3169

UNIVERSITE DE MONTREAL

IMPACTS DES CONTRAINTES DE RATIONNEMENTS SUR LES DECISIONS DE L'ENTREPRISE : APPROCHE PAR L'UTILISATION DES PRIX D'ORDRE ASSOCIES A CES CONTRAINTES

PAR

JELLOUL EL-MABROUK

DEPARTEMENT DE SCIENCES ECONOMIQUES

FACULTE DES ARTS ET DES SCIENCES

MEMOIRE PRESENTE A LA FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
MAITRE ES SCIENCES (M. Sc.)

SEPTEMBRE 1979

Remerciements

L'aide précieuse, provenant de différentes souches, me sensibilise à formuler de vifs remerciements aux personnes, organismes et institutions y ayant diversement contribué.

C'est ainsi que je tiens à remercier d'abord le professeur Marcel Boyer qui a bien voulu diriger ce travail et dont les recommandations et suggestions m'ont été d'une aide précieuse. Au même ordre de remerciements, j'associe tous les professeurs du département auprès desquels j'ai étudié d'importantes questions en économie et dont les cours constituent la toile de fond de ce travail.

Je dois remercier, aussi, l'Agence Canadienne de Développement International, l'Université du Québec à Montréal et l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée (Maroc) qui m'ont permis, dans le cadre du projet ACDI/UQAM/INSEA, de venir au Canada pour compléter cette étape de mes études supérieures.

Enfin, je ne saurai trop apprécier l'effort soutenu des aimables secrétaires Michelle et Jocelyne dans le rude travail de compréhension du manuscrit du mémoire et de sa dactylographie. Qu'elles veuillent trouver ici mes très sincères remerciements.

Table des matières

PAGE

Sommaire

Le but de ce travail est de déterminer les impacts des contraintes sur les décisions de l'entreprise. Les contraintes considérées sont celles des ressources, des marchés financiers, des interdépendances des projets et des niveaux minima de dividendes à distribuer. Les décisions concernées sont celles des allocations des ressources entre périodes et/ou projets, de sélection des projets d'investissements, des opérations financières et de distribution des dividendes.

Les outils d'analyse utilisés sont des modèles de programmation linéaire déterministe. Les variables de décision sont les prix d'ordre (shadow prices) associés aux différentes contraintes des modèles utilisés.

Un exemple numérique est utilisé pour illustrer les différentes règles et conclusions dégagées.

Introduction

Les contraintes ont pour effet de réduire les libertés d'action des décideurs dans leurs domaines respectifs. Un choix judicieux, des actions à entreprendre, devient alors impératif. Les actions choisies doivent permettre d'atteindre les objectifs visés aux moindres coûts. Les coûts, tout comme les avantages des décisions,peuvent être quantifiables ou non.

L'entreprise constitue un cas typique de ces décideurs. Elle présente, cependant, l'avantage d'avoir une bonne partie de ses contraites et objectifs quantifiables donc, évaluables de façon relativement plus objective. Seulement, les impératifs de développement des entreprises ont rendu les processus de décisions de plus en plus complexes. Ces difficultés ont poussé les analystes de gestion à développer des outils d'analyse de plus en plus perfectionnés.

Parmi les outils d'analyse explorés, on trouve les modèles de programmation mathématique. Les tentatives d'application de ces modèles semblent trouver leur justification dans les raisons suivantes :

a) Les possibilités potentielles que présentent ces méthodes, comme instruments d'analyse très puissants, pour résoudre les problèmes les plus complexes de façon simultanée et cohérente.

b) Le développement des méthodes informatiques, permettant de traiter des problèmes de grande taille, a renforcé ces espoirs.

c) L'importance, la complexité et l'interdépendance des décisions relatives aux investissements de l'entreprise.

En effet, dans le monde réel, qui est de par sa nature complexe, la firme se trouve confrontée à toutes sortes de contraintes. Or, les modèles mathématiques, si applicables, offrent des possibilités particulièrement séductrices pour donner les solutions les meilleures possibles sous les différentes contraintes spécifiées.

Le capital occupe une place de premier rang parmi les facteurs limitatifs de l'entreprise. Il constitue l'un des principaux moyens engagés dans l'activité de l'entreprise et, souvent aussi, le principal objectif poursuivi par cette activité. Ceci ne va pas sans poser de problèmes à l'entreprise. En effet, les dépenses en capital input et les recettes en capital output sont généralement effectuées sur plusieurs périodes. Or, ces dépenses et/ou recettes sont affectées par la variation de l'appréciation, par la firme, des unités monétaires courantes sur les différentes périodes. Ces appréciations différentes des unités monétaires peuvent être expliquées par des facteurs internes à la firme, exemple, les opportunités que présentent ces disponibilités sur les différentes périodes (réinvestissement, dividendes et/ou placements), et/ou par des facteurs exogènes à la firme, exemples les taux d'inflation sur les différentes périodes, les niveaux d'incertitude caractérisant les différentes périodes. Pour rendre comparables les unités monétaires des différentes périodes, la firme utilise le taux d'actualisation dont la valeur est supposée tenir compte des différents facteurs ci-dessus. Cependant, le poids affecté à chacun des facteurs, intervenant dans la détermination du taux d'actualisation, est souvent fixé de manière subjective, donc peut conduire à une sous optimisation des décisions de la firme. C'est pourquoi, parallèlement aux tentatives d'application des modèles de programmation mathématique, une attention particulière a porté sur la recherche de possibilités pour dériver, de façon endogène , des taux d'escompte utilisables dans l'actualisation des flux de revenus engendrés par les investissements étudiés.

Cependant, les développements des modèles mathématiques, accompagnés d'essais de les rendre applicablesau domaine du budget de capital, ont amené les différents auteurs, intéressés par la question, à poser différentes hypothèses, plus ou moins plausibles, ce qui sera à l'origine de controverses souvent inextricables, laissant, parfois, le fond du problème pour se concentrer autour des questions marginales et parfois inutiles.

L'objet de ce travail est d'essayer de déterminer l'impact des contraintes de rationnements sur les décisions de l'entreprise. Les rationnements sont entendus dans un sens plus large dans la mesure où, en plus des rationnements souple et rigide du capital, ils concernent les autres ressources physiques limitatives et les conditions d'interdépendance des projets étudiés. L'approche utilisée est celle des modèles de programmation mathématique. Or dans un modèle de programmation la pertinence des contraintes est reflétée par les valeurs des prix d'ordre (shadow prices) associés à ces contraintes. Et comme souvent la firme est soumise à différents types de contraintes en même temps, ses décisions seront affectées par une sorte de résultante des différentes contraintes effectives au moment de la décision. Autrement dit, les variables de décision seront sous la forme d'expressions des différents coûts d'opportunités associés aux différentes contraintes effectives.

Etant donné la nature de notre problème, c'est l'aspect dual des modèles mathématiques qui va retenir le plus d'attention. Pour mieux saisir l'impact des différentes contraintes, il nous semble approprié de partir d'un modèle simple et de le compliquer progressivement par l'introduction de nouvelles contraintes. La comparaison des expressions et valeurs des variables de décision permettra alors de déterminer l'impact des nouvelles contraintes introduites sur les décisions de la firme. Les décisions concernées sont: l'allocation intertemporelle des ressources disponibles, la sélection des projets d'investissement, les opérations financières et la redistribution des dividendes. Les questions de choix de la fonction objectif et du taux d'actualisation, centres de controverses dans le domaine du budget du capital, seront discutés à part. Un exemple numérique sera utilisé pour fins d'illustrations des résultats et conclusions dégagés. Mais d'abord une tentative de justification de l'utilisation des modèles mathématiques et les étapes de construction de ces modèles seront présentées, suivies d'une revue de littérature, retraçant l'évolution et les contenus des débats et controverses qui ont caractérisé les tentatives d'utilisation des modèles de programmation mathématique pour résoudre les problèmes du budget de capital.

Chapitre premier

Préliminaires

Section 1

Justification et étapes de construction d'un modèle mathématique

1.1 Justification du modèle mathématique

Les développements de l'entreprise moderne ont rendu nécessaire sa décentralisation. Ce qui rend impératif l'existence de règles de gestion pour permettre aux différentes composantes de la firme de prendre des décisions qui soient cohérentes avec leurs objectifs respectifs et avec ceux du siège central de la firme. Ces règles de décision devraient être compréhensibles et acceptables par les différentes composantes de la firme[1]. Or les modèles mathématiques permettent, au moins sur le plan conceptuel, de dégager la plupart de ces règles. C'est ainsi que, dans le domaine du budget de capital, les développements théoriques déjà accomplis permettent, au moins l'espoir de voir dans un avenir proche, la possibilité et la systématisation de l'utilisation des modèles de programmation mathématique. En effet, le développement des techniques économétriques et des études de conjoncture et prévision économiques permet de donner des

[1] Bromwich, M. (1976), The economics of capital budgeting, Penguin, p. 13.

estimations assez précises des flux des revenus et dépenses relatifs aux différents projets d'investissement. Les techniques d'actualisation, quoiqu'encore imparfaites, permettent de comparer les flux de revenus engendrés sur des périodes différentes. Cependant les résultats de ces modèles ne seront, et ne pourront être, que des approximations de la réalité et ne doivent, donc, être confondus avec cette dernière. Un modèle est comparable à un miroir qui nous permet de voir quelques aspects de la réalité à travers l'image qu'il réfléchit. Donc les possibilités de déformation de cette image restent présentes. En effet, en plus des approximations faites dans les calculs des paramètres, le phénomène d'incertitude n'a pas encore trouvé sa vraie place dans ces modèles. Cependant, malgré ces faiblesses, un modèle nous permet d'étudier différentes hypothèses et de dégager les règles de décisions efficaces consécutives à ces hypothèses. Donc un modèle nous permet de passer de la réalité complexe à une situation plus abstraite et plus facile à manipuler, nous permettant ainsi d'évaluer les différentes hypothèses faites sur cette réalité complexe, et comme conséquence dégager des règles que l'on peut tester en les confrontant aux situations réelles présentées par la réalité.

1.2 Les étapes de construction d'un modèle[1]

La construction d'un modèle passe par plusieurs étapes dont les plus importantes sont :

---

[1] Il s'agit d'un modèle de gestion dont certains paramètres peuvent être estimés par des modèles économétriques.

- La connaissance du problème et la délimitation du champ d'investigation,
- La fixation des objectifs,
- La collecte de l'information et le calcul des paramètres,
- La construction du modèle,
- Le test du modèle construit.

1.2.1 La connaissance du problème

C'est une étape fondamentale. Elle permet de voir de plus près le problème posé, et de délimiter le champ d'investigation du constructeur du modèle et de la firme. Ceci se fait par la détermination des moyens disponibles et des opportunités offertes à la firme. Cette étape est aussi difficile qu'importante, d'abord par les jugements de valeur qu'elle peut impliquer et ensuite par le fait que la simple délimitation du problème avec ses variables et son environnement peut améliorer sensiblement la qualité des décisions de la firme[1].

1.2.2 La fixation des objectifs

La fixation de l'objectif (ou des objectifs) doit se faire en conséquence de l'étape précédente. Cette étape est très importante dans tout processus de décision. En plus d'être la cible des décisions, elle sert comme critère pour

[1] Bromwich, M., op. cit., p. 76.

évaluer l'efficience des modèles construits et des règles de décision qui en découlent. Des modèles construits pour atteindre certains objectifs peuvent être entièrement inappropriés pour atteindre d'autres objectifs[1]. Malheureusement cette pièce maîtresse dans un modèle reste controversée aussi bien sur les plans académique et pratique que sur le plan technique.

a) Sur le plan académique

Contrairement à la théorie du consommateur où la maximisation d'une fonction d'utilité semble être acceptée, la théorie de la firme demeure à la recherche d'une fonction objectif. La maximisation du profit, souvent utilisée dans les modèles théoriques, reste sujet à plusieurs contestations[2].

i) S'agit-il des profits à long ou à court terme ?

ii) Les profits psychologiques peuvent être considérés plus importants que les profits monétaires.

iii) L'interdépendance de la firme avec son environnement rend la maximisation des profits ambiguë en situation de concurrence imparfaite.

iv) En présence des effets externes, la maximisation des profits peut devenir difficile à soutenir.

---

[1]Bromwich, M., _op. cit._, p. 23.

[2]Simon, H. A. (1959), Theories of decision making in economics and behavioral science, _A.E.R._, Vol. 4, no. 3, p. 262.

b) Sur le plan pratique.

Les structures modernes de la firme ont conduit à la séparation entre les décideurs, généralement de simples fonctionnaires, et les propriétaires, actionnaires sans pouvoir réel. Dans leurs actions, les décideurs peuvent favoriser la croissance de la taille de la firme à celle des profits immédiats. De même, la firme et ses décideurs peuvent être sous le contrôle de plusieurs groupes d'influence[1]:

i) Le gouvernement, par la réglementation et/ou l'intervention.

ii) Les propriétaires et les autres composantes actives dans la firme (les employés, les ouvriers).

iii) Les clients et fournisseurs de la firme.

Or, ces groupes ou du moins, ceux qui ont un pouvoir réel et effectif peuvent avoir des objectifs divergents, voire même contradictoires. Dans de telles situations, et pour assurer sa survie, la firme sera amenée à poursuivre des objectifs de compromis qui peuvent être différents de la simple maximisation des profits. Dans la littérature, on a suggéré[2] que la direction de la firme utilise son propre objectif sous la

---

[1]Papandreou, A. G. (1952), "Some basic problems in the theory of the firm", in Haley, B.F. (ed.), A survey of contemporary economic, Vol. II, Homewood III, pp. 192-93.

[2]Simon, H. A., op. cit., pp. 265-67.

contrainte de satisfaire des niveaux minima des objectifs des différents groupes ayant un pouvoir réel sur la firme.

c) Sur le plan technique

La définition du profit reste non précise. Le profit global peut se faire au détriment du profit par action et inversement. En effet, un objectif de maximisation du profit global peut se faire au moyen d'un accroissement de l'échelle de la firme qui peut s'accompagner d'une baisse du rendement moyen par action. Et la maximisation du profit par action peut conduire à une échelle non optimale de la firme. De même les questions de taxe, du moment de réalisation de ces profits (profit courant de chaque période ? ou, profit global sur toute la durée de vie des projets ?) ne sont pas tranchées. A ces problèmes définitionnels on doit ajouter les problèmes d'actualisation et d'incertitude qui n'ont reçu, jusqu'à maintenant et dans le meilleur des cas, qu'une solution approximative[1].

Dans le domaine spécifique du budget de capital, les controverses ne sont pas absentes. Même si la fonction objectif retenue dans la plupart des modèles proposés est fondamentalement une maximisation de profit, les controverses portent

---

[1]Bromwich, M., op. cit., pp. 30-33

sur la forme de l'expression de ces profits. Certains[1] ont utilisé la notion de profit au sens restreint du terme, c'est-à-dire, la maximisation des flux nets des revenus, engendrés par les projets étudiés, actualisés à l'origine ou capitalisés à l'horizon. D'autres ont utilisé la valeur terminale de la firme, actualisée à l'horizon[2], la maximisation de la fonction d'utilité associée aux dividendes distribués sur les différentes périodes[3], la valeur actualisée des flux des dividendes distribués sur les différentes périodes[4], ou enfin des expressions non explicitées des dividendes et de la valeur terminale[5]. Parallèlement à ces modèles à objectifs simples, des tentatives d'utilisation des modèles à objectifs multiples

---

[1]Lorie, J. H., Savage, L. J. (1955), "Three problems in capital rationing", Journal of business, vol. 28, no. 4, pp. 229-23 Bradley, S. P. et al. (1978b),"Equivalent mathematical programming models of pure capital rationing", J.F.Q.A., Vol. 13, pp. 391-4

[2]Weingartner, H. M. (1963), Mathematical programming and the analysis of capital budgeting problems, Prentice Hall.

[3]Baumol, N. J., Quandt, R. E. (1965), "Investment and discount rates under capital rationing : a programming approach", Econ. Journal, Vol 75, pp. 317-29. Merville, L.J., Tavis, L. A. (1973), "A generalized model for capital investment", J. F. , Vol. 28, no. 1, pp. 109-118.

[4]Bhaskar, K. N. (1976), "Linear programming and capital budgeting : A reappraisal", J.B.F.A., Vol. 3, pp. 29-39.

[5]Bernhard, R.H. (1969), "Mathematical programming models for capital budgeting : A survey generalization and critique", J.F.Q.A., Vol. 4, pp. 111-58.

ont été amorcées[1].

Alors qu'en situation de certitude ces différentes expressions conduisent aux mêmes règles de décisions, en situation d'incertitude certaines expressions peuvent être mieux adaptées que d'autres. Exemple la valeur des profits non distribués peut être plus ou moins appréciée par les différents groupes composant la firme suivant leurs attitudes respectives vis à vis du risque.

1.2.3 La collecte de l'information

Le mot collecte est entendu au sens large. Par ce mot, nous entendons la collecte des données et l'estimation des paramètres utilisés dans le modèle. Les difficultés peuvent être de deux ordres :

a) Certains projets sont des renouvellements de projets identiques ou similaires. Dans ce cas, un certain nombre d'informations sont déjà disponibles, il reste donc seulement à les ajuster, les compléter éventuellement, et utiliser des modèles économétriques ou de conjoncture pour estimer les valeurs des paramètres cherchés.

---

[1] Chateau, J. P. (1973 b), "La programmation déterministe à objectifs multiples du budget de capital", Cahier 7309, Département de sciences économiques, Université de Montréal.

b) D'autres projets peuvent être nouveaux. Dans de tels cas, des études de marketing ou de toute autre nature peuvent s'avérer à propos. Parfois, la consultation d'experts peut être fructueuse et permet d'éviter des coûts supplémentaires. Nous devons insister, une fois de plus, sur le caractère très approximatif de ces paramètres élaborés. Dans certains cas, on peut se poser, non sans fondements, des questions quant à l'opportunité d'employer des modèles très sophistiqués basés sur des données aussi approximatives. Autrement dit, nous soutenons que les degrés de complexité des modèles et de confiance à placer dans les résultats qu'ils engendrent doivent être fixés en fonction des précisions des paramètres employés.

1.2.4 La construction du modèle

Après la définition du problème, la délimitation du champ d'investigation, la fixation des objectifs et la collecte des informations nécessaires, on passe à l'étape de construction d'un modèle qui doit résumer le mieux possible le problème posé et ses caractéristiques. Un modèle est réellement défini par l'ensemble des relations qu'il incorpore[1]. Or ces relations sont souvent basées sur des hypothèses qui constituent donc un élément principal dans la construction du modèle. En effet, nous avons mentionné plus haut qu'un

---

[1] Williams, H. P. (1978), Model building in mathematical programming. John Wiley.

modèle est une simplification de la réalité qui a l'avantage de nous permettre de dégager des règles de décision difficiles à obtenir par d'autres moyens. Le processus d'abstraction est l'élément de base du modèle[1], il nous permet de nous limiter aux aspects strictement nécessaires pour arriver aux décisions qui nous intéressent. Cependant, le processus d'abstraction n'est pas suffisant, il faut le préciser, lui donner une représentation intelligible et maniable pour le rendre opérationnel. Il est donc clair que l'on devrait bien réfléchir sur les hypothèses à faire, sur les formes et les contenus des différentes expressions composant le modèle.
La construction devrait être suffisamment simple pour permettre d'étudier différentes hypothèses sur l'un ou plusieurs des éléments du modèle[2].

1.2.5 Le test du modèle

C'est cette phase qui permet d'évaluer le fruit de toutes les étapes précédentes. Le modèle doit être confronté à la réalité pour constater, et éventuellement corriger, le degré de sa déformation de la réalité. Le modèle sera d'autant plus adéquat qu'il permet d'obtenir des résultats proches de la

---

[1] Peña, B. (1965), Introduction à l'économétrie, INSEA de Rabat (notes de cours).

[2] Bhaskar, N. (1978), "Linear programming and capital budgeting: The financing problem", J.B.F.A., Vol. 5, no. 2, pp. 159-60.

réalité.

1.3 Conclusion

Alors qu'il semble incontestable l'intérêt que présentent les modèles mathématiques pour aider les décideurs à résoudre les problèmes les plus complexes qui les confrontent, les possibilités d'application restent très limitées, mais l'avenir semble prometteur surtout si le phénomène d'incertitude arrive à trouver une solution adéquate au moyen de ces modèles.

Section 2
Revue de la littérature des modèles mathématiques de programmation du budget de capital

2.1 Présentation du problème

Les techniques de valeur actuelle nette et du taux de rendement interne sont devenues classiques. Cependant, la pertinence de ces techniques repose sur des hypothèses bien particulières, parfois même irréalistes. Celles relatives aux marchés parfaits de capitaux et aux réinvestissements des flux de revenus intermédiaires engendrés par les projets, en donnent des exemples. En effet, dans le monde réel la firme n'a plus la possibilité de se procurer des fonds en quantités illimitées et au même taux d'intérêt. Dès lors, elle se trouve confrontée à des situations de rationnement du capital, c'est-à-dire, des situation où la firme devrait payer un taux d'intérêt plus élevé pour avoir des fonds supplémentaires : c'est le rationnement souple, ou encore des situations où elle peut se trouver devant l'impossibilité absolue d'augmenter ses disponibilités financières : c'est le rationnement rigide. Le rationnement souple est essentiellement dû aux facteurs externes tels les marchés de capitaux. Le rationnement rigide peut être d'origine interne ou externe à la firme. Dans la littérature, on s'accorde à admettre que ce type de rationnement ne peut être que d'origine interne à la firme, sauf si l'entreprise est jugée trop risquée. Les causes de ce type de rationnement interne peuvent être le fait d'un groupe de participants qui veut garder le contrôle de la firme, éviter la dévaluation des actions[1] ou simplement ne pas dépasser un certain niveau de la dette[2].

La présence des situations de rationnement peut rendre non efficace l'utilisation des techniques de la valeur actuelle nette et du taux de rendement interne. En effet, étant donné la rareté des ressources, leur utilisation dans un projet doit tenir compte des avantages qu'auraient apportés ces mêmes ressources si elles étaient employées dans des variantes alternatives. Ces ressources doivent donc être évaluées avec des prix qui tiennent compte des opportunités alternatives possibles et dont seule l'utilisation pourrait conduire à une allocation efficace. Le problème est donc de trouver un système de prix adéquats qui permet d'évaluer correctement les ressources rares disponibles. Pour apporter une solution à ce problèmes, certains analystes de projets (Mishan[3], Mirrlees[4],

---

[1] Bhaskar, N. (1974), "Borrowing and lending in mathematical programming model of capital budgeting", J.B.F.A., Vol. A, no 1, p. 267, note 1.

[2] Myers, S. C. (1974), "Interaction of corporate financing and investment decisions. Implication for capital budgeting", Journal of Finance, Vol. 29, no. 1, p. 3, note 5.

[3] Mishan, E.J., (1976), Cost-benefit analysis, new and expanded edition, Praeger.

[4] Little, I.M.D., Mirrlees, J. (1969), Manual of industrial

Dasgupta[1], etc.) se sont orientés vers la recherche des méthodes d'ajustement des prix des marchés de ces ressources, afin de corriger les distorsions de ces prix. Ces approches sont de plus en plus utilisées, surtout dans les méthodes d'évaluation des projets publics où ce sont les coûts et avantages sociaux qui sont utilisés. D'autres théoriciens et analystes se sont orientés vers la recherche de méthodes systématiques et cohérentes pour déterminer ces prix[2]. Ils ont essayé d'élaborer des modèles d'analyse permettant, en optimisant une fonction objectif donnée sous les différentes contraintes, de déterminer un système de prix d'ordre, évaluateurs adéquats des ressources rares employées. Cette approche utilise donc, comme outils d'analyse, les modèles de programmation mathématique. C'est dans le cadre de cette approche que va se situer le présent travail.

2.2 Evolution de l'approche et des controverses associées

C'est en 1955 que Lorie et Savage[3] ont montré que la technique du taux de rendement interne n'est plus adéquate

---

<u>project analysis</u>, Vol. II, Social cost-benefit analysis, OECD., Paris.

[1]Dasgupta, A. K., Pearce, D. W. (1974), <u>Cost-benefit analysis: Theory and Practice</u>, MacMillan, MSE.

[2]Cette approche sera le sujet de la revue de littérature ci-après.

[3]Lorie, J. H, Savage, L. J. (1955), <u>op</u>. <u>cit</u>.

en situation d'interdépendance des projets, de contraintes budgétaires sur plusieurs périodes et de flux de revenus de signes alternés sur différentes périodes[1]. Leur démonstration était basée sur une formulation mathématique du problème. L'expression utilisée est de la forme

$$y_j - \sum_{t=1}^{T} \rho_t \, c_{tj} \quad (1.0)$$[2]

Cette formulation leur a permis de trouver, par tâtonnement, des multiplicateurs ρ_t qui donnent une solution meilleure à celle obtenue par le critère du taux de rendement interne. Cependant, leur approche était difficile d'application. Elle ne fournit pas de méthodes systématiques et sûres pour trouver les multiplicateurs ρ_t, traiter le problème des indivisibilités et des interdépendances des projets étudiés. Ce sont

---

[1] *Ibid.*, pp. 230-31.

[2] La formulation employée se limite à $T = 2$ (p. 234) avec une note donnant l'expression pour $T = 3$ (p. 237, note 7). Cette formulation est la première faite dans le domaine du budget de capital. Les symboles employés sont :

y_j: la somme des revenus actualisés du projet j.

C_{tj}: le montant des dépenses du projet j à la période t, actualisés.

ρ_t: multiplicateur, évaluateur des fonds budgétaires à la période t.

N.B. Dans toute la suite, nous allons utiliser la même notation pour faciliter les comparaisons des différents modèles.

justement ces faiblesses qui ont poussé Weingartner[1] (1963) à reformuler ce problème sous la forme d'un modèle de programmation linéaire[2] :

$$\max \sum_{j=1}^{n} b_j \, x_j \qquad (2.0)$$

$$(2) \quad \text{S.à} \sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_j \leq D_t \qquad (2.1) \qquad (\rho_t)$$

$$o \leq x_j \leq 1 \qquad (2.2) \qquad (\pi_j)$$

Cette nouvelle formulation a rendu systématique la méthode de calcul des ρ_t, qui sont les variables duales associées aux contraintes du programme (2). La question de divisibilité a trouvé sa solution, soit en acceptant la divisibilité traduite par (2.2), soit en remplaçant (2.2) par[3] (2.2)' : $x_j = 0, 1$. Cette dernière formulation fait appel aux techniques de pro-

---

[1] Weingartner, M. H. (1963), <u>op</u>. <u>cit</u>.

[2] <u>Ibid</u>., p. 17, modèle 3.1.

x_j : fraction retenue du projet j

b_j : valeur actuelle nette du projet j

D_t : montant maximum des fonds disponibles à la période t pour être dépensés dans les projets retenus.

c_{tj} : les dépenses actuelles nettes dans le projet j durant la période t.

[3] <u>Ibid</u>., modèle 4.1, p. 46.

grammation en nombres entiers. Les problèmes d'interdépendance ont été formulés et discutés[1].

Après cette reformulation du problème de Lorie et Savage, l'auteur a proposé des formulations alternatives pour combler certaines des lacunes du modèle (2). C'est ainsi que l'auteur a introduit les possibilités d'opérations financières sous différents types de marchés de capitaux, et la possibilité de rationnement des ressources autres que le capital. Les modifications ont touché les points suivants : l'expression (2.0) de la fonction objectif est devenue[2] :

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{b}_j \; x_j + V_T - W_T \qquad (3.0).$$

Elle donne la somme des valeurs terminales, des différents projets, actualisées à la période T, plus le montant des prêts nets d'emprunts sur la même période T. L'expression (2.1), en situation de marchés parfaits de capitaux, devient[3] :

---

[1] _Ibid_., pp. 32-34 et pp. 147-52.

[2] _Ibid_., p. 142, 162 et 169.

$\hat{b}_j$: valeur terminale nette actualisée en T, du projet j.

V_T, W_T sont les montants respectifs des prêts et emprunts sur la période T.

[3] _Ibid_, p. 142, modèle 8.1

V_t et W_t sont respectivement les montants des prêts et emprunts sur la période t.

$$(3.1) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{tj}\, x_j \; - (1 + r)\, V_{t-1} + V_t + (1 + r)\, W_{t-1} - W_t \leq D_t & t = 2, 3 \ldots T \\ \sum_{j=1}^{n} c_{1j}\, x_j + V_1 - W_1 \leq D_1 & \end{cases}$$

Si dans cette situation, on impose des contraintes de plafonds maxima sur les emprunts on ajoute à (3.1) la contrainte[1] $W_t \leq B_t$. Lorsque les marchés sont imparfaits, avec une courbe d'offre de fonds croissante et des plafonds maxima sur les emprunts, (2.1) devient :[2]

$$(3.1)'' \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{tj}\, x_j - (1+r)V_t + V_t + \sum_{i=1}^{m} (1+r_i) W_{it-1} - \sum_{i=1}^{m} W_{it} \leq D_t & t = 2, \ldots T \\ \sum_{j=1}^{n} c_{1j} + V_1 - \sum_{i=1}^{m} W_{i1} \leq D_1 & \end{cases}$$

$$W_{it} \leq B_{it} \quad i = 1, \ldots m, \; t = 1, \ldots T$$

---

[1] Ibid., p. 162, modèle 9.1.

