Université de Montréal

Introduction à quelques aspects de quantification géométrique

par
Noé Aubin-Cadot

Département de mathématiques et statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématique

Août, 2013

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Introduction à quelques aspects de quantification géométrique

présenté par:

Noé Aubin-Cadot

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Octav Cornea,	président-rapporteur
François Lalonde,	directeur de recherche
Iosif Polterovich,	membre du jury

Mémoire accepté le: ....

RÉSUMÉ

On révise les prérequis de géométrie différentielle nécessaires à une première approche de la théorie de la quantification géométrique, c'est-à-dire des notions de base en géométrie symplectique, des notions de groupes et d'algèbres de Lie, d'action d'un groupe de Lie, de G-fibré principal, de connexion, de fibré associé et de structure presque-complexe. Ceci mène à une étude plus approfondie des fibrés en droites hermitiens, dont une condition d'existence de fibré préquantique sur une variété symplectique. Avec ces outils en main, nous commençons ensuite l'étude de la quantification géométrique, étape par étape. Nous introduisons la théorie de la préquantification, i.e. la construction des opérateurs associés à des observables classiques et la construction d'un espace de Hilbert. Des problèmes majeurs font surface lors de l'application concrète de la préquantification : les opérateurs ne sont pas ceux attendus par la première quantification et l'espace de Hilbert formé est trop gros. Une première correction, la polarisation, élimine quelques problèmes, mais limite grandement l'ensemble des observables classiques que l'on peut quantifier.

Ce mémoire n'est pas un survol complet de la quantification géométrique, et cela n'est pas son but. Il ne couvre ni la correction métaplectique, ni le noyau BKS. Il est un à-côté de lecture pour ceux qui s'introduisent à la quantification géométrique. D'une part, il introduit des concepts de géométrie différentielle pris pour acquis dans (Woodhouse [21]) et (Sniatycki [18]), i.e. G-fibrés principaux et fibrés associés. Enfin, il rajoute des détails à quelques preuves rapides données dans ces deux dernières références.

Mots clés: géométrie symplectique, quantification géométrique, préquantification, polarisation.

ABSTRACT

We review some differential geometric prerequisite needed for an initial approach of the geometric quantization theory, i.e. basic notions in symplectic geometry, Lie group, Lie group action, principal G-bundle, connection, associated bundle, almost-complex structure. This leads to an in-depth study of Hermitian line bundles that leads to an existence condition for a prequantum line bundle over a symplectic manifold. With these tools, we start a study of geometric quantization, step by step. We introduce the prequantization theory, which is the construction of operators associated to classical observables and construction of a Hilbert space. Some major problems arise when applying prequantization in concrete examples : the obtained operators are not exactly those expected by first quantization and the constructed Hilbert space is too big. A first correction, polarization, corrects some problems, but greatly limits the set of classical observables that we can quantize.

This dissertation is not a complete survey of geometric quantization, which is not its goal. It's not covering metaplectic correction, neither BKS kernel. It's a side lecture for those introducing themselves to geometric quantization. First, it's introducing differential geometric concepts taken for granted in (Woodhouse [21]) and (Sniatycki [18]), i.e. principal G-bundles and associated bundles. Secondly, it adds details to some brisk proofs given in these two last references.

Keywords: Symplectic geometry, geometric quantization, prequantization, polarization.

TABLE DES MATIÈRES

NOTATION

$\mathbb{R}_+$:	Nombres réels strictement positifs
$\mathbb{K}$:	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathscr{L}$:	La dérivée de Lie
d :	La dérivée extérieure
$\mathfrak{g}$:	L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = Lie(G) = \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid (L_g)_* X = X, \forall g \in G\}$ d'un groupe de Lie G
i :	Le nombre complexe $i = \sqrt{-1}$
$\boldsymbol{i}$:	Le produit intérieur
ι :	Une inclusion $\iota : M \hookrightarrow N$
$\mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{K})$:	L'ensemble des fonctions lisses à valeurs en $\mathbb{K}$ sur une variété différentielle M
$\mathfrak{X}(M;\mathbb{K})$:	L'ensemble des champs vectoriels lisses à valeurs en $\mathbb{K}$ sur une variété différentielle M
$\square$:	La preuve se termine ici
$\clubsuit$:	L'exemple se termine ici
F^* :	Le tiré-en-arrière par F, i.e. pour $F : M \to N$ et $\forall x \in N$ on a $F^* : T^*_{F(x)}N \to T^*_x M$
F_* :	Le poussé en avant par F, i.e. pour $F : M \to N$ et $\forall x \in M$ on a $F^* : T_x M \to T_{F(x)} N$
$Im(z)$:	La composante imaginaire de $z \in \mathbb{C}$
$Re(z)$:	La composante réelle de $z \in \mathbb{C}$
$im(F)$:	L'image d'une application F

À ma famille.

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord et avant tout à remercier mon directeur de recherche, M. François Lalonde, pour toute la confiance qu'il a eu en ma personne. Notre première rencontre fut fortuite. Je frappais de porte en porte au département de mathématiques pour rencontrer les professeurs et discuter de leurs champs d'intérêts et des possibilités de me superviser comme étudiant de maîtrise. C'est en parlant avec M. Lalonde qu'il a cerné ce dont j'avais besoin pour répondre à mes question : la géométrie différentielle, plus particulièrement la géométrie symplectique. Ayant déjà eu écho du mot « symplectique » lors d'un cours de mécanique analytique à Genève enseigné par M. Eckmann (un fan de V.I. Arnold (merci Arnold !)), M. Lalonde et moi-même avons eu quelques discussions à propos de mécanique, de fonctions méromorphes, d'Edward Witten et de gravitation. C'est alors qu'il a accepté de me prendre comme étudiant de maîtrise.

Puis les cours ont commencé. Merci à Étienne Bondo et Alex Ionut pour les grosses soirées passées à la Brûlerie St-Denis pour achever les devoirs de topologie algébrique. Merci à David Lapierre pour les discussions portant sur des questions simples mais étonnamment fertiles en questionnements. Merci à Laurence Boulanger pour tous ses conseils en lien avec les mathématiques et sur ce qu'est une maîtrise. Merci à Guillaume Poliquin et (encore une fois) Laurence Boulanger pour leur aide dans les cours de M. Vestislav Apostolov. Merci à Vestislav pour ses trois cours rudes mais très instructifs qui m'ont rappelé l'infâme cours d'Analyse 1 de Marlène.

Un énorme merci à Jean-Yves Welschinger qui m'a accueilli en stage de M2 à Lyon. Même si le sujet de stage qu'il m'a proposé n'était pas directement en lien avec mon sujet de maîtrise, il m'a beaucoup appris sur la géométrie différentielle/symplectique et sur la méthodologie de recherche. Merci encore à François Lalonde pour avoir financé le billet d'avion et une partie de l'hébergement à Lyon. Un grand merci à Rémi Crétois, collègue de bureau à Lyon, pour avoir été systématiquement à l'écoute de mes questions et pour avoir pris le temps d'y réfléchir avec moi autour d'un café devant un tableau. Merci à Gabrielle pour ces jolis moments passés à découvrir Lyon.

Merci infiniment à mes amis, sans qui la solitude de la maîtrise m'aurait monté à la tête. Merci à Thierry, Manu, Fred, Mathieu, Annabelle, Patricia, Alix, Popol, Anke, et les amis que je ne vois plus assez souvent.

Merci à ce fil électrique de la télévision qui, à l'âge d'un an et demi, électrocuta ma langue. Ce fut mon premier coup de foudre avec les sciences physiques. Merci à mon déguisement d'Halloween de chat qui m'a fait tombé tête première du lit à deux étages. C'est ce qui m'a donné la bosse des mathématiques.

Un immense merci à Corinne qui m'a rappelé au moins gogolplex fois qu'il me fallait écrire un mémoire et arrêter de calculer à gauche et à droite. Merci de m'avoir soutenu dans les moments les plus angoissants de la rédaction.

Et en dernier, mais non la moindre, merci à ma plus grande source d'inspiration : ma famille géniale. Merci à mes parents de m'avoir toujours encouragé à poursuivre les études. Robert, Sylvie, Claude, Ariane, Léonie, Miro, Yume, merci du fond du coeur.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

La quantification géométrique fait partie d'un grand programme de géométrisation de la mécanique quantique, tel que ce fut le cas jadis avec la gravité. La géométrie symplectique (et de contact) étant le langage naturel de la mécanique classique, il apparaît naturel de traduire les structures quantiques en termes symplectiques, ne serait-ce que pour la ressemblance titillante du crochet de Poisson avec le commutateur quantique.

La quantification géométrique procède comme suit :

1. Préquantification.

2. Polarisation.

3. Correction métaplectique.

La préquantification est une première tentative de construction d'opérateurs sur un espace de Hilbert à partir d'une variété symplectique et son algèbre de Poisson $(\mathscr{C}^\infty(M), \{,\})$. L'espace de Hilbert ainsi formé est trop gros et certains observables classiques ne génèrent pas les opérateurs quantiques attendus.

La polarisation est une première correction qui vient restreindre l'espace de Hilbert et corriger la forme de certains opérateurs, mais aussi restreindre l'ensemble des observables classiques quantifiables.

La correction métaplectique et le noyau Blattner-Kostant-Sternberg (alias « noyau BKS ») viennent quantifier une plus grande classe d'observables et corriger la forme de certains d'entre eux.

La littérature sur la quantification géométrique est vaste, mais quelque peu rude pour les premiers arrivants. Pour citer John Baez : « Geometric quantization is a marvelous tool for understanding the relation between classical physics and quantum physics. However, it's a bit like a power tool - you have to be an expert to operate it without running the risk of seriously injuring your brain. »

C'est pourquoi ce mémoire s'est restreint à minimiser le nombre d'affirmations qui n'y sont pas prouvées. Un simple survol de la quantification géométrique aurait été, selon moi, non seulement une goutte d'eau dans l'océan, mais une autre source de découragement pour les débutants qui n'ont pour bagage que quelques cours gradués de géométrie. Ainsi, le présent mémoire peut être vu comme une introduction à la quantification géométrique et surtout comme introduction à certains prérequis géométriques utilisés par la théorie de la quantification géométrique. Il est écrit de manière à ce qu'un géomètre de niveau maîtrise soit capable de le lire. Une connaissance générale en topologie, théorie des groupes, géométrie différentielle, mécanique analytique et mécanique quantique est supposée acquise du lecteur. Au début de chaque section je cite quelques références qui fourniront au lecteur une étude plus approfondie du sujet. La correction métaplectique et le noyau BKS ne sont pas couverts dans le présent ouvrage. Un lecteur laissé sur sa faim pourra connaître la suite dans mes principales références, c'est-à-dire (Sniatycki [18]) et (Woodhouse [21]). Une panoplie de lectures se retrouvent aussi sur Internet. Enfin, le début du mémoire comporte deux sections sur certains aspects des groupes de Lie, des algèbres de Lie ainsi que sur l'action des groupes de Lie qui ont pour but de faciliter l'introduction des concepts sous-jacents aux G-fibrés principaux et d'alléger quelques preuves.

CHAPITRE 2

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

« La science, la nouvelle noblesse ! Le progrès. Le monde marche !
Pourquoi ne tournerait-il pas ? C'est la vision des nombres. »
A. Rimbaud, Une Saison en Enfer.

Tout au long du mémoire, les variétés seront supposées lisses et réelles (sauf avis contraire).

2.1 Géométrie Symplectique

Références : (Arnol'd [2]), (Woodhouse [21]) et (de Buyl, Detournay et Voglaire [7]).

Définition (Forme symplectique) : Soit M, une variété (lisse et réelle). Une « forme symplectique » ω sur M est une 2-forme différentielle antisymétrique (i.e. $\forall x \in M, A, B \in T_xM, \omega_x(A,B) = -\omega_x(B,A)$) fermée (i.e. $d\omega = 0$) et non-dégénérée (i.e. $\forall x \in M, A \in (T_xM)\backslash^{\{0\}}, \exists B \in T_xM$ tel que $\omega_x(A,B) \neq 0$).

Les formes symplectiques n'existent que sur les variétés de dimension paire.

Définition (Variété symplectique) : Une « variété symplectique » (M,ω) est une variété M munie d'une forme symplectique ω.

Remarque Une variété symplectique (M,ω) de dimension $2n$ a une forme volume naturelle $\mu := \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n!}\omega^{\wedge n}$ où $\omega^{\wedge n} := \overbrace{\omega \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega}^{n \text{ fois}}$. On dit que μ est la « mesure de Liouville » sur (M,ω).

Définition (Champ vectoriel hamiltonien) : Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. On définit le « champ vectoriel hamiltonien » $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ de f par la « formule d'Hamilton » $\boldsymbol{i}_{X_f}\omega = -df$.

Définition (Système hamiltonien) : Un « système hamiltonien » (M,ω,f) est une variété symplectique (M,ω) munie d'une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

Théorème 2.1.1. ***(Thm. de Darboux [2]) :*** *Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension 2n. Alors pour tout point $x \in M$, il existe une carte locale $\{p_i, q^i\}, i \in \{1...n\}$, sur un ouvert $U \subset M$ contenant x telle que $\omega|_U = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$. On dit alors être dans un système de coordonnées canoniques, ou encore système de coordonnées de Darboux.*

Remarque En coordonnées de Darboux, la mesure de Liouville prend la forme $\mu = dp_1 \wedge ... \wedge dp_n \wedge dq_1 \wedge ... \wedge dq_n$.

Remarque En coordonnées de Darboux j'écrirai souvent par abus de langage $\omega|_U = d\vec{p} \wedge d\vec{q}$ au lieu de $\omega|_U = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$.

Exemple Soit (M,ω,f) un système hamiltonien et X_f le champ vectoriel hamiltonien de f. Soit U un ouvert de M en coodonnées de Darboux $\{\vec{p},\vec{q}\}$ où $\omega|_U = d\vec{p} \wedge d\vec{q}$. Ainsi $df|_U = \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \cdot d\vec{q} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot d\vec{p}$ et un calcul simple montre que $X_f|_U = \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}}$. Une courbe intégrale de X_f s'explicite sur U comme

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \\ \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \end{cases}$$

Qui sont les équations canoniques d'Hamilton.♣

Définition Soit (M,ω) une variété symplectique et Diff(M) le groupe des difféomorphismes de M. Définissons par $Symp(M,\omega) := \{F \in \mathrm{Diff}(M) | F^*\omega = \omega\}$ le groupe des « symplectomorphismes de (M,ω) ».

Définition Soit (M,ω), une variété symplectique. Définissons l'ensemble des « champs vectoriels hamiltoniens » sur M par $\mathfrak{X}^H(M) := \{X \in \mathfrak{X}(M) | \exists f \in \mathscr{C}^\infty(M), \boldsymbol{i}_X\omega = -df\}$. Un $X \in \mathfrak{X}^H(M)$ complet donne lieu à un groupe de difféomorphismes à 1-paramètre que l'on dit être son « flot hamiltonien ». On dénote par Ham(M,ω) le groupe des difféomorphismes donnés par un flot hamiltonien au temps $t = 1$.

Proposition 2.1.2. ***:*** *Soit (M,ω) une variété symplectique. Les champs vectoriels hamiltoniens préservent la forme symplectique.*

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{X}^H(M)$. Par la formule de Cartan on a $\mathscr{L}_X\omega = \boldsymbol{i}_X d\omega + d\boldsymbol{i}_X\omega$. Mais ω étant une forme symplectique, elle est donc fermée, i.e. $d\omega = 0$. Donc l'équation de cartan devient $\mathscr{L}_X\omega = d\boldsymbol{i}_X\omega$. Comme X est hamiltonien, il existe une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ telle que $\boldsymbol{i}_X\omega = -df$. On obtient donc $\mathscr{L}_X\omega = -ddf$. Mais la dérivée extérieure vérifie $d^2 = 0$. Donc $\mathscr{L}_X\omega = 0$. □

Lemme 2.1.3. *Le flot hamiltonien ϕ_f^t d'un champ vectoriel hamiltonien complet $X_f \in \mathfrak{X}^H(M)$ préserve la forme symplectique dans le sens que $\forall t \in \mathbb{R}, (\phi_f^t)^*\omega = \omega$. On a donc qu'à t fixé, $\phi_f^t \in Symp(M,\omega)$.*

Définition (Crochet de Poisson) : Soit (M,ω) une variété symplectique, $x \in M$ et $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Le « crochet de poisson » $\{f,g\}$ est la dérivée de f dans la direction du flot hamiltonien de g, i.e. $\{f,g\}(x) := \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\phi_g^t(x))$.

Proposition 2.1.4. *: Soit (M,ω) une variété symplectique, $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ et $X_f, X_g \in \mathfrak{X}^H(M)$ leurs champs vectoriels hamiltoniens. Soit aussi un $Y \in \mathfrak{X}(M)$ quelconque. Les énoncés suivants sont vrais :*

1 $\{f,g\} = X_g f$

2 $Yf = \omega(Y, X_f)$

3 $\{f,g\} = -\omega(X_f, X_g)$

4 $\{f,g\} = -\{g,f\}$ *et donc* $\{f,g\} = -X_f g$.

5 Le crochet de Poisson vérifie l'identité de Jacobi

$$0 = \{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\}$$

6 Le crochet de Lie de deux champs vectoriels hamiltoniens est un champ vectoriel hamiltonien. Plus explicitement on a $[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$.

7 Il existe une fonction h lisse définie à constante près telle que $\{f,g\} = -h_{[X_f,X_g]}$.

Démonstration. 1 Par définition, le crochet de poisson $\{f,g\}$ est la variation de f dans le flot de g, c'est-à-dire $\{f,g\} = df(X_g)$. Ce qui est exactement $X_g f$.

