

AL1
G
897
(20)

Rapport de stage
Pour l'obtention de la
Maîtrise en finance mathématique et computationnelle

**Evaluation des options sur le
marché à terme du gaz naturel**

Entreprise	Hydro-Québec
Réalisé par	Nhu-Hoang Truong
Période	21 mai 2002 - 30 août 2002

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur René Garcia pour ses conseils sur l'orientation du projet et pour son temps consacré à la lecture de ma rédaction. Ses remarques tant au niveau du contenu que de la forme m'ont été très utiles.

Je souhaite également faire part de ma reconnaissance à l'équipe de la salle des marchés de Hydro-Quebec, sous la responsabilité de monsieur Pierre Fortin, pour l'accueil chaleureux, les renseignements sur les marchés de l'énergie et les moyens matériels permettant la mise en oeuvre du projet. Les discussions avec James Mott, Florent Kpodjedo m'ont beaucoup aidé pour la finalisation du projet.

Introduction

Depuis l'arrivée de l'article de Black-Scholes(1973) et de celui de Black(1976), on sait évaluer des options sur les contrats à terme, en supposant que le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique. La principale difficulté dans le modèle de Black est d'estimer le paramètre de volatilité. On peut l'estimer soit par la volatilité implicite en observant le marché des options soit par la volatilité historique calculée à partir des données du marché à terme. Dans le contexte de l'évaluation des options du marché du gaz naturel, voici certaines critiques que l'on peut formuler au sujet du modèle de Black:

- Le mouvement brownien géométrique, avec deux paramètres constants et un facteur aléatoire, représente une hypothèse forte. Afin de la relâcher, on s'oriente vers des processus ayant plus de paramètres et plus de facteurs aléatoires.

- Lors de l'estimation de la volatilité implicite ou historique, on utilise séparément des données des contrats à terme de différentes maturités. Par conséquent, l'évaluation d'une option est basée sur l'information d'un seul contrat. Et l'information provenant des autres contrats n'est pas exploitée.

Pour répondre à ces critiques, Schwartz(1997) propose trois modèles dont le prix au comptant, induit par les prix du marché à terme, suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Cependant, les trois modèles de Schwartz n'expliquent pas le caractère saisonnier du marché du gaz naturel. Manoliu-Tompaïdis (1998) proposent la

désaisonnalisation du processus du prix au comptant par une fonction déterministe et périodique.

A l'étape de l'estimation des paramètres des trois modèles, Schwartz, Manoliu et Tompaidis suggèrent l'utilisation du filtre de Kalman pour établir la fonction de vraisemblance. Au niveau de l'évaluation des options, s'il s'agit des options européennes de type vanilla, il existe des formules explicites déduites à partir de celles de Black-Scholes.

Ce rapport a pour but la description des modèles permettant l'évaluation des options sur le marché à terme du gaz naturel. Il se compose en 5 parties. La première décrit les deux marchés : à terme (Forward market) et au comptant (spot market) et leur relation théorique. La deuxième, qui est le cœur du document, parle de l'approche proposée par Schwartz et débouche sur une méthode d'estimation des processus sous-jacents en vue de valoriser les titres dérivés. Les trois autres parties représentent la validation, l'implémentation et les premiers résultats.

1. Etude préliminaire

1.1 Marché à terme

Sur le marché de Nymex, les contrats à terme sur le gaz naturel sont représentés par 72 futures, dont environ 50, avec les dates d'échéance les plus proches, sont effectivement cotés. Les futures se différencient par leurs dates d'échéance qui précèdent les premiers jours du mois. Les courbes du marché à terme (Forward curves), avec le prix des futures pour chaque jour de cotation, mettent en évidence le caractère saisonnier du marché. Les futures dont la date de livraison a lieu pendant l'hiver ont le prix le plus élevé. La figure 1.1, ci-dessous, contient trois courbes correspondant aux trois dates de cotation de l'espace de six mois. La courbe du 16 mai 2001 décrit une tendance décroissante; plus la livraison est loin, moins le contrat est apprécié. Par opposition, la cotation du 28 décembre 2001 donne la courbe d'une tendance croissante. La tendance décroissante(resp. la tendance croissante) peut être expliquée par une attente de baisse(resp. de hausse) du marché.

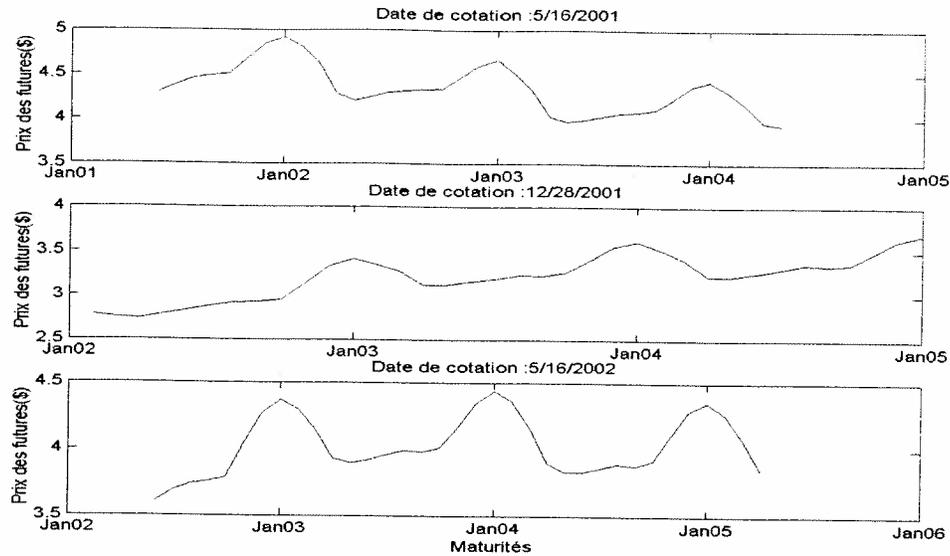


Figure 1.1 : Courbes du marché à terme

L'observation des volumes échangés et des nombres de contrats en circulation 'open interest' (voir la figure 1.2) indique que la cotation d'un future est importante seulement durant les deux dernières années de sa vie.