B_t : le plafond maximum des emprunts permis à la période t.

[2] Ibid., p. 169, modèle 9.14.

W_{it} : montant de fonds emprunté sur le segment "i" de la courbe d'offre de fonds sur la période t.

B_{it} : plafond maximum des emprunts permis sur le segment "i" de la courbe de la période t.

r_i : le taux d'intérêt sur les emprunts effectués sur le segment "i" de la courbe d'offre de fonds.

Ces nouvelles extensions ont été accompagnées des formulations duales des différents modèles proposés. Enfin, un exemple numérique de 30 projets, de durées de vie variant entre 6 et 25 ans, a été utilisé pour fins d'illustration des différents résultats et règles de décisions dégagés à partir des modèles théoriques élaborés. Cependant, l'auteur n'a pas réussi à venir à bout de tous les problèmes qui se posent dans ce domaine. Tout en constatant les difficultés que pose la détermination du taux d'actualisation, il n'a pas pu lui apporter de solution.

Ces limites ont poussé Baumol et Quandt (1965)[1] à tenter une reformulation du problème, dans l'espoir de trouver un moyen pour obtenir ce taux d'actualisation. Tout d'abord, ils ont commencé par formuler certaines critiques à l'endroit des modèles élaborés jusqu'alors, ensuite, ils ont proposé leur formulation.

Parmi les critiques formulées, on peut citer[2] :

a) Les modèles formulés ne tiennent pas compte des possibilités de retraits des fonds pour des usages extérieurs à la firme : investissements et/ou consommation.

---

[1]Baumol, W. J., Quandt, R. E., (1965), op. cit.

[2]Ibid., pp. 321-22.

b) Les auteurs précédents (Lorie-Savage et Weingartner) se sont débarassés, sans raison, du problème du taux d'actualisation en le considérant comme étant en dehors du centre de leur préoccupation. Ainsi Baumol et Quandt soutiennent, qu'en présence des situations de rationnement, le taux d'actualisation externe, utilisé jusqu'alors n'est plus adéquat.

Pour contourner ce problème du taux d'actualisation, ils ont essayé de marier l'approche néoclassique, basée sur la théorie des courbes d'indifférence intertemporelles et l'analyse mathématique du budget du capital. Ils ont suggéré, qu'en l'absence d'un taux d'actualisation externe adéquat, on devrait utiliser un taux subjectif reflétant la fonction d'utilité du décideur. Ceci les a conduit à rejeter les expressions (1.0) et (2.0) de la fonction objectif, pour les remplacer par une fonction d'utilité linéaire[1] : $\sum_{t=1}^{T} U_t \, d_t$ (4.0) et les contraintes budgétaires (2.1) sont remplacées par[2]

$$\sum_{j=1}^{n} c_{tj} \, x_j + d_t \leq D_t \qquad (\rho_t) \qquad (4.1)$$

---

[1] Ibid., p. 326.

U_t : est l'utilité (fixée) d'un dollar à la période t.

d_t : le montant des fonds retirés des projets, pour être utilisés à l'extérieur de la firme.

[2] Notons que D_t n'a pas exactement le même sens que dans les modèles précédents. D_t peut, ici, être partiellement utilisé à l'extérieur de la firme (si $d_t > o$).

Cette nouvelle formulation leur a permis d'écrire, pour les périodes où les contraintes de rationnements sont effectives,

$$\frac{U_t}{U_o} = \frac{\rho_t}{\rho_o} = \frac{1}{(1+a)^t}$$, où a est le taux d'actualisation

cherché. Cette double égalité a été établie à partir des conditions marginales, du premier ordre, des allocations optimales des ressources, la première égalité provient de l'approche néoclassique, la seconde égalité est dérivée d'un modèle de programmation mathématique.

Ceci permet de garder la cohérence entre l'approche néoclassique et celle de la programmation mathématique.

Cette nouvelle formulation a permis aussi de résoudre le problème de la redistribution des dividendes, ce qui constitue une nouvelle extension du modèle, mais au prix d'autres restrictions : les opérations financières.

Ces critiques et nouvelle reformulation du problème ont poussé Weingartner[1] (1966) à donner une réponse axée sur les points suivants : il considère que l'introduction de l'expression linéaire de la fonction d'utilité (4.0) pose plus de problèmes qu'elle n'en résoud [2]. La forme linéaire de (4.0)

---

[1]Weingartner, M. H. (1966a), "Criteria for programming investment project selection, J.I.E., Vol. 15, pp. 65-7.

[2]Ibid., p. 65.

est loin d'être réaliste. En particulier, elle suppose l'indépendance entre les retraits sur une période et les disponibilités budgétaires sur les autres périodes et que les actionnaires ont les mêmes préférence représentées par la firme[1].

Cependant, l'auteur accepte le principe d'utilisation des dividendes dans l'expression de la fonction objectif[2]: max. d_T (5.0), ce qui l'amène à modifier, en conséquence son système des contraintes :
Les contraintes budgétaires (5.1) sont données par (2.1) avec un terme additionnel, d_t et des taux d'intérêts variables dans le temps et différents entre prêts et emprunts.
D'autres contraintes sont introduites :

$$d_1 \geq d_{min}$$

$$(5.2) \quad d_t \geq d_{t-1} \qquad t = 2, \ldots T$$

$$r\left\{\sum_{j=1}^{n} \hat{b}_j \; x_j + V_T - W_T + \sum_{t=T+1}^{\infty} D_t \; (1+r)^{T-t}\right\} \overset{3}{\geq} d_T$$

C'est avec cette réplique que l'on assiste à la levée du rideau sur un grand nombre de controverses et/ou d'essais de conciliations sur un ou plusieurs problèmes posés par

---

[1] Ibid., p. 70.

[2] Ibid., p. 72 : Seul d_T doit être considéré, les autres d_t ne ont pas connus et s'ils le sont, un modèle mathématique ne sera plus nécessaire.

[3] d_T ne doit pas dépasser r % de la valeur de la firme,résiduelle après l'horizon T.

l'application de cette approche de programmation mathématique au budget de capital.

C'est dans ce sens que Lusztig et Schwab[1] (1968) ont essayé de mettre l'accent sur les limites sérieuses qui s'opposent à la possibilité d'utilisation des modèles mathématiques pour résoudre les problèmes du budget de capital. Ils ont commencé par mettre l'accent sur la dépendance circulaire entre le taux d'actualisation et la solution optimale du programme linéaire utilisé[2]. Ils ont suggéré d'utiliser, pour taux d'actualisation, le taux de rendement interne du premier projet rejeté. La détermination du taux d'actualisation devrait se faire par une procédure itérative[3] d'analyse de la sensibilité de la solution optimale. Le modèle employé est identique au modèle (2) présenté plus haut.

---

[1] Lusztig, P., Schwab, B. (1968) "A note on the application of linear programming to capital budgeting", J.F.Q.A., Vol. 3.

[2] Ibid., p. 427.

[3] La procédure itérative s'effectue comme suit : partir d'un taux d'actualisation quelconque, résoudre le programme linéaire, déterminer le taux du rendement interne du meilleur projet rejeté, l'utiliser pour calculer des nouveaux coefficients de la fonction objectif, étudier la sensibilité de la solution optimale par rapport à ces nouveaux coefficients. Si la solution est sensible résoudre le nouveau programme et refaire le même cheminement, sinon s'arrêter; le taux du rendement interne retenu est alors adéquat pour être utilisé comme taux d'actualisation.

Puis Carleton[1] (1969) a essayé de concilier l'approche de Baumol-Quandt et celle de Lorie-Savage-Weingartner. Il a suggéré l'utilisation d'un modèle financier plus large où le problème de sélection des projets n'est qu'une petite composante[2]. Il a reproché aux deux approches d'avoir utilisé des fonctions objectifs non satisfaisantes. Celle de Weingartner semble violer le principe de la valeur actuelle nette et celle de Baumol-Quandt pose d'autres problèmes : les dividendes sont décidés au niveau de la corporation et ne sont pas toujours fonction des revenus engendrés par les projets étudiés. En plus, les deux approches ont adopté des définitions extrêmes du rationnement trop souple chez Weingartner et trop rigide chez Baumol-Quandt[3].

Carleton a suggéré l'utilisation d'un macromodèle financier avec une fonction objectif maximisant la valeur actualisée des actions de la corporation. L'actualisation est faite avec le taux de rendement du marché qui peut être constant ou variable dépendamment des contraintes imposées[4]. Cependant, la solution optimale, ne peut être basée uniquement

---

[1] Carleton, W. T. (1969), "Linear programming and capital budgeting models", J. F., Vol. 24, no. 5.

[2] *Ibid.*, p. 825.

[3] *Ibid.*, p. 829.

[4] *Ibid.*, p. 829.

sur un taux d'actualisation externe. Le mouvement des fonds entre la corporation et l'ensemble des projets étudiés devrait se faire sur la base de la comparaison du taux de rendement interne du meilleur projet rejeté et du taux de rendement des marchés financiers. Ce qui permettrait une solution optimale et cohérente aux problèmes d'investissement, de mouvements des fonds entre projet et corporation, et fournirait alors un plan financier intégré[1].

L'auteur a ramené donc, par son approche, le problème du rationnement du capital à un problème administratif de gestion financière où le taux d'actualisation et le plan des budgets sur les différentes périodes sont déterminés à partir d'un marcro-modèle financier de grande échelle[2].

Bernhard[3] (1969) a proposé une formulation plus générale des modèles de programmation du budget de capital. Cette formulation contient les différents modèles formulés jusqu'alors comme des cas particuliers. Son travail est essen-

---

[1] Ibid., pp. 830-31.

[2] La structure du modèle reste fondamentalement semblable à celle de Baumol-Quandt, avec possibilités de retraits des fonds engendrés par les projets étudiés pour être employés par la corporation dans des usages alternatifs.
d_t désignera alors le montant retiré à la période t.

[3] Bernhard, R. H. (1969) "Mathematical programming models for capital busgeting. A Survey, generalization and critique", J.F.Q.A., Vol. 4, no. 2.

tiellement une synthèse des travaux précédents.

Pour échapper au problème des controverses au sujet de la fonction objectif, il s'est contenté d'une expression générale :

$$f(d_1, \ldots, d_T, G) \qquad (6.0)$$

Cette expression non explicitée, des flux des dividendes distribués sur les différentes périodes et de la valeur terminale, G, de la firme, n'est pas nécessairement linéaire[1]. Les contraintes employées ont été utilisées par les différents modèles précédents. Enfin, l'auteur a fait une revue des tentatives faites pour traiter le problème de l'incertitude et a fini par conclure que, malgré que l'incertitude était une caractéristique d'avenir, il restait que les travaux faits jusqu'à date, n'étaient pas encore tout à fait au point. Les solutions proposées posaient de nombreuses autres difficultés, et les techniques adéquates pour les résoudre n'étaient pas encore convenablement couvertes par la programmation mathématique[2].

Elton[3] (1970) a soutenu la thèse selon laquelle le taux d'actualisation externe est très important pour la firme

---

[1] Ibid., p. 136.

[2] Ibid., p. 155.

[3] Elton, E. J. (1970), "Capital rationning and external discount rates", Journal of Finance, Vol. 25, no. 3, pp. 573-84.

et que son utilisation reste adéquate même en situation du rationnement du capital[1]. Les arguments sont basés sur l'idée que même si la firme ne pouvait pas aller chercher des fonds sur les marchés des capitaux, elle demeurera évaluée sur ces marchés. Il a démontré[2] qu'aussi bien la théorie néoclassique que les analyses de programmation mathématique aboutissaient à des résultats cohérents avec le taux d'actualisation externe[3].

Myers[4] (1972) a essayé de compléter le travail d'Elton qui, selon l'auteur, n'avait pas montré comment le taux d'actualisation devrait être employé dans les modèles de programmation mathématique[5]. En plus, il a essayé de démontrer que les modèles de Baumol-Quandt et de Weingartner sont identiques. Car,en utilisant le taux d'intérêt du marché pour dériver les utilités marginales, Baumol-Quandt se ramènent au

---

[1] Ibid., p. 573.

[2] La démonstration est basée sur l'utilisation des courbes d'indifférence, pour l'aspect néoclassique et sur le modèle de Baumol-Quandt, pour l'aspect programmation mathématique.

[3] Ibid., p. 583.

[4] Myers, S. C., (1972), "A note on linear programming and capital budgeting", J.F., Vol. 37, no. 1.

[5] Ibid., p. 90.

modèle de Weingartner[1]. Enfin, l'auteur a soutenu la thèse d'Elton, d'utilisation d'un taux d'actualisation externe. L'existence des situations de rationnement ne devraient pas changer l'objectif de la firme, celle-ci peut toujours utiliser un taux externe par l'option qu'elle a de payer les dividendes. Or la valeur des dividendes sur les différentes périodes est déterminée par le taux d'intérêt du marché que la firme soit rationnée ou non[2].

Whitemore et Amey[3] (1973), ont essayé de compléter la solution proposée, par Lusztig-Schwab, pour résoudre le problème de la détermination du taux d'actualisation. Ils sont partis du modèle suivant[4] :

---

[1] L'auteur a utilisé les formulations originales des modèles étudiés. Il est parti de l'hypothèse: à l'optimum la contrainte (2.1) est toujours satisfaite à l'égalité, soit

$$\sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_j + d_t = D_t \Longrightarrow d_t = D_t - \sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_j$$

En remplaçant d_t par sa valeur dans la fonction objectif (2.0) : $\sum_{t=1}^{T} U_t d_t$, et en remarquant que la condition $\frac{U_t}{U_0} = \frac{1}{(1+k)^t}$ conduit à un modèle identique à celui de Weingartner.

[2] Myers, op. cit., p. 92.

[3] Whitemore, G. A., Amey, L. R. (1973), "Capital budgeting under rationing : Comment on the Lusztig-Schwab procedure" J.F.Q.A., Vol. 8, no 1.

[4] La notation utilisée est matricielle, les symboles C, X, D ont la même signification que dans les modèles précédents.

H : matrice des coefficients des ressources physiques et

R : le vecteur des disponibilités de ces ressources sur les différentes périodes.

$$
(7)\quad
\begin{array}{lllr}
\max & \alpha CX + \alpha D & & (7.0) \\
s\ \grave{a} & -CX & \leq D & (7.1) \\
& HX & \leq R & (7.2) \\
& X & \geqslant o &
\end{array}
$$

Ils ont ensuite posé $t = D + CX$, ce qui ramène (7) à la forme suivante[1] :

$$
(7)'\quad
\begin{array}{llr}
\max & \alpha t & (7.0.1) \\
& ht \leq r & (7.2.1) \\
& t \geqslant o & (7.1.1)
\end{array}
$$

Les α_t : composantes de α, sont les coefficients d'actualisation, inconnus du problème. Ces coefficients sont déterminés à une constante multiplicative près, l'un quelconque peut être pris pour numéraire[2]. En plus, contrairement à Lusztig-Schwab, ils permettent aux coefficients α_t de varier entre périodes[3]. Ils ont abouti à la conclusion que les coefficients d'actualisation, utilisés pour évaluer les flux des revenus, devraient être identiques aux prix d'ordre imputés aux contraintes budgétaires dans la solution même[4]. Enfin, ils ont admis que leur approche, tout comme celle de Lusztig-Schwab, est partielle puisqu'elle se limite à une analyse du point de vue de la firme seulement. En déterminant les coefficients d'actualisa-

---

[1] La contrainte $t \geqslant o$ est équivalente à (7.1).

[2] *Ibid*., p. 128, note 1.

[3] *Ibid*., p. 129, note 3.

[4] *Ibid*., p. 134. Les α_t sont déterminés à partir du modèle (7)' par une procédure analogue à celle de Lusztig-Schwab.

tion de façon endogène, on ne tient compte que des opportunités internes d'investissements sur chaque période, ce qui est un point de vue de la firme[1].

Merville et Tavis[2] (1973) se sont donnés pour tâche de fournir une présentation plus générale du problème, en formulant un modèle combinant les modèles de Weingartner, avec son objectif de valeur terminale et ses conditions de marché imparfait des capitaux, et de Baumol-Quandt, avec son objectif de fonction d'utilité linéaire de consommation. En fait, ce modèle n'est qu'une version simplifiée du modèle de Bernhard, avec une expression explicitée de la fonction objectif[3] :

$$\max\left[\sum_{t=1}^{T} U_t\ d_t + U \sum_{j=1}^{n} b_j x_j\right] \qquad (8.0),$$

les contraintes sont identiques au système de contraintes (3.1), utilisé par Weingartner (1966a), et présenté plus haut. Ce modèle, tout comme celui de Bernhard, permet de résoudre simultanément les problèmes de sélection des projets, de financement des investissements et de redistribution des dividendes.

---

[1] Ibid., pp. 134-35.

[2] Merville, L. T., and Travis, L. A., (1973), "A generalized model for capital investment, Journal of Finance, Vol. 28, no. 1.

[3] Les notations ont le même sens que dans les modèles précédents. U est l'utilité à l'horizon T, d'une unité monétaire des valeurs terminales, b_j, des projets retenus.

Chateau (1973 a et b) a apporté sa contribution dans deux directions. La première[1] (1973a) consistait à élaborer un modèle financier pour une firme multinationale. Partant de la constatation que la firme moderne était caractérisée par un divorce entre la direction et les propriétaires[2], il a suggéré l'utilisation de la valeur terminale actualisée, comme étant une fonction objectif cohérente avec les aspirations de la direction, décideur effectif[3] : $U_T\ (G_T) = (1+r)^{-T}\ G_T$ (9.0). La non considération des dividendes dans l'expression de la fonction objectif, traduit la baisse de l'importance des actionnaires dans les décisions de la firme. La contribution essentielle du modèle est l'élargissement des possibilités de financement sous leurs différentes formes : capital-action, obligations, emprunts à court et/ou à long terme[4]. Les contraintes employées sont celles de Bernhard étandues pour tenir compte des nouvelles possibilités de financement. De même, les résultats étendent ceux de Bernhard pour donner des règles en ce qui concerne les décisions des opérations financières[5].

---

[1]Chateau, J. P.,"La programmation déterministe du budget de capital : Un modèle financier de la firme multinationale", Cahier 7308, Département de sciences économiques, Université de Montréal.

[2]*Ibid.*, p. 1

[3]*Ibid.*, p. 10.

[4]*Ibid.*, p. 10-15.

[5]*Ibid.*, p. 30-47.

La seconde contribution[1] (1973b) peut s'inscrire dans le cadre de la recherche d'une fonction objectif adéquate. L'approche explorée emploie un modèle de programmation à objectifs multiples conjugué avec une analyse multicritère[2].

$$
\begin{array}{llr}
\max & [\, eY^{+} + eY^{-} \,] & (10.0) \\
\text{S. à} & AX - Iy^{+} + Iy^{-} = b & (10.3) \\
 & HX \leq R & (10.2) \\
 & X\ ,\ Y^{+},\ Y^{-} \geq 0 &
\end{array}
$$

L'intérêt de l'approche est évident. D'abord, elle permet de minimiser les possibilités de discordes au sein de la firme moderne, devenue une coalition de groupes antagonistes, en assurant un seuil minimum de l'objectif de chacun de ces groupes. Ensuite, elle permet de prendre en considération des objectifs de nature qualitative. La procédure est itérative et permet de tenir compte des jugements des décideurs, ce qui la rend acceptable par ces derniers. En effet, chaque itération permet

---

[1] Chateau, J. P. (1973b), "La programmation déterministe à objectifs multiples du budget du capital". Cahier 7309, <u>Département des sciences économiques</u>, Université de Montréal.

[2] Il s'agit de minimiser la somme des écarts y^{+} et y^{-} entre les objectifs fixés et ceux réalisés.
La contrainte (10.3) traduit le lien entre les différents objectifs et la solution retenue. La contrainte (10.2) est une contrainte de rationnement non spécifiée, capitaux et d'autres ressources.
e: vecteur dont toutes les composantes sont égales à l'unité.

de dériver les taux marginaux de substitution interobjectifs, ces derniers seront ajustés, suivant les jugements des décideurs, et utilisés dans l'itération suivante[1]. Plus tard[2], cette approche a été illustrée sur un exemple numérique, employé par Weingartner[3] (1963). Les résultats obtenus ont montré une flexibilité plus grande de cette dernière approche[4] par rapport aux approches utilisant des fonctions à objectif simple.

Bhaskar[5] (1974) a axé son exposé sur un traitement "détaillé et satisfaisant"[6] des problèmes de prêts et emprunts. Les plus importantes suggestions faites concernent la fonction objectif qui, en plus de la valeur terminale utilisée par Weingartner (2.0) contient les flux des rendements nets des prêts actualisés[7] :

---

[1] Ibid., p. 21.

[2] Chateau, J. P. (1975), "The capital budgeting problem under conflicting financial policies", J.B.F.A., Vol. 2, no. 1.

[3] Weingartner, M. H. (1963), op. cit., p. 18.

[4] Chateau, J. P. (1975), op. cit., pp. 96-101, Appendice A.

[5] Bhaskar, N. (1974), "Borrowing and lending in a mathematical programming model of capital budgeting", J.B.F.A., Vol. 1, no. 2.

[6] Ibid., p. 268.

[7] r^p. taux d'intérêt sur les prêts, $\alpha_t = \frac{1}{(1+a)^t}$, où a est le taux d'actualisation employé. Les autres symboles ont été définis plus haut.

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{b}_j x_j + \sum_{t=1}^{T} \left[\frac{1+r_p}{1+a} - 1 \right] \frac{V_t}{\alpha_t} \qquad (11.0)$$

Ainsi, les prêts seront considérés comme un projet alternatif. De même le taux d'actualisation peut prendre soit la valeur du coût du capital-action, soit une valeur moyenne des coûts pondérés dans le cas d'un financement diversifié[1]. En ce qui concerne les emprunts, ils interviennent dans la formation de la valeur du coût du capital, utilisé pour actualiser les flux de revenus, donc ne seront pas considérés dans l'expression de la fonction objectif[2]. Les contraintes utilisées sont les mêmes que (2.1).

Burton et Damon[3] (1974) ont remis en question l'idée d'utiliser un modèle linéaire pour résoudre les problèmes du budget de capital en situation du rationnement du capital, et surtout les tentatives faites pour résoudre le cercle vicieux taux d'actualisation-prix d'ordre. Se basant sur la suggestion que le taux d'actualisation devrait être égal au prix d'ordre, ils ont démontré que dans une telle situation le taux d'actualisation et la fonction objectif seront nuls. Ils ont

---

[1] Bhaskar, N. (1974), <u>op</u>. <u>cit</u>. , p. 269, note 3 et p. 281.

[2] <u>Ibid</u>., p. 283.

[3] Burton, R. M., Damon, W. W., (1974), "On the existence of a cost of capital under pure capital rationing, <u>Journal of Finance</u>, Vol. 29, no. 4.

utilisé, dans leur démonstration, le modèle de Weingartner (2) avec comme fonction objectif[1] ρCX (12.0) et le modèle de Baumol-Quandt avec comme fonction objectif[2]:

$$U'd = U'D - U'CX \simeq \mu' CX \qquad (13.0)$$

Ils ont obtenu le même résultat avec les deux modèles. Ce qui leur a permis de conclure qu'un taux d'actualisation positif ne peut être obtenu avec un programme linéaire et qu'un recours aux facteurs exogènes s'avère nécessaire pour résoudre le problème de la détermination du taux d'actualisation[3]. Autrement dit, ils appuient les conclusions d'Elton et de Carleton.

Bhaskar[4] (1976) a essayé de prouver que la conclusion de Myers, quant à l'équivalence des modèles de Weingartner et de Baumol-Quandt n'était pas bien fondée. Ensuite, il a proposé une formulation alternative permettant, sous certaines hypo-

---

[1] ρ est le vecteur des prix d'ordre. Considéré ici comme étant égal à α : vecteur des coefficients d'actualisation.

CX : les flux des revenus nets engendrés par les projets.

[2] Partant de la même remarque que Lusztig et Schwab, contrainte saturée à l'optimum, ils ont remplacé le vecteur des dividendes, d, par sa valeur calculée à partir de la contrainte budgétaire. Ensuite, puisque D est une constante, la formule peut se ramener à $\mu' CX$ ou μ' est le nouveau vecteur des coefficients d'actualisation.

[3] *Ibid.*, p. 1172.

[4] Bhaskar, N. (1976), *op. cit*.

thèses, de prouver l'équivalence en question.

Contrairement à Myers, il considère que les modèles en question sont fondamentalement différents. Alors que le modèle de Baumol-Quandt permet de résoudre le problème des dividendes de façon endogène, celui de Weingartner considère que la question des dividendes est résolue à priori et à l'extérieur du modèle. Par conséquent, les disponibilités budgétaires D_t ne serviront pas nécessairement aux mêmes usages dans les deux modèles[1].

La formulation alternative proposée concerne l'expression de la fonction objectif[2] :

$$\sum_{t=1}^{T} \alpha_t \, d_t \qquad (14.0)$$

Cette formulation a été utilisée pour démontrer l'équivalence des deux modèles Baumol-Quandt et Weingartner[3].

---

[1] Ibid., pp. 32-33, Une partie de D_t peut être redistribuée, sous forme de dividende d_t, dans le modèle de Baumol-Quandt.

[2] Dans le cas où il y a des flux postérieurs à la période t, l'auteur propose d'ajouter la somme des valeurs terminales, actualisées à T + 1, des projets soit:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{b}_j x_j + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t d_t \quad (15.0)\text{, pp. 36-37, note 17.}$$

[3] Avec $U_t = \frac{1}{(1+a)^t}$, les fonctions objectif (4.0) de Baumol-Quandt

Maier et Vander Weide[1] (1976) ont essayé d'appliquer les modèles de programmation du budget de capital dans le cadre d'une entreprise décentralisée. La division centrale coordonne les actions des autres divisions. Elle est la seule à avoir des contacts avec les marchés financiers extérieurs. Des algorithmes de décomposition sont employés pour résoudre ce problème. Le but est de permettre aux divisions, tout en poursuivant leurs objectifs respectifs, d'arriver à des solutions qui soient optimales de leurs points de vues respectifs et du point de vue de la division centrale. Le modèle employé est celui de la valeur terminale de Weingartner (3.0), modifié pour tenir compte de la structure de la firme. L'expression $-\sum_{t=1}^{T} c_{tj}x_j$, dans les contraintes, est remplacé par $\sum_{k=1}^{K} \mu_{tk}$ où μ_{tk} est le flux des revenus engendrés par la division k pendant la période t, en plus la division centrale utilise des coefficients de pondération λ_k^q pour ajuster les décisions de la division k à l'étape, q, du processus itératif[2].

---

et (14.0) de Bhaskar sont identiques. Avec la remarque que

$$-\sum_{j=1}^{n} c_{tj}x_j + d_t = D_t \Rightarrow d_t = D_t - \sum_{j=1}^{n} c_{tj}x_j\text{, on}$$

retrouve la formule de Weingartner, mais avec $-\sum_{j=1}^{n} c_{tj}x_j \leq D_t' = D_t - \hat{d}_t$, où $\hat{d}_t$ est la valeur des dividendes distribués à la période t.

[1]Maier, S. f., Vander Weide, J. H., (1976), "Capital budgeting in the decentralized firm", M. Sc., Vol. 23, no. 4.

[2]Le processus itératif se fait comme suit : la division cen-

Bertonèche et Langohr[1] (1977) ont comparé et testé les modèles de Lorie-Savage, de Weingartner, de Baumol-Quandt et de Merville-Tavis. L'exemple numérique est celui de Weingartner, avec des hypothèses complémentaires pour des besoins spécifiques aux autres modèles étudiés[2]. Pour les comparaisons ils ont utilisé des indices de similarité pour chacun des types de décisions : sélection des projets, financement et dividendes. Ils ont abouti à la conclusion que les modèles L-s, W et M-T[3] sont complémentaires et constituent l'évolution d'un même modèle. Le choix de l'un d'entre eux ne dépendra que des besoins du décideur, c'est-à-dire, des types de décision à prendre. Quant au modèle de B-Q[4], il donne des résultats dif-

---

trale annonce le taux d'actualisation et les quotas de fonds alloués aux différentes divisions, celles-ci répondent par la liste des projets rentables et les flux des revenus et dépenses sur les différentes années. Ces nouvelles informations sont utilisées par la division centrale pour dériver de nouveaux quotas et le taux d'actualisation et ce, par la détermination des coefficients de pondération des flux des revenus des différentes divisions (p. 435).
Les critères d'arrêt sont : soit qu'aucune des divisions ne modifie ces décisions entre deux étapes successives, soit que la fonction objectif a atteint un seuil jugé acceptable par la firme (pp. 437-38).

[1] Bertonèche, M., Langohr, H. (1977), "Le choix des investissements en situation de rationnement du capital : comparaison des solutions fournies par différents modèles théoriques". R.E., Vol. 28, no. 5.

[2] L'exemple numérique est tiré de Weingartner 1963, op. cit., p. 180. Trois situations ont été considérées : absence de rationnement, rationnement souple et rationnement rigide.