2 On a $Yf = df(Y) = \boldsymbol{i}_Y(df) = -\boldsymbol{i}_Y \boldsymbol{i}_{X_f}\omega = \omega(Y,X_f)$.

3 Par les points 1 et 2.

4 On a $\{f,g\} = -\omega(X_f,X_g) = \omega(X_g,X_f) = -\{g,f\}$. Et ainsi, $\{f,g\} = -X_f g$.

5 Soient $f,g,h \in \mathscr{C}^\infty(M)$ et $X_f,X_h,X_g \in \mathfrak{X}^H(M)$ leurs champs vectoriels hamiltoniens respectifs. Par la fermeture de la forme symplectique, on a :

$$
\begin{aligned}
0 &= d\omega(X_f,X_g,X_h) \\
&= X_f\omega(X_g,X_h) - X_g\omega(X_f,X_h) + X_h\omega(X_f,X_g) \\
&\quad -\omega([X_f,X_g],X_h) + \omega([X_f,X_h],X_g) - \omega([X_g,X_h],X_f) \\
&= X_f\{h,g,\} + X_g\{f,h\} + X_h\{g,f\} + [X_g,X_f]h + [X_f,X_h]g + [X_h,X_g]f \\
&= \{\{h,g\},f\} + \{\{f,h\},g\} + \{\{g,f\},h\} + X_gX_fh - X_fX_gh + X_fX_hg \\
&\quad -X_hX_fg + X_hX_gf - X_gX_hf \\
&= \{\{h,g\},f\} + \{\{f,h\},g\} + \{\{g,f\},h\} + X_g\{h,f\} + X_f\{g,h\} \\
&\quad +X_f\{g,h\} + X_h\{f,g\} + X_h\{f,g\} + X_g\{h,f\} \\
&= \{\{h,g\},f\} + \{\{f,h\},g\} + \{\{g,f\},h\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{g,h\},f\} \\
&\quad +\{\{g,h\},f\} + \{\{f,g\},h\} + \{\{f,g\},h\} + \{\{h,f\},g\} \\
&= \{\{f,g\},h\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{g,h\},f\}
\end{aligned}
$$

6 Par l'identité de Jacobi sur le crochet de Poisson, on a $0 = \{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\}$ et donc $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} = -\{h,\{f,g\}\}$, c'est-à-dire que l'on a $-X_f\{g,h\} + X_g\{f,h\} = -X_{\{f,g\}}h$, i.e. $X_fX_gh - X_gX_fh = -X_{\{f,g\}}h$, i.e. $[X_f,X_g]h = -X_{\{f,g\}}h$ et comme c'est pour tout h lisse on a de manière générale que $[X_f,X_g] = -X_{\{f,g\}}$, i.e. le crochet de Lie de deux champs vectoriels hamiltoniens est un champ vectoriel hamiltonien.

7 On a $-d\{f,g\} = \boldsymbol{i}_{X_{\{f,g\}}}\omega = -\boldsymbol{i}_{[X_f,X_g]}\omega$. Puisque le crochet de Lie de deux champ vectoriels hamiltoniens est un champ vectoriel hamiltonien, il existe une fonction $h_{[X_f,X_g]}$ lisse définie à constante près par $-\boldsymbol{i}_{[X_f,X_g]}\omega = dh_{[X_f,X_g]}$. Ainsi, à constante près, il existe un h vérifiant $\{f,g\} = -h_{[X_f,X_g]}$.

$\square$

Remarque Une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ est nécessairement constante le long de son flot hamiltonien puisque $X_f f = \{f,f\} = 0$.

Proposition 2.1.5. *Pour $\mathbb{K}$ qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la formule d'Hamilton induit un isomorphisme d'algèbres de Lie $(\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{K})/\mathbb{K}, \{,\}) \simeq (\mathfrak{X}^H(M,\mathbb{K}), [,])$.*

Démonstration. Soit (M,ω) une variété symplectique. L'équation d'Hamilton envoie $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ à un unique $X_f \in \mathfrak{X}^H(M)$. De même, l'équation d'Hamilton envoie un $X \in \mathfrak{X}^H(M)$ à un $f_X \in \mathscr{C}^\infty(M)$ définit à constante près, puisque pour une constante c on a $d(f_X + c) = df_X$. D'autre part, $\forall f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ il existe un $h \in \mathscr{C}^\infty(M)$ définit à constante près tel que $\{f,g\} = -h_{[X_f,X_g]}$. $\square$

Définition (Potentiel symplectique) : Soit (M,ω). Un « potentiel symplectique » Θ sur M est par définition une 1-forme telle que $d\Theta = \omega$.

Remarque Généralement, il n'existe pas de potentiel symplectique global. Néanmoins, il en existe toujours localement.

Définition Soit (M,ω) une variété symplectique. Soit F une distribution complexe sur M, i.e. l'assignement pour tout x en M d'un sous-espace vectoriel $F_x \subset (T_xM)^{\mathbb{C}}$ de dimension constante sur M. Soit $F^\perp$ la distribution symplectiquement perpendiculaire à F, i.e. $\forall x \in M, F_x^\perp := ker(\boldsymbol{i}_{F_x}\omega_x)$. On dit que F est :

1. symplectique si $F = TM$.
2. lagrangienne si $F = F^\perp$.
3. isotrope si $F \subset F^\perp$.
4. coisotrope si $F^\perp \subset F$.

2.2 Structures Complexes

Références : (Kobayashi et Nomizu [12]), (Woodhouse [21]), (da Silva [6]), (Moroianu [15]).

Sur les espaces vectoriels :

Définition ([12]) : Une « structure complexe » sur un espace vectoriel réel V (de dimension paire) est un endomorphisme linéaire $J : V \to V$ tel que $J^2 = -id_V$ (où $J^2 = J \circ J$). Je dénoterai par (V,J) un espace vectoriel muni d'une structure complexe.

Soit (V,J) un espace vectoriel réel de dimension réelle $dim_{\mathbb{R}}$V = 2n. On peut changer le corps $\mathbb{R}$ de V par le corps $\mathbb{C}$ via la multiplication par un complexe définie comme étant $\forall a,b \in \mathbb{R}, A \in V, (a+ib)A = aA + bJA$. Ceci fait de V un espace vectoriel complexe de dimension complexe n que l'on dénote $V^{(J)}$.

De même, étant donné un espace vectoriel complexe W de dimension complexe n, on peut reconstruire un espace vectoriel réel muni d'une structure complexe (V,J) de dimension réelle $2n$ en posant $J = i$ et en oubliant la multiplication par $\mathbb{C}$.

Définition ([12]) : Soit V un espace vectoriel réel de dimension $dim_{\mathbb{R}}V = 2n$. On dit que l'espace vectoriel complexe $V^{\mathbb{C}} = \{A+iB | A,B \in V\}$ de dimension complexe $dim_{\mathbb{C}}V^{\mathbb{C}} = 2n$ est le « complexifié de V ». On peut écrire $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ ou encore $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Définition ([21]) : Soit (V,ω,J), un espace vectoriel symplectique réel de dimension $dim_{\mathbb{R}}V = 2n$ muni d'une structure complexe J. Soit la forme bilinéaire $g : V \times V \to \mathbb{R}$ définie par $\forall A,B \in V, g(A,B) := \omega(A,JB)$. On dit que la structure complexe J est « compatible » avec ω si g est non-dégénérée et symétrique sur V, i.e. si g est un produit pseudo-riemannien sur V. On dit que J est positive quand g l'est (i.e. $\forall A \in V \backslash^{\{0\}}, g(A,A) > 0$), i.e. si g est un produit riemannien.

Remarquons que si J est compatible avec ω on a $\forall A,B \in V$ que $\omega(JA,JB) = g(JA,B) = g(B,JA) = \omega(B,J^2A) = \omega(B,-A) = \omega(A,B)$ et donc $\omega(J\cdot,J\cdot) = \omega(\cdot,\cdot)$, i.e. $J^*\omega = \omega$. D'autre part, $\forall A,B \in V$ on a $\omega(A,JB) = \omega(JA,J^2B) = \omega(JA,-B) = -\omega(JA,B)$

et donc $\omega(\cdot, J\cdot) = -\omega(J\cdot, \cdot)$. De plus, on a $\forall A, B \in V$ que $g(JX, JY) = \omega(JX, J^2Y) = \omega(JX, -Y) = \omega(X, JY) = g(X, Y)$, i.e. $g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$ et aussi $g(J\cdot, \cdot) = -g(\cdot, J\cdot)$. Et puisque $\forall A \in V, \omega(A, A) = 0$ on a directement que $\forall A \in V, g(JA, A) = 0$. Puis $\forall A, B \in V, \omega(A, B) = g(JA, B)$. Enfin, puisque $\forall A, B \in V, g(JA, JB) = g(A, B)$, le produit $g : V \times V \to \mathbb{R}$ est non seulement « riemannien » mais « hermitien » dans le sens qu'il est J-invariant.

Structures induites sur $V^{\mathbb{C}}$:

La structure complexe $J : V \to V$ induit une structure complexe sur $V^{\mathbb{C}}$, que je dénoterai aussi J, comme suit. Tout vecteur de $V^{\mathbb{C}}$ s'écrit $A + iB$ pour A et B en V. Définissons la structure complexe J sur $V^{\mathbb{C}}$ par $J : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}; J(A+iB) = (JA) + i(JB)$. Il est évident qu'un tel J est un endomorphisme de $V^{\mathbb{C}}$ tel que $J^2 = -id_{V^{\mathbb{C}}}$.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension réelle $2n$ muni d'une structure complexe J. Dénotons par $V^{(1,0)}$ le sous-espace vectoriel (complexe) de $V^{\mathbb{C}}$ donné par $V^{(1,0)} := \{A \in V^{\mathbb{C}} | JA = iA\}$ et par $V^{(0,1)}$ celui donné par $V^{(0,1)} = \{A \in V^{\mathbb{C}} | JA = -iA\}$. On a donc que l'endomorphisme $J : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ préserve les sous-espaces vectoriels $V^{(1,0)}$ et $V^{(0,1)}$. L'application $V^{(J)} \to V^{\mathbb{C}}; A \mapsto A - iJA$ est un isomorphisme entre $V^{(J)}$ et $V^{(1,0)}$ et l'application $V^{(J)} \to V^{\mathbb{C}}; A \mapsto A + iJA$ est un isomorphisme entre $V^{(J)}$ et $V^{(0,1)}$. On a $V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} + V^{(0,1)}$, $\overline{V^{(1,0)}} = V^{(0,1)}$ et $\overline{V^{(0,1)}} = V^{(1,0)}$.

Soit V réel symplectique muni de J adapté à ω. La forme symplectique $\omega : V \times V \to \mathbb{C}$ induit une structure symplectique sur $V^{\mathbb{C}}$, que je dénoterai aussi ω, comme suit. Toute paire de vecteurs de $V^{\mathbb{C}}$ s'écrit $(A+iB, C+iD)$ pour $A, B, C, D \in V$. Définissons la forme symplectique ω sur $V^{\mathbb{C}}$ par $\omega : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}; \omega(A+iB, C+iD) = \omega(A, C) + i\omega(A, D) + i\omega(B, C) - \omega(B, D)$. Il est évident qu'un tel ω est une forme symplectique sur $V^{\mathbb{C}}$. Remarquons que pour tout $A - iJA, B - iJB \in V^{(1,0)}$ on a $\omega(A - iJA, B - iJB) = \omega(A, B) - i\omega(A, JB) - i\omega(JA, B) - \omega(JA, JB) = \omega(A, B) - i\omega(A, JB) + i\omega(A, JB) - \omega(A, B) = 0$ et donc $\omega|_{V^{(1,0)} \times V^{(1,0)}} = 0$, i.e. $V^{(1,0)}$ est un sous-espace lagrangien de $(V^{\mathbb{C}}, \omega)$. De même, pour tout $A + iJA, B + iJB \in V^{(0,1)}$ on a $\omega(A + iJA, B + iJB) = 0$ et donc $\omega|_{V^{(0,1)} \times V^{(0,1)}} = 0$, i.e. $V^{(0,1)}$ est aussi un sous-espace lagrangien de $(V^{\mathbb{C}}, \omega)$.

Le produit hermitien (réel) g sur V induit par extension $\mathbb{C}$-linéaire un produit bilinéaire symétrique (complexe), aussi dénoté g, sur $V^{\mathbb{C}}$ donné par $\forall A, B, C, D \in V, g(A +$

$iB, C+iD) = g(A,C) + ig(A,D) + ig(B,C) - g(B,D)$.

Le produit $g : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ sur $V^{\mathbb{C}}$ induit un produit hermitien (complexe) $h : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ sur $V^{\mathbb{C}}$ donné par $\forall X,Y \in V^{\mathbb{C}}, h(X,Y) := g(\overline{X},Y)$. Un tel produit hermitien vérifie $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, X,Y \in V^{\mathbb{C}}, h(z_1X, z_2Y) = \overline{z}_1 z_2 h(X,Y)$ et surtout :

1. $\forall X,Y \in V^{\mathbb{C}}, h(\overline{X},\overline{Y}) = \overline{h(X,Y)} = h(Y,X)$

2. $\forall X \in (V^{\mathbb{C}})\backslash^{\{0\}}, h(X,X) \in \mathbb{R}\backslash^{\{0\}}$

3. $\forall X,Y \in V^{(1,0)}, h(\overline{X},Y) = 0$ et $\forall X,Y \in V^{(0,1)}, h(\overline{X},Y) = 0$

La propriété 3 revient à $h|_{V^{(1,0)} \times V^{(0,1)}} = 0$ et $h|_{V^{(0,1)} \times V^{(1,0)}} = 0$.

Soient ω, h et J sur $V^{\mathbb{C}}$. La définition $h(\cdot,\cdot) := g(\bar{\cdot},\cdot)$ revient à $h(\cdot,\cdot) = \omega(\bar{\cdot}, J\cdot)$.

<u>*Structures induites sur $V^{(J)}$:*</u>

Soit V réel symplectique muni de J adapté à ω. Le produit hermitien g sur V et la forme symplectique ω sur V induisent un produit hermitien (complexe) $h_J : V^{(J)} \times V^{(J)} \to \mathbb{C}$ sur $V^{(J)}$ comme suit. Soient $A,B \in V$ quelconques. Ils sont aussi des éléments de $V^{(J)}$. Définissons alors $h_J(A,B) := g(A,B) + i\omega(A,B)$ où à gauche de l'égalité on considère A et B en $V^{(J)}$ et à droite en V. Ainsi, $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$, le produit hermitien $h_J((a+ib)A,(c+id)B)$ sur $V^{(J)}$ est défini comme $g(aA+bJA, cB+dJB) + i\omega(aA+bJA, cB+dJB)$ sur V. La forme hermitienne h_J vérifie $\forall A,B \in V^{(J)}, h_J(iA,B) = -ih_J(A,B)$ puisque $h_J(iA,B) = g(JA,B) + i\omega(JA,B) = \omega(A,B) - i\omega(A,JB) = \omega(A,B) - ig(A,B) = -i(g(A,B) + i\omega(A,B)) = -ih_J(A,B)$. Pareillement, $\forall A,B \in V^{(J)}, h_J(A,iB) = ih_J(A,B)$ et ainsi $\forall z_1,z_2 \in \mathbb{C}, A,B \in V^{(J)}, h_J(z_1A, z_2B) = \overline{z}_1 z_2 h_J(A,B)$. De ceci et des propriétés de ω et de J découlent directement les trois propriétés d'un produit hermitien (énumérées ci-haut) sur un espace vectoriel complexe. (Woodhouse [21]) utilise la notation $< \cdot,\cdot >_J$ au lieu de $h_J(\cdot,\cdot)$.

On dit que $g_J := Im(h_J)$ est une métrique kählerienne et que $\omega_J := Im(h_J)$ est une forme kählerienne sur $V^{(J)}$. Un triple (V,ω,J) où J est compatible avec ω peut ainsi être vu comme une paire $(V^{(J)}, h_J)$ que l'on dit être un « espace vectoriel kählerien » (le produit hermitien h_J sous-tend g_J et ω_J).

<u>*Remarques entre $V^{\mathbb{C}}$ et $V^{(J)}$:*</u>

Soit (V,ω,J) qui peut être vu comme $(V^{(J)},h_J)$ kählerienne. La forme hermitienne $h: V^{\mathbb{C}}\times V^{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ sur $V^{\mathbb{C}}$ restreinte à $V^{(1,0)}$ concorde avec le double de la forme hermitienne $h_J: V^{(J)}\times V^{(J)}\to\mathbb{C}$ sur $V^{(J)}$. En effet, soient $A-iJA, B-iJB\in V^{(1,0)}$ quelconques où $A,B\in V$. Calculons

$$\begin{aligned}
h(A-iJA,B-iJB) &= g(A,B)-ig(A,JB)+ig(JA,B)+g(JA,JB)\\
&= g(A,B)+ig(JA,B)+ig(JA,B)+g(A,B)\\
&= 2g(A,B)+2i\omega(A,B)\\
&= 2(g(A,B)+i\omega(A,B))\\
&= 2h_J(A,B)
\end{aligned}$$

Ainsi, $h|_{V^{(1,0)}\times V^{(1,0)}}=2h_J|_{V^{(J)}\times V^{(J)}}$. De même, $h|_{V^{(0,1)}\times V^{(0,1)}}=2\overline{h}_J|_{V^{(J)}\times V^{(J)}}$.

Sur les variétés différentielles :

Définition Soit M, une variété différentielle de dimension paire. Une « structure presque-complexe » sur M est un tenseur $J\in\Gamma(TM\otimes T^*M)$ tel que $\forall x\in M, J_x: T_xM\to T_xM$ et J_x est une structure complexe sur T_xM. La paire (M,J) est dite « variété presque-complexe».

Soit (M,J), une variété presque-complexe. On dénote par $(TM)^{(J)}$ le fibré vectoriel complexe obtenu par $(TM)^{(J)}=\bigsqcup_{x\in M}(T_xM)^{(J)}$. De la même manière, on dénote par $(TM)^{\mathbb{C}}$ le fibré vectoriel complexe obtenu par $(TM)^{\mathbb{C}}=\bigsqcup_{x\in M}(T_xM)^{\mathbb{C}}$.

Définition On définit le « tenseur de Nijenhuis N_J » d'une structure presque-complexe J par $\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M), N_J(X,Y):=[X,Y]+J[JX,Y]+J[X,JY]-[JX,JY]$. Une structure presque-complexe J est dite « intégrable » si son tenseur de Nijenhuis N_J meurt identiquement sur tout M.