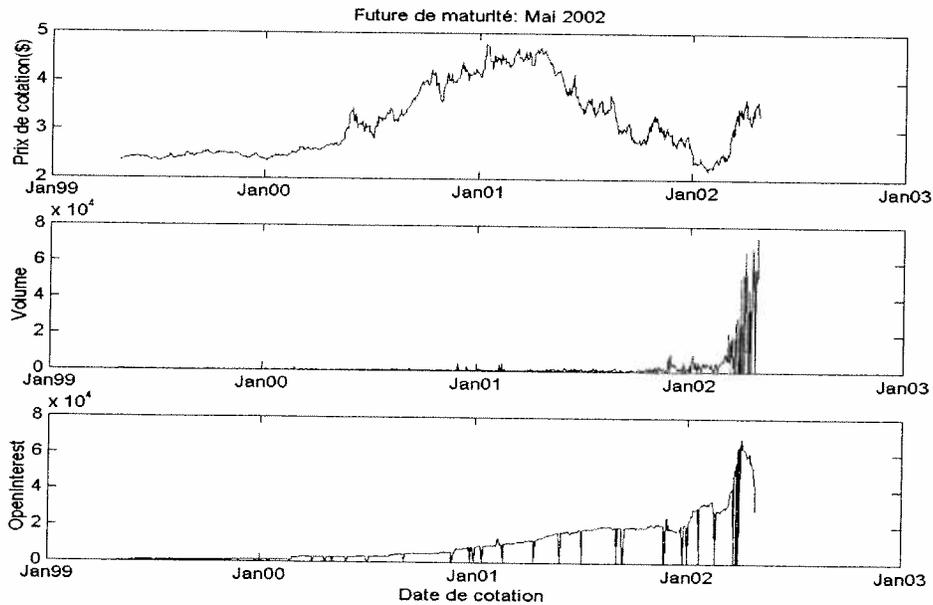


Figure 1.2 : Evolution de la cotation d'un future

L'étude des données observées montre que les prix des différents futures sont fortement corrélés entre eux. La figure 1.3, ci-dessous, représente la matrice de corrélation des futures ayant la date d'échéance entre fin décembre 2001 et début mai 2002.

	Jan	Fév	Mar	Avr	Mai
Jan	1.0000	0.9986	0.9955	0.9880	0.9808
Fév	0.9986	1.0000	0.9989	0.9927	0.9872
Mar	0.9955	0.9989	1.0000	0.9959	0.9922
Avr	0.9880	0.9927	0.9959	1.0000	0.9989
Mai	0.9808	0.9872	0.9922	0.9989	1.0000

Figure 1.3 : Matrice de corrélation des prix de futures

1.2 Marché au comptant

Sur le marché au comptant dont la livraison est à Henry Hub, on enregistre le prix auprès des courtiers (figure 1.4). La courbe des prix au comptant reflète peu la propriété saisonnière du marché. On observe une forte variation du prix entre 2\$ et 10\$ par *million British thermal units*. La volatilité annuelle historique calculée sur le rendement du marché au comptant est de l'ordre 40%, tandis que celle du marché à terme est d'environ 20%.

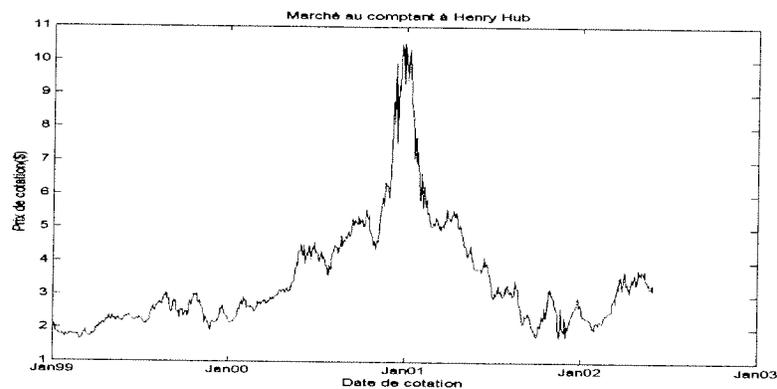


Figure 1.4 : Evolution du marché au comptant.

1.3 Relation entre le marché à terme et celui au comptant

Malgré l'indépendance de la cotation des deux marchés, le prix d'un marché peut influencer l'autre selon la possibilité de stockage et de planification de la production. Par exemple, si le prix d'un future devient important, l'achat du marché au comptant et l'utilisation du système de stockage apporteront une solution d'arbitrage.

La modélisation de la relation entre les marchés s'établit grâce à l'argument suivant:

Soient $F(t,T)$, le prix, à l'instant t , du future ayant la maturité à la date T , et S_t , le prix au comptant.

Supposons que le taux d'intérêt sans risque r , le coût de stockage w et le taux de commodité^(*) δ sont constants. Par l'absence d'arbitrage, Clewlow and Strikland (Chapitre 4.2) démontrent la relation usuelle entre les deux prix:

$$F(t, T) = S_t e^{(r+w-\delta)(T-t)}$$

En réalité, le coût de portage $\alpha = r + w - \delta$ est loin d'être constant. D'abord le coût de stockage w est saisonnier et le taux de commodité δ est aléatoire. En plus, le coût de portage dépend aussi de la date d'échéance, car le taux de commodité δ en dépend. On note: $\alpha = \alpha_T(t)$. La relation entre le marché à terme et celui au comptant s'exprime par:

$$F(t, T) = S_t e^{\alpha_T(t)(T-t)}$$

Etant donné les deux séries de prix, à terme et au comptant, on peut calculer $\alpha_T(t)$:

$$\alpha_T(t) = \frac{\ln[F(t, T)/S_t]}{T-t}$$

Dans la figure 1.5, le premier graphe décrit l'évolution du coût de portage $\alpha_T(t)$ associé au contrat NGQ2 (Maturité Août 2002). On observe que ce coût représente un taux de rendement variant entre -50% et 50%. Cela démontre le caractère aléatoire de $\alpha_T(t)$.

Le deuxième graphe, avec la courbe du prix au comptant et celle du future NGQ2, révèle une possibilité d'arbitrage: On achète le spot vers le 23 novembre 2001 (le jour où se trouve le sommet du graphe α) au prix environ 1.9\$ et on vend le future NGQ2 au prix environ 3.0\$ pour un rendement annuel de 62% avant d'enlever le coût de financement et le coût de stockage entre Juin et Juillet.

Plusieurs explications à ce phénomène. La première relève du fait que le marché au comptant est de faible volume. Il permet l'ajustement entre l'offre et la demande au dernier moment. Par conséquent, un tel arbitrage est impossible car le marché au comptant n'offre pas une grande quantité avec un tel prix. Le fait que le prix du spot est sensible à la demande explique aussi le niveau élevé de la volatilité du

(*) Le taux de commodité, ou le *convenience yield*, est défini comme le bénéfice qu'un producteur retire de ces stocks s'il dispose de marchandises dès qu'il en a besoin, sans avoir à supporter le coût associé à des commandes fréquentes, ni celui lié à l'attention des livraisons.

marché au comptant par rapport au marché à terme. La deuxième explication porte sur le stockage. Pour faire un tel arbitrage, on doit d'abord répondre aux questions concernant la capacité de stockage, la facilité de la livraison et le prix de stockage.

