'appariement nous amène à choisir des poids de quadrature (voir 3.1.3.1) et nous souhaitons vérifier à la fois la validité de la méthode et celle de son implémentation. Une fonction  $\mathbf{f}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^N$  construite comme à l'équation (4.2) n'est pas aisément intégrable analytiquement, mais est par contre facilement différentiable, par conséquent nous utilisons le théorème fondamental de l'intégration : pour une grille définie sur un intervalle  $[a, b]$  nous calculons

$$\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a) - \sum_{k \in \Upsilon} (\mathfrak{E}_\Upsilon \mathbf{f}')_k \varpi_k \quad (4.9)$$

5. L'équation 4.6 montre bien qu'une fonction du type (4.2) a une norme moins élevée que celle de son laplacien car nous utilisons (4.3) avec  $L_j = 1$  et que nous choisissons  $c_1 > 1$  dans la définition (4.1) de  $\eta$ .

FIGURE 4.2 – Convergence des approximations aux opérateurs différentiels et des solutions à l'équation de Brinkman



L'axe horizontal correspond au nombre de points dans chaque direction du fluide, l'axe vertical correspond à l'erreur selon la norme  $\tilde{\mathcal{L}}_{\Xi}^2(\mathcal{F})$ . Moyenne de 1000 résultats sur des champs générés aléatoirement.

afin d'évaluer la convergence de notre méthode d'intégration.

La figure 4.3 montre la convergence des erreurs dans la norme euclidienne pour différents choix de poids de quadrature de Gregory appliqués chacun à 1000 champs générés aléatoirement. Les différentes méthodes convergent selon l'ordre attendu, c'est-à-dire entre 2 ( $r = 0$ , méthode des trapèze) à 7 ( $r = 5$ , au-delà de  $r = 7$  certains noeuds ont des poids négatifs).

#### 4.1.2.3 CONVERGENCES DU TRANSPORT DE LA TIGE AVEC INTERPOLATION EXACTE

Afin de tester indépendamment l'intégration dans le temps de la position de la tige de l'interpolation de la vitesse du fluide, nous créons un problème simplifié où la vitesse du fluide est connue exactement à chaque point de la tige. Ainsi, nous cherchons une solution approximative aux équations

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}(0) &= \mathfrak{E}_\Upsilon \mathbf{r}^*(0), & \partial_t \tilde{\mathbf{r}} &= \mathfrak{E}_\Upsilon (\mathbf{u}^* \circ \mathbf{r}^*), \\ \tilde{\mathbf{R}}(0) &= \mathfrak{E}_\Upsilon \mathbf{R}^*(0), & \partial_t \tilde{\mathbf{R}} &= \mathfrak{E}_\Upsilon \text{asym}(\nabla \mathbf{u}^* \circ \mathbf{r}^*) \tilde{\mathbf{R}}\end{aligned}$$

et vérifions le résultat par l'erreur

$$\max \left( \|\tilde{\mathbf{r}}(T) - \mathfrak{E}_\Upsilon \mathbf{r}^*(T)\|, \left\| \tilde{\mathbf{R}}^\dagger(T) (\mathfrak{E}_\Upsilon \mathbf{R}^*(T)) - \mathbf{1} \right\|_2 \right) \quad (4.10)$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme de Frobenius.

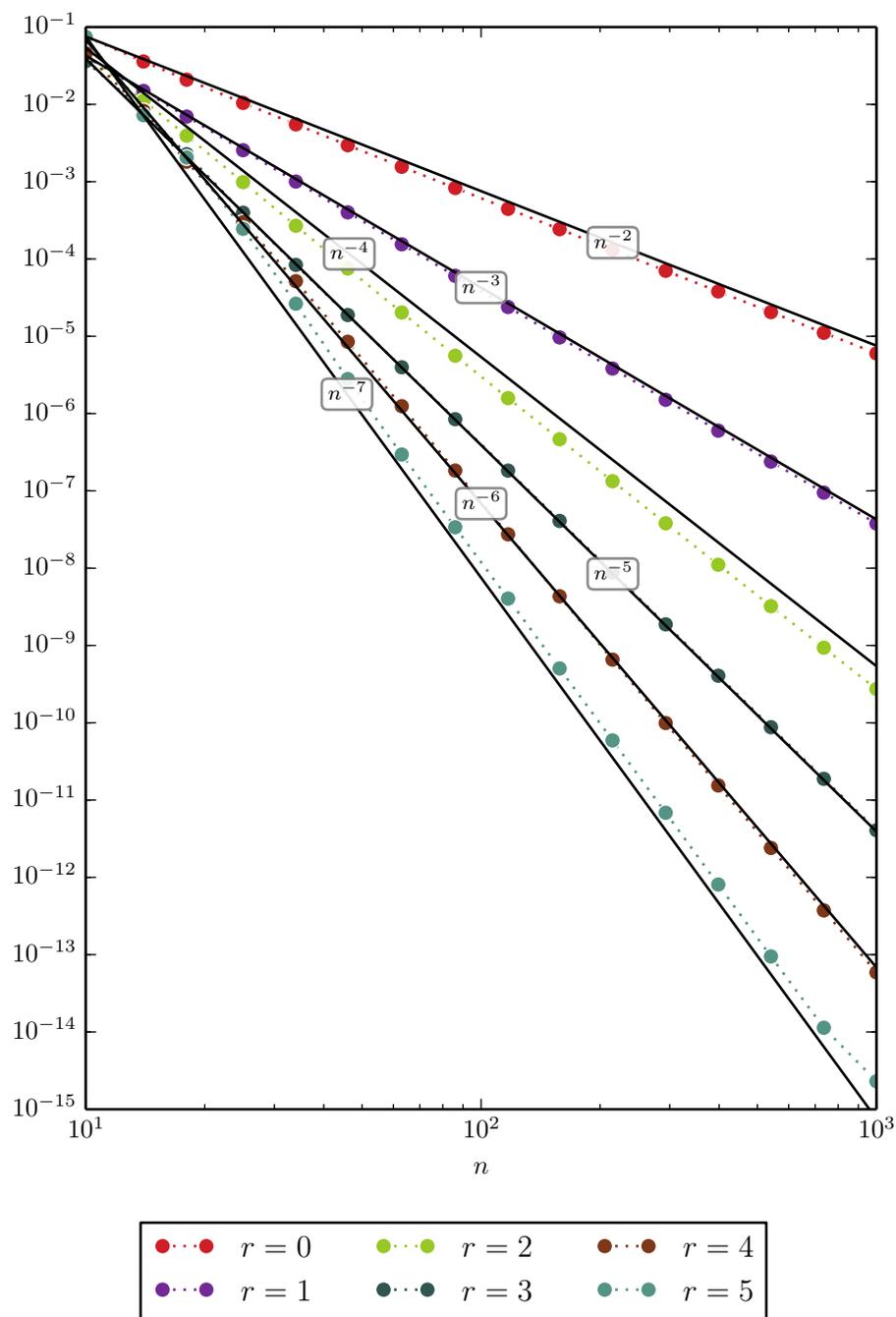
Afin de vérifier complètement le transport de la tige, nous effectuons ces tests en dimension trois puisque les méthodes de Munthe-Kaas (voir la section 3.1.1.3), qui servent à la rotation du repère, sont plus complexes qu'en dimension deux<sup>6</sup>.

La figure 4.4 montre les erreurs en fonction du nombre de points dans la discrétisation temporelle (premier graphique) ou du temps de calcul (deuxième graphique). Ces erreurs sont moyennées sur 10 paires de champs de vitesse et positions de départ générées aléatoirement. Nous remarquons que plus une ligne se rapproche du coin inférieur gauche, plus la méthode associée est efficace. Bien que le temps de calcul est dépendant de nombreuses variables, les implémentations et l'ordinateur sont restés les mêmes. Cependant, il est plus difficile de déduire quelque-chose sur les différences entre les ensembles des méthodes complètement implicites, diagonalement implicites et explicites puisque l'implémentation change nécessairement et qu'aucun effort sérieux n'a été fait pour optimiser les performances.

Malgré tout, il est clair que les méthodes d'Euler sont très peu efficaces, comme l'est aussi la méthode de Koto malgré son ordre de convergence plus élevé. Comme attendu, pour une grande précision, les méthodes d'ordre élevé sont généralement plus efficaces (le plateau final de la méthode de Gauss-Legendre d'ordre 6 provient de la tolérance, fixée à  $10^{-9}$ , du solveur) alors qu'à basse précision, c'est l'inverse.

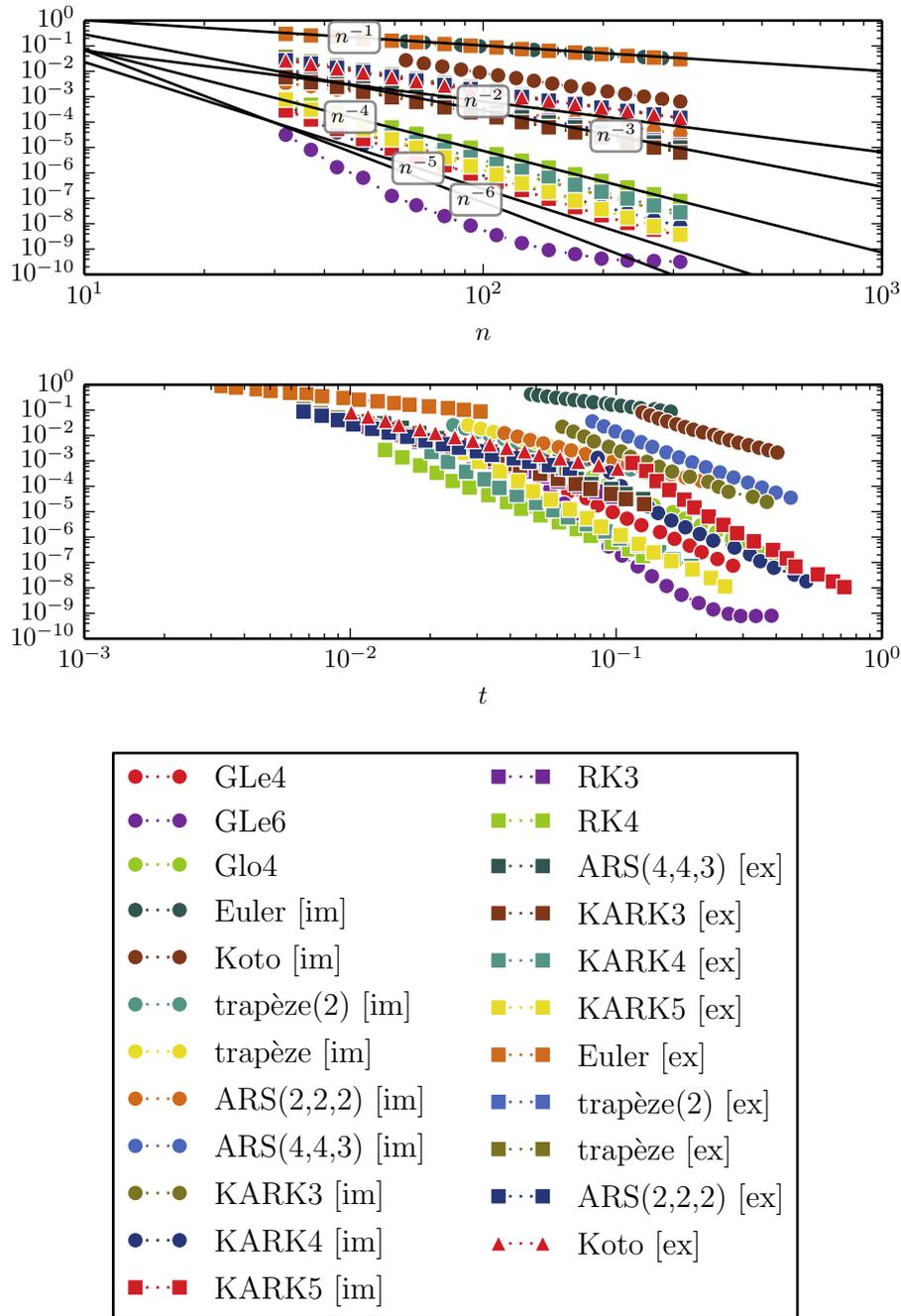
6. Essentiellement à cause de la non-commutativité des rotations pour les dimensions trois et supérieures.

FIGURE 4.3 – Convergence des approximations aux intégrales par la quadrature de Gregory



L'axe horizontal correspond au nombre de points de l'intervalle, l'axe vertical à l'erreur dans la norme euclidienne.  
Moyenne de 1000 résultats sur des champs générés aléatoirement.

FIGURE 4.4 – Convergences du transport de la tige



L'axe vertical correspond à l'erreur maximale entre celle du repère et celle de la ligne moyenne, dans la norme  $\tilde{\mathcal{L}}_T^2(\mathcal{I})$ . L'axe horizontal du premier graphique correspond au nombre de points dans la discrétisation temporelle.

L'axe horizontal du second graphique correspond au temps de calcul.

## 4.1.2.4 CONVERGENCES DU TRANSPORT DE LA TIGE AVEC INTERPOLATION INEXACTE

Le test concerne le même problème que le précédent à la différence que l'interpolation est cette fois inexacte :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}(0) &= \mathfrak{E}_\Upsilon \mathbf{r}^*(0), & \partial_t \tilde{\mathbf{r}} &= \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \mathfrak{E}_\Xi \mathbf{u}^*, \\ \tilde{\mathbf{R}}(0) &= \mathfrak{E}_\Upsilon \mathbf{R}^*(0), & \partial_t \tilde{\mathbf{R}} &= \text{asym} \left( \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}^\dagger \nabla \mathfrak{E}_\Xi \mathbf{u}^* \right) \tilde{\mathbf{R}}.\end{aligned}$$

L'erreur est calculée comme précédemment, voir (4.10).

La figure 4.5 montre l'erreur en fonction du nombre de points dans la discrétisation temporelle et du temps de calcul alors que le nombre de points dans la discrétisation spatiale reste fixe (128 noeuds dans chaque direction pour le fluide et 8 pour la tige<sup>7</sup>).

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (voir §C.1.1), lorsque combinée au noyau  $\phi_{i,6}$  (voir §D.3), semble conserver son ordre de convergence quoique la courbe suggère un aplatissement pour un raffinement temporel élevé, mais cela s'explique par la fixité du raffinement spatial qui borne inférieurement l'erreur.

## 4.1.2.5 ADVECTION DU FLUIDE

Au coeur de la simulation de la nage se trouve celle du fluide, il paraît donc primordial de vérifier que les équations de Navier-Stokes soient résolues correctement, mais ce test n'est pas déterminant sur la qualité du solveur complet car il n'est question que de champs analytiques alors que notre formulation de la nage engendre des discontinuités dans le gradient du fluide.

Nous utilisons la méthode de la solution fabriquée décrite ci-haut (§4.1.1.1), ainsi nous cherchons la solution approchée  $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}$  aux équations

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla p &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

avec comme point de départ

$$\tilde{\mathbf{u}}(0) = \mathfrak{E}_\Xi \mathbf{u}^*(0)$$

et prenons la norme de

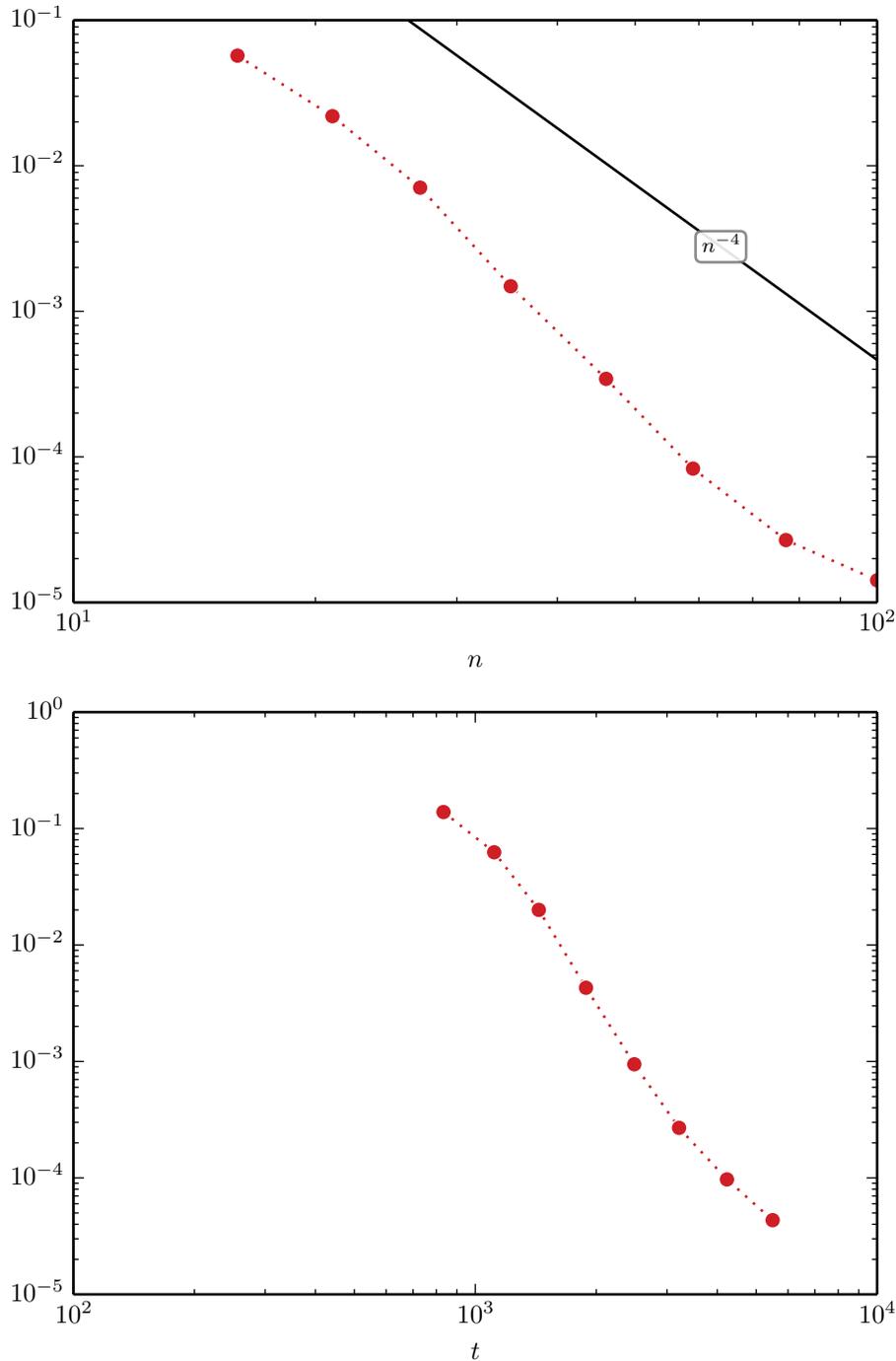
$$\tilde{\mathbf{u}}(T) - \mathfrak{E}_\Xi \mathbf{u}^*(T)$$

comme l'erreur.

**RAFFINEMENT DE LA GRILLE TEMPORELLE** En premier lieu, avec une grille spatiale fixe, nous varions le raffinement du maillage temporel afin de percevoir l'effet du choix de l'un ou l'autre des intégrateurs. Les résultats sont présentés à la figure 4.6. Le plateau qui y est visible est une conséquence du raffinement spatial fixe. Mais avant que les courbes s'y aplanissent, la meilleure performance de

<sup>7</sup>. Ce petit nombre n'influence en rien la convergence puisque la qualité de l'interpolation ne dépend que du raffinement de la grille du fluide et que chaque point de la tige est transporté indépendamment des autres. Cela est démontré dans la colonne de gauche de la figure 4.10.

FIGURE 4.5 – Convergences du transport de la tige avec interpolation inexacte pour la méthode RK4 et le noyau  $\phi_{i,6}$



L'axe vertical correspond à l'erreur maximale entre celle du repère et celle de la ligne moyenne, dans la norme  $\tilde{\mathcal{L}}_T^2(\mathcal{I})$ . L'axe horizontal du premier graphique correspond au nombre de points dans la discrétisation temporelle. L'axe horizontal du second graphique correspond au temps de calcul : plus une ligne se rapproche du coin inférieur gauche, plus elle est efficace. Moyenne de 4 résultats sur des champs générés aléatoirement.

la méthode d'ordre 4 sur la méthode d'ordre 3 est visible (voir la section C.2 pour les tableaux de Butcher). La méthode d'ordre 5 semble n'avoir aucun avantage pour une grille du fluide de grandeur raisonnable.

**RAFFINEMENTS PARALLÈLES DES GRILLES TEMPORELLE ET SPATIALE** Dans le cas où des raffinements comparables soient fait autant sur les grilles temporelles que spatiales, nous ne nous attendons pas à trouver de plateau comme précédemment. La figure 4.7 démontre cependant que la discrétisation spatiale est toujours ce qui limite l'ordre de convergence. Malgré l'ordre de convergence élevé de certaine méthode d'intégration, la discrétisation d'ordre deux du fluide (voir §3.1.2.2) domine l'erreur. Par conséquent, il n'est pas surprenant que ce soit les méthodes d'ordre 2 qui soient les plus efficaces.

#### 4.1.2.6 TESTS DE L'INTERPOLATION ET DE L'ÉTALEMENT

Nous souhaitons vérifier la précision des opérateurs d'interpolation et d'étalement, pour cela nous construisons, par la technique décrite à la section 4.1.1.1, deux champs scalaires, l'un ( $\zeta$ ) sur la tige, l'autre ( $\theta$ ) sur le fluide

$$\zeta: \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}, \quad \theta: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}.$$

Leur pendants discrets sont générés par les opérateurs d'évaluation sur les grilles  $\mathfrak{E}_\Upsilon: (\mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}) \mapsto (\Upsilon \mapsto \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{E}_\Xi: (\mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}) \mapsto (\Xi \mapsto \mathbb{R})$  définis par

$$\mathfrak{E}_\Upsilon \alpha: k \mapsto (\mathfrak{E}_\Upsilon \alpha)_k = \alpha(\mathbf{X}_{1,k}), \quad \mathfrak{E}_\Xi \beta: \mathbf{l} \mapsto (\mathfrak{E}_\Xi \beta)_\mathbf{l} = \beta(\mathbf{x}_\mathbf{l}).$$

Pour ne pas surcharger les équations suivantes, nous définissons

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathfrak{E}_\Upsilon \mathbf{r}, \quad \tilde{\zeta} = \mathfrak{E}_\Upsilon \zeta, \quad \tilde{\theta} = \mathfrak{E}_\Xi \theta.$$

**TEST DE L'INTERPOLATION** En premier lieu, nous testons l'interpolation; comme nous ne pouvons pas calculer l'erreur en utilisant la norme  $\mathcal{L}^2(\mathcal{I})$ , nous nous contentons de son approximation discrète  $\tilde{\mathcal{L}}_\Upsilon^2(\mathcal{I})$  où l'intégrale est remplacée par une somme. Dans le cas d'une tige fermée, cette approximation pas significativement l'erreur calculée, car nous utilisons alors la méthode du trapèze qui, pour des fonctions périodiques lisses, est superconvergente (voir la discussion à la page 74); c'est-à-dire que son erreur diminue plus vite que n'importe quel puissance or, l'interpolation, nous le verrons, a une erreur qui diminue comme une puissance.

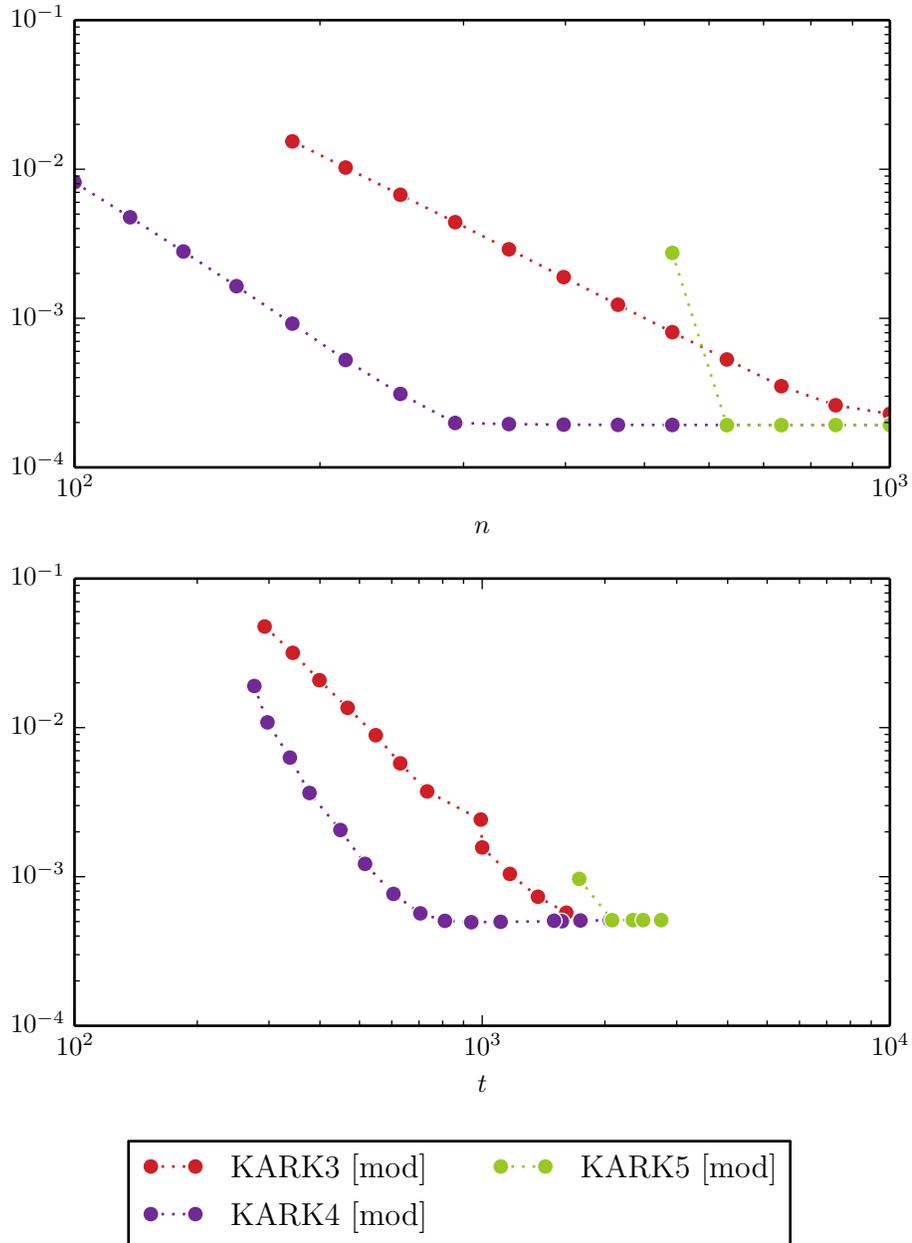
L'erreur de l'interpolation de la fonction  $\theta$  sur la tige représentée par la ligne moyenne  $\mathbf{r}$  est

$$\left\| \mathfrak{A}_\Upsilon^\dagger \tilde{\theta} - \mathfrak{E}_\Upsilon(\theta \circ \mathbf{r}) \right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_\Upsilon^2(\mathcal{I})} \quad (4.11)$$

alors que l'erreur de l'interpolation de son gradient, calculé via le delta, est

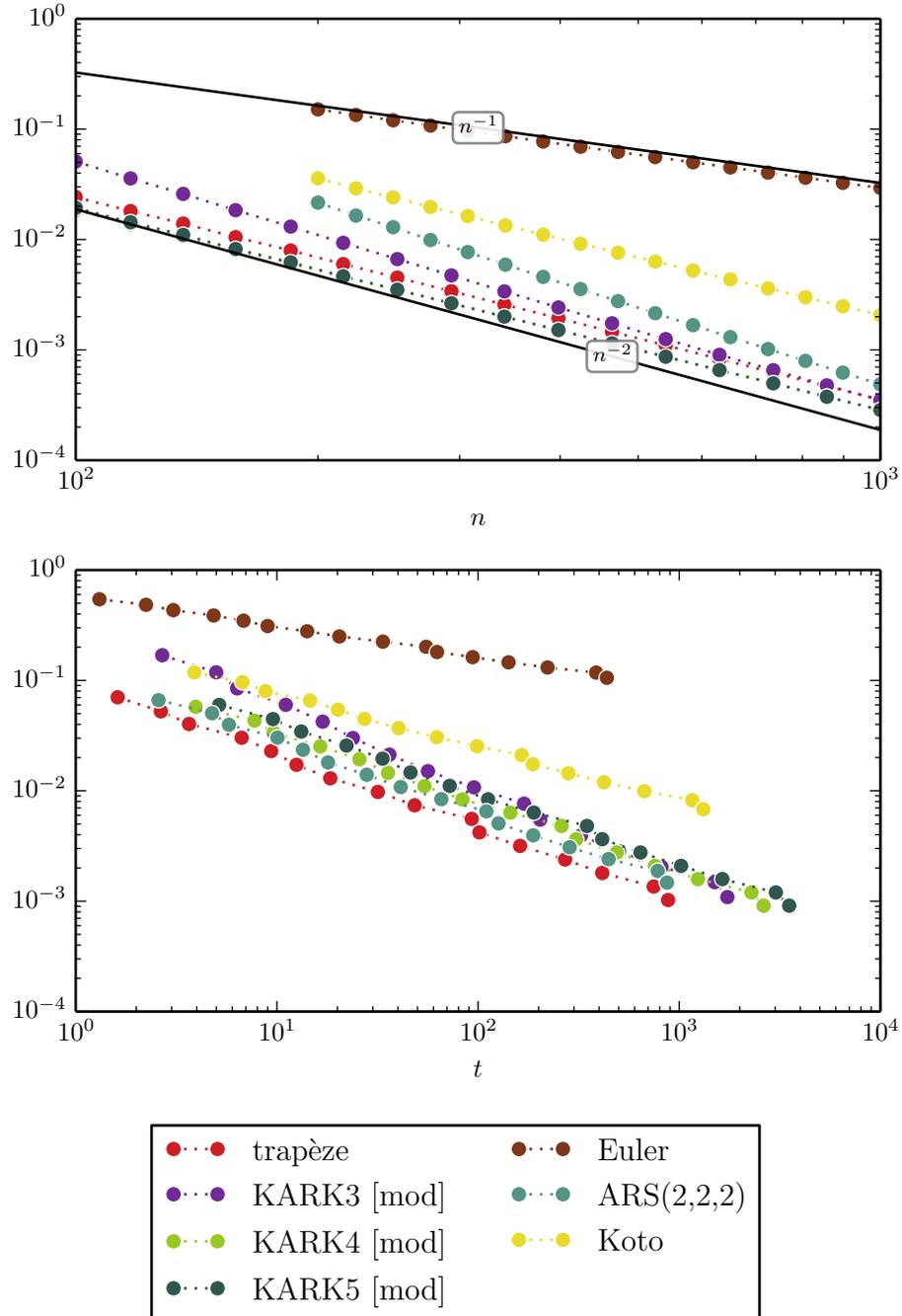
$$\left\| \left( \mathfrak{A}_\Upsilon^\dagger \mathfrak{D}_x \right) \tilde{\theta} - \mathfrak{E}_\Upsilon(\nabla_x \theta \circ \mathbf{r}) \right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_\Upsilon^2(\mathcal{I})} \quad (4.12)$$

FIGURE 4.6 – Convergences de l'advection du fluide



L'axe vertical correspond à l'erreur dans la norme  $\tilde{\mathcal{L}}_{\Xi}^2(\mathcal{F})$ . L'axe horizontal du premier graphique correspond au nombre de points dans la discrétisation temporelle (la grille du fluide était fixée). L'axe horizontal du second graphique correspond au temps de calcul : plus une ligne se rapproche du coin inférieur gauche, plus elle est efficace. Moyenne de 2 résultats sur des champs générés aléatoirement.