Définition Soit (M,ω,J) une variété symplectique munie d'une structure presque-complexe intégrable. Pour tout $x\in M$, définissons l'application bilinéaire $g_x: T_xM\times T_xM\to\mathbb{R}$ par $\forall A,B\in T_xM, g_x(A,B):=\omega_x(A,JB)$. On dit que J est « compatible » avec ω si g est une métrique riemannienne. Puisque J est intégrable, on peut voir (M,ω,J) comme variété complexe $M^{(J)}$ munie d'un produit hermitien h_J, auquel cas on dit que $(M^{(J)}, h_J)$ est une variété « kählerienne » de métrique kählerienne $g_J = Re(h_J)$ et de forme kählerienne $\omega_J = Im(h_J)$.

Exemple Soit (M, ω, J), où $M = \mathbb{R}^2$, une variété symplectique de dimension 2 munie d'une presque-complexe. En coordonnées de Darboux, $\omega = dp \wedge dq$. Prenons $J = dp \otimes \frac{\partial}{\partial q} - dq \otimes \frac{\partial}{\partial p} \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$. On a bien $J^2 = -id_{TM}$ puisque

$$\begin{aligned} J \circ J &= (dp \otimes \frac{\partial}{\partial q} - dq \otimes \frac{\partial}{\partial p}) \circ (dp \otimes \frac{\partial}{\partial q} - dq \otimes \frac{\partial}{\partial p}) \\ &= dp(dp \otimes \frac{\partial}{\partial q} - dq \otimes \frac{\partial}{\partial p}) \otimes \frac{\partial}{\partial q} - dq(dp \otimes \frac{\partial}{\partial q} - dq \otimes \frac{\partial}{\partial p}) \otimes \frac{\partial}{\partial p} \\ &= -dq \otimes \frac{\partial}{\partial q} - dp \otimes \frac{\partial}{\partial p} \\ &= -id_{TM} \end{aligned}$$

La structure presque-complexe J est compatible avec ω puisque

$$\begin{aligned} g(\cdot,\cdot) &= \omega(\cdot, J\cdot) = (dp \wedge dq)(\cdot, (dp \otimes \frac{\partial}{\partial q} - dq \otimes \frac{\partial}{\partial p})\cdot) \\ &= dp(\cdot) \otimes (dq(dp \otimes \frac{\partial}{\partial q} - dq \otimes \frac{\partial}{\partial p})\cdot) - dq(\cdot) \otimes (dp(dp \otimes \frac{\partial}{\partial q} - dq \otimes \frac{\partial}{\partial p})\cdot) \\ &= dp(\cdot) \otimes (dp(\cdot)) - dq(\cdot) \otimes (-dq(\cdot)) \\ &= (dp \otimes dp + dq \otimes dq)(\cdot,\cdot) \end{aligned}$$

et l'on a donc $g = dp \otimes dp + dq \otimes dq$ bilinéaire symétrique non-dégénérée. Regardons M comme $M^{\mathbb{C}}$. Des coordonnées complexes sur $M^{\mathbb{C}}$ sont données par $\{z, \bar{z}\}$ où $z = p + iq$ et $\bar{z} = p - iq$. Ainsi, $\omega = dp \wedge dq = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$. L'espace tangeant est donné par $(TM)^{\mathbb{C}} = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\} = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}\}$ où $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial p} - i\frac{\partial}{\partial q})$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial p} + i\frac{\partial}{\partial q})$. Puisque $\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial}{\partial q} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$, $dp = \frac{dz + d\bar{z}}{2}$, $dq = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$ et $J = dp \otimes \frac{\partial}{\partial q} - dq \otimes \frac{\partial}{\partial p}$, on trouve $J = idz \otimes \frac{\partial}{\partial z} - id\bar{z} \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Comme $\frac{\partial}{\partial p} - iJ\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} - i\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial z}$, on peut écrire $(TM)^{(1,0)} = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial z}\}$ et de même $(TM)^{(0,1)} = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\}$. On a bien que $(TM)^{(1,0)}$ et $(TM)^{(0,1)}$ sont des sous-fibrés propres de J (de valeurs propres i et $-i$ respectivement). Et l'on a aussi que $(TM)^{(1,0)}$ et $(TM)^{(0,1)}$ sont des sous-fibrés lagrangiens de $(TM)^{\mathbb{C}}$.

Un calcul direct de $h = g + i\omega$ montre que $h = d\bar{z} \otimes dz$.

Puisque $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 = 2$, le tenseur de Nijenhuis N_J meurt identiquement sur tout $\mathbb{R}^2$. Donc J est intégrable. Donc $(\mathbb{R}^2, \omega, J)$ est kählerienne. Donc on peut voir $M = \mathbb{R}^2$ comme une variété complexe $M^{(J)} = \mathbb{C}$. La base $span_{\mathbb{R}}\{\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}\} = span_{\mathbb{R}}\{\frac{\partial}{\partial p}, J\frac{\partial}{\partial p}\}$ de TM induit la base $span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial p}\}$ de $(TM)^{(J)}$. Puisque g est bilinéaire symétrique non-dégénérée posons $h_J := g + i\omega$ comme structure hermitienne induite sur $(TM)^{(J)}$. De même on a $\omega_J := Im(h_J)$ comme forme kählerienne sur $M^{(J)}$. ♣

Remarque Tout comme on peut écrire $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$, on peut écrire $\mathfrak{X}(M;\mathbb{C}) = \Gamma((TM)^{\mathbb{C}})$. Les champs vectoriels holomorphes sont en $\Gamma((TM)^{(1,0)})$ et ceux anti-holomorphes sont en $\Gamma((TM)^{(0,1)})$. Une polarisation donnée par les champs vectoriels anti-holomorphes sont donc en $\Gamma((TM)^{(0,1)})$.

Définition Soient (M, J) et (M', J') deux variétés munies de structures presque-complexes. Une fonction complexe $f : M \to \mathbb{C}$ est dite « holomorphe » si $df \circ J = idf$. Une application $F : M \to M'$ est dite « pseudo-holomorphe », ou encore « (J, J')-holomorphe », si $F_* \circ J = J' \circ F_*$.

2.3 Groupes et Algèbres de Lie

Références : (Kobayashi et Nomizu [12])

Définition (Groupe de Lie [12]) : Un « groupe de Lie » est un groupe G qui est aussi une variété (lisse et réelle) de dimension finie et dans lequel les opérations de multiplication $G \times G \to G; (g,h) \mapsto gh$ et d'inversion $G \to G; g \mapsto g^{-1}$ sont des applications lisses.

Remarque Les opérations « multiplication » et « inversion » sont lisses si l'application $(g,h) \mapsto g^{-1}h$ est lisse.

Définition Soit G un groupe de Lie.

- On dénote « l'action à gauche sur G » par $L : G \times G \to G; (g,h) \mapsto L_g(h) = gh$.
- On dénote « l'action à droite sur G » par $R : G \times G \to G; (g,h) \mapsto R_g(h) = hg$.
- On dénote par $\mathrm{Aut}(G)$ le « groupe des automorphismes » de G (i.e. isomorphismes de G dans G).

Remarque On peut voir les actions à gauche et à droite comme applications

$L : G \to \mathrm{Aut}(G); g \mapsto L_g$

$R : G \to \mathrm{Aut}(G); g \mapsto R_g$

Définition Définissons « l'automorphisme intérieur » $f : G \times G \to G; (g,h) \mapsto f_g(h) = ghg^{-1}$.

Remarque L'automorphisme intérieur vérifie $\forall g \in G, f_g = R_{g^{-1}} L_g = L_g R_{g^{-1}}$ et peut ainsi être vu comme $f : G \to \mathrm{Aut}(G); g \mapsto f_g$.

Définition Soit $A \in \mathfrak{X}(G)$. On dit de A qu'il est

1. « invariant à gauche » s'il est invariant sous le poussé-en-avant de l'action à gauche, i.e. si $\forall g,h \in G, (L_g)_* A_h = A_{gh}$.

2. « invariant à droite » s'il est invariant sous le poussé-en avant de l'action à droite, i.e. si $\forall g,h \in G, (R_g)_* A_h = A_{hg}$.

Le crochet de Lie sur les champs vectoriels $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(G); A,B \mapsto [A,B]$ est bilinéaire, alterné et vérifie l'identité de Jacobi. Le poussé-en-avant d'automorphismes de G préserve le crochet de Lie. Ainsi, pour $A,B \in \mathfrak{X}(G)$, tous deux invariants à gauche, i.e. $\forall g \in G, (L_g)_* A = A$ et $(L_g)_* B = B$, on a $[A,B] = [(L_g)_* A, (L_g)_* B] = (L_g)_*[A,B]$ et donc $[A,B]$ est invariant à gauche. Ainsi, le crochet de Lie envoie deux champs vectoriel invariants à gauche à un champ vectoriel invariant à gauche.

Définition (Algèbre de Lie d'un groupe de Lie [12]) : L'algèbre de lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de lie G est définie comme étant l'ensemble des champs vectoriels invariants à gauche sur G avec l'addition, la multiplication et l'opération crochet usuelle. C'est-à-dire $\mathfrak{g} := \{A \in \mathfrak{X}(G) | \forall g \in G, (L_g)_* A = A\}$ muni du crochet de Lie $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; (A,B) \mapsto [A,B]$. On dénote aussi $\mathfrak{g}$ par $Lie(G)$.

Proposition 2.3.1. *$\mathfrak{g}$ est isomorphe à T_eG muni du crochet de Lie.*

Démonstration. Soit $A \in \mathfrak{g}$. Alors $A_e \in T_eG$ est uniquement défini. Inversement, soit $A_e \in T_eG$. En prenant $A \in \mathfrak{X}(G)$ tel que $\forall g \in G, A_g := (L_g)_* A_e$ on a $\forall g,h \in G, (L_g)_* A_h = (L_g)_*(L_h)_* A_e = (L_g L_h)_* A_e = (L_{gh})_* A_e = A_{gh}$. Donc $A \in \mathfrak{g}$. Enfin pour tout $g \in G$, $(L_g)_*$ préserve le crochet. □

Proposition 2.3.2. *L'action à droite induit une application $(R)_{*e} : T_eG \to \mathfrak{g}; A_e \mapsto A$.*

Démonstration. L'action à droite $R : G \to \mathrm{Aut}(G)$ a que $(R)_* : TG \to T_R\mathrm{Aut}(G)$ et $R_e = id_G$, et donc $(R)_{*e} : T_eG \to T_{id_G}\mathrm{Aut}(G)$. Ce qui revient à $(R)_{*e} : T_eG \to \mathfrak{X}(G)$. Remarquons que $\forall g,h \in G, R_g(h) = hg = L_h(g)$ et ainsi, $\forall g \in G, R(g)_* = (L_g)_*$. Donc, $\forall A_e \in T_eG$ on a $(R_* A_e)_g = R(g)_* A_e = (L_g)_* A_e$. C'est-à-dire que $\forall A_e \in T_eG$, l'application R_* envoie $A_e \in T_eG$ à un champ vectoriel invariant à gauche sur G. Donc, l'action à droite nous donne en fait une application $(R)_{*e} : T_eG \to \mathfrak{g}; A_e \mapsto A$. □

Je garderai la notation $\mathfrak{g}$ pour les champs vectoriels invariants à gauche sur G et T_eG pour le tangeant à l'identité de G. Évidemment, $dim(\mathfrak{g}) = dim(T_eG) = dim(G)$. Donc $\mathfrak{g}$ a la structure d'un espace vectoriel de dimension $dim(G)$.

Définition Puisque l'automorphisme intérieur $f_g : G \to G$ est un isomorphisme lisse, l'application $(f_g)_* : T_hG \to T_{ghg^{-1}}G$ envoie aussi des champs vectoriels sur G à des champs vectoriels sur G. Définissons pour tout $g \in G$ l'application $Ad_g := (f_g)_* : \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(G)$. Ainsi, $Ad_g = (R_{g^{-1}}L_g)_* = (L_gR_{g^{-1}})_* = (R_{g^{-1}})_*(L_g)_* = (L_g)_*(R_{g^{-1}})_*$.

Remarque Remarquons que pour $A \in \mathfrak{g}$, on a par invariance à gauche de A que $\forall g,h \in G, Ad_gA_h = (R_{g^{-1}})_*(L_g)_*A_h = (R_{g^{-1}})_*A_{gh}$, i.e. $\forall g,h \in G, A \in \mathfrak{g}$ on a $Ad_gA_h = (R_{g^{-1}})_*A_{gh}$.

Proposition 2.3.3. *L'application $Ad : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est une représentation de G sur $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathfrak{g}$ quelconque. On a $\forall g,h \in G, (L_h)_*Ad_gA = (L_h)_*(R_{g^{-1}})_*A = (L_hR_{g^{-1}})_*A = (R_{g^{-1}}L_h)_*A = (R_{g^{-1}})_*(L_h)_*A = (R_{g^{-1}})_*A = Ad_gA$, i.e. Ad_gA est invariant à gauche. D'autre part, puisque $\forall g \in G, Ad_g = (f_g)_*$ et que f_g est un automorphisme, on a $\forall g \in G, A, B \in \mathfrak{g}, Ad_g[A,B] = [Ad_gA, Ad_gB]$, i.e. $\forall g \in G, Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Ensuite, $\forall g_1, g_2 \in G$ et $\forall A \in \mathfrak{g}$, on a $Ad_{g_1g_2}A = (R_{(g_1g_2)^{-1}})_*A = (R_{g_2^{-1}g_1^{-1}})_*A = (R_{g_1^{-1}}R_{g_2^{-1}})_*A = (R_{g_1^{-1}})_*(R_{g_2^{-1}})_*A = Ad_{g_1}Ad_{g_2}A$. Donc $Ad_{g_1g_2} = Ad_{g_1}Ad_{g_2}$, i.e. Ad est un homomorphisme de groupes. Puisque $\mathfrak{g}$ a la structure d'un espace vectoriel de dimension finie $dim(G)$, l'application $Ad : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est une représentation de G sur $\mathfrak{g}$. $\square$

Définition La représentation $Ad : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est dite « représentation adjointe de G ».

Remarque Remarquons que Ad_g envoie T_eG à T_eG. Remarquons aussi que dans le cas d'un groupe de Lie abélien on a $\forall g,h \in G, (R_{g^{-1}}L_g)h = ghg^{-1} = gg^{-1}h = h$ et donc $f_g = R_{g^{-1}}L_g = id_G$. Ainsi, $Ad_g = (f_g)_* = (id_G)_* = id_{TG}$. C'est-à-dire que la représentation adjointe d'un groupe de Lie abélien est triviale.

Définition Une forme différentielle ω sur G est dite « invariante à gauche » si pour tout $g,h \in G$ on a $(L_g)^*\omega_h = \omega_h$, ce qui revient à $\omega_{gh}(L_g)_* = \omega_h$.

Remarque Si ω est une forme invariante à gauche sur G, alors $d\omega = d((L_g)^*\omega) = (L_g)^*d\omega$. Ainsi, la dérivée extérieure d'une forme invariante à gauche est aussi invariante à gauche.

Définition On définit l'espace vectoriel dual $\mathfrak{g}^*$ par l'ensemble des 1-formes invariantes à gauche sur G, i.e. $\mathfrak{g}^* = \{\omega \in \Omega^1(G) | (L_g)^*\omega_h = \omega_h, \forall g, h \in G\}$.

Proposition 2.3.4. *$\mathfrak{g}^*$ est l'espace dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans le sens que pour $A \in \mathfrak{g}$ et $\omega \in \mathfrak{g}^*$, la fonction $\omega(A)$ est constante sur G.*

Démonstration. La condition $\omega_{gh}(L_g)_* = \omega_h$ est équivalente à $\omega_g = \omega_e(L_{g^{-1}})_*$ et donc $\forall g \in G, A \in \mathfrak{g}, \omega_g(A_g) = \omega_e((L_{g^{-1}})_* A_g) = \omega_e(A_e) = c$, une constante. $\square$

Proposition 2.3.5. $\forall A, B \in \mathfrak{g}, \omega \in \mathfrak{g}^*, d\omega(A,B) = -\omega([A,B])$.

Démonstration. Puisque pour $\omega \in \mathfrak{g}^*$ et $A, B \in \mathfrak{g}$ quelconques on a $\omega(A)$ et $\omega(B)$ constants, alors $d\omega(A,B) = A\omega(B) - B\omega(A) - \omega([A,B]) = -\omega([A,B])$. $\square$

On dit que $d\omega(A,B) = -\omega([A,B])$ est la formule de Maurer-Cartan.

Définition La « 1-forme canonique » (ou forme de Maurer-Cartan) θ sur G est la 1-forme invariante à gauche et à valeurs en T_eG déterminée de manière unique par $\theta_e(A_e) = A_e, A_e \in T_eG$.

Il est aisé de voir que $\forall g \in G, A \in \mathfrak{g}$ on a $\theta_g(A_g) = A_e$. Ainsi $\forall g \in G, A \in \mathfrak{g}, \theta_g(A_g) = (L_{g^{-1}})_* A_g$. Un calcul direct montre que $\forall A, B \in \mathfrak{g}, \theta([A,B]) = [\theta(A), \theta(B)]$. La formule de Maurer-Cartan appliquée à la 1-forme de Maurer-Cartan se réécrit naturellement en $\forall A, B \in \mathfrak{g}, d\theta(A,B) = -[\theta(A), \theta(B)]$ ou même $d\theta(A,B) = -(\theta \wedge \theta)(A,B)$. Et puisque $[\theta, \theta](A,B) = [\theta(A), \theta(B)] - [\theta(B), \theta(A)] = 2[\theta(A), \theta(B)]$ on peut écrire $d\theta(A,B) = -\frac{1}{2}[\theta, \theta](A,B)$.

Proposition 2.3.6. $\forall g, h \in G, Ad_g\theta_h = \theta_{ghg^{-1}} Ad_g$.

Démonstration. Puisque $Ad_g = (f_g)_* = (R_{g^{-1}} L_g)_*$ et $\theta_h = (L_{h^{-1}})_*$, on a

$$\begin{aligned}
Ad_g\theta_h &= (R_{g^{-1}}L_g)_*(L_{h^{-1}})_* = (R_{g^{-1}}L_gL_{h^{-1}})_* = (R_{g^{-1}}L_{gh^{-1}})_* \\
&= (L_{gh^{-1}}R_{g^{-1}})_* = (L_{gh^{-1}g^{-1}}L_gR_{g^{-1}})_* = (L_{(ghg^{-1})^{-1}})_*(L_gR_{g^{-1}})_* \\
&= \theta_{ghg^{-1}}Ad_g
\end{aligned}$$

$\square$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, j'écrirai simplement $(Ad)\theta = \theta(Ad)$.