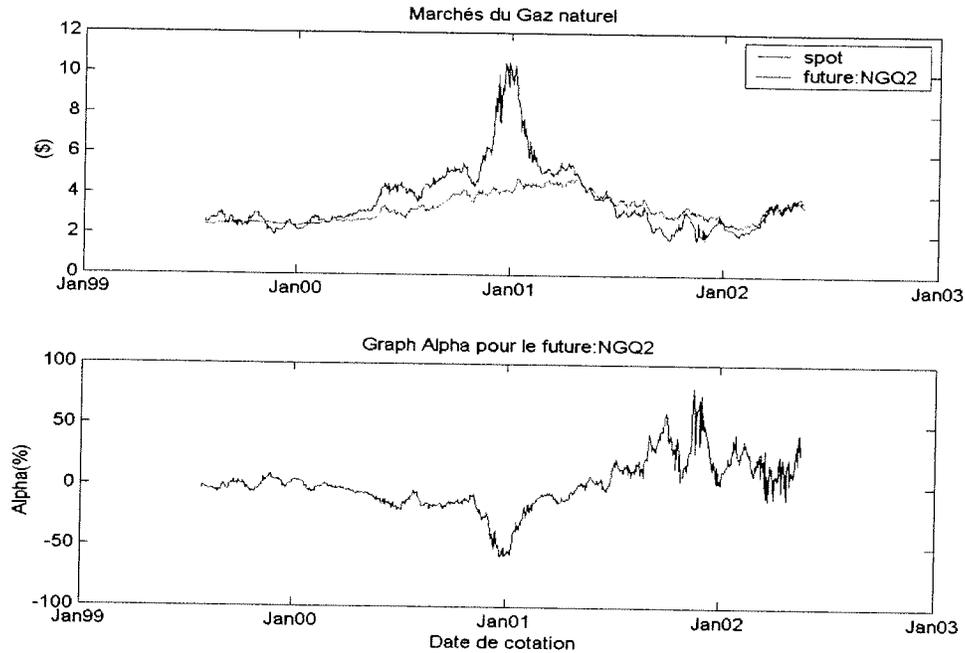


Figure 1.5 : La relation des marchés à terme et au comptant

1.4 Les options sur futures

Il y a environ 12 futures qui sont vraiment pris en compte pour le marché des options de Nymex. Les options deviennent attrayantes pour les futures s'approchant de leur date d'échéance. Les différents prix d'exercice forment une palette d'un grand nombre d'options pour un future donné. Par exemple, pour le future ayant comme date d'échéance le 29 mai 2002, il y a 111 options proposées sur le marché pendant la journée du 17 mai 2002, le tableau de l'annexe C donne le volume et les contrats en circulation selon le prix d'exercice.

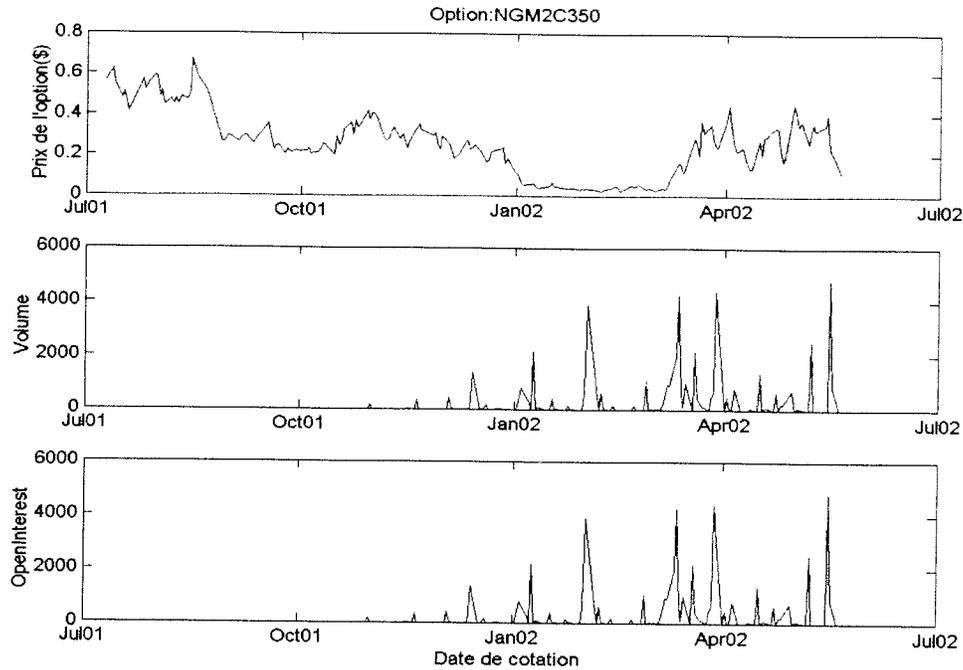


Figure 1.6 : Evolution de la cotation d'une option sur future

2.Modélisation

L'étude de la relation entre le marché au comptant et le marché à terme montre la présence des facteurs aléatoires du coût de portage. Ils dépendent principalement du coût de stockage et du taux de commodité. Dans le cas où le volume du marché à terme domine fortement celui du marché au comptant, les prix des futures peuvent être considérés comme meilleurs pour la construction d'un modèle applicable aux deux marchés. Dans les nombreuses études de modélisation citées dans la bibliographie, le prix au comptant est supposé non observable.

La démarche de ce projet est l'élaboration d'un modèle permettant de représenter le plus fidèlement possible le prix des futures disponibles sur le marché. Ce qui permet, ensuite, d'établir une solution d'évaluation des options sur ces futures. Le modèle considéré est une version de celui proposée par Schwartz(1997), lui-même, inspiré de la structure par terme des taux d'intérêt construit à partir des marchés obligataires. Schwartz propose plusieurs modèles, appelés, *un facteur*, *deux facteurs* et *trois facteurs*. Dans les trois modèles, il fait des hypothèses définissant le comportement du prix au comptant S (spot). Ce sont des processus de diffusion aléatoires continus d'Itô.

$$dS_t = A(t,S)dt + B(t,S_t)dZ$$

Où les expressions de $A(t,S)$ et $B(t,S_t)$ dépendent d'un vecteur θ de paramètres inconnus.

En partant de telles hypothèses, il établit la relation entre le prix du spot et ceux des futures. Cette relation et la discrétisation du processus $\alpha_t = \ln S_t$ représentant respectivement l'équation de *mesure* et celle de *transition* du filtre de Kalman. La technique du filtre de Kalman permet d'estimer des paramètres et de prévoir des prix de futures. Ci-dessous, la modélisation est formulée selon les notations du livre de Harvey(chapitre 3).

La discrétisation du processus $\alpha_t = \ln S_t$ donne l'équation de transition des prix de deux instants consécutifs

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + c_t + \eta_t$$

Où T_t , c_t sont des fonctions déterministes, dépendant de θ , t .

Et η_t suit une loi normale centrée.

Soit $y(t)$, le logarithme du vecteur des prix des N futures à l'instant t . ie,

$$y(t) = \begin{bmatrix} \ln F(t, T_1) \\ \dots \\ \ln F(t, T_N) \end{bmatrix}$$

La relation entre le spot et les futures définit l'équation de mesure:

$$y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t$$

Où Z_t , d_t sont des fonctions déterministes, dépendant de θ , t .

Et ε_t est un vecteur aléatoire de loi normale centrée.

Les paramètres que l'on cherche à estimer sont θ , $\text{var}(\eta_t)$, $\text{var}(\varepsilon_t)$. La méthode d'estimation consiste à maximiser la fonction de vraisemblance décrite dans l'annexe A.