FIGURE 4.7 – Borne sur la convergence temporelle de l’advection du fluide causée par l’imprécision spatiale



L’axe vertical correspond à l’erreur dans la norme  $\tilde{\mathcal{L}}_{\Xi}^2(\mathcal{F})$ . L’axe horizontal du premier graphique correspond au nombre de points dans la discrétisation temporelle. L’axe horizontal du second graphique correspond au temps de calcul : plus une ligne se rapproche du coin inférieur gauche, plus elle est efficace. Moyenne de 6 résultats sur des champs générés aléatoirement.

et que la même erreur, mais où le gradient est calculé de façon à correspondre à l'opérateur de gradient dans le fluide, est

$$\left\| \left( \mathfrak{A}_r^\dagger \nabla_{\mathbf{x}} \right) \tilde{\theta} - \mathfrak{E}_\Upsilon (\nabla_{\mathbf{x}} \theta \circ \mathbf{r}) \right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_\Upsilon^2(\mathcal{I})}. \quad (4.13)$$

La colonne gauche de la figure 4.8 montre les trois erreurs ci-dessus dans l'ordre. La performance du noyau  $\phi_{w1,4}$  (voir le tableau 3.II ou la section D pour les détails des noyaux) est désastreuse dans tout les cas alors que si, pour l'interpolation, ses résultats sont corrects, le noyau trigonométrique ( $\phi_t$ ) est incapable d'interpoler le gradient du fluide. Les courbes de convergence des autres méthodes sont telles qu'attendues, avec un ordre qui diminue de 1 lorsque nous passons de l'interpolation simple à celle du gradient et qui ne dépasse pas 2 lorsque le gradient est calculé par une méthode d'ordre 2 (voir §3.1.2.2) avant d'être interpolé.

**TEST DES DÉRIVÉES DE L'INTERPOLATION** Comme le calcul de la force et du couple transmis au fluide contient des dérivées de la ligne moyenne et du repère de la tige et que l'évolution temporelle de ceux-ci dépend de l'interpolation de la vitesse du fluide et de son gradient, nous sommes intéressés à savoir comment se comporte l'erreur des dérivées des interpolations. Néanmoins, nous souhaitons tester les noyaux, et non pas la méthode de dérivation : nous utilisons donc une méthode d'ordre plus élevé (ici 8) que celui du meilleur noyau (ici 6).

L'erreur de la dérivée de l'interpolation s'écrit

$$\left\| \mathfrak{A}_r^\dagger \tilde{\theta} - \mathfrak{E}_\Upsilon (\partial_{X_1} (\theta \circ \mathbf{r})) \right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_\Upsilon^2(\mathcal{I})}, \quad (4.14)$$

celle de la dérivée de l'interpolation indirecte du gradient est

$$\left\| \left( \mathfrak{A}_r^\dagger \mathfrak{D}_{\mathbf{x}} \right) \tilde{\theta} - \mathfrak{E}_\Upsilon (\partial_{X_1} (\nabla_{\mathbf{x}} \theta \circ \mathbf{r})) \right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_\Upsilon^2(\mathcal{I})} \quad (4.15)$$

et l'erreur de la dérivée de l'interpolation directe du gradient se note

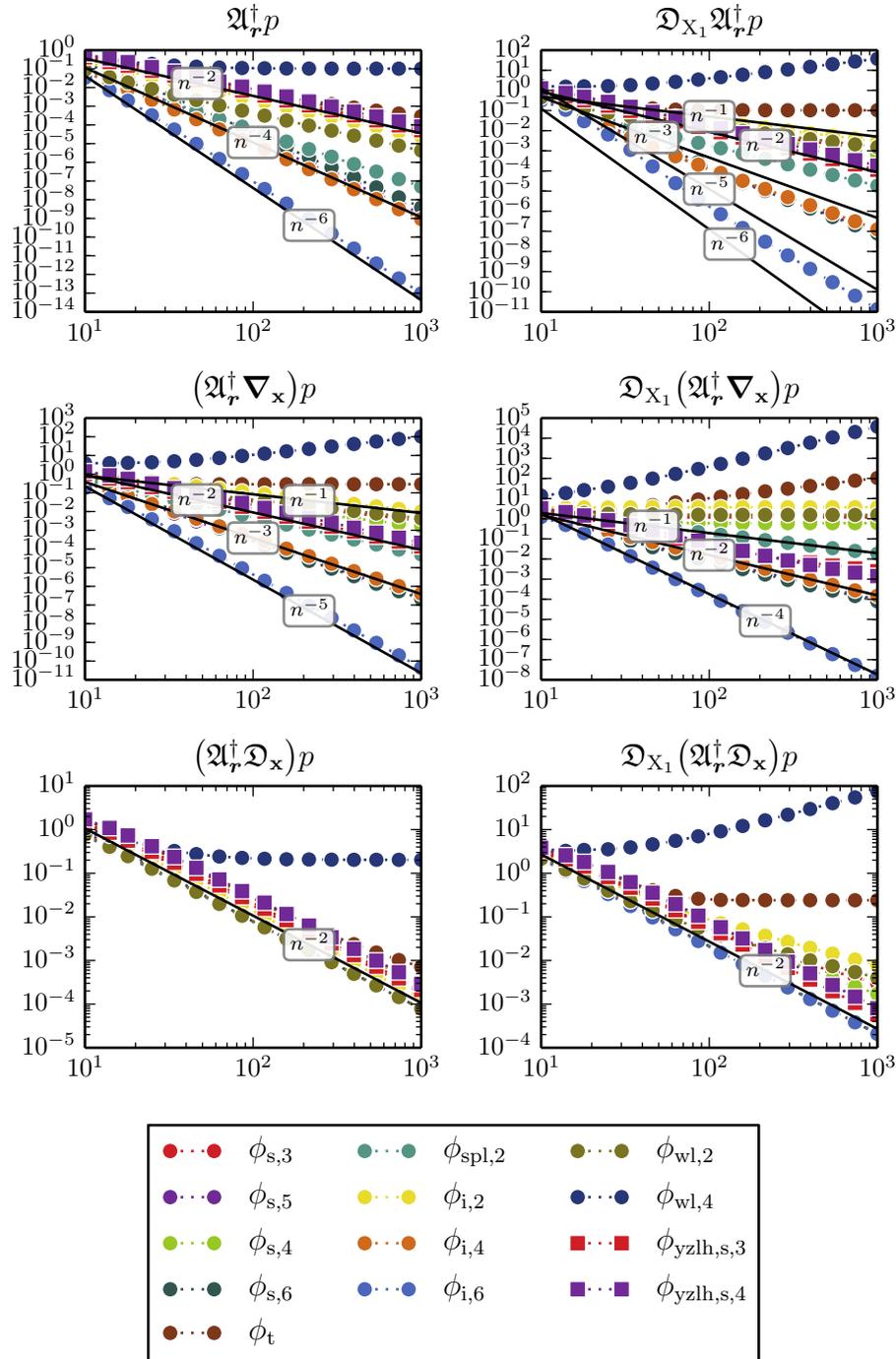
$$\left\| \left( \mathfrak{A}_r^\dagger \nabla_{\mathbf{x}} \right) \tilde{\theta} - \mathfrak{E}_\Upsilon (\partial_{X_1} (\nabla_{\mathbf{x}} \theta \circ \mathbf{r})) \right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_\Upsilon^2(\mathcal{I})}. \quad (4.16)$$

La deuxième colonne de la figure 4.8 présente ces erreurs. Les mauvaises performances des noyaux  $\phi_t$  et, surtout,  $\phi_{w1,4}$  sont évidentes si nous les comparons aux autres noyaux, qui perdent environ 1 ordre de convergence pour la dérivée de l'interpolation et 2 pour la dérivée de l'interpolation directe du gradient tandis que l'ordre de convergence plafonne à 2 quand le gradient est calculé par une méthode de cet ordre avant d'être interpolé.

**TEST DE L'ÉTALEMENT** Pour calculer l'erreur de l'étalement, nous avons besoin d'une paire de fonctions  $(\zeta, \theta)$ , nous utilisons l'identité (2.72) :

$$\left\| \left\langle \mathfrak{A}_r \tilde{\zeta}, \tilde{\theta} \right\rangle_{\tilde{\mathcal{L}}_\Xi^2(\mathcal{F})} - \left\langle \tilde{\zeta}, \mathfrak{E}_\Upsilon (\theta \circ \mathbf{r}) \right\rangle_{\tilde{\mathcal{L}}_\Upsilon^2(\mathcal{I})} \right\|_{\mathbb{R}} \quad (4.17)$$

FIGURE 4.8 – Convergence de l’interpolation en fonction du nombre de points dans le fluide et sur la tige



L’axe horizontal correspond à la fois au nombre de points dans chaque direction dans le fluide et au nombre de points sur la tige. L’axe vertical correspond à la norme  $\tilde{\mathcal{L}}_r^2(\mathcal{I})$  des erreurs. Moyenne de 500 résultats sur des champs générés aléatoirement.

la même chose peut être faire pour le gradient indirect de l'étalement

$$\left\| \left\langle (\mathfrak{D}_{\mathbf{x}} \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}) \tilde{\zeta}, \tilde{\theta} \right\rangle_{\tilde{\mathcal{L}}_{\Xi}^2(\mathcal{F})} - \left\langle \tilde{\zeta}, \mathfrak{E}_{\Upsilon}(\nabla_{\mathbf{x}} \theta \circ \mathbf{r}) \right\rangle_{\tilde{\mathcal{L}}_{\Upsilon}^2(\mathcal{I})} \right\|_{\mathbb{R}^N} \quad (4.18)$$

et pour le gradient direct de l'étalement

$$\left\| \left\langle (\nabla_{\mathbf{x}} \mathfrak{A}_{\tilde{\mathbf{r}}}) \tilde{\zeta}, \tilde{\theta} \right\rangle_{\tilde{\mathcal{L}}_{\Xi}^2(\mathcal{F})} - \left\langle \tilde{\zeta}, \mathfrak{E}_{\Upsilon}(\nabla_{\mathbf{x}} \theta \circ \mathbf{r}) \right\rangle_{\tilde{\mathcal{L}}_{\Upsilon}^2(\mathcal{I})} \right\|_{\mathbb{R}^N}. \quad (4.19)$$

La figure 4.9 permet d'observer que les erreurs ci-dessus ont un comportement asymptotique comparable à celles de l'interpolation, et ce, indépendamment de si la tige est fermée (première colonne) ou non<sup>8</sup> (deuxième colonne). En effet, l'ordre de convergence est le même pour l'étalement que pour l'interpolation pour chacun des noyaux et cet ordre diminue de 1 quand il est question du gradient de l'étalement. De la même manière, l'ordre de convergence est limité à 2 quand ce gradient est calculé indirectement par des différence finies du même ordre.

Dans la littérature actuelle, il n'existe pas de système pour fixer le rapport du raffinement spatial du fluide par rapport celui de la tige : la figure 4.10 montre, comme attendu, que raffiner le maillage du fluide par rapport au nombre de points sur la tige accroît de façon monotone la précision du résultat. Quand la fonction interpolée est ensuite dérivée, par contre, il y a un rapport optimal entre nombre de points moyen dans une direction du fluide et le nombre de points sur la tige. Cet optimum varie selon la méthode : un plus grand raffinement spatial pour celles ayant un ordre petit et vice-versa. Ainsi, nonobstant la différence entre les fonctions lisses avec lesquelles ces tests sont fait et les champs de vitesses simulés, il serait légitime de choisir un rapport

$$\frac{\Delta X_1}{\Delta x}$$

autour des points optimaux (les optimums ne coïncident pas tout à fait entre l'interpolation simple et celles du gradient) pour un noyau donné.

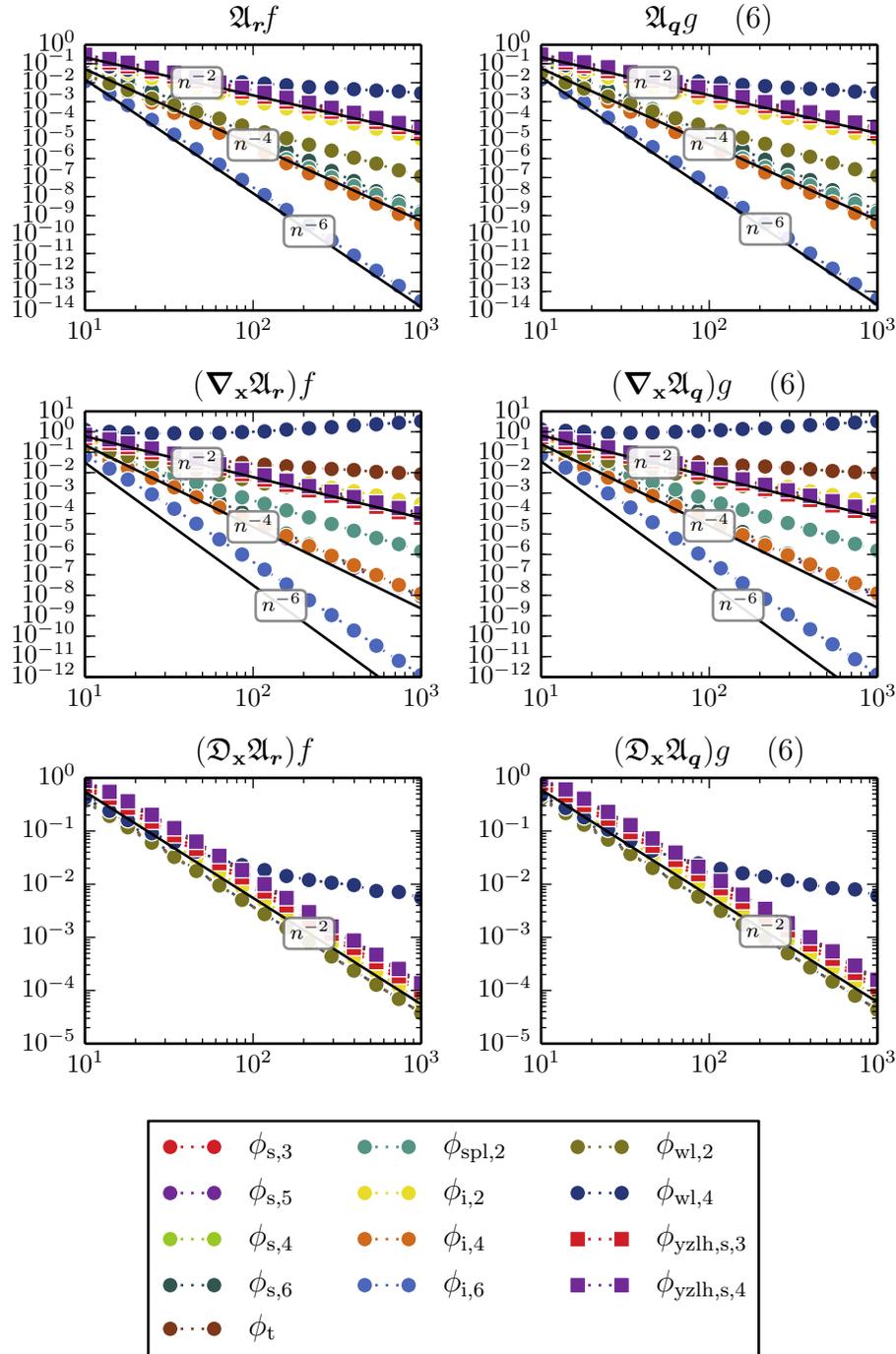
Pour l'étalement, la comparaison, à la figure 4.11, des erreurs pour une tige ouverte et une tige fermée montre qu'il ne faut pas trop limiter le nombre de points sur la tige dans ce dernier cas.

La figure 4.12 permet de saisir l'importance du choix de quadrature : l'ordre de convergence de l'étalement en est directement tributaire. En effet, l'étalement avec le noyau  $\phi_{i,6}$  peut être ramené à un ordre de convergence aussi petit que 1 (ce qui est le résultat de prendre des poids tous égaux à  $h$  comme pour une tige fermée<sup>9</sup>) selon le choix de quadrature.

8. L'opérateur d'étalement dépend de poids d'intégration sur la tige, comme discuté à la section 3.1.3.3. Une méthode d'ordre 6 a été utilisée dans le cas de la tige ouverte, ainsi l'ordre de convergence de l'étalement n'est pas limité par celui des poids de quadrature. Au contraire, la figure 4.12 montre l'effet de la variation des poids de quadrature pour un noyaux donné.

9. Lim semble, dans [73], l'ignorer. Il contourne peut-être le problème en utilisant des noeuds fantômes aux extrémités.

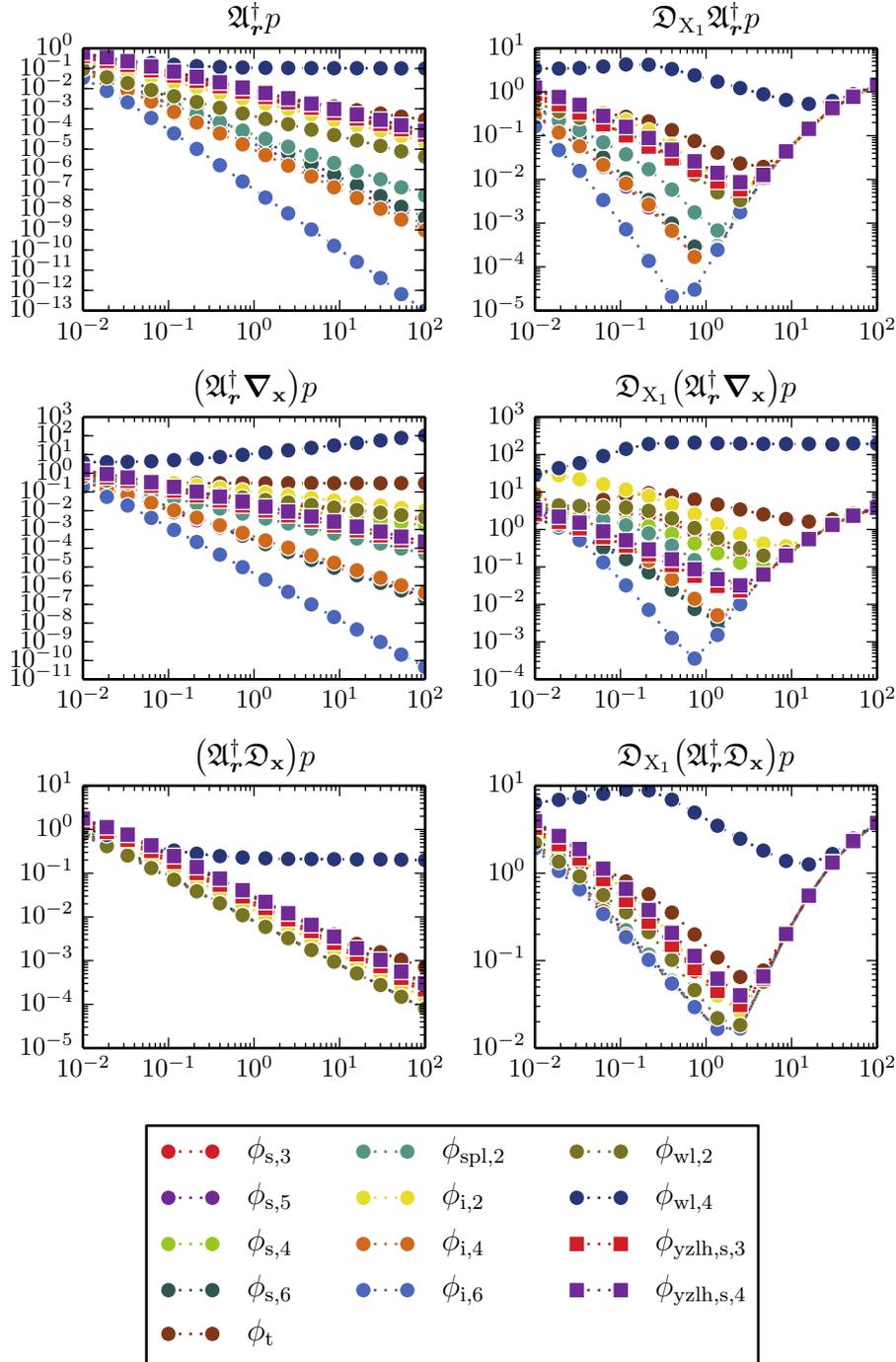
FIGURE 4.9 – Convergence de l'étalement en fonction du nombre de points dans le fluide et sur la tige



L'axe horizontal correspond à la fois au nombre de points dans chaque direction dans le fluide et au nombre de points sur la tige. L'axe vertical correspond à la norme euclidienne des erreurs. La première colonne concerne une tige fermée, la deuxième, une tige ouverte pour laquelle une méthode d'ordre 6 a été utilisée pour l'intégrale.

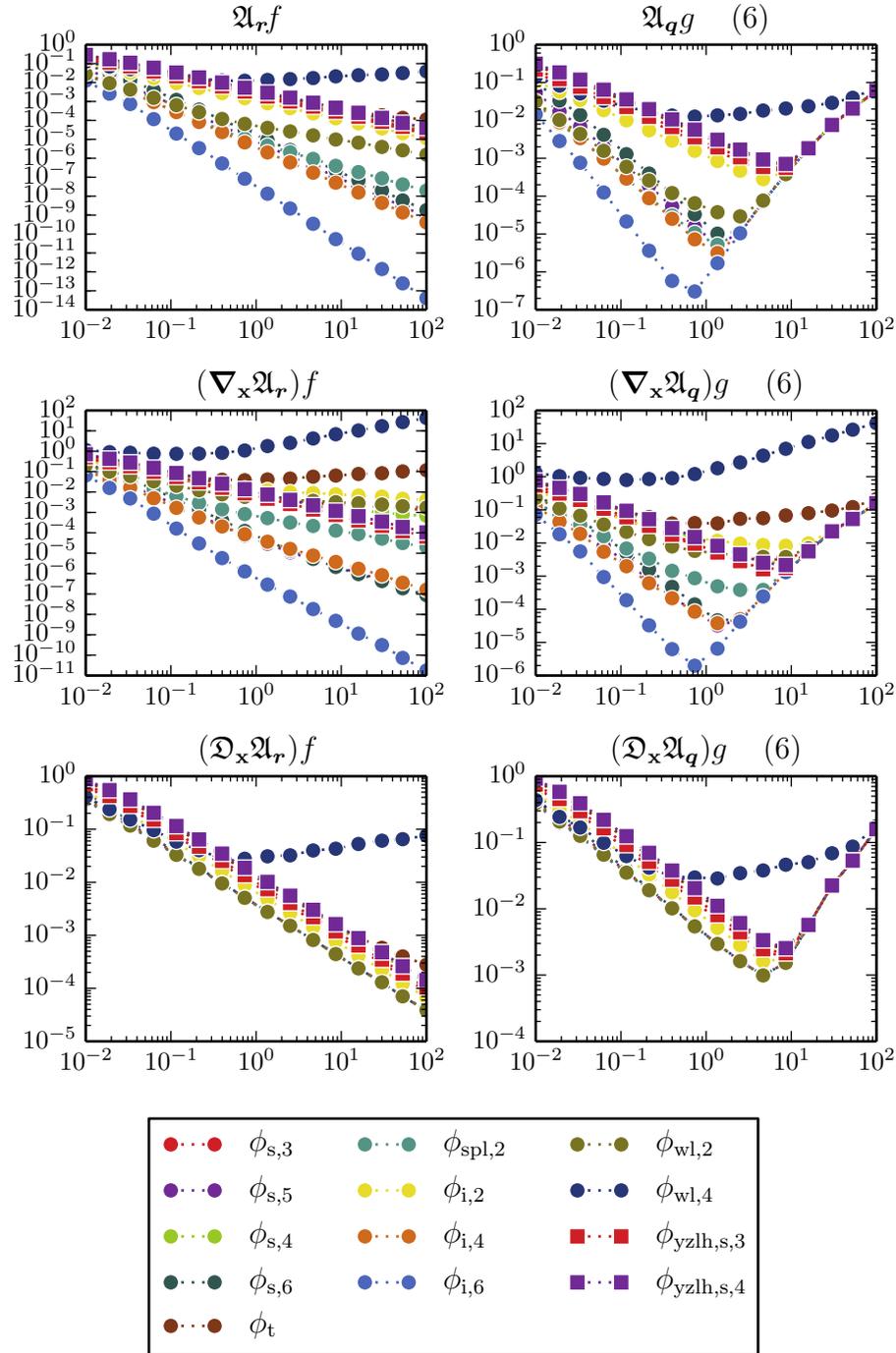
Moyenne de 500 résultats sur des champs générés aléatoirement.

FIGURE 4.10 – Convergence de l'interpolation en fonction du rapport du nombre de points dans le fluide par le nombre de points sur la tige



L'axe horizontal correspond au rapport du nombre de points dans chaque direction dans le fluide sur le nombre de points sur la tige. L'axe vertical correspond à la norme  $\tilde{\mathcal{L}}_r^2(\mathcal{I})$  des erreurs. Moyenne de 500 résultats sur des champs générés aléatoirement.