[3] Les symboles se réfèrent aux initiales des noms des auteurs cités plus haut.

[4] Ibid., p. 747.

férents de ceux des autres modèles . La raison essentielle est que les auteurs ont tout simplement négligé, dans le cas du modèle B-Q, les flux de revenus postérieurs à l'horizon T. Or, T a été fixé à 10 et à 20 ans, ce qui conduit dans le cas T = 10 à négliger la plus grande partie des flux de plusieurs projets.

Weingartner[1] (1977) a essayé de faire une mise au point sur ces différentes discussions et controverses qui, selon lui, ont contribué à créer plus de confusion plutôt qu'à clarifier le problème[2]. Il a commencé par rappeler que l'approche originale était présentée comme un outil pour aider les décideurs et non comme une théorie positive des marchés financiers. En se posant la question : si les mathématiques n'étaient pas responsables de ces "obscurcissements", il a opté, dans sa réplique, pour une exposition basée sur l'approche Fishérienne de la théorie de l'investissement, pour éviter l'utilisation de ces modèles de programmation[3]. Ce qui l'a obligé de se limiter au cas de deux périodes seulement.

L'auteur a soutenu la thèse selon laquelle les hypothèses de fonction d'utilité linéaire et de rendement cons-

---

[1]Weingartner, M. H. (1977), "Capital rationing : n authors in search of a plot", Journal of Finance, Vol. 32, no. 5.

[2]Ibid., p. 1404.

[3]Ibid., p. 1405

tants à l'échelle sont à l'origine de ces controverses inutiles[1]. Il espère que sa mise au point permettrait de sortir de ces débats "stériles" concernant les règles et les interprétations sous rationnement "naïf" du capital pour revenir aux problèmes beaucoup plus importants, de décision sous les contraintes d'organisation et à l'étude séparée du fonctionnement des marchés de capitaux[2]. Enfin, l'auteur a soutenu que la presque totalité de ces débats était non productive et qu'il était temps d'y renoncer[3].

Partant de ces conclusions, Bradley *et al.*[4] (1978a) ont essayé de concilier les anciennes divergences et de dégager une méthode pour calculer le taux d'actualisation. Ils sont partis de l'idée que les budgets sont utilisés comme moyen de contrôle dans une firme décentralisée[5]. Les décideurs connaissent les fonds alloués sur chaque période, l'ensemble des projets possibles et les séries de flux que peuvent engendrer ces projets. Ils ont considéré que le problème posé à la firme est

---

[1] *Ibid.*, p. 1404.

[2] *Ibid.*, p. 1430.

[3] *Ibid.*, p. 1429.

[4] Bradley, S. P., Frank, R. S., Frey, Jr. S. C., (1978a), "Determining the appropriate discount rates in pure capital rationing", *Decision Science*, Vol. 9, no. 3.

[5] *Ibid.*, p. 392.

donc tactique et non stratégique[1]. Ils ont démontré que, dans ces conditions, la fonction objectif adéquate est une expression des flux des revenus nets non actualisés[2]. Les prix d'ordre sont obtenus par la solutions optimale et peuvent être utilisés pour déduire les taux d'actualisation[3] qui, s'ils étaient employés, conduiraient à la même solution optimale.

Dans un second article[4] (1978b), ils ont démontré l'équivalence des modèles utilisant la valeur terminale et ceux utilisant les flux nets de revenus. Ils partent des mêmes hypothèses que précédemment, c'est-à-dire que c'est la direction centrale qui s'occupe des problèmes financiers et des relations avec l'extérieur. L'équivalence démontrée concerne aussi bien les expressions des fonctions objectifs que celles

---

[1] *Ibid.*, p. 193.

[2] *Ibid.*, p. 193.

[3] Le modèle équivalent au modèle (2) avec comme fonction objectif : $\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n} c_{tj}x_j$ (16.0) qui est équivalente à l'utilisation de l'expression $\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n} \alpha_t\, c_{tj}x_j$ (17.0), flux des revenus nets actualisés. Ces deux formulations de la fonction objectif leur ont permis de déduire les coefficients d'actualisation, α_t, en fonction des prix d'ordre, ρ_t, associés aux contraintes de l'expression (16.0) soit : $\alpha_t = \frac{1 + \rho_t}{1 + \rho_0}$

[4] Bradley, S. P., Frank, R. S., Frey, Jr. S.C. (1978b), "Equivalent mathematical programming models of pure capital rationing", J.F.Q.A., Vol. 13, no. 2.

des contraintes[1].

Sealey[2] (1978) a repris la discussion de la forme que devrait prendre la fonction objectif. Il a alors proposé une fonction d'utilité à objectifs multiples. Le développement de son modèle conduit à une moyenne pondérée des objectifs visés[3]. L'auteur a soutenu, tout comme Chateau l'a fait[4], que cette expression permet au facteur humain de jouer pleinement son rôle dans le modèle par des systèmes de pondérations subjectives des différents objectifs. Un esemple numérique simple a été utilisé pour montrer les possibilités d'utilisation de ce genre d'expression de la fonction objectif[5].

---

[1]Les modèles utilisés sont ceux utilisés par les auteurs de ces formulations : de valeur terminale (3.0), ou de flux de revenus (12.0).

[2]Sealey, Jr. C.W. (1978), "Utility maximization and programming models for capital budgeting", <u>Journal of Business Finance and Accounting,</u> Vol. 5, no. 3.

[3]L'auteur a utilisé les expressions de K objectifs k :

$$\text{Optimiser } Z_k = b_k X \qquad k = 1,\ldots K \quad (18.0)$$

Puis, il a utilisé une fonction de ces objectifs pondérés :

$$\mathcal{Z} = \lambda' Z = \lambda' BX \qquad (19.0)$$

[4]Sealey, (1978), <u>op</u>. <u>cit</u>., p. 356.

[5]<u>Ibid</u>., p. 363.

2.3 Quelques commentaires et remarques

Cette revue avait pour but de mettre l'accent soit sur les points controversés soit sur les idées concernant les extensions et/ou modifications des modèles de programmation mathématique déterministe utilisés pour résoudre les problèmes de programmation du budget de capital. Autrement dit, d'autres contributions non moins importantes ont été faites dans ce domaine. En particulier, les tentatives faites pour traiter les problèmes de l'incertitude, l'une des questions les plus épineuses qui se posent dans le domaine du budget du capital. Parmi les contributions faites dans cette direction, on peut citer celle de Näslund[1] (1966) qui a proposé un modèle ayant pour fonction objectif : l'espérance mathématique de la valeur terminale de la firme et pour contraintes des seuils de probabilités pour que les contraintes budgétaires soient respectées.

Celle de BCCK[1] (1967) qui a utilisé un modèle ayant pour fonction objectif l'espérance mathématique de la valeur actualisée nette des projets retenus moins les intérêts composés payés sur les emprunts, et pour contraintes des seuils de

---

[1] Näslund, B. (1966), "A model of capital budgeting under risk", The Journal of Business, Vol. 34, no. 2.

[2] Byrne, R., Charne, A., Cooper, W. W. Kortanek, K. O. (1967), "A chance-constrained programming approach to capital budgeting models", Journal of Finance, Vol. 24, no. 5.

probabilité sur les délais de récupération du capital et sur la situation terminale de la firme.

Cependant, ces approches restent, au moins pour le moment, sans grandes possibilités d'applications à cause du grand nombre d'informations qu'ils nécessitent et/ou la complexité des modèles qu'ils engendrent. C'est la raison pour laquelle nous avons limité notre revue de littérature aux situations de certitude.

En ce qui concerne les travaux présentés dans la revue plus haut, et spécialement les derniers travaux, n'ayant pas encore fait l'objet de commentaires ou répliques, nous formulons les remarques suivantes :

1) La démonstration, faite par Bhaskar[1] (1976), de l'équivalence des modèles de Weingartner et de Baumol-Quandt, n'a pas écarté le reproche fait par l'auteur à l'endroit de la démonstration faite par Myers. Car même avec sa démonstration, qui n'est d'ailleurs qu'une formulation de sa remarque, la détermination des dividendes reste endogène dans le modèle de B-Q et exogène dans le modèle de Weingartner, ce qui constitue la différence fondamentale signalée au départ.

---

[1] Bhaskar, N. (1976), _op_. _cit_., pp. 33-35.

2) Les différences, constatées par Bertonèche et Langohr[1] (1977), entre le modèle de Baumol-Quandt d'une part et ceux de Lorie-Savage, Weingartner et Merville-Tavis d'autre part, ne sont pas le fait des modèles mais plutôt des auteurs qui ont négligé une partie des flux des revenus dans le cas du modèle de Baumol-Quandt. Car rien ne les obligeait à prendre des périodes horizons inférieures à la durée de vie des différents projets étudiés. Peut-être, pour T = 25, tous les modèles auraient donné des résultats similaires.

3) L'approche, par objectifs linéaires multiples, proposée par Sealey[2] (1978) se ramène, par son système de pondération, à une fonction semblable à celles employant un objectif simple; en effet, ce sont les coefficients de la fonction objectif qui se trouvent affectés par cette approche :

$$\lambda BX = \sum_{k=1}^{K} \lambda^k b_k \ X = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} \lambda^k b_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

avec $c_j = \sum_{k=1}^{K} \lambda^k b_{kj}$

Or, dans tous les modèles, y compris celui de Sealey, les paramètres des modèles sont supposés connus, c'est donc la phase de

---

[1]Bertonèche, M., Langohr, H. (1977), op.cit., p. 747.

[2]Sealey, (1978), op. cit., p. 358.

la collecte de données qu'il cherche à parfaire. Ceci ne rejette pas l'approche par objectifs multiples mais plutôt l'hypothèse restrictive de la linéarité de chacun des objectifs et de celle de l'expression globale de ces objectifs pondérés.

4) En ce qui concerne la solution du problème du taux d'actualisation proposée par Bradley _et al._[1] (1978), elle est faite au coût d'une réduction considérable des possibilités d'utilisation des modèles. On se contente alors d'un modèle pour classifier les projets d'investissement, sans donner des informations concernant les questions de financement ou de redistribution des dividendes qui, selon les auteurs, seront tranchées au niveau de la division centrale. Le modèle passe donc de ses ambitions d'outil pour aider le décideur dans les différentes décisions concernant les politiques de la firme, à un simple moyen pour permettre des allocations efficaces des fonds entre les projets. En particulier, il ne renseigne pas sur l'impact des sélections des projets sur les politiques de financement et dividendes de la direction centrale.

2.4 Conclusion

La revue de littérature présentée ci-haut nous a permis de mettre le doigt sur le très grand nombre de difficultés

---

[1] Bradley _et al._ (1978a et 1978b), _op. cit._

qu'ont les modèles à résoudre avant de voir le jour de leurs éventuelles applications. Les controverses autour du taux d'actualisation à utiliser et les 19 formulations différentes de la fonction objectif proposées dans les 25 travaux présentés[1], sont des indices et preuves accablantes de ces difficultés.

---

[1] Les modèles présentés dans cette revue de la littérature sont groupés en Appendice D.

Chapitre II

Formulation et analyse des modèles de base de ce travail

Section 1. Généralités

Comme nous l'avons souligné au niveau de l'introduction, l'impact des contraintes sur les décisions de la firme sera étudié en utilisant l'approche de la programmation mathématique. Il s'agit donc de modèles basés sur des hypothèses bien précises et composés chacun d'une fonction objectif, d'un ensemble de contraintes traduisant les conditions de l'environnement dans lequel les décisions devraient être prises. Ces décisions se feront aux moyens d'un ensemble de variables, dites de décisions.

Commençons alors par spécifier ces différents éléments.

1.1 Les hypothèses de base des modèles

Nous nous limiterons ici aux hypothèses communes aux différents modèles. Celles spécifiques à chacun des modèles seront faites dans le cadre de ces derniers.

Hypothèse 1: La linéarité

Les modèles seront formés d'expressions linéaires. Il s'agit donc des modèles de programmation linéaire appliqués aux problèmes du budget de capital.

Les raisons sont la complexité qu'engenderait la manipulation des modèles non linéaires et surtout les problèmes que peuvent poser le passage primal-dual et l'interprétation économique des variables duales qui n'est pas toujours facile et/ou possible dans un modèle non linéaire. En plus étant donné les erreurs qui peuvent entacher les données numériques, l'utilisation d'un modèle linéaire est une approximation relativement acceptable.

Hypothèse 2: La certitude

Nous supposons, malgré que la réalité prouve le contraire, que les données numériques des problèmes sont connues avec certitude ou, au moins, sont déjà ajustées des facteurs d'incertitude.

Les raisons sont: d'abord la difficulté, voire même l'impossibilité, de grouper toute l'information nécessaire pour tenir compte du facteur incertitude. Il faudrait multiplier la quantité d'information, nécessaire dans la situation de certitude, par au moins le nombre d'états que peut prendre chacun des phénomènes observés. Ensuite, même si on suppose que la collecte de ces informations soit possible, les développements théoriques de la programmation mathématique ne sont pas tout à fait arrivés à fournir des outils incontestablement éfficaces et faciles à manipuler, pour traiter ce genre de problèmes. Les approches utilisées utilisent soit la technique d'espérance mathématique, basée sur des probabilités subjectives, soit des moments d'ordre s multiples dont les manipulations restent assez compliquées.

Hypothèse 3: La divisibilité

Quoique dans la réalité les projets sont indivisibles, et que la question d'indivisibilité peut être convenablement résolue par des algorithmes de programmation en nombres entiers, nous allons supposer que les projets sont divisibles.

Les raisons: étant donné que les outils de base de notre analyse sont les variables duales associées aux contraintes dans différents modèles, or ces variables duales n'ont pas toujours une interprétation économique directe dans le cas d'indivisibilité. Les desserrages marginaux des contraintes n'auront pas les mêmes effets qu'avec l'hypothèse de divisibilité. En plus, l'hypothèse de divisibilité conduit souvent, via quelques ajustements, à des résultats acceptables.

Hypothèse 4: L'horizon T

Pour éviter les problèmes du choix d'une période adéquate pour horixon, nous allons actualiser à la période de base tous les flux de revenus et dépenses. Donc l'horizon T de la firme sera donné par la dernière année du dernier projet en fonction.

1.2 La fonction objectif des modèles

Nous avons constaté, plus haut, que l'expression de cette fonction restait au centre des controverses. Elle peut varier selon le décideur, les groupes qui composent la coalition formant la firme et leurs poids respectifs, les buts poursuivis par la firme et selon même des facteurs exogènes opérant dans l'environnement de cette firme.

Dans le cas des formulations que nous allons utiliser, nous adopterons l'expression classique: la maximisation de la valeur actuelle des flux de revenus nets engendrés par les investissements étudiés. Ce choix est basé sur le fait que ces flux de revenus peuvent être utilisés de différentes manières, selon les conditions qui se présentent. C'est généralement le partage de ces flux qui est contesté et non leur montant global. C'est aussi l'expression la plus simple à manipuler. Enfin et surtout que la vraie fonction objectif qui nous intéresse, ici, est celle du programme dual. C'est-à-dire, la minimisation des impacts des contraintes reflétés par la valeur des coûts de ces contraintes, évaluées aux coûts d'opportunité qui leur sont associés. C'est donc le choix approprié des contraintes qui permettra de bien définir nos fonctions objectifs.

Soulignons enfin que nous ne rejetons pas l'adéquation des différentes formulations proposées à différentes étapes des débats présentés plus haut, mais tout simplement notre choix a été guidé par la simplicité et la consistance relative de la formulation retenue, qui reste cependant à la base et/ou en relation très étroite avec les différentes formulations alternatives proposées.

1.3 Les contraintes des modèles

Les contraintes communes aux différents modèles concernent les disponibilités budgétaires sur les différentes périodes, les bornes supérieures sur les fractions acceptables des différents projets, et la non négativité des différentes variables principales et duales des modèles employés. Les autres contraintes seront spécifiées au niveau de chacun de ces modèles.

1.4 Les variables des modèles

Nous aurons deux catégories de variables: les variables principales sont celles du programme primal. Elle seront notées par des lettres de l'alphabet latin: d_t, x_j, v_t, w_t, etc.., les variables duales (ou prix d'ordre) sont celles du programme dual. Elles seront notées par des lettres de l'alphabet grec: δ_t, π_j, β_t, etc.. Ce sont ces variables qui seront utilisées pour dériver les différentes règles de décisions. Exemple: les variables x_j et π_j vont être utilisées dans le processus de décision de sélection des projets, v_t et δ_t pour décider des prêts, w_t, δ_t et β_t pour décider des emprunts, etc. La signification de ces variables et leur utilisation seront présentées au niveau des différents modèles.

1.5. Particularités des modèles utilisés

Les modèles utilisés sont inspirés de ceux de Weingartner (1963) avec comme différences une fonction objectif différente, une actualisation à la date $t = 0$, ce qui simplifiera les expressions des variables et leurs interprétations, une intégration des relations d'interdépendances dans le modèle, une utilisqtion d'un taux d'intérêt variable dans le temps (section 5). Nous allons introduire une notation matricielle pour simplifier la présentation des modèles.

Section 2

Cas simple: Rationnement rigide du capital

2.0 Introduction

Nous supposons, pour commencer, que la firme est soumise à un rationnement rigide. C'est-à-dire, il est absolument impossible d'augmenter les disponibilités budgétaires sur les différentes périodes ou de transférer les fonds entre périodes. Ces disponibilités budgétaires sont fixées a priori et connues de la part du décideur. Aucun mouvement de fonds, entre la firme et ses propriétaires n'est permis, c'est-à-dire pas de redistribution des dividendes et pas d'augmentation du capital-action.

Il s'agit donc d'un simple problème de sélection des projets en situation de rationnement rigide du capital.

2.1 Formulations du modèle

L'outil d'analyse utilisé est un modèle de programmation linéaire de la forme suivante:

$$
(1) \quad
\begin{array}{lrcll}
\text{Max } Z = \alpha CX & & & & (1.0) \\
\text{S à} & -CX & \leq & D & (1.1) \quad (\delta) \\
 & X & \leq & \iota & (1.2) \quad (\pi) \\
 & X & \geq & 0 & (1.3)
\end{array}
$$

où X: est un vecteur de n composantes,

x_j: fraction retenue du projet j.

C: matrice (T + 1) x n d'élément C_{tj} : flux net des revenus engendré par le projet j durant la période t.

$C_{tj} > 0$ traduira une entrée nette de fonds.

$C_{tj} < 0$ traduira une sortie nette des fonds.

D: vecteur de (T + 1) composantes, D_t : montant maximum des liquidités, internes à la firme mais provenant de sources autres que les projets étudié s, disponible pour les dépenses, sur la période t.

α: vecteur de (T + 1) composantes α_t: coefficient d'actualisation, permettant d'exprimer les flux courants de la période t en unité monétaire de la période 0.

$\alpha_t = \prod_{t=1}^{t} \frac{1}{(1 + a_t)}$, ou si a_t est constant sur toutes les périodes: $\alpha_t = \frac{1}{(1 + a)^t}$

ι : vecteur colonne de n composantes toutes égales à l'unité.

δ et π sont des vecteurs des variables duales (prix d'ordre) associés aux contraintes, ils seront définis plus bas.

Z: désigne la fonction objectif du programme primal.

Le programme (1) exprime l'idée de choisir la combinaison des projets qui maximise la somme des valeurs actuelles nettes des flux de revenus, sous les contraintes des disponibilités internes des budgets (1.1)[1]:

$$C_t X \leqslant D_t \qquad t = 0,1 \ldots T,$$

de non multiplicité des projets retenus, qui assurent que les fonds ne soient pas utilisés dans des projets identiques aussi rentables qu'ils puissent être, (1.2):

$$x_j \leqslant 1 \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

et enfin de non négativité des variables, (1.3):

$$x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

A cette formulation du problème correspond une formulation alternative qui, au lieu de regarder le problème comme une situation où l'on cherche à réaliser le maximum possible de profits avec les moyens disponibles, voit ce même problème

---

[1] C_t désigne un vecteur ligne de la matrice C.
Dorénavant, les vecteurs lignes seront indiqués par des indices et les vecteurs colonnes par des exposants. Exemple:
C^j: indiquera le vecteur colonne j de C.

comme une situation où l'on essaie de réaliser les objectifs fixés aux moindres coûts. Cette version alternative est connue sous le nom de problème dual du premier problème: primal.

Le programme dual se présente comme suit:

$$(2)\quad \begin{array}{llll} \min \Lambda & = \delta' D + \pi' \iota & (2.1) & \\ \text{s. à} & - \delta' C + \pi' \geq \alpha^{C} & (2.1) & (X) \\ & \delta \geq 0, \pi \geq 0 & (2.2) & \end{array}$$

où δ : vecteur de (T + 1) composantes, δt: prix d'ordre[1] des fonds budgétaires disponibles à la période t.

π : vecteur de n composantes: πj coût de la contrainte de non multiplicité du projet j retenu.

C, D, α, ι et X ont été définis plus haut.

Λ : désigne la fonction objectif du dual.

Le programme (2) exprime l'idée de déterminer le système des prix d'ordre qui permet de minimiser la somme globale des coûts des contraintes (impact des contraintes) pertinentes sous la contrainte que la somme des dépenses, évaluées aux prix d'ordre des disponibilités budgétaires sur les diffé-

---

[1] Plusieurs appellations sont utilisées dans la littérature: variables duales, shadow prices, coûts d'opportunités, prix fictifs, prix d'ordre. Selon le contexte des phrases, nous utiliserons l'un ou l'autre de ces termes.

rentes périodes, plus le coût de non multiplicité des projets soit au moins égale à la valeur actuelle nette pour chaque projet retenu, (2.1): $\delta' C^j + \pi_j \geq \alpha C^j$ $\quad j = 1, 2, \dots n$

2.2 Interprétation économique des variables duales

2.2.1 Les variables δ_t: $t = 0, 1 \dots T.$

L'expression de la fonction objectif du programme dual nous permet d'écrire:

$$\delta_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial D_t} \qquad t = 0, 1, \dots T.$$

c'est la valeur à l'optimum d'un accroissement des disponibilités budgétaires D_t à la période t, d'une unité monétaire. C'est donc une valeur marginale. Elle mesure l'impact sur la fonction objectif, d'un desserrage marginal de la contrainte D_t, saturée à l'optimum.

La valeur de δ_t dépend des rendements marginaux des projets qui utilisent cette unité monétaire et de l'habileté de la firme à affecter cette unité de la façon la plus efficace.

Puisque les opportunités de rendements peuvent varier entre périodes, alors les valeurs de δ_t peuvent, par conséquent, varier entre ces mêmes périodes.

Les hypothèses de rationnement rigide, sans possibilités d'opérations financières et/ou de transferts entre périodes des liquidités engendrées et/ou non utilisées par les investissements sur une période t, conduisent à une indépendance entre les δt des différentes périodes. En effet, un surplus de fonds sur une période t ($\delta t = 0$) n'exclut pas la possibilité de manque des liquidités sur une période t' ($\delta t' > 0$).

2.2.2 Les variables πj $j = 1, 2, \ldots n$

πj est le coût d'opportunité associé à la contrainte de non multiplicité du projet j. En d'autres termes, c'est l'accroissement marginal de la fonction objectif consécutif à la réalisation d'une unité additionnelle des projets identiques à j.

Pour mieux saisir le sens de la variable πj, rappelons que lorsque la firme est soumise à un rationnement rigide, la réalisation d'un projet nécessite la mobilisation des fonds qui, autrement, auraient été utilisés dans d'autres projets alternatifs. Donc l'impact, de la réalisation d'un projet, sur la fonction objectif n'est pas donné par sa seule valeur actuelle nette. Cette dernière devrait être diminuée d'un montant égal aux opportunités que cette réalisation a fait perdre. Ces opportunités sont mesurées par les dépenses nettes engagées dans ce projet, évaluées avec les prix d'ordre , des disponibilités budgétaires sur les différentes périodes. Soit, en utilisant la formulation de la contrainte (2.1) et la relation de complémentarité d'écart associée:

$$(\alpha c^j + \delta' c^j - \pi_j)\, x_j = 0, \text{ et}$$

puisqu'on discute le cas d'un projet retenu, $x_j > 0$, alors[1] :

$$\pi_j = \alpha c^j + \delta' c^j = \alpha c^j - (-\delta' c^j)$$

or $\alpha c^j = \sum_{t=0}^{T} \alpha_t C_{tj}$ est la valeur actuelle nette du projet j.

$- \delta' c^j = \sum_{t=0}^{T} \delta_t C_{tj}$ est, compte tenu de la convention des signes adoptée, la somme des dépenses engagées, évaluées aux prix d'ordre des disponibilités budgétaires. π_j est donc la valeur fictive ajustée du projet j retenu. Ou encore le coût d'opportunité du projet j rejeté.

2.3 Les variables duales et les décisions de l'entreprise

L'utilisation des variables duales comme outils pour dégager les règles de décision de la firme peut aider à apporter des lumières intéressantes pour le décideur.

---

[1] Pour les projets rejetés, nous utiliserons le terme $VANA_j$ (valeur actuelle nette ajustée) au lieu de π_j.

En affectant des prix d'ordre aux disponibilités budgétaires sur les différentes périodes, cette approche peut aider le décideur à mieux planifier les allocations budgétaires sur les différentes périodes. De la même façon, la valeur ajustée associée à chaque projet peut être utilisée pour sélectionner la combinaison optimale des projets à réaliser. Ces ajustements des valeurs des liquidités sur les différentes périodes et des projets se font en tenant compte des différentes opportunités et/ou contraintes présentes.

L'utilisation de ces variables peut se faire comme suit:

2.3.1 Les variables δt $t = 0, \ldots T$.

Les relations de complémentarité d'écarts associés à la contrainte (1.1) s'écrivent $\delta' (D - CX) = 0$, ou encore pour une période t, $\delta_t \; (D_t - C_t X) = 0 \quad t = 0, \ldots T$.
Si $\delta t > 0$ alors $-C_t X = D_t$, la positivité stricte de δt indique que les fonds budgétaires disponibles à la période t sont entièrement utilisés. Or nous savons que δt représente l'amélioration, de la fonction objectif, consécutive à un desserrage marginal de la contrainte budgétaire sur la période t. Donc, lorsque les ajustements des budgets sont possibles, on devrait commencer par desserrer les contraintes ayant les δt les plus élevés. Dans une situation de possibilité d'ajustements par-

faits, les δt devraient converger vers la même valeur, à l'optimum, mais cette situation n écessite une divisibilité parfaite des investissements et une parfaite souplesse et divisibilité des moyens de financement ce qui n'est généralement pas le cas.

2.3.2 Les variables π_j $j = 1, 2, \ldots n.$

Les relations de complémentarité d'écarts associées aux contraintes (1.2) et (2.1) s'écrivent:

$$\pi' \; (\iota - X) = 0$$

$$(\alpha C + \delta' C - \pi') \; X = 0$$

Soit encore pour un projet j: $j = 1, 2, \ldots n.$

$$\pi_j \; (1 - x_j) = 0 \qquad (1.2.1)$$

$$(\alpha c^j + \delta' c^j - \pi_j) \; x_j = 0 \qquad (2.1.1)$$

a) Si $\alpha c^j + \delta' c^j - \pi_j < 0$ on aura par (2.1.1): $x_j = 0$ et par (1.2.1): $\pi_j = 0$, donc un projet j sera rejeté si $\alpha c^j + \delta' c^j < 0$ ou encore $\alpha c^j < - \delta' c^j$. C'est-à-dire, si sa valeur actuelle nette est inférieure à la valeur des dépenses nettes, dans ce projet, évaluées aux prix d'ordre des disponibilités budgétaires sur les différentes périodes. Autrement dit, le projet sera rejeté si sa valeur actuelle nette ajustée, $\alpha c^j + \delta' c^j$, est négative.

b) Si $x_j > 0$, on aura par (2.1.1.), $\pi_j = \alpha c^j + \delta' c^j$

Deux cas peuvent se présenter:

i) $0 < x_j < 1$ d'où (1.2.1): $\pi_j = 0 = \alpha c^j - \delta' c^j$.

La valeur actuelle nette ajustée d'un projet fractionnaire est nécessairement nulle. Sa valeur actuelle nette, αc^j, peut, cependant, être positive, nulle ou négative, selon le signe et la valeur de $\delta' c^j$.

ii) $x_j = 1$ d'où (par 1.2.1 et 2.1.1), $\pi_j = \alpha c^j - \delta' c^j \geq 0$

Un projet retenu entier a une valeur actuelle nette ajustée positive ou nulle.

c) $\pi_j > 0$ alors (par 1.2.1): $x_j = 1$ et (par 2.1.1):
$\alpha c^j + \delta' c^j = \pi_j$

Un projet ayant une valeur actuelle nette ajustée positive devrait être retenu entier.

Les règles de décision basées sur les variables duales nous indiquent, donc, que l'impact des contraintes sur les décisions de la firme est effectif. En effet, le critère de la valeur actuelle nette n'est plus suffisant en situations de rationnement du capital. Il peut même conduire à une sous optimisation du problème posé. Des projets ayant des valeurs actuelles nettes négatives, donc rejetables selon ce critère, peuvent avoir des valeurs actuelles nettes ajustées positives et devraient donc être retenus.