Remarque Sur un groupe de Lie linéaire G, on a $\forall g \in G$ que $(L_g)_* = L_g$ et $(R_g)_* = R_g$. Ainsi, pour $A \in \mathfrak{g}$ on a $A_g = gA_e$. De même, $\theta_g = L_{g^{-1}}$. On a bien $\theta_g(A_g) = g^{-1}gA_e = A_e$.

2.4 Action d'un groupe de Lie

Références : (Kobayashi et Nomizu [12]).

Définition (Action d'un groupe de Lie [12]) : Soient un groupe de Lie G et une variété M. On dit que G agit différentiablement par la droite sur M via $\Phi : M \times G \to M; (x,g) \mapsto \Phi_g(x)$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Tout élément $g \in G$ induit une transformation Φ_g de M, dénotée par $x \to x \cdot g = \Phi_g(x)$ où $x \in M$;

2. $\Phi : M \times G \to M; (x,g) \mapsto x \cdot g = \Phi_g(x)$ est une application différentiable ;

3. $x \cdot (g \cdot h) = (x \cdot g) \cdot h, \forall g,h \in G$ et $x \in M$.

Pour un $x \in M$, j'entendrai par $\{x \cdot g | g \in G\}$ la G-orbite passant par x.

Soit $\mathrm{Diff}(M)$, le groupe des difféomorphismes de M muni de la loi de composition d'applications, dont l'élément identité est id_M. L'action de G sur M donnée par $\Phi : M \times G \to M; (x,g) \mapsto x \cdot g = \Phi_g(x)$ peut se reformuler en $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(M); g \mapsto \Phi_g$. L'application $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ est différentiable. Soit $im(\Phi)$, l'image de Φ, vue comme application $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(M)$.

Définition $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M) := im(\Phi) = \{F \in \mathrm{Diff}(M) | \exists g \in G; F = \Phi_g\}$.

Proposition 2.4.1. $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ *est un antihomomorphisme.*

Démonstration. $\forall g,h \in G, x \in M$ on a $\Phi_{gh}(x) = x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h = \Phi_h(x \cdot g) = \Phi_h \circ \Phi_g(x)$. □

Proposition 2.4.2. $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ *muni de la loi de composition d'applications est un sous-groupe de* $\mathrm{Diff}(M)$.

Démonstration. Montrons que $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ est bel et bien un groupe. La composition d'éléments de $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ est aussi en $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ car tout élément de $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ s'écrit Φ_g pour un $g \in G$ et que pour deux $\Phi_g, \Phi_h \in \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ on a $\Phi_g \Phi_h = \Phi_{hg} \in \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$.

D'autre part, pour e l'élément identité en G on a $\Phi_g = id_M$ l'élément identité en $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$. Puis $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ est associatif puisque G est associatif et $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ on a $\Phi_{g_1}(\Phi_{g_2}\Phi_{g_3}) = \Phi_{g_1}\Phi_{g_3 g_2} = \Phi_{g_3 g_2 g_1} = \Phi_{g_2 g_1}\Phi_{g_3} = (\Phi_{g_1}\Phi_{g_2})\Phi_{g_3}$. Enfin, pour tout élément $\Phi_g \in \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ il existe un élément inverse $(\Phi_g)^{-1} = \Phi_{g^{-1}}$ car G est un groupe et g a son inverse g^{-1} et $\Phi_g(\Phi_g)^{-1} = \Phi_g\Phi_{g^{-1}} = \Phi_{g^{-1}g} = \Phi_e = id_M$ et de même pour $(\Phi_g)^{-1}\Phi_g = id_M$. Enfin, $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M)$ puisque $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ est un sous-ensemble de $\mathrm{Diff}(M)$. □

Remarque Alors que $\mathrm{Diff}(M)$ est un groupe de dimension infinie, $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ est un groupe de dimension finie puisque G est de dimension finie et Φ est différentiable.

Une analyse plus élaborée de $\mathrm{Diff}(M)$ en tant que groupe de Lie est délicate puisque de dimension infinie. Par souci de simplicité, je vais donc restreindre la suivante étude au groupe de Lie de dimension finie $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$. L'application $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(M)$ induit naturellement une application $G \to \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ en se restreignant à son image que j'écrirai aussi Φ, i.e. $\Phi : G \to \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$.

Définition Une action Φ de G sur M est dite « transitive » sur un sous-ensemble $U \subset M$ si $\forall x, y \in U, \exists g \in G$ tel que $y = x \cdot g$.

Remarque Pour tout $x \in M$, l'action Φ de G sur M est transitive sur la G-orbite passant par x.

Définition On dit que G agit « efficacement » (resp. « librement ») sur M si $\Phi_g(x) = x, \forall x \in M$ (resp. pour au moins un $x \in M$) implique que $g = e$.

Remarque Agir librement est plus fort qu'agir efficacement, i.e. une action libre est efficace mais une action efficace n'est pas toujours libre.

Exemple L'action canonique du groupe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sur lui-même est libre et efficace, mais l'action canonique de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sur $(\mathbb{C}, \cdot)$ est efficace mais pas libre puisque l'origine de $(\mathbb{C}, \cdot)$ est un point fixe sous l'action canonique de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sur $(\mathbb{C}, \cdot)$.♣

Remarquons que $\Phi : G \to \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ agit efficacement si $\Phi_g = id_M \Rightarrow g = e$. En notant $ker(\Phi) = \{g \in G | \Phi_g = id_M\}$, on a que Φ est efficace si $ker(\Phi) = e$, ce qui revient à dire que Φ est injectif.

Par définition, l'application $\Phi : G \to \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ est surjective. Puisqu'une action efficace Φ implique Φ injective, on en conclut que si Φ agit efficacement alors $\Phi : G \to \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ est bijective, et en particulier est un *antiisomorphisme* (i.e. un antihomomorphisme de groupes bijectif).

Remarque À partir d'ici je ne considérerai que des actions de groupes de Lie efficaces. Ainsi, $\Phi : G \to \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ sera toujours un antiisomorphisme et son inverse $\Phi^{-1} : \mathrm{Diff}^{\Phi}(M) \to G; \Phi_g \mapsto \Phi^{-1}(\Phi_g) = g$ est bien défini. D'autre part, $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ devient un groupe de Lie antiisomorphe à G et tout élément de $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ s'écrit Φ_g pour un unique $g \in G$.

L'action à gauche $L : G \to \mathrm{Aut}(G); g \mapsto L_g$ telle que $L_g : G \to G; L_g(h) = gh$ (resp. à droite $R : G \to \mathrm{Aut}(G); g \mapsto R_g$ telle que $R_g : G \to G; R_g(h) = hg$) sur G s'envoie via l'antiisomorphisme Φ à une action à droite $\tilde{R} : \mathrm{Diff}^{\Phi}(M) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)); \Phi_g \mapsto \tilde{R}_{\Phi_g}$ telle que $\tilde{R}_{\Phi_g} : \mathrm{Diff}^{\Phi}(M) \to \mathrm{Diff}^{\Phi}(M); \tilde{R}_{\Phi_g}(\Phi_h) = \Phi_h \Phi_g$ (resp. à gauche $\tilde{L} : \mathrm{Diff}^{\Phi}(M) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)); \Phi_g \mapsto \tilde{L}_{\Phi_g}$ telle que $\tilde{L}_{\Phi_g} : \mathrm{Diff}^{\Phi}(M) \to \mathrm{Diff}^{\Phi}(M); \tilde{L}_{\Phi_g}(\Phi_h) = \Phi_g \Phi_h$) sur $\mathrm{Diff}(M)$. On a que $\tilde{R}_{\Phi_g} = \Phi_{L_g \Phi^{-1}}$ et $\tilde{L}_{\Phi_g} = \Phi_{R_g \Phi^{-1}}$. En effet, $\forall \Phi_h \in \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ on a $\tilde{R}_{\Phi_g}(\Phi_h) = \Phi_h \Phi_g = \Phi_{gh} = \Phi_{L_g h} = \Phi_{L_g \Phi^{-1}(\Phi_h)}$ (resp. $\tilde{L}_{\Phi_g}(\Phi_h) = \Phi_g \Phi_h = \Phi_{hg} = \Phi_{R_g h} = \Phi_{R_g \Phi^{-1}(\Phi_h)}$).

D'autre part, puisque $(\Phi^{-1})_* = (\Phi_*)^{-1}$, de $\tilde{R}_{\Phi_g} = \Phi_{L_g \Phi^{-1}}$ et $\tilde{L}_{\Phi_g} = \Phi_{R_g \Phi^{-1}}$ on trouve que $(\tilde{R}_{\Phi_g})_* = \Phi_*(L_g)_*(\Phi)_*^{-1}$ et $(\tilde{L}_{\Phi_g})_* = \Phi_*(R_g)_*(\Phi)_*^{-1}$. Ce qui se reformule en $(\tilde{R}_{\Phi_g})_* \Phi_* = \Phi_*(L_g)_*$ et $(\tilde{L}_{\Phi_g})_* \Phi_* = \Phi_*(R_g)_*$.

De même, l'automorphisme intérieur $f : G \to \mathrm{Aut}(G); f_g = R_{g^{-1}} L_g = L_g R_{g^{-1}}$ de G s'envoie via Φ à $\tilde{f} : \mathrm{Diff}^{\Phi}(M) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)); \tilde{f}_{\Phi_g} = \tilde{L}_{\Phi_g} \tilde{R}_{\Phi_{g^{-1}}} = \tilde{R}_{\Phi_{g^{-1}}} \tilde{L}_{\Phi_g}$. On a donc $\tilde{f}_{\Phi_g} = \tilde{L}_{\Phi_g} \tilde{R}_{\Phi_{g^{-1}}} = \Phi_{R_g \Phi^{-1}} \Phi_{L_{g^{-1}} \Phi^{-1}} = \Phi_{(L_{g^{-1}} \Phi^{-1})(R_g \Phi^{-1})} = \Phi_{(L_{g^{-1}} R_g) \Phi^{-1}} = \Phi_{f_{g^{-1}} \Phi^{-1}}$, c'est-à-dire $\tilde{f}_{\Phi_g} = \Phi_{f_{g^{-1}} \Phi^{-1}}$.

L'algèbre de Lie de G est $\mathfrak{g} = \{A \in \mathfrak{X}(G) | (L_g)_* A = A, \forall g \in G\}$ muni du crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$. Puisque $\Phi : G \to \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ est bijectif, il pousse-en-avant les champs vectoriels sur G à des champs vectoriels sur $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$.

Définition Définissons $\mathfrak{D}^{\Phi}(M) := \Phi_*(\mathfrak{g}) = \{\Phi_* A \in \mathfrak{X}(\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)) | A \in \mathfrak{g}\}$ et munissons-le du crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ poussé-en-avant par Φ, i.e. $\Phi_*[,] = [\Phi_*, \Phi_*]$

Proposition 2.4.3. $\mathfrak{D}^{\Phi}(M) = \{\mathscr{A} \in \mathfrak{X}(\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)) | (\tilde{R}_{\Phi_g})_* \mathscr{A} = \mathscr{A}, \forall \Phi_g \in \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)\}$.

Démonstration. Soit un $\Phi_g \in \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ quelconque et un $\mathscr{A} \in \mathfrak{D}^{\Phi}(M)$ tel que $\mathscr{A} = \Phi_* A$. Alors, $(\tilde{R}_{\Phi_g})_* \mathscr{A} = \Phi_*(L_g)_*(\Phi)_*^{-1} \mathscr{A} = \Phi_*(L_g)_* A = \Phi_* A = \mathscr{A}$, c'est-à-dire $(\tilde{R}_{\Phi_g})_* \mathscr{A} = \mathscr{A}, \forall \Phi_g \in \mathrm{Diff}^{\Phi}(M), \forall \mathscr{A} \in \mathfrak{D}^{\Phi}(M)$. □

Dit autrement, l'antiisomorphisme de groupes $\Phi : G \to \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ induit un antiisomorphisme d'algèbres de Lie $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{D}^{\Phi}(M)$ dans le sens que les champ vectoriels invariants à gauche sur G s'envoient à des champs vectoriels invariants à droite sur $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$.

Alors que sur G on a définit $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ par $Ad_g = (f_g)_*, \forall g \in G$, définissons $\widetilde{Ad}_{\Phi_g} : \mathfrak{D}^{\Phi}(M) \to \mathfrak{D}^{\Phi}(M)$ par $\widetilde{Ad}_{\Phi_g} := (\tilde{f}_{\Phi_g})_*, \forall \Phi_g \in \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$. C'est-à-dire $\widetilde{Ad}_{\Phi_g} = (\tilde{f}_{\Phi_g})_* = (\tilde{L}_{\Phi_g} \tilde{R}_{\Phi_{g^{-1}}})_* = (\tilde{L}_{\Phi_g})_* (\tilde{R}_{\Phi_{g^{-1}}})_*$. Cela nous donne la représentation adjointe de $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ sur $\mathfrak{D}^{\Phi}(M)$. Alors que pour $A \in \mathfrak{g}$ on a $\forall g \in G$ que $(L_g)_* A = A$ et donc $Ad_g A = (R_{g^{-1}})_* A$, pour $\mathscr{A} \in \mathfrak{D}^{\Phi}(M)$ on a $\forall \Phi_g \in \mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$ que $(\tilde{R}_{\Phi_g})_* \mathscr{A} = \mathscr{A}$ et donc $\widetilde{Ad}_{\Phi_g} \mathscr{A} = (\tilde{L}_{\Phi_g})_* \mathscr{A}$. En effet, $\widetilde{Ad}_{\Phi_g} \mathscr{A} = (\tilde{L}_{\Phi_g})_* (\tilde{R}_{\Phi_{g^{-1}}})_* \mathscr{A} = (\tilde{L}_{\Phi_g})_* \mathscr{A}$.

Proposition 2.4.4. $\forall g \in G, \widetilde{Ad}_{\Phi_g} = \Phi_* Ad_{g^{-1}} (\Phi_*)^{-1}$.

Démonstration. Puisque $(\tilde{L}_{\Phi_g})_* = \Phi_*(R_g)_*(\Phi_*)^{-1}$ et $(\tilde{R}_{\Phi_{g^{-1}}})_* = \Phi_*(L_{g^{-1}})_*(\Phi_*)^{-1}$, on peut calculer directement

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad}_{\Phi_g} &= (\tilde{R}_{\Phi_{g^{-1}}} \tilde{L}_{\Phi_g})_* = (\tilde{R}_{\Phi_{g^{-1}}})_* (\tilde{L}_{\Phi_g})_* = \Phi_*(L_{g^{-1}})_*(\Phi_*)^{-1} \Phi_*(R_g)_*(\Phi_*)^{-1} \\ &= \Phi_*(L_{g^{-1}})_*(R_g)_*(\Phi_*)^{-1} = \Phi_*(L_{g^{-1}} R_g)_*(\Phi_*)^{-1} = \Phi_*(f_{g^{-1}})_*(\Phi_*)^{-1} \\ &= \Phi_* Ad_{g^{-1}} (\Phi_*)^{-1} \end{aligned}$$

□

Ainsi, $\widetilde{Ad}_{\Phi_g}\Phi_* = \Phi_* Ad_{g^{-1}}$.

Dénotons $\mathfrak{D}^{\Phi}(M)|_{id_M}$ par $\mathfrak{D}^{\Phi}_{id_M}(M)$. On a un isomorphisme entre $\mathfrak{D}^{\Phi}(M)$ et $\mathfrak{D}^{\Phi}_{id_M}(M)$ donné pour $\mathscr{A} \in \mathfrak{D}^{\Phi}(M)$ par sa valeur en id_M. De même, on a l'isomorphisme inverse prenant un $\mathscr{A}_{id_M} \in \mathfrak{D}^{\Phi}_{id_M}(M)$ et en l'envoyant à sa $(\tilde{R}_{\Phi_G})_*$-orbite $\mathscr{A} \in \mathfrak{D}^{\Phi}(M)$. Remarquons que $\mathfrak{D}^{\Phi}_{id_M}(M)$ est le tangeant à l'identité de $\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$, i.e. $\mathfrak{D}^{\Phi}_{id_M}(M) = T_{id_M}\mathrm{Diff}^{\Phi}(M)$.

Sachant que $\mathfrak{X}(M) = T_{id_M}\mathrm{Diff}(M)$ est l'espace des champ vectoriels différentiables sur M, définissons $\mathfrak{X}^{\Phi}(M) := \mathfrak{D}^{\Phi}_{id_M}(M) = T_{id_M}\mathrm{Diff}^{\Phi}(M) \subsetneq T_{id_M}\mathrm{Diff}(M)$ comme étant l'ensemble des champ vectoriel fondamentaux sur M. Pour $\mathscr{A} \in \mathfrak{D}^{\Phi}(M)$, $\mathscr{A}_{id_M} \in \mathfrak{X}^{\Phi}(M)$ est un champ vectoriel fondamental sur M. Soit le $A \in \mathfrak{g}$ tel que $\Phi_* A = \mathscr{A}$. Pour concorder avec la notation de (Kobayashi et Nomizu [12]), dénotons par A^* le champ vectoriel fondamental sur M correspondant à A via la relation $A^* = (\Phi_* A)_{id_M}$. Puisque $\Phi_e = id_M$, on peut aussi écrire la relation comme étant $A^* = \Phi_{*e} A_e$ (que j'écrirai le plus souvent $A^* = \Phi_* A_e$). Soit θ, la 1-forme de Maurer-Cartan sur G, qui vérifie par définition $\theta(A) = A_e, \forall A \in \mathfrak{g}$. Alors on peut écrire la relation comme étant $A^* = \Phi_*\theta(A)$. Définissons $\sigma = \Phi_*\theta$, une 1-forme sur G, invariante à gauche puisque constante sur tout G pour un $A \in \mathfrak{g}$, et à valeurs en $\mathfrak{X}^{\Phi}(M)$. Puisque Φ est un anti-isomorphisme et $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $T_e G$, on a donc un isomorphisme entre les $A \in \mathfrak{g}$ et les champ vectoriels fondamentaux $A^* \in \mathfrak{X}^{\Phi}(M)$ donné par $\sigma(A) = A^*$. Donc l'espace des champs vectoriels fondamentaux est de dimension $dim(\mathfrak{X}^{\Phi}(M)) = dim(\mathfrak{g}) = dim(G)$. Une base $\{E_1, ..., E_n\}$, $n = dim(G)$, de $T_e G$ induit donc une base de $\mathfrak{X}^{\Phi}(M)$ donnée par $\Phi_*\{E_1, ..., E_n\} = \{\Phi_* E_1, ..., \Phi_* E_n\}$.