Les modèles proposés par Schwartz ne contiennent pas explicitement le caractère saisonnier des marchés du gaz naturel. Pour tenir compte du caractère saisonnier dans les trois modèles, Nanoliu-Tompaidis (1998) proposent, pour le marché du gaz naturel, la désaisonnalisation du processus du prix au comptant par une fonction déterministe et périodique. Ils reformulent la solution dans ce nouveau

contexte pour obtenir les expressions de d_t , T_t , c_t , Z_t . Ils proposent aussi la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance via le filtre de Kalman.

Jaillet-Ronn-Tompaïdis(2001) apportent une autre solution d'estimation du modèle à un facteur, sans passer par la technique de filtre de Kalman.

Nous commençons par l'étude du modèle à un facteur et nous décrivons ensuite en détail la méthode d'estimation proposée par Jaillet-Ronn-Tompaïdis.

2.1 Description du modèle à un facteur avec la saisonnalité

Dans le modèle à un facteur avec la saisonnalité, on pose:

$$(2.1) \quad S_t = f(t) D_t$$

La fonction f est périodique de période un an: $f(t) = f(t+1)$

Soit $X = \ln D$, on suppose que la dynamique risque neutre de X_t est décrite par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck:

$$(2.2) \quad dX = \kappa(\xi - X)dt + \sigma_x dZ$$

Les paramètres κ, ξ et σ_x sont des constantes.

On suppose, en plus, que le prix du future dont l'échéance est T , à la date t est l'espérance, sous la probabilité risque neutre, du prix du spot à la date T :

$$(2.3) \quad F(t, T) = E_t [S_T]$$

On peut démontrer que (2.1), (2.2) et (2.3) entraînent:

$$(2.4) \quad \ln F(t, T) = \ln f(T) + X_t e^{\kappa(t-T)} + \xi(1 - e^{-\kappa t}) + \frac{\sigma_x^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)})$$

Remarques

Avant d'étudier des méthodes d'estimation des paramètres, il est intéressant de souligner les hypothèses du modèle qui se trouvent dans les trois équations (2.1), (2.2) et (2.3). La question est de savoir si elles sont réalistes.

L'hypothèse de l'équation (2.1) a pour but, tout simplement, la désaisonnalisation de la série des prix au comptant. La périodicité d'un an de la fonction f est indiscutable. Selon l'équation (2.4), il y a seulement 12 valeurs de la fonction f en jeu, qui correspondent aux 12 jours d'échéance de l'année.

L'hypothèse de l'équation (2.2) paraît plus contestable que les deux autres même si l'on peut trouver des arguments économiques dans la littérature concernant le processus d'Ornstein-Uhlenbeck X_t . X_t s'interprète comme le rendement du processus D_t qui est lui-même issu de la désaisonnalisation du prix spot S .

L'hypothèse équivaut à:

$$dD = \kappa(\mu - \ln D)Ddt + \sigma_x DdZ$$

$$\text{avec : } \mu = \xi + \sigma_x^2/2\kappa$$

L'hypothèse n'est pas réaliste du fait qu'elle n'explique pas la variation du taux de commodité et du taux d'intérêt sans risque. Elle ne tient pas non plus compte des sauts que fait le processus S . La supposition de l'invariance de la volatilité σ_x n'est pas non plus justifiée par l'observation sur le marché des options; la volatilité implicite varie de jour en jour.

Pour relâcher l'hypothèse, on s'oriente vers les modèles à deux facteurs ou trois facteurs proposés par Schwartz. Le modèle avec sauts ou celui de volatilité stochastique peuvent être aussi pris en considération. (Voir l'annexe B).

L'hypothèse de l'équation (2.3) est équivalente à l'absence d'opportunité d'arbitrage.

2.2 Estimation

Les équations (2.2) et (2.4) jouent un rôle central dans l'estimation des paramètres qui sont:

$$\theta = \{\kappa, \xi, \sigma_x, f(T), T \text{ les dates d'échéance}\}$$

L'estimateur de θ que propose Jaillet-Ronn-Tompaidis est celui qui minimise la différence entre les prix des futures observés et ceux calculés avec l'équation (2.4). Si les prix des futures observés sont représentés par la matrice F , et les prix calculés par la matrice F_θ , dont les lignes et les colonnes sont indexées par les dates de cotation et les dates d'échéance, le problème se pose comme suit:

$$\min_{\theta} |F - F_\theta|$$

Le problème d'optimisation est difficile car :

- Le nombre de paramètres à estimer est élevé, la fonction objective est très non linéaire et on n'en connaît pas les gradients analytiquement. Il y a donc des minima locaux. Il faudra donc explorer un grand ensemble de valeurs initiales pour tenter de trouver le minimum global.

- Le calcul de F_θ dépend des facteurs $X_t, f(T), \sigma_x$. Les rubriques suivantes donnent des précisions sur ces facteurs.

Le calcul des X_t

L'équation (2.2) permet d'estimer les valeurs de X_t qui sont elles-mêmes ensuite utilisées dans le calcul du membre droit de l'équation (2.4). Jaillet-Ronn-Tompaidis ne décrivent pas en détail le calcul de X_t , mais ils citent la valeur initiale X_0 du processus à estimer. Alors le vecteur des paramètres θ devient $\{ X_0, \kappa, \xi, \sigma_x, f(T) \text{ pour tout } T \}$

En partant d'une valeur initiale X_0 , X_t est remplacé par son estimateur qui est son espérance $E_0[X_t]$. Cette dernière peut être évaluée grâce à la formule de discrétisation d'Euler de l'équation (2.2):

$$E_t [X_{t+\Delta t}] = X_t + \kappa(\xi - X_t) \Delta t$$

L'accroissement Δt dépend de l'intervalle d'observation du prix des futures. Par exemple, pour les données journalières, on a : $\Delta t = 1/252$.

On en déduit l'expression de $E_0[X_t]$ en fonction de X_0 :

$$E_0 [X_{n\Delta t}] = a^n X_0 + \frac{\kappa \xi \Delta t (1 - a^n)}{1 - a} \text{ Avec } a = 1 - \kappa \Delta t$$

Notons que cette discrétisation n'est qu'une approximation de la discrétisation exacte de l'équation (2.2) qui peut aussi être utilisée:

$$E_0 [X_{n\Delta t}] = X_0 e^{-\kappa n \Delta t} + \xi (1 - e^{-\kappa n \Delta t})$$

La fonction f

Sur le marché à terme du gaz naturel à Nymex, T représente une date à la fin des mois. Il y a donc exactement 12 valeurs de T par an. Comme f est une fonction périodique de période un an, l'équation (2.4) indique qu'il faut estimer seulement 12 valeurs de f_i . Posons:

T_1 : la date d'échéance du contrat Janvier l'année X

T_2 : la date d'échéance du contrat Février l'année X

...

T_{12} : la date d'échéance du contrat Décembre l'année X

Et: $f_i = f(T_i)$, $i=1, \dots, 12$

Les paramètres à estimer sont $\theta = \{\kappa, \xi, \sigma_x, f_1, f_2, \dots, f_{12}\}$

La normalisation des coefficients saisonniers est obtenue en supposant que le produit des f_i , pour $i=1, \dots, 12$, est égal à 1.