Le critère utilisé : valeur actuelle nette ajustée (dorénanvant VANA), tout en tenant compte de la valeur actuelle nette (VAN) des projets, l'ajuste pour tenir compte des opportunités manquées à cause de la réalisation du projet en question.

$$\pi_j = \alpha c^j - \quad (- \delta ' c^j)$$

VANAj = VANj - ajustement dû aux rationnements.

2.4 Conclusion

Ce modèle simple nous a permis de constater la possibilité de remise en question du critère de la VAN utilisé dans les décisions de sélection des projets. L'existence des contraintes de rationnements des liquidités budgétaires sur les différentes périodes a pour effet une modification des résultats basés sur la VAN par suite aux ajustements rendus nécessaires par la présence de ces contraintes.

Cependant, ce cas simple présente l'inconvénient d'être trop rigide. Dans la réalité, même si la firme ne pouvait avoir des possibilités d'accès sur les marchés financiers, elle peut, au moins, transférer les liquidités entre les périodes pour assurer une allocation plus efficace de ses budgets. Ce sont ces limites, entre autres, que nous allons essayer de réduire sur les différentes étapes qui vont suivre.

Section 3

Opérations financières prêts et emprunts plus contraintes sur les emprunts

3.0 Introduction

Nous supposons maintenant que la firme peut avoir accès à des sources extérieures pour financer ses investissements. De même, elle peut transférer les liquidités entre périodes. Les opérations financières avec l'extérieur se feront aux moyens de prêts et emprunts. Supposons, pour le moment, que les prêts et emprunts sont faits au même taux d'intérêt, r, mais que la firme ne peut emprunter que des montants inférieurs à des plafonds maxima permis sur les différentes périodes. Ces nouvelleshyptohès vont permettre d'utiliser le modèle pour dériver des règles concernant les décisions financières et, auront pour effets l'introduction de deux nouvelles variables principales V_t et W_t d'un nouveau système de contraintes sur les emprunts permis et des variables duales β_t associées à ces contraintes.

3.1 Formulations du modèle

Le modèle (1)- (2) sera modifié pour tenir compte des nouvelles hypothèses, il aura la forme suivante:

$$\text{Max } Z = \alpha CX + \alpha_T . e . V - \alpha_T . e . W \qquad (3.0)$$

S. à

$$- CX + P.V - P.W \leq D \qquad (3.1) \quad (\delta)$$

$$W \leq B \qquad (3.2) \quad (\beta)$$

$$X \leq \ell \qquad (3.3) \quad (\pi)$$

$$X \geq 0,\ V \geq 0 \quad W \geq 0 \qquad (3.4)$$

où V: vecteur de (T + 1) composantes, V_t: montant de fonds disponible à la période t pour être prêté une année.

W: vecteur de (T + 1) composantes, W_t: montant de fonds emprunté à la période t pour une année.

B: vecteur de (T + 1) composantes, B_t: montant maximum qu'il est possible d'emprunter à la période t.

P: matrice (T + 1) x (T + 1) des effets des opérations financières, ayant la structure suivante:

au niveau de la colonne t, la matrice a un élément (-1) au niveau de la ligne t et (1 + r) au niveau de la ligne t + 1 et des éléments nuls sur le reste de la colonne.

e: vecteur ligne de composantes nulles partout sauf le $(T + 1)^e$ élément qui est égal à l'unité.

β: vecteur de (T + 1) composantes, βt: prix d'ordre associé à la contrainte de plafond sur les emprunts à la période t.

X, C, D, ι, α, δ et π ont la même signification que dans le modèle (1) - (2).

Ecrit sous cette forme, le programme (3) exprime l'idée de déterminer la combinaison optimale des projets, les montants optima à prêter et/ou à emprunter sur les différentes périodes qui permettent de maximiser la somme des valeurs actualisées nettes des flux de revenus engendrés par les projets plus le montant actualisé des prêts nets des emprunts sur la période horison T, sous les contraintes suivantes:

(3.1): les contraintes des disponibilités budgétaires internes ajustées pour tenir compte des opérations financières effectuées. Pour une période t, elles s'écrivent:

$C_t X + P_t V - P_t W \leq D_t$, ou encore

$-C_t X + V_t - (1+r)V_{t-1} - W_t + (1+r)W_{t-1} \leq D_t$

C'est-à-dire la somme des dépenses nettes dans les différents projets retenus plus le montant des prêts en t, nets de recouvrements et intérêts des prêts de la période (t - moins le montant des emprunts sur la période t nets des remboursements et intérêts des emprunts de la période (t - 1) doit être au plus égale au montant des fonds internes disponibles à la période t, et provenant de sources autres que les projets étudiés.

(3.2): les contraintes des plafonds maxima sur les emprunts permis aux différentes périodes: $W_t \leq B_t \quad t = 0,1 \ldots T.$

(3.3): les contraintes de non multiplicité des projets: $X_t \leqslant 1 \quad j = 1, 2, \ldots n.$

A cette formulation correspond une formulation alternative, du programme dual, dont la signification a été donnée au niveau du modèle (2). Cette formulation se présente comme suit:

$$(4) \quad \begin{array}{llll} \min. \Lambda = \delta' D + \beta' B + \pi' & & (4.0) & \\ \text{S. à} & & & \\ -\delta' C \qquad + \pi' \geq \alpha C & & (4.1) & (X) \\ \delta' P \qquad \geq \alpha_T e & & (4.2) & (V) \\ -\delta' P + \beta' \qquad \geq -\alpha_T e & & (4.3) & (W) \\ \delta \geq 0, \beta \geq 0, \pi \geq 0 & & (4.4) & \end{array}$$

où les variables et paramètres ont la même signification que dans le programme (3).

Il s'agit de déterminer le système des prix d'ordre, évaluateurs des différentes contraintes, tels que les objectifs fixés soient réalisés au coût minimum fictif de ces contraintes, sous les nouvelles contraintes suivantes:

(4.1): écrite pour un projet j,

$-\delta' c^j + \pi_j \geq \alpha c^j$ ou encore $\pi_j \geq \alpha c^j + \delta' c^j$,

elle a la même signification que (2.1).

(4.2): écrite pour une période t,

(4.2.1)
$$\delta_t - (1+r)\delta_{t+1} \geq 0 \quad \text{ou} \quad \delta_t \geq (1+r)\delta_{t+1} \qquad t = 0, \ldots T-1$$
$$\delta_T \geq \alpha_T$$

qui traduit l'idée que le prix d'ordre d'un investissement marginal en t doit être au moins égal au rendement sur le marché, d'un placement marginal , évalué au prix d'ordre des disponibilités budgétaires à la période t + 1. Si c'est strictement supérieur, on optera pour l'investissement immédiat, $V_t = 0$.
Et que le prix d'ordre d'un investissement marginal soit au moins égal au coefficient d'actualisation de cette période T.

(4.3): écrite pour une période t,

(4.3.1)
$$-\delta_t + (1+r)\delta_{t+1} + \beta_t \geq 0 \quad \text{ou} \quad \delta_t \leq (1+r)\delta_{t+1} + \beta_t \qquad t = 0,1\ldots T-1$$
$$-\delta_T + \beta_T \geq -\alpha_T \quad \text{ou} \quad \delta_T \leq \alpha_T + \beta_T$$

C'est-à-dire, le prix d'ordre d'un investissement marginal en t, devrait être inférieur ou égal à son rendement sur le marché évalué aux prix d'ordre des disponibilités budgétaires en $t + 1$ majoré du prix d'ordre d'un desserrage marginal du plafond sur les emprunts permis en t. Si c'est strictement inférieur, on renonce à l'emprunt, $W_t = 0$. Et que le prix d'ordre de l'investissement d'une unité monétaire additionnelle en T devrait être au plus égal au coefficient d'actualisation majoré du prix d'ordre d'un desserrage marginal du plafond permis sur les emprunts à la même période T.

3.2 Interprétation économique des variables duales

Les variables duales δt et πj ont les mêmes interprétations que celles données au paragraphe 2.2 de la section précédente. Cependant, les valeurs et expressions seront affectées par les nouvelles contraintes sur les plafonds d'emprunts permis. Nous aurons l'occasion, plus bas: 3.3, de déterminer ces effets et de donner des interprétations plus élaborées à ces variables.

Pour les variables β_t: $t = 0, 1, 2, \dots T$. l'expression de la fonction objectif du programme dual nous permet d'écrire $\beta_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial B}$, c'est donc l'accroissement marginal de la fonction objectif, consécutif à un desserrage marginal d'une unité du plafond B_t des emprunts permis sur la période t. Là aussi, la valeur de β_t dépend de la manière dont cette unité monétaire a été allouée, des niveaux absolus de B_t et D_t et des besoins de la firme. C'est ce lien que nous essaierons d'examiner au pragraphe suivant.

3.3 Relations entre les variables duales

Le but poursuivi ici est de saisir les effets de nouvelles hypothèses et contraintes sur les expressions des variables duales.

Considérons d'abord les contraintes (4.2.1) et (4.3.1). Elles donnent, pour une période t,

$$(4.5) \quad \begin{array}{l} (1+r)\delta_{t+1} \leq \delta_t \leq (1+r)\delta_{t+1} + \beta_t; \quad t = 0,1 \dots T-1 \\ \alpha_T \leq \delta_T \leq \alpha_T + \beta_T, \end{array}$$

Le prix d'ordre de l'investissement d'une unité monétaire à la période t, devrait être compris entre le rendement annuel du placement de cette unité sur le marché, évalué au prix d'ordre des disponibilités budgétaires à la période t + 1, et ce même rendement majoré du prix d'ordre du desserrage marginal du plafond permis des emprunts.

Si ce prix d'ordre β_t est nul, nous aurons

(4.5.1) $(1+r)\delta_{t+1} \leq \delta_t \leq (1+r)\delta_{t+1}$, donc $\delta_t = (1+r)\delta_{t+1}$,

en l'absence de contrainte effective sur les emprunts de la période t, le prix d'ordre d'un investissement marginal en t, doit être égal à son rendement sur le marché, évalué au prix d'ordre des disponibilités budgétaires en t + 1.

Si $\beta_T = 0$, nous aurons

(4.5.2) $\delta_T = \alpha_T$,

en l'absence de contrainte pertinente sur les emprunts à la période T, le coefficient d'actualisation devrait être égal au prix d'ordre d'une unité monétaire supplémentaire investie sur la même période T. Soit encore, si le taux d'actualisation est constant, $\frac{1}{(1+a)^T} = \delta_T$ donc $a = (\delta_T)^T - 1$ est la valeur de ce taux d'actualisation.

Pour mieux saisir ces relations, considérons les relations de complémentarités d'écarts associées aux contraintes: (3.2), (4.2) et (4.3),

$$\beta'(B-W) = 0 \qquad (3.2.1)$$

$$(\alpha_T e - \delta' P)V = 0 \qquad (4.2.2)$$

$$(-\alpha_T e + \delta' P - \beta')W = 0 \qquad (4.3.2)$$

ou écrites pour une période t, t = 0,1, ... T.

$$\beta_t(B_t - W_t) = 0 \qquad (3.2.2)$$

$$(-\delta_t + (1+r)\delta_{t+1} \quad) V_t = 0 \qquad (4.2.3)$$

$$(\delta_t - (1+r)\delta_{t+1} - \beta_t)W_t = 0 \qquad (4.3.3)$$

et

$$(\alpha_T - \delta_T)V_T = 0 \qquad (4.2.4)$$

$$(-\alpha_T + \delta_T - \beta_T)W_T = 0 \qquad (4.3.4)$$

Si $W_t > 0$, (4.3.3) implique $\beta_t = \delta_t - (1+r)\delta_{t+1}$ et (4.2.3.) devient, en remplaçant $-\delta_t + (1+r)\delta_{t+1}$ par $-\beta_t$(4.2.3)': $-\beta_t \cdot V_t = 0$ donc $\beta_t = 0$ ou $V_t = 0$. C'est-à-dire, les prêts ne sont compatibles avec les emprunts qu'en situation d'absence de contraintes effectives sur les emprunts. Or dans une telle situation, le prix d'ordre d'un investissement marginal couvre exactement les coûts des emprunts, évalués aux prix d'ordre des disponibilités budgétaires et est égal au rendement d'un placement marginal sur le marché, évalué aux coûts d'opportunité des contraintes budgétaires. Donc la firme peut, à la marge, opter indifféremment pour l'une ou l'autre de ces trois opérations: prêter, investir ou emprunter.

Mais la présence d'une contrainte effective sur les emprunts exclut la possibilité de prêts: $\beta_t > 0$ implique, par (4.2.3)', $V_t = 0$ et, par (3.2.2): $W_t = B_t \geq 0$ donc, par (4.3.3),

$$\delta_t' = (1+r)\delta_{t+1} + \beta_t \qquad (4.6)$$

le prix d'ordre d'un investissement dépasse celui du marché, évalué aux prix d'ordre de sa disponibilité sur la période t + 1, par une valeur positive βt. Or dans le cas d'un emprunt, le rendement du marché, c'est le coût des emprunts, donc pour que la firme accepte de payer une prime pour desserrer la contrainte sur les emprunts, il faut que le prix d'ordre de l'investissement résultant couvre le coût des emprunts plus la prime en question.

La relation (4.6) est une relation de récurrence qui peut s'écrire:

$$\begin{aligned}
\delta t &= (1+r)\delta_{t+1} + \beta_t \\
&= (1+r)\left[(1+r)\delta_{t+2} + \beta_{t+1}\right] + \beta_t \\
&= (1+r)\left\{(1+r)\left[(1+r)\delta_{t+3} + \beta_{t+2}\right] + \beta_{t+1}\right\} + \beta_t \\
&= (1+r)^3\delta_{t+3} + (1+r)^2\beta_{t+2} + (1+r)^1\beta_{t+1} + (1+r)^0\beta_t
\end{aligned}$$

ce qui donne si on remonte jusqu'à T,

$$\delta t = (1+r)^{T-t}\delta_T + \sum_{l=t}^{T} (1+r)^{l-t}\beta_l \qquad (4.7)$$

Cette relation montre que la valeur de δ_t dépend des prix d'ordre des disponibilités budgéraires sur les périodes postérieures à t, et des coûts d'opportunité associés aux contraintes effectives sur les plafonds maxima permis des emprunts sur ces mêmes périodes. Evidemment, certains de ces plafonds peuvent ne pas être atteints et les prix d'ordre associés seront alors nuls, mais la formule (4.7) reste valable.

Si nous faisons intervenir les relations de la période T, nous obtenons:

$$\alpha_T \leq \delta_T \leq \alpha_T + \beta_T$$

Si $\beta_T = 0$ alors $\delta_T = \alpha_T$ donc (4.7) peut,encore,s'écrire:

$$\delta_t = (1+r)^{T-t}\alpha_T + \sum_{1=t}^{T} (1+r)^{1-t} \beta_1 \qquad (4.7.1)$$

Si $\beta_T > 0$, alors $V_T = 0$ et $\delta_T = \alpha_T + \beta_T$. (4.7) devient alors:

$$\delta_t = (1+r)^{T-t} (\alpha_T + \beta_T) + \sum_{1=t}^{T} (1+r)^{1-t}\beta_i + (1+r)^{T-t}\beta_T \quad (4.7.2).$$

La présence de contrainte effective sur les emprunts de la périote T conduit à affecter un prix d'ordre aux investissements en t majoré d'une valeur positive = $(1+r)^{T-t}\beta_T$, par rapport à la situation d'absence de cette contrainte. Autrement dit, $\beta_T > 0$ implique $\alpha_T < \delta_T$. En présence d'une contrainte effective sur les emprunts à l'horizon, le taux d'actualisation devrait être supérieur au taux de rendement interne de l'investissement d'une unité monétaire additionnelle en 1, la différence entre les deux taux devrait être juste suffisante pour compenser le coût d'opportunité de cette contrainte.

Si $\beta_1 = 0$, pour $1 = t, t+1, \ldots T$.
alors $\delta_t = (1+r)^{T-t}\alpha_T$, relation que l'on peut, aussi, obtenir directement de la relation (4.5.1). Si l'actualisation était faite à un taux constant, a, nous aurons:

$$\delta_t = (1+r)^{T-t}\frac{1}{(1+a)^T} = \left(\frac{1}{1+a}\right)^t \cdot \left(\frac{1+r}{1+a}\right)^{T-t} = \alpha_t\left(\frac{1+r}{1+a}\right)^{T-t}$$

donc δ_t sera supérieur, égal ou inférieur au coefficient d'actualisation, α_t, selon que, a est inférieur, égal ou supérieur au taux d'intérêt r.

De même, les contraintes (3.3), (4.1) et les relations de complémentarité associées vont nous permettre de trouver les relations entre π_j, δ_t et β_t. En effet, écrites pour un projet j, ces relations s'écrivent:

$$x_j \leq 1 \qquad (3.3.1)$$

$$-\delta' c^j + \pi_j \geq \alpha c^j \qquad (4.1.1)$$

et

$$\pi_j\ (1-x_j) = 0 \qquad (3.3.2)$$

$$(\alpha c^j + \delta' c^j - \pi_j)\ x_j = 0 \qquad (4.1.2)$$

soit pour $x_j > 0$, nous aurons (par 4.1.2):

$$\begin{aligned}\pi_j &= \alpha c^j + \delta' c^j \\ &= \sum_{t=0}^{T} \alpha_t \cdot c_{tj} + \sum_{t=0}^{T} \delta\, c_{tj} = \sum_{t=0}^{T} (\alpha_t + \delta_t)\; c_{tj}\end{aligned}$$

et en remplaçant δ_t par son expression (4.7), nous obtenons:

$$\pi_j = \sum_{t=0}^{T} \left[\alpha_t + (1+r)^{T-t} \delta_T + \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{1-t} \beta_1 \right]$$

Donc la VANA d'un projet j est fonction du taux d'actualisation utilisé, du prix d'ordre des disponibilités budgétaires en T, du taux d'intérêt du marché et des coûts d'opportunité des contraintes des plafonds d'emprunts permis sur toutes les périodes postérieures à t.

L'ajustement $\delta' c^j$ de la VAN, αc^j, se fait en tenant compte des possibilités d'opérations financières exprimées par le taux d'intérêt du marché financier et des contraintes effectives, éventuelles, sur les possibilités d'emprunts.

Donc l'introduction des possibilités d'opérations financières a pour résultat, l'apparition des différentes relations entre les variables duales, que nous venons de présenter.

Ces nouvelles expressions de δt et πj nous permettent de dégager des interprétations économiques plus élaborées de ces variables.

a) $\delta t = (1+r)^{T-t}\delta_T + \sum_{t=0}^{T} (1+r)^{1-t}\beta 1$, le prix d'ordre d'un desserrage marginal de la contrainte budgétaire de la période t, est égal au rendement, sur le marché financier de cette unité monétaire placée sur la période allant de t à T, évalué au prix d'ordre des disponibilités budgétaires en T, plus la somme des prix d'ordre, des desserrages marginaux des contraintes sur les plafonds d'emprunts, et de leurs rendements respectifs sur le marché financier sur des périodes allant de la période de leurs réalisations respectives 1, jusqu'à la périodeT. Notons que seules les contraintes sur les emprunts postérieurs à t influencent la valeur de δt. Ceci provient du fait que seules les opportunités futures restent possibles pour placer une unité monétaire disponible en t.

Evidemment, si $\beta 1 = 0$ pour $1 = t, \ldots T$.
$\delta t = (1+r)^{T-t}\delta_T$: le prix d'ordre d'un desserrage marginal de la contrainte Dt est équivalent au rendement, sur le marché d'une unité monétaire de la période t à T, évalué au prix d'ordre budgétaire de T.

b) $\Pi_j = \alpha c^j + \sum_{t=0}^{T} \left[(1+r)^{T-t} \delta_T - \sum_{l=t}^{T} (1+r)^{l-t} \beta_l \right] c_{tj}$:

la VANA d'un projet j est égale à sa VAN ajustée d'une valeur égale aux rendements, de ses flux de dépenses nettes, prêtées de t à T, et évalués au prix d'ordre des disponibilités budgétaires à la période T, plus un terme reflétant des opportunités de faire venir ces flux de dépenses nettes à partir des desserrages des plafonds maxima des emprunts permis sur les différentes périodes. Donc la VANA tient compte des possibilités des opérations financières et des limites sur ces opérations.

3.4 Les variables duales et les décisions de la firme

Trois types de décisions sont possibles avec ce modèle: les allocations budgétaires entre périodes, la sélection des projets et les opérations financières.

3.4.1 Les allocations budgétaires entre période

Nous avons vu, plus haut, qu'en l'absence des contraintes sur les emprunts, on a la relation (4.5.1)

$$\delta_t = (1+r)\,\delta_{t+1}$$

et puisque $r > 0$, $\delta_t > \delta_{t+1}$, donc les δ_t sont décroissants dans le temps. En situation de marchés parfaits des capitaux, la firme a intérêt à utiliser ses budgets le plutôt qu'elle peut. Ce sont donc les premières périodes qui ont le plus besoin de fonds, ce qui est logique puisqu'après, les investissements retenus vont commencer à engendrer des flux de revenus utilisables par la firme.

Si $\beta_t > 0$, nous aurons la relation (4.7),

$$\delta_t = (1+r)\,\delta_{t+1} + \beta_t$$

La différence entre δ_t et δ_{t+1} est accentuée davantage par la présence du $\beta_t > 0$. Donc l'utilisation immédiate des fonds est plus rentable qu'une utilisation différée.

Cette situation s'explique par le fait que sous les nouvelles hypothèses les flux de revenus peuvent être utilisés sur les périodes futures ce qui, par le phénomène des rendements composés, avantage les investissements immédiats. A ceci, il faut ajouter les possibilités des opérations financières qui ont créé une flexbilité plus grande au niveau des disponibilités des fonds et, en même temps, une sécurité plus grande au niveau de la firme qui peut aller chercher des fonds et/ou placer les siens sur le marché financier qui lui assure un rendement minimum, r, qu'elle va utiliser comme critère de référence et/ou opportunité alternative possible. C'est ce rendement qui va constituer la borne inférieure des rendements qu'elle exigera sur ses investissements internes.

3.4.2 La sélection des projets

Les règles de sélection restent identiques à celles dégagées au niveau du modèle (1) - (2). Cependant, les valeurs des variables de décisions seront affectées par les nouvelles contraintes introduites et, par conséquent, les décisions effectives peuvent, elles aussi, être affectées. C'est ce que nous allons essayer de dégager au paragraphe 4.5. Ces règles de décision peuvent se résumer ainsi: un projet j sera accepté entier, fractionnaire ou rejeté, selon que sa VANA est positive, nulle ou négative.

3.4.3 Les opérations financières

Les relations de base des décisions financières ont été employées, pour dériver les relations entre les variables duales, au paragraphe 3.3. Les relations (4.2.3) et 4.2.4) serviront pour dégager les règles de décisions concernant les opérations de prêts et les relations (3.2.2), (4.3.3) et (4.3.4) pour dégager les critères de décisions des emprunts.

En effet, les relations

$$\left(-\delta_t + (1+r)\delta_{t+1}\right)V_t = 0 \qquad (4.2.3.)\quad t = 0,\ldots T-1$$

$$\left(\alpha_T - \delta_T\right)V_t = 0 \qquad (4.2.4)$$

nous permettent de dégager les règles suivantes:

a) Si $\delta_T > \alpha_T$ (contrainte (4.2.1.)) alors $V_T = 0$
Si le prix d'ordre associé à la disponibilité budgétaire en T est supérieur au coefficient d'actualisation, alors la firme n'aura pas intérêt à prêter ses fonds, l'utilisation interne est plus profitable.

b) $V_T > 0$ implique (par 4.2.4) $\delta_T = \alpha_T$
La présence des prêts en T, implique l'absence d'autres usages alternatifs internes plus profitables.

c) Si $\delta_t > (1+r)\delta_{t+1}$, contrainte (4.2.1), alors par (4.2.3) $V_t = 0$. Si le prix d'ordre des disponibilités budgétaires en t est supérieur au rendement, sur le marché d'un placement alternatif, évalué au prix d'ordre des disponibilités budgétaires en (t+1), alors la firme ne prêtera pas sur la période t.

d) Si $V_t > 0$ alors par (4.2.3) $\delta_t = (1+r)\delta_{t+1}$
La présence des prêts en t implique que l'usage alternatif interne n'est pas meilleur que ce placement sur le marché financier.

De même, les relations,

$$\beta_t(B_t - W_t) = 0 \qquad t = 0,1, \ldots T \qquad (3.2.2)$$

$$\left(\delta_t - (1+r)\,\delta_{t-1} + \beta_t\right)W_t = 0 \qquad t = 0, \ldots T-1 \qquad (4.3.3)$$

$$\left(-\alpha_T + \delta_T - \beta_T\right)W_T = 0 \qquad (4.3.4)$$

peuvent servir pour dégager les règles suivantes:

e) $\delta_T < \alpha_T + \beta_T$ (contrainte (4.3.1)) donne, par 4.3.4, $W_T=0$

La firme n'empruntera pas en T si le prix d'ordre des disponibilités budgétaires n'est pas suffisant pour compenser la valeur actualisée d'une unité monétaire de la période T, plus le coût d'opportunité d'une contrainte effective, éventuelle, sur les emprunts en T. Evidemment, si $\beta_T = 0$ et $\delta_T < \alpha_T$, W_T reste nul.

f) Si $W_T > 0$ alors, par 4.3.4, $\delta_T = \alpha_T + \beta_T$.

La firme emprunte si le prix d'ordre de cette unité empruntée compense sa valeur actualisée plus une prime traduisant le coût d'opportunité d'une contrainte éventuelle sur les emprunts en T.

g) Si $\delta_t < (1+r)\delta_{t+1} + \beta_t$, contrainte 4.3.1, alors, par (4.3.3), $W_t = 0$.

La firme s'abstiendra d'emprunter en t si, le prix d'ordre des disponibilités internes de ces emprunts n'est pas suffisant pour couvrir leurs coûts du marché, évalués aux prix d'ordre des disponibilités budgétaires en $t+1$, plus le coût d'opportunité éventuel d'une contrainte effective sur les emprunts.

h) $W_t > 0$ implique, par 4.3.3, $\delta_t = (1+r)\delta_{t+1} + \beta_t$
La présence des emprunts implique que leur prix d'ordre compense les coûts encourus: coût du marché plus coût d'opportunité de la contrainte éventuelle sur les emprunts.

Rappelons que les prêts et emprunts ne sont exclusifs qu'en situations de contraintes effectives sur les emprunts. C'est-à-dire, $\beta_t > 0$ implique $V_t = 0$ et inversement
$V_t > 0$ implique $\beta_t = 0$.
Dans le cas contraire, $0 \leq W_t < B_t$, les deux opérations financières peuvent être effectuées en même temps. Puisque, comme nous l'avons souligné au paragraphe 3.3, la firme peut, dans ce cas, indifféremment investir, prêter et/ou emprunter.

3.5 Impact des nouvelles hypothèses et contraintes sur les décisions de la firme

Nous avons vu, au paragraphe 3.3, que l'introduction des possibilités des opérations financières est la cause de l'interdépendance des variables δ_t. Plus précisément, δ_t dépend de toutes les δ_l , $l = t+1, t+2, \ldots T$. Ceci constitue une différence avec les résultats du modèle simple (1) - (2) où les δ_t étaient indépendantes entre elles; l'impossibilité des transferts avait rendu impossible toute action sur les δ_t pour ajuster leurs valeurs.

Cette action sur les δ_t, rendue possible au niveau du modèle (3) - (4), peut conduire à un ajustement plus efficace des VAN (αC^j) des différents projets j, en optimisant la valeur de l'ajustement $\delta' C^j$ par ces actions sur les δ_t, et, par conséquent, peut conduire à rendre positives des VANA initialement négatives et/ou inversement. Ce nouveau ajustement de la VAN se fait au moyen de deux termes:

$$\sum_{t=0}^{T} (1+r)^{T-t} \delta_T \cdot C_{tj} \quad \text{et} \quad \sum_{t=0}^{T} \sum_{l=t}^{T} (1+r)^{l-t} \beta_l \cdot C_{tj}.$$

Le premier ajustement permet de tenir compte de l'impact de l'existence de marché financier comme moyen alternatif pour utiliser et/ou chercher des fonds.

Le deuxième terme permet de tenir compte de l'impact des contraintes éeventuelles que placeront ces marchés sur les possibilités d'emprunts. Les termes C_{tj} sont de signes quelconques, les ajustements se feront suivant les signes de C_{tj} et les périodes de leurs réalisations respectives. Ainsi donc, on peut assister, avec l'utilisation du critère de la VANA, à des rejets de projets ayant des VAN positives et à des acceptations des projets avec des VAN négatives. Notons aussi que la présence des contraintes sur les emprunts peut conduire, même avec le critère de la VANA, à rejeter des projets acceptables en l'absence de ces contraintes.

Donc, l'introduction des nouvelles contraintes, traduites par les βt, peut avoir des impacts effectifs sur les décisions des allocations budgétaires entre périodes et de sélection des projets.