Remarquons que $A \in \mathfrak{g}$ est partout non-nul sur G si et seulement si $A_e \in T_e G$ est non-nul. Je dirai qu'un $A \in \mathfrak{g}$ est non-nul s'il est partout non-nul sur G.

Proposition 2.4.5. *Dans le cas d'une action Φ libre, si $A \in \mathfrak{g}$ est non-nul, alors son champ vectoriel fondamental A^* est partout non-nul.*

Démonstration. En effet, supposons que Φ agit librement et que $A \in \mathfrak{g}$ est non-nul. Puisque A est uniformément non-nul, $A_e = \theta(A) \in T_e G$ est non-nul. La liberté d'action de Φ revient à dire que $\forall x \in M$ l'application $\Phi(x) : G \to M$ n'est jamais constante. C'est-à-dire que $(\Phi(x))_* : TG \to T_{\Phi(x)}M$ est uniformément non-nulle sur G, et donc que l'application $(\Phi(x))_* : T_eG \to T_xM$ est non-nulle. Mais $(\Phi(x))_* : T_eG \to T_xM$ est précisément l'application $(\Phi_*)|_x : T_eG \to \mathfrak{X}^\Phi(M)|_x$. Et comme $(A^*)_x = (\Phi_*)_x A_e = (\Phi(x))_* A_e$ où $(\Phi(x))_*$ est non-nulle et A_e est aussi non-nul, on en conclut que $\forall x \in M, (A^*)_x \neq 0$. C'est-à-dire que $A^* \in \mathfrak{X}^\Phi(M)$ est partout non-nul. □

L'action $\Phi : M \times G \to M$ vue, pour un $g \in G$ quelconque, comme $\Phi_g : M \to M; x \mapsto x \cdot g$ nous donne $(\Phi_g)_* : TM \to T_{\Phi_g}M$. On a $\sigma = \Phi_*\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^\Phi(M)$ qui est équivalent à $\sigma = (\Phi_*)_e\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^\Phi(M)$. Soit un $A \in \mathfrak{g}$ et $A^* = \sigma(A) \in \mathfrak{X}^\Phi(M)$, son champ vectoriel fondamental associé.

Proposition 2.4.6. *Il est vrai que $\forall g \in G, A \in \mathfrak{g}$, le champ vectoriel fondamental correspondant à $Ad_{g^{-1}}A$ est $(\Phi_g)_*A^*$, i.e. que $\forall A \in \mathfrak{g}, \forall g \in G, \sigma(Ad_{g^{-1}}A) = (\Phi_g)_*\sigma(A)$.*

Démonstration. Soit $A^* = \sigma(A)$ et $\mathscr{A} = \Phi_*A$ (on a ainsi $A^* = \mathscr{A}_{id_M}$). Je vais montrer que $\sigma(Ad_{g^{-1}}A) = (\Phi_g)_*A^*$. On a $\sigma = \Phi_*\theta$ et $\forall g \in G, \Phi_*Ad_g = \widetilde{Ad}_{\Phi_{g^{-1}}}\Phi_*$. On a vu dans la dernière section que $\forall g \in G, Ad_g\theta = \theta Ad_g$. Ainsi, $\sigma(Ad_{g^{-1}}A) = \Phi_*\theta(Ad_{g^{-1}}A) = \Phi_*Ad_{g^{-1}}\theta(A) = \widetilde{Ad}_{\Phi_g}\Phi_*A_e = \widetilde{Ad}_{\Phi_g}\mathscr{A}_{id_M}$. On a que $\widetilde{Ad}_{\Phi_g}(\Phi_g)_*^{-1} = (\tilde{f}_{\Phi_g})_*(\Phi_{g^{-1}})_* = (\tilde{f}_{\Phi_g\Phi_{g^{-1}}})_* = (\tilde{f}_{\Phi_e})_* = (id_{\mathrm{Diff}^\Phi(M)})_* = id_{\mathfrak{D}^\Phi(M)}$. Donc, $\widetilde{Ad}_{\Phi_g} = (\Phi_g)_*$. Ainsi, $\widetilde{Ad}_{\Phi_g}\mathscr{A}_{id_M} = (\Phi_g)_*A*$. C'est-à-dire $\sigma(Ad_{g^{-1}}A) = (\Phi_g)_*A^*$. □

Puisque $\sigma = \Phi_*\theta$ et que $(Ad)\theta = \theta(Ad)$, on a que $\forall g \in G, A \in \mathfrak{g}$ la relation $\sigma(Ad_{g^{-1}}A) = (\Phi_g)_*(\sigma(A))$ est équivalente à $\Phi_*\theta(Ad_{g^{-1}}A) = (\Phi_g)_*(\Phi_*\theta(A))$, i.e. à $\Phi_*(Ad_{g^{-1}}\theta(A)) = (\Phi_g)_*(\Phi_*A_e)$, i.e. à $\Phi_*(Ad_{g^{-1}}A_e) = (\Phi_g)_*(\Phi_*A_e)$. Ce qui nous servira dans la suivante preuve et dans la preuve de la G-équivariance d'une forme de connexion α dans la prochaine section.

Exemple Un groupe de Lie G agit sur lui-même par la droite via l'action à droite $\Phi = R$. Cette action est libre puisque pour tout $g \neq e$, on a $\forall x \in G, R_g(x) = xg \neq x$. Le champ vectoriel fondamental correspondant à $A \in \mathfrak{g}$ est $A^* = A \in \mathfrak{g}$ et donné par $A^* = \sigma(A) = R_*\theta(A) = R_*A_e$. Comme vu plus haut, l'application R_* envoie $A_e \in T_eG$ à son champ vectoriel invariant à gauche, i.e. $\forall g \in G, (R_*A_e)_g = (L_g)_*A_e$. On a donc que $A^* = A$, i.e. que $\sigma = id_{\mathfrak{g}}$. La formule « $\forall A \in \mathfrak{g}, \forall g \in G, \sigma(Ad_{g^{-1}}A) = (\Phi_g)_*\sigma(A)$ » y est bien vérifiée puisque Ad envoie de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}$ et $\sigma = id_{\mathfrak{g}}$ et $(\Phi_g)_* = (R_g)_*$ et pour $A \in \mathfrak{g}, g \in G$ on a $Ad_{g^{-1}}A = (R_g)_*A$.♣

2.5 Fibrés Principaux et Connexions

Références : (Kobayashi et Nomizu [12]), (Dupont [8]).

À propos des fibrés principaux :

Définition (Fibré principal [12]) : Soit M, une variété et G un groupe de Lie. Un « G-fibré principal différentiable P de base M » consiste en une variété P et d'une action par la droite $\Phi : P \times G \to P; (a,g) \mapsto a \cdot g = \Phi_g(a)$ de G sur P satisfaisant les conditions suivantes :

1. G agit librement sur P ;
2. M est l'espace quotient de P par la relation d'équivalence induite par G, i.e. $M = P/G$, et la projection canonique $\pi : P \to M$ est différentiable ;
3. P est localement trivial, i.e. chaque point $x \in M$ a un voisinage U tel que $\pi^{-1}(U)$ est isomorphe à $U \times G$ dans le sens qu'il y a un difféomorphisme $\Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tel que $\Psi(a) = (\pi(a), \lambda(a))$, où λ est une application de $\pi^{-1}(U)$ vers G satisfaisant $\lambda(a \cdot g) = (\lambda(a))g$ pour tout $a \in \pi^{-1}(U)$ et $g \in G$ (λ est G-équivariante).

On dénote un G-fibré principal par $\pi : P \to M$ (où G est sous-entendu connu). On nomme :

- P « l'espace total » ou « espace fibré » ;
- M « l'espace de base » ;
- G « le groupe structurel » ;
- π « la projection canonique ».

Soit $x \in M$ et un $a \in P$ tel que $\pi(a) = x$. On a $\pi^{-1}(x) = \{a \cdot g | g \in G\}$. On voit bien que M est l'espace des G-orbites en P (i.e. l'espace des fibres du fibré). En effet, les fibres du fibré sont les G-orbites en P. Sous-tendant une application λ qui est G-équivariante, les difféomorphismes locaux Ψ impliquent que les G-orbites sont difféomorphes à G. L'action Φ de G sur P est transitive dans une même G-orbite.

Alors qu'une trivialisation locale de P est par définition toujours possible, une trivialisation globale (i.e. une application globale $\Psi : P \to M \times G$) ne l'est pas toujours. Un exemple particulier de G-fibré principal globablement trivial est donné par le produit cartésien d'une variété M et d'un groupe de Lie G. On a que $P = M \times G$ est globalement trivial, et on le dit tout simplement « trivial ». Pour tout $g \in G$ l'action à droite $\Phi_g : P \to P$ peut ainsi être explicitée en $\Phi_g = (id_M, R_g) : M \times G \to M \times G; (x,h) \mapsto (x,h) \cdot g = (x,hg)$.

En fait, il serait possible de démontrer que $\pi : P \to M$ est trivial si et seulement s'il admet une section globale $s : M \to P$.

Tel que vu dans la dernière section, soit θ la 1-forme de Maurer-Cartan sur G et $\sigma = \Phi_* \theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^{\Phi}(P); A \mapsto A^*$ l'isomorphisme entre l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G et les champs vectoriels fondamentaux $A^* \in \mathfrak{X}^{\Phi}(P)$. Puisque l'action Φ de G envoie chaque fibre à elle-même, $A^* \in \mathfrak{X}^{\Phi}(P)$ est toujours tangeant aux G-orbites en P. Tel que vu dans la dernière section, la liberté d'action de Φ implique que si $A \in \mathfrak{g}$ est non-nul, alors A^* est partout non-nul. La liberté d'action implique l'efficacité d'action et donc que $\Phi : G \to \mathrm{Diff}^{\Phi}(P)$ est un antiisomorphisme et donc qu'à chaque $X \in \mathfrak{X}^{\Phi}(P)$ correspond un unique $A \in \mathfrak{g}$ tel que $A^* = X$ (donc la dimension de chaque fibre est $dim(\mathfrak{g})$). D'autre part, $\forall a \in P$, le tangeant en a de la fibre passant par a est isomorphe à $\mathfrak{g}$ en tant qu'espace vectoriel. Et encore une fois, tel que vu dans la dernière section, on a que $\forall g \in G, A \in \mathfrak{g}$, le champ vectoriel fondamental correspondant à $Ad_{g^{-1}}A$ est $(\Phi_g)_* A^*$.

En tant que fibré, un G-fibré principal, $\pi : P \to M$ a des fonctions de transitions entre les trivialisations locales. Soit $\{U_\alpha\}$, un recouvrement ouvert de M muni des trivialisations locales $\Psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G; a \mapsto (\pi(a), \lambda_\alpha(a))$ où λ_α est G-équivariant. Pour $a \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ on a directement $\lambda_\beta(a \cdot g)(\lambda_\alpha(a \cdot g))^{-1} = \lambda_\beta(a) g g^{-1} (\lambda_\alpha(a))^{-1} = \lambda_\beta(a)(\lambda_\alpha(a))^{-1}$, et donc $\tilde{\Psi}_{\beta\alpha}(a) := \lambda_\beta(a)(\lambda_\alpha(a))^{-1}$ est constant le long de la G-orbite passant en a et ne dépend ainsi que de $\pi(a)$. On peut définir une application $\Psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ par $\Psi_{\beta\alpha}(\pi(a)) = \tilde{\Psi}_{\beta\alpha}(a) = \lambda_\beta(a)(\lambda_\alpha(a))^{-1}$ (puisque $\tilde{\Psi}_{\beta\alpha}$ est G-invariante). La famille des applications $\Psi_{\beta\alpha}$ est nommée « fonctions de transition » du G-fibré principal $\pi : P \to M$ correspondant au recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de M (les fonctions de transitions servent à recoller les trivialisations locales entre-elles). Un autre calcul direct montre que $\Psi_{\gamma\alpha}(x) = \Psi_{\gamma\beta}(x)\Psi_{\beta\alpha}(x)$ pour $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Acceptons sans preuve la proposition suivante :

Proposition 2.5.1. *[12] : Soit M une variété, $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de M et G un groupe de Lie. Donné une application $\Psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ pour chaque intersection non-vide $U_\alpha \cap U_\beta$, de telle manière que $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, \Psi_{\gamma\alpha}(x) = \Psi_{\gamma\beta}(x)\Psi_{\beta\alpha}(x)$, alors on peut construire un G-fibré principal $\pi : P \to M$ avec fonctions de transition $\Psi_{\beta\alpha}$.*

À propos des connexions :

Soit $\pi : P \to M$ un G-fibré principal. Tel que vu plus tôt, en chaque point $a \in P$, les champs vectoriels fondamentaux $A^* \in \mathfrak{X}^\Phi(P)$ sont tangeants aux G-orbites. Pour $A \in \mathfrak{g}$ non-nul, on a A^*_a non-nul. L'ensemble des $A \in \mathfrak{g}$ génère donc un sous-espace vectoriel à l'espace tangeant de P en a que l'on dénote $G_a \subset T_aP$, l'espace tangeant en a de la fibre passant par a. Puisque Φ agit différentiablement, l'application $a \mapsto G_a$ est une distribution vectorielle différentiable de P. D'autre part, puisque $\forall g \in G, A \in \mathfrak{g}, \sigma(Ad_{g^{-1}}A) = (\Phi_g)_*(\sigma(A))$ est aussi vertical, où $(\Phi_g)_* : T_aP \mapsto T_{a\cdot g}P$, on a que $\forall g \in G, a \in P, G_{a\cdot g} = (\Phi_g)_* G_a$, i.e. la distribution $a \mapsto G_a$ est invariante sous l'action Φ de G.

Définition (Connexion d'Ehresmann [12]) : Une « connexion» Γ sur P est l'assignement d'un sous-espace Q_a de T_aP à chaque $a \in P$ tel que :

1. $T_aP = G_a \oplus Q_a$;
2. $Q_{a\cdot g} = (\Phi_g)_* Q_a$ pour chaque $a \in P$ et $g \in G$;
3. Q_a dépend différentiablement de a.

Ainsi, tout comme $a \mapsto G_a$, la distribution $a \mapsto Q_a$ est invariante sous G. On nomme G_a le « sous-espace vertical » et Q_a le « sous-espace horizontal » de T_aP. De même, on nomme l'application $a \mapsto G_a$ la « distribution verticale » et $a \mapsto Q_a$ la « distribution horizontale ». Un vecteur $X \in T_aP$ est dit « vertical » s'il repose en G_a et « horizontal » s'il repose en Q_a. Puisque $\forall a \in P, T_aP = G_a \oplus Q_a$, tout vecteur $X \in T_aP$ se décompose de manière unique en $X = Y + Z$ où $Y \in G_a$ et $Z \in Q_a$. On nomme Y la « composante verticale » de X que l'on dénote vX et Z la « composante horizontale » de X l'on dénote par hX. Puisque $a \mapsto G_a$ et $a \mapsto Q_a$ sont des distributions différentiables, tout $X \in \mathfrak{X}(P)$ se décompose de manière unique en $X = vX + hX$ où $vX, hX \in \mathfrak{X}(P)$. Remarquons que tout champ vectoriel fondamental $A^* \in \mathfrak{X}^{\Phi}(P)$ est vertical, mais que tout champ vectoriel vertical n'est généralement pas fondamental.

Étant donné une connexion Γ en P, on définit une 1-forme α sur P à valeurs en T_eG comme suit. Soit $X \in \mathfrak{X}(P)$ et vX sa composante verticale. Puisque $vX_a \in G_a$ et que G_a est isomorphe à $\mathfrak{g}$, on a qu'il existe un unique $A \in \mathfrak{g}$ tel que $(A^*)_a = vX_a$. On définit ainsi α en $a \in P$ par $\alpha_a(X_a) = A_e \in T_eG$ où $(A^*)_a = vX_a$. La forme α est nommée « forme de connexion » de la connexion d'Ehresmann Γ.

Remarquons que $\forall a \in P, X \in \mathfrak{X}(P), (\Phi_*(\alpha_a(X_a)))_a = vX_a$, et ainsi $\alpha(X) = 0$ si et seulement si X est horizontal. D'autre part $\forall A \in \mathfrak{g}, \alpha(A^*) = A_e \in T_eG$, i.e. α est constante sur les champs vectoriels fondamentaux (ce qui s'apparente au fait que la 1-forme de Maurer-Cartan sur G est constante sur les champs vectoriels invariants à gauche sur G, i.e. $\mathfrak{g}$). Cette dernière équation $\alpha(A^*) = A_e$ est équivalente à $\alpha(\Phi_*)_e = id_{T_eG} : T_eG \to T_eG; A_e \mapsto A_e$.

On a évidemment que $\forall X \in \mathfrak{X}(P)$, $\alpha(X) = \alpha(vX)$, i.e. que α « tue » la composante horizontale de X.