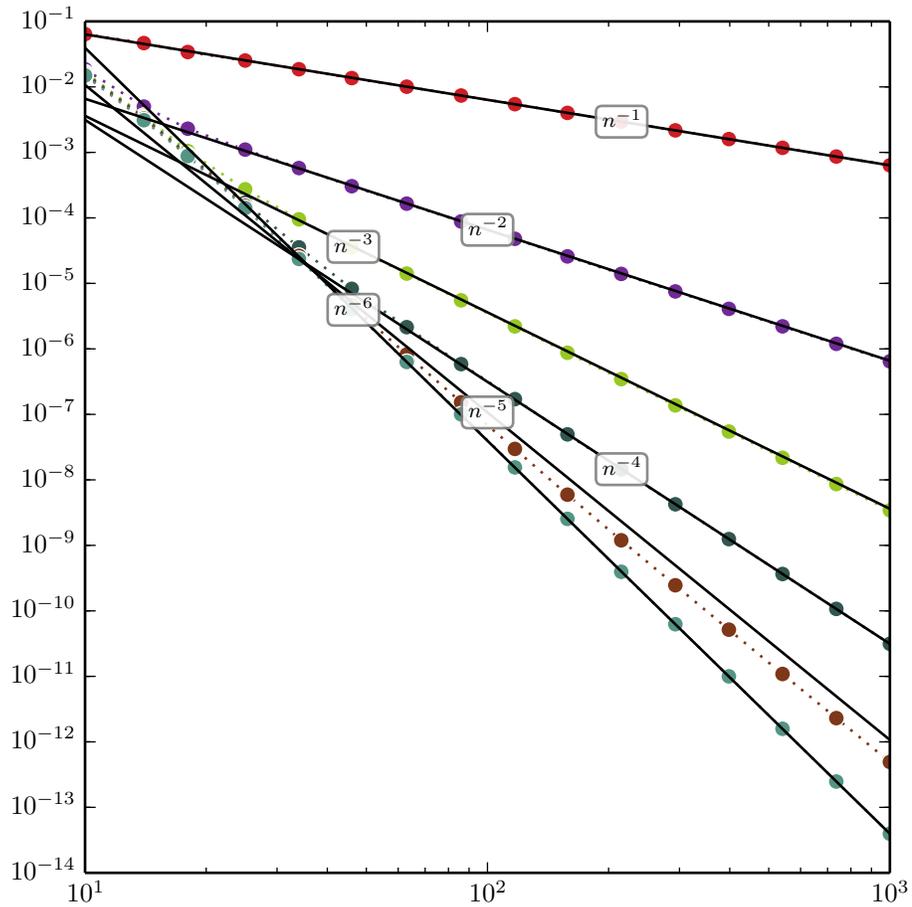
FIGURE 4.11 – Convergence de l'étalement en fonction du rapport du nombre de points dans le fluide par le nombre de points sur la tige



L'axe horizontal correspond au rapport du nombre de points dans chaque direction dans le fluide sur le nombre de points sur la tige. L'axe vertical correspond à la norme euclidienne des erreurs. La première colonne concerne une tige fermée, la deuxième, une tige ouverte pour laquelle une méthode d'ordre 6 a été utilisée pour l'intégrale.

Moyenne de 500 résultats sur des champs générés aléatoirement.

FIGURE 4.12 – Convergence de l'étalement pour le noyau  $\phi_{1,6}$  selon différentes méthodes d'intégration sur la tige



L'axe horizontal correspond à la fois au nombre de points dans chaque direction dans le fluide et au nombre de points sur la tige. L'axe vertical correspond à la norme euclidienne des erreurs. Les différentes lignes correspondent à des méthodes différentes pour l'intégration sur la tige. Moyenne de 500 résultats sur des champs générés aléatoirement.

### 4.1.3 SIMULATIONS

#### 4.1.3.1 COMPARAISON AVEC LA TIGE OUVERTE DE LIM

Dans son article de 2010 [73], Lim présente une légère généralisation du modèle de Lim, Ferent, Wang et Peskin dans [74], la première exposition sur la méthode de la frontière immergée généralisée. Il ouvre la tige et lui permet d'avoir une courbure de repos arbitraire. La configuration initiale est choisie comme suit

$$\mathbf{r}(X_1) = (0, 0, (1 + \epsilon) X_1),$$

$$\mathbf{d}_1 = (0, \sin(\epsilon), \cos(\epsilon)), \quad \mathbf{d}_2 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{d}_3 = (0, \cos(\epsilon), -\sin(\epsilon))$$

alors que sa déformation naturelle implique une torsion pure (voir 2.2.1.7) :

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{0}, \\ \hat{\boldsymbol{\Omega}} &= 2\tau \mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{E}_2. \end{aligned}$$

La tige est libre de se déformer dans le fluide en minimisant son énergie pour atteindre un état d'équilibre (voir 4.14), potentiellement distinct de son état de repos<sup>10</sup>.

Afin de vérifier si le solveur est équivalent à celui de Lim (du moins quand le choix du noyau et de la méthode d'intégration est identique), nous nous en servons pour simuler le mouvement d'une tige telle que ci-dessus avec une torsion de  $\tau = 4\pi$ . Comme il n'est pas possible de comparer quantitativement les configurations successives de nos simulations avec celles de Lim<sup>11</sup>, nous nous intéressons plutôt à la courbe de relaxation de l'énergie potentielle élastique (B.15) montrée à la figure 4.13. Le contenu de ce graphique devrait être exactement le même qu'à la figure 3 de [73], mais le temps de relaxation qu'obtient Lim est environ 1000 fois plus petit que ce à quoi nous arrivons.

Il y a donc une différence majeure entre nos deux simulateurs qui est d'autant plus difficilement explicable que notre code devrait être, lorsque configuré correctement, totalement équivalent à celui utilisé dans [73]. Malheureusement, l'article [74] sur lequel est basé la recherche de Lim sur les tiges ouvertes ne présente les résultats que sous forme d'images des configurations dont l'exploitation à des fins de comparaison directe est malaisée.

Néanmoins, l'état d'équilibre atteint dans notre simulation montré à la figure 4.14, ou plutôt un état proche car le graphique 4.13 suggère que l'état d'équilibre asymptotique n'est pas tout à fait atteint, ressemble qualitativement à celui trouvé par Lim avec deux boucles au centre et des extrémités plus droites.

10. L'état de repos est celui où la déformation de la tige par rapport à sa configuration de référence est nulle : le minimum d'énergie potentielle (voir l'équation B.15). La formation d'un noeud peut en empêcher l'atteinte : dans ce cas, et comme il n'y a aucun apport d'énergie (contrairement à la nage), un minimum local – stable ou non – sera quand même rejoint.

11. Seules des illustrations sont montrées, les données brutes ne nous sont pas connues.

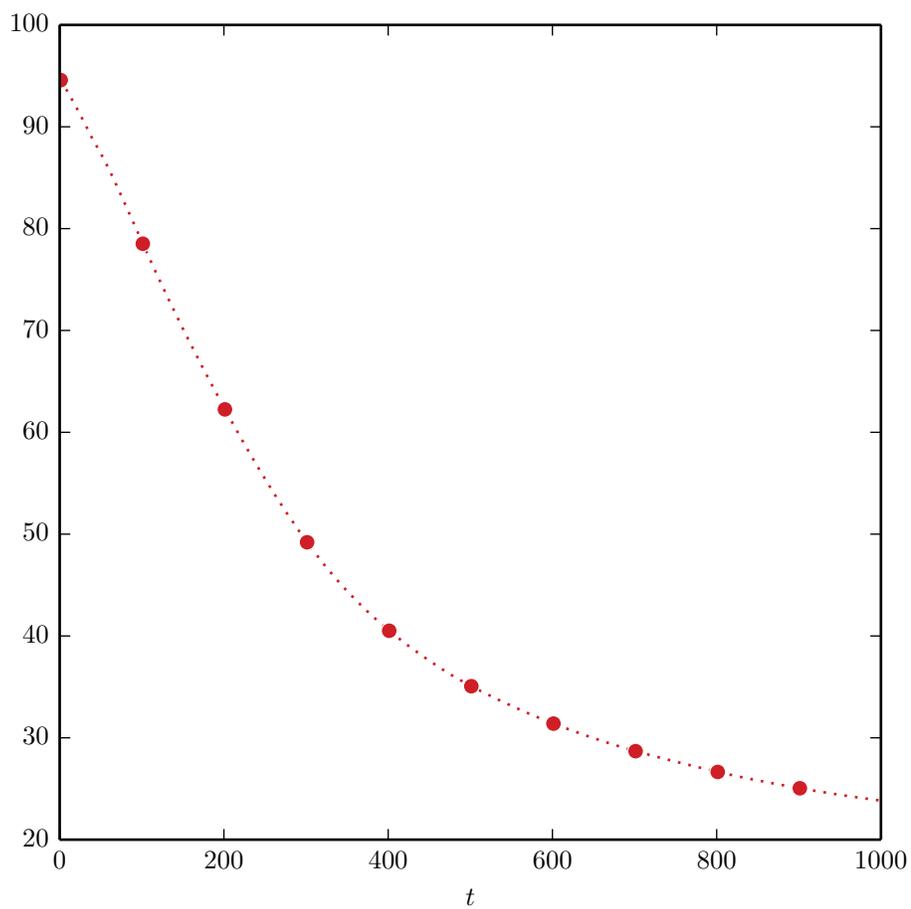
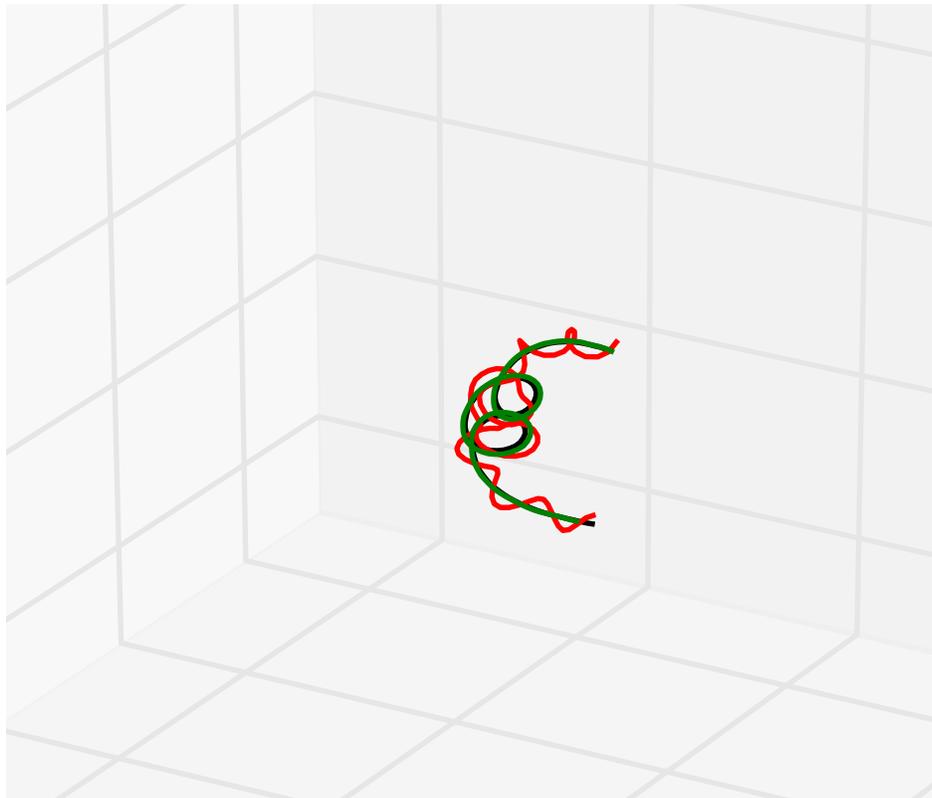
FIGURE 4.13 – Dissipation de l'énergie de la tige par le fluide pour une torsion égale à  $4\pi$ 

FIGURE 4.14 – État d'équilibre pour une torsion égale à  $4\pi$ 

Ce graphique est généré à partir de la position de la ligne moyenne  $\mathbf{r}$  (trait noir) et de deux directeurs illustrés par deux courbes (rouge et verte)  $\mathbf{r} + \gamma \mathbf{d}_\alpha$  (où  $\gamma$  est un paramètre de la visualisation).

## 4.2 NAGE

Cette section concerne notre tentative d'utiliser des états de repos « dynamiques » afin de faire de la tige un nageur comparable au nématode, et, en deuxième lieu, à tous les nageurs anguilliformes. Cela suppose premièrement que nous connaissions les caractéristiques des nages que nous souhaitons simuler et qu'ensuite nous les utilisions pour paramétrer notre modèle.

### 4.2.1 DONNÉES EXPÉRIMENTALES

Bien que les nématodes aient été largement étudiés pour leur biologie, leur locomotion a suscité moins d'intérêt, peut-être à cause de sa relative simplicité. Or c'est en partie pour sa simplicité que nous avons choisi de simuler cette nage. Nous rassemblons dans la table 4.I des données issues d'observations de nématodes recueillies par Sznitman *et al.*

TABLE 4.I – *Caenorhabditis elegans*

	symbole	unité	article		
			[106]	[107]	[108]
nombre de Reynolds	$Re$	1	0,4	0,4	0,4
viscosité	$\mu$	mPa·s	1,1	1,0	1,0
densité	$\rho$	kg·m <sup>-3</sup>	1000	1150 <sup>†</sup>	1110 <sup>†</sup>
vitesse de la nage	$U$	μm·s <sup>-1</sup>	450	350	360 ± 10
fréquence	$f$	Hz	2,17 ± 0,18	2,02 ± 0,04	2,0
diamètre	$d$	μm	-	-	80
longueur	$L$	μm	1000	1000	1060 ± 60
amplitude à la tête	$A_t$	μm	465	490	250
amplitude à la queue	$A_q$	μm	400	375	250
module de Young	$Y$	Pa	3770 ± 620	620 ± 50	-
viscosité	$\eta$	Pa·s	-860,2 ± 99,4	-177,1 ± 15,2	-

<sup>†</sup> Ces densités ont été calculées à partir du nombre de Reynolds.

### 4.2.2 HYPOTHÈSES

Nous considérons le nageur comme une tige de Reissner-Simo évoluant dans un fluide newtonien homogène isotrope. Nous assumons que son corps est suffisamment mince pour que nous puissions supposer que l'interaction avec le fluide est concentrée sur la ligne moyenne, laquelle est choisie comme la ligne des centroïdes, c'est-à-dire que

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{B}(X_1)} \rho \phi \hat{\boldsymbol{\zeta}} d^{N-1} s_{\mathbf{X}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}.$$

De plus, la densité du nageur est assumée identique à celle du fluide. Cette dernière hypothèse nous permet de laisser tomber les termes d'accélération ( $\partial_t \mathbf{m}$  et  $\partial_t \mathbf{M}$ , à gauche dans les équations 2.53 et 2.55) puisqu'alors l'inertie du fluide là où est situé le nageur est en fait celle du nageur. Nous

remarquons aussi que le terme  $\partial_t \mathbf{r} \wedge \mathbf{m}$  s'annule car  $\mathbf{m}$  est parallèle à  $\partial_t \mathbf{r}$  lorsque  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$  (voir l'équation 2.59).

Comme les nages anguilliformes sont expérimentalement relativement bien connues alors que les forces internes aux nageurs ne le sont pas, nous préférons rendre l'action des muscles par le mouvement d'un état de référence.

### 4.2.3 PARAMÉTRISATION DE LA NAGE SIMULÉE

Étant donné que nous ne nous permettons pas de faire nager le vers d'une façon « rigide », c'est-à-dire que nous ne prescrivons pas directement sa forme, mais que nous considérons que l'action de ses muscles peut être interprétée comme une modification de l'état de repos de la tige qui le modélise, nous ne décrivons pas une nage d'après sa forme, mais selon l'état de repos qui la caractérise indirectement. Dans le cas de notre modèle d'une tige, cet état de repos à pour interprétation directe la courbure du nageur et sa longueur.

Afin d'effectuer des transitions douces entre différentes phases de la nage, en particulier lors du démarrage initial, il nous faut une « fonction de transition ».

**FONCTION DE TRANSITION** Avant d'établir la forme de la fonction de transition que nous utiliserons, il nous faut choisir la forme des transitions : un choix simple<sup>12</sup> d'une « fonction de raccord » de classe  $C^4$  est l'adaptation de l'intégrale de  $(x(1-x))^4$ , c'est-à-dire :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^5 (70x^4 - 315x^3 + 540x^2 - 420x + 126) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad , \quad (4.20)$$

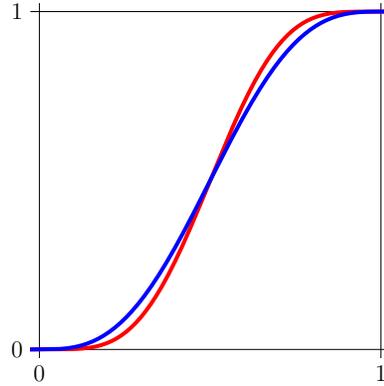
le graphique à la figure 4.15 la compare à celle utilisée dans [11]. D'une fonction de raccord, nous construisons une fonction de transition à partir d'une liste de jalons  $\mathbf{t} = (t_i)_{i=1}^n$  et d'une autre d'étages  $\mathbf{c} = (c_i)_{i=1}^n$  :

$$\mathcal{T}_{\mathbf{t}, \mathbf{c}}(\tau) = \begin{cases} c_1 & \text{si } \tau \leq t_1 \\ c_i + (c_{i+1} - c_i) g\left(\frac{\tau - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) & \text{si } t_i \leq \tau \leq t_{i+1} \\ c_n & \text{si } t_n \leq \tau \end{cases} \quad ,$$

ainsi cette fonction interpole  $\mathbf{c}$  aux temps  $\mathbf{t}$  et ses premières dérivées y sont nulles, i.e. :  $\partial_\tau^k \mathcal{T}_{\mathbf{t}, \mathbf{c}}(t_i) = \delta_{k,0} c_i$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Les graphiques à la figure 4.16 illustrent cette famille de fonction.

<sup>12</sup>. Nous notons que, de ce polynôme, nous pouvons facilement déduire une fonction aussi lisse que voulue, cependant, quand  $m$  augmente, la fonction  $(x(1-x))^m$  devient de plus en plus pointue. Le choix  $m = 4$  semble un bon compromis entre la continuité et la douceur de la liaison.

FIGURE 4.15 – Fonctions de raccord



En rouge, la fonction définie à l'équation 4.20, en bleu, la fonction  $t - \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}$  utilisée dans [11].

Grâce à la fonction de raccord, nous pouvons démarrer doucement la nage, tandis que la fonction de transition nous permet de changer progressivement le type de nage au cours d'une simulation.

**TYPE DE NAGE** Nous souhaitons expérimenter avec divers type de nages : la nage rectiligne, la nage giratoire (ou tournante), la nage en spirale et la nage d'arrêt. Plusieurs façon de paramétrer ces nages existent, mais toutes nécessitent de démarrer à partir d'un état initial inerte, c'est-à-dire que toutes les vitesses sont nulles. Nous nous inspirons de Boyer *et al.* [11], en utilisant la produit d'un polynôme avec une fonction trigonométrique pour la paramétrisation de la courbure, mais nous superposons plusieurs ondes et permettons aux polynômes d'atteindre un degré  $n_a$  arbitraire :

$$\kappa_p(\mathbf{X}_1, t) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{n_a-1} \left( b_i + \sum_{j=0}^{n_b-1} a_{i,j} \sin \left( 2\pi \left( \frac{1}{\lambda_j} \frac{X_1 - X_{1,a}}{X_{1,b} - X_{1,a}} - \frac{t}{P} \right) + \phi_j \right) \right) \hat{T}_i(\mathbf{X}_1) \quad (4.21)$$

où  $\{\lambda_j\}_{j=0}^{n_b-1}$  sont les longueurs d'onde (proportionnelles à la longueur),  $P$  est la période et  $\{\phi_j\}_{j=0}^{n_b-1}$  sont les phase. Les  $\{\hat{T}_i\}_{i=0}^{n_a-1}$  sont les premiers polynômes de Tchebychev  $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$  (normalement définis sur  $[-1, 1]$ ) décalés sur l'intervalle  $[X_{1,a}, X_{1,b}]$  :

$$\hat{T}_i(\mathbf{X}_1) = T_i \left( 2 \frac{X_1 - X_{1,a}}{X_{1,b} - X_{1,a}} - 1 \right)$$

en particulier, les premiers éléments de cette suite sont

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad \dots$$

Une fois la courbure paramétrée, il reste à déterminer la tangente, cependant nous assumons que les muscles du vers ne lui permettent pas de s'étirer ou de se contracter, par conséquent, l'état au repos pour la tangente devrait être indépendante du temps. De plus, rendre la norme de la tangente dépendante du paramètre  $X_1$  serait redondant puisque le théorème fondamental des courbes indique

que toute courbe lisse paramétrée par sa longueur d'arc est entièrement déterminée par sa courbure. L'onde de courbure se déplace donc de la tête à la queue (si nous prenons  $X_1 = 0$  comme la tête et  $X_1 = L$  comme la queue) et propulse le vers. Pour démarrer doucement la nage, nous utilisons

$$\kappa(X_1, t) = \mathcal{F}_{[t_1 t_2], [0 1]}(t) \kappa_p(X_1, t).$$

Pour la nage tournante, nous avons le choix entre désactiver le mouvement de propulsion lors du virage ou le maintenir : c'est-à-dire

$$\kappa(X_1, t) = \mathcal{F}_{\mathbf{t}, \boldsymbol{\alpha}}(t) \kappa_p(X_1, t) + \mathcal{F}_{\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}}(t) \kappa_g$$

avec  $\boldsymbol{\alpha} = [0 1 1 0 0 1]$ ,  $\boldsymbol{\beta} = [0 0 0 1 1 0]$  (voir figure 4.16a) ou

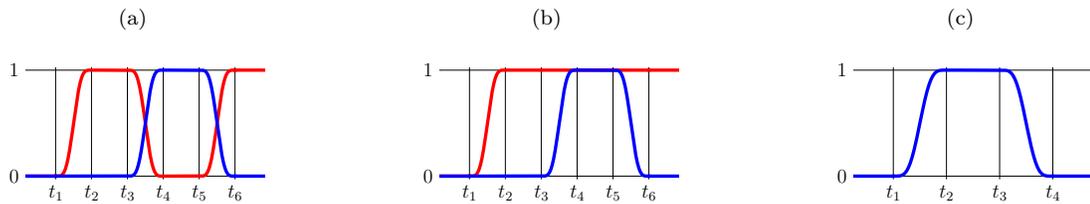
$$\kappa(X_1, t) = \mathcal{F}_{[t_1 t_2], [0 1]}(t) \kappa_p(X_1, t) + \mathcal{F}_{\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}}(t) \kappa_g$$

avec  $\boldsymbol{\beta} = [0 0 0 1 1 0]$  (voir figure 4.16b). Nous pouvons aussi examiner l'effet de n'activer que la courbure de rotation à partir de l'état initial statique :

$$\kappa(X_1, t) = \mathcal{F}_{\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}}(t) \kappa_g$$

avec  $\boldsymbol{\beta} = [0 1 1 0]$  (voir figure 4.16c).

FIGURE 4.16 – Schémas d'activation des nages giratoires



En rouge, le paramètre  $\alpha$ , en bleu, le paramètre  $\beta$ .

#### 4.2.4 AJUSTEMENT À DES DONNÉES EXPÉRIMENTALES

Les quelques mesures de la table 4.I sont insuffisantes pour reproduire et contrôler la simulation de la nage. D'un autre côté, l'équation 4.21 permet un espace des paramètres excessivement large qu'il serait, pour le moins, laborieux d'étudier exhaustivement.

Heureusement, Arratia *et al.* ont mesuré en laboratoire [97, 106–109] le changement de courbure le long de leur corps qui permet aux nématodes de se déplacer. Le premier graphique de la figure 4.17 montre les données gracieusement fournies par Arratia, le second, l'ajustement que nous en avons fait avec une fonction du type (4.21) (avec  $n_a = 13$  et  $n_b = 3$  : un espace des paramètres plus grand ne générant que des améliorations négligeables), le dernier, est la différence des deux

précédents. La figure 4.18 montre les « gabarits »

$$\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{n_a-1} a_{i,j} \hat{T}_i(X_1), \quad j \in \{0, 1, 2\}$$

des ondes sinusoïdales de (4.21) (en couleur) et la déformation de base

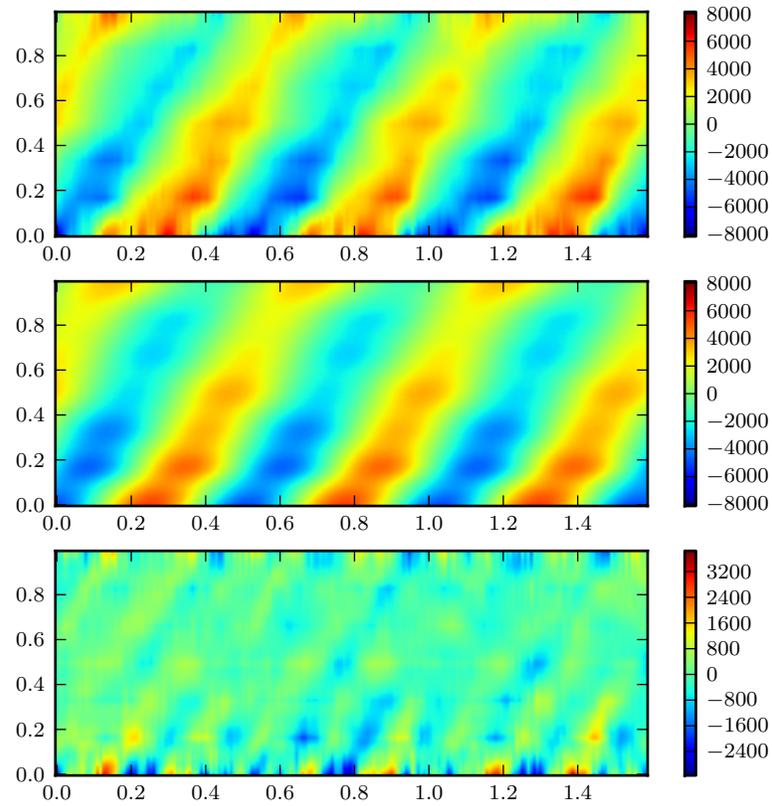
$$\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{n_a-1} b_i \hat{T}_i(X_1)$$

(en pointillé). Les trois ondes superposées

$$\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{n_a-1} \left( b_i + a_{i,j} \sin \left( 2\pi \left( \frac{1}{\lambda_j} \frac{X_1 - X_{1,a}}{X_{1,b} - X_{1,a}} - \frac{t}{P} \right) + \phi_j \right) \right) \hat{T}_i(X_1), \quad j \in \{0, 1, 2\}$$

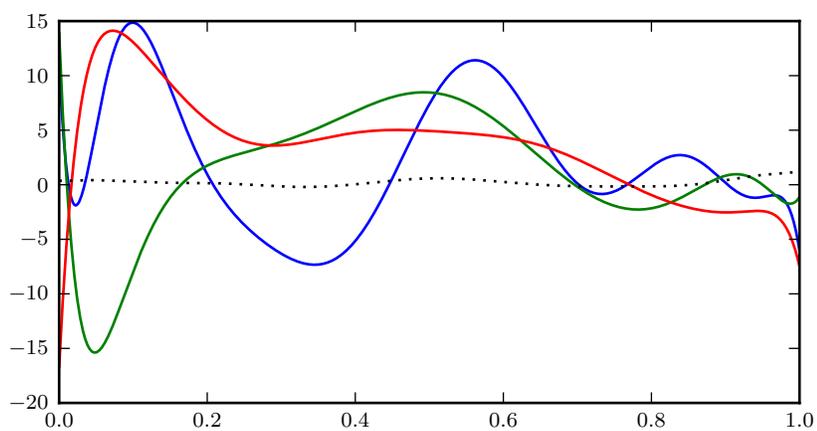
qui ont une fréquence  $P^{-1}$  d'approximativement 1,91 Hz en accord avec les données du tableau 4.I, sont montrées à la figure 4.19. Étonnamment, la dernière d'entre elles voyage de la queue à la tête, mais comme nous ne nous intéressons pas aux sources neuromusculaires de ces impulsions, nous nous contentons d'utiliser le meilleur ajustement.