3.6 Conclusion

Nous avons pu constater, à travers les expressions de la fonction objectif et des variables δt et πj, que l'introduction des nouvelles contraintes sur les emprunts permis, exprimées dans notre formulation par les variables duales associées βt, a un impact, non seulement sur la valeur de la fonction objectif, mais aussi sur celles des autres variables duales δt et πj. Ceci traduit une propriété fondamentale des variables duales:

Les valeurs des variables duales tiennent compte, non seulement des contraintes auxquelles elles sont respectivement associées, mais aussi de toutes les autres contraintes du modèle employé et enfin, du degré d'efficacité qui a caractérisé l'allocation des ressources limitatives entre périodes et/ou projets.

Soulignons, encore une fois, que cette première extension du modèle simple inital, nous a permis de saisir l'impact des nouvelles hypothèses et contraintes sur les décisions de la firme. En effet, certaines règles de décision concernant l'allocation des ressources entre périodes et la sélection des projets ont été modifiées en conséquence. Parallèlement à ces modifications, l'introduction de l'hypothèse des possibilités des opérations financières nous a permis d'étendre le champ d'utilisation du modèle par l'élaboration des critères de décision concernant ces opérations financières. Ces nouvelles règles tiennent compte, elles aussi, de toutes les contraintes du modèle.

Cependant, les hypothèses de base du modèle (3) - (4) restent très limitatives. Dans l'étape suivante, nous allons introduire les possibilités d'interdépendance des projets et les possibilités de contraintes sur d'autres ressources que le capital.

Section 4

Interdépendance des projets et nouvelles contraintes sur les ressources physiques

4.0 Introduction

La première extension du modèle simple nous a permis d'écarter certaines hypothèses limitatives, mais reste, cependant, basée sur d'autres hypothèses non moins contestables que celles écartées. L'objet de cette étape est d'écarter certaines de ces hypothèses. Le but ultime est de se rapprocher le plus possible de la réalité. C'est ainsi que nous allons introduire dans cette étape deux nouvelles hypothèses. La première concerne les contraintes d'interdépendance des projets. La seconde concerne les contraintes sur certaines ressources limitatives, autres que le capital.

4.1 Justification et formulation de ces contraintes

4.1.1 L'interdépendance des projets

Bien que l'indépendance, au sens strict du terme, des projets n'a plus de sens en situation de rationnement, car l'adoption d'un projet conduit à rejeter d'autres projets réalisables en l'absence des contraintes effectives sur les ressources, il reste, cependant, que ce type d'interdépendance est endogène au modèle et non le résultat de facteurs exogènes. Ce sont donc ces derniers types d'interdépendance "exogènes" que nous allons considérer ici.

Avant de lancer un projet, la firme est généralement appelée à trancher un certain nombre de questions. Exemples,

- Quand doit-on le réaliser? Plusieurs dates peuvent être possibles,
- Où doit-on le réaliser? Plusieurs emplacement peuvent être possibles,
- Quelle taille doit-il avoir?
- Quel type d'output doit-il produire?, etc...

Pour répondre à chacune de ces questions, la firme doit considérer les différentes variantes possibles et sélectionner une seule d'entre elles, la meilleure par rapport au critère de comparaison adopté. Ces différentes variantes peuvent être considérées comme des projets mutuellement exclusifs, c'est-à-dire, l'acceptation de l'un conduit automatiquement au rejet de tous les autres.

Evidemment, la catégorie projets mutuellement exclusifs, ne se limite pas aux seuls cas mentionnés plus haut, on peut y classer aussi, entre autres, les différentes variantes de projets rendus interdépendants par les effets externes qu'ils engendrent. Seront alors considérées comme projets mutuellement exclusifs, dans le cas de deux projets, les variantes suivantes: la réalisation de l'un, la réalisation de l'autre et la réalisation des deux en même temps. Un autre type d'interdépendance peut se rencontrer lorsque la réalisation d'un projet nécessite la réalisation d'un autre qui peut, à son tour, nécessiter la réalisation d'un autre, etc... Cette dépendance peut être réciproque ou non.

D'autres types d'interdépendance sont possibles. Amey[1] a dressé une liste de neuf types d'interdépendance. Cependant, le but de notre travail n'est pas un recensement des différents type d'interdépendance et des méthodes utilisées pour les traiter, mais plutôt d'analyser les conséquences des contraintes qui traduisent les interdépendances sur les décisions de la firme. Notre exposé se limitera a des exemples simples des deux premiers types d'interdépendances présentés plus haut.

---

[1] Amey, L.R. (1972). "Interdependencies in capital budgeting: a survey". Journal od Business Finance, Vol.4, no.3.

4.1.1.1 Projets mutuellement exclusifs

De cette catégorie, nous allons prendre, pour exemple, le cas de la détermination de la date optimale de réalisation d'un projet[1]. Tous les autres cas auront la même formulation. Notre choix a été guidé par les possibilités d'action, sur les contraintes de rationnement, que peut nous offrir le déplacement (avancement ou recul) des dates de réalisation d'un ou de quelques projets étudiés. Là aussi, nous allons nous limiter au cas le plus simple. C'est-à-dire, nous supposerons que l'on fixe au départ la séquence "optimale" des dates de réalisation des différents projets. Une approche alternative, certainement plus réaliste, consisterait à procéder par une analyse dynamique qui permet de fixer au début de chaque période la liste des projets à réaliser sur cette même période et de reporter les autres qui devront concurrencer les nouvelles options ouvertes sur les périodes futures. Seulement, cette approche doit faire appel aux techniques de programmation dynamique, non utilisées dans le cadre de notre travail.

---

[1] Cette suggestion, entre autres, nous a été faite par le professeur M. Boyer que nous remercions ici.

Soit I le nombre de dates alternatives possibles pour réaliser le projet j, et i l'indice d'une quelconque de ces dates. La condition, de projets mutuellement exclusifs, peut prendre l'une des formes suivantes:

a) $$\sum_{i=1}^{I} x_{ji} \leqslant 1$$

$$x_{ji} = 0,1 \qquad i = 1, 2, \ldots I$$

ou encore

b) $$\sum_{i=1}^{I} x_{ji} \leqslant 1$$

$$x_{ji} . x_{ji'} = 0, \qquad i \neq i' = 1, 2, \ldots I$$

Cependant, la première formulation doit faire appel aux techniques de programmation en nombres entiers et la seconde aux techniques de programmation non linéaire.

Pour une application de la programmation linéaire (en nombres réels), nous allons adopter la formule approximative, employée jusqu'alors par les différents auteurs ayant traité des questions d'interdépendance, suivante:

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ji} \leqslant 1$$

Dans le cas où plus d'un x_{ij} est retenu en fraction positive, on pourrait, par exemple, garder celui retenu en fraction plus grande et reprendre la résolution du programme, avec la variante retenue, pour déterminer la fraction exacte à réaliser.

4.1.1.2 Projets dépendants

Une origine, non la seule, de ce type d'interdépendance peut être la complémentarité réciproque ou non des projets en question. Lorsque la réalisation d'un projet nécessite la réalisation d'un autre, on assiste à la possibilité d'une diminution des chances de réalisation du projet dépendant car, non seulement, il faut qu'il soit compétitif par rapport aux projets dans la compétitition, mais encore il faut qu'il compense les faiblesses éventuelles du deuxième projet nécessaire pour le rendre compétitif. Ainsi donc, ces types d'interdépendance peuvent conduire à rejeter des projets très compétitifs si pris indépendants, mais qui nécessitent la réalisation de projets trop déficitaires. Et inversement des projets non compétititfs, si considérés individuels, peuvent avoir priorité sur d'autres projets rentables, par le biais d'un soutient suffisant de la part d'un autre projet.

Ce type de dépendance peut se manifester de différentes manières:

Un projet s peut nécessiter la réalisation préalable d'un autre projet r, entier. Cette situation peut se formuler comme suit:

$$x_s\ (1-x_r) = 0$$

$$0 \leqslant x_r \leqslant 1$$

$$0 \leqslant x_s \leqslant 1$$

Cette formulation implique que x_s ne peut être positif que si $x_r = 1$, mais que par contre, $x_r = 1$ n'implique pas nécessairement que $x_s > 0$.

Une version moins exigente de cette dépendance pourrait être: la réalisation d'une fraction quelconque du projet s, nécessite la réalisation d'une fraction au moins égale du projet r. Cette relation peut se formuler ainsi:

$$x_s - x_r \leqslant 0$$

$$x_r \leqslant 1$$

$$x_s \geqslant 0$$

Evidemment, le projet r peut aussi dépendre de la réalisation totale ou partielle d'un autre projet j, etc... Par la suite, nous allons nous limiter à des dépendances du premier ordre et à la seconde version de ces relations de dépendance, la première doit faire appel aux techniques de programmation non linéaire.

L'introduction de ces contraintes d'interdépendance nous amène à modifier la contrainte (3.2): $X \leq \ell$, qui sera remplacée par une nouvelle expression de la forme $SX' \leq L$. X' est un vecteur augmenté par les variantes mutuellement exclusives à certains des projets j étudiés. S : une matrice qui traduit, en plus des relations $x_j \leq 1$ des projets indépendants, les relations d'interdépendance des types

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} \leq 1 \quad \text{et} \quad x_s - x_r \leq 0$$

Supposons, sans perdre de généralité, que le projet 1 peut être réalisé à l'une de deux dates possibles, i = 1,2 (I = 2) et que le projet 3 est dépendant du projet 2; les autres projets sont indépendants. La nouvelle contrainte aura alors la forme suivante:

$$\underset{(S)}{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_{11} & x_{12} & x_2 & x_3 & x_4 \cdots & x_j \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & -1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}} \leq \underset{(L)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

4.1.2 Les ressources limitatives, autres que le capital

Bien que le capital constitue la pièce maîtresse dans les décisions concernant le budget de capital, d'autres facteurs peuvent avoir des impacts non moins importants sur ces mêmes décisions. Exemple, le personnel de direction dans une firme joue un rôle fondamental dans l'organisation et l'exécution efficiente des projets retenus; par ce fait même, il est générateur d'effets, positifs ou négatifs, sur les flux des revenus attendus de ces investissements. Cependant, si on admet la linéarité, hypothèse de base de ce travail, des relations exprimant les contraintes alors la plupart des ressources limitatives auront des expressions semblables dans le système de ces contraintes. Seule l'interprétation des variables duales peut changer selon la ressource considérée.

Pour simplifier et sans perdre de généralité, nous allons nous limiter à une seule contrainte représentative de ces ressources rares. Etant donné la non adéquation de l'hypothèse de linéarité du facteur direction, nous allons nous référer plutôt à un facteur quelconque appelé ci-après ressource physique.

La contrainte sur cette ressource physique sera exprimée sous la forme suivante:

$$HX' \leqslant R$$

où H est une matrice $(T+1) \times (n + I-1) = (T+1) \times (n+1)$ de composante h_{tj} : quantité de la ressource employée dans le projet j durant la période t . R: vecteur de T composantes R_t : quantité totale de la ressource physique disponible à la période t.

Supposons encore que les Rt sont constantes sur les différentes périodes: $R_t = \bar{R}$ et que $h_{tj} = \bar{h}_j$ sur toutes les périodes. Les contraintes seront alors identiques sur les différentes périodes. $HX' \leq R$ sera alors équivalente à $\bar{H}X' \leq \bar{R}$ où

H: vecteur de (n+1) composantes,
h_j : quantité de la ressource consommée par le projet j
R: un scalaire ,quantité globale de la ressource physique.

4.2 Formulations du modèle

Sous ces nouvelles hypothèses, le programme (3) devient :

$$\text{MAX } Z = \alpha CX' + \alpha_T.e.V - \alpha_T.e.W \qquad (5.0)$$

S.à

$$\begin{array}{lll} -CX' + PV - PW \leq D & (5.1) & (\delta) \\ W \leq B & (5.2) & (\beta) \\ SX' \leq L & (5.3) & (\pi) \\ \bar{H}X' \leq \bar{R} & (5.4) & (\sigma) \\ X' \geq 0, \ V \geq 0, \ W \geq 0 & (5.5) & \end{array}$$

où σ: est le prix d'ordre associé à la ressource physique

X', S, L, H et R ont été définis au paragraphe 5.

Les autres variables et paramètres ont la même signification que dans le modèle (3) - (4).

Il s'agit de déterminer la combinaison optimale des projets à réaliser, les montants optima des opérations financières à réaliser sur chaque période, sous les contraintes des disponibilités budgétaires (5.1) (idem 3.1), des plafonds maxima sur les emprunts (5.2) (idem 3.2), des interdépendances éventuelles des projets (5.3), c'est-à-dire:

$x_{11} - x_{12} \leq 1$, $x_3 - x_2 \leq 0$ et $x_j \leq 1$, $j = 2, \ldots n$, et enfin la contrainte de la ressource physique (5.4).

La formulation du programme dual de ce modèle se présente comme suit:

$$
(6) \quad \begin{array}{lllr}
\text{min.} & \delta'D + \beta'B + \pi'L + \sigma\bar{R} & & (6.0) \\
\text{S. à} & & & \\
& -\delta'C + \pi'S + \sigma\bar{H} \geq \alpha C & (6.1) & (X') \\
& \delta'P \geq \alpha_T \cdot e & (6.2) & (V) \\
& -\delta'P + \beta' \geq -\alpha_T \cdot e & (6.3) & (W) \\
& \delta \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \pi \geq 0,\ \sigma \geq 0 & (6.4) &
\end{array}
$$

où variables et paramètres ont la même signification que dans le programme (5)

Il s'agit de déterminer le système des prix d'ordre, évaluateurs des différentes contraintes permettant de réaliser les objectifs fixés tout en minimisant les coûts associés à cette réalisation, sous les contraintes :

(6.1): $-\alpha C^j - \delta' C^j + \sigma \bar{h}j + \pi' S^j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots n$

la VANA du projet j doit être positive ou nulle[1].

(6.2) et (6.3) sont identiques à (4.2) et (4.3) et ont donc les mêmes interprétations.

4.3 Interprétation des variables duales

Les variables δt et β_t ont les mêmes interprétations que dans le modèle (3) - (4). Les autres variables πj et σ peuvent être interprétées comme suit:

4.3.1 Les variables πj

Les interprétations des πj vont être complétées et/ou modifiées pour tenir compte des nouvelles contraintes de la

---

[1]Ces VANA tiendront compte des nouvelles contraintes d'interdépendance exprimées par la colonne S^j de S et de ressource physique exprimée par $\sigma \bar{h} j$.

ressource physique et des interdépendances des projets. Commençons par π_1:

π_1 étant la variable duale associée à la contrainte $x_{11} + x_{12} \leq 1$ dans (5.3). Donc pour la variante (11), la contrainte (6.1) donne

$$\pi_1 \geq \alpha c^{11} + \delta' c^{11} - \bar{h}_{11}\sigma \qquad (6.1.11)$$

et pour la variante (12), on aura par (6.1),

$$\pi_1 \geq \alpha c^{12} + \delta' c^{12} - \bar{h}_{12}\sigma \qquad (6.1.12)$$

Pour mieux saisir le sens de π_1, considérons les relations de complémentarité d'écarts associées aux contraintes (5.3) et 6.1):

$$\pi'(L - SX') = 0 \qquad (5.6)$$

$$(\alpha C + \delta' C - \bar{H}\sigma - \pi' S)X' = 0 \qquad (6.5)$$

soit encore, pour les variantes 11 et 12:

$$\pi_1 (1 - x_{11} - x_{12}) = 0 \qquad (5.6.1)$$

$$(\alpha c^{11} + \delta' c^{11} - \bar{h}_{11}\sigma - \pi_1) x_{11} = 0 \qquad (6.5.11)$$

$$(\alpha c^{12} + \delta' c^{12} - \bar{h}_{12}\sigma - \pi_1) x_{12} = 0 \qquad (6.5.12)$$

La relation (5.6.1) montre que la valeur de π_1 dépend de la somme des fractions retenues des deux variantes 11 et 12.

Si $\pi_1 > 0$ alors $x_{11} + x_{12} = 1$, deux cas peuvent alors se présenter:

i) $x_{11} = 1$, $x_{12} = 0$ ou inversement et

ii) $x_{11} > 0$, $x_{12} > 0$ et $x_{11} + x_{12} = 1$

dans le cas i) par (6.5.11) et (6.5.12), on a

$$\Pi_1 = \alpha c^{11} + \delta' c^{11} - \bar{h}_{11}\sigma \geq \alpha c^{12} + \delta' c^{12} - \bar{h}_{12}\sigma$$

Donc la variante retenue a une VANA au moins égale à celles des autres. La VANA des variantes rejetées peuvent être positives, nulles ou négatives.

Dans le cas ii), par (6.5.11) et (6.5.12), on obtient

$$\Pi_1 = \alpha c^{11} + \delta' c^{11} - \bar{h}_{11}\sigma = \alpha c^{12} - \delta' c^{12} - \bar{h}_{12}\sigma > 0$$

Si les variantes sont retenues en fractions positives, avec des VANA positives, alors elles sont équivalentes.

Si $x_{11} + x_{12} < 1$ alors $\Pi 1 = 0$ et par (6.1.11) et (6.1.12), on obtient:

$$\Pi_1 = 0 \geq \alpha c^{11} + \delta' c^{11} - \bar{h}_{11}\sigma$$

$$\Pi_1 = 0 \geq \alpha c^{12} + \delta' c^{12} - \bar{h}_{12}\sigma$$

deux cas sont alors possibles:

i) $x_{11} > 0$ et $x_{12} > 0$ alors

$$\Pi_1 = 0 = \alpha c^{11} + \delta' c^{11} - \bar{h}_{11}\sigma = \alpha c^{12} + \delta' c^{12} - \bar{h}_{12}\sigma$$

Si les deux variantes sont retenues en fractions positives telles que la somme est inférieure à l'unité alors elles ont toutes des VANA nulles.

ii) $x_{11} > 0$ et $x_{12} = 0$, alors

$$\Pi_1 = 0 = \alpha c^{11} + \delta' c^{11} - \bar{h}_{11}\sigma \geq \alpha c^{12} + \delta' c^{12} - \bar{h}_{12}\sigma$$

La variante rejetée a une VANA au plus nulle, si celle retenue est fractionnaire. Ces résultats nous permettent de donner à π_1 l'interprétation suivante:

C'est le prix d'ordre associé à la meilleure variante parmi les projets mutuellement exclusifs concernés. Elle mesure donc le coût d'opportunité de laisser tomber cette meilleure variante. Les VANA des autres variantes ne sont pas mesurées par π_1, sauf si ces variantes sont équivalentes auquel cas π_1 mesure leur VANA commune.

Considérons maintenant l'autre type d'interdépendance, il est traduit au niveau de (5.3) par

$$x_2 \leq 1 \qquad (5.3.2.) \qquad (\pi_2)$$

$$x_3 - x_2 \leq 0 \qquad (5.3.3.) \qquad (\pi_3)$$

Compte tenu de la structure de la matrice S, les relations (5.6) et (6.5) donnent:

$$\pi_2\,(1-x_2) = 0 \qquad (5.6.2)$$

$$\pi_3\,(x_2 - x_3) = 0 \qquad (5.6.3)$$

$$(\alpha c^2 + \delta' c^2 - \bar{h}2\sigma - \pi_2 + \pi_3)x_2 = 0 \qquad (6.5.2)$$

$$(\alpha c^3 + \delta' c^3 - \bar{h}3\sigma - \pi_3)\,x_3 = 0 \qquad (6.5.3)$$

La relation (6.5.2) montre que

a) $x_2 > 0$ implique $\pi_2 - \pi_3 = \alpha c^2 + \delta' c^2 - h_2\sigma$, c'est-à-dire, sa VANA sera égale à $\pi_2 - \pi_3$ et non à π_2 comme il est le cas pour les projets non nécessaires. π_3 est le déficit maximum acceptable du projet 2.

b) Si $x_3 < x_2$ alors, par 5.6.3, $\pi_3 = 0$: si le projet 2 est acceptable en fraction strictement supérieure à x_3, alors la prime de soutien du projet 2 par le projet 3 est nulle.

c) Si $\pi_3 > 0$, alors $x_2 = x_3$ si la prime est positive alors les deux projets sont retenus en fractions égales.
Si $0 < x_2 = x_3 < 1$ alors, par 5.6.2, $\pi_2 = 0$ et par (6.5.2) et (6.5.3) on a

$$\alpha c^2 + \delta' c^2 - \bar{h}_2 \sigma + \pi_3 = 0$$

et $$\alpha c^3 + \delta' c^3 - \bar{h}_3 \sigma - \pi_3 = 0$$

alors on exige du projet 3 une VANA positive suffisante pour compenser le déficit du projet 2:

$$\pi_3 = \alpha c^2 + \delta' c^2 - \bar{h}_2 \sigma$$
$$= \alpha c^3 + \delta' c^3 - \bar{h}_3 \sigma$$

Si $x_2 = x_3 = 1$ alors $\pi_2 \geq 0$ et par (6.5.2) et 6.5.3) on a

$$\pi_2 - \pi_3 = \alpha c^2 + \delta' c^2 - \bar{h}_2 \sigma \geq 0$$
$$\pi_3 = \alpha c^3 + \delta' c^3 - \bar{h}_3 \sigma \geq 0$$

soit alors $$\pi_2 = \alpha c^3 + \delta' c^3 - \bar{h}_3 \sigma + \alpha c^2 + \delta' c^2 - \bar{h}_2 \sigma$$

π_2 est donc la somme des VANA des deux projets, elle doit être positive ou nulle pour que les deux projets soient acceptables entiers.

Si $x_2 = x_3 = 0$ alors, par (5.6.2), on a $\pi_2 = 0$

et par (6.5.2) : $-\pi_3 \geq \alpha c^2 + \delta' c^2 - \bar{h}_2 \sigma$

et puisque $\pi_3 > 0$, alors $\alpha c^2 + \delta' c^2 - \bar{h}_2 \sigma < 0$

Les deux projets sont rejetés si la VANA du projet 3 n'est pas suffisante pour compenser le déficit du projet 2. On peut alors dégager une interprétation de π_3: c'est le prix d'ordre maximum que peut supporter le projet 3 pour rendre le projet 2 acceptable en fraction égale à celle du projet 3. Autrement dit, c'est le coût d'opportunité de la dépendance, car au prix π_3, on peut réaliser une unité supplémentaire du projet 2, ce qui rendra le projet 3 indépendant, étant donné la contrainte $x_j \leq 1$, $j = 1, \ldots n$. Les autres πj ont des interprétations semblables à celles du modèle (3)- (4) à la différence que ici, pour un projet retenu j ,$\pi j = (\alpha c^j + \delta' c^j) - \bar{h}_j \sigma$, c'est-à-dire la VANAjse trouve diminuée d'une valeur supplémentaire $(+\bar{h}_j \sigma)$ pour tenir compte de la ressource physique, par rapport à la VANA j du modèle (3) - (4).

4.3.2 La variable σ

σ : c'est l'accroissement marginal de la fonction objectif consécutif à un desserrage marginal de la contrainte $\bar{R}$ sur la ressource rare.

Pour un projet retenu j, on a

$$\pi_j = \alpha c^j + \delta' c^j - \bar{h}_j \sigma \quad \text{ou encore}$$

$$\sigma = \frac{-\pi_j + \alpha c^j + \delta' c^j}{\bar{h}_j} \quad \text{pour tout j retenu.}$$

σ crée, donc, une liaison entre les différents projets retenus.

4.4 Relations entre les variables duales

Les relations entre δ_t et β_t restent les mêmes que dans le modèle (3) - (4). Seules les expressions π_j seront affectées par les nouvelles contraintes.

$$\pi_1 = \alpha C^{1i} + \delta' C^{1i} - \bar{h}_{1i}\sigma$$

$$= \sum_{t=0}^{T} \alpha_t c_{t1i} - \sum_{t=0}^{T} \left[(1+r)^{T-t} \delta_T + \sum_{l=t}^{T} (1+r)^{l-t} \beta_l \right] c_{t1i} - \bar{h}_{1i}\sigma$$

$$i = 1 \text{ ou } 2$$

$$\pi_2 = \pi_3 - C^2 - \delta' C^2 - \bar{h}_2 \sigma$$

$$= \sum_{t=0}^{T} \alpha_t (c_{t2} + c_{t3}) + \sum_{t=0}^{T} \left[(1+r)^{T-t} \delta_T + \sum_{l=t}^{T} (1+r)^{l-t} \beta_l \right] \times$$

$$(c_{t2} + c_{t3}) + (\bar{h}_2 + \bar{h}_3)\sigma$$

et enfin,

$$\pi_j = \alpha C^j + \delta' C^j - \bar{h}_j \sigma$$

$$= \sum_{t=0}^{T} \alpha_t \cdot c_{tj} + \sum_{t=0}^{T} \left[(1+r)^{T-t} \delta_T + \sum_{l=t}^{T} (1+r)^{l-t} \beta_l \right] c_{tj} - \bar{h}_j \sigma$$

Nous constatons donc que seules les expressions des π_j "nécessaires" se trouvent augmentées de la VANA du projet qui en dépendent. Ceci explique pourquoi la variable π_3 a un coefficient nul dans la fonction objectif, car sa valeur est déjà comptée dans π_2.

4.5 Les variables duales et les décisions de la firme

Les décisions des allocations budgétaires et de financement ne sont pas affectées par les nouvelles contraintes. Par contre, les décisions de sélection des projets seront affectées. Les relations de complémentarité d'écarts (5.6) et 6.5) nous permettent de tirer les conclusions suivantes:

a) pour $j > 3$:

$$\pi_j \, (1-x_j) = 0$$

$$(\alpha C^j + \delta' C^j - \pi_j - \bar{h}_j \sigma) x_j = 0 \qquad j = 3, \ldots n.$$

Si $x_j > 0$, alors $\pi_j = \alpha C^j - (-\delta' C^j) - \bar{h}_j \sigma$

Deux cas peuvent se présenter:

i) $x_j < 1$ alors $\pi_j = 0 = \alpha C^j + \delta' C^j - \bar{h}_j \sigma$

ii) $x_j = 1$ alors $\pi_j = \alpha C^j + \delta' C^j - \bar{h}_j \sigma \geq 0$

b) Pour les variantes 11 et 12

Nous avons vu, plus haut, que le critère de la VANA positive n'assure pas que la variante soit acceptée, il faut en plus qu'elle ait une VANA au moins égale à celles des autres. Si cette VANA est strictement supérieure alors seule la variante correspondante sera retenue. Sinon, c'est-à-dire s'il y a plusieurs variantes qui ont la même VANA, alors le modèle ne permet pas de trancher. Une fraction positive de chacune des variantes peut être acceptée. Dans ce cas, une solution serait de retenir une quelconque de ces meilleures variantes et de reprendre la résolution du programme pour déterminer la fraction exacte à réaliser. Si la somme des fractions retenues est inférieure à l'unité alors la somme des VANA est nulle, puisque la VANA de chacune des variantes retenues est nulle.

c) Pour les projets 2 et 3

Si $x_2 < x_3$ les projets 3 et 2 sont traités comme indépendants. Le projet 3 ne paiera alors aucune prime pour soutenir le projet 2.

Si $x_2 > 0$, alors $\pi_2 = \pi_3 + \alpha C^2 + \delta' C^2 - \bar{h}_2 \sigma \geq 0$

x_2 sera retenu en fraction positive si la somme des VANA des deux projets (2) et (3) est au moins nulle[1].

$x_2 = x_3 = 0$ implique $\pi_3 \geq 0$ et $\pi_2 = 0$ donc

$\pi_2 - \pi_3 \geq \alpha C^2 + \delta' C^2 - \bar{h}_2 \sigma$, la VANA du projet 3 n'est pas suffisante pour compenser le déficit du projet 2.

4.6 Impacts des nouvelles contraintes sur les décisions de la firme

4.6.1 La contrainte de ressource physique

$$\text{VANA}_j = \alpha C^j + \delta' C^j - \bar{h}_j \sigma \qquad \text{pour } j = 4, \dots n.$$

Puisque $\sigma \geq 0$ et $\bar{h}_j \geq 0$, alors la VANA avec la nouvelle contrainte est au plus égale à celle d'avant la contrainte. Donc une VANA qui était positive peut devenir négative ou nulle si $h_j \sigma > 0$ et par conséquent, un projet qui était acceptable entier peut devenir acceptable fractionnaire ou même rejeté.

4.6.2 Les contraintes d'interdépendance

4.6.2.1 Projets mutuellement exclusifs

$$\pi_1 = \text{VANA}_1 = \sup_{i=1.2}\left[\alpha C^{ji} + \delta' C^{ji} - \bar{h}_{ji} \sigma\right]$$

[1]Remarquons que $x_2 > 0$ implique aussi que $x_3 > 0$ donc il est logique que π_2 tienne compte de la somme des deux VANA.

La contrainte de projets mutuellement exclusifs conduit au rejet du principe de la VANA positive ou nulle, c'est-à-dire, des variantes avec des VANA positives peuvent être rejetées.

4.6.2.2 Projets dépendants

Les contraintes de dépendance ont pour effets d'accepter, dans certaines situations et par solidarité entre projets, des projets avec des VANA négatives et dans d'autres cas de rejeter des projets avec des VANA positives jugées insuffisants pour soutenir un autre projet jugé nécessaire. Le projet accepté avec une VANA négative est un projet nécessaire, l'autre, rejeté avec une VANA positive, est un projet dépendant. Donc, les conditions d'interdépendance rendent insuffisant le seul critère de la valeur actuelle nette ajustée.