Proposition 2.5.2. *La forme de connexion α est G-équivariante en ce sens que pour tout $g \in G$ on a $(\Phi_g)^*\alpha = Ad_{g^{-1}}\alpha$.*

Démonstration. Puisque $u \mapsto G_u$ est préservée par G, on a $\forall a \in P, g \in G, X \in \mathfrak{X}(P)$, $\alpha_{a\cdot g}((\Phi_g)_*X_a) = \alpha_{a\cdot g}(v((\Phi_g)_*X_a)) = \alpha_{a\cdot g}((\Phi_g)_*(vX_a))$. Soient $a \in P, g \in G, X \in \mathfrak{X}(P)$ et $A_e \in T_eG$ tel que $A_e = \alpha_a(X_a)$. Puisque $vX_a = (\Phi_*(\alpha_a(X_a)))_a$, on a que $\alpha_{a\cdot g}((\Phi_g)_*(vX_a)) = \alpha_{a\cdot g}((\Phi_g)_*((\Phi_*(\alpha_a(X_a)))_a)) = \alpha_{a\cdot g}((\Phi_g)_*((\Phi_*(A_e)_a))$. Tel que vu dans la dernière section, $\forall g \in G, A \in \mathfrak{g}$ la relation $\sigma(Ad_{g^{-1}}A) = (\Phi_g)_*(\sigma(A))$ est équivalente à $\Phi_*(Ad_{g^{-1}}A_e) = (\Phi_g)_*(\Phi_*A_e)$. On obtient donc

$$\begin{aligned}\alpha_{a\cdot g}((\Phi_g)_*((\Phi_*(A_e)_a)) &= \alpha_{a\cdot g}((\Phi_*(Ad_{g^{-1}}A_e))_{a\cdot g}) \\ &= \alpha_{a\cdot g}((\Phi_*(Ad_{g^{-1}}(\alpha_a(X_a))))_{a\cdot g})\end{aligned}$$

Mais $\alpha(\Phi_*)_e = id_{T_eG}$. On a donc $\alpha_{a\cdot g}((\Phi_*(Ad_{g^{-1}}(\alpha_a(X_a))))_{a\cdot g}) = Ad_{g^{-1}}(\alpha_a(X_a))$. C'est-à-dire, $\alpha_{a\cdot g}((\Phi_g)_* X_a) = Ad_{g^{-1}}\alpha_a(X_a)$, ou encore, $\alpha((\Phi_g)_* X) = Ad_{g^{-1}}\alpha(X)$. C'est-à-dire, $(\Phi_g)^*\alpha = Ad_{g^{-1}}\alpha$. □

D'autre part, il est possible de prouver qu'une 1-forme α G-équivariante à valeurs en T_eG sur P qui vérifie $\alpha\Phi_* = id_{T_eG}$ induit une unique connexion d'Ehresmann Γ sur P de forme de connexion α, mais je ne le ferai pas.

Soit une connexion Γ sur P. Puisque $\pi : P \to M$ est surjectif et différentiable, on a $\pi_* : T_aP \to T_{\pi(a)}M$ surjectif. Et puisque $\forall a \in P, g \in G, \pi(a\cdot g) = \pi(a)$, on a que π_* « tue » les vecteurs verticaux en G_a, i.e. $G_a \subset ker(\pi_*|_a)$. Mais $T_aP = G_a \oplus Q_a$ et π_* surjectif, donc $G_a = ker(\pi_*|_a)$ et ainsi π_* nous donnes un isomorphisme entre $Q_a = T_aP/G_a$ et $T_{\pi(a)}M$. On définit le « relèvement horizontal » de $X \in \mathfrak{X}(M)$ par l'unique $X^\sharp \in \mathfrak{X}(P)$ tel que $\alpha(X^\sharp) = 0$ et $\pi_* X^\sharp = X$ (ne pas confondre ce dernier $\sharp$ avec une quelconque musicalité riemannienne ou symplectique). $X^\sharp$ est bel et bien unique puisque $\forall a \in P, X^\sharp_a \in Q_a$ et π_* donne un isomorphismes entre Q_a et $T_{\pi(a)}M$. Remarquons qu'à $X \in \mathfrak{X}(M)$ donné on a $\forall a \in P, g \in G, \pi_* X^\sharp_a = X_{\pi(a)} = X_{\pi(a\cdot g)} = X^\sharp_{a\cdot g}$ et donc $X^\sharp$ est invariant sous $(\Phi_g)_*$, i.e. $\forall g \in G, (\Phi_g)_* X^\sharp = X^\sharp$. L'invariance d'un champ vectoriel horizontal par G se reformule infinitésimalement en le fait que $\forall A \in \mathfrak{g}, [A^*, X^\sharp] = 0$. D'autre part, pour un $Y \in \mathfrak{X}(P)$ horizontal invariant sous l'action de G, la projection $\pi_* Y$ est bien définie en tant que champ vectoriel sur M et Y est l'unique relevé horizontal de $\pi_* Y$. L'ensemble des champs vectoriels qui sont des relevés horizontaux est un sous-espace des champs vectoriels horizontaux.

Par linéarité de π_* et de α, on a directement que $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), (X+Y)^\sharp = X^\sharp + Y^\sharp$.

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. On définit $f^\sharp := \pi^* f = f \circ \pi \in \mathscr{C}^\infty(P)$. Évidemment, $f^\sharp$ est constant le long des fibres de P. Encore par linéarité de π_* et de α on a que $(fX)^\sharp = f^\sharp X^\sharp$.

Enfin, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \pi_*([X^\sharp, Y^\sharp]) = [\pi_* X^\sharp, \pi_* Y^\sharp] = [X, Y] = \pi_*([X, Y]^\sharp)$ et donc nous avons $h[X^\sharp, Y^\sharp] = [X, Y]^\sharp$.

Soit un ouvert $U \subset M$ et $\{x^1, ..., x^n\}$ un système de coordonnées locales sur U, qui induit une base locale $\{X_1, ..., X_n\}$, où $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; i \in \{1, ..., n\}$, de T_UM. On a que $\{X_1, ..., X_n\}^\sharp = \{X_1^\sharp, ..., X_n^\sharp\}$ est une base locale de la distribution horizontale $a \to Q_a$ pour tout $a \in \pi^{-1}(U)$.

Soit un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de M sous-tendue par une trivialisation locale $\Psi_\alpha = (\pi, \lambda_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G; a \mapsto (\pi(a), \lambda_\alpha(a))$. Pour chaque indice α, soit l'unique section $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U)$ définie par $\lambda_\alpha \circ s_\alpha = e \in G$. La section s_α est dite «section trivialisante locale de la trivialiation locale Ψ_α ».

On a que $\forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, $s_\alpha(\pi(a)) = a \cdot (\lambda_\alpha(a))^{-1}$. Ce qui est bien défini puisque $\forall g \in G$ on a $s_\alpha(\pi(a \cdot g)) = (a \cdot g) \cdot (\lambda_\alpha(a \cdot g))^{-1}$, i.e. $s_\alpha(\pi(a)) = a \cdot (gg^{-1}(\lambda_\alpha(a))^{-1}) = a \cdot (\lambda_\alpha(a))^{-1}$. D'autre part, en prenant $a = s_\alpha(x), x \in U_\alpha$, on trouve $s_\alpha(\pi(s_\alpha(x))) = s_\alpha(x) \cdot (\lambda_\alpha(s_\alpha(x)))^{-1}$, i.e. $s_\alpha(x) = s_\alpha(x) \cdot (\lambda_\alpha(s_\alpha(x)))^{-1}$. Mais comme l'action Φ est libre, on trouve directement que $\lambda_\alpha(s_\alpha(x)) = e$, i.e. $\lambda_\alpha \circ s_\alpha = e$.

Proposition 2.5.3. *Soient deux ouverts U_α, U_β du recouvrement ouvert de M et $\Psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ la fonction de transition correspondante. Alors sur $U_\alpha \cap U_\beta$, la section trivialisante locale s_β est donnée par $s_\beta = s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta}$.*

Démonstration. On a $\Psi_\alpha = (\pi, \lambda_\alpha)$ et $\Psi_\beta = (\pi, \lambda_\beta)$. On a que $\lambda_\alpha \circ s_\alpha = e$ et $\lambda_\beta = \tilde{\Psi}_{\beta\alpha}\lambda_\alpha$. Je vais montrer que $\lambda_\beta \circ s_\beta = e$. On a $\lambda_\beta \circ s_\beta = (\tilde{\Psi}_{\beta\alpha}\lambda_\alpha) \circ (s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta}) = (\tilde{\Psi}_{\beta\alpha}\lambda_\alpha \circ s_\alpha)\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta\alpha}(\lambda_\alpha \circ s_\alpha)\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta\alpha} e \Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta\alpha}\Psi_{\alpha\beta} = ((\lambda_\beta\lambda_\alpha^{-1}) \circ \pi^{-1})((\lambda_\alpha\lambda_\beta^{-1}) \circ \pi^{-1}) = (\lambda_\beta\lambda_\alpha^{-1}\lambda_\alpha\lambda_\beta^{-1}) \circ \pi^{-1} = e$. □

Remarquons que $\forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ on a $s_\alpha \circ \pi(a) = a \cdot (\lambda_\alpha(a))^{-1}$. En effet on a d'une part que $\forall g \in G, s_\alpha \circ \pi(a \cdot g) = s_\alpha \circ \pi(a)$ car $\pi(a \cdot g) = \pi(a)$ et d'autre part $(a \cdot g) \cdot (\lambda_\alpha(a \cdot g))^{-1} = a \cdot g(\lambda(a)g)^{-1} = a \cdot gg^{-1}(\lambda_\alpha(a))^{-1} = a \cdot (\lambda_\alpha(a))^{-1}$.

Soit θ la 1-forme de Maurer-Cartan sur G. Pour chaque intersection non-vide $U_\alpha \cap U_\beta$, on définit une 1-forme $\theta_{\alpha\beta}$ à valeurs dans T_eG sur $U_\alpha \cap U_\beta$ par $\theta_{\alpha\beta} := \Psi^*_{\alpha\beta}\theta$. Pour chaque indice α, on définit une 1-forme θ_α à valeurs dans T_eG sur U_α par $\theta_\alpha := s^*_\alpha \alpha$ (ne pas confondre les indices α avec la forme de connexion α).

Proposition 2.5.4. *[12] : Les formes $\theta_{\alpha\beta}$ et θ_α sont sujettes aux conditions :*

$$\theta_\beta = Ad_{(\Psi_{\alpha\beta})^{-1}}\theta_\alpha + \theta_{\alpha\beta} \text{ sur } U_\alpha \cap U_\beta. \tag{2.1}$$

Inversement, pour chaque famille de 1-formes $\{\theta_\alpha\}$ à valeurs en T_eG définies sur U_α et satisfaisant les conditions précédentes, il existe unique forme de connexion α sur P qui *donne lieu à $\{\theta_\alpha\}$ de la manière décrite.*

Démonstration. Voici une preuve (tiré du (Kobayashi et Nomizu [12])) que sur $U_\alpha \cap U_\beta$ on a $\theta_\beta = Ad_{(\psi_{\alpha\beta})^{-1}}\theta_\alpha + \theta_{\alpha\beta}$. Soit $X \in T(U_\alpha \cap U_\beta)$. On a par la règle de Leibniz que $(s_\beta)_*(X) = (s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta})_*(X) = ((s_\alpha)_*(X)) \cdot \Psi_{\alpha\beta} + (s_\alpha) \cdot ((\Psi_{\alpha\beta})_*(X))$. Évaluons cette expression sous α. On a $\alpha((s_\beta)_*(X)) = \alpha(((s_\alpha)_*(X)) \cdot \Psi_{\alpha\beta}) + \alpha((s_\alpha) \cdot ((\Psi_{\alpha\beta})_*(X)))$. Ce qui revient à $(s_\beta^*\alpha)(X) = \alpha((\Phi_{\Psi_{\alpha\beta}})_*(s_\alpha)_*(X)) + \alpha(\Phi_*(\theta((\Psi_{\alpha\beta})_*(X)))|_{s_\alpha})$. On obtient donc l'égalité $(s_\beta^*\alpha)(X) = Ad_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}\alpha((s_\alpha)_*(X)) + \theta((\Psi_{\alpha\beta})_*(X))$, i.e. à $\theta_\beta = Ad_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}} s_\alpha^*(\alpha) + \Psi_{\alpha\beta}^*\theta$ et donc $\theta_\beta = Ad_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}\theta_\alpha + \theta_{\alpha\beta}$.

La preuve de la deuxième partie de la proposition est donnée en renversant la preuve de la première partie. □

Définition (Forme de courbure [12]) : Soit α une forme de connexion sur un G-fibré principal P. Soit h l'opérateur « projection horizontale » qui envoie un champ vectoriel $X \in \mathfrak{X}(P)$ à sa composante horizontale $hX \in \mathfrak{X}(P)$. On dit que $\Omega := (d\alpha)h = (d\alpha)(h\cdot, h\cdot)$ est la « forme de courbure » de α.

Proposition 2.5.5. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(P), \Omega(X,Y) = -\alpha([hX, hY])$.

Démonstration. Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$. On a $\Omega(X,Y) = (d\alpha)(hX, hY)$ et $\Omega(hX, hY) = (d\alpha)(hhX, hhY) = \alpha(hX, hY) = \Omega(X,Y)$. Donc $\Omega(X,Y) = \Omega(hX, hY)$. D'autre part, $\Omega(X,Y) = (d\alpha)(hX, hY) = hX(\alpha(hY)) - hY(\alpha(hX)) - \alpha([hX, hY]) = -\alpha([hX, hY])$ car α tue l'horizontal. □

D'autre part, puisque l'action Φ de G préserve l'horizontal (par définition de connexion d'Ehresmann, on a $(\Phi_g)_* Q_a = Q_{a\cdot g}, \forall a \in P, g \in G$), l'équivalent infinitésimal en est que la dérivée de Lie d'un champ vectoriel horizontal par un vertical est nécessairement horizontal. Ou encore, que le crochet de Lie d'un champ vectoriel fondamental et d'un horizontal est horizontal. Ainsi on a $\alpha([fond, hor]) = \alpha(hor) = 0$ (où hor un champ vectoriel horizontal quelconque et $fond$ un champ vectoriel fondamental quelconque). D'autre part, tout champ vectoriel fondamental est vertical mais l'inverse n'est pas toujours vrai. En effet, tel que vu dans la dernière section, l'espace des champs vectoriels fondamentaux est de dimension $\mathfrak{g}$ alors qu'il est évident que l'espace des champs vectoriels verticaux est de dimension infinie. Néanmoins, une base $\{E_1,...,E_n\}$ de T_eG (où $n = dim(G)$) induit une base des champs vectoriels fondamentaux donnée par $\Phi_*\{E_1,...,E_n\} = \{\Phi_*E_1,...,\Phi_*E_n\}$. Ainsi, tout champ vectoriel vertical $vX \in \mathfrak{X}(P)$ peut s'écrire $vX = \Sigma_{i=1}^n f^i\Phi_*E_i$ où $f^i \in \mathscr{C}^\infty(P); i \in \{1,...,n\}$. Puisque $\alpha\Phi_* = id_{T_eG}$, on a par linéarité de α que pour $X \in \mathfrak{X}(P)$, $\alpha(X) = \alpha(hX+vX) = \alpha(vX) = \alpha(\Sigma_{i=1}^n f^i\Phi_*E_i) = \Sigma_{i=1}^n f^i\alpha(\Phi_*E_i) = \Sigma_{i=1}^n f^iE_i$.

Avant d'aller plus loin, remarquons qu'en notant

1. hor, un champ vectoriel horizontal quelconque
2. $hor^\sharp$, un champ vectoriel qui est un relevé horizontal quelconque
3. ver, un champ vectoriel vertical quelconque
4. $fond$, un champ vectoriel fondamental quelconque

on obtient les formules suivantes

1. $[hor, hor] = hor + ver$
2. $[hor^\sharp, hor^\sharp] = hor + ver$
3. $[fond, fond] = fond$
4. $[fond, hor] = hor$
5. $[fond, hor^\sharp] = 0$

Maintenant :

Théorème 2.5.6. ***(Équation structurelle d'É. Cartan [12]) :*** *Soit α une forme de connexion et Ω sa forme de courbure. Alors $d\alpha = \Omega - \frac{1}{2}[\alpha,\alpha]$.*

Démonstration. Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$. On a $X = hX + vX$ et $Y = hY + vY$ où l'on décompose $vX = \Sigma_{i=1}^n f^i\Phi_*E_i$ et $vY = \Sigma_{j=1}^n g^j\Phi_*E_j$. On a directement $\alpha(X) = \Sigma_{i=1}^n f^iE_i$ et

$\alpha(Y) = \Sigma_{j=1}^n g^j E_j$. Par bilinéarité de $d\alpha$, et par $\alpha(fond) = const.$ et par $\alpha([hor, fond]) = 0$ on calcule :

$$
\begin{aligned}
& (d\alpha)(X,Y) \\
= \; & (d\alpha)(hX + vX, hY + vY) \\
= \; & (d\alpha)(hX, hY) + (d\alpha)(hX, vY) + (d\alpha)(vX, hY) + (d\alpha)(vX, vY) \\
= \; & \Omega(X,Y) + (d\alpha)(hX, \Sigma_{j=1}^n g^j \Phi_* E_j) \\
& + (d\alpha)(\Sigma_{i=1}^n f^i \Phi_* E_i, hY) + (d\alpha)(\Sigma_{i=1}^n f^i \Phi_* E_i, \Sigma_{j=1}^n g^j \Phi_* E_j) \\
= \; & \Omega(X,Y) + \Sigma_{j=1}^n g^j (d\alpha)(hX, \Phi_* E_j) + \Sigma_{i=1}^n f^i (d\alpha)(\Phi_* E_i, hY) \\
& + \Sigma_{i=1}^n f^i \Sigma_{j=1}^n g^j (d\alpha)(\Phi_* E_i, \Phi_* E_j) \\
= \; & \Omega(X,Y) + \Sigma_{j=1}^n g^j (hX(\alpha(\Phi_* E_j)) - (\Phi_* E_j)(\alpha(hX)) - \alpha([hX, (\Phi_* E_j)])) \\
& + \Sigma_{i=1}^n f^i ((\Phi_* E_i)(\alpha(hY)) - hY(\alpha(\Phi_* E_i)) - \alpha([(\Phi_* E_i), hY])) \\
& + \Sigma_{i=1}^n f^i \Sigma_{j=1}^n g^j ((\Phi_* E_i)(\alpha(\Phi_* E_j)) - (\Phi_* E_j)(\alpha(\Phi_* E_j)) - \alpha([(\Phi_* E_i), (\Phi_* E_j)])) \\
= \; & \Omega(X,Y) - \Sigma_{i=1}^n f^i \Sigma_{j=1}^n g^j (\alpha([(\Phi_* E_i), (\Phi_* E_j)])) \\
= \; & \Omega(X,Y) - \Sigma_{i=1}^n f^i \Sigma_{j=1}^n g^j (\alpha(\Phi_* [E_i, E_j])) \\
= \; & \Omega(X,Y) - \Sigma_{i=1}^n f^i \Sigma_{j=1}^n g^j [E_i, E_j] \\
= \; & \Omega(X,Y) - [\Sigma_{i=1}^n f^i E_i, \Sigma_{j=1}^n g^j E_j] \\
= \; & \Omega(X,Y) - [\alpha(X), \alpha(Y)] \\
= \; & \Omega(X,Y) - \frac{1}{2}[\alpha, \alpha](X,Y)
\end{aligned}
$$

Et puisque c'est vrai $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(P)$, alors $d\alpha = \Omega - \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$. □

La preuve de (Kobayashi et Nomizu [12]) n'est que sur les champs vectoriels de composante verticale fondamentale. La preuve ici présente est pour toutes les composantes verticales possibles. Je l'ai incluse pour ne pas laisser d'ambiguïté, puisque l'équation structurelle d'Élie Cartan doit être vraie pour tout champ vectoriel en $\mathfrak{X}(P)$.