FIGURE 4.17 – Comparaison entre l'onde de courbure mesurée et son approximation



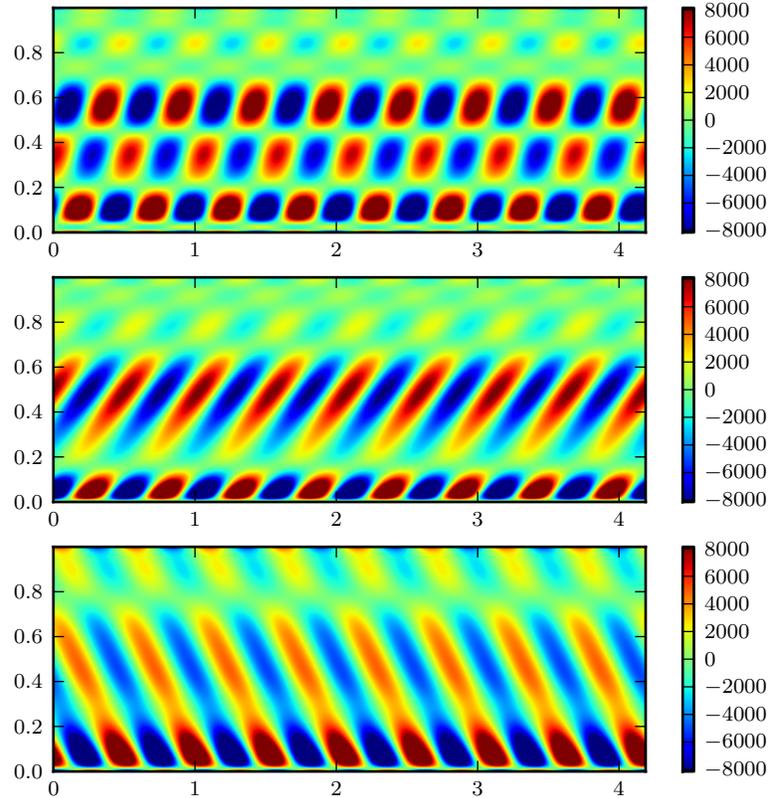
Sur l'axe horizontal nous avons le temps (en seconde) et sur l'axe vertical nous avons la position normalisée sur le vers (0 étant la position de la tête).

FIGURE 4.18 – Formes, ou gabarits, des ondes superposées ajustées aux données expérimentales



L'axe horizontal est la position normalisée sur le vers (0 étant la position de la tête), l'axe vertical, la courbure correspondante.

FIGURE 4.19 – Ondes de courbure superposées ajustées aux données expérimentales



Sur l'axe horizontal nous avons le temps (en seconde) et sur l'axe vertical nous avons la position normalisée sur le vers (0 étant la position de la tête).

### 4.2.5 RÉSULTATS

Malheureusement, nous n'avons pas réussi à faire nager convenablement ni le modèle du nématode, ni celui de l'anguille. Cela explique la pauvreté de cette section qui autrement aurait été fort remplie. Les figures 4.20, 4.21 et 4.22 présentent notre meilleur résultat au moment de la rédaction.

Après de très nombreux essais infructueux, il est devenu clair que diminuer le nombre de paramètres était nécessaire afin de vérifier dans un premier temps l'efficacité du simulateur plutôt que celle d'une nage particulière. Les mêmes considérations ont menées à choisir des valeurs comparables à celles de Lim *et al.* [73, 74]. Le tableau 4.II rapporte ces choix (les unités sont exprimées dans le système centimètre-gramme-seconde [CGS] pour faciliter la comparaison). La simulation utilise, pour le nageur, l'advection explicite d'ordre deux (voir §C.2) et l'appariement fluide-structure est géré à travers le noyau standard à quatre points (D.3).

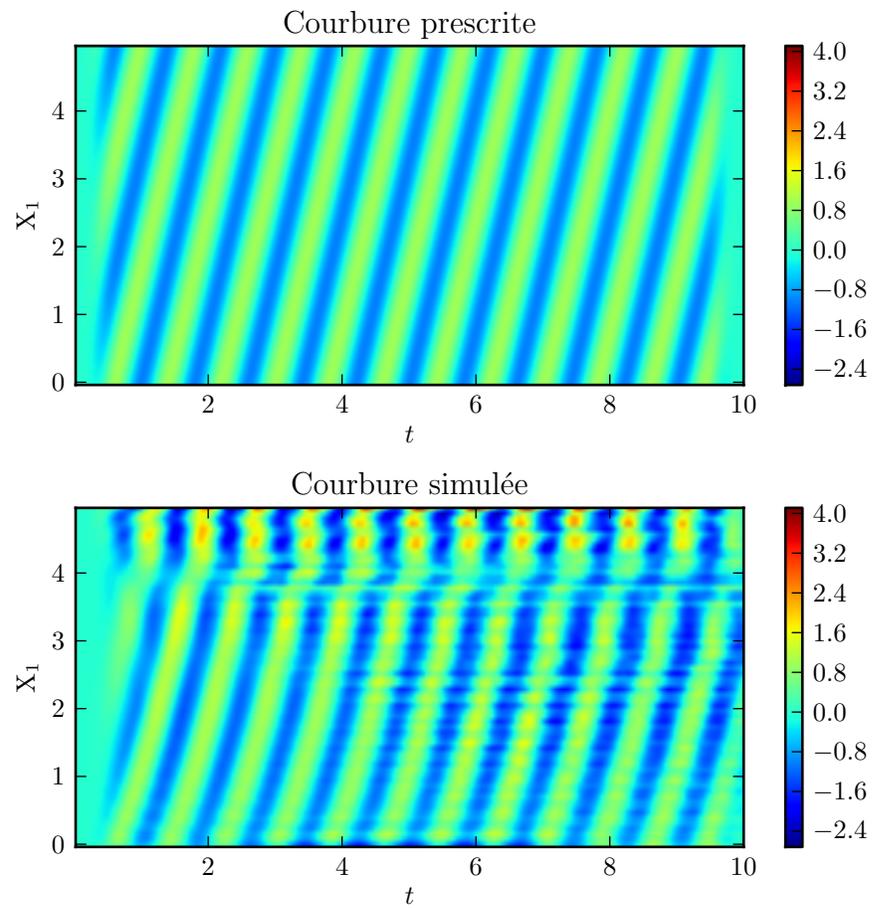
La figure 4.20 montre la présence de bruit qui s'accroît avec le temps le long du nageur, ce

TABLE 4.II – Paramètres de la simulation où la vitesse atteinte est la plus élevée

nom	symbole	valeur	unité
période	$P$	$\frac{4}{5}$	s
longueur d'onde	$\lambda_0$	$\frac{2}{3}$	cm
amplitude	$a_{0,0}$	5	1
coefficient du couple	$a$	2000	dyne · cm <sup>2</sup>
coefficient de la force	$b$	10 000	dyne
viscosité du fluide	$\mu$	0,01	g/cm · s
densité du fluide	$\rho$	1	g/cm <sup>3</sup>
longueur du nageur	$L$	5	cm
dimension de la boîte périodique	-	10	cm
durée de la simulation	-	10	s
nombre de points dans le fluide	$\mathbf{n}$	(64, 64, 64)	-
nombre de points sur le nageur	$n$	64	-
nombre de point dans le temps	$n$	50 000	-
nombre de Reynolds (approximatif)	$\mathbf{Re}$	1333	1
nombre de Cauchy (approximatif)	$\mathbf{Ca}$	$9 \cdot 10^{-5}$	1

qui semble indiquer que la simulation est instable, ce qui est attendu comme le déplacement de la tige est fait explicitement. La présence de ces oscillations pourrait expliquer la décélération prématurée du nageur qui est visible à la figure 4.21 (normalement, elle devrait correspondre à l'arrêt de l'activation, dans la dernière seconde). Les quelques instantanés de la nage présentés à la figure 4.22 montrent d'ailleurs aussi des oscillations.

FIGURE 4.20 – Comparaison entre les courbures prescrite et simulée pour la simulation où la vitesse atteinte est la plus élevée



Cependant, il est important de noter que ce genre d'oscillation apparaît aussi avec les méthodes implicites d'intégration du mouvement du nageur comme le montre la figure 4.23, et ce, malgré un raffinement plus grand des discrétisations spatiales (voir le tableau 4.III).

FIGURE 4.21 – Performance de la nage la plus rapide

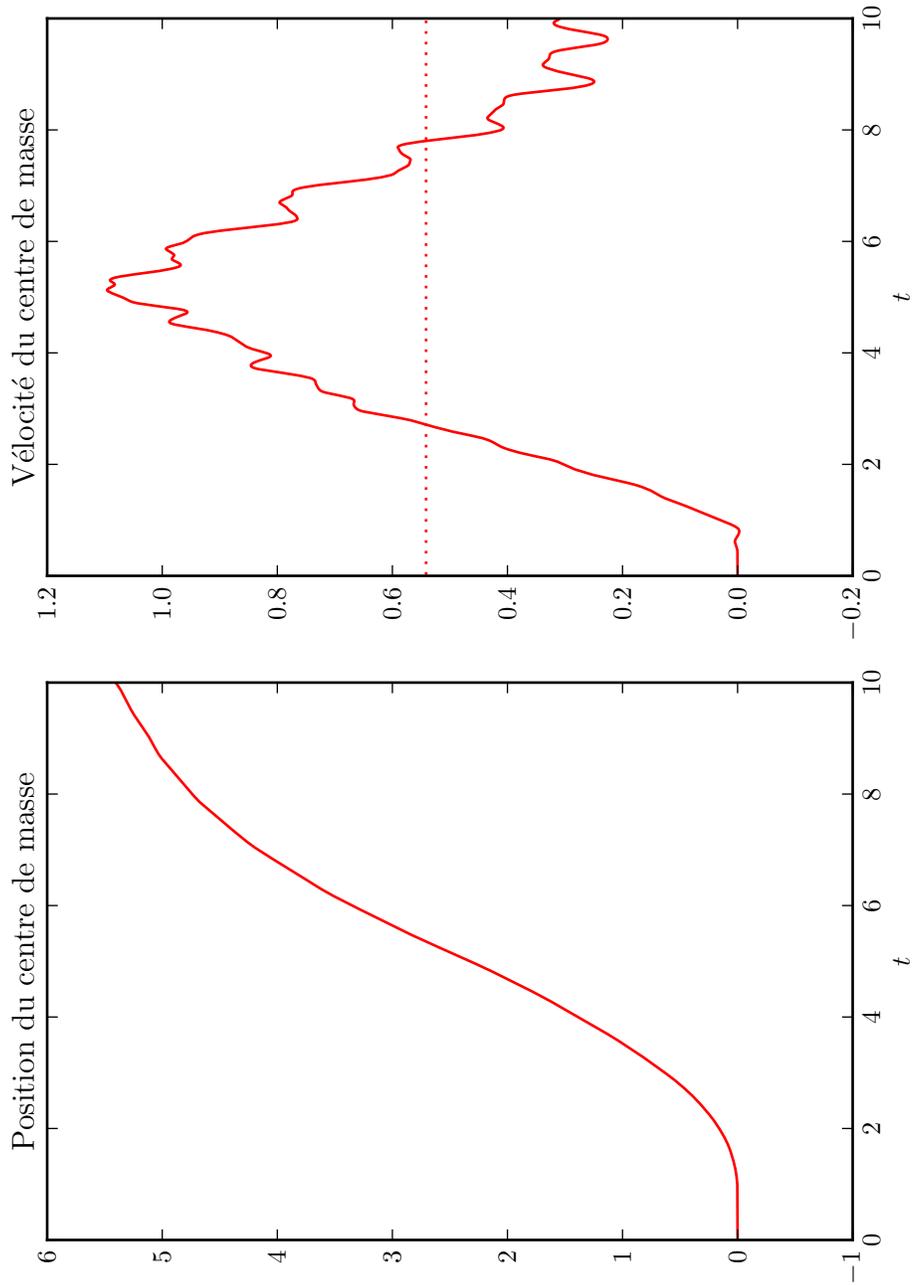
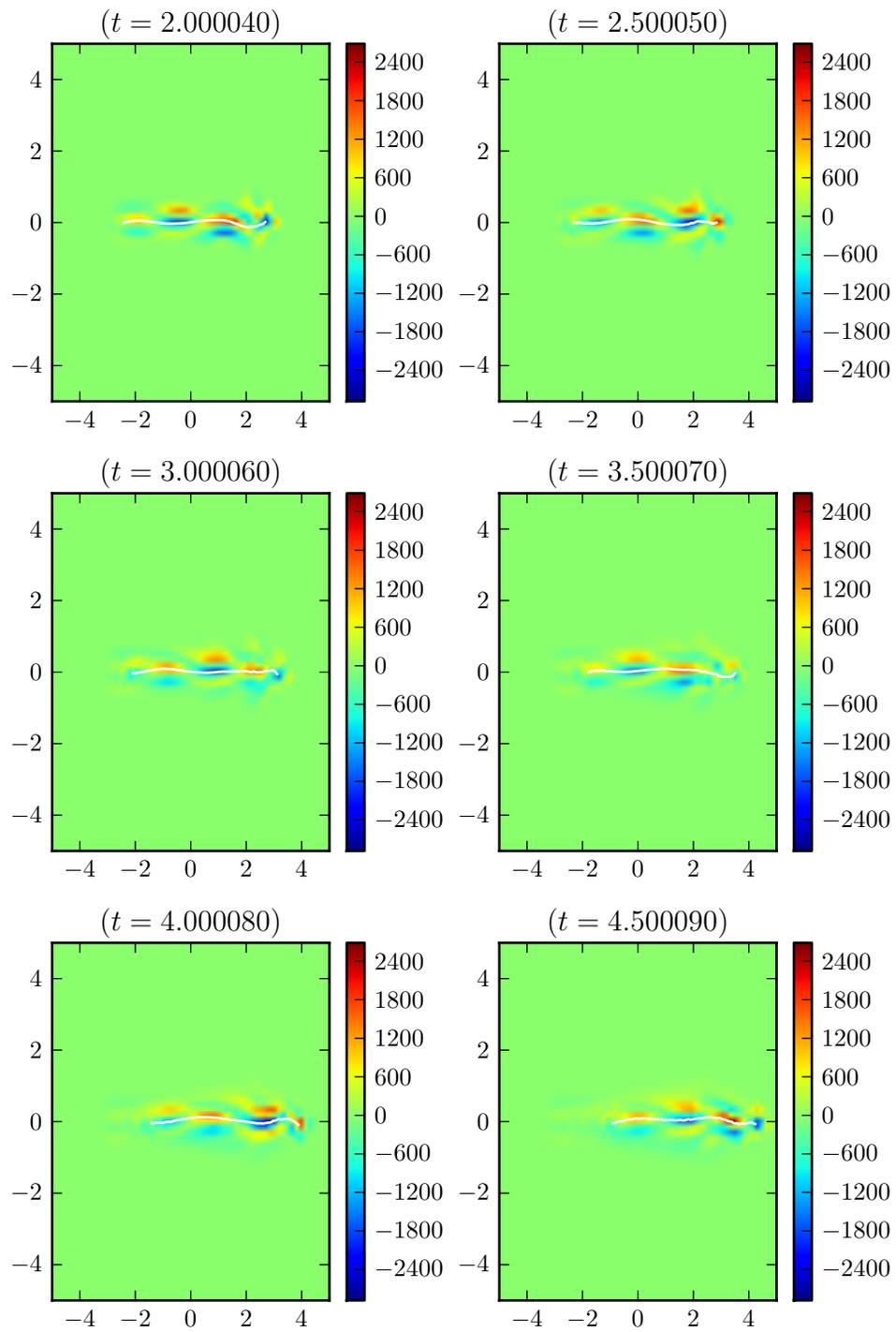
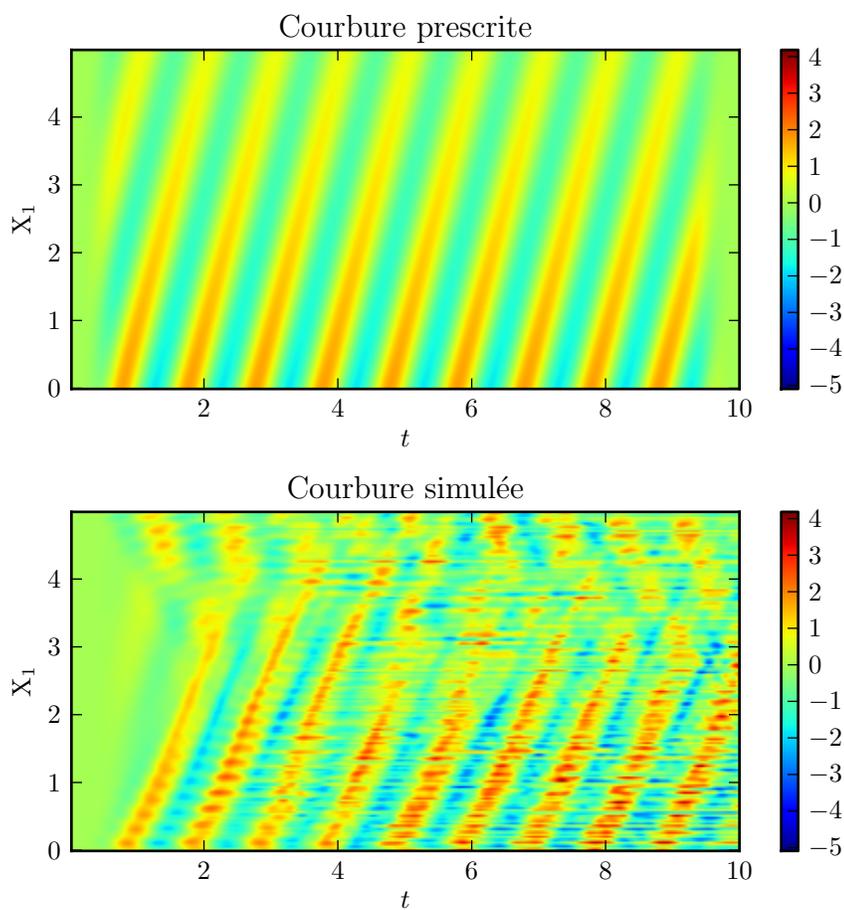


FIGURE 4.22 – Instantanés de la nage la plus rapide



En arrière-plan, nous avons la composante perpendiculaire au plan dans lequel se déplace le nageur de la vorticité, c'est-à-dire  $(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_3$ .

FIGURE 4.23 – Comparaison entre les courbures prescrite et simulée pour une simulation caractérisée par une forte oscillation le long du corps du nageur



Un bruit d'une amplitude pareille est le symptôme d'un problème important. Or, nous n'avons pu le circonscrire et, par conséquent, tout les résultats présentés dans cette dernière section sont sujet à caution au sens qu'il n'est pas clair quel élément est responsable parmi les paramètres, les modèles et le code.

TABLE 4.III – Paramètres d’une simulation caractérisée par une forte oscillation le long du corps du nageur

nom	symbole	valeur	unité
période	$P$	1	s
longueur d’onde	$\lambda_0$	$\frac{3}{4}$	cm
amplitude	$a_{0,0}$	9	1
coefficient du couple	$a$	50	dyne · cm <sup>2</sup>
coefficient de la force	$b$	300	dyne
viscosité du fluide	$\mu$	0,01	g/cm · s
densité du fluide	$\rho$	1	g/cm <sup>3</sup>
longueur du nageur	$L$	5	cm
dimension de la boîte périodique	-	10	cm
durée de la simulation	-	10	s
nombre de points dans le fluide	$\mathbf{n}$	(96, 96, 96)	-
nombre de points sur le nageur	$n$	256	-
nombre de point dans le temps	$n$	25 000	-
nombre de Reynolds (approximatif)	$\mathbf{Re}$	188	1
nombre de Cauchy (approximatif)	$\mathbf{Ca}$	$6 \cdot 10^{-3}$	1



---

# CONCLUSION

---

## 5.1 RETOUR

Nous avons développé un modèle plutôt fidèle, du point de vue mécanique, de la nage anguilliforme : la modification aux équations de Navier-Stokes nous a permis de transmettre dans le fluide, via la méthode de la frontière immergée que nous avons décrite, le couple issu des calculs sur la tige, dont nous avons aussi explicité les origines. Ce système a été discrétisé orthogonalement dans le temps puis dans l'espace, ensuite des méthodes ont été proposées afin de résoudre les équations obtenues. Nous avons subséquemment discuté de la manière de vérifier notre technique avant de tenter de simuler l'autopropulsion de notre nageur en variant divers paramètres, avec un succès mitigé.

Clairement, l'appariement fluide-structure pose problème, ne serait-ce que théoriquement : nous devons utiliser un facteur de dilatation entier, mais surtout, nous ne connaissons pas l'épaisseur effective de la tige : il est donc difficile de savoir à quel point le modèle se rapproche de la réalité.

Cependant, nous avons rassemblé ici des modèles et des techniques disparates dont nous avons voulu l'exposition systématique. En effet, les équations de la dynamique ont été dérivées de principes de base de la physique classique, la théorie des poutres a été construite du général au particulier et un nouveau point de vue sur la méthode de la frontière immergée a été présenté. Nous avons aussi montré, en utilisant les schémas de Runge-Kutta additifs et ceux de Runge-Kutta-Munthe-Kaas, que, formellement, la méthode de la frontière immergée et sa variante généralisée, peuvent être amenées à un ordre de convergence arbitrairement élevé dans l'évolution temporelle. En outre, nous avons constaté que l'étalement, tel que décrit jusqu'à présent dans la littérature, ne dépasse pas l'ordre un (en fonction du nombre de point sur la tige) pour une tige ouverte. Par ailleurs, les prémisses de la section sur la cinématique de la tige sont inédites et permettent d'imaginer de nombreuses généralisations à la théorie des poutres de Reissner-Simo. En somme, nous croyons avoir donné une assise théorique solide à la méthode de la frontière immergée généralisée.

## 5.2 PERSPECTIVES

Il est évident, au vu des résultats, et en comparaison avec les données empiriques, qu'il devrait être possible d'augmenter significativement la vitesse de la nage. Par contre, il n'est pas clair si la méthode actuelle, où nous devons utiliser un facteur de dilatation pour les noyaux (et qui pour effet que les tiges soient d'une certaine façon poreuses), pourra permettre une simulation réaliste. Il pourrait être possible de garder la théorie de Reissner-Simo tout en donnant un véritable volume à la tige, mais cela entraînerait probablement la présence de forces réactives, c'est-à-dire des multiplicateurs de Lagrange, dans le fluide.

Les équations de Stokes-Brinkman sont au coeur de la résolution, cependant, nous utilisons une méthode d'un ordre formel de deux seulement, qui de surcroît, s'abaisse à un en présence de source singulière, or, l'étalement de la force et du couple constituent une source singulière permanente, qui, de plus, est située à l'endroit qui nous intéresse le plus, c'est-à-dire là où est le nageur. Nous aurions donc grand avantage à utiliser une méthode pour les équations de Stokes-Brinkman qui serait d'ordre supérieur, et ce, même en présence de sources singulières.

Il est intéressant de comprendre l'effet des paramètres sur la performance, ainsi il devient possible de l'optimiser; et quoique cela pourrait être qualifié de *fignologie*, c'est extrêmement utile aux créateurs de robots biomimétiques. Mais, pour les biologistes, un bon modèle pourrait servir à déterminer différentes caractéristiques physiques d'un animal en observant seulement sa nage : c'est un problème inverse éminemment difficile, voire impossible, mais dont la solution a le potentiel de révolutionner la biomécanique.

Les locomotions animales sont extrêmement diversifiés, et surtout, généralement bien plus complexes que la nage anguilliforme, dont nous avons pourtant vu la difficulté que nous avons à la simuler. Nos ordinateurs augmentant toujours en puissances, notre capacité à simuler ces mouvements semble croître d'autant, néanmoins, un bon modèle n'est pas nécessairement le plus exact, mais celui qui nous apprend le plus sur la nature de notre monde.

---

# BIBLIOGRAPHIE

---

---

- [1] Philippe Angot, Charles-Henri Bruneau et Pierre Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4):497–520, février 1999. ISSN 0945-3245. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s002110050401>.
- [2] Stuart S. Antman. *Nonlinear Problems of Elasticity*, volume 107 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2005. ISBN 978-0-387-20880-0. URL <http://link.springer.com/book/10.1007/0-387-27649-1>.
- [3] Uri M. Ascher, Steven J. Ruuth et Raymond J. Spiteri. Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 25(2-3):151–167, novembre 1997. ISSN 01689274. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0168-9274\(97\)00056-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0168-9274(97)00056-1).
- [4] Patrick Ballard et Alain Millard. *Poutres et arcs élastiques*. les Éditions de l'École Polytechnique, école polytechnique édition, 2009. ISBN 2730215611. URL <http://www.worldcat.org/isbn/2730215611>.
- [5] M. Bergmann et A. Iollo. Modeling and simulation of fish-like swimming. *Journal of Computational Physics*, 230(2):329–348, janvier 2011. ISSN 0021-9991. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999110005115>.
- [6] Åke Björck et Sven Hammarling. A schur method for the square root of a matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 52-53:127–140, juillet 1983. ISSN 0024-3795. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795\(83\)80010-x](http://dx.doi.org/10.1016/0024-3795(83)80010-x).
- [7] I. Borazjani et F. Sotiropoulos. Numerical investigation of the hydrodynamics of anguilliform swimming in the transitional and inertial flow regimes. *Journal of Experimental Biology*, 212(4):576–592, février 2009. ISSN 1477-9145. URL <http://jeb.biologists.org/content/212/4/576.abstract>.
- [8] I. Borazjani et F. Sotiropoulos. On the role of form and kinematics on the hydrodynamics of self-propelled body/caudal fin swimming. *Journal of Experimental Biology*, 213(1):89–107, décembre 2009. ISSN 1477-9145. URL <http://dx.doi.org/10.1242/jeb.030932>.
- [9] Iman Borazjani et Fotis Sotiropoulos. Numerical investigation of the hydrodynamics of carangiform swimming in the transitional and inertial flow regimes. *Journal of Experimental Biology*, 211(10):1541–1558, mai 2008. ISSN 1477-9145. URL <http://dx.doi.org/10.1242/jeb.015644>.
- [10] F. Boyer, M. Porez et W. Khalil. Macro-continuous computed torque algorithm for a three-dimensional eel-like robot. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(4):763–775, août 2006. ISSN 1552-3098. URL <http://dx.doi.org/10.1109/TR0.2006.875492>.

- 
- [11] F. Boyer, M. Porez, A. Leroyer et M. Visonneau. Fast dynamics of an Eel-Like Robot—Comparisons with Navier–Stokes simulations. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(6): 1274–1288, décembre 2008. ISSN 1941-0468. URL <http://dx.doi.org/10.1109/TR0.2008.2006249>.
- [12] Frederic Boyer, Mathieu Porez et Alban Leroyer. Poincaré-Cosserat equations for lighthill three-dimensional dynamic model of a self propelled eel devoted to robotics. Rapport technique 07/8/Auto, École des Mines de Nantes, 2007. URL [http://raamo.irccyn.ec-nantes.fr/pdfarticles/07\\_8\\_Auto.pdf](http://raamo.irccyn.ec-nantes.fr/pdfarticles/07_8_Auto.pdf).
- [13] Frederic Boyer, Mathieu Porez et Alban Leroyer. Poincaré–Cosserat equations for the lighthill three-dimensional large amplitude elongated body theory : Application to robotics. *Journal of Nonlinear Science*, 20(1):47–79, août 2009. ISSN 1432-1467. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00332-009-9050-5>.
- [14] Frédéric Boyer et D. Primault. The Poincaré-Chetayev equations and flexible multibody systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 69(6):925–942, janvier 2005. ISSN 00218928. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2005.11.015>.
- [15] Thomas T. Bringley et Charles S. Peskin. Validation of a simple method for representing spheres and slender bodies in an immersed boundary method for stokes flow on an unbounded domain. *Journal of Computational Physics*, 227(11):5397–5425, mai 2008. ISSN 00219991. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2008.01.048>.
- [16] John Carling, Thelma L. Williams et Graham Bowtell. Self-propelled anguilliform swimming : simultaneous solution of the two-dimensional navier-stokes equations and newton’s laws of motion. *Journal of Experimental Biology*, 201(23):3143–3166, décembre 1998. URL <http://jeb.biologists.org/cgi/content/abstract/201/23/3143>.
- [17] Thomas Chambrion et Alexandre Munnier. Locomotion and control of a Self-Propelled Shape-Changing body in a fluid. *Journal of Nonlinear Science*, 21(3):325–385, novembre 2010. ISSN 1432-1467. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00332-010-9084-8>.
- [18] Karthick Chandraseker, Subrata Mukherjee, Jeffrey T. Paci et George C. Schatz. An atomistic-continuum cosserat rod model of carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(6):932–958, juin 2009. ISSN 00225096. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2009.02.005>.
- [19] J. Chen, W. O. Friesen et T. Iwasaki. Mechanisms underlying rhythmic locomotion : body-fluid interaction in undulatory swimming. *Journal of Experimental Biology*, 214(4):561–574, janvier 2011. ISSN 1477-9145. URL <http://jeb.biologists.org/content/214/4/561.abstract>.
- [20] J. Chen, J. Tian, T. Iwasaki et W. O. Friesen. Mechanisms underlying rhythmic locomotion : dynamics of muscle activation. *Journal of Experimental Biology*, 214(11):1955–1964, 2011. URL <http://jeb.biologists.org/content/214/11/1955.abstract>.