4.7 Conclusion

Cette nouvelle extension nous a permis de constater que l'introduction de la contrainte sur la ressource physique a pour effet de diminuer le niveau de la VANA des projets retenus , que ce critère de la VANA n'est plus indeffectible en présence des contraintes d'interdépendance où la concurrence peut éliminer des projets avec des VANA positives et la "solidarité" peut faire passer des projets avec des VANA négatives. Cependant, ces différentes extensions n'ont pas pu écarter toutes les hypothèses simplificatrices du modèle. Dans l'étape suivante, nous allons introduire la question des dividendes et une nouvelle hypothèse sur le marché des capitaux.

Section 5

Contraintes sur les dividendes et modifications des hypothèses des marchés de capitaux

5.0 Introduction

Dans cette étape, nous allons introduire le problème des dividendes, ignorés jusqu'alors, et revoir les hypothèses faites sur les marchés financiers pour les rendre plus "réalistes". Ces modifications porteront sur le taux d'intérêt du marché. Ce taux sera différent entre prêts et emprunts et, pour les emprunts, ce taux va être une fonction croissante du montant emprunté. Seulement dans la réalité, ce taux ne varie pas de façon continue mais plutôt par intervalles. Ceci nous amène donc à poser des contraintes de plafonds maxima sur les emprunts permis sur chaque intervalle.

5.1 Justification et formulation de ces nouvelles contraintes et hypothèses

5.1.1 La question des dividendes

L'introduction de la question des dividences peut trouver sa justification dans les raisons suivantes:

i) D'un côté, la distribution des dividendes n'est pas une simple utilisation des flux de revenus engendrés par les projets retenus. L'effet sur le montant global des flux de revenus nets n'est pas toujours donné par les montants retirés. En effet, dans les situations de rationnement du capital, une distribution des dividendes peut entraîner une réduction du nombre de projets générateurs, éventuels, de flux additionnels positifs. La firme perd toutes les opportunités des réutilisations possibles de ces montants distribués. Donc la maximisation même, des flux de revenus nets engendrés par les projets, peut être interreliée avec la distribution des dividendes.

ii) D'un autre côté, la firme, étant une coalition de groupes ayant parfois des intérêts divergents, peut être contrainte à payer un niveau minimum de dividendes pour assurer sa survie. Parfois, certains des groupes propriétaires de la firme peuvent avoir accès à des opportunités externes plus intéressantes qu'une réutilisation interne des fonds engendrés par la firme. Ceci peut poser à la firme le problème de savoir si oui ou non, elle doit tenir compte des opportunités externes ouvertes à ses propriétaires et, si oui, ceux de quel groupe? La réponse à ce problème peut être controversée.

En effet, même s'il paraît logique que la firme, étant donné que sa raison d'être est de maximiser la richesse de ses propriétaires, tienne compte des opportunités alternatives ouvertes à ses propriétaires, il reste, cependant, que ces intérêts apparents peuvent avoir des effets négatifs plus grands. C'est le cas par exemple où cette distribution de dividendes peut causer une baisse plus que proportionnelle de la valeur des actions, si ces dernières sont librement négociables dans la bourse des valeurs. Dans ce cas, et dans l'intérêt même des propriétaires, la firme peut ne pas tenir compte de ces opportunités externes possibles et se contenter d'un rendement interne plus faible, mais qui maintiendrait élevée la valeur de ses actions. Cependant, ce raisonnement peut être contesté dans ce sens qu'il faut encore prouver l'effet négatif de la distribution des dividendes sur la valeur des actions. Alors que certains analystes soutiennent l'hypothèse d'un effet négligeable, d'autres soutiennent une hypothèse inverse, c'est-à-dire, la distribution des dividendes a un effet positif sur la valeur des actions puisque les investisseurs sont plus attirés par les revenus immédiats que par les revenus futurs (liquides ou accroissement de la valeur du capital)[1].

Pour la suite, nous allons supposer que la firme se limite à des critères internes pour décider de la distribution des dividendes.

---

[1]Bromwich, M., op.cit., pp. 168-75.

Il est dans l'intérêt de la firme de rester en contact permanent avec ses propriétaires et que ces derniers gardent un intérêt continu dans la firme et ses opérations. Cet objectif peut être atteint par la distribution d'un niveau minimum de dividendes par année, ces distributions seront optionnelles car dans le cadre des opérations financières de la firme les ayants droit peuvent opter pour un replacement dans la firme. Ces seuils minima peuvent être fixés constants sur les différentes années ou suivre une progression régulière reflétant la croissance de la firme et/ou de ses flux de revenus. Ces alternatives peuvent se formuler ainsi:

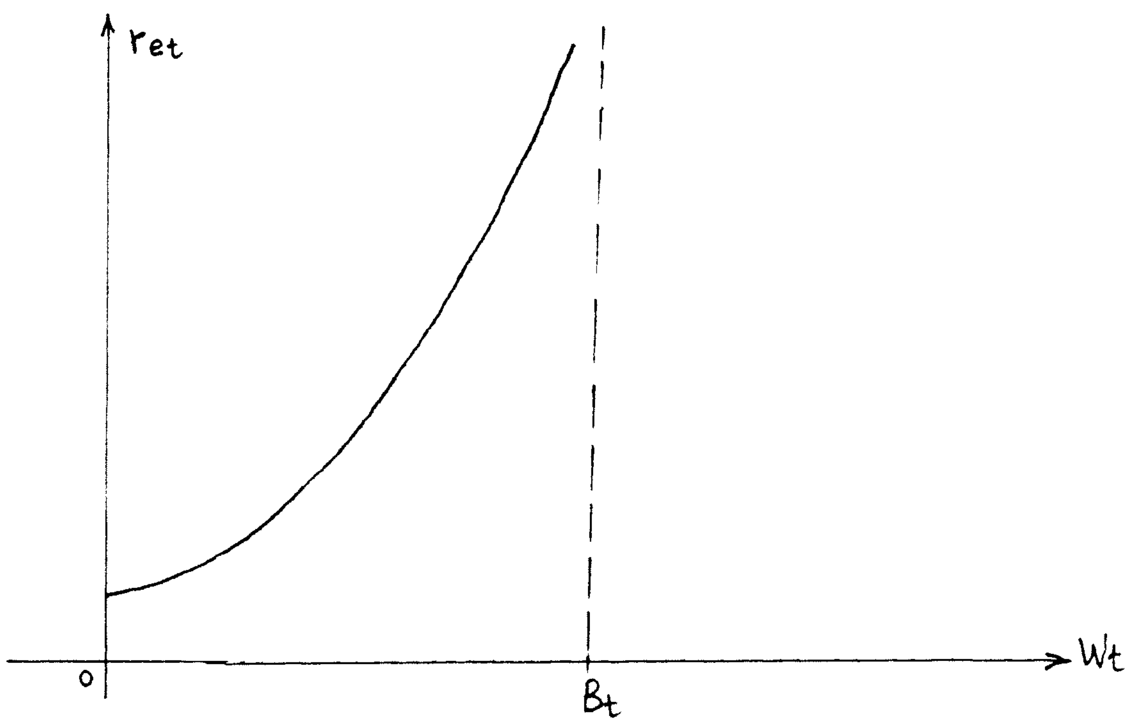
a) $d_t \geqslant \bar{d}_t$

b) $d_t = (1 + \tau)^t \, d_o$

La firme, suivant les critères des allocations budgétaires, des opportunités internes ou externes, peut ou non dépasser ces seuils minima. Les dividendes sont en fait des dépenses sans aucun rendement pour la firme, ils vont donc apparaître au niveau des contraintes budgétaires et seront, par conséquent, évalulés aux prix d'ordre associés à ces contraintes budgétaires.

5.1.2 Les nouvelles hypothèses et contraintes des marchés des capitaux

Les premières hypothèses faites sur ces marchés considéraient que les opérations financières se font, quand elles sont possibles, au même taux d'intérêt. Or dans la réalité les institutions financières sont des entreprises qui tirent une partie de leur flux de revenus nets de la différence entre les taux d'intérêt sur les prêts et emprunts. C'est ainsi que nous allons supposer que les prêts sont toujours faits à un taux d'intérêt inférieur à celui des emprunts. En plus, on va supposer que l'institution financière tienne compte des risques et/ou de la rareté des liquidités, c'est-à-dire, elle demande un taux d'intérêt qui augmente avec le montant des emprunts. La courbe d'offre de fonds aura alors l'allure suivante:



Courbe d'offre de fonds pour une période t

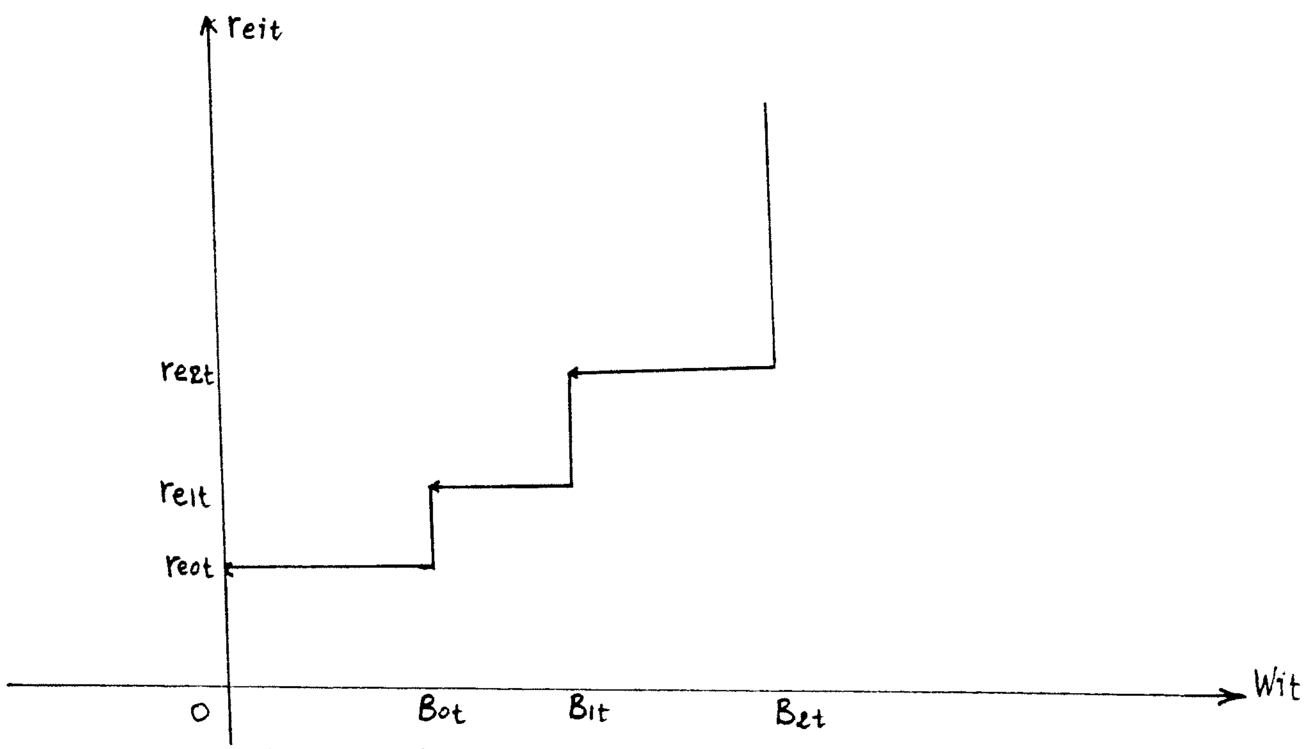
$t = 0,1,2, \ldots T.$

B_t: seuil maximum des emprunts possibles sur la période[1].

---

[1]Ce seuil peut s'expliquer par la rareté des liquidités, par des

Cependant, dans la pratique, l'institution financière ne modifie pas ses taux d'intérêt de façon continue. C'est-à-dire, au lieu d'appliquer un taux d'intérêt marginal croissant, elle applique un taux d'intérêt moyen constant par intervalle et croissant entre les intervalles. Les longueurs de ces intervalles peuvent être quelconques. La borne supérieure de chacun de ces intervalles donne le plafond maximum des emprunts possibles au taux d'intérêt moyen en question. La courbe d'offre de fonds sera alors une courbe en escaliers de la forme:



Courbe d'offre de fonds pour une période t

t = 0,1,... T

---

décisions internes de la firme, ou enfin par le degré de risque encouru par la firme.

Ces modifications des conditions des opérations financières vont se traduire par des modifications de la structure et/ou des éléments de la matrice P.

Du côté des prêts, seuls les taux d'intérêt peuvent varier dans le temps, la forme de P reste la même:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ -(1+r_{po}) & 1 & & & & & \\ & -(1+r_{p1}) & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & -(1+r_{pt}) & \ddots & & \\ & & & & & 1 & o \\ & & & & & -1+r_{pT-1}) & 1 \end{bmatrix}$$

PV aura alors pour terme général, V_o à la période $t = 0$ et,

$$-(1+r_{pt-1})\ V_{t-1} + V_t \qquad \text{pour} \quad t = 1,\ldots T.$$

où r_{pt}: taux d'intérêt sur les prêts de la période t.

Du côté des emprunts, la matrice des effets sera notée E et aura la structure suivante:

$$E = \begin{bmatrix} 1 \ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ldots 1 & & \\ -(1+r_{e1o}) \ -(1+r_{eio}) \ -(1+r_{emo}) & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ & & -(1+r_{e1T-1}) \ -(1+r_{eiT-1}) \ -(1+r_{emT-1}) \ 1,\ldots 1 \end{bmatrix}$$

où m est le nombre de segments, composant la courbe d'offre de fonds sur la période t.

r_{eit} : taux d'intérêt sur les emprunts sur le segment "i" de la courbe d'offre de fonds à la période t.

Le vecteur W des emprunts sera modifié aussi.

W aura m(T+1) composantes W_{it}: montant emprunté sur le segment i de la courbe d'offre de la période t,

$$i = 1,2, \ldots m., \qquad t = 0,1 \ldots T$$

E.W aura pour terme général:

$$\sum_{i=1}^{m} W_{it} - \sum_{i+1}^{m} (1+r_{eit-1}) W_{it-1} \qquad t = 1, \ldots T.$$

$$\text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} W_{io} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Pour une période t, cette expression donne le montant total des emprunts, effectués sur les différents segments de la courbe d'offre de la période t, nets des remboursements et intérêts des différents emprunts effectués sur la période t-1.

5.2 Formulations du modèle

Sous ces nouvelles hypothèses, le modèle (5)-(6) sera modifié comme suit:

le programme primal,

$$MAX Z = \alpha CX' + \alpha_T eV - \alpha_T . e'W \qquad (7.0)$$

S. à

$$\begin{array}{rlll} -CX' + PV - EW + d & \leq D & (7.1) & (\delta) \\ W & \leq B & (7.2) & (\beta) \\ SX' & \leq L & (7.3) & (\pi) \\ \bar{H}X' & \leq \bar{R} & (7.4) & (\sigma) \\ -d & \leq -\bar{d} & (7.5) & (\lambda) \\ X' \geq 0 , \; V \geq 0 , \; W \geq 0 & & (7.6) & \end{array}$$

B: vecteur de m(T+1) composantes B_{it}: montant maximum des emprunts permis sur le serment "i" de la courbe d'offre de fonds de la période t.

d: vecteur de T+1 composantes d_t: montant minimum des dividendes que la firme doit distribuer à la période t.

e': vecteur de $m(T+1)$ composantes toutes nulles sauf la dernière qui est égale à l'unité.

λ: vecteur de $T+1$ composantes λ_t: prix d'ordre associé à la contrainte sur les dividendes.

Les autres variables et paramètres ont la même signification que dans les modèles précédents.

Il s'agit de déterminer la combinaison optimale des projets à réaliser, des montants optima à prêter, à distribuer sous forme de dividendes sur chaque période et/ou à emprunter sur chaque segment de la courbe d'offre de fonds de chaque période, sous les contraintes de disponibilités budgétaires:

$$-C_t X' + V_t - (1+r_{pt-1}) V_{t-1} - \sum_{i=1}^{m} \left[W_{it} - (1+r_{eit-1}) W_{it-1} \right] + d_t \leq D_t \qquad t=1,\dots T \tag{7.1}$$

$$\text{et } C_0 X' + V_0 - W_0 + d_0 \leqslant D_0 \quad ,$$

de plafonds maxima sur les emprunts permis à chaque taux d'intérêt r_{eit}:

(7.2) $\quad W_{it} \leq B_{it} \qquad i = 1, \dots m \qquad t = 0, \dots T.$

d'interdépendance des projets:

(7.3): $S^j X' \leq L_{j'}$ $\qquad j' = 1,2,\ldots \quad n+1,$

de la ressource physique:

(7.4): $\bar{H}X' \leq \bar{R}$

et enfin de dividendes:

$$d_t \geq \bar{d}_t \qquad t = 0,1,\ldots T.$$

Le programme dual associé à ce modèle se présente ainsi:

$$\min \Lambda = \delta' D + \beta' I + \pi' L + \sigma \bar{R} - \lambda' \bar{d} \qquad (8.0)$$

S.à

$$
\begin{array}{llllll}
-\delta' C & + \pi' S + \sigma \bar{H} & & \geq \alpha C & (8.1) & (X') \\
\delta' P & & & \geq \alpha_T e & (8.2) & (V) \\
-\delta' E + \beta' & & & \geq -\alpha_T e' & (8.3) & (W) \\
\delta' & & -\lambda' & \geq 0 & (8.4) & (d) \\
\delta \geq 0, & \beta \geq 0, \ \pi \geq 0, \ \sigma \geq 0, \lambda \geq 0 & & & (8.5) &
\end{array}
$$

où les variables et paramètres ont la même signification que dans les modèles précédents, sauf que β va être un vecteur de $m(T+1)$ composantes β_{it}: prix d'ordre associé à la contrainte sur les emprunts possibles au taux d'intérêt r_{eit}.

Le programme dual exprime l'idée de déterminer le système des prix d'ordre utilisables pour évaluer adéquatement les ressources employées par les projets étudiés et/ou les coûts d'opportunité associés aux contraintes autres que sur les ressources, en respectant les contraintes suivantes:

(8.1): la VANA de chaque projet doit être acceptable compte tenu des relations d'interdépendance, éventuelles, entre projets,

(8.2): conditions des prêts, même interprétation que (6.2),

(8.3):
$$-\delta_t + (1+r_{eit})\delta_{t+1} + \beta_{it} \geq 0 \qquad (8.3.1)$$
$$-\delta_T + \beta_{iT} \geq -\alpha_T \qquad (8.3.2)$$

les conditions d'emprunts concernent alors chacun des segments de la courbe d'offre de chaque période, et non la période entière, comme il était le cas pour (6.3).

(8.4): $\delta_t - \lambda_t \geq 0$ contraintes concernant les conditions de distribution de dividendes.

5.3 Interprétation économique des variables duales

Les variables δ , π et σ ont les mêmes interprétations que dans les modèles précédents.

5.3.1 Les variables λ_t , $t = 0,1,\dots T$

Puisqu'à l'optimum, les fonctions objectifs des programmes primal et dual sont égales, alors nous pouvons utiliser l'expression de la fonction objectif du dual pour dégager une interprétation de λ_t:

$$\lambda_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial(-\bar{d}_t)} \qquad \text{ou} \qquad -\lambda_t = \frac{\partial \Lambda}{\partial \bar{d}_t}$$

c'est donc l'accroissement de la fonction objectif consécutif à une réduction, du niveau minimum des dividendes, d'une unité monétaire en t. Ou encore, c'est l'impact négatif qu'a la distribution d'une unité monétaire additionnelle sous forme de dividendes, sur la fonction objectif. Cet impact négatif s'explique par le fait que les dividendes distribués sont des sorties de fonds qui, au lieu d'être réutilisés par la firme, vont être utilisés par les propriétaires, sans aucun intérêt direct pour la firme.

5.3.2 Les variables β_{it}

De la même façon,

$\beta_{it} = \dfrac{\partial \Lambda}{\partial B_{it}}$: c'est l'accroissement marginal de la fonction objectif consécutif au desserrage marginal du plafond maximum des emprunts permis au taux d'intérêt reit applicable au segment "i" de la courbe d'offre de fonds sur la période t.

5.4 Relations entre les variables duales

Les contraintes (8.2) écrites pour une période t, donnent:

$$\delta_t - (1+r_{pt})\,\delta_{t+1} \geq 0 \qquad t = 0,1, \ldots . T-1 \qquad (8.2.1)$$
$$\delta_T \geq \alpha_T \qquad (8.2.3)$$

soit encore $(1+r_{pt})\delta_{t+1} \leq \delta_t$ et $\alpha_T \leq \delta_T$

et (8.3.1) donne:

$$\delta_t \leq (1+r_{eit})\,\delta_{t+1} + \beta_{it}, \text{ et } \alpha_T + \beta_{iT} \geq \delta_T$$

Donc:

$$(1+r_{pt})\,\delta_{t+1} \leq \delta_t \leq (1+r_{eit})\,\delta_{t+1} + \beta_{it}$$

pour i = 1,2, ... m et t = 0,1 ... T-1

et $\alpha_T \leq \delta_T \leq \alpha_T + \beta_{iT}$

Le prix d'ordre associé aux ressources budgétaires en t doit être au moins égal au rendement, qu'auraient apportés ces budgets si il s étaient prêté s au taux d'intérêt r_{pt}, évalué au prix d'ordre des disponibilités budgétaires en t+1, et au plus égal au coût, que coûteraient ces budgets si il s étaient emprunté s sur le marché au taux d'intérêt r_{eit} du segment "i" de la courbe d'offre de fonds de t, évalué au prix d'ordre des disponibilités budgétaires en t+1, plus une prime β_{it} reflétant le coût d'opportunité d'une contrainte, éventuelle, sur les emprunts à ce même taux d'intérêt r_{eit}.

Si $V_l > 0$ pour $l = t, t+1, \dots T.$, alors

$$\delta_t = (1+r_{pt})\delta_{t+1} = (1+r_{pt})(1+r_{pt+1})\delta_{t+2} \dots$$

$$= \prod_{l=t}^{T} (1+r_{pl})\delta_T \qquad (8.2.4)$$

et comme $V_T > 0$ implique $\delta_T = \alpha_T$, alors

$$\delta_t = \prod_{l=t}^{T} (1+r_{pl})\delta_T = \prod_{l=t}^{T} (1+r_{pl})\alpha_T$$

Si $W_l > 0$ pour $l = t, t+1, \dots T$, alors

$$\delta_t = (1+r_{eit})\delta_{t+1} + \beta_{it} \qquad i = 1, \dots m$$

$$\delta_T = \alpha_T + \beta_{iT} \qquad t = 0, \dots T-1$$

Supposons, pour simplifier, que le taux appliqué sur chaque année est unique. C'est-à-dire un seul segment de la courbe est concerné. Appelons, i_t, ce segment, dans ce cas on aura:

$$(8.3.4): \delta_t = \prod_{l=t}^{T} (1+r_{ei_l l})\delta_T + \sum_{l=t}^{T} \prod_{s=t}^{l} (1+r_{ei_s s})\beta_{i_l l}$$

Mais puisque un seul indice "i" est applicable par année, alors on peut confondre i_t et t ou encore r_{eit} et r_{et}, où r_{et} indique le taux d'intérêt effectif sur les emprunts de la période t.

Soit:

$$(8.3.4'): \delta_t = \prod_{l=t}^{T} (1+r_{el})\,\delta_T + \sum_{l=t+1}^{T} \prod_{s=t}^{l} (1+r_{es})\,\beta_l + \beta_l$$

Les nouvelles expression de δ_t entraînent des modifications au niveau des expressions des variables π_j où les δ_t peuventêtre remplacées par (8.2.4), (8.3.4) ou par aucune des deux, c'est-à-dire, par leurs valeurs calculées directement à partir des contraintes des disponibilités budgétaires, c'est le cas où les δ_t sont telles que:

$$(1+r_{pt})\delta_{t+1} < \delta_t < (1+r_{ei\,t})\delta_{t+1} + \beta_{it}$$

La contrainte (8.4) donne $\delta_t \geq \lambda_t$, soit pour $d_t > 0$, $\delta_t = \lambda_t$. La présence des dividendes implique que le coût de la non distribution est équivalent au prix d'ordre des disponibilités budgétaires à la période t.

5.5 Les variables duales et les décisions de la firme

5.5.1 Les décisions d'allocation

Les variables δ_t permettent de déterminer laquelle des périodes a le plus besoin des disponibilités budgétaires. C'est-à-dire, en cas de contraintes effectives, les δ_t permettent de repérer les contraintes à desserrer en priorité.

Les variables β_{it} permettent de déterminer l'opportunité d'un desserrage marginal des plafonds fixés sur les emprunts permis sur les différents segments de la courbe.

La variable σ peut nous renseigner sur l'opportunité d'un desserrage marginal de la contrainte sur la ressource physique.

Les variables λ_t permettent d'évaluer, du point de vue de la firme, les dividendes distribués sur la période t.

5.5.2 Les décisions des opérations financières

Les relations de complémentarité d'écarts associés aux contraintes (7.2), (8.2) et (8.3) écrites pour une période t, nous donnent:

$$(-\delta_t + (1+r_{pt})\delta_{t+1})V_t = 0 \qquad t-0, \ldots T-1 \qquad (8.6.1)$$

$$(\delta_t - (1+r_{eit})\delta_{t+1} + \beta_{it})W_{it} = 0 \qquad i=1, \ldots m \quad t=0, \ldots T-1 \qquad (8.7.1)$$

$$\beta_{it}\,(B_{it} - W_{it}) = 0; \qquad i=1, \ldots m \quad t=0, \ldots T \qquad (7.7.1)$$

et

$$(\alpha_T - \delta_T)\ V_T = 0 \qquad (8.6.2)$$

$$(-\alpha_T + \delta_T - \beta_{iT})\ W_{iT} - 0 \qquad i=1,2,\ldots m \qquad (8.7.2)$$

a) Les prêts

$V_t > 0$ implique, par (8.6.1), $\delta_t = (1+r_{pt})\delta_{t+1}$ les emprunts auront lieu seulement si l'utilisation interne des fonds prêtables n'offre pas un usage alternatif meilleur.

Supposons que le montant des emprunts, soit $Wi_t = B_{it}$ avec un besoin non satisfait d'une unité monétaire, dans ce cas:

$$\delta_t \geq (1+r_{ei\,t})\,\delta_{t+1} + \beta_{it}$$

et $\delta_t \leq (1+r_{ei+1t})\,\delta_{t+1} + \beta_{i+1t}$

Or $\beta_{i+1\,t} = 0$ pour $B_{i+1t} > B_{it} + 1$

donc, $(1+r_{ei\,t})\delta_{t+1} + \beta_{it} \leqslant \delta_t \leq (1+r_{ei+1\,t})\,\delta_{t+1}$ et puisque $\beta_{it} \geqslant 0$ alors on a aussi:

$$(1+r_{ei\,t})\delta_{t+1} \leq \delta_t \leq (1+r_{ei+1t})\,\delta_{t+1}$$

ou encore $r_{ei\,t} \leq \dfrac{\delta_t}{\delta_{t+1}} - 1 \leq r_{ei+1t}$

C'est-à-dire, pour des emprunts voisins des plafonds permis aux différents taux d'intérêt, le prix d'ordre des disponibilités budgétaires à la période t dépasse celui de la période t+1 d'un pourcentage compris entre les taux d'intérêts de deux segments consécutifs.

Si $\dfrac{\delta_t}{\delta_{t+1}} - 1 = r_{ei\,t} < r_{ei+1t}$ alors les emprunts seront faits sur le segment "i". Si $(1+r_{pt})\delta_{t+1} < \delta_t$ alors $V_t = 0$. Si le rendement des prêts au taux d'intérêt r_{pt}, évalué au prix d'ordre des disponibilités budgétaires en t+1, est inférieur au prix d'ordre des disponibilités budgétaires à la période t alors la firme choisira l'utilisation interne de ses fonds.

b) Les emprunts

$Wi_t > 0$ implique, par (8.7.1) $\delta_t = (1+r_{ei\,t})\delta_{t+1} + \beta_{it}$. La firme empruntera seulement si les besoins sont tels que le prix d'ordre des disponbilités budgétaires en t est suffisant pour couvrir les coûts, des emprunts au taux d'intérêt $r_{ei\,t}$, évalués au prix d'ordre des disponibilités budgétaires en t+1, plus le coût d'opportunité associé à la contrainte éventuelle sur les emprunts permis au taux d'intérêt $r_{ei\,t}$. Par conséquent, W_{it} sera nul si

$$\delta_t < (1+r_{ei\,t})\delta_{t+1} + \beta_{it} \qquad i=1, \ldots m \quad t=0, \ldots T-1$$

la courbe d'offre de fonds.

si $\dfrac{\delta_t}{\delta_{t+1}} - 1 = r_{ei+1\,t}$ les emprunts seront faits sur le segment (i+1), à un niveau inférieur ou égal au plafond permis.