En ce qui concerne le problème d'optimisation, cette relation entre les f_i représente une contrainte que l'on peut supprimer en posant:

$$f_1 = 1 / \prod_{i=2}^{12} f_i$$

La volatilité σ_x

Jaillet-Ronn-Tompaidis proposent de ne pas considérer σ_x comme un paramètre inconnu en utilisant la volatilité implicite provenant de l'observation du marché des options sur futures. La volatilité implicite peut être calculée avec l'option ayant la date d'échéance la plus proche.

Cette idée reste à discuter. En effet, du point de vue de la valorisation de l'option, le modèle n'apporte pas de nouveauté parce qu'il suppose que le prix de l'option est connu.

En restant dans le cas général du modèle à un facteur, σ_x est un paramètre inconnu que l'on cherche à estimer.

3. Validation : Evaluation des options

Dans le cas d'une option d'achat européenne basée sur un future, si la date d'échéance de l'option est celle du future, on trouve le prix de l'option à l'équation (6.14) du livre de Clewlow et Strickland:

$$(3.1) \quad c(t, T) = e^{-r(T-t)} \left[F(t, T) N(h) - KN(h - \sqrt{w}) \right]$$

$$\text{Avec : } h = \frac{\ln(F(t,T)/K) + w/2}{\sqrt{w}},$$

$$w^2 = \frac{\sigma_x^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)})$$

Et : r est le taux d'intérêt sans risque qui est supposé constant.

4. Mise en œuvre

4.1 Préparation des données

Dans notre base de données d'Access au cours du mois de mai 2002, il y a les prix de N futures ($N=64$) dont les dates d'échéance sont entre le 31 décembre 1999 et 27 mars 2005

Les dates de cotation sont entre le 04 janvier 1999 et le 20 mai 2002, sauf les fins de semaine et les jours fériés. Lors du calcul du nombre de jours entre une date de cotation et une date d'échéance $T-t$, on ne tient pas en compte des samedis et des dimanches. Notons le nombre de jours de cotation par M .

La première étape de la préparation des données consiste à construire une matrice des prix F des prix des futures observés. F , de dimension $M \times N$, prend des valeurs nulles pour les cotations qui n'ont pas eu lieu. Les valeurs non nulles de F forment une bande au niveau diagonal de la matrice.

La deuxième étape de la préparation des données consiste à construire une matrice des nombres de jours entre les dates de cotation et les dates d'échéance $T-t$. On note les dates d'échéance par T_1, T_2, \dots, T_N .

Dans la base de données, il suffit de calculer le vecteur $T_i - t_1$, pour $i=1..N$. t_1 est la date de la première cotation.

Pour t_2, t_3, \dots on a la relation de récurrence : $t_{i+1} = (T - t_i) - 1$

Remarque: Pour construire les deux matrices ci-dessus, on construit 2 tables intermédiaires dans la base d'Access à l'aide de la programmation en Visual Basic. La dimension de la matrice F est dynamique; si un nouveau contrat future est ajouté dans la base de données, N devient $N+1$. Pour un nouveau jour de cotation, M devient $M+1$.

4.2 Programmation

La programmation écrite en Matlab se décompose en 2 parties. Une fait l'estimation et l'autre la validation.

La première contient la fonction objectif, $\theta \rightarrow |F - F_\theta|$. Cette étape consiste à importer des données depuis la base de données et à initialiser une fois pour toutes les variables globales et en suite faire exécuter l'optimiseur de matlab (*minsearch*).

Sur M jours de cotation, on réalise M/2 estimations (en supposons que M est pair). La première estimation correspond au M/2+1 ème jour avec M/2 premiers jours d'observation. La deuxième estimation correspond au M/2+2 ème jour avec M/2+1 premiers jours d'observation, et ainsi de suite.

La deuxième partie de la programmation évalue le prix des options. Elle contient la fonction donnant les courbes des prix des options observés et évalués en choisissant les caractéristiques d'une option: valeur du prix d'exercice et future comme sous-jacent.

4.3 Résultats

Paramètres

Pour des données de 881 jours d'observations, on obtient les valeurs des paramètres qui sont proches de celles trouvées par Jaillet-Ronn-Tompaïdis. Au point de vu du temps de calcul, l'optimiseur exécute environ 3000 fois la fonction objectif pour une durée de moins de 5 minutes. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Xo	3.362751
κ	3.689352
ξ	0.9872593
σ_x	0.6515815
f1	1.082958
f2	1.197184
f3	0.9207454
f4	0.8490281
f5	1.095756
f6	0.9341483
f7	0.9054267
f8	0.9499342
f9	0.9519011
f10	1.067686

f11	1.036853
f12	1.063498

Options

En partant de deux paramètres du modèle κ et σ_x , on estime les prix des options selon la formule (3.1). Les prix estimés sont calculés à partir du taux d'intérêt qui est égal à 5% et des prix de futures observés chaque jour.

La figure 4.1 contient trois graphiques correspondant à trois options différentes. Les deux premiers graphiques associent aux options basées sur le même future d'échéance 26-avr-2002 (NGK2), des prix d'exercice différents. Le troisième graphique décrit l'option basée sur un autre future d'échéance 29-mai-2002 (NGM2) mais de même prix d'exercice que celui du deuxième.

Sur les graphiques, on remarque que les prix observés et les prix prédits par le modèle suivent les mêmes mouvements. Quatre mois avant la maturité, il y a un écart, plutôt stable, entre les deux prix. On peut penser à une prime de risque que réclament les émetteurs des options. À l'approche de la maturité, les deux prix sont presque identiques.