- [21] J.-Y. Cheng, T. J. Pedley et J. D. Altringham. A continuous dynamic beam model for swimming fish. *Philosophical Transactions of the Royal Society B : Biological Sciences*, 353 (1371):981–997, juin 1998. ISSN 1471-2970. URL <http://dx.doi.org/10.1098/rstb.1998.0262>.
- [22] Jian-Yu Cheng, Li-Xian Zhuang et Bing-Gang Tong. Analysis of swimming three-dimensional waving plates. *Journal of Fluid Mechanics*, 232(1):341–355, janvier 1991. ISSN 1469-7645. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112091003713>.
- [23] Duane W. Condiff et John S. Dahler. Fluid mechanical aspects of antisymmetric stress. *Physics of Fluids*, 7(6):842–854, 1964. ISSN 0031-9171. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.1711295>.
- [24] R. Cortez, Lisa J. Fauci, N. Cowen et R. Dillon. Simulation of swimming organisms : coupling internal mechanics with external fluid dynamics. *Computing in Science & Engineering*, 6 (3):38–45, mai 2004. ISSN 1521-9615. URL <http://dx.doi.org/10.1109/MCISE.2004.1289307>.
- [25] Eugène Cosserat et François Cosserat. *Théorie des corps déformables*. Hermann, 1909.
- [26] S. C. Cowin. Polar fluids. *Physics of Fluids*, 11(9):1919–1927, 1968. ISSN 0031-9171. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.1692219>.
- [27] Oscar M. Curet, Ibrahim K. AlAli, Malcolm A. MacIver et Neelesh A. Patankar. A versatile implicit iterative approach for fully resolved simulation of self-propulsion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37-40):2417–2424, août 2010. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782510001039>.
- [28] Catterina Dagnino, Vittoria Demichelis et Elisabetta Santi. On optimal nodal splines and their applications. URL <http://hdl.handle.net/2318/561>. 2003.
- [29] J. S. Dahler et L. E. Scriven. Theory of structured continua. i. general consideration of angular momentum and polarization. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 275(1363):504–527, octobre 1963. ISSN 1471-2946. URL <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1963.0183>.
- [30] Germund Dahlquist et Åke Björck. *Numerical methods in scientific computing*, volume 1. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. ISBN 9780898716443. URL <http://www.worldcat.org/isbn/9780898716443>.
- [31] S. A. De Swardt et J. M. De Villiers. Gregory type quadrature based on quadratic nodal spline interpolation. *Numerische Mathematik*, 85(1):129–153, mars 2000. ISSN 0029-599X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s002110050480>.
- [32] Ellis H. Dill. Kirchhoff’s theory of rods. *Archive for History of Exact Sciences*, 44(1):1–23, mars 1992. ISSN 0003-9519. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00379680>.

- [33] Örjan Ekeberg. A combined neuronal and mechanical model of fish swimming. *Biological Cybernetics*, 69(5-6):363–374, octobre 1993. ISSN 1432-0770. URL <http://www.springerlink.com/content/q2tq45h01t134078/>.
- [34] Jeff D. Eldredge. Numerical simulations of undulatory swimming at moderate reynolds number. *Bioinspiration & Biomimetics*, 1(4):S19–S24, décembre 2006. ISSN 1748-3190. URL <http://stacks.iop.org/1748-3190/1/i=4/a=S03>.
- [35] Jeff D. Eldredge. Numerical simulation of the fluid dynamics of 2D rigid body motion with the vortex particle method. *Journal of Computational Physics*, 221(2):626–648, février 2007. ISSN 0021-9991. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999106003093>.
- [36] Jeff D. Eldredge. Dynamically coupled fluid–body interactions in vorticity-based numerical simulations. *Journal of Computational Physics*, 227(21):9170–9194, novembre 2008. ISSN 0021-9991. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999108001952>.
- [37] Jeff D. Eldredge. A reconciliation of viscous and inviscid approaches to computing locomotion of deforming bodies. *Experimental Mechanics*, 50(9):1349–1353, juillet 2009. ISSN 1741-2765. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11340-009-9275-0>.
- [38] C. Eloy et L. Schouveiler. Optimisation of two-dimensional undulatory swimming at high reynolds number. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(4):568–576, décembre 2010. ISSN 0020-7462. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746210001873>.
- [39] D. Farnell, T. David et D. Barton. Numerical model of self-propulsion in a fluid. *Journal of The Royal Society Interface*, 2(2):79–88, mars 2005. ISSN 1742-5662. URL <http://rsif.royalsocietypublishing.org/content/2/2/79.abstract>.
- [40] Lisa J. Fauci. A computational model of the fluid dynamics of undulatory and flagellar swimming. *Integrative and Comparative Biology*, 36(6):599–607, décembre 1996. ISSN 1557-7023. URL <http://dx.doi.org/10.1093/icb/36.6.599>.
- [41] Lisa J. Fauci et Charles S. Peskin. A computational model of aquatic animal locomotion. *Journal of Computational Physics*, 77(1):85–108, juillet 1988. ISSN 0021-9991. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(88\)90158-1](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(88)90158-1).
- [42] Harley Flanders. Differentiation under the integral sign. *The American Mathematical Monthly*, 80(6):615–627, juin 1973. URL <http://www.jstor.org/stable/2319163>.
- [43] A. Gilmanov et F. Sotiropoulos. A hybrid cartesian/immersed boundary method for simulating flows with 3D, geometrically complex, moving bodies. *Journal of Computational Physics*, 207(2):457–492, août 2005. ISSN 0021-9991. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999105000379>.

- [44] Oscar Gonzalez et Andrew M. Stuart. *A first course in continuum mechanics*, volume 42 de *Cambridge Texts in Applied Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, janvier 2008. ISBN 9780521714242. URL <http://www.cambridge.org/9780521714242>.
- [45] Harold Grad. Statistical mechanics, thermodynamics, and fluid dynamics of systems with an arbitrary number of integrals. *Comm. Pure Appl. Math.*, 5(4):455–494, 1952. URL <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160050405>.
- [46] J. Gray. Studies in animal locomotion : I. the movement of fish with special reference to the eel. *Journal of Experimental Biology*, 10(1):88–104, janvier 1933. URL <http://jeb.biologists.org/content/10/1/88.abstract>.
- [47] J. Gray. Studies in animal locomotion : II. the relationship between waves of muscular contraction and the propulsive mechanism of the eel. *Journal of Experimental Biology*, 10(4):386–390, 1933. URL <http://jeb.biologists.org/content/10/4/386.short>.
- [48] J. Gray. Studies in animal locomotion : III. the propulsive mechanism of the whiting (*gadus merlangus*). *Journal of Experimental Biology*, 10(4):391–400, 1933. URL <http://jeb.biologists.org/content/10/4/391.short>.
- [49] Boyce E. Griffith, Richard D. Hornung, David M. McQueen et Charles S. Peskin. An adaptive, formally second order accurate version of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 223(1):10–49, avril 2007. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999106004207>.
- [50] Boyce E. Griffith et Sookkyung Lim. Simulating an elastic ring with bend and twist by an adaptive generalized immersed boundary method. *Communications in Computational Physics*, 12(2):433–461, août 2012. ISSN 18152406. URL <http://dx.doi.org/10.4208/cicp.190211.060811s>.
- [51] S. Hieber et P. Koumoutsakos. An immersed boundary method for smoothed particle hydrodynamics of self-propelled swimmers. *Journal of Computational Physics*, 227(19):8636–8654, octobre 2008. ISSN 0021-9991. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999108003343>.
- [52] W. Hu et B. Tong. Propulsive mechanism of forward and backward free swimming of anguilla anguilla. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 18(3):291–294, juillet 2006. ISSN 1001-6058. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S100160580600681>.
- [53] W. Hu, B. Tong et H. Liu. Dynamics of free straight swimming of anguilla anguilla including forward, braking and backward locomotion. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 19(4):395–402, août 2007. ISSN 1001-6058. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1001605807601322>.
- [54] Arieh Iserles, Hans Z. Munthe Kaas, Syvert P. Nørsett et Antonella Zanna. Lie-group methods. *Acta Numerica*, 9(03):215–365, 2000. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0962492900002154>.

- [55] Chris E. Jordan. Coupling internal and external mechanics to predict swimming behavior : A general approach. *Integrative and Comparative Biology*, 36(6):710–722, 1996. ISSN 1557-7023. URL <http://icb.oxfordjournals.org/content/36/6/710.abstract>.
- [56] J. B. Kajtar et J. J. Monaghan. On the fish-like swimming of linked bodies with and without skin. Dans Pierre Maruzewski, éditeur, *Proceedings of the 3rd ERCOFTAC SPHERIC workshop on SPH applications*. École polytechnique fédérale de Lausanne, juin 2008. URL <http://arxiv.org/abs/0912.4577>.
- [57] J. B. Kajtar et J. J. Monaghan. On the dynamics of swimming linked bodies. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 29(5):377–386, septembre 2010. ISSN 0997-7546. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997754610000567>.
- [58] J. B. Kajtar et J. J. Monaghana. SPH simulations of swimming linked bodies. *Journal of Computational Physics*, 227(19):8568–8587, octobre 2008. ISSN 0021-9991. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999108003306>.
- [59] Jules B. Kajtar. *Smooth lattice general relativity, and SPH simulations of swimming linked bodies*. Thèse de doctorat, Monash University. Faculty of Science. School of Mathematical Sciences, Victoria, Australia, 2009. URL <http://arrow.monash.edu.au/hdl/1959.1/166489>.
- [60] E. Kanso, J. E. Marsden, C. W. Rowley et J. B. Melli-Huber. Locomotion of articulated bodies in a perfect fluid. *Journal of Nonlinear Science*, 15(4):255–289, août 2005. ISSN 1432-1467. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00332-004-0650-9>.
- [61] Scott D. Kelly et Hailong Xiong. Self-propulsion of a free hydrofoil with localized discrete vortex shedding : analytical modeling and simulation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 24(1-4):45–50, mars 2010. ISSN 1432-2250. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00162-009-0174-x>.
- [62] Christopher A. Kennedy et Mark H. Carpenter. Additive Runge–Kutta schemes for convection–diffusion–reaction equations. *Applied Numerical Mathematics*, 44(1-2):139–181, janvier 2003. ISSN 01689274. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0168-9274\(02\)00138-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0168-9274(02)00138-1).
- [63] S. Kern et P. Koumoutsakos. Simulations of optimized anguilliform swimming. *Journal of Experimental Biology*, 209(24):4841–4857, décembre 2006. ISSN 1477-9145. URL <http://jeb.biologists.org/content/209/24/4841.abstract>.
- [64] Stefan Kern, Philippe Chatelain et Petros Koumoutsakos. *Modeling, Simulation and Optimization of Anguilliform Swimmers*, chapitre 14, pages 167–178. Springer Japan, Tokyo, 2008. ISBN 978-4-431-73379-9. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-4-431-73380-5\\_14](http://dx.doi.org/10.1007/978-4-431-73380-5_14).
- [65] Toshiyuki Koto. IMEX Runge–Kutta schemes for reaction–diffusion equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215(1):182–195, mai 2008. ISSN 03770427. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2007.04.003>.

- [66] M. Lai. A remark on jump conditions for the three-dimensional Navier-Stokes equations involving an immersed moving membrane. *Applied Mathematics Letters*, 14(2):149–154, février 2001. ISSN 0893-9659. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0893-9659\(00\)00127-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0893-9659(00)00127-0).
- [67] Eric Lauga. Floppy swimming : Viscous locomotion of actuated elastica. *Physical Review E*, 75(4):041916, avril 2007. ISSN 1550-2376. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.75.041916>.
- [68] Michael J. Lighthill. Note on the swimming of slender fish. *Journal of Fluid Mechanics*, 9(02):305–317, 1960. ISSN 1469-7645. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112060001110>.
- [69] Michael J. Lighthill. Hydromechanics of aquatic animal propulsion. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1(1):413–446, janvier 1969. ISSN 1545-4479. URL <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fl.01.010169.002213>.
- [70] Michael J. Lighthill. Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency. *Journal of Fluid Mechanics*, 44(02):265–301, 1970. ISSN 1469-7645. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112070001830>.
- [71] Michael J. Lighthill. Large-Amplitude Elongated-Body theory of fish locomotion. *Proceedings of the Royal Society B : Biological Sciences*, 179(1055):125–138, novembre 1971. ISSN 1471-2954. URL <http://dx.doi.org/10.1098/rspb.1971.0085>.
- [72] Michael J. Lighthill. *Mathematical Biofluidynamics*, volume 17 de *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial Mathematics, 1975. ISBN 9780898710144. URL <http://www.worldcat.org/isbn/0898710146>.
- [73] Sookkyung Lim. Dynamics of an open elastic rod with intrinsic curvature and twist in a viscous fluid. *Physics of Fluids*, 22(2):024104–11, 2010. ISSN 1070-6631. URL <http://link.aip.org/link/?PHF/22/024104/1>.
- [74] Sookkyung Lim, Anca Ferent, X. Sheldon Wang et Charles S. Peskin. Dynamics of a closed rod with twist and bend in fluid. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(1):273–302, 2008. ISSN 1064-8275. URL <http://link.aip.org/link/?SCE/31/273/1>.
- [75] H. Liu et K. Kawachi. A numerical study of undulatory swimming. *Journal of Computational Physics*, 155(2):223–247, novembre 1999. ISSN 0021-9991. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999199963416>.
- [76] Jerrold E. Marsden et Thomas J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Books on mathematics. Dover Publications Inc., New York, 1994. ISBN 0-486-67865-2.
- [77] T. McMillen et P. Holmes. An elastic rod model for anguilliform swimming. *Journal of Mathematical Biology*, 53(5):843–886, septembre 2006. ISSN 1432-1416. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00285-006-0036-8>.

- [78] T. McMillen, T. Williams et P. Holmes. Nonlinear muscles, passive viscoelasticity and body taper conspire to create neuromechanical phase lags in anguilliform swimmers. *PLoS Computational Biology*, 4(8):e1000157+, août 2008. ISSN 1553-7358. URL <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000157>.
- [79] Alexandre Munnier. Locomotion of deformable bodies in an ideal fluid : Newtonian versus lagrangian formalisms. *Journal of Nonlinear Science*, 19(6):665–715, juillet 2009. ISSN 1432-1467. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00332-009-9047-0>.
- [80] Alexandre Munnier et Thomas Chambrion. When Fish Moonwalk. Dans *American Control Conference 2010*, Baltimore, United States, 2010. URL <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&#38;arnumber=5531582&#38;isnumber=5530425>.
- [81] Alexandre Munnier et Bruno Pinçon. Locomotion of articulated bodies in an ideal fluid : 2d model with buoyancy, circulation and collisions. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20(10):1899–1940, 2010. ISSN 0218-2025. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00394744/>.
- [82] Paola Nardinocchi, Luciano Teresi et Alessandro Tiero. A direct theory of affine rods. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(4):653–667, janvier 2002. ISSN 09977538. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0997-7538\(02\)01226-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0997-7538(02)01226-3).
- [83] J. N. Newman. The force on a slender fish-like body. *Journal of Fluid Mechanics*, 58(04):689–702, 1973. ISSN 1469-7645. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112073002429>.
- [84] J. N. Newman et Theodore Y. Wu. A generalized slender-body theory for fish-like forms. *Journal of Fluid Mechanics*, 57(04):673–693, 1973. ISSN 1469-7645. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112073001953>.
- [85] R. W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, new edition édition, juillet 1997. ISBN 0486696480. URL <http://www.worldcat.org/isbn/0486696480>.
- [86] Dinesh K. Pai. STRANDS : Interactive simulation of thin solids using cosserat models. *Computer Graphics Forum*, 21(3):347–352, septembre 2002. ISSN 1467-8659. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1467-8659.00594>.
- [87] Lorenzo Pareschi et Giovanni Russo. Implicit-explicit Runge-Kutta schemes for stiff systems of differential equations. Dans Donato Trigiante et L. Brugnano, éditeurs, *Recent trends in numerical analysis*, volume 3, pages 269–288. Nova Science Publishers, Inc., Commack, NY, USA, 2000. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=380227.380258>.
- [88] Suhas V. Patankar. A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications*, 4(4):409–425, octobre 1981. ISSN 1040-7782. URL <http://dx.doi.org/10.1080/01495728108961801>.

- [89] T. J. Pedley et S. J. Hill. Large-amplitude undulatory fish swimming : fluid mechanics coupled to internal mechanics. *Journal of Experimental Biology*, 202(23):3431–3438, décembre 1999. URL <http://jeb.biologists.org/content/202/23/3431.abstract>.
- [90] Charles S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11(-1):479–517, 2002. URL <http://dx.doi.org/doi:10.1017/S0962492902000077>.
- [91] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco et Fausto Saleri. *Numerical Mathematics*, volume 37 de *Texts in Applied Mathematics*. Springer New York, second édition, 2006. ISBN 978-3-540-34658-6. URL <http://dx.doi.org/10.1007/b98885>.
- [92] Alexandre M. Roma, Charles S. Peskin et Marsha J. Berger. An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 153(2):509–534, août 1999. ISSN 00219991. URL <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1999.6293>.
- [93] M. B. Rubin. *Cosserat Theories : Shells, Rods and Points*, volume 79. Springer Netherlands, Dordrecht, 2000. ISBN 978-90-481-5531-6. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-94-015-9379-3>.
- [94] Walter Rudin et Guy Auliac. *Principes d'analyse mathématique*. Ediscience international, Paris, 1995. ISBN 2840741083. URL <http://www.worldcat.org/isbn/2840741083>.
- [95] Alessandro Saccon. Midpoint rule for variational integrators on lie groups. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 78(11):1345–1364, 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2541>.
- [96] M. Sfakiotakis, D. Lane et J. Davies. Review of fish swimming modes for aquatic locomotion. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 24(2):237–252, avril 1999. ISSN 0364-9059. URL <http://dx.doi.org/10.1109/48.757275>.
- [97] X. N. Shen et P. E. Arratia. Undulatory swimming in viscoelastic fluids. *Physical Review Letters*, 106(20):208101+, mai 2011. ISSN 1079-7114. URL <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.106.208101>.
- [98] Anup A. Shirgaonkar, Malcolm A. MacIver et Neelesh A. Patankar. A new mathematical formulation and fast algorithm for fully resolved simulation of self-propulsion. *Journal of Computational Physics*, 228(7):2366–2390, avril 2009. ISSN 0021-9991. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999108006311>.
- [99] J. C. Simo. A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part i. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(1):55–70, mai 1985. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90050-7](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(85)90050-7).
- [100] J. C. Simo. A three-dimensional finite-strain rod model. part II : Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58(1):79–116, octobre 1986. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(86\)90079-4](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(86)90079-4).

- [101] J. C. Simo et L. Vu-Quoc. On the dynamics in space of rods undergoing large motions — a geometrically exact approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(2): 125–161, février 1988. ISSN 0045-7825. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90073-4](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(88)90073-4).
- [102] K. Singh et T. Pedley. The hydrodynamics of flexible-body manoeuvres in swimming fish. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 237(14-17):2234–2239, août 2008. ISSN 0167-2789. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278908000493>.
- [103] J. Sparenberg. Survey of the mathematical theory of fish locomotion. *Journal of Engineering Mathematics*, 44(4):395–448, décembre 2002. ISSN 0022-0833. URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1021256500244>.
- [104] John M. Stockie. *Analysis and computation of immersed boundaries, with application to pulp fibres*. Thèse de doctorat, University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1997. URL [http://www.iam.ubc.ca/theses/JohnStockie/JStockie\\_PhD\\_Thesis.pdf](http://www.iam.ubc.ca/theses/JohnStockie/JStockie_PhD_Thesis.pdf).
- [105] Vijay K. Stokes. Couple stresses in fluids. *Physics of Fluids*, 9(9):1709–1715, 1966. ISSN 0031-9171. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.1761925>.
- [106] J. Sznitman, Prashant K. Purohit, P. Krajacic, T. Lamitina et P. E. Arratia. Material properties of caenorhabditis elegans swimming at low reynolds number. *Biophysical Journal*, 98(4):617–626, février 2010. ISSN 0006-3495. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.bpj.2009.11.010>.
- [107] J. Sznitman, X. Shen, P. K. Purohit et P. E. Arratia. The effects of fluid viscosity on the kinematics and material properties of c. elegans swimming at low reynolds number. *Experimental Mechanics*, 50(9):1303–1311, novembre 2010. ISSN 0014-4851. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11340-010-9339-1>.
- [108] J. Sznitman, X. Shen, R. Sznitman et P. E. Arratia. Propulsive force measurements and flow behavior of undulatory swimmers at low reynolds number. *Physics of Fluids*, 22(12):121901+, 2010. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.3529236>.
- [109] Raphael Sznitman, Manaswi Gupta, Gregory D. Hager, Paulo E. Arratia et Josué Sznitman. Multi-Environment model estimation for motility analysis of caenorhabditis elegans. *PLoS ONE*, 5(7):e11631+, juillet 2010. URL <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0011631>.
- [110] Geoffrey Taylor. Analysis of the swimming of microscopic organisms. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 209(1099):447–461, novembre 1951. ISSN 1471-2946. URL <http://www.jstor.org/stable/98828>.
- [111] Geoffrey Taylor. Analysis of the swimming of long and narrow animals. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 214(1117):158–183, août 1952. ISSN 1471-2946. URL <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1952.0159>.

- [112] RobinW Tucker et Charles Wang. Gravitational wave induced vibrations of slender structures in space. 35(12):2137–2158, 2003. URL <http://dx.doi.org/10.1023/a%253a1027397522624>.
- [113] R. Tyson, Christopher E. Jordan et J. Hebert. Modelling anguilliform swimming at intermediate reynolds number : A review and a novel extension of immersed boundary method applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(25-28):2105–2118, avril 2008. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782507003040>.
- [114] E. D. Tytell, C. Hsu, T. L. Williams, A. H. Cohen et L. J. Fauci. Interactions between internal forces, body stiffness, and fluid environment in a neuromechanical model of lamprey swimming. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(46):19832–19837, octobre 2010. ISSN 1091-6490. URL <http://www.pnas.org/content/107/46/19832.abstract>.
- [115] J. M. Villiers. A nodal spline interpolant for the gregory rule of even order. *Numerische Mathematik*, 66(1):123–137, décembre 1993. ISSN 0029-599X. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01385690>.
- [116] J. M. De Villiers et C. H. Rohwer. Optimal local spline interpolants. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 18(1):107–119, 1987. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377042787900598>.
- [117] Xiaodong Wang et Wing K. Liu. Extended immersed boundary method using FEM and RKPM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(12-14):1305–1321, mars 2004. ISSN 00457825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782504000258>.
- [118] Theodore Y. Wu. *Hydromechanics of Swimming of Fishes and Cetaceans*, volume 11 de *Advances in Applied Mechanics*, pages 1–63. Elsevier, 1971. ISBN 9780120020119. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70340-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70340-5).
- [119] Theodore Y. Wu. Hydromechanics of swimming propulsion. part 1. swimming of a two-dimensional flexible plate at variable forward speeds in an inviscid fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 46(02):337–355, 1971. ISSN 1469-7645. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112071000570>.
- [120] Theodore Y. Wu. Hydromechanics of swimming propulsion. part 2. some optimum shape problems. *Journal of Fluid Mechanics*, 46(03):521–544, 1971. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112071000685>.
- [121] Theodore Y. Wu. Hydromechanics of swimming propulsion. part 3. swimming and optimum movements of slender fish with side fins. *Journal of Fluid Mechanics*, 46(03):545–568, 1971. URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112071000697>.

- 
- [122] Theodore Y. Wu. Mathematical biofluidynamics and mechanophysiology of fish locomotion. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 24(17-18):1541–1564, novembre 2001. ISSN 1099-1476. URL <http://dx.doi.org/10.1002/mma.218>.
- [123] Theodore Y. Wu et J. N. Newman. Unsteady flow around a slender fish-like body. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 14(7):43–52, 1972. ISSN 0022-2542. URL [http://dx.doi.org/10.1243/JMES\\_JOUR\\_1972\\_014\\_062\\_02](http://dx.doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1972_014_062_02).
- [124] Sheng Xu et Z. Jane Wang. Systematic derivation of jump conditions for the immersed interface method in Three-Dimensional flow simulation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(6):1948–1980, 2006. ISSN 1064-8275. URL <http://dx.doi.org/10.1137/040604960>.
- [125] Yang Yan, Wu Guan-Hao, Yu Yong-Liang et Tong Bing-Gang. Two-Dimensional Self-Propelled fish motion in medium : An integrated method for deforming body dynamics and unsteady fluid dynamics. *Chinese Physics Letters*, 25(2):597–600, février 2008. ISSN 1741-3540. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0256-307X/25/2/066>.
- [126] Xiaolei Yang, Xing Zhang, Zhilin Li et Guo-Wei He. A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations. *Journal of Computational Physics*, 228(20):7821–7836, novembre 2009. ISSN 00219991. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2009.07.023>.
- [127] Z. H. Yao, M. W. Yuan, ChuiJie Wu et Liang Wang. *3D Numerical Simulation of Self-Propelled Swimming of Bionic Fish School*, chapitre 10, pages 107–121. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-540-75998-0. URL [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-75999-7\\_10](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-75999-7_10).
- [128] L. Zhang, X. Chang, X. Duan, Z. Wang et H. Zhang. A block LU-SGS implicit unsteady incompressible flow solver on hybrid dynamic grids for 2D external bio-fluid simulations. *Computers & Fluids*, 38(2):290–308, février 2009. ISSN 0045-7930. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004579300800042X>.