En résumé, la firme va prêter si le taux d'intérêt du marché est tel que $r_{pt} = \frac{\delta_t}{\delta_{t+1}}$, elle va emprunter si $r_{ei\,t} = \frac{\delta_t}{\delta_{t+1}} - \frac{\beta_{it}}{\delta_{t+1}} - 1$ et se limitera à ses fonds internes si

$$(1+r_{pt}) < \frac{\delta_t}{\delta_{t+1}} < (1+r_{ei\,t}) + \frac{\beta_{it}}{\delta_{t+1}}$$

Pour ce qui est de la période T, on a:

$\alpha_T < \delta_T < \alpha_T + \beta i_T$, la firme prête si le coefficient d'actualisation appliqué en T est égal au prix d'ordre des disponibilités budgétaires en T. Elle emprunte si le prix d'ordre des disponibilités budgétaires en T est égal au coefficient d'actualisation de la même période majoré d'une prime égale au coût d'opportunité d'une contrainte éventuelle sur les emprunts permis.

5.5.3 <u>Les décisions de sélection des projets</u>

Les règles de décisions de sélection des projets restent semblables à celles dégagées à partir du modèle (5)-(6). Soit:

i) pour un projet indépendant, il sera accepté entier fractionnaire ou rejeté selon que sa VANA est positive, nulle ou négative.

ii) Pour un projet mutuellement exclusif avec d'autres, il sera accepté entier, fractionnaire ou rejeté selon que sa VANA est plus grande, égale ou inférieure à la plus grande VANA des autres variantes alternatives.

iii) Pour un projet dépendant, il sera accepté entier, fractionnaire ou rejeté selon que la somme de sa VANA plus celle du projet jugé "nécessaire" est strictement positive, nulle ou négative.

5.5.4 Les décisions de redistribution des dividendes

Les relations de complémentarité d'écarts associées aux contraintes (7.5) et (8.4) s'écrivent pour une période t:

$$(-\bar{d}_t + d_t)\lambda_t = 0 \qquad t=0,1,\dots T \qquad (7.8)$$
$$(\delta_t - \lambda_t)\, d_t = 0 \qquad (8.8)$$

donc si $\lambda_t < \delta_t$ alors, par (8.8), $d_t = 0$ c'est-à-dire la firme ne distribuera pas de dividendes si le coût occasionné par cette non distribution est inférieur au prix d'ordre des disponibilités budgétaires à la période t, cette situation conduit , par (7.8), soit à $\bar{d}_t = 0$ soit à $\lambda_t = 0$. C'est-à-dire, la firme s'abstiendra de distribuer les dividendes si le seuil minimum des dividendes fixé pour la période t est nul ou, si le coût d'opportunité de cette non redistribution est nul.

Si $\lambda_t > 0$, alors par (7.8), on a $d_t = \bar{d}_t$ la firme distribue le minimum nécessaire dès que le coût d'opportunité de la non distribution est strictement positif. Dans ce cas, si $d_t = \bar{d}_t > 0$, alors par (8.8), on a $\delta_t = \lambda_t$, la firme se limite au niveau minimum exigé si le coût d'opportunité λ_t est égal au prix d'ordre associé à la contrainte des disponibilités budgétaires à la période t.

Si $d_t > \bar{d}_t$ alors $\lambda_t = 0$, la firme n'encoure aucun coût d'opportunité si elle distribue un montant des dividendes supérieur au seuil minimum exigé. Dans ce cas aussi, par (8.8), si $\bar{d}_t > 0$ alors $\delta_t = 0$. C'est-à-dire, cette situation est possible lorsque la firme est en situation de disponibilités budgétaires excédentaires par rapport aux besoins. En résumé, la firme réutilise ses fonds si les propriétaires n'exigent pas de dividendes ou n'ont aucun pouvoir direct sur la firme ou, si la réutilisation interne rapporte suffisamment pour compenser le coût encouru pour ramener $\bar{d}_t$ à zéro. Elle distribue le minimum exigé si le coût encouru par le non redistribution compense exactement les bénéfices attendus de la réutilisation interne et enfin, distribue des montants plus élevés que les minima exigés en situation de budgets excédentaires par rapport aux besoins.

5.6 Impacts des nouvelles contraintes sur les décisions de la firme

Les nouvelles contraintes ont concerné essentiellement les opérations financières et la question des dividendes.

En ce qui concerne les opérations financières, l'introduction de la possibilité d'un taux d'intérêt sur les prêts inférieur à celui sur les emprunts a rendu incompatibles les prêts et emprunts même si les plafonds des emprunts ne sont pas atteints. Ceci constitue une différence avec les modèles précédents.

En effet,

$$(1+r_{pt})\delta_{t+1} \leqslant \delta_t \leq (1+r_{ei\,t})\delta_{t+1}$$

Si $r_{pt} < r_{eit}$, on ne peut avoir la double égalité. Ceci rend impossible la situation où $V_t > 0$ et $W_t > 0$.

Les nouvelles hypothèses sur la courbe d'offre de fonds ont rendu flexible la contrainte sur les plafonds d'emprunts permis. Moyennant l'acceptation de payer un taux d'intérêt plus élevé, la firme peut augmenter sensiblement ses disponibilités budgétaires, si les opportunités internes le permettent.

En ce qui concerne la question des dividendes, les autres modèles ont tout simplement ignoré cette question. Donc tout ce qui a été dit à propos de cette question est le résultat des nouvelles hypothèses et contraintes sur les dividendes.

5.7 Conclusion

Par ces nouvelles extensions, le modèle a permis de dégager des règles concernant les décisions d'allocation des ressources entre périodes et/ou projets, de sélection des projets, des opérations financières et enfin, de distribution des dividendes. Ce sont là les principales décisions qui concernent le budget du capital.

Cependant, tout ces résultats ont été basés sur des méthodes d'actuations avec des coefficients qui n'ont fait l'objet, jusque là d'aucune précision. Or la détermination de ces coefficients constitue un problème non moins important, témoin la littérature présentée au début de ce travail qui montre à quel point le problème d'actualisation est controversé. Dans l'étape suivante, nous allons aborder le problème, non pour lui apporter une solution définitive, mais plutôt pour discuter des possibilités que nous fournissent les modèles employés pour la détermination de ces coefficients d'actualisation.

Section 6

Les modèles mathématiques et la détermination du taux d'actualisation

6.0 Introduction

Quoiqu'au niveau de l'entreprise, la détermination du taux d'actualisation est relativement moins controversée que la détermination du taux d'escompte social, les tentatives faites pour déterminer ce taux de façon endogène par les modèles de programmation mathématique appliqués au domaine du budget de capital constituent l'un des principaux problèmes dont la solution reste contestée. Cette question avec celle de la détermination de la fonction objectif a occupé la plus grande partie des discussions de la revue de littérature présentée dans la deuxième section du premier chapitre.

6.1 Position du problème

Etant donné l'impact qu'a le niveau du taux d'actualisation sur les décisions de la firme, l'utilisation d'un taux inadéquat peut conduire à des solutions simultanées et cohérentes, mais non optimales. Autrement dit, l'utilisation d'un modèle généralise l'impact négatif d'un mauvais choix du taux d'actualisation. Ceci a conduit certains analystes à chercher des voies pour se débarrasser du caractère subjectif qui caractérise la détermination de ce taux. Et bien sûr, l'outil exploré, pour ce faire, est le modèle lui-même. D'autres, ce sont orientés vers la recherche de facteurs exogènes objectifs, évaluateurs de ce taux d'actualisation. Ces dernières tentatives ont proposé de calculer, de façon empirique, le coût du capital en tenant compte des différentes formes de financement de la firme et de leurs poids respectifs. Le taux obtenu peut être ajusté, au besoin, pour tenir compte du facteur incertitude. A ces tentatives, les tenants de l'approche par les modèles mathématiques, reprochent le fait qu'en situation de rationnements, les taux calculés à partir des facteurs exogènes ne reflètent pas les vraies opportunités ouvertes à la firme. Exemple, la firme peut chercher à emprunter, compte tenu de ses rendements marginaux, mais ne peut le faire à cause de ces rationnements; le taux d'intérêt du marché n'est plus adéquat dans cette situation. Ils proposent alors comme solution alternative, l'utilisation des prix d'ordres associés aux contraintes sur les ressources, qui sont de bons évaluateurs de ces ressources et, donc, dont l'utilisation conduirait à une solution optimale. C'est dans le cadre de cette dernière tentative que nous allons situer notre exposé sur la question.

6.2 Les modèles mathématiques et le taux d'actualisation

Certaines des tentatives, ayant essayé d'utiliser les modèles mathématiques pour dériver les taux d'actualisation, ont été présentées dans la revue de la littérature[1]. Dans la suite, nous allons essayer d'explorer les formulations enployées plus haut (modèle (1)-(2), (3)-(4) et (7)-(8) pour dériver des expressions possibles des taux d'actualisation. Le but essentiel est de déterminer les possibilités que nous offrent les variables duales, soit pour nous fournir ces taux d'actualisation de façon endogènes, soit pour nous renseigner sur les corrections à apporter à ces derniers avant de les utiliser.

6.2.1 Situation de rationnement rigide

Le modèle utilisé dans cette situation est (1)-(2). Il s'agit, ici, de déterminer les coefficients α_t du vecteur α.

---

[1] Notamment, les tentatives faites par Lusztig-Schwab (1968) qui ont proposé un processus itératif basé sur le taux de rentabilité du premier projet rejeté et sur l'analyse de la sensibilité de la solution optimale, par Carleton (1969) qui a proposé l'utilisation d'un Macro-modèle financier, par Whitemore-Amey (1973) qui ont essayé d'étendre le modèle de Lusztig-Schwab en procédant par un changement des variables de décisions et par un procédé itératif, par Burton-Damon (1974), qui ont montré que l'utilisation des prix d'ordre est équivalente à l'utilisation d'un taux d'actualisation nul, et par Bradley et al (1978) qui ont proposé d'utiliser le modèle pour des analyses partielles et d'utiliser des formules non actualisées.

Pour cela, nous allons utiliser le raisonnement marginaliste suivant: supposons que la firme dispose d'une unité monétaire extra au début de la période t. Elle a alors deux possibilités, soit d'utiliser pour desserrer la contrainte budgétaire de la période t, D_t, soit la garder oisive pendant une année et l'utiliser pour desserrer la contrainte de la période suivante, D_{t+1} .

Dans le premier cas, l'unité monétaire a un prix d'ordre δ_t. Dans le second cas, le prix d'ordre est δ_{t+1} .
Et, tenant compte du facteur d'actualisation, une unité monétaire en t est équivalente à $(1 + a_t)$ unités monétaires en t + 1. Les conditions d'efficacité des allocations budgétaires impliquent:

$$\delta_t = (1 + a_t)\,\delta_{t+1} \tag{6.1}$$

soit
$$\frac{1}{1+a_t} = \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} \tag{6.2}$$

et comme $\alpha_t = \prod_{\tau=0}^{t} \cdot \frac{1}{(1+a_\tau)}$

alors
$$\alpha_t = \frac{\delta_{t+1}}{\delta_0} \quad , \quad \delta_0 > 0^{1} \tag{6.3}$$

---

[1] δ_0 est associé à la contrainte sur D_0, qui est généralement saturée, en situation de rationnement, donc, $\delta_0 > 0$ est acceptable comme hypothèse.

Cependant, nous nous plaçons, pour le mo ment, dans une situation de rationnement rigide. Donc, les ajustements budgétaires ne sont pas permis et par conséquent, l'égalité $\delta_t = (1+a_t)\delta_{t+1}$ n'est plus assurée. Certains des δ_t peuvent être nuls indépendamment des autres. Or si pour t_0, $\delta_{to} = 0$, alors $\alpha_t = 0$ pour tout $t > t_o$

$$\text{En effet, } \alpha_t = \prod_{\tau=0}^{t} \frac{1}{1+a_\tau} = \prod_{t=1}^{t} \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t}$$

$$= \alpha_{to} \frac{\delta_{to+1}}{\delta_{to}} \cdot \frac{\delta_{to+2}}{\delta_{to+1}} \cdots\cdot \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t}$$

$$\text{or } \alpha_{to} = \frac{\delta_{to}}{\delta_{to-1}} = 0 \qquad \text{donc } \alpha_t = 0 \text{ si } t > t_0.$$

Cette situation particulière nous conduit à négliger tous les flux de revenus nets engendrés après la première année où un excédent budgétaire a été enregistré. Ce qui peut conduire à une sous optimisation du problème. C'est pourquoi, nous soutenons que, contrairement à ce qui a été soutenu par certains analystes, c'est justement en situation de rationnement rigide que le modèle n'est pas d'un grand secours pour calculer le taux d'actualisation. C 'est ce que nous allons essayer de prouver dans les paragraphes qui vont suivre.

6.2.2 Introduction des possibilités d'opérations financières et/ou transferts entre périodes

Nous avons vu, section 3 de ce chapitre, que sous ces hypothèses, les δ_t deviennent dépendants. Le modèle qui traduit cette situation est (3)-(4). Pour mieux saisir l'impact de ces nouvelles hypothèses, omettons, pour le moment, la contrainte $W \leq B$ (3.2). Ceci nous place dans une situation de marché parfait du capital. La double inégalité, qui traduit les contraintes (4.2) et (4.3) pour une période t: $(1+r)\delta_{t+1} \leqslant \delta_t \leq (1+r)\delta_{t+1} + \beta_t$, (6.4) se ramène, avec $\beta_t = 0$, à $\delta_t = (1+r)\delta_{t+1}$ (6.5). Puisque les ajustements sont devenus possibles, alors la condition d'allocation efficace des budgets, $\delta_t = (1+a_t)\delta_{t+1}$, est réalisable. Les relations (6.1) et (6.5) donnent:

$$\frac{1}{1+a_t} = \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} = \frac{1}{1+r} \quad \text{, ou encore} \quad r = a_t.$$

Donc, en situation du marché parfait du capital, le taux d'actualisation devrait être égal au taux d'intérêt du marché: $a_t = r$ pour tout t.

Si nous réintroduisons la contrainte omise, $W \leq B$, la double inégalité (6.4) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\delta_t - \beta_t \leq (1+r)\delta_{t+1} \leq \delta_t$$

ou encore: $$\frac{1}{(1+r)}\left(1 - \frac{\beta_t}{\delta_t}\right) \leq \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} \leq \frac{1}{(1+r)}$$

et la relation (6.1) nous donne $\frac{1}{1+a_t} = \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t}$

Plusieurs situations sont alors possibles:

a) $V_t > 0$ et $0 \leqslant W_t < B_t$ alors $\frac{1}{1+a_t} = \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} = \frac{1}{1+r}$

alors $a_t = r$.

b) si $\beta_t > 0$, alors $V_t = 0$ et

$$\frac{1}{1+a_t} = \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} = \frac{1}{1+r}\left(1 - \frac{\beta_t}{\delta_t}\right)$$

et comme $\frac{\beta_t}{\delta_t} \geqslant 0$ alors $\frac{1}{1+a_t} \leqslant \frac{1}{1+r}$

C'est-ã-dire $a_t \geqslant r$, la contrainte effective sur les emprunts devrait se traduire par un accroissement de la valeur du taux d'actualisation de la période en question[1].

c) si $\frac{1}{1+r}\left(1 - \frac{\beta_t}{t}\right) < \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} < \frac{1}{1+r}$, alors $a_t = \frac{\delta_t}{\delta_{t+1}} - 1$

---

[1] Ce résultat confirme la proposition faite, dans le même sens, par Levy-Lambert et Dupuy p.131.

Donc le taux d'actualisation pour une période t sera donné par le taux d'intérêt du marché si la firme prête ou emprunte un montant inférieur au plafond fixé, par ce taux du marché, majoré pour tenir compte de la contrainte effective sur les emprunts, et enfin, par le rapport des prix d'ordres des disponibilités budgétaires, si aucune opération financière n'est optimale pour la firme.

Ceci montre que les possibilités des ajustements budgétaires ont rendu possible, l'utilisation des prix d'ordre pour dériver les taux d'actualisation. Ces taux peuvent varier entre périodes et seront donnés par a, b ou c, selon la situation qui se présente.

6.2.3 Introduction de l'hypothèse de marchés imparfaits des capitaux

Nous nous plaçons dans les conditions de la section 5 de ce chapitre. C'est-à-dire, le taux d'intérêt sur les prêts, r_{pt}, est inférieur ou égal au taux d'intérêt sur les emprunts et, la courbe d'offre de fonds est croissante avec r_{eit}: comme taux d'intérêt sur les emprunts effectués sur le segment "i" de la courbe d'offre de fonds de la période t, et enfin une contrainte sur les plafonds permis sur chaque segment:

$W_{it} \leq B_{it}$ $\qquad$ $i = 1, \ldots m, \quad t = 0, \ldots T.$

Le raisonnement applicable ici est le même que celui utilisé plus haut, les résultats sont, cependant, plus nuancés. Les conditions des opérations financières sont alors:

$$(1+r_{pt})\,\delta_{t+1} \leq \delta_t \leq (1+r_{eit})\,\delta_{t+1} + \beta_{it}$$

ou transformées, pour les besoins de faire apparaître le rapport adéquat des prix d'ordre, elles s'écrivent:

$$\frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} \leq \frac{1}{1+r_{pt}}$$

$$\frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} \geq \frac{1}{1+r_{eit}}\left(1 - \frac{\beta_{it}}{\delta_t}\right)$$

et (6.1) donne $\dfrac{1}{1+a_t} = \dfrac{\delta_{t+1}}{\delta_t}$

Les différentes situations possibles sont:

a) Si $V_t > 0$ alors $\dfrac{1}{1+a_t} = \dfrac{\delta_{t+1}}{\delta_t} = \dfrac{1}{1+r_{pt}}$

Si la firme prête des fonds à la période t, elle doit utiliser, sur cette période, un taux d'actualisation égal au taux d'intérêt sur ces prêts, r_{pt}.

b) Si $0 \leq W_{it} < B_{it}$ alors $\dfrac{1}{1+a_t} = \dfrac{\delta_{t+1}}{\delta_t} = \dfrac{1}{1+r_{eit}}$

Si l'entreprise enprunte sur la période t, son taux d'actualisation sur cette période devrait être égal au taux d'intérêt sur ces emprunts, r_{eit}.

Si $r_{pt} < r_{eit}$, alors les prêts et emprunts sont incompatibles donc une seule des situations a et b est possible.

c) Si $\beta_{it} > 0$ alors $\frac{1}{1+a_t} = \frac{\delta_{t+1}}{\delta_t} = \frac{1}{1+r_{eit}}\left(1 - \frac{\beta_{it}}{\delta_t}\right)$

ou encore en utilisant la relation

$$\delta_t = (1+r_{eit})\,\delta_{t+1} + \beta_{it}\,,$$

$$(1+a_t) = \frac{\delta_t}{\delta_{t+1}} = (1+r_{eit}) + \frac{\beta_{it}}{\delta_{t+1}}$$

Donc en situation de contrainte sur les emprunts, le taux d'actualisation est égal au taux d'intérêt sur les emprunts en t, majoré d'une valeur positive, $\frac{\beta_{it}}{\delta_{t+1}}$, proportionnelle à la pertinence de la contrainte, reflétée par β_{it}, et inversement proportionnelle au prix d'ordre des disponibilités budgétaires sur la période $t+1$.

d) Si $(1+r_{pt})\,\delta_{t+1} < \delta_t < (1+r_{eit})\,\delta_{t+1} + \beta_{it}$, la firme ne fait pas d'opérations financières en t et le taux d'actualisation en t sera donné par $a_t = \frac{\delta_t}{\delta_{t+1}} - 1$

6.3 Conclusion

Les résultats ci-dessus nous ont permis de constater que les prix d'ordre peuvent servir pour déterminer le taux d'actualisation. Pour cela, il suffit que la firme soit capable d'ajuster ses disponibilités budgétaires sur les différentes périodes. es ajustements permettent aux variables duales de tenir compte des différentes contraintes pertinentes et/ou des opportunités ouvertes à la firme.

Cependant, les taux d'actualisation calculés à partir de ces variables duales ne diffèrent des taux d'intérêts du marché qu'en situations de contraintes effectives sur les emprunts. Auxquels cas, il faut utiliser le taux d'intérêt, sur les emprunts, majoré d'une valeur positive pour tenir compte de ces contraintes effectives. Donc, l'utilisation de facteurs exogènes, ajustés au besoin, pour déterminer les taux d'actualisation peut conduire à des résultats optima. Dans le cas particulier où la firme s'abstient de faire des opérations financières, elle peut utiliser, suivant son attitude vis-à-vis des deux possibilités d'opérations, le taux sur les prêts, le taux sur les emprunts ou une moyenne des deux taux.

L'avantage de ces méthodes est qu'elles permettent, tout en restant très proches des méthodes de détermination endogènes du taux d'actualisation, d'éviter le cercle vicieux: variables duales optimales — taux d'actualisation.

Chapitre III

Illustration numérique

Introcuction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser un exemple numérique simple pour illustrer les différents résultats et conclusions dégagés à partir des modèles analysés au chapitre II. Dans une première section, nous allons exposer la méthodologie suivie pour construire l'exemple numérique et les hypothèses relatives à cette construction. Dans une seconde section, nous allons présenter les résultats obtenus et enfin nous allons discuter l'impact des contraintes introduites sur les décisions de la firme. Les tableaux numériques sont présentés en annexes B et C.

Section 1 - La méthodologie

Nous allons considérer un échantillon de cinq projets de durée de vie variant entre 3 et 6 ans. Les périodes de démarrage sont étalées sur les trois premières années. Le nombre de variables, dans les différents modèles, varie entre 16 et 59. Les données numériques sont présentées en appendice B-1.

1.1 Hypothèses relatives au modèle (1)-(2)

Nous allons utiliser un taux d'actualisation de 10%. Les montants de budgets disponibles sur chaque période sont présentés en appendice B-2.

1.2 Hypothèses relatives au modèle (3)-(4)

Pour permettre la comparaison des modèles nous allons partir des hypothèses du modèle (1)-(2). En plus, nous allons introduire les possibilités des opérations financières. Les prêts et emprunts seront effectués au même taux d'intérêt de 10%. Les emprunts sur chaque période ne peuvent pas dépasser le plafond maximum de trois unités monétaires.

1.3 Hypothèses relatives au modèle (5)-(6)

En plus des hypothèses des modèles précédents, nous allons introduire les contraintes d'interdépendance des projets en permettant au projet 1 de se réaliser soit à la période 0, soit à la période 2, et en imposant la réalisation du projet 2 comme condition préalable à la réalisation du projet 3. En plus, une contrainte sur les ressources physiques sera introduite. Les données relatives à cette nouvelle contrainte sont présentées en appendice B-3.

1.4 Hypothèses relatives au modèle (7)-(8)

Nous allons partir des hypothèses du modèle (5)-(6), en modifiant les hypothèses concernant les opérations financières et en introduisant de nouvelles contraintes sur les dividendes. Ainsi, les prêts seront effectués au taux d'intérêt de 8% et les emprunts seront effectués à 10% si les montants empruntés ne dépassent pas 3 unités monétaires et à 12% si ces montants dépassent 3 unités sans toutefois dépasser le maximum de 5 unités monétaires par période. Les contraintes sur les dividendes seront traduites par des seuils minima des montants distribuables sur chaque période. Ces seuils sont présentés en appendice B-4.

1.5 Hypothèses complémentaires

Pour permettre une illustration de toutes les conclusions concernant les interdépendances des projets,et aussi pour rendre effective la contrainte sur les ressources physiques, nous allons reprendre la résolution du modèle (7)-(8), en remplaçant 10, revenu net engendré par le projet 2 à la période 6, par 20.

Section 2 - Présentation des résultats obtenus

L'utilisation du modèle (1)-(2) a permis de retenir entiers les projets 1, 3 et 5, de retenir 62.5% du projet 4 et de rejeter le projet 2. Les π_j associés aux projets retenus traduisent bien le critère VANA (valeur actuelle nette ajustée) utilisé dans les différentes sections du chapitre II pour sélectionner les projets. En effet, nous avons vu que $VANA_j = C'C^j + \delta'C^j$. Or seul δ_0 est positif, les autres sont tous nuls, $\delta_0 = 0.1785$. Ceci donne

$$\pi_1 = 1.8737 = 3.6587 - 10 \times 0.1785 = VANA_1$$

$$\pi_3 = 3.4134 = 5.1984 - 10 \times 0.1785 = VANA_3$$

$$\pi_4 = 0 \qquad = 2.8566 - 16 \times 0.1785 = VANA_4$$

$$\pi_5 = 2.664 = 2.664 - 0 \times 0.1785 = VANA_5$$

et pour le projet 2, rejeté, on a $\pi_2 = 0$ et sa VANA $= -6.6890 - 0 \times 0.1785 = -6.890 < 0$. De même nous constatons qu'effectivement, les δ_t sont indépendants entre eux sous les hypothèses du modèles (1)-(2). Les montants non utilisés sur les différentes périodes ne sont pas compris dans la valeur de la fonction objectif qui est de 13.3065. Les résultats numériques complets sont présentés en appendice C-1.

Avec l'introduction des possibilités des opérations financières, le modèle (3)-(4) a conduit à retenir entiers les projets 1, 3 et 5, 81.25% du projet 4 et à rejeter le projet 2. Les π_j (ou $VANA_j$) sont de 3.9599, 7.0405, 0 et 5.3280 pour les projets 1, 3, 4 et 5 respectivement. Pour le projet 2, on a $\pi_2 = 0$ et $VANA_2 = -13.3720$.

La firme emprunte le maximum permis sur la période 0, soit 3 unités monétaires. Le prix d'ordre associé à la contrainte sur les emprunts est $\beta_0 = 0.3575$. Elle prête les montants de 27.45, 38.0075, 115.8141 et 135.5904 sur les périodes 1, 2, 3, 4 et 5 respectivement. Les prix d'ordre associés aux contraintes budgétaires sont tous positifs et vérifient bien la relation (4.6) de la section 3 du chapitre II, $\delta_t = (1+r)\delta_{t+1} + \beta_t$. Soit $\delta_t = (1+r)\delta_{t+1}$ pour $t = 1, 2, 3, 4, 5$, ($\beta_t = 0$), et $\delta_0 = (1+r)\delta_1 + \beta_0$ pour la période 0. Ces valeurs sont de 1.3575 $\left(= (1+0.1)\ 0.9091 + 0.3575\right)$, 0.9091, 0.8264, 0.7513, 0.6830 et 0.6209 pour les périodes 0, 1, 2, 3, 4 et 5 respectivement. On constate que sauf pour la période 0, les prix d'ordre associés aux contraintes des disponibilités budgétaires sont donnés par les coefficients d'actualisation au taux d'intérêt sur les prêts. Ceci s'explique par le fait que les fonds marginaux disponibles sur ces périodes sont utilisés par la firme dans les opérations de prêts. Tous les flux de revenus engendrés par les projets sont compris dans la valeur de la fonction objectif devenue égale à 99.9329. Les résultats complets sont présentés en appendice C-2.

Avec l'introduction des situations d'interdépendance des projets et de la contrainte sur la ressource physique, le modèle (5)-(6) a permis de dégager les résultats suivants :

retenir entiers les projets 11, 4 et 5, et rejeter les autres, 1.2, 2 et 3. Les π_j associés sont de 7.3769, 7.2533 et 5.4375 pour les projets 11, 4 et 5 respectifs, de 0 et 10.5343 pour les projets respectifs 2 et 3. Les VANA associées aux projets 1.2 et 2 sont 6.2166 et -1.3155. Rappelons que $VANA_2 = \pi_3 + \alpha c^2 + \delta' c^2$ donc $\alpha c^2 + \delta' c^2 = -13.7498$. Ceci nous permet de constater qu'en situations d'interdépendance, le critère de la VANA positive n'est pas suffisant pour retenir les projets. La variante 1.2 a été rejetée avec une $VANA_{12} = 6.2166$, car en situation de "projets mutuellement exclusifs" c'est la VANA la plus grande qui l'emporte, $VANA_{11} = 7.3769$, dans notre exemple. En situation de "projets dépendants", le projet dépendant, 3, devrait combler le déficit du projet nécessaire, 2. Ce qui n'est pas le cas ici, puisque malgré que le projet 3 était classé premier par rapport à sa propre VANA, il a été rejeté à cause de sa dépendance du projet 2, trop déficitaire.

La firme prête des fonds sur toutes les périodes, les emprunts sont nuls sur toutes les périodes de même que les prix d'ordre associés aux contraintes sur ces emprunts sont nuls. Les prix d'ordre associés aux contraintes sur les disponibilités budgétaires sur les différentes périodes sont donnés par

la relation (4.6) : $\delta_t = (1+r)\,\delta_{t+1}$, ($\beta_t = 0$) soit 1, 0.9091, 0.8264, 0.7513, 0.6830 et 0.6209 pour t = 0, 1, 2, 3, 4 et 5 respectivement. La contrainte sur la ressource physique n'est pas effective, le prix d'ordre associé est donc nul, $\sigma = 0$.
La valeur de la fonction objectif est $Z = 83.0729$. Les résultats complets sont présentés en appendice C-3.