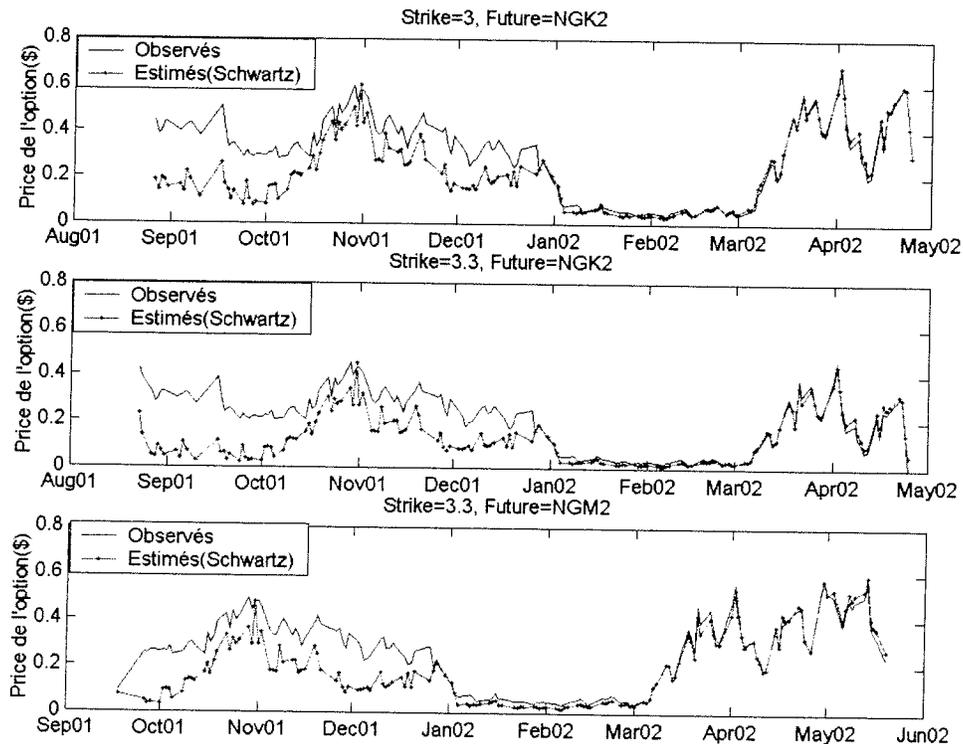


Figure 4.1 : Prix des options estimés selon le modèle de Schwartz

Comparaison avec le modèle de Black

Il est intéressant de comparer le prix d'option calculé avec le modèle de Schwartz à celui calculé avec le modèle de Black(76). Selon ce dernier, le prix $c(t,T)$ d'une option d'achat, à la date t , sur le future de maturité T , est donné par:

$$c(t,T) = e^{-r(T-t)} [F(t,T)N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$\text{Avec : } d_1 = \frac{\ln(F(t,T)/K) + \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$w^2 = \sigma^2(T-t)$; σ^2 est la volatilité du processus du sous-jacent $F(t,T)$.

Et : r est le taux d'intérêt sans risque qui est supposé constant.

Dans la figure 4.2, le prix l'option d'achat pour le prix d'exercice 3\$ est estimé selon Black avec la volatilité implicite σ^2 calculée à partir du prix de l'option, pour le même prix d'exercice, observé la veille.

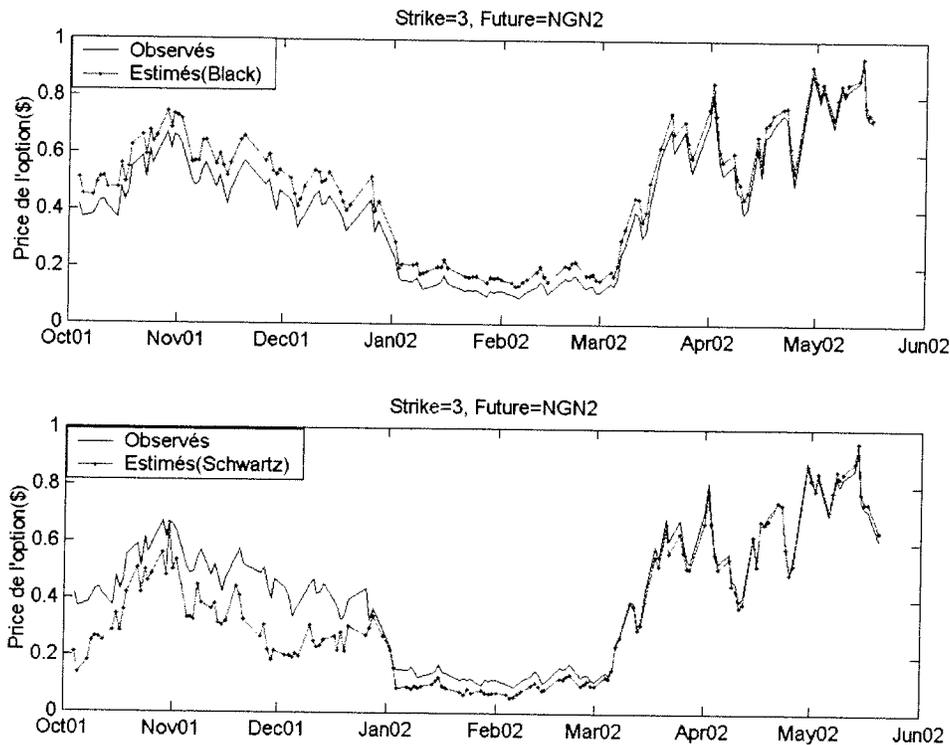


Figure 4.2 : Comparaison des Prix selon les deux models: Black et Schwartz

5. Conclusion

Du point de vue de l'évaluation des options, le modèle à un facteur couplé à la méthode d'estimation décrite ci-dessus donne d'assez bons résultats. La comparaison avec le modèle de Black(76) relève une amélioration pour les options s'approchant de sa maturité.

Du point de vue de la prévision des prix de futures, la méthode d'estimation de Jailliet-Ronn-Tompaïdis aboutit à des écarts importants entre les prix estimés et les prix observés. En effet, avec les données de cotation de 30 jours pour chacun de 64 futures, l'optimiseur s'arrête quand la fonction objectif réduit à 646; ce chiffre représente $|F - F_0|$ à l'optimale. L'erreur d'estimation sur le prix d'un future est donc en moyenne de $646/(30*64) = 0.33\$$. Donc, l'erreur relative est approximativement de 10% selon le coût de l'unité variant entre 3\$ et 4\$.

Pour l'amélioration, on peut s'orienter vers la méthode d'estimation par le filtre de Kalman qui prend en compte les observations passées lors du calcul du processus X_t ; X_t est approximé par $E[X_t | F_{t-1}, F_{t-2}, \dots]$, et non par $E[X_t]$. Cette technique pourra être réutilisée dans les deux modèles à un et à deux facteurs. Manoliu-Tompaïdis(1998), en travaillant sur les données du marché du gaz naturel, montrent que le modèle à deux facteurs améliore beaucoup les résultats par rapport au modèle à un facteur.

Références:

- Black F.,1976, "The pricing of Commodity contracts", *Journal of Financial Economics*, 3(1/2),167-79.
- Black F., Scholes M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 659-683.
- Buchananan W.K., Hodges P, Theis J., 2001, "Which way the natural gaz price: an attempt to predict the direction of natural gaz spot price movements using trader positions", *Energy Economics* 23,279-293.
- Clewlow L.,Strickland, 2000, "Energy derivatives: Pricing and risk management", Lacima.
- Duffie D.,Gray,Hoang , 1999, "Volatility in Energy Prices", *Managing energy price risk*, Editor: Risk book.
- Gourieroux C., Monfort A., 1995, "Séries temporelles et modèles dynamiques", *Economica*.
- Harvey,A.C.,1990, "Forecasting, structural time series models, and the Kalman filter" , Cambridge University Press.
- Hull J., 2000, "Options, Futures & Other derivatives", Prentice Hall.
- Jailliet P, Ronn E, Tompaïdis S, 2001, "Valuation of commodity based swing options", working paper.

Lautier D., 2000, "La structure par terme des prix des commodités", Thèse doctorat soutenue le 27 jan 2000.

Manoliu M, Tompaidis S., 1998, "Energy futures prices: Term structure models with Kalman filter estimation", working paper.

Merton R., 1990, *Continuous time finance*, Basil Blackwell.

Pan J., 2002, "The jump-risk premia implicit in option: Evidence from an integrated time-series study", *Journal of Financial Economics*, 63,3-50.

Schwartz E., Gibson R. 1990, Stochastic Convenience yield and the pricing of oil contingent claims, *Journal of Finance*, 45(3),959-976.