---

# INDEX

---

## A

Adimensionalisation, 45  
Algorithmes d'advection du fluide, 92  
Algorithmes d'interaction, 89

## C

Champ de vitesse, 7  
Cisaillement, 28  
Coefficient de Hooke, 41  
Condition de continuité, 71  
Condition de normalisation, 71  
Configuration de référence, 19  
Convergence, 95  
Couple appliqué, 32  
Couple interne, 31  
Courbure, 15, 29

## D

Delta de Dirac, 44, 64  
Densité de couple, 7  
Densité de force, 7  
Densité de masse, 9  
Dérivée matérielle, 9  
Différences finies, 58  
Directeurs, 13  
Discrétisation spatiale, 58  
Divergence, 60

## E

Échantillonnage, 58  
Élongation, 27  
Équations de Navier-Stokes, 12, 45, 50  
Équations de Stokes-Brinkman, 86  
Exponentielle matricielle, 53, 55  
Extension, 28

## F

Flexion, 29  
Fonction indicatrice, 44  
Force appliquée, 32

Force interne, 31  
Frenet-Serret, 30

## G

Gradient, 58  
Gradient de l'étalement, 65  
Grille, 58

## I

Incompressibilité, 8  
Interaction fluide-structure, 48  
Interpolation du gradient, 65  
Interpolatoire, 67

## L

Laplacien, 60  
Ligne moyenne, 13  
Loi constitutive, 40

## M

Maillage eulérien, 58  
Maillage régulier homogène, 58  
Mesures de déformation, 18  
Méthode de Gregory, 75  
Méthode de la solution fabriquée, 95  
Méthode de Newton, 81  
Méthodes diagonalement implicites, 57  
Module d'élasticité caractéristique, 47  
Moment angulaire, 10, 31  
Moment linéaire, 9, 31  
Moments d'inertie, 34

## N

Nombre de Cauchy, 50  
Nombre de Reynolds, 46  
Noyau, 69  
Noyau reproducteur, 64

## O

Opérateur de convection, 60  
Opérateur de décalage, 86

Opérateur d'étalement, 44, 63  
Opérateur d'étalement discret, 64  
Opérateur d'interpolation, 44, 63  
Opérateur d'interpolation discret, 63

**P**

Poids de quadrature, 64, 74  
Polynôme de Lagrange, 67  
Position factorisée, 14  
Premier tenseur de stress de Piola-Kirchhoff, 30  
Produits scalaires discrets, 63  
Puissance interne, 39

**R**

Racine carrée matricielle, 61  
Reproducteur, 66  
Reproduction des moments, 65  
Rigidité, 42

**S**

Schémas de Runge-Kutta additifs, 52  
Schémas de Runge-Kutta-Munthe-Kaas, 53  
Scission, 28  
Scission-extension, 17  
Sections droites, 13  
Spline nodale, 74

**T**

Tenseur de Cauchy, 10  
Tenseur de déformation, 15  
Tenseur de rotation, 14  
Tenseur des déformations de Cauchy-Green, 21  
Tenseur des déformations de Green-Lagrange, 22  
Théorème de Cauchy, 8  
Théorème de transport de Reynolds, 7  
Théorie de Reissner-Simo, 23  
Tige, 13  
Tige affine, 22  
Tige de Kirchhoff, 23  
Tige de Kirchhoff extensible, 23  
Tige dont les directeurs sont orthogonaux, 22  
Tige dont les directeurs sont orthonormaux, 22  
Torsion, 28, 29

Traction, 7  
Transformation de Fourier discrète, 86

**V**

Variables matérielles, 38  
Vitesse, 16  
Vitesse angulaire, 16

# RÉSULTATS UTILES

---

## A.1 ALGÈBRE

**Définition A.1.** Comme nous l'utilisons à quelques reprises, nous définissons ici les multi-indices comme des membres de  $\mathbb{N}_0^k$  pour lesquels nous formulons les notations suivantes :

1. (longueur ou module)  $|\alpha| = \sum_{i=1}^k \alpha_i$ ,
2. (exponentiation)  $x^\alpha = \prod_{i=1}^k x_i^{\alpha_i}$  pour  $x \in \mathbb{R}^k$ ,
3. (dérivée partielle)  $\partial^\alpha f = \partial_k^{\alpha_k} \cdots \partial_1^{\alpha_1} f$  pour  $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^k)$ ,
4. (factorielle)  $\alpha! = \prod_{i=1}^k \alpha_i!$ ,
5. (relation d'ordre partiel)  $\alpha \leq \beta \iff \alpha_i \leq \beta_i \forall i \in \{1, \dots, k\}$ .

**Définition A.2.** Il est utile d'introduire le delta de Kronecker ainsi que le symbole de Levi-Civita

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha, \beta, \gamma \text{ est une permutation paire de } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{si } \alpha, \beta, \gamma \text{ est une permutation impaire de } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Ainsi, le symbole de Levi-Civita est nul si un indice est répété, sinon il vaut 1 pour une permutation paire ou  $-1$  pour une permutation impaire :  $1 = \epsilon_{1,2,3} = \epsilon_{2,3,1} = \epsilon_{3,1,2} = -\epsilon_{2,1,3} = -\epsilon_{3,2,1} = -\epsilon_{1,3,2}$ .

**Lemme A.3.** *Identités reliant le delta de Kronecker au symbole de Levi-Civita*

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \epsilon_{\zeta,\mu,\nu} = \delta_{\alpha,\zeta} (\delta_{\beta,\mu} \delta_{\gamma,\nu} - \delta_{\beta,\nu} \delta_{\gamma,\mu}) + \delta_{\alpha,\mu} (\delta_{\beta,\nu} \delta_{\gamma,\zeta} - \delta_{\beta,\zeta} \delta_{\gamma,\nu}) + \delta_{\alpha,\nu} (\delta_{\beta,\zeta} \delta_{\gamma,\mu} - \delta_{\beta,\mu} \delta_{\gamma,\zeta}), \quad (\text{A.3})$$

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha,\mu,\nu} = \delta_{\beta,\mu} \delta_{\gamma,\nu} - \delta_{\beta,\nu} \delta_{\gamma,\mu}, \quad (\text{A.4})$$

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha,\beta,\nu} = 2\delta_{\gamma,\nu}, \quad (\text{A.5})$$

$$\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} = 6. \quad (\text{A.6})$$

*Démonstration.* Les égalités subséquentes à la première (dont la preuve est omise) s'en déduisent facilement.  $\square$

**Définition A.4.** Avec le symbole de Levi-Civita, nous pouvons définir le produit vectoriel  $\blacksquare \times \blacksquare : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  par

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\beta) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_\gamma) \mathbf{e}_\alpha. \quad (\text{A.7})$$

*Remarque A.5.* En coordonnées, et en utilisant la convention de sommation d'Einstein (les indices répétés sont sommés), nous avons, au lieu de (A.7), l'expression plus compacte suivante

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\alpha = \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\beta b_\gamma.$$

**Définition A.6.** Les opérateurs de symétrisation  $\text{sym}: \mathbb{R}^{N \times N} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  et d'antisymétrisation  $\text{asym}: \mathbb{R}^{N \times N} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  sont définis tels que

$$\forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \mathbf{M} = \text{sym}(\mathbf{M}) + \text{asym}(\mathbf{M}) \quad (\text{A.8a})$$

et

$$\text{sym}(\mathbf{M})^\dagger = \text{sym}(\mathbf{M}), \quad (\text{A.8b})$$

$$\text{asym}(\mathbf{M})^\dagger = -\text{asym}(\mathbf{M}). \quad (\text{A.8c})$$

**Définition A.7.** Le produit tensoriel antisymétrique  $\blacksquare \wedge \blacksquare: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  est défini tel que

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}. \quad (\text{A.9})$$

**Définition A.8.** Dans un espace de dimension trois, nous pouvons définir un opérateur  $\text{tax}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^{3 \times 3}$  qui donne le tenseur axial  $\text{tax}(\mathbf{a})$  d'un vecteur  $\mathbf{a}$

$$\text{tax}(\mathbf{a}) \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (\text{A.10})$$

ainsi que son inverse à gauche  $\text{vax}: \mathbb{R}^{3 \times 3} \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\text{vax}(\text{tax}(\mathbf{a})) = \mathbf{a}. \quad (\text{A.11})$$

**Lemme A.9.** Les définitions (A.10) et (A.11) ci-dessus sont équivalentes à poser

$$\text{sym}(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} (\mathbf{M} + \mathbf{M}^\dagger), \quad (\text{A.12})$$

$$\text{asym}(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} (\mathbf{M} - \mathbf{M}^\dagger), \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = \text{asym}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}), \quad (\text{A.14})$$

$$\text{tax}(\mathbf{a}) = - \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma, \quad (\text{A.15})$$

$$\text{vax}(\mathbf{M}) = - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \mathbf{e}_\beta \cdot (\mathbf{M} \mathbf{e}_\gamma) \mathbf{e}_\alpha. \quad (\text{A.16})$$

*Démonstration.* Les identités (A.12), (A.13) et (A.14) sont triviales. Pour l'égalité (A.15), il suffit

d'utiliser la formule pour le produit vectoriel

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\beta) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_\gamma) \mathbf{e}_\alpha,$$

ainsi

$$\begin{aligned} \text{tax}(\mathbf{a}) \mathbf{b} &= \left( - \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}_\gamma \right) \mathbf{b} \\ &= - \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\alpha) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_\gamma) \mathbf{e}_\beta \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\beta,\alpha,\gamma} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\alpha) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_\gamma) \mathbf{e}_\beta \\ &= \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \end{aligned}$$

La dernière identité se vérifie en utilisant (A.5)

$$\begin{aligned} \text{vax}(\text{tax}(\mathbf{a}))_\alpha &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \text{tax}(\mathbf{a})_{\beta,\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \varepsilon_{\mu,\beta,\gamma} a_\mu \\ &= \delta_{\alpha,\mu} a_\mu \\ &= a_\alpha. \end{aligned}$$

□

*Remarque A.10.* En coordonnées, et en utilisant la convention de sommation d'Einstein, nous avons

$$\begin{aligned} \text{sym}(M)_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{2} (M_{\alpha,\beta} + M_{\beta,\alpha}), \\ \text{asym}(M)_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{2} (M_{\alpha,\beta} - M_{\beta,\alpha}), \\ (a \wedge b)_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{2} (a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha), \\ \text{tax}(a)_{\alpha,\beta} &= -\varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\gamma, \\ \text{vax}(M)_\alpha &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha,\beta,\gamma} M_{\beta,\gamma}. \end{aligned}$$

### Définition A.11.

1. Le commutateur  $[\blacksquare, \blacksquare] : \mathbb{R}^{N \times N} \times \mathbb{R}^{N \times N} \mapsto \mathbb{R}^{N \times N}$  de deux opérateurs linéaires est défini par

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}.$$

2. Le produit scalaire de Frobenius est défini par

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^\dagger).$$

**Lemme A.12.** *L'espace des matrices antisymétriques est orthogonal à celui des matrices symétriques pour le produit scalaire de Frobenius.*

*Démonstration.* Il suffit de prendre le produit de Frobenius d'une matrice symétrique avec une matrice antisymétrique

$$\begin{aligned} \text{sym}(\mathbf{X}) : \text{asym}(\mathbf{Y}) &= \text{tr}(\text{sym}(\mathbf{X})^\dagger \text{asym}(\mathbf{Y})) \\ &= \text{tr}(\text{sym}(\mathbf{X}) \text{asym}(\mathbf{Y})) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}((\mathbf{X} + \mathbf{X}^\dagger)(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^\dagger)) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{X}^\dagger\mathbf{Y}^\dagger + \mathbf{X}^\dagger\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{Y}^\dagger) \\ &= \frac{1}{4} (\text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) - \text{tr}(\mathbf{X}^\dagger\mathbf{Y}^\dagger) + \text{tr}(\mathbf{X}^\dagger\mathbf{Y}) - \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^\dagger)) \\ &= \frac{1}{4} (\text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) - \text{tr}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) + \text{tr}(\mathbf{X}^\dagger\mathbf{Y}) - \text{tr}(\mathbf{X}^\dagger\mathbf{Y})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Lemme A.13.** *Les identités suivantes sont vérifiées*

$$\text{tax}(\text{vax}(\mathbf{M})) = \text{asym}(\mathbf{M}), \quad (\text{A.17})$$

$$\text{vax}(\mathbf{M}) \times \mathbf{b} = \text{asym}(\mathbf{M}) \mathbf{b}, \quad (\text{A.18})$$

$$\text{vax}(\mathbf{A}) \cdot \text{vax}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \text{asym}(\mathbf{A}) : \text{asym}(\mathbf{B}), \quad (\text{A.19})$$

$$\text{tax}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = [\text{tax}(\mathbf{a}), \text{tax}(\mathbf{b})], \quad (\text{A.20})$$

$$\text{vax}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = -\frac{1}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad (\text{A.21})$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{c} = -\frac{1}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad (\text{A.22})$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) : \mathbf{M} = \mathbf{a} \cdot (\text{asym}(\mathbf{M}) \mathbf{b}). \quad (\text{A.23})$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \frac{1}{2} ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})) \quad (\text{A.24})$$

*Remarque A.14.* Comme point de comparaison à (A.23), nous avons par définition du produit tensoriel et du produit scalaire de Frobenius

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : \mathbf{M} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{M}\mathbf{b}).$$

*Démonstration.*

1. Ce résultat est une application directe de l'égalité (A.4)

$$\begin{aligned}
\text{tax}(\text{vax}(\mathbf{M}))_{\alpha,\beta} &= -\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \text{vax}(\mathbf{M})_{\gamma} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{\gamma,\alpha,\beta} \epsilon_{\gamma,\mu,\nu} M_{\mu,\nu} \\
&= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha,\mu} \delta_{\beta,\nu} - \delta_{\alpha,\nu} \delta_{\beta,\mu}) M_{\mu,\nu} \\
&= \frac{1}{2} (M_{\alpha,\beta} - M_{\beta,\alpha}) \\
&= \text{asym}(\mathbf{M})_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

2. Nous utilisons l'égalité (A.17) avec la définition de tax pour obtenir

$$\text{asym}(\mathbf{M}) \mathbf{b} = \text{tax}(\text{vax}(\mathbf{M})) \mathbf{b} = \text{vax}(\mathbf{M}) \times \mathbf{b}.$$

3. Nous réécrivons (A.19) en utilisant (A.16)

$$\begin{aligned}
\text{vax}(\mathbf{A}) \cdot \text{vax}(\mathbf{B}) &= \left( -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} A_{\beta,\gamma} \right) \left( -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha,\mu,\nu} B_{\mu,\nu} \right) \\
&= \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha,\mu,\nu} A_{\beta,\gamma} B_{\mu,\nu} \\
&= \frac{1}{4} (\delta_{\beta,\mu} \delta_{\gamma,\nu} - \delta_{\beta,\nu} \delta_{\gamma,\mu}) A_{\beta,\gamma} B_{\mu,\nu} \\
&= \frac{1}{4} (A_{\beta,\gamma} B_{\beta,\gamma} - A_{\beta,\gamma} B_{\gamma,\beta}) \\
&= \frac{1}{4} (A_{\beta,\gamma} B_{\beta,\gamma} - A_{\beta,\gamma} B_{\gamma,\beta}) \\
&= \frac{1}{2} A_{\beta,\gamma} \left( \frac{1}{2} (B_{\beta,\gamma} - B_{\beta,\gamma}^{\dagger}) \right) \\
&= \frac{1}{2} A_{\beta,\gamma} \text{asym}(B)_{\beta,\gamma} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{A} : \text{asym}(\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

Or les matrices antisymétriques sont orthogonales aux matrices symétrique d'où

$$\begin{aligned}
\text{vax}(\mathbf{A}) \cdot \text{vax}(\mathbf{B}) &= \frac{1}{2} \mathbf{A} : \text{asym}(\mathbf{B}) \\
&= \frac{1}{2} (\text{sym}(\mathbf{A}) + \text{asym}(\mathbf{A})) : \text{asym}(\mathbf{B}) \\
&= \frac{1}{2} \text{asym}(\mathbf{A}) : \text{asym}(\mathbf{B}).
\end{aligned}$$

4. Il est ici plus aisé de débiter par la définition du commutateur

$$\begin{aligned}
[\text{tax}(\mathbf{a}), \text{tax}(\mathbf{b})]_{\alpha,\beta} &= \text{tax}(\mathbf{a})_{\alpha,\gamma} \text{tax}(\mathbf{b})_{\gamma,\beta} - \text{tax}(\mathbf{b})_{\alpha,\gamma} \text{tax}(\mathbf{a})_{\gamma,\beta} \\
&= (\epsilon_{\alpha,\gamma,\mu} a_\mu) (\epsilon_{\gamma,\beta,\nu} b_\nu) - (\epsilon_{\alpha,\gamma,\nu} b_\nu) (\epsilon_{\gamma,\beta,\mu} a_\mu) \\
&= (\epsilon_{\gamma,\mu,\alpha} a_\mu) (\epsilon_{\gamma,\beta,\nu} b_\nu) - (\epsilon_{\gamma,\nu,\alpha} b_\nu) (\epsilon_{\gamma,\beta,\mu} a_\mu) \\
&= (\epsilon_{\gamma,\mu,\alpha} \epsilon_{\gamma,\beta,\nu} - \epsilon_{\gamma,\nu,\alpha} \epsilon_{\gamma,\beta,\mu}) a_\mu b_\nu \\
&= ((\delta_{\alpha,\nu} \delta_{\beta,\mu} - \delta_{\mu,\nu} \delta_{\alpha,\beta}) - (\delta_{\alpha,\mu} \delta_{\beta,\nu} - \delta_{\mu,\nu} \delta_{\alpha,\beta})) a_\mu b_\nu \\
&= (\delta_{\alpha,\nu} \delta_{\beta,\mu} - \delta_{\alpha,\mu} \delta_{\beta,\nu}) a_\mu b_\nu \\
&= -\epsilon_{\gamma,\alpha,\beta} \epsilon_{\gamma,\mu,\nu} a_\mu b_\nu \\
&= -\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\gamma \\
&= \text{tax}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

5. Nous utilisons l'antisymétrie du symbole de Levi-Civita

$$\begin{aligned}
\text{vax}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_\alpha &= -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_{\beta,\gamma} \\
&= -\frac{1}{4} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} (a_\beta b_\gamma - b_\beta a_\gamma) \\
&= -\frac{1}{4} (\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\beta b_\gamma + \epsilon_{\alpha,\gamma,\beta} b_\beta a_\gamma) \\
&= -\frac{1}{4} (\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\beta b_\gamma + \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\beta b_\gamma) \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} a_\beta b_\gamma \\
&= -\frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\alpha.
\end{aligned}$$

6. Nous pouvons combiner A.18 et A.21 après avoir utilisé l'antisymétrie de  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  pour trouver

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{c} = \text{asym}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{c} = \text{vax}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

7. Ici, il suffit d'expliciter le produit et de se rappeler l'équation A.13 :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) : \mathbf{M} &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_{\alpha,\beta} M_{\alpha,\beta} \\
&= \frac{1}{2} (a_\alpha b_\beta - b_\alpha a_\beta) M_{\alpha,\beta} \\
&= \frac{1}{2} (a_\alpha M_{\alpha,\beta} b_\beta - a_\beta M_{\beta,\alpha}^\dagger b_\alpha) \\
&= \frac{1}{2} a_\alpha (M_{\alpha,\beta} - M_{\alpha,\beta}^\dagger) b_\beta \\
&= a_\alpha \text{asym}(\mathbf{M})_{\alpha,\beta} b_\beta \\
&= \mathbf{a} \cdot (\text{asym}(\mathbf{M}) \mathbf{b}).
\end{aligned}$$

8. Nous utilisons le dernier résultat pour obtenir

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) &= \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \mathbf{b}) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{c} \otimes \mathbf{d} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{c}) \mathbf{b}) \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{d}) \\
&= \frac{1}{2} ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})).
\end{aligned}$$

□

**Lemme A.15.** *Une identité sur les matrices en dimension trois :*

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\rho, \beta, \gamma} \epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{\alpha, \kappa} M_{\beta, \lambda} M_{\gamma, \mu} = \delta_{\alpha, \rho} \det(M).$$

*Démonstration.* En utilisant l'arithmétique modulaire sur les indices<sup>1</sup>, nous avons

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \epsilon_{\rho, \beta, \gamma} \epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{\alpha, \kappa} M_{\beta, \lambda} M_{\gamma, \mu} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{\alpha, \kappa} (M_{\rho+1, \lambda} M_{\rho+2, \mu} - M_{\rho+2, \lambda} M_{\rho+1, \mu}) \\
&= \frac{1}{2} M_{\alpha, \kappa} (\epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{\rho+1, \lambda} M_{\rho+2, \mu} - \epsilon_{\kappa, \mu, \lambda} M_{\rho+2, \mu} M_{\rho+1, \lambda}) \\
&= \frac{1}{2} M_{\alpha, \kappa} (\epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{\rho+1, \lambda} M_{\rho+2, \mu} + \epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{\rho+2, \mu} M_{\rho+1, \lambda}) \\
&= \epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{\alpha, \kappa} M_{\rho+1, \lambda} M_{\rho+2, \mu},
\end{aligned}$$

si  $\alpha = \rho$  alors

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{\rho, \kappa} M_{\rho+1, \lambda} M_{\rho+2, \mu} \\
&= \epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{1, \kappa} M_{2, \lambda} M_{3, \mu} \\
&= \det(M),
\end{aligned}$$

par contre, si  $\alpha = \rho + 1$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{\rho+1, \kappa} M_{\rho+1, \lambda} M_{\rho+2, \mu} \\
&= \frac{1}{2} (\epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{\rho+1, \kappa} M_{\rho+1, \lambda} - \epsilon_{\lambda, \kappa, \mu} M_{\rho+1, \kappa} M_{\rho+1, \lambda}) M_{\rho+2, \mu} \\
&= \frac{1}{2} (\epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} M_{\rho+1, \kappa} M_{\rho+1, \lambda} - \epsilon_{\lambda, \kappa, \mu} M_{\rho+1, \lambda} M_{\rho+1, \kappa}) M_{\rho+2, \mu} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{\kappa, \lambda, \mu} (M_{\rho+1, \kappa} M_{\rho+1, \lambda} - M_{\rho+1, \lambda} M_{\rho+1, \kappa}) M_{\rho+2, \mu} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Le même usage de l'antisymétrie peut être utilisé dans le cas  $\alpha = \rho + 2$  pour trouver le résultat

1. Nous choisissons  $\alpha + n = ((\alpha + n - 1) \bmod 3) + 1$  pour des indices commençant à 1.

attendu. □

**Lemme A.16.** *Relation entre la transformation d'un pseudovecteur et celle de son tenseur axial.*

$$\mathbf{M}^\dagger \text{tax}(\mathbf{M}\mathbf{a}) \mathbf{M} = \text{dét}(\mathbf{M}) \text{tax}(\mathbf{a}) \quad (\text{A.25})$$

*Démonstration.* Prenons le vecteur axial du terme de gauche, exprimons-le en coordonnées et faisons usage du lemme A.15 :

$$\begin{aligned} \text{vax}(\mathbf{M}^\dagger \text{tax}(\mathbf{M}\mathbf{a}) \mathbf{M})_\alpha &= -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} (\mathbf{M}^\dagger \text{tax}(\mathbf{M}\mathbf{a}) \mathbf{M})_{\beta,\gamma} \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} M_{\beta,\zeta}^\dagger \text{tax}(\mathbf{M}\mathbf{a})_{\zeta,\eta} M_{\eta,\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \epsilon_{\theta,\zeta,\eta} M_{\zeta,\beta} (\mathbf{M}\mathbf{a})_\theta M_{\eta,\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\theta,\zeta,\eta} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} M_{\zeta,\beta} M_{\theta,\kappa} a_\kappa M_{\eta,\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\theta,\zeta,\eta} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} M_{\theta,\kappa} M_{\zeta,\beta} M_{\eta,\gamma} a_\kappa \\ &= \text{dét}(\mathbf{M}) \delta_{\alpha,\kappa} a_\kappa \\ &= \text{dét}(\mathbf{M}) a_\alpha. \end{aligned}$$

□

*Remarque A.17.* Le lemme A.16 explicite la différence entre un vecteur, un pseudovecteur et le tenseur antisymétrique associé à ce dernier pour leur comportement sous l'effet d'une transformation. Soient  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  deux vecteurs reliés par

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{w},$$

par conséquent, si ces vecteurs se transforment comme

$$\mathbf{v}' = \mathbf{T}\mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}' = \mathbf{T}\mathbf{w}$$

où  $\mathbf{T}$  est une transformation linéaire inversible, nous sommes amenés à chercher  $\mathbf{A}'$  tel que

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}'\mathbf{w}'.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{A}'\mathbf{w}', \\ \mathbf{T}\mathbf{v} &= \mathbf{A}'\mathbf{T}\mathbf{w}, \\ \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{v} &= \mathbf{A}'\mathbf{T}\mathbf{w}, \end{aligned}$$

donc, puisque  $\mathbf{w}$  est arbitraire

$$\mathbf{TA} = \mathbf{A}'\mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{T}, \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{TAT}^{-1}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $\mathbf{A}$  est antisymétrique et agit sur un espace de dimension 3, il lui est alors associé un pseudovecteur axial  $\mathbf{a} = \text{vax}(\mathbf{A})$ . En reprenant (A.25), nous avons

$$\mathbf{T}^\dagger \text{tax}(\mathbf{Ta}) \mathbf{T} = \text{dét}(\mathbf{T}) \text{tax}(\mathbf{a}),$$

d'où

$$\text{tax}(\mathbf{a}') = \text{dét}(\mathbf{T}) \mathbf{T}^{-\dagger} \text{tax}(\mathbf{a}) \mathbf{T}^{-1} \neq \mathbf{T} \text{tax}(\mathbf{a}) \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A}'.$$

Donc  $\text{vax}(\mathbf{A}') \neq \mathbf{a}'$ , c'est-à-dire que le vecteur axial de  $\mathbf{A}'$  n'est plus  $\mathbf{a}'$ . Cependant, si  $\mathbf{T} = \mathbf{Q}$  avec  $\mathbf{Q}$  une rotation, alors, et seulement alors,

$$\text{tax}(\mathbf{a}') = \text{dét}(\mathbf{Q}) \mathbf{Q}^{-\dagger} \text{tax}(\mathbf{a}) \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \text{tax}(\mathbf{a}) \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{A}'.$$

## A.2 CALCUL

**Définition A.18.** Puisqu'il existe des définitions différentes, nous présentons celle que nous utilisons pour la divergence d'un champ tensoriel

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \quad (\nabla \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot (\mathbf{M}^\dagger \mathbf{a})$$

où  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr}(\nabla \mathbf{v})$ . Notons que cette définition<sup>2</sup> correspond à celle de [44, définition 2.9], mais n'est qu'une des trois possibilités données dans [85, §1.5.2].

**Lemme A.19.** *La définition précédente est équivalente, en coordonnées, à*

$$(\nabla \cdot \mathbf{M})_\alpha = \partial_\beta M_{\alpha,\beta}.$$

**Lemme A.20.** *Les identités suivantes sont vérifiées*

$$\nabla \times \text{vax}(\mathbf{M}) = \nabla \cdot \text{asym}(\mathbf{M}), \tag{A.26}$$

$$\frac{1}{2} \text{tax}(\nabla \times \mathbf{v}) = \text{asym}(\nabla \mathbf{v}). \tag{A.27}$$

*Démonstration.* Nous travaillons en coordonnées.

2. La motivation de ce choix est de rendre l'expression du théorème de Gauss-Ostrogradski plus comparable à son pendant vectoriel :  $\int_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{S} \mathbf{n} da = \int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot \mathbf{S} dv$ .

1. Ce développement est analogue à celui de l'égalité A.18

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \text{vax}(\mathbf{M}))_\alpha &= \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \partial_\beta \text{vax}(\mathbf{M})_\gamma \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon_{\gamma,\alpha,\beta} \epsilon_{\gamma,\mu,\nu} \partial_\beta M_{\mu,\nu} \\
&= -\frac{1}{2} (\delta_{\alpha,\mu} \delta_{\beta,\nu} - \delta_{\alpha,\nu} \delta_{\beta,\mu}) \partial_\beta M_{\mu,\nu} \\
&= -\frac{1}{2} (\partial_\beta M_{\alpha,\beta} - \partial_\beta M_{\beta,\alpha}) \\
&= -\frac{1}{2} \partial_\beta (M_{\alpha,\beta} - M_{\beta,\alpha}) \\
&= -\partial_\beta \text{asym}(\mathbf{M})_{\alpha,\beta} \\
&= -(\nabla \cdot \text{asym}(\mathbf{M}))_\alpha.
\end{aligned}$$

2. Nous utilisons encore une fois l'égalité A.4

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{tax}(\nabla \times \mathbf{v})_{\alpha,\beta} &= -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} (\nabla \times \mathbf{v})_\gamma \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon_{\gamma,\alpha,\beta} \epsilon_{\gamma,\mu,\nu} \partial_\mu v_\nu \\
&= -\frac{1}{2} (\delta_{\alpha,\mu} \delta_{\beta,\nu} - \delta_{\alpha,\nu} \delta_{\beta,\mu}) \partial_\mu v_\nu \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\beta v_\alpha - \partial_\alpha v_\beta) \\
&= \text{asym}(\nabla \mathbf{v})_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

□

# CORRESPONDANCES AVEC D'AUTRES FORMULATIONS ET THÉORIES

---

## B.1 CORRESPONDANCES AVEC LA THÉORIE DES TIGES SE DÉFORMANT DANS L'ESPACE D'ANTMAN

Cette section compare notre formulation avec celle de [2]. Il est à noter que les indices grecs sont sommés de 1 à 2, c'est-à-dire que  $a_\alpha b_\alpha = \sum_{\alpha=1}^2 a_\alpha b_\alpha$  alors que les indices latins sont sommés de 1 à 3 :  $a_k b_k = \sum_{k=1}^3 a_k b_k$ .