Avec l'introduction des dividendes et des contraintes associés et la modification des hypothèses sur les marchés financiers, le modèle (7)-(8) a donné les résultats suivants :

Les projets 1.1, 4 et 5 sont retenus entiers, les projets 1.2, 2 et 3 sont rejetés;les raisons sont les mêmes que celles exposées plus haut pour le modèle (5)-(6). La firme demeure prêteuse sur toutes les périodes, les emprunts et les prix d'ordre associés sont nuls. Les valeurs de δ_t sont modifiées par suite à la modification du taux d'intérêt sur les prêts qui est passé de 10% à 8%.
Ces δ_t sont donnés par $\delta_t = (1+r)^{T-t}\,\delta_T$
Or, nous savons, (4.5.2) que $V_T > 0$ implique $\delta_T = \alpha_T$ or α_T est calculé sur la base d'un taux de 10%, soit dans notre cas $\alpha_5 = \delta_5 = 0.6209$, ce qui donne aux δ_t les valeurs de 0.9123, 0.8447, 0.7821, 0.7242, 0.6706 et 0.6209 pour les périodes 0, 1, 2, 3, 4 et 5 respectivement.
Les montants des dividendes distribués sont limités aux seuils minima nécessaires soit 0, 0, 10, 15, 20 et 25 pour les pério-

des respectives o, 1, 2, 3, 4, 5. Les prix d'ordre associés à ces contraintes sont identiques aux δ_t sur les différentes périodes. La contrainte de ressource physique n'est pas effective, $\sigma = 0$, et la valeur de la fonction objectif est $Z = 32.3557$. Les résultats complets sont présentés en appendice C-4.

Pour rendre effective la contrainte sur la ressource physique, nous avons modifié le flux du revenu net engendré par le projet 2 sur la période 5, nous l'avons porté de 10 à 20 unités monétaires, ce qui donne une $VAN_2 = -0.48$ au lieu de -6.6890. Avec cette modification, le modèle (7)-(8) a donné les résultats suivants :

Retenir entiers les projets 1.1, 2, 3 et 5, retenir 50% du projet 4 et rejeter 1.2. Les π_j associés sont de 3.6745, 0, 4.9827, 0 et 3.5887 pour les projets 1.1, 2, 3, 4 et 5 respectivement. La VAN_{12} est de 2.5105. Donc le projet 3 est arrivé à peine à soutenir le projet 2 entier. Les conclusions concernant les opérations financières et les dividendes sont semblables à celles obtenues avec les données initiales, seules les valeurs ont changé. La contrainte sur la ressource physique est devenue effective, $\sigma = 1.8493$. Les résultats complets sont présentés en appendice C-5.

Section 3

Impacts des contraintes sur les décisions de chacun des modèles utilisés

L'exemple numérique a permis de confirmer l'ensemble des règles et conclusions tirées à partir des modèles théoriques utilisés. Sous le rationnement rigide les δ_t sont indépendants, les VAN ne sont pas suffisantes pour sélectionner les projets. Le critère que nous avons appelé VANA, valeur actuelle nette ajustée, a permis des résultats meilleurs.

Avec les possibilités d'opérations financières, les δ_t sont devenus interdépendants, les prêts et emprunts sont exclusifs lorsque la contrainte sur les emprunts est effective. Cette situation est réalisée à la période 0, le prix d'ordre associé à la contrainte sur les emprunts de cette période est majoré d'une valeur égale au prix d'ordre β_0.

$$\delta_0 = (1+r)\delta_1 + \beta_0 = (1+0.1) \times 0.9091 + 0.3575 = 1.3575$$

La valeur de la fonction objectif comprend, en plus des VAN des projets retenus, la valeurs actualisée des flux de revenus nets engendrés par les projets et de leur rendement sur le marché financier.

Avec les contraintes d'interdépendance des projets, nous avons pu constater que le critère de la VANA n'est plus suffisant. C'est-à-dire, des projets avec des VANA positives peuvent être rejetés s'ils sont des variantes exclusives à une alternative retenue. C'est le cas de la variante 1_2 du projet 1, qui a été rejetée au profit de la variante 1.1; de même des projets avec des VANA négatives peuvent être retenus s'ils s'avèrent nécessaires pour la réalisation de projets ayant des VANA suffisantes pour compenser le déficit des premiers. C'est le cas du projet 2 qui a été supporté par le projet, avec les données modifiées (appendice C-5). Pour les projets indépendants, le critère de la VANA reste applicable.

Avec la contrainte sur la ressource physique, les VANA des projets sont diminuées proportionnellement aux quantités employées de cette ressource. Des projets acceptables entiers en l'absence de cette contrainte peuvent être acceptés fractionnaires ou même rejetés. C'est le cas du projet 4 dans notre exemple (appendice C-5).

Et enfin, avec les contraintes sur les dividendes, les montants des prêts ont diminué en conséquence. La diminution des prêts est plus grande que les niveaux des dividendes distribués, à cause des rendements qu'auraient occasionnés ces dividendes s'ils n'étaient pas distribués. Ceci explique pourquoi les niveaux de dividendes distribués sont limités aux seuils minima nécessaires.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le but de cet exposé était d'essayer de déterminer l'impact des contraintes sur les décisions de l'entreprise. Les variables de décisions utilisées sont les prix d'ordre associés à ces contraintes dans un modèle de programmation linéaire déterministe. C'est ainsi que nous avons pu constater que le critère de la valeur actuelle nette (au sens strict du terme) perd son efficacité en présence des contraintes effectives; c'est-à-dire, des projets acceptables avec le critère de la VAN peuvent être rejetés par suite aux ajustements rendus nécessaires par la présence des contraintes.,

Les possibilités des opérations financières ont permis de dériver des règles de décisions concernant ces opérations. Les contraintes sur les emprunts ont un impact non seulement sur la valeur de la fonction objectif, mais aussi sur les valeurs des autres variables duales. Les ajustements consécutifs peuvent affecter les décisions de sélection des projets.

L'introduction des relations d'interdépendance des projets a pour effet de dévoiler les limites de l'efficacité du critère de la VANA, c'est-à-dire, des relations de "solidarité" entre projets peuvent conduire à l'acception des projets avec des VANA négatives, et inversement des relations d' exclusions peuvent conduire à rejeter des projets avec des VANA positives. La contrainte sur la ressource physique peut conduire à des ajustements supplémentaires de la VAN et par conséquent affecter les décisions de sélection des projets. Les contraintes sur les dividendes ont permis de dégager les règles de redistribution de ces dividendes.

Les modèles utilisés permettent de déterminer de façon endogène, des taux d'actualisation optima. Nous avons vu que la présence de contrainte effective sur les emprunts d'une période devrait se traduire par un accroissement de la valeur du taux d'actualisation de la période en question.

L'exemple numérique nous a permis d'illustrer les différentes règles et conclusions dégagées à partir des modèles théoriques utilisés.

Cependant la valeur de ces conclusions reste dépendante des hypothèses utilisées, qui sont plus ou moins simplificatrices de la réalité. Nous avons essayé, tout au long de l'exposé, d'écarter certaines de ces hypothèses. D'autres, non moins importantes, restent à écarter. Signalons, à titre d'exemples, les moyens de financement peuvent être diversifiés : actions, obligations, emprunts à court, moyen et/ou long terme. L'hypothèse de certitude peut être critiquée puisque les flux de revenus nets ne sont que des prévisions, c'est-à-dire, loin d'être certains. L'hypothèse de linéarité peut être contestée, au moins pour certains facteurs, exemple le facteur direction que nous avons mentionné à la section 4 du chapitre II. En d'autres mots, nos conclusions doivent être considérées dans le contexte des hypothèses de base des modèles utilisés.

Appendice A

Notation utilisée au chapitre II

1. Variables principales

X : Vecteur de n composantes x_j : fraction retenue du projet j. $j = 1, 2, \ldots n$.

X' : Vecteur de (n+1) composantes, identiques à celles de X pour $j = 2, 3 \ldots n$ et, dont x_1 est remplacé par x_{11} et x_{12}.

V : Vecteur de (T+1) composantes V_t : montant disponible à la période t pour être prêté une année.

W : Vecteur de m (T+1) composantes W_{it} : montant emprunté sur le segment "i" de la courbe d'offre de fonds à la période t.

Si $m = 1$, W sera un vecteur de (t+1) composantes W_t : montant emprunté sur la période t.

d : Vecteur de (t+1) composantes d_t : montant de dividendes distribués aux actionnaires sur la période t.

2. Coefficients, contraintes et variables duales

C : Matrice (t+1) x n d'élément c_{tj} : flux net de liquidités engendrées par le projet j au cours de la période t.

α : Vecteur de (t+1) composantes α_t : coefficient d'actualisation permettant d'exprimer les flux engendrés à la période t en unité monétaire de la période, 0 :

$\alpha_t = \prod_{\tau=0}^{t} \frac{1}{1+a_\tau}$ où a_τ : taux d'actualisation de la période t.

D : Vecteur de (T+1) composante D_t : montant maximum des liquidités internes à l'entreprise, mais provenant de sources autres que les projets étudiés, disponibles à la période t.

δ : Vecteur de (T+1) composantes δ_t : prix d'ordre des disponibilités budgétaires de la période t, D_t.

P : Matrice ((T+1) x (T+1)) des effets des opérations de prêts, permettant de calculer le montant des prêts nets de recouvrements et intérêts sur chaque période t, $t = 0, 1, \ldots T$.

r_{pt} : Taux d'intérêt sur les prêts de l'année t.

N.B.- Si r_{pt} est constant sur les différentes périodes, on utilise r au lieu de r_{pt}.

E : Matrice (T+1) x m(T+1) des effets des opérations des emprunts, permettant de calculer le montant des emprunts nets de remboursements et intérêts sur les différents segments "i" de la courbe d'offre de fonds de la période t.

r_{eit}: Taux d'intérêt sur les emprunts effectués sur le segment "i" de la courbe d'offre de fonds de la période t : $r_{ei-1t} < r_{eit} < r_{ei+1}$ t.

N.B.- Si r_{eit} est constant, on le note r et la matrice E sera notée P.

B : Vecteur de m(T+1) composantes, B_{it}: montant maximum qu'il est possible d'emprunter sur le segment i de la courbe d'offre de fonds de la période t, $i = 1, 2 \ldots m$

$t = 0, 1, \ldots T$.

N.B.- Si $m = 1$ ($r_{eit} = r$) alors B devient un vecteur de $(T+1)$ composantes, B_t.

β : Vecteur de $m(T+1)$ composantes β_{it} : prix d'ordre associé à la contrainte B_{it} sur les emprunts permis sur le segment "i" de la courbe d'offre de fonds à la période t.

Si $m = 1$ ($r_{eit} = r$) le vecteur β aura $(T+1)$ composantes β_t.

S : Matrice de $n \times (n+1)$ d'éléments, traduisant les relations d'interdépendances, éventuelles, entre les différents projets étudiés (la structure de la matrice est explicitée à la section 4).

L : Vecteur de n composantes, traduisant les bornes supérieures permissibles sur les différents projets et/ou combinaisons de projets.

Si tous les projets sont indépendants, L sera noté par ι : vecteur de n composantes toutes égales à l'unité.

π : Vecteur de n composantes, π_j : prix d'ordre associé à la contrainte de borne supérieure imposée sur le projet j, ou sur la combinaison d'interdépendance concernant ce projet j.

H : Matrice de $(T+1)(n+1)$ d'éléments, h_{tj} quantité de la ressource physique utilisable par le projet j durant la période t. Sous l'hypothèse h_{tj} = constante pour tout t, H sera égale à $\overline{H}$ vecteur de (n+1) composante

$\overline{h}_j$: quantité de la ressource physique utilisable par le projet j.

R : Vecteur de (t+1) composantes R_t : quantité maximum de la ressource physique, disponible à la période t pour être utilisée par les différents projets retenus. Si R_t = constante, R = $\overline{R}$.

σ : Prix d'ordre associé aux disponibilités $\overline{R}$ de la ressource physique.

$\overline{d}$: Vecteur de (T+1) composantes $\overline{d}_t$: montant minimum des dividendes distribuables en t.

λ : Vecteur de (t+1) composantes λ_t : prix d'ordre associés aux dividendes distribués sur la période t.

3. Les fonctions objectif

Z : Désigne la fonction objectif du programme primal.

Λ : Désigne la fonction objectif du programme dual.

4. Les indices

j : Indice du projet j $\quad j = 1, 2, \ldots n$

ji : Indice de la variante i du projet j, $i = 1, 2, \ldots I$

t : Indice de la période t, $t = 0, 1, \ldots T$

l : Indice d'une période postérieure t, $l = t, t-1, \ldots T$

τ : Indice d'une période antérieure à t, $\tau = 0, 1 \ldots t$.

i : Indice du segment "i" de la courbe d'offre de fonds $i = 1, 2, \ldots m$

5. Autres notations

VAN : Valeur actuelle nette.

VANA: Valeur actuelle nette ajoutée.

Appendice B

Les données numériques de l'exemple d'illustration

B-1 Les flux des revenus nets des projets sur les différentes périodes.

j \ t	0	1	2	3	4	5
1	-10	8	5	3	0	0
2		-25	-10	15	10	10
3	-10	6	5	4	2	2
4	-16	-4	-15	20	20	10
5			-10	10	5	0

B-2 Les disponibilités budgétaires D_t sur les différentes périodes.

t	0	1	2	3	4	5
D_t	30	20	20	0	0	0

B-3 Les données concernant l'utilisation de la ressource physique par les projets.

j	1	2	3	4	5	Disponibilités R
h_j	2	3	3	1	1	9.5

B-4 Les seuils minima des dividendes distribuables sur chaque période.

t	0	1	2	3	4	5
d_t	0	0	10	15	20	25

B-5 Les valeurs actuelles nettes des projets, coefficients de la fonction objectif.

j	11	12	2	3	4	5
VAN	3.6587	3.0241	-6.689	5.1984	2.8566	2.664
rang	2	3	6	1	4	5

Appendice C

Les résultats numériques obtenus par les différents modèles

C-1 Le modèle (1) - (2)

j	x_j	π_j	rang
1	1	1.8737	3
2	0	0	5
3	1	3.4134	1
4	0.625	0	4
5	1	2.664	2

$VANA_2$ - 6.6890

t	δ_t	Montants non utilisés
0	0.1785	0
1	0	31.50
2	0	10.625
3	0	29.50
4	0	29.50
5	0	8.25

$Z \simeq 13.3065$

C-2 Le modèle (3) - (5)

j	x_j	π_j	rang
1	1	3.9599	3
2	0	0	5
3	1	7.0405	1
4	0.8125	0	4
5	1	5.3280	2

$VANA_2 = - 13.3720$

t	V_t	W_t	β_t	ε_t
0	0	3	0.3575	1.3575
1	27.45	0	0	0.9091
2	38.0075	0	0	0.8264
3	75.0583	0	0	0.7513
4	115.8141	0	0	0.6830
5	135.5904	0	0	0.6209

$Z = 99.9329$

C-3 <u>Modèle (5) - (6)</u>

j	x_j	π_j	rang
1.1	1	7.3174	2
1.2	0	-	-
2	0	0	5
3	0	10.3968	1
4	1	5.7132	3
5	1	5.3280	4

$VANA_{1.2} = 6.0482$

$VANA_2 = -13.3780$

t	V_t	W_t	β_t	δ_t
0	4	0	0	1
1	28.4	0	0	0.9091
2	31.24	0	0	0.8264
3	67.364	0	0	0.7513
4	99.1004	0	0	0.6830
5	119.0104	0	0	0.6209

$Z = 83.0729$, $\sigma = 0$

C-4 <u>Le modèle (7)-(8)</u>

j	x_j	π_j	rang
1.1	1	7.3769	2
1.2	0	-	-
2	0	0	5
3	0	10.5343	1
4	1	7.2533	3
5	1	5.4375	4

$VANA_{1.2} = 6.2166$

$VANA_2 = - 1.3155$

t	V_t	Wi_t $i=1.2$	βi_t $i=1.2$	δ_t	d_t	λ_t
0	4	0	0	0.9123	0	0
1	28.32	0	0	0.8447	0	0
2	20.58	0	0	0.7821	10	0.7821
3	40.2324	0	0	0.7242	15	0.7242
4	48.4510	0	0	0.6706	20	0.6706
5	37.3271	0	0	0.6209	25	0.6209

$\sigma = 0$

$Z = 32.3557$

C-5 Le modèle (7)-(8) avec modification des données

j	x_j	π_j	rang
1.1	1	3.6745	2
1.2	0	-	-
2	1	0	4
3	1	4.9827	1
4	0.5	0	5
5	1	3.5887	3

$$VANA_{1.2} = 2.5105$$

t	V_t	W_{it} $i=1.2$	β_{it} $i=1.2$	δ_t	d_t	λ_t
0	2	0	0	0.9123	0	0
1	9.16	0	0	0.8447	0	0
2	2.3928	0	0	0.7821	10	0.7821
3	29.5842	0	0	0.7242	15	0.7242
4	38.9509	0	0	0.6706	20	0.6706
5	44.0672	0	0	0.6209	25	0.6209

$$\sigma = 1.8493$$

$$z = 39.8308$$

Appendice D

Récapitulation des modèles présentés dans la revue de la littérature

Auteur(s)	Lorie-Savage (L-S) (1955)	Weingartner (1963) Formulation du problème de L-S	Weingartner (1963) Nouvelles formulations proposées
Fonction objectif	$y_j - \sum_{t=1}^{2} \rho_t C_{tj}$ (1.0)	$\sum_{j=1}^{n} b_j X_j$ (2.0)	$\sum_{j=1}^{n} \hat{b}_j X_j + V_T - W_T$ (3.0)
Contraintes budgétaires (ρ_t)	non formulées	$\sum_{t=1}^{n} C_{tj} X_j \leq D_t$ (2.1)	1) soit $\sum_{j=1}^{n} C_{tj} X_j + V_t - (1+r) V_{t-1} - W_t + (1+r) W_{t-1} \leq D_t$ (3.1) $\sum_{j=1}^{n} C_{1j} X_j + V_1 - W_1 \leq D_1$ 2) ou (3.1) et (3.1) $W_t \leq B_t$ 3) ou $\sum_{j=1}^{n} C_{tj} X_j + V_t - (1+r) V_{t-1} - \sum_{i=1}^{m} \left[W_{it} - (1+r) W_{it-1} \right] \leq D_t$ (3.1)" $\sum_{j=1}^{n} C_{1j} X_j + V_1 - W_1 \leq D_1$ $W_{it} \leq B_{it}$
Contraintes de non multiplicité des projets	$0 \leq X_j \leq 1$	$0 \leq X_j$ 1 (2.2)	idem (2.2)
Taux d'actualisation	donné	donné	donné

Appendice D

Récapitulation des modèles présentés dans la revue de la littérature (Suite)

Auteur(s)	Baumol-Quandt (1965)	Weingartner (1966)	Bernhard (1969)	Whitemore-Amey (1973)
Fonction objectif	$\sum_{t=1}^{T} U_t d_t$ (4.0)	d_T (5.0)	$f(d_1, d_2, .. d_T, G)$ (6.0)	$\alpha CX - \alpha D$ (7.0)
Contraintes budgétaires	$\sum_{j=1}^{n} C_{tj} X_j + d_t \leq D_t$ (4.1) $t = 1, \ldots T$	idem (3.1) et $d_1 \geq d_{min}$ (5.1) $d_t \geq d_{t-1}$ $r\left[\sum_{j=1}^{n} \hat{b}_j X_j + V_T - W_T + \sum_{t=T+1}^{\infty} D_t (1+r)^{T-t}\right] \geq d_T$	idem (3.1)" plus des contraintes pour identifier G (6.1)	$HX \leq R$ (7.1)
Contraintes de non multiplicité des projets	idem (2.2)	idem (2.2)		non spécifiée
Taux d'actualisation	a est tel que : $\left(\frac{1}{1-a}\right)^t = \frac{\rho_t}{\rho_0} = \frac{U_t}{U_0}$	donné		déterminé de façon endogène

Appendice D

Récapitulation des modèles présentés dans la revue de la littérature (suite)

Auteur(s)	Merville-Tavis (1973)	Chateau (1973) 1973a	Chateau (1973) 1973b	Bhaskar (1974)
Fonction objectif	$\sum_{t=1}^{T} U_t d_t + U \sum_{j=1}^{n} \hat{b}_j X_j$ (8.0)	$(1+r)^{-T}\ G$ (9.0)	$eY^- + eY^+$ (10.0)	$\sum_{j-1}^{n} b_j X_j + \sum_{t-1}^{T} \left(\frac{1+rp}{1+a} - 1 \right) \frac{V_t}{\alpha_t}$ (11.0)
Contraintes budgétaires	idem (3.1)	idem (6.1) plus contraintes sur d'autres formes de financement	$AX - IY^+ + IY^- \leq b$ $HX \leq R$ (10.1) $Y^- \geq 0 \quad Y^- \geq 0$	idem (2.1)
Contraintes de non multiplicité des projets	idem (2.2)	idem (2.2)	non spécifiée	idem (2.2)
Taux d'actualisation	même procédure que Baumol-Quandt	donné	donné	donné

Appendice D

Récapitulation des modèles présentés dans la revue de la littérature (suite)

Auteur(s)	Burton-Damon (1974)	Bhaskar (1976)	Bradley et al. (1978)
Fonction objectif	a) ρCX (12.0) et b) $U'd = U'D-U'CX$ (13.0)	a) $\sum_{t=1}^{T} \alpha_t d_t$ (14.0) ou b) $\sum_{t=1}^{T} \alpha_t + \sum_{j=1}^{n} \hat{b}_j X_j$ (15.0)	a) $\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} C_{tj} X_j$ (16.0) b) $\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \alpha_t C_{tj} X_j$ (17.0)
Contraintes budgétaires	a) idem (2.1) b) idem (4.1)	idem (2.1)	idem (2.1)
Contraintes de non multiplicité des projets	idem (2.2)	idem (2.2)	idem (2.2)
Taux d'actualisation	Taux endogène nul. Il faut un taux exogène.	donné	non nécessaire mais peut être calculé à partir de a.

Appendice D

Récapitulation des modèles présentés dans la revue de la littérature (suite)

Auteur(s)	Sealey (1978)
Fonction objectif	$Z_k = b_k X \quad k - 1, 2, \ldots K \qquad (18.0)$ $Z = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k Z_k - \lambda BX \qquad (19.0)$
Contraintes budgétaires	idem (2.1) et $\sum_{k-1}^{K} \lambda_k - 1$
Contraintes de non multiplicité des projets	non spécifiée
Taux d'actualisation	donné

Références

AMEY, L. R. (1972), "Interdependencies in capital budgeting : a survey", Journal of Business Finance, Vol. 4, no. 3, pp. 70-85.

BAUMOL, W. J. (1977), Economic theory and operations analysis, Fourth edition, Prentice Hall.

BAUMOL, W. J., QUANDT, R. E. (1965), "Investment and discount rates under capital rationing : a programming approach", Economic Journal, Vol. 75, pp. 317-29.

BERNHARD, R. H. (1969), "Mathematical programming models for capital budgeting. A survey, generalization and critique", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 4, no. 2, pp. 111-58.

BERTONECHE, M., LANGOHR, H. (1977), "Le choix des investissements en situation de rationnement du capital : comparaison des solutions fournies par différents modèles théoriques", Revue Economique, Vol. 28, no. 5, pp. 730-64.

BHASKAR, K. N. (1974), "Borrowing and lending in a mathematical programming model of capital budgeting", Journal of Business Finance and Accounting, Vol. 1, no. 1, pp. 267-91.

BHASKAR, K. N. (1976),"Linear programming and capital budgeting : A reappraisal", Journal of Business Finance and Accounting, Vol. 3, no. 3, pp. 29-39.

BHASKAR, K. N. (1978), "Linear programming and capital budgeting : The financial problem", Journal of Business Finance and Accounting, Vol. 5, no. 2, pp. 159-93.

BIERMAN, M., SMIDT, S. (1975), The capital budgeting decision, MacMillan, 4th. edition.

BRADLEY, S. P., FRANK, R. S., FREY, JR. S. C. (1978a), "Determining the appropriate discount rates in pure capital rationing", Decision Sciences, Vol. 9, no. 3, pp. 391-401.

BRADLEY, S. P., FRANK' R. S., FREY, JR. S.C. (1978b), "Equivalent mathematical programming models of pure capital rationing", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 13, no. 2, pp. 127-35.

BROMWICH, M. (1976), The economic of capital budgeting, Penguin.

BURTON, R. M., DAMON, W. W. (1974), "On the existence of cost of capital under pure capital budgeting", Journal of Finance, Vol. 29, no. 4, pp. 1165-73.

BYRNE, R., CHARNE, A., COOPER, W. W., KORTANEK, K. O. (1967), "A chance-constrained programming approach to capital budgeting", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 2, no. 4, pp. 339-64.

CARLETON, W. T. (1969), "Linear programming and capital budgetting models", Journal of Finance, Vol. 24, no. 5, pp. 825-33.

CHATEAU, J.-P. (1973a), "La programmation déterministe du budget de capital : Un modèle financier de la firme multinationale", Cahier 7308, Département des Sciences Economiques, Université de Montréal.

CHATEAU, J.-P. (1973b), "La programmation déterministe à objectifs multiples du budget de capital", Cahier 7309, Département de sciences économiques, Université de Montréal.

CHATEAU, J.-P. D. (1975), "The capital budgeting problem under conflicting financial policies", Journal of Business Finance and Accounting, Vol. 2, no. 1, pp. 81-103.

DASGUPTA, A. K., PEARCE, D. W. (1974), Cost-Benefit Analysis : Theory and Practice, MacMillan, Student Editions.

ELTON, E. J.(1970), "Capital rationing and external discount rates", Journal of Finance, Vol. 25, no. 3, pp. 573-84.

GOLDSTEIN, E., YOUDINE, D. (1973), Problèmes particuliers de la programmation linéaire, Editions Mir, Moscou, Traduction française.

INTRILIGATOR, M. D.(1971), Mathematical optimization and economic theory, Prentice Hall.

LEVY-LAMBERT, H., DUPUY, J.-P. (1975), Les choix économiques dans l'entreprise et dans l'administration, tome 1, principes de base, Dunod.

LITTLE, I. M. D., MIRRLLEES, J. (1969), Manual of industrial project analysis, Vol. 2, Social cost-benefit analysis, O.E.C.D., Paris.

LORIE, J. H., SAVAGE, L. J. (1955), "Three problems in capital rationing", Journal of Business, Vol. 28, no. 4, pp. 229-39.

LUSZTIG, P., SCHWAB, B. (1968), "A note on the application of linear programming to capital budgeting", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 3, no. 3, pp. 427-31.

MAIER, S. F., VANDER WEIDE, J. H. (1976), "Capital budgeting in the decentralized firm", Management Science, Vol. 23, no. 4, pp. 433-43.

MERVILLE, L. J., TAVIS, L. A. (1973), "A generalized model for capital investment", Journal of Finance, Vol. 28, no. 1, pp. 109-118.

MISHAN, E. J. (1976), Cost-Benefit Analysis, new and expanded edition, Praeger.

MYERS, S. C.(1972), "A note on linear programming and capital budgeting", Journal of Finance, Vol. 37, no. 1, pp. 89-92.

MYERS, S. C.(1974), "Interaction of corporate financing and investment decisions", Journal of Finance, Vol. 29, no 1, pp. 1-25.

NÄSLUND, B. (1966), "A model of capital budgeting under risk", The Journal of Business, Vol. 34, no. 2, pp. 257-71.

PAGE, J. P., (1972), "Pratique des projections économiques", I.N.S.E.A. de Rabat (Maroc.

PAPANDREOU, A. G. (1952), "Some basic problems in the theory of the firm", In Haley, B. F. (ed.), A survey of contemporary economics, Vol. 2, Homewood III, Chapitre 5, pp. 183-222.

PEÑA, B. (1965), "Introduction à l'économétrie", I.N.S.E.A. de Rabat (Maroc).

QUIRIN, G. D. (1967), The capital expenditure decision, Irwin.

SEALEY, JR.C. W. (1978), "Utility maximization and programming models for capital budgeting", Journal of Business Finance and Accounting, Vol. 5, no. 3, pp. 355-65.

SIMON, H. A. (1959), "Theories of decision making in economic and behavioral science", The American Economic Review, Vol. 4, no. 3, pp. 253-83.

SIMONNARD, M. (1972), Programmation linéaire : technique du calcul économique, Tome 1 : Fondements, Tome 2 : Extensions. Dunod.

WEINGARTNER, H. M. (1963), Mathematical programming and the analysis of capital budgeting problems, N.J. Englewood Cliffs, Prentice Hall Inc.

WEINGARTNER, H. M. (1966a), "Criteria for programming investment project selection", The Journal of Industrial Economics, Vol. 15, no. 1, pp. 65-76.

WEINGARTNER, H. M. (1966b), "Capital budgeting of inter-related project selection", Management Science, Vol. 12, no. 7, pp. 485-515.

WEINGARTNER, H. M. (1977), "Capital rationing : n authors in search of a plot", Journal of Finance, Vol. 32, no. 5, pp. 1403-31.

WHITEMORE, G. A., AMEY, L. R. (1973), "Capital budgeting under rationing : comment on the Lusztig and Schwab procedure", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 8, no. 1, pp. 127-35.

WILLIAMS, H. P. (1978), Model building in mathematical programming, John Wiley.