On peut reformuler l'équation structurelle d'Élie Cartan en

$$\boxed{\Omega = d\alpha + \alpha \wedge \alpha}$$

Par le théorème de Frobenius, toute distribution dont le crochet de Lie de deux de ses éléments est en la distribution implique que la distribution est intégrable en feuilletage. Ainsi, si le crochet de Lie de deux champs vectoriels horizontaux est nul sur un certain voisinage, alors la distribution horizontale est intégrable en feuilletage sur ce voisinage. La forme de courbure de $X,Y \in \mathfrak{X}(P)$ vérifie $\Omega(X,Y) = -\alpha([hX,hY])$. D'autre part, $\alpha([hX,hY])$ est nul si $[hX,hY]$ est horizontal. Ainsi, la forme de courbure Ω mesure la non-intégrabilité de la distribution horizontale en feuilletage. En effet, si $\Omega(X,Y)$ est nul sur un certain voisinage de P, alors la distribution horizontale est intégrable en feuilletage sur ce voisinage.

Remarque Dans le cas d'un groupe de Lie G abélien, on a $\Omega = d\alpha$.

Proposition 2.5.7. *Soit $\pi : P \to M$, un G-fibré principal. Soit $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, une section locale, où $U_\alpha \subset M$. Et soit $X \in \mathfrak{X}(M)$. Alors sur $\pi^{-1}(U_\alpha)$, on a la décomposition en parties horizontale et verticale $((s_\alpha)_*X)_a = X_a^\sharp + (\Phi_*(\alpha_a(((s_\alpha)_*X)_a)))_a$ telles que chaque partie est un champ vectoriel respectivement horizontal et vertical.*

Démonstration. D'une part, on a la décomposition en parties horizontale et verticale $(s_\alpha)_*X = h(s_\alpha)_*X + v(s_\alpha)_*X$. Ensuite, $\pi_*(h(s_\alpha)_*X) = \pi_*(h(s_\alpha)_*X + v(s_\alpha)_*X) = \pi_*(s_\alpha)_*X = (\pi \circ s_\alpha)_*X = (id_M)_*X = X$ et comme $\alpha(h(s_\alpha)_*X) = 0$, alors $h(s_\alpha)_*X = X^\sharp$. D'autre part, la projection verticale est donnée $\forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ par $v((s_\alpha)_*X)_a = (\Phi_*(\alpha_a(((s_\alpha)_*X)_a)))_a$. On a donc $\forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ la décomposition en composantes horizontales et verticales $((s_\alpha)_*X)_a = X_a^\sharp + (\Phi_*(\alpha_a(((s_\alpha)_*X)_a)))_a$. Puisque les distributions horizontales et verticales sont différentiables, la décomposition de $(s_\alpha)_*X$ en composantes horizontales et verticales donne deux champs vectoriels différentiables. □

Terminons cette section avec un exemple.

Exemple Tel que vu à la fin de la dernière section, un groupe de Lie G agit librement sur lui-même par la droite $\Phi_g = R_g : h \to hg, \forall g,h \in G$. La projection quotient $\pi : G \to G/G = \{pt\}$ est différentiable. G est globalement trivial $G = \{pt\} \times G$ via la trivialisation globale $\Psi = (\pi, id_G)$ où id_G est évidemment G-équivariante. Donc, G

est un G-fibré principal trivial. Puisque la variété de base est un point, il n'y a qu'une seule fibre. Donc tous les champ vectoriels $X \in \mathfrak{X}(G)$ sont verticaux. Et tel que vu à la fin de la dernière section, les champs vectoriels fondamentaux sur G sous action R sont les champs vectoriels invariants à gauche sur G, i.e. $\mathfrak{X}^R(G) = \mathfrak{g}$. Le champ vectoriel fondamental A^* correspondant à $A \in \mathfrak{g}$ est $A^* = A$, i.e. $\sigma = id_{\mathfrak{g}}$. Puisque $\forall a \in G$ on a T_aG vertical, une distribution horizontale $a \mapsto Q_a$ est nécessairement de dimension zéro. Il existe donc une unique connexion Γ sur G. Sa forme de connexion α est à valeurs en T_eG et constante sur les champs vectoriels fondamentaux, i.e. sur les champs vectoriels invariants à gauche. Donc, $\alpha = \theta$, la forme de Maurer-Cartan. La forme de Maurer-Cartan vérifie $\theta(R)_* = id_{T_eG}$. Soit $X \in \mathfrak{X}(G)$. On a que $\forall g, h \in G, \theta_{hg}((R_g)_*X_h) = (L_{g^{-1}h^{-1}})_*(R_g)_*X_h = (R_g)_*(L_{g^{-1}})_*(L_{h^{-1}})_*X_h = Ad_{g^{-1}}(L_{h^{-1}})_*X_h = Ad_{g^{-1}}\theta_h(X_h)$ et donc $\theta((R_g)_*X) = Ad_{g^{-1}}\theta(X)$, c'est-à-dire que θ est G-équivariante. Donc la forme de Maurer-Cartan est bel et bien une forme de connexion. Notons que l'équation structurelle d'Élie Cartan $d\theta = \Omega - \frac{1}{2}[\theta, \theta]$ devient $d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta]$ puisque $\Omega(\cdot, \cdot) = d\theta(h\cdot, h\cdot) = 0$ car $h : T_uG \to T_uG$ tue la composante verticale $\forall u \in G$ mais que tout $X \in \mathfrak{X}(G)$ est vertical. Bref, l'équation structurelle d'Élie Cartan $d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta]$ est ici très exactement la formule de Maurer-Cartan.♣

Remarque L'équation de Maurer-Cartan ne tient sur $\mathfrak{g}$ alors que je l'ai obtenu pour tout champ vectoriel sur G... trouver l'erreur !

2.6 Fibrés Vectoriels Associés et Dérivées Covariantes

Références : (Kobayashi et Nomizu [12]), (Reynolds [16]), et (Sniatycki [18]).

À propos des fibrés vectoriels associés :

Un G-fibré principal $\pi : P \to M$ ne possède pas toujours de section globale. Par exemple le ruban de Möbius (par abus de langage, mais le principe est le même) est un $\mathbb{Z}$-fibré principal P de base S^1 non trivial et il n'existe pas d'application continue $s : S^1 \to P$. Néanmoins, un fibré vectoriel possède toujours des sections globales, notamment la section zéro, par exemple.

Ceci dit, passons au sujet principal de cette section : les fibrés vectoriels associés. Soit G, un groupe de Lie. Soit $\pi : P \to M$, un G-fibré principal. On peut se poser la question s'il n'y a pas moyen de « représenter » G sur un fibré vectoriel. Il existe en effet un moyen de le faire. Soit V un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ (je n'utiliserai que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $GL(V)$ (ou $\mathrm{Aut}(V)$) le groupe des automorphismes de V (i.e. les bijections linéaires de V dans V) muni de la loi de composition. Soit $P \times V$, le produit cartésien de P et de V. Soit l'homomorphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$, une représentation de G sur V. On a $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$. Pour rappel, une représentation ρ est dite fidèle si injective, i.e. si $ker\rho = \{e\}$ où $ker\rho := \{g \in |\rho(g) = \mathbb{1}\}$ où $\mathbb{1}$ est l'identité en $GL(V)$. Tout point de $P \times V$ peut s'écrire (a,v). Définissons l'action de $g \in G$ sur $P \times V$ par $(a,v) \mapsto (a \cdot g, \rho(g)^{-1}v)$. Définissons maintenant le « V-fibré vectoriel de base M associé au G-fibré principal P via représentation ρ » par le quotient de $P \times V$ sous l'action de G, i.e. $P \times_\rho V := (P \times V)/G$. On a donc les classes d'équivalences $[(a,v)] = [(a \cdot g, \rho(g)^{-1}v)]$, ou encore $[(a \cdot g, v)] = [(a, \rho(g)v)]$. J'écrirai souvent $P \times_G V$ au lieu de $P \times_\rho V$ et $[a,v]$ au lieu de $[(a,v)]$.

Soit $\tilde{pr} : P \times V \to P; (a,v) \mapsto a$ et $\pi : P \to M = P/G$. Définissons $\tilde{\pi} := \pi \circ \tilde{pr} : P \times V \to M; (a,v) \mapsto \pi(a)$. On a que $\tilde{\pi}$ est constant le long des G-fibres de l'action de G sur $P \times V$. En effet, $\forall g \in G$ on a $g \cdot (a,v) = (a \cdot g, \rho(g)^{-1}v)$ et $\tilde{\pi}(g \cdot (a,v)) = \tilde{\pi}(a \cdot g, \rho(g)^{-1}v) = \pi(a \cdot g) = \pi(a)$. Ainsi, $\tilde{\pi}(a,b) = \tilde{\pi}(g \cdot (a,b)) = \pi(a)$. Bref, on peut relever $\tilde{\pi}$ à $P \times_G V$, i.e. $pr : P \times_G V \to M; [a,v] \mapsto \pi(a)$. Ainsi, pour deux $[a,v], [b,w] \in P \times_G V$, on a que si $pr([a,v]) = pr([b,w])$ alors $\pi(a) = \pi(b)$ et donc $\exists g \in G$ tel que $b = a \cdot g$, i.e.

si deux éléments $[a,v]$ et $[b,w]$ de $P\times_G V$ se projète à un même $m\in M$ via pr, alors a et b sont dans la même G-orbite de P.

Puisque V est un espace vectoriel, on a que $\forall v,w\in V$ on a $v+w\in V$. Ainsi on peut définir une addition sur $P\times V$ par $(a,v)+(a,w)=(a,v+w)$. De même, on a une addition sur $P\times_G V$ donnée par $[a,v]+[a,w]=[a,v+w]$ puisque $\forall g\in G, \rho(g)$ est une application linéaire.

Alors que $\pi : P\to M$ est un G-fibré principal de base M, $pr : P\times_G V\to M$ est un V-fibré vectoriel de base M.

Proposition 2.6.1. *$pr : P\times_G V\to M$ est un V-fibré vectoriel.*

Démonstration. On peut associer, $\forall m\in M$, la fibre $pr^{-1}(m)$ de $P\times_G V$ à l'espace vectoriel V via l'application bijective linéaire $A_{m,a} : pr^{-1}(m)\to V; [a,v]\mapsto v$ où $a\in\pi^{-1}(m)$.

Injectivité de $A_{m,a}$: Soit $m\in M$. Soient $[a,v],[b,w]\in pr^{-1}(m)$ différents l'un de l'autre. Puisque $pr([a,v]) = pr([b,w]) = m, \exists g\in G$ tel que $b=a\cdot g$. Ainsi, $[a,v]\neq [b,w]=[a\cdot g,w]=[a,\rho(g)w]$ et donc $[a,v]\neq[a,\rho(g)w]$, i.e. $v\neq\rho(g)w$. Donc pour deux $[a,v],[b,w]\in pr^{-1}(m)$ différents l'un de l'autre, on a $A_{m,a}([a,v])=v$ et $A_{m,a}([b,w])=\rho(g)w\neq v$. Donc $A_{m,a}$ est injective.

Surjectivité de $A_{m,a}$: Il suffit de montrer que $A_{m,a}^{-1}$ est injective sur tout V. Soient $v\neq w$, deux éléments de V. On veut montrer que $A_{m,a}^{-1}(v)=[a,v]$ est différent de $A_{m,a}^{-1}(w)=[a,w]$, i.e. que $\nexists g\in G$ tel que $a\cdot g=b$ et $\rho(g)^{-1}v=w$. Puisque l'action de G sur P est libre, on a $a\cdot g=a\Rightarrow g=e$. Mais $\rho(e)^{-1}=\mathbb{1}$. Ainsi, $\rho(g)^{-1}v=\mathbb{1}v=v\neq w$. □

Ainsi, chaque fibre $\pi^{-1}(m)$ est isomorphe (i.e. linéairement bijective) avec V et donc $\pi : P\times_G V\to M$ est un V-fibré vectoriel de base M (qui admet nécessairement des sections globales).

Proposition 2.6.2. *Les sections du fibré $pr : P\times_G V\to M$ correspondent bijectivement avec les applications $\lambda^\sharp : P\to V$ satisfaisant $\lambda^\sharp(a\cdot g)=\rho(g)^{-1}\lambda^\sharp(a)$.*

Démonstration. Soit un tel $\lambda^\sharp$. Soit $F_{\lambda^\sharp} := (id_P,\lambda^\sharp) : P\to P\times V$. Pour un $g\in G$, $F_{\lambda^\sharp}(a\cdot g)=(id_P(a\cdot g),\lambda^\sharp(a\cdot g))=(a\cdot g,\rho^{-1}(g)\lambda^\sharp(a))=g\cdot(a,\lambda^\sharp(a))$. Donc $F_{\lambda^\sharp}$ est G-équivariante par rapport à l'action de G sur P et de G sur $P\times V$. On peut donc réduire $F_{\lambda^\sharp}$ à $s : P/G\to$

$(P \times G)/G$, i.e. à $s : M \to P \times_G V$. Donc à $\lambda^\sharp$ correspond une section de $pr : P \times_G V \to M$. Inversement, une section $s : M \to P \times_G V$ se relève à une application G-équivariante $F : P \to P \times V$. Et comme $pr \circ s = id_M$, l'application F a la forme $F = id_P \times \lambda^\sharp$ pour un certain $\lambda^\sharp$.

On a explicite la bijection par $s(\pi(a)) = [a, \lambda^\sharp(a)]$. Ce qui est bien défini puisque d'une part on a $s(\pi(a \cdot g)) = s(\pi(a))$ et d'autre part $[a \cdot g, \lambda^\sharp(a \cdot g)] = [a \cdot g, \rho(g)^{-1}\lambda^\sharp(a)] = [a, \lambda^\sharp(a)]$. □

Le cas local est aussi vrai, i.e. pour tout ouvert U_α de M on a une bijection entre les $\lambda^\sharp_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to V$ satisfaisant $\lambda^\sharp(a \cdot g) = \rho(g)^{-1}\lambda^\sharp(a), \forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha), g \in G$ et les sections locales $s : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha) \times_G V$. Remarquons enfin que $A_{m,a}s(\pi(a)) = A_{m,a}[a, \lambda^\sharp(a)] = \lambda^\sharp(a)$.

À propos des dérivées covariantes :

Maintenant, supposons que P est muni d'une forme de connexion $\alpha : TP \to T_eG$. Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $X^\sharp \in \mathfrak{X}(P)$ son relèvement horizontal. Soit une section $s : M \to P \times_G V$ telle que $s(\pi(a)) = [a, \lambda^\sharp(a)]$.

Définition Soit $s : M \to P \times_G V$. On définit la dérivée covariante ∇_X de s par la section $(\nabla_X s)(\pi(a)) = [a, (d\lambda^\sharp)_a(X^\sharp_a)]$.

Remarque $\nabla_X s$ est la section correspondante à la fonction $X^\sharp\lambda^\sharp$ et la dérivée covariante dépend de α puisque $X^\sharp$ dépend de α.

Proposition 2.6.3. *La dérivée covariante ∇ est linéaire en X, c'est-à-dire que $\forall f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ on a $\nabla_{fX} = f\nabla_X$.*

Démonstration. Souvenons-nous que $[a, v] + [a, w] = [a, v + w]$. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. On a le relevé $f^\sharp = f \circ \pi \in \mathscr{C}^\infty(P)$ qui est constant sur les G-orbites de P. On a $(fX)^\sharp = f^\sharp X^\sharp$. On a $f(\pi(a))s(\pi(a)) = f^\sharp(a)[a, \lambda^\sharp(a)] = [a, f^\sharp(a)\lambda^\sharp(a)]$ et donc la section fs correspond à la fonction $f^\sharp\lambda^\sharp$. Puisque $f^\sharp$ est constante le long des G-orbites en P, on a nécessairement que $df^\sharp(X^\sharp)$ est aussi constante le long des G-orbites en P et donc

$(df^\sharp)_a(X_a^\sharp) = (df)_{\pi(a)}(X_{\pi(a)})$. Calculons

$$\begin{aligned}(\nabla_{fX}s)(\pi(a)) &= [a,(d\lambda^\sharp)_a((fX)_a^\sharp)] \\ &= [a,(d\lambda^\sharp)_a(f^\sharp(a)X_a^\sharp)] \\ &= [a,f^\sharp(a)(d\lambda^\sharp)_a(X_a^\sharp)] \\ &= f^\sharp(a)[a,(d\lambda^\sharp)_a(X_a^\sharp)] \\ &= f(\pi(a))(\nabla_X s)(\pi(a))\end{aligned}$$

□

Proposition 2.6.4. *La dérivée covariante vérifie la règle de Leibniz, c'est-à-dire que* $\forall f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ *on a* $\nabla_X(fs) = (df(X))s + f\nabla_X s$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(\nabla_X(fs))(\pi(a)) &= [a,(d(f^\sharp\lambda^\sharp))_a(X_a^\sharp)] \\ &= [a,((df^\sharp)_a(X_a^\sharp))\lambda_a^\sharp + f^\sharp(a)(d\lambda^\sharp)_a(X_a^\sharp)] \\ &= [a,((df^\sharp)_a(X_a^\sharp))\lambda_a^\sharp] + [a,f^\sharp(a)(d\lambda^\sharp)_a(X_a^\sharp)] \\ &= ((df^\sharp)_a(X_a^\sharp))[a,\lambda_a^\sharp] + f^\sharp(a)[a,(d\lambda^\sharp)_a(X_a^\sharp)] \\ &= (df)_{\pi(a)}(X_{\pi(a)})s(\pi(a)) + f(\pi(a))(\nabla_X s)(\pi(a))\end{aligned}$$

□

Soit $\pi : P \to M$, un G-fibré principal sous action $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(P)$ muni d'une forme de connexion $\alpha : TP \to T_eG$. Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G sur V où $\mathbb{1} = \rho(e)$ l'identité en $GL(V)$ et $pr : P \times_G V \to M$ son fibré associé. Soit une trivialisation locale $\Psi_\alpha = (\pi, \lambda_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ munie de la section trivialisante locale $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ telle que $\lambda_\alpha \circ s_\alpha = e$.