### B.1.1 CORRESPONDANCES DES VARIABLES

CINÉMATIQUE ET DÉFORMATION

$$(x^1, x^2, s) = (X_2, X_3, X_1)$$

configuration of the rod

$$\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{X}, t)$$

reference configuration of the rod

$$\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\phi}(\mathbf{X}, t)$$

directors

$$(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3) = (\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_1)$$

directors of the reference configuration

$$(\mathbf{d}_1^\circ, \mathbf{d}_2^\circ, \mathbf{d}_3^\circ) = (\hat{\mathbf{d}}_2, \hat{\mathbf{d}}_3, \hat{\mathbf{d}}_1)$$

$$\varphi_\gamma(\mathbf{x}) = X_\gamma$$

(sans nom)

$$\mathbf{w} = \text{vax}(\mathbf{W})$$

strain variables

$$(u_1, u_2, u_3) = (\mathbf{d}_2 \cdot \text{vax}(\boldsymbol{\Omega}), \mathbf{d}_3 \cdot \text{vax}(\boldsymbol{\Omega}), \mathbf{d}_1 \cdot \text{vax}(\boldsymbol{\Omega}))$$

$$(v_1, v_2, v_3) = (\mathbf{d}_2 \cdot \partial_{X_1} \mathbf{r}, \mathbf{d}_3 \cdot \partial_{X_1} \mathbf{r}, \mathbf{d}_1 \cdot \partial_{X_1} \mathbf{r})$$

DYNAMIQUE

resultant contact force

$$\mathbf{n} = \mathbf{l}$$

resultant contact couple

$$\mathbf{m} = -2\text{vax}(\mathbf{L})$$

body force per unit reference length

$$\mathbf{f}^0 = \mathbf{q}$$

body couple per unit reference length

$$\mathbf{l} = -2\text{vax}(\mathbf{Q})$$

MESURES D'INERTIE

mass density in the reference configuration per unit of s

$$\rho A = \lambda$$

generalized first moment of inertia

$$\rho I_\gamma = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{d}_{\gamma+1}$$

generalized second moment of inertia

$$\rho J_{\mu\nu}^\times = \mathbf{d}_{\mu+1} \cdot (\mathbf{Y} \mathbf{d}_{\nu+1})$$

MOMENTS

linear momentum relative to  $\mathbf{r}(s, t)$

$$\rho I^\alpha (\delta_\alpha \mathbf{a}_\alpha) = \boldsymbol{\theta}$$

angular momentum relative to  $\mathbf{r}(s, t)$

$$\rho J_\times^{\alpha\beta} \partial_{tt} (\delta_\alpha \mathbf{a}_\alpha) \times (\delta_\beta \mathbf{a}_\beta) = -2\text{vax}(\mathbf{J}')$$

## B.1.2 ÉQUATIONS

Les équations sont tirées de [2].

CINÉMATIQUE

$$\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{r}(s, t) + \sum_{\alpha=1}^2 \varphi^\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{d}_\alpha(s, t) \quad (\text{Antman 16.8.3c})$$

$$\tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^\circ(s) + \sum_{\alpha=1}^2 \varphi^\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{a}_\alpha^\circ(s) \quad (\text{Antman 16.8.4})$$

$$\mathbf{d}_\alpha = \delta_\alpha \mathbf{a}_\alpha \quad (\text{Antman 16.8.1})$$

$$\mathbf{r}_s = v_k, \quad \partial_s \mathbf{a}_k = \mathbf{u} \times \mathbf{a}_k, \quad \partial_t \mathbf{a}_k = \mathbf{w} \times \mathbf{a}_k \quad (\text{Antman 16.8.8})$$

$$\partial_s \mathbf{d}_\alpha = \omega_\alpha \mathbf{a}_\alpha + \delta_\alpha \mathbf{u} \times \mathbf{a}_\alpha, \quad \omega_\alpha = \partial_s \delta_\alpha \quad (\text{Antman 16.8.10})$$

#### DYNAMIQUE

$$\mathbf{n} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{T}_A \cdot \mathbf{a}_3^\circ \Phi dx_1 dx_2 \quad (\text{Antman 16.8.18a})$$

$$\mathbf{f}^0 = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{f} j dx_1 dx_2 + \int_{\partial \mathcal{A}} \bar{\boldsymbol{\tau}} \frac{\nu^1 dx_2 - \nu^2 dx_1}{1 - \nu^3 \nu_3} \quad (\text{Antman 16.8.18b})$$

$$\mathbf{m} = \int_{\mathcal{A}} \varphi^\alpha \delta_\alpha \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{T}_A \cdot \mathbf{a}_3^\circ \Phi dx_1 dx_2 \quad (\text{Antman 16.8.22a})$$

$$\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} \varphi^\alpha \delta_\alpha \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{f} j dx_1 dx_2 + \int_{\partial \mathcal{A}} \varphi^\alpha \delta_\alpha \mathbf{a}_\alpha \times \bar{\boldsymbol{\tau}} \frac{\nu^1 dx_2 - \nu^2 dx_1}{1 - \nu^3 \nu_3} \quad (\text{Antman 16.8.22b})$$

$$\mathbf{n}_s + \mathbf{f}^0 = \rho A \mathbf{r}_{tt} + \rho I_\alpha \partial_{tt} \delta_\alpha \mathbf{a}_\alpha \quad (\text{Antman 16.8.17})$$

$$\mathbf{m}_s + \mathbf{r}_s \times \mathbf{n} + \mathbf{l} = \rho I^\alpha (\delta_\alpha \mathbf{a}_\alpha) \times \mathbf{r}_{tt} + \rho J_\times^{\alpha\beta} \partial_{tt} (\delta_\alpha \mathbf{a}_\alpha) \times (\delta_\beta \mathbf{a}_\beta) \quad (\text{Antman 16.8.21})$$

#### MESURES D'INERTIE

$$\rho A = \int_{\mathcal{A}} \tilde{\rho} j dx^1 dx^2 \quad (\text{Antman 16.8.15a})$$

$$\rho I^\alpha = \int_{\mathcal{A}(s)} \tilde{\rho} \varphi^\alpha j dx^1 dx^2 \quad (\text{Antman 16.8.15b})$$

$$\rho J_\times^{\alpha\beta} = \int_{\mathcal{A}(s)} \tilde{\rho} \varphi^\alpha \varphi^\beta j dx^1 dx^2 \quad (\text{Antman 16.8.15c})$$

### B.1.3 DÉMONSTRATION DES ÉQUIVALENCES

#### CINÉMATIQUE

$$\partial_{X_1} \mathbf{d}_k = \text{vax}(\boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{d}_k = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{d}_k$$

$$\partial_t \mathbf{d}_k = \text{vax}(\mathbf{W}) \times \mathbf{d}_k = \mathbf{W} \mathbf{d}_k$$

#### DYNAMIQUE

$$\partial_{X_1} \mathbf{l} + \mathbf{q} = \partial_t^2 (\lambda \mathbf{r} + \boldsymbol{\theta})$$

$$-2\partial_{X_1} \text{vax}(\mathbf{L}) + (\partial_{X_1} \mathbf{r}) \times \mathbf{l} - 2\text{vax}(\mathbf{Q}) = \boldsymbol{\theta} \times \partial_t^2 \mathbf{r} - 2\partial_t \text{vax}(\mathbf{J}')$$

$$\partial_{X_1} \mathbf{L} + (\partial_{X_1} \mathbf{r}) \wedge \mathbf{l} + \mathbf{Q} = \boldsymbol{\theta} \wedge \partial_t^2 \mathbf{r} + \partial_t \mathbf{J}'$$

## B.2 CORRESPONDANCES AVEC LA THÉORIE DES TIGES AVEC TORSION ET FLEXION DANS UN FLUIDE VISQUEUX DE LIM *et al.*

La formulation est celle de [50, 73, 74].

### B.2.1 CORRESPONDANCES DES VARIABLES

#### FLUIDE

fluid density

$$\rho = \rho$$

fluid viscosity

$$\mu = \mu$$

fluid velocity

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

fluid pressure

$$p = p$$

body force

$$\mathbf{f}^b = \mathbf{b}'$$

#### CINÉMATIQUE ET DÉFORMATION

$$s = X_1 \tag{B.1}$$

space curve of the rod

$$\mathbf{X} = \mathbf{r} \tag{B.2}$$

orthonormal director basis

$$\{\mathbf{D}^1, \mathbf{D}^2, \mathbf{D}^3\} = (\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_1) \tag{B.3}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{v} \tag{B.4}$$

$$\mathbf{W} = \text{vax}(\mathbf{W}) \tag{B.5}$$

strains of the rod

$$\mathbf{\Omega} = \left( \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) \cdot \mathbf{E}_2, \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) \cdot \mathbf{E}_3, \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) \cdot \mathbf{E}_1 \right) \tag{B.6}$$

intrinsic twist vector

$$(\kappa_1, \kappa_2, \tau) = \left( \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) \cdot \mathbf{E}_2, \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) \cdot \mathbf{E}_3, \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) \cdot \mathbf{E}_1 \right) \tag{B.7}$$

$$(0, 0, 0) = \left( \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \cdot \mathbf{E}_2, \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \cdot \mathbf{E}_3, \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \cdot \mathbf{E}_1 \right) \tag{B.8}$$

DYNAMIQUE DE LA TIGE

internal force on the perpendicular cross section

$$\mathbf{F} = \mathbf{l} \quad (\text{B.9})$$

internal moment on the perpendicular cross section

$$\mathbf{N} = -2\text{vax}(\mathbf{L}) \quad (\text{B.10})$$

applied force density

$$\mathbf{f} = \mathbf{q} \quad (\text{B.11})$$

applied torque density

$$\mathbf{n} = -2\text{vax}(\mathbf{Q}) \quad (\text{B.12})$$

expansion in the director basis of internal force

$$(F^1, F^2, F^3) = \left( \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_2, \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_3, \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_1 \right) \quad (\text{B.13})$$

expansion in the director basis of internal moment

$$(N^1, N^2, N^3) = -2 \left( \text{vax}(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{E}_2, \text{vax}(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{E}_3, \text{vax}(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{E}_1 \right) \quad (\text{B.14})$$

## B.2.2 ÉQUATIONS

Les équations sont tirées de [73].

### ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}^b \quad (\text{Lim 5})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{Lim 6})$$

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DE LA TIGE balance of momentum et balance of angular momentum

$$0 = \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} \quad (\text{Lim 7})$$

$$0 = \mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \times \mathbf{F} \quad (\text{Lim 8})$$

### RELATIONS CONSTITUTIVES

$$\mathbf{F} = F^1 \mathbf{D}^1 + F^2 \mathbf{D}^2 + F^3 \mathbf{D}^3 \quad (\text{Lim 9})$$

$$\mathbf{N} = N^1 \mathbf{D}^1 + N^2 \mathbf{D}^2 + N^3 \mathbf{D}^3 \quad (\text{Lim 10})$$

$$N^1 = a_1 \left( \frac{\partial \mathbf{D}^2}{\partial s} \cdot \mathbf{D}^3 - \kappa_1 \right), \quad N^2 = a_2 \left( \frac{\partial \mathbf{D}^3}{\partial s} \cdot \mathbf{D}^1 - \kappa_2 \right), \quad N^3 = a_3 \left( \frac{\partial \mathbf{D}^1}{\partial s} \cdot \mathbf{D}^2 - \tau \right), \quad (\text{Lim 11})$$

$$F^1 = b_1 \mathbf{D}^1 \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}, \quad F^2 = b_2 \mathbf{D}^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}, \quad F^3 = b_3 \left( \mathbf{D}^3 \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} - 1 \right) \quad (\text{Lim 12})$$

#### CINÉTIQUE

$$\frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial t} = \mathbf{U}(s, t) \quad (\text{Lim 14})$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}^i(s, t)}{\partial t} = \mathbf{W}(s, t) \times \mathbf{D}^i(s, t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Lim 16})$$

#### APPARIEMENT

$$\mathbf{U}(s, t) = \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta_c(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) d\mathbf{x} \quad (\text{Lim 14})$$

$$\mathbf{W}(s, t) = \frac{1}{2} \int (\nabla \times \mathbf{u}) \delta_c(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) d\mathbf{x} \quad (\text{Lim 15})$$

$$\mathbf{f}^b(\mathbf{x}, t) = \int (-\mathbf{f}(s, t)) \delta_c(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) ds + \frac{1}{2} \nabla \times \int (-\mathbf{n}(s, t)) \delta_c(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) ds \quad (\text{Lim 13})$$

#### ÉNERGIE ÉLASTIQUE

$$E = \frac{1}{2} \int \left( a_1 \left( \frac{\partial \mathbf{D}^2}{\partial s} \cdot \mathbf{D}^3 - \kappa_1 \right)^2 + a_2 \left( \frac{\partial \mathbf{D}^3}{\partial s} \cdot \mathbf{D}^1 - \kappa_2 \right)^2 + a_3 \left( \frac{\partial \mathbf{D}^1}{\partial s} \cdot \mathbf{D}^2 - \tau \right)^2 + b_1 \left( \mathbf{D}^1 \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right)^2 + b_2 \left( \mathbf{D}^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right)^2 + b_3 \left( \mathbf{D}^3 \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} - 1 \right)^2 \right) ds \quad (\text{Lim 17})$$

### B.2.3 ÉQUIVALENCES

L'équation de Navier-Stokes reste parfaitement reconnaissable dans la notation de Lim *et al.*

ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE DE LA TIGE L'équation de la balance des forces se transcrit directement. En utilisant (B.10) et (B.12) l'équation (Lim 8) devient, dans notre notation,

$$\mathbf{0} = -2\text{vax}(\mathbf{Q}) + \partial_{X_1}(-2\text{vax}(\mathbf{L})) + (\partial_{X_1} \mathbf{r}) \times \mathbf{l}$$

prenons le tenseur antisymétrique de cette expression et divisons par  $-2$  pour trouver

$$\mathbf{0} = \mathbf{Q} + \partial_{X_1} \mathbf{L} - \frac{1}{2} \text{tax}((\partial_{X_1} \mathbf{r}) \times \mathbf{l})$$

en utilisant l'identité (A.21), nous trouvons

$$\mathbf{0} = \mathbf{Q} + \partial_{X_1} \mathbf{L} + (\partial_{X_1} \mathbf{r}) \wedge \mathbf{l}$$

ce qui est l'équation (2.55) avec un moment d'inertie nul.

RELATIONS CONSTITUTIVES La réécriture de (Lim 9) serait tautologique si nous n'introduisons pas la force interne matérielle  $\mathbf{l}$

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_\alpha \right) \mathbf{d}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_\alpha \right) \mathbf{R} \mathbf{E}_\alpha \\ &= \mathbf{R} \sum_{\alpha=1}^N \left( \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_\alpha \right) \mathbf{E}_\alpha \\ &= \mathbf{R} \mathbf{l} \end{aligned}$$

par contre le choix de représenter le couple comme un tenseur antisymétrique complique les choses : en divisant par  $-2$  l'équation (Lim 10) en en utilisant (B.10) et (B.14) nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{vax}(\mathbf{L}) &= \sum_{\alpha=1}^N \left( \text{vax}(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{E}_\alpha \right) \mathbf{d}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \left( \text{vax}(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{E}_\alpha \right) \mathbf{R} \mathbf{E}_\alpha \\ &= \mathbf{R} \sum_{\alpha=1}^N \left( \text{vax}(\mathbf{L}) \cdot \mathbf{E}_\alpha \right) \mathbf{E}_\alpha \\ &= \mathbf{R} \text{vax}(\mathbf{L}) \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant le lemme A.16 pour trouver

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \text{tax} \left( \mathbf{R} \text{vax}(\mathbf{L}) \right) \\ &= \det(\mathbf{R}) \mathbf{R}^{-\dagger} \mathbf{L} \mathbf{R}^{-1} \\ &= \mathbf{R} \mathbf{L} \mathbf{R}^{\dagger} \end{aligned}$$

Passons maintenant à la loi constitutive pour la force

$$\begin{aligned}
 b_\alpha (\mathbf{d}_\alpha \cdot \partial_{X_1} \mathbf{r} - \delta_{1,\alpha}) &= b_\alpha \left( (\mathbf{R} \mathbf{E}_\alpha) \cdot \partial_{X_1} \mathbf{r} - \left( \hat{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{E}_1 \right) \cdot \mathbf{E}_\alpha \right) \\
 &= b_\alpha \mathbf{E}_\alpha \cdot \left( \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{E}_1 \right) \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N b_\beta (\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\beta) \mathbf{E}_\beta \cdot \left( \boldsymbol{\omega} - \hat{\boldsymbol{\omega}} \right) \\
 &= \sum_{\beta=1}^N b_\beta (\mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\beta) \mathbf{E}_\beta \cdot \left( \boldsymbol{\omega} - \hat{\boldsymbol{\omega}} \right) \\
 &= \left( \left( \sum_{\beta=1}^N b_\beta \mathbf{E}_\beta \otimes \mathbf{E}_\beta \right) \left( \boldsymbol{\omega} - \hat{\boldsymbol{\omega}} \right) \right) \cdot \mathbf{E}_\alpha \\
 &= \left( \mathbf{B} \left( \boldsymbol{\omega} - \hat{\boldsymbol{\omega}} \right) \right) \cdot \mathbf{E}_\alpha \\
 &= \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_\alpha
 \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$\mathbf{B} = \sum_{\beta=1}^N b_\beta \mathbf{E}_\beta \otimes \mathbf{E}_\beta$$

Pour la loi constitutive pour le couple, nous posons

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha=1}^N a_\alpha \mathbf{E}_\alpha \otimes \mathbf{E}_\alpha$$

et nous remarquons que l'égalité  $(\partial_{X_1} \mathbf{d}_\alpha) \cdot \mathbf{d}_\beta = -(\partial_{X_1} \mathbf{d}_\beta) \cdot \mathbf{d}_\alpha$  (qui provient de  $0 = \partial_{X_1} \delta_{\alpha,\beta} = \partial_{X_1} (\mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\beta)$ ) nous permet de réécrire les équations (Lim 11) sous la forme plus compacte

$$\begin{aligned}
 -2 \text{vax} \left( \mathbf{L} \right) \cdot \mathbf{E}_\alpha &= A_{\alpha,\beta} \left( \frac{1}{2} \epsilon_{\beta,\gamma,\zeta} (\partial_{X_1} \mathbf{d}_\gamma) \cdot \mathbf{d}_\zeta - \text{vax} \left( \hat{\boldsymbol{\Omega}} \right) \cdot \mathbf{E}_\beta \right) \\
 &= \frac{1}{2} A_{\alpha,\beta} \epsilon_{\beta,\gamma,\zeta} \left( (\partial_{X_1} (\mathbf{R} \mathbf{E}_\gamma)) \cdot \mathbf{R} \mathbf{E}_\zeta + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{\gamma,\zeta} \right) \\
 &= \frac{1}{2} A_{\alpha,\beta} \epsilon_{\beta,\gamma,\zeta} \left( \left( \mathbf{R}^\dagger ((\partial_{X_1} \mathbf{R}) \mathbf{E}_\gamma) \right) \cdot \mathbf{E}_\zeta + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{\gamma,\zeta} \right) \\
 &= \frac{1}{2} A_{\alpha,\beta} \epsilon_{\beta,\gamma,\zeta} \left( \left( (\mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{R}) \mathbf{E}_\gamma \right) \cdot \mathbf{E}_\zeta + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{\gamma,\zeta} \right) \\
 &= \frac{1}{2} A_{\alpha,\beta} \epsilon_{\beta,\gamma,\zeta} \left( \left( \mathbf{R}^\dagger \partial_{X_1} \mathbf{R} + \hat{\boldsymbol{\Omega}}^\dagger \right) \mathbf{E}_\gamma \right) \cdot \mathbf{E}_\zeta \\
 &= -\frac{1}{2} A_{\alpha,\beta} \epsilon_{\beta,\zeta,\gamma} \left( \left( \boldsymbol{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\Omega}} \right) \mathbf{E}_\gamma \right) \cdot \mathbf{E}_\zeta \\
 &= A_{\alpha,\beta} \text{vax} \left( \boldsymbol{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\Omega}} \right) \cdot \mathbf{E}_\beta \\
 &= \left( \mathbf{A} \text{vax} \left( \boldsymbol{\Omega} - \hat{\boldsymbol{\Omega}} \right) \right) \cdot \mathbf{E}_\alpha
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_\diamond &= -\frac{1}{2}\text{tax}\left(\mathbf{A}\text{vax}\left(\mathbf{\Omega}_\diamond - \hat{\mathbf{\Omega}}_\diamond\right)\right) \\ &= \mathbf{A}\left(\mathbf{\Omega}_\diamond - \hat{\mathbf{\Omega}}_\diamond\right)\end{aligned}$$

où  $\mathbf{A}$  est défini par son effet sur un tenseur  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = -\frac{1}{2}\text{tax}\left(\mathbf{A}\text{vax}\left(\mathbf{V}\right)\right).$$

Dans le cas où  $\mathbf{A}$  est inversible, nous avons de part le lemme A.16

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = -\frac{1}{2}\text{dét}(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-\dagger}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}.$$

CINÉTIQUE De (Lim 14) nous avons directement

$$\partial_t \mathbf{r} = \mathbf{v}$$

pour la rotation des directeurs (Lim 16), nous avons

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{d}_\alpha &= \text{vax}(\mathbf{W}) \times \mathbf{d}_\alpha \\ \partial_t (\mathbf{R}\mathbf{E}_\alpha) &= \text{asym}(\mathbf{W})(\mathbf{R}\mathbf{E}_\alpha) \\ (\partial_t \mathbf{R})\mathbf{E}_\alpha &= (\mathbf{W}\mathbf{R})\mathbf{E}_\alpha\end{aligned}$$

et puisque  $\{\mathbf{E}_\alpha\}_{\alpha=1}^N$  est une base, cela implique

$$\partial_t \mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{R}$$

APPARIEMENT Notre formulation de l'interpolation de la vitesse du fluide

$$\mathbf{v} = \mathcal{A}_r^\dagger \mathbf{u}$$

est la translittération directe de celle de Lim *et al.* (Lim 14). Nous transcrivons (Lim 15) en

$$\text{vax}(\mathbf{W}) = \frac{1}{2}\mathcal{A}_r^\dagger(\nabla \times \mathbf{u})$$

ainsi

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= \text{tax}\left(\frac{1}{2}\mathcal{A}_r^\dagger(\nabla \times \mathbf{u})\right) \\ &= \mathcal{A}_r^\dagger\left(\frac{1}{2}\text{tax}(\nabla \times \mathbf{u})\right) \\ &= \mathcal{A}_r^\dagger \text{asym}(\nabla \mathbf{u})\end{aligned}$$

Enfin, pour l'étalement des forces, nous utilisons l'égalité (A.26) pour trouver

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}' &= -\mathcal{A}_r \mathbf{q} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathcal{A}_r (2 \text{vax}(\mathbf{Q})) \\
 &= -\mathcal{A}_r \mathbf{q} - \nabla \times \text{vax}(\mathcal{A}_r \mathbf{Q}) \\
 &= -\mathcal{A}_r \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathcal{A}_r \mathbf{Q}
 \end{aligned}$$

ÉNERGIE ÉLASTIQUE Nous réutilisons les développements pour les lois constitutives pour réécrire (Lim 17) sous la forme

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{I}} \sum_{\alpha=1}^N a_{\alpha} \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\Omega} - \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right)_{\alpha}^2 + b_{\alpha} \left( \underset{\diamond}{\omega} - \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \right)_{\alpha}^2 dX_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{I}} \sum_{\alpha=1}^N \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\Omega} - \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right)_{\alpha} A_{\alpha,\beta} \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\Omega} - \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right)_{\beta} + \left( \underset{\diamond}{\omega} - \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \right)_{\alpha} B_{\alpha,\beta} \left( \underset{\diamond}{\omega} - \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \right)_{\beta} dX_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{I}} \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\Omega} - \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) \cdot \mathbf{A} \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\Omega} - \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) + \left( \underset{\diamond}{\omega} - \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \right) \cdot \mathbf{B} \left( \underset{\diamond}{\omega} - \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \right) dX_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{I}} -2 \text{vax} \left( \underset{\diamond}{\Omega} - \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) \cdot \text{vax} \left( \mathbf{A} \left( \underset{\diamond}{\Omega} - \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) \right) + \left( \underset{\diamond}{\omega} - \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \right) \cdot \mathbf{B} \left( \underset{\diamond}{\omega} - \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \right) dX_1 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{I}} - \left( \underset{\diamond}{\Omega} - \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) : \left( \mathbf{A} \left( \underset{\diamond}{\Omega} - \underset{\diamond}{\hat{\Omega}} \right) \right) + \left( \underset{\diamond}{\omega} - \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \right) \cdot \mathbf{B} \left( \underset{\diamond}{\omega} - \underset{\diamond}{\hat{\omega}} \right) dX_1 \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé A.19.

## B.3 CORRESPONDANCES AVEC LA THÉORIE DES TIGES EN DÉFORMATION FINIE DE SIMO

Les équations sont tirées de [99].

### B.3.1 VARIABLES

CINÉMATIQUE

arc of length of the line of centroids in the reference (unstressed) configuration

$$\begin{aligned}
 S &= X_1 \\
 (\xi_1, \xi_2, S) &= (X_2, X_3, X_1) \\
 \boldsymbol{\xi} &= \sum_{\alpha=2}^N X_{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha}
 \end{aligned}$$

admissible configuration of the rod

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\phi}$$

line of centroids

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \mathbf{r}$$

two-point orthogonal tensor field

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{R}$$

curvature of the line of centroid

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}$$

axial vector associated with the curvature of the line of centroid

$$\boldsymbol{\omega} = \text{vax}(\boldsymbol{\Omega})$$

initial curvature of the line of centroid

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = \hat{\boldsymbol{\Omega}}$$

spin of the moving frame

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}$$

vorticity of the moving frame

$$\mathbf{w} = \text{vax}(\mathbf{W})$$

moving or intrinsic orthonormal frame

$$(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) = (\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_1)$$

basis of the reference configuration

$$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3) = (\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_1)$$

fixed spatial frame

$$\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^N$$

MOMENTS

(sans nom)

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\theta}$$

inertia tensor

$$\mathbf{I}_\rho = \text{tr}(\mathbf{Y}) \mathbf{1} - \mathbf{Y}$$

linear momentum per unit of reference arc length

$$\mathbf{L}_t = \partial_t(\lambda \mathbf{r} + \boldsymbol{\theta})$$

angular momentum per unit of reference arc length relative to  $\boldsymbol{\varphi}_0$

$$\mathbf{H}_t = -2\text{vax}(\mathbf{J}')$$

DYNAMIQUE

resultant contact force per unit of reference length

$$\mathbf{f} = \mathbf{l}$$

resultant contact torque per unit of reference length

$$\mathbf{m} = -2\nu_{\text{ax}}(\mathbf{L})$$

applied force per unit of reference length

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$$

applied torque per unit of reference length

$$\bar{\mathbf{m}} = -2\nu_{\text{ax}}(\mathbf{Q})$$

## B.3.2 ÉQUATIONS

CINÉMATIQUE

$$\mathbf{t}_I(S) = \mathbf{\Lambda}(S) \mathbf{E}_I \quad (\text{Simo 1.7})$$

$$\frac{d}{dS} \mathbf{t}_I(S) = \mathbf{\Omega}(S) \mathbf{t}_I(S) \quad (\text{Simo 1.8})$$

$$\dot{\mathbf{t}}_I(S, t) = \mathbf{W}(S, t) \mathbf{t}_I(S, t) \quad (\text{Simo 2.2})$$

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, S, t) = \varphi_0(S, t) + \sum_{\Gamma=1}^2 \xi_{\Gamma} \mathbf{t}_{\Gamma}(S, t) \quad (\text{Simo 2.1})$$

MOMENTS

$$\mathbf{L}_t = \int_A \rho_0 (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0) d\xi \quad (\text{Simo 2.4})$$

$$\mathbf{H}_t = \int_A \rho_0 (\varphi - \varphi_0) \times (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0) d\xi \quad (\text{Simo 2.5})$$

DYNAMIQUE balance of linear and angular momentum

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{f} + \bar{\mathbf{q}} = A_{\rho} \ddot{\varphi}_0 \quad (\text{Simo 3.3a})$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \mathbf{m}(S, t) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial S} \times \mathbf{f} + \bar{\mathbf{m}}(S, t) = \dot{\mathbf{H}}_t \quad (\text{Simo 3.3b})$$

$$\mathbf{f}(S, t) = \int_A \mathbf{P}(\xi, S) \mathbf{E}_3 d\xi \quad (\text{Simo 3.2a})$$

$$\mathbf{m}(S, t) = \int_A (\varphi(\xi, S) - \varphi_0(S, t)) \mathbf{P}(\xi, S) \mathbf{E}_3 d\xi \quad (\text{Simo 3.2b})$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{N} \qquad \mathbf{m} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{M} \quad (\text{Simo 3.5})$$

## **B.4 CORRESPONDANCES AVEC LA THÉORIE DES TIGES AFFINES DE NARDINOCCHI ET AL.**

La présente formulation est celle de [82].