Schwartz E., 1997, "The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging", *Journal of Finance*, 52(3),923-973.

Annexe A Le filtre de Kalman et la fonction de vraisemblance.

A.1. Les hypothèses de notre problème du filtre de Kalman sont les suivantes:

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + c_t + \eta_t \quad m \text{ équations de transition}$$

$$y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t \quad N \text{ équations de mesure}$$

Avec: $t = 1, \dots, M$

Et : η_t, ε_t sont deux vecteurs aléatoires de loi normale centrée.

Notons: $Q_t = \text{var}(\eta_t)$

$H_t = \text{var}(\varepsilon_t)$

A.2. La fonction de vraisemblance est calculée par l'itération pour $t=1 \dots M$. Pour chaque valeur de t , on effectue des calculs en trois étapes: *Prédiction, innovation, mise à jour*.

- Etape de prédiction

On note a_{t-1} , l'estimateur de α_{t-1} , basé sur l'observation de y_{t-1} . On note P_{t-1} , la matrice de covariance des erreurs d'estimation:

$$P_{t-1} = E[(\alpha_{t-1} - a_{t-1})(\alpha_{t-1} - a_{t-1})']$$

On calcule $a_{t|t-1}$ et $P_{t|t-1}$ par les formules suivantes:

$$a_{t|t-1} = T_t a_{t-1} + C_t$$

$$P_{t|t-1} = T_t P_{t-1} T_t' + Q_t$$

- Etape d'innovation

On note $\tilde{y}_{t|t-1}$, l'espérance de y à l'instant $t-1$.

On calcule $\tilde{y}_{t|t-1}$, v_t et F_t par les formules suivantes:

$$\tilde{y}_{t|t-1} = Z_t a_{t|t-1} + d_t$$

$$v_t = y_t - \tilde{y}_{t|t-1}$$

$$F_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t' + H_t$$

- Etape de mise à jour

On calcule a_t et P_t par les formules suivantes:

$$a_t = a_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1} v_t$$

$$P_t = P_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1} Z_t P_{t|t-1}$$

L'expression de la fonction de vraisemblance L est donnée par:

$$\text{Log}L = -\frac{NM}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^M \log(\det(F_t)) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^M v_t' F_t^{-1} v_t$$

Annexe B Les modèles

B.1. Modèle à deux facteurs

Dans le modèle à deux facteurs, le taux de commodité est considéré comme un processus aléatoire:

$$dD = (\mu - \delta)Ddt + \sigma_1 D dZ_1$$

$$d\delta = \kappa(\alpha - \delta)dt + \sigma_2 dZ_2$$

B.2. Modèle à trois facteurs

Le modèle modèle à trois facteurs s'ajoute le caractère stochastique au taux d'intérêt sans risque r :

$$dD = (r - \delta)Ddt + \sigma_1 D dZ_1$$

$$d\delta = \kappa(\alpha - \delta)dt + \sigma_2 dZ_2$$

$$dr = a(m - r)dt + \sigma_3 dZ_3$$

B.3. Modèle avec saut

Merton(1990) propose le saut ajouté au processus D .

$$dD = (r - \delta)Ddt + \sigma_1 D dZ_1 + \gamma D dq$$

γ est la taille du saut et dq représente le processus discret qui prend la valeur nulle la plupart du temps et la valeur 1 pour le reste.

B.4. Modèle avec volatilité stochastique

Dans ce modèle, on suppose que:

$$dD = (\mu - \delta)Ddt + \sigma_1(t, D)D dZ_1$$

Où: $\sigma_1(t, D)$ est un processus dépendant de D .

Deux familles de processus de $\sigma_1(t, D)$ sont proposées. La première, introduite par Derman, Kani, Dupire(1994), est de la forme:

$$\sigma_1(t, D) = \beta_1 D_t^{\beta_2}$$

La deuxième, étudiée par Hull et White(1988), Heston(1993), Bate(1996), Pan(2002), définie avec $V_t = \sigma_1^2(t, D)$:

$$dV = a(\bar{V} - V) dt + \xi \sqrt{V} dZ_v$$

Où: a, \bar{V}, ξ sont constants

Annexe C Un aperçu sur les nombres d'options Nymex

Le tableau suivant donne les nombres d'options en circulation et les volumes sur le future de l'échéance 28 mai 2002 (NGM2).

Prix d'exercice	Volume	Nombre de contrats en circulation
225		20
230		945
235		200
240		1407
245		975
250		5636
255		345
260	20	632
265		80
270		1264
275		1161
280	5	3690
285	15	1572
290		2983
295		2724
300		11600
305		918
310		442
315		1910
320		3061
325		6003
330	26	3968
335	344	2594
340	317	1580
345	485	1270
350	845	7924
355	937	1606
360	418	4313
365	624	2655
370		2960
375	1022	5480

Prix d'exercice	Volume	Nombre de contrats en circulation
380	1407	6731
385	20	1762
390	13	616
400	176	14209
405		24
410	2	245
415		16
420	175	1418
425	52	10782
430	287	920
435		277
440		2554
445		128
450	2	5063
455		
460		86
470		15
475		3429
480		83
490		5
495		19
500		11105
510		39
515		6
520		8
530		43
550		614
560		11
590		
600		962
620		455