Proposition 2.6.5. $\forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha), A_e \in T_eG$ *on a* $(\rho(\lambda_\alpha)^{-1})_* A_a^* = -(\rho_* A_e)\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}$.

Démonstration. Soit un $a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Alors $\forall g \in G$ on a $\rho(\lambda_\alpha(\Phi_g(a)))^{-1} = \rho(\lambda_\alpha(a \cdot g))^{-1} = \rho(\lambda_\alpha(a)g)^{-1} = \rho(g)^{-1}\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1} = R_{\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}}(\rho(g^{-1}))$, i.e. $\rho(\lambda_\alpha(\Phi_g(a)))^{-1} =$

$R_{\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}}(\rho(g^{-1}))$. L'application inversion $\zeta : G \to G; g \mapsto g^{-1}$ induit $(\zeta_*)_e : T_eG \to T_eG; A_e \mapsto -A_e$. Ainsi, $\rho(\lambda_\alpha(\Phi_g(a)))^{-1} = R_{\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}}(\rho(\zeta(g)))$. Ce qui induit à son tour $(\rho(\lambda_\alpha(\Phi(a)))^{-1})_* = (R_{\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}}\rho_*(\zeta))_*$ qui est équivalent à $\rho_*((\lambda_\alpha)^{-1})_*(\Phi(a))_* = (R_{\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}})\rho_*\zeta_*$. En évaluant $\rho_*((\lambda_\alpha)^{-1})_*(\Phi(a))_* = (R_{\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}})_*\rho_*\zeta_*$ sur $A_e \in T_eG$ on trouve $\rho_*((\lambda_\alpha)^{-1})_*(\Phi(a))_*(A_e) = (R_{\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}})_*\rho_*\zeta_*(A_e)$, c'est-à-dire $\rho_*((\lambda_\alpha)^{-1})_*A_a^* = (R_{\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}})_*\rho_*(-A_e)$. Mais pour $GL(V)$ on a $(R_g)_* = R_g, \forall g \in GL(V)$ et donc l'égalité $(\rho(\lambda_\alpha)^{-1})_*A_a^* = -(\rho_*A_e)\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}$. □

Soit $v \in V\backslash^{\{0\}}$, un vecteur non-nul quelconque de V. Définissons l'application $\lambda_\alpha^\sharp := \rho(\lambda_\alpha)^{-1}v : \pi^{-1}(U_\alpha) \to V$. Pour tout $a \in \pi^{-1}(U_\alpha), g \in G, \lambda_\alpha^\sharp(a\cdot g) = \rho(\lambda_\alpha(a\cdot g))^{-1}v = \rho(\lambda_\alpha(a)g)^{-1}v = \rho(g)^{-1}\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}v = \rho(g)^{-1}\lambda_\alpha^\sharp(a)$, c'est-à-dire que $\lambda_\alpha^\sharp$ est aussi G-équivariante. Remarquons que $\lambda_\alpha^\sharp$ est non-nul sur tout U_α.

Proposition 2.6.6. *$\forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha), A_e \in T_eG$ on a $(d\lambda_\alpha^\sharp)_a A_a^* = -(\rho_*A_e)\lambda_\alpha^\sharp(a)$.*

Démonstration. On vient tout juste de montrer que pour tout $A_e \in T_eG$ on a l'égalité $(\rho(\lambda_\alpha)^{-1})_*A_a^* = -(\rho_*A_e)\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}$. En évaluant cette dernière expression sous v on obtient $((\rho(\lambda_\alpha)^{-1})_*A_a^*)v = -(\rho_*A_e)\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}v$, c'est-à-dire $d(\rho(\lambda_\alpha)^{-1}v)A_a^* = -(\rho_*A_e)\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}v$. C'est-à-dire $(d\lambda_\alpha^\sharp)_a A_a^* = -(\rho_*A_e)\lambda_\alpha^\sharp(a)$. □

Remarque De manière générale, toute application $\lambda^\sharp : P \to V$ qui est G-équivariante et définie sur tout P a que $\forall A^* \in \mathfrak{X}^\Phi(P)$ on a $(d\lambda^\sharp)_a(A_a^*) = -(\rho_*A_e)\lambda^\sharp(a)$.

On a une bijection entre de telles applications G-équivariantes $\lambda_\alpha^\sharp : \pi^{-1}(U_\alpha) \to V$ et les sections $s : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)\times_G V$.

Définition Soit encore un $v \in V\backslash^{\{0\}}$ quelconque et $\lambda_\alpha^\sharp := \rho(\lambda_\alpha)^{-1}v : \pi^{-1}(U_\alpha) \to V$. On dit que $s : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)\times_G V$ définie par $s(\pi(a)) = [a, \lambda_\alpha^\sharp(a)], \forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ est la «section trivialisante locale associée à s_α ».

Proposition 2.6.7. *La section trivialisante locale associée s est non-nulle sur tout U_α.*

Démonstration. Pour tout $a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ on a $s(\pi(a)) = [a, \lambda_\alpha^\sharp(a)] = [a, \rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}v] = [a\cdot(\lambda_\alpha(a))^{-1}, v] = [s_\alpha(\pi(a)), v]$. □

Proposition 2.6.8. $\forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha), X \in \mathfrak{X}(M), (\nabla_X s)(\pi(a)) = [a, \rho_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)})\lambda_\alpha^\sharp(a)]$

Démonstration. Par la proposition 2.5.7, pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$ on a la décomposition $((s_\alpha)_* X)_a = X_a^\sharp + (\Phi_*(\alpha_a(((s_\alpha)_* X)_a)))_a, \forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Évaluons cette dernière équation sous $d\lambda_\alpha^\sharp$. À gauche on trouve $d\lambda_\alpha^\sharp((s_\alpha)_* X) = (s_\alpha^* d\lambda_\alpha^\sharp)(X) = (ds_\alpha^* \lambda_\alpha^\sharp)(X) = (d(\lambda_\alpha^\sharp \circ s_\alpha))(X) = (d(v))(X) = 0$. Et le deuxième terme à droite devient $(d\lambda_\alpha^\sharp)_a(\Phi_*(\alpha_a(((s_\alpha)_* X)_a)))_a$. Mais, $\theta_\alpha = s_\alpha^* \alpha$ et donc $\alpha_a((s_\alpha)_* X)_a = ((s_\alpha)^* \alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)} = (\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)}$. C'est-à-dire $(d\lambda_\alpha^\sharp)_a(\Phi_*(\alpha_a(((s_\alpha)_* X)_a)))_a = (d\lambda_\alpha^\sharp)_a(\Phi_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)}))_a$. Puisque $\lambda_\alpha^\sharp = \rho(\lambda_\alpha)^{-1} v$, on obtient

$$\begin{aligned}
(d\lambda_\alpha^\sharp)_a(\Phi_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)}))_a &= (d(\rho(\lambda_\alpha)^{-1} v))_a(\Phi_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)}))_a \\
&= (\rho(\lambda_\alpha)^{-1})_*(\Phi_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)}))_a v \\
&= (\rho((\lambda_\alpha)^{-1}))_*(\Phi(a))_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)}) v
\end{aligned}$$

Par la proposition 2.5.5, $\forall A_e \in T_e G, (\rho(\lambda_\alpha)^{-1})_*(\Phi(a))_*(A_e) = -(\rho_* A_e)\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1}$. On obtient donc $(\rho(\lambda_\alpha)^{-1})_*(\Phi(a))_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)}) v = -\rho_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)})\rho(\lambda_\alpha(a))^{-1} v = -\rho_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)})\lambda_\alpha^\sharp(a)$.

Bref, $(d\lambda_\alpha^\sharp)_a(\Phi_*(\alpha_a(((s_\alpha)_* X)_a)))_a = -\rho_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)})\lambda_\alpha^\sharp(a)$. Ainsi, la décomposition $((s_\alpha)_* X)_a = X_a^\sharp + (\Phi_*(\alpha_a(((s_\alpha)_* X)_a)))_a$ évaluée sous $d\lambda_\alpha^\sharp$ donne $0 = (d\lambda_\alpha^\sharp)_a(X_a^\sharp) - \rho_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)})\lambda_\alpha^\sharp(a)$, c'est-à-dire $(d\lambda_\alpha^\sharp)_a(X_a^\sharp) = \rho_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)})\lambda_\alpha^\sharp(a)$. La section trivialisante associée $s : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha) \times_G V$ vérifiant $s(\pi(a)) = [a, \lambda_\alpha^\sharp(a)]$ a dérivée covariante $(\nabla_X s)(\pi(a)) = [a, (d\lambda_\alpha^\sharp)_a(X_a^\sharp)]$. Ainsi, $\forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ on a $(\nabla_X s)(\pi(a)) = [a, \rho_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)} X_{\pi(a)})\lambda_\alpha^\sharp(a)]$. $\square$

2.7 Fibré en droites complexes

À propos du groupe $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ ***:***

Soit $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ le groupe multiplicatif des nombres complexes non-nuls. $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ est un groupe de Lie abélien. Étudions $\mathbb{C}^*$ en tant que variété presque-complexe $((\mathbb{R}^2)\backslash^{\{0\}}, j)$. La structure presque-complexe $j \in \Gamma(T^*\mathbb{C}^* \otimes T\mathbb{C}^*)$ est intégrable puisque $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^* = 2$. Soient les coordonnées (x,y) sur $(\mathbb{R}^2)\backslash^{\{0\}}$ induites par la restriction de celles canoniques sur $\mathbb{R}^2$. L'identité e de $\mathbb{C}^*$ est au point $(1,0)$. La loi de composition interne vérifie $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. Les coordonnées (x,y) induisent une base (réelle) $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ de $T\mathbb{C}^*$. La structure presque-complexe j s'écrit en ces coordonnées $j = dx \otimes \frac{\partial}{\partial y} - dy \otimes \frac{\partial}{\partial x}$ et vérifie $j\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$ et $j\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}$. Définissons $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - j\frac{\partial}{\partial y})$ sur $\mathbb{C}^*$. Remarquons que $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}$. Pour $a,b \in \mathbb{R}$, j'utiliserai la notation $\check{c} = a + bj \in \Gamma(T^*\mathbb{C}^* \otimes T\mathbb{C}^*)$. Remarquons que $\check{c}\frac{\partial}{\partial z} = (a+bj)\frac{\partial}{\partial x} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$. Ainsi, tout élément du tangeant de $\mathbb{C}^*$ peut s'écrire $\check{c}\frac{\partial}{\partial z}$ pour un certain $\check{c}$.

Soit la représentation $\rho : (\mathbb{C}^*,\cdot) \to GL_1(\mathbb{C}); (x,y) \mapsto z = x + iy$. Remarquons que :

- $\forall z \in GL_1(\mathbb{C}), T_zGL_1(\mathbb{C}) = Mat_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et puisque $\mathbb{C} = span_{\mathbb{R}}\{1,i\}$ on peut écrire $\forall z \in GL_1(\mathbb{C}), T_zGL_1(\mathbb{C}) = span_{\mathbb{R}}\{1,i\}$.
- Le pousser-en-avant $\rho_* : T_{(x,y)}\mathbb{C}^* \to T_{x+iy}GL_1(\mathbb{C})$ vérifie $\rho_*(\frac{\partial}{\partial x}) = 1$ et $\rho_*(\frac{\partial}{\partial y}) = i$.

Proposition 2.7.1. *La représentation* $\rho : (\mathbb{C}^*,\cdot) \to GL_1(\mathbb{C})$ *est* $(j,i)-holomorphe$*, i.e.* $\rho_* j = i\rho_*$.

Démonstration. Soit un point $(x,y) \in \mathbb{C}^*$ quelconque et un $A_{(x,y)} \in T_{(x,y)}\mathbb{C}^*$ quelconque. Alors $\exists a,b \in \mathbb{R}$ tels que $A_{(x,y)} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\rho_* j(A_{(x,y)}) &= \rho_* j(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}) = \rho_*(aj\frac{\partial}{\partial x} + bj\frac{\partial}{\partial y}) = \rho_*(a\frac{\partial}{\partial y} - b\frac{\partial}{\partial x}) \\
&= a\rho_*(\frac{\partial}{\partial y}) + b\rho_*(\frac{\partial}{\partial x}) = ia - b = i(a+ib) \\
&= i(a\rho_*(\frac{\partial}{\partial x}) + b\rho_*(\frac{\partial}{\partial y})) = i(\rho_*(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y})) = i\rho_*(A_{(x,y)})
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.7.2. *D'une part* $\forall a,b \in \mathbb{R}$, *et* $\check{c} = a + bj$ *et* $c = a + ib$ *on a* $\rho_* \check{c} = c\rho_*$ *et d'autre part* $(\rho_*)_e : T_e(\mathbb{C}^*, \cdot) \to \mathbb{C}$.

Certes, l'application $\rho : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to GL_1(\mathbb{C})$ est une simple fonction complexe (holomorphe) sur $\mathbb{C}^*$. J'utiliserai néanmoins ρ_* au lieu de $d\rho$ pour deux raisons. D'une part, concorder avec la notation utilisée dans la dernière section. D'autre part, souligner la nuance entre $T_z GL_1(\mathbb{C})$ et $T_1 GL_1(\mathbb{C})$ pour $z \in GL_1(\mathbb{C})$.

Pour la suite, dénotons $\mathfrak{C} := Lie(\mathbb{C}^*, \cdot)$ et $\mathfrak{gl}_1(\mathbb{C}) := Lie(GL_1(\mathbb{C}))$. L'action à gauche sur $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ vérifie $L_{(x_1,y_1)}(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. Donc le pousser-en-avant $((L_{(x_1,y_1)})_*)_{(x_2,y_2)} : T_{(x_2,y_2)}(\mathbb{C}^*, \cdot) \to T_{(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)}(\mathbb{C}^*, \cdot)$ s'écrit $((L_{(x_1,y_1)})_*)_{(x_2,y_2)} = (x_1dx - y_1dy) \otimes \frac{\partial}{\partial x} + (x_1dy + y_1dx) \otimes \frac{\partial}{\partial y}$. Soit un élément $A_{(1,0)} \in T_{(1,0)}(\mathbb{C}^*, \cdot)$ quelconque s'écrivant $A_{(1,0)} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, la $(\mathbb{C}^*, \cdot)$-orbite à gauche de $A_{(1,0)}$, qui est un champ vectoriel invariant à gauche (i.e. un élément de $\mathfrak{C}$), est donnée par $A_{(x_1,y_1)} = ((L_{(x_1,y_1)})_*)_{(1,0)} A_{(1,0)} = (x_1a - y_1b)\frac{\partial}{\partial x} + (x_1b + y_1a)\frac{\partial}{\partial y}$. En écrivant $\check{c} = a + bj$ et $A_{(1,0)} = \check{c}\frac{\partial}{\partial z}$, on peut réécrire $A \in \mathfrak{C}$ comme $A_{(x,y)} = (x + yj)\check{c}\frac{\partial}{\partial z}$, ou encore comme $A_{(x,y)} = (x + yj)A_{(1,0)}$. Enfin, $\rho_* A \in \mathfrak{gl}_1(\mathbb{C})$ s'écrit $(\rho_* A)_z = zc$ où $c = a + ib$.

Soit θ, la 1-forme de Maurer-Cartan sur $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Elle vérifie $\theta_{(x,y)} = ((L_{(x,y)^{-1}})_*)_{(x,y)} : T_{(x,y)}(\mathbb{C}^*, \cdot) \to T_{(1,0)}(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Sachant que $(x,y)^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ et $(x + yj)^{-1} = \frac{x - yj}{x^2+y^2}$, on trouve directement :

$$
\begin{aligned}
\theta_{(x,y)} &= ((L_{(x,y)^{-1}})_*)_{(x,y)} = ((L_{(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})})_*)_{(x,y)} \\
&= (\frac{x}{x^2+y^2}dx - \frac{-y}{x^2+y^2}dy) \otimes \frac{\partial}{\partial x} + (\frac{x}{x^2+y^2}dy + \frac{-y}{x^2+y^2}dx) \otimes \frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{1}{x^2+y^2}((xdx + ydy) \otimes \frac{\partial}{\partial x} + (xdy - ydx) \otimes \frac{\partial}{\partial y}) \\
&= \frac{1}{x^2+y^2}(dx \otimes (x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}) + dy \otimes (y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})) \\
&= dx \otimes \frac{x - yj}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + dy \otimes \frac{x - yj}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y} \\
&= dx \otimes (x + yj)^{-1}\frac{\partial}{\partial x} + dy \otimes (x + yj)^{-1}\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
$$

Vérifions que pour $A \in \mathfrak{C}$ on a bien $\theta(A) = A_{(1,0)}$. En toute généralité, on peut écrire

$A_{(x,y)} = (x+yj)(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y})$, i.e. $A_{(x,y)} = (xa-yb)\frac{\partial}{\partial x}+(xb+ya)\frac{\partial}{\partial y}$. Calculons :

$$\begin{array}{rl} & \theta_{(x,y)}(A_{(x,y)}) \\ = & \frac{1}{x^2+y^2}(dx\otimes(x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y})+dy\otimes(y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}))((xa-yb)\frac{\partial}{\partial x}+(xb+ya)\frac{\partial}{\partial y}) \\ = & \frac{1}{x^2+y^2}((xa-yb)(x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y})+(xb+ya)(y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y})) \\ = & \frac{1}{x^2+y^2}(a(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}+b(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}) = a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y} = A_{(1,0)} \end{array}$$

Remarquons que $\theta j = j\