### **B.4.1 VARIABLES**

material point

$$(\zeta, p) = \left( X_1, \sum_{\alpha=2}^N X_\alpha \mathbf{E}_\alpha \right)$$

instant

$$t = t$$

unit vector normal to the plane  $\mathcal{F}$

$$e = \mathbf{E}_1$$

sensible motion

$$\chi_t(\zeta, p) = \phi(X, t)$$

screw (rotation, translation) of the rod

$$(R, r) = (\mathbf{R}, \mathbf{r})$$

stretch of the rod

$$U = \mathbf{1}$$

fixed pole

$$p_o = \mathbf{0}$$

right curving

$$C^r = \mathbf{\Omega}$$

left curving

$$C^l = \mathbf{\Omega}_\diamond$$

MOMENTS

mass density

$$\mu = \lambda$$

static moment

$$s = \mathbf{R}^\dagger \boldsymbol{\theta}$$

Euler tensor of the fiber

$$E = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{Y} \mathbf{R}$$

opposite of the linear momentum

$$q = -\rho \partial_t \phi$$

partial left screw (angular, linear) momentum

$$(\overline{M}, \overline{m}) = (\mathbf{J}' + \boldsymbol{\theta} \wedge \partial_t \mathbf{r}, -\partial_t (\boldsymbol{\theta} + \lambda \mathbf{r}))$$

DYNAMIQUE

partial left screw (couple, force) stress

$$(\overline{N}, \overline{n}) = (\mathbf{L}, \mathbf{l})$$

partial left screw (couple, force) self-stress

$$(\overline{F}, \overline{f}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

partial left screw (couple, force) bulk action

$$(\overline{B}, \overline{b}) = (\mathbf{Q}, \mathbf{q})$$

## B.4.2 ÉQUATIONS

CINÉMATIQUE

$$\chi_t(\zeta, p) = p_o + r(\zeta, t) + R(\zeta, t)U(\zeta, t)(p - p_o) \quad (\text{N. et al. 2.6})$$

$$V^r = \dot{R}R^T, \quad v^r = \dot{r} - \dot{R}R^T r \quad (\text{N. et al. 2.12})$$

$$\dot{\chi}_t(\zeta, p) = v^r(\zeta, t) + V^r(\zeta, t)(\chi_t(\zeta, p) - p_o) \quad (\text{N. et al. 2.17})$$

DYNAMIQUE

$$\begin{aligned} \dot{\overline{m}} + \overline{n}' + \overline{f} + \overline{b} &= 0 \\ \dot{\overline{M}} + \dot{r} \wedge \overline{m} + \overline{N}' + r' \wedge \overline{n} - \overline{F} + \overline{B} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{N. et al. 3.36})$$

$$M = \int_{\mathcal{F}} q \wedge (\chi - p_o), \quad m = \int_{\mathcal{F}} q, \quad \mathbb{M} = \int_{\mathcal{F}} \text{sym}(R^T q \otimes (p - p_o)) \quad (\text{N. et al. 4.20})$$

$$N = \int_{\mathcal{F}} P e \wedge (\chi - p_o), \quad n = \int_{\mathcal{F}} P e, \quad \mathbb{N} = \int_{\mathcal{F}} \text{sym}(R^T P e \otimes (p - p_o)) \quad (\text{N. et al. 4.21})$$

$$\begin{aligned} \overline{M} &= M + r \wedge m, & \overline{m} &= m, \\ \overline{N} &= N + r \wedge n, & \overline{n} &= n, \\ \overline{B} &= B + r \wedge b, & \overline{b} &= b \end{aligned} \quad (\text{N. et al. 3.34})$$

## B.5 LES POUTRES ET ARCS ÉLASTIQUES DE BALLARD ET MILLARD

Nous traitons ici des rapports entre notre formulation et celle présentée dans [4] de Ballard et Millard qui traitent de la théorie des poutre avec la notion de distributeur et de torseur que nous présentons brièvement afin d'éclaircir la notation. Auparavant, nous remarquons que dans la notation française, le symbole du chevron ( $\wedge$ ) est utilisé au lieu du signe de multiplication ( $\times$ ). De plus, comme les auteurs notent les vecteurs en les soulignant et les tenseur d'ordre deux en les soulignant doublement, le pseudovecteur associé à un tenseur antisymétrique  $\underline{\underline{\Omega}}$  est simplement noté  $\underline{\Omega}$ .

**Définition B.1.** Nous donnons les définitions dans la notation des auteurs.

1. Un *distributeur* est une application de l'espace euclidien à son espace tangent de la forme

$$\underline{U}(m) = \underline{V} + \underline{\Omega} \wedge \underline{Om}$$

où  $\underline{Om}$  est le vecteur de l'origine  $O$  au point  $m$ ,  $\underline{V}$  et  $\underline{\Omega}$  sont des vecteurs. On exprime un distributeur à travers ses éléments de réduction

$$\{\underline{V}, \underline{\Omega}\}_O$$

2. Un *torseur* est une forme linéaire sur les distributeurs

$$[\underline{R}, \underline{M}]_O \cdot \{\underline{V}, \underline{\Omega}\}_O = \underline{R} \cdot \underline{V} + \underline{M} \cdot \underline{\Omega}$$

et peut s'interpréter comme une application de l'espace euclidien à son espace tangent :

$$\underline{M}(m) = \underline{M}(O) + \underline{mO} \wedge \underline{R}$$

où  $\underline{mO}$  est le vecteur du point  $m$  à l'origine  $O$ ,  $\underline{R}$  un vecteur, appelé la *résultante*, et  $\underline{M}$  un vecteur appelé le *moment*.

### B.5.1 VARIABLES

CINÉMATIQUE

ligne moyenne dans une configuration de référence

$$\underline{X} = \hat{r}$$

position actuelle

$$\underline{x} = \mathbf{r}$$

vecteur position dans la section

$$\underline{x}_\perp = \underline{\phi} - \underline{r}$$

rotation de chaque section droite

$$\underline{\underline{R}} = \tilde{\underline{\underline{R}}}$$

déformation lagrangienne

$$\mathbb{E} = \{\underline{E}, \underline{W}\}_{\underline{x}} = \left( \tilde{\omega}_\diamond, \text{vax} \left( \tilde{\Omega}_\diamond \right) \right)$$

champ de vitesse en configuration eulérienne

$$\{\underline{U}, \underline{\Omega}\}_{\underline{x}} = (\underline{v}, \text{vax}(\underline{\mathbf{W}}))$$

DYNAMIQUE Nous notons que  $\underline{R}$  n'est pas le vecteur axial de  $\underline{\underline{R}}$ .

torseur eulérien des efforts intérieurs

$$[\underline{R}, \underline{M}] = (\underline{l}, \underline{\mathbf{L}})$$

torseur lagrangien des efforts intérieurs

$$[\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}] = \left( \underline{l}_\diamond, \underline{\mathbf{L}}_\diamond \right)$$

distribution linéique de torseur des efforts extérieurs

$$[\underline{\overline{F}}, \underline{\overline{C}}] = (\underline{q}, \underline{\mathbf{Q}})$$

torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur la section  $\mathcal{S}(0)$

$$[\underline{F}_0, \underline{C}_0] = (\check{\underline{l}}_a, \check{\underline{\mathbf{L}}}_a)$$

torseur des efforts extérieurs s'exerçant sur la section  $\mathcal{S}(L)$

$$[\underline{F}_L, \underline{C}_L] = (\check{\underline{l}}_b, \check{\underline{\mathbf{L}}}_b)$$

tenseur des modules d'élasticité autour de l'état naturel

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}}$$

## B.5.2 ÉQUATIONS

Ballard et Millard ne numérotent pas systématiquement leurs équations, nous les désignons donc par les sections où elles paraissent.

CINÉMATIQUE

$$\underline{\underline{T}}(S) = \frac{d}{dS} \underline{\underline{X}}(S) \quad (\text{B. \& M. §1.2.1})$$

$$\underline{\underline{t}}(s) = \frac{d}{ds} \underline{\underline{x}}(s) \quad (\text{B. \& M. §1.3.2})$$

$$\underline{\underline{E}} = {}^t \underline{\underline{R}} \cdot \frac{d\underline{\underline{x}}}{dS} - \underline{\underline{T}} \quad \underline{\underline{W}} = {}^t \underline{\underline{R}} \cdot \frac{d\underline{\underline{R}}}{dS} \quad (\text{B. \& M. §1.2.2})$$

$$\underline{U} = \dot{\underline{x}} \qquad \underline{\Omega} = \dot{\underline{R}} \cdot {}^t \underline{R} \qquad (\text{B. \& M. §1.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E} = \frac{\partial_s {}^t \underline{R}}{\partial S} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \{ \underline{U}, \underline{\Omega} \}_{\underline{x}(s)} \qquad (\text{B. \& M. §1.5})$$

MOMENTS

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}(s)} \rho &= \bar{\rho}(s) \\ \int_{\mathcal{S}(s)} \rho \underline{x}_\perp &= \underline{0} \\ \int_{\mathcal{S}(s)} \rho |\underline{x}_\perp|^2 \underline{\mathbb{1}} - \rho \underline{x}_\perp \otimes \underline{x}_\perp &= \underline{i}^\rho(s) \end{aligned} \qquad (\text{B. \& M. §2.2})$$

DYNAMIQUE Efforts externes

$$\begin{aligned} \underline{\bar{F}}(s) &= \int_{\mathcal{S}(s)} \underline{F}^{\text{vol}} + \int_{\partial \mathcal{S}(s)} \underline{F}^{\text{surf}} \\ \underline{\bar{C}}(s) &= \int_{\mathcal{S}(s)} \underline{x}_\perp \wedge \underline{F}^{\text{vol}} + \int_{\partial \mathcal{S}(s)} \underline{x}_\perp \wedge \underline{F}^{\text{surf}} \end{aligned} \qquad (\text{B. \& M. §2.3})$$

$$\begin{aligned} \underline{F}_0 &= \int_{\mathcal{S}(0)} \underline{F}^{\text{surf}} & \underline{F}_l &= \int_{\mathcal{S}(l)} \underline{F}^{\text{surf}} \\ \underline{C}_0 &= \int_{\mathcal{S}(0)} \underline{x}_\perp \wedge \underline{F}^{\text{surf}} & \underline{C}_l &= \int_{\mathcal{S}(l)} \underline{x}_\perp \wedge \underline{F}^{\text{surf}} \end{aligned} \qquad (\text{B. \& M. §2.3})$$

Équations du mouvement

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial s}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial s} + \underline{t} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{\bar{F}}, \underline{\bar{C}}] &= \left[ \bar{\rho} \dot{\underline{U}}, \underline{i}^\rho \cdot \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}) \right] \\ [\underline{R}(0), \underline{M}(0)] &= -[\underline{F}_0, \underline{C}_0] \\ [\underline{R}(l), \underline{M}(l)] &= [\underline{F}_l, \underline{C}_l] \end{aligned} \qquad (\text{B. \& M. §2.5})$$

Correspondance avec les quantités lagrangiennes <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} [\underline{\bar{F}}_0, \underline{\bar{C}}_0] &= \left[ \frac{\partial s}{\partial S} \underline{\bar{F}}, \frac{\partial s}{\partial S} \underline{\bar{C}} \right] \\ [\underline{F}_L, \underline{C}_L] &= [\underline{F}_l, \underline{C}_l] \\ \bar{\rho}_0 &= \frac{\partial s}{\partial S} \bar{\rho} \\ \underline{i}_0^\rho &= \frac{\partial s}{\partial S} \underline{i}^\rho \end{aligned} \qquad (\text{B. \& M. §2.6})$$

1. Comme noté par Ballard et Millard, ce ne sont pas des quantités purement lagrangienne : par exemple,  $\underline{i}_0^\rho$  est le tenseur d'inertie de la section droite dans son orientation *actuelle*.

$$\left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial S} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = \left[ \bar{\rho}_0 \dot{\underline{U}}, \underline{i}_0^\rho \cdot \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge (\underline{i}_0^\rho \cdot \underline{\Omega}) \right]$$

$$[\underline{R}(0), \underline{M}(0)] = -[\underline{F}_0, \underline{C}_0] \quad (\text{B. \& M. §2.6})$$

$$[\underline{R}(L), \underline{M}(L)] = [\underline{F}_L, \underline{C}_L]$$

$$[\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}] = [{}^t \underline{R} \underline{R}, {}^t \underline{R} \underline{M}] \quad (\text{B. \& M. §2.7})$$

Énergie élastique

$$[\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}] = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbb{E}}}(\underline{\mathbb{E}})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbb{E}}}(0) = 0$$

$$\psi(\underline{\mathbb{E}}) = \frac{1}{2} \underline{\mathbb{E}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\mathbb{E}} + o(|\underline{\mathbb{E}}|^2) \quad (\text{B. \& M. §3.1})$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathcal{R}} \\ \underline{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix} + o(|\underline{\mathbb{E}}|)$$

# MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA

## C.1 MÉTHODES USUELLES

### C.1.1 MÉTHODES EXPLICITES

RUNGE-KUTTA D'ORDRE 3 (RK3)

0	0	0	0
1/2	1/2	0	0
1	-1	2	0
	1/6	2/3	1/6

RUNGE-KUTTA D'ORDRE 4 (RK4)

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

### C.1.2 MÉTHODES IMPLICITES

GAUSS-LEGENDRE D'ORDRE 2 OU POINT-MILIEU IMPLICITE

1/2	1/2
	1

GAUSS-LEGENDRE D'ORDRE 4

$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

GAUSS-LEGENDRE D'ORDRE 6

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30}$	$\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

GAUSS-LOBATTO IIIA ORDRE 2 OU TRAPÈZE

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

GAUSS-LOBATTO IIIA ORDRE 4

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/24 & 1/3 & -1/24 \\ 1 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

## C.2 MÉTHODES DIAGONALEMENT-IMPLICITES-EXPLICITES

EULER AVANT-ARRIÈRE Dans [65, eq. 1.7] ou [3, §2.1] nous trouvons la méthode IMEX la plus simple dont la paire de tableaux est :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

et qui est d'ordre un.

MÉTHODE DU TRAPÈZE Dans [65, eq. 3.4] nous trouvons

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

que l'on peut modifier en

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}$$

et qui est d'ordre deux.

MÉTHODE D'ORDRE DEUX L-STABLE À DEUX ÉTAPES Dans [65, eq. 4.6] et [3, §2.6] est décrite la méthode ayant les tableaux suivants

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & \omega & 0 \\ 1 & 0 & 1 - \omega & \omega \\ \hline & 0 & 1 - \omega & \omega \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega & \omega & 0 & 0 \\ 1 & \kappa & 1 - \kappa & 0 \\ \hline & \kappa & 1 - \kappa & 0 \end{array}$$

où

$$\omega = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \kappa = 1 - \frac{1}{2\omega}.$$

MÉTHODE D'ORDRE DEUX *L*-STABLE À TROIS ÉTAPES Une autre méthode d'ordre deux est définie dans [65, eq. 4.7] par

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

MÉTHODE D'ORDRE TROIS À QUATRE ÉTAPES Finalement, une méthode d'ordre trois introduite dans [3, §2.8] comme

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline 1 & 0 & 3/2 & -3/2 & 1/2 \\ & 0 & 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 11/18 & 1/18 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/6 & -5/6 & 1/2 & 0 \\ \hline 1 & 1/4 & 7/4 & 3/4 & -7/4 \\ & 1/4 & 7/4 & 3/4 & -7/4 \end{array}.$$

MÉTHODE ARK3(2)4L[2]SA

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1767732205903}{2027836641118} & -\frac{1767732205903}{4055673282236} & -\frac{1767732205903}{4055673282236} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2746238789719}{10658868560708} & \frac{640167445237}{6845629431997} & -\frac{1767732205903}{4055673282236} & 0 \\ 1 & \frac{1471266399579}{7840856788654} & \frac{4482444167858}{7529755066697} & -\frac{11266239266428}{11593286722821} & -\frac{1767732205903}{4055673282236} \\ \hline & \frac{1471266399579}{7840856788654} & \frac{4482444167858}{7529755066697} & -\frac{11266239266428}{11593286722821} & -\frac{1767732205903}{4055673282236} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1767732205903}{2027836641118} & \frac{1767732205903}{2027836641118} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{5535828885825}{10492691773637} & -\frac{788022342437}{10882634858940} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{6485989280629}{16251701735622} & \frac{4246266847089}{9704473918619} & \frac{10755448449292}{10357097424841} & 0 \\ \hline & \frac{1471266399579}{7840856788654} & \frac{4482444167858}{7529755066697} & -\frac{11266239266428}{11593286722821} & -\frac{1767732205903}{4055673282236} \end{array}$$







# NOYAUX

---

## D.1 NOYAUX STANDARDS

### D.1.1 NOYAUX RÉPONDANT À LA CONDITION DES CARRÉS

NOYAU STANDARD À TROIS POINTS <sup>1</sup>

$$\phi_{s,3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left( 1 + \sqrt{1 - 3|x|^2} \right) & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \left( 5 - 3|x| - \sqrt{1 - 3(1 - |x|)^2} \right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

$$\phi'_{s,3}(x) = \begin{cases} \frac{-|x|}{\sqrt{1-3|x|^2}} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{|x|-1}{\sqrt{1-3(1-|x|)^2}} - 1 \right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

NOYAU STANDARD À CINQ POINTS

$$\phi_{s,5}(x) = \begin{cases} \frac{17}{35} - \frac{1}{7}|x|^2 + \psi_{s,5}(|x|) & \text{si } 0 \leq |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{27}{35} - \frac{1}{42}|x| - \frac{4}{7}|x|^2 + \frac{1}{6}|x|^3 - \frac{2}{3}\psi_{s,5}(|x| - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| < \frac{3}{2} \\ \frac{69}{70} - \frac{125}{84}|x| + \frac{9}{14}|x|^2 - \frac{1}{12}|x|^3 + \frac{1}{6}\psi_{s,5}(|x| - 2) & \text{si } \frac{3}{2} \leq |x| < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

avec

$$\psi_{s,5}(r) = \sqrt{\frac{3123}{39200} - \frac{311}{980}r^2 + \frac{101}{490}r^4 - \frac{1}{28}r^6}$$

---

1. L'équation A.4 de [15] est incorrecte, il lui manque les facteurs  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{6}$ .

## D.1.2 NOYAUX RÉPONDANT À LA DOUBLE CONDITION DES CARRÉS ET DE NORMALISATION BIPARTITE

NOYAU STANDARD À QUATRE POINTS

$$\begin{aligned}
 \phi_{s,4}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{8} \left( 3 - 2|x| + \sqrt{1 + 4|x| - 4|x|^2} \right) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{8} \left( 5 - 2|x| - \sqrt{-7 + 12|x| - 4|x|^2} \right) & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{8} \left( 3 - 2|x| + \sqrt{4(1-|x|)|x|+1} \right) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{8} \left( 5 - 2|x| - \sqrt{4(3-|x|)|x|-7} \right) & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \phi'_{s,4}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{4} \text{signe}(x) \left( \frac{1-2|x|}{\sqrt{4(1-|x|)|x|+1}} - 1 \right) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{4} \text{signe}(x) \left( \frac{2|x|-3}{\sqrt{4(3-|x|)|x|-7}} - 1 \right) & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

NOYAU STANDARD À SIX POINTS

$$\phi_{s,6}(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}|x|^3 - \frac{11}{56}|x|^2 - \frac{11}{42}|x| + \frac{61}{112} + \psi_{s,6}(|x|) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{24}|x|^3 - \frac{23}{112}|x|^2 + \frac{1}{84}|x| + \frac{117}{224} - \frac{3}{2}\psi_{s,6}(|x|-1) & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ -\frac{1}{24}|x|^3 + \frac{45}{112}|x|^2 - \frac{97}{84}|x| + \frac{209}{224} + \frac{1}{2}\psi_{s,6}(|x|-2) & \text{si } 2 \leq |x| \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{D.4}$$

avec

$$\psi_{s,6}(r) = \sqrt{-\frac{1}{336}r^6 + \frac{1}{112}r^5 + \frac{125}{9408}r^4 - \frac{65}{1568}r^3 - \frac{187}{9408}r^2 + \frac{33}{784}r + \frac{81}{12544}}$$

## D.2 NOYAUX ALTERNATIFS

NOYAU TRIGONOMÉTRIQUE

$$\begin{aligned}
 \phi_t(x) &= \begin{cases} \frac{1}{4} \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right) & \text{si } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \phi'_t(x) &= \begin{cases} -\frac{\pi}{8} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

## NOYAU SPLINE QUADRATIQUE

$$\phi_{\text{spl},2}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{7}{4}|x|^2 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}(|x| - 1)(5|x| - 7) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \\ \frac{1}{4}(|x| - 1)(3|x| - 5) & \text{si } 1 \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4}(|x| - 2)^2 & \text{si } \frac{3}{2} \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

$$\phi'_{\text{spl},2}(x) = \begin{cases} -\frac{7}{2}x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}x - 3\text{signe}(x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \\ \frac{3}{2}x - 2\text{signe}(x) & \text{si } 1 \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ \text{signe}(x) - \frac{1}{2}x & \text{si } \frac{3}{2} \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**D.3 NOYAUX D'ORDRE D'INTERPOLATION MAXIMAL**

## FONCTION CHAPEAU

$$\phi_{i,2}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

$$\phi'_{i,2}(x) = \begin{cases} -\text{signe}(x) & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## NOYAU INTERPOLATEUR À QUATRE POINTS

$$\phi_{i,4}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|x| - |x|^2 + \frac{1}{2}|x|^3 & \text{si } 0 \leq |x| < 1 \\ 1 - \frac{11}{6}|x| + |x|^2 - \frac{1}{6}|x|^3 & \text{si } 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

## NOYAU INTERPOLATEUR À SIX POINTS

$$\phi_{i,6}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}|x| - \frac{5}{4}|x|^2 + \frac{5}{12}|x|^3 + \frac{1}{4}|x|^4 - \frac{1}{12}|x|^5 & \text{si } 0 \leq |x| < 1 \\ 1 - \frac{13}{12}|x| - \frac{5}{8}|x|^2 + \frac{25}{24}|x|^3 - \frac{3}{8}|x|^4 + \frac{1}{24}|x|^5 & \text{si } 1 \leq |x| < 2 \\ 1 - \frac{137}{60}|x| + \frac{15}{8}|x|^2 - \frac{17}{24}|x|^3 + \frac{1}{8}|x|^4 - \frac{1}{120}|x|^5 & \text{si } 2 \leq |x| < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

## D.4 NOYAUX REPRODUCTEURS DE MOMENTS

NOYAU DE BASE

$$\begin{aligned}\phi_{w1,0}(x) &= \begin{cases} \left(\frac{2}{3} - |x|^2 \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)\right) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{6} (2 - |x|)^3 & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6} (3|x|^3 - 6|x|^2 + 4) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{6} (2 - |x|)^3 & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}\quad (\text{D.10})$$

NOYAU CORRIGÉ JUSQU'AU DEUXIÈME MOMENT

$$\begin{aligned}\phi_{w1,2}(x) &= \begin{cases} \left(\frac{2}{3} - |x|^2 \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)\right) \left(\frac{27}{17} - \frac{30}{17} |x|^2\right) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{6} (2 - |x|)^3 \left(\frac{27}{17} - \frac{30}{17} |x|^2\right) & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{34} (9 - 10|x|^2) (3|x|^3 - 6|x|^2 + 4) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{34} (9 - 10|x|^2) (2 - |x|)^3 & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}\quad (\text{D.11})$$

NOYAU CORRIGÉ JUSQU'AU QUATRIÈME MOMENT

$$\begin{aligned}\phi_{w1,4}(x) &= \begin{cases} \left(\frac{178290}{80347} |x|^4 - \frac{429450}{80347} |x|^2 + \frac{170010}{80347}\right) \left(\frac{2}{3} - |x|^2 \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)\right) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{6} \left(\frac{178290}{80347} |x|^4 - \frac{429450}{80347} |x|^2 + \frac{170010}{80347}\right) (2 - |x|)^3 & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{5}{80347} (5943 |x|^4 - 14315 |x|^2 + 5667) (3|x|^3 - 6|x|^2 + 4) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{5}{80347} (5943 |x|^4 - 14315 |x|^2 + 5667) (2 - |x|)^3 & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}\quad (\text{D.12})$$

## D.5 NOYAUX ADOUCIS

FONCTION CHAPEAU ADOUCIE

$$\phi_{y\text{zlh},i,2}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} - |x|^2 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{9}{8} - \frac{3}{2} |x| + \frac{1}{2} |x|^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\quad (\text{D.13})$$

$$\phi'_{\text{yzlh},i,2}(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{2}\text{signe}(x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

NOYAU TRIGONOMÉTRIQUE ADOUCI

$$\begin{aligned} \phi_{\text{yzlh},t}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi} (\pi + 2 \sin(\frac{\pi}{4}(2x+1)) - 2 \sin(\frac{\pi}{4}(2x-1))) & \text{si } |x| \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8\pi} (5\pi - 2\pi|x| - 4 \sin(\frac{\pi}{4}(2|x|-1))) & \text{si } \frac{3}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{D.14}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi} (\pi + 2^{3/2} \cos(\frac{\pi x}{2})) & \text{si } |x| \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8\pi} (5\pi - 2\pi|x| - 4 \sin(\frac{\pi}{4}(2|x|-1))) & \text{si } \frac{3}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi'_{\text{yzlh},t}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{4} (\cos(\frac{\pi}{4}(2x+1)) - \cos(\frac{\pi}{4}(2x-1))) & \text{si } |x| \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4}\text{signe}(x) (1 + \cos(\frac{\pi}{4}(2|x|-1))) & \text{si } \frac{3}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2^{-3/2} \sin(\frac{\pi x}{2}) & \text{si } |x| \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4}\text{signe}(x) (1 + \cos(\frac{\pi}{4}(2|x|-1))) & \text{si } \frac{3}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

NOYAU STANDARD À TROIS POINTS ADOUCI

$$\phi_{\text{yzlh},s,3}(x) = \begin{cases} \frac{17}{48} + \frac{\sqrt{3}\pi}{108} + \frac{|x|}{4} - \frac{|x|^2}{4} + \frac{1-2|x|}{16} \sqrt{12(1-|x|)|x|+1} \\ \quad - \frac{\sqrt{3}}{36} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2|x|-1)\right) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{55}{48} - \frac{\sqrt{3}\pi}{108} - \frac{13|x|}{12} + \frac{|x|^2}{4} + \frac{2|x|-3}{48} \sqrt{12(3-|x|)|x|-23} \\ \quad + \frac{\sqrt{3}}{36} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2|x|-3)\right) & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

$$\phi'_{\text{yzlh},s,3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\text{signe}(x) \left(1 - 2|x| - \sqrt{12(1-|x|)|x|+1}\right) & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{12}\text{signe}(x) \left(6|x| + \sqrt{12(3-|x|)|x|-23} - 13\right) & \text{si } 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

NOYAU STANDARD À QUATRE POINTS ADOUCI

$$\phi_{\text{yzlh},s,4}(x) = \begin{cases} \frac{3}{8} + \frac{\pi}{32} - \frac{1}{4}|x|^2 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(1-|x|)\sqrt{4(2-|x|)|x|-2} - \frac{1}{8}\arcsin(\sqrt{2}(|x|-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ \frac{17}{16} - \frac{\pi}{64} - \frac{3}{4}|x| + \frac{1}{8}|x|^2 + \frac{1}{16}(|x|-2)\sqrt{4(4-|x|)|x|-14} \\ \quad + \frac{1}{16}\arcsin(\sqrt{2}(|x|-2)) & \text{si } \frac{3}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

$$\phi'_{\text{yzlh},s,4}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\text{signe}(x)\sqrt{4(2-|x|)|x|-2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8}\text{signe}(x)\left(2|x| + \sqrt{4(4-|x|)|x|-14} - 6\right) & \text{si } \frac{3}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