Annexe D Les fonction en Matlab

```
function objectFunc =objectFunc(theta)
%-----
% Cette fonction retourne : norm(|F-Fhat|)
% les deux matrices F et Fhat de taille M*N :
% M : nombre de jours ou il y a au moins un prix de futures renseigné
% N : nombre de contrats futures
% Fhat : la matrice des prix de futures estimes selon le veteurs des parametres theta
%-----
% Les variables contants (externes):
% F, FIndicatrice, DeltaT, Tt, t, tp, Vimp,M,N
% F : matrice des Prix futures observes
% Tt : matrice de T-t
% DeltaT : 1/252
% Vimp : vol implicite de l'option du contrat de marturite le plus proche
% tp : nb de jours restant de l'option ci-dessus
%-----
% les parametres a estimer : theta
% theta(1) : Xo
% theta(2) : Kappa
% theta(3) : Psi
% theta(4:14) : f2,...,f12
%-----
% Variables globales initiees par la fonction Calib
global F
global t
global Tt
global M
global N
global FIndicatrice
global DeltaT
% construire le vecteur en ligne representant ln(f(i)): h
f1=1/prod(theta(4:14));
Lnf=[log(f1) log(theta(4:14))];
for i=13:N
    Lnf=[Lnf Lnf(mod(i-1,12)+1)];
end
%-----
% construire le vecteur en colonne X
% Xt = a^t * Xo + b (1-a^t)/(1-a)
a = 1-theta(2)*DeltaT;
b = theta(2)*theta(3)*DeltaT;
%t : t=(1:M)'
at = a.^t;
X = at * theta(1) + b*(1-at)/(1-a);
%-----
% construire le vecteur collone de SigmecarreSur4K
SigmecarreSur4K = (theta(15)^2)/(4*theta(2));
%-----
t1 = repmat(Lnf,M,1);
t2 = exp(-theta(2)*Tt).*repmat(X,1,N);
t3 = theta(3)*(1-exp(-theta(2)*Tt));
t4 = SigmecarreSur4K*(1-exp(-2*theta(2)*Tt));
% construire la matrice lnF selon (5) de l'article Jaillet, Ronn, Tompaidis
lnFhat = t1 + t2 + t3 + t4;
Fhat=exp(lnFhat);
Fhat = Fhat.*FIndicatrice;
%-----
```

```

objectFunc = norm(Fhat-F,1);

function calib=calib()
% Estimation de la date MTotal/2 jusqu'a la date MTotal
% Sauvegarder des estimations dans la base Access
global F
global t
global Tt
global M
global N
global tp
global FIndicatrice
global DeltaT
%Lecture des donnees
disp('Chargement des donnees...');
conn = database('gazdata','');
rq = ['SELECT * from Calib_futureMatrice order by t'];
curs = exec(conn, rq);
curs = fetch(curs);
futureMatrice=curs.Data;

rq = ['SELECT * from Calib_TtMatrice'];
curs = exec(conn, rq);
curs = fetch(curs);
TtMatrice=curs.Data;

%Vecteur t
tTotal=[futureMatrice{:,1}];

%Dimension t
matriceDim=size(futureMatrice);
MTotal=matriceDim(1);
N=matriceDim(2)-1;

disp('Dimension des matrices:');
disp(matriceDim);

% les valeurs initiales des parametres
DeltaT = 1/252;
%valeurs theta initial
theta = ones(15,1);
theta(1)= 3.0;
theta(2)= 3.4;
theta(3)= 0.802;
theta(4)=1.061;
theta(5)=1.010;
theta(6)=0.9628;
theta(7)=0.9526;
theta(8)=0.9528;
theta(9)=0.9564;
theta(10)=0.9593;
theta(11)=0.9623;
theta(12)=0.9731;
theta(13)=1.029;
theta(14)=1.092;
% sigmaX
theta(15)= 0.59;

colnames={'t','Xo','Kappa','Psi','SigmaX','f1','f2','f3','f4','f5','f6','f7','f8','f9','f10','f11','f12','fval'};

```

```

%For M=floor(MTotal/2):MTotal
disp('Traitement en cours...');
disp('debut:');
datestr(now)
%DebutEstimation = floor(MTotal/2);
DebutEstimation = 440;
for M = DebutEstimation : MTotal
    t=tTotal(1:M);
    % matrice future
    F = reshape([futureMatrice{1:M,2:N+1}],M,N);
    % matrice T-t
    Tt = reshape([TtMatrice{1,2:N+1}],1,N);
    for i=1:M-1
        Tt = [Tt;Tt(i,:)-1];
    end
    Tt = Tt*DeltaT;
    % matrice d'indicatrice de F
    FIndicatrice= (F~=0);
    options = optimset('MaxFunEvals',4000);
    % Optimisation
    [x,fval,exitflag,output]=fminsearch(@objectFunc,theta,options);
    %[x,fval,exitflag,output]=fminsearch(@objectFunc1,theta);
    % inserer dans la base
    fi=[1/prod(x(4:14)); x(4:14)];
    exdata =
    {M,x(1),x(2),x(3),x(15),fi(1),fi(2),fi(3),fi(4),fi(5),fi(6),fi(7),fi(8),fi(9),fi(10),fi(11),fi(12),fval};
    insert(conn,'EstimationParametres',colnames,exdata);
    commit(conn);
    output
end
disp('Fin:');
datestr(now)
close(conn);

```

```

function ValidOptionSchwartz(K,futureTiker)
%-----
% comparer entre les 2 prix des options : estimés et observé
%-----
% initiation des parametres
%-----
% exemple : ValidOptionSchwartz(3.3,'NGK2')
DeltaT = 1/252;
%-----
% Importation des donnees
%-----
rq = 'SELECT Tt,future,call,CInt(mid(QuoteDate,1,4)) as y,CInt(mid(QuoteDate,5,2)) as
m,CInt(mid(QuoteDate,7,2)) as d,SigmaX,Kappa from valid_optionCall';
rq = [rq ' WHERE strike=' num2str(K*100) ' AND FuturesTicker=' futureTiker "' ORDER BY
QuoteDate ASC' ];
option = getdata(rq);
Tt = DeltaT*[option{:,1}];
future =[option{:,2}];
call=[option{:,3}];
quoteDate=datenum([option{:,4}],[option{:,5}],[option{:,6}]);
sigmaX =[option{:,7}];
kappa =[option{:,8}];
%-----
% Calcul du prix de l'option
%-----
sigma = sigmaX .* sqrt(( 1- exp(-2*kappa.*Tt))./(2*kappa));

```

```

d = (log(future/K) ./ sigma)+sigma/2;
r=0.04;
callEstime= exp(-r*Tt).*(future.*GaussRepartition(d)-K*GaussRepartition(d-sigma));

```

```

plot(quoteDate,call,quoteDate,callEstime,'.-');
datetick('x',12);
%xlabel('Quote Date');
legend('Observés','Estimés(Schwartz)')
title(['Strike=' num2str(K) ', Future=' futureTiker]);
ylabel('Price de l"option($)');

```

```

function ValidOptionBlack(K,futureTiker)
%-----
% Comparer entre les 2 prix des options : estimés par Black et observé
% Evaluation d'options selon F.Black(76). Pour formule, voir Hull 2000- (12.17)
% On utilise la vol implicite
%-----
% Exemple d'utilisation de la fonction
%-----
% ValidOptionBlack(3.3,'NGK2')
% K =3;
% futureTiker= 'NGK2' %T = 26-avr-02, call
%-----
% initiation des parametres
%-----
DeltaT = 1/252;
%-----
% Importation des donnees
%-----
rq = 'SELECT Tt,future,call,CInt(mid(QuoteDate,1,4)) as y,CInt(mid(QuoteDate,5,2)) as
m,CInt(mid(QuoteDate,7,2)) as d ,ImpliedVol from valid_optionBlack';
rq = [rq ' WHERE strike=' num2str(K*100) ' AND FuturesTiker=' futureTiker ' ORDER BY
QuoteDate ASC' ];
option = getdata(rq);
Tt = DeltaT*[option{:,1}];
future =[option{:,2}];
call=[option{:,3}];
quoteDate=datenum([option{:,4}],[option{:,5}],[option{:,6}]);
%-----
% Calcul du prix de l'option
%-----
sigma=[option{:,7}];
d1 = (log(future/K) + sigma .* sigma .* Tt/2)./(sigma.*sqrt(Tt));
d2 = d1 - sigma .* sqrt(Tt);
r=0.05;
callEstime= exp(-r*Tt).*(future.*GaussRepartition(d1)-K*GaussRepartition(d2));

plot(quoteDate,call,quoteDate,callEstime,'.-');
datetick('x',12);
%xlabel('Quote Date');
legend('Observés','Estimés(Black)')
title(['Strike=' num2str(K) ', Future=' futureTiker]);
ylabel('Price de l"option($)');

function F = GaussRepartition(d)
F=erfc(-d/sqrt(2))/2;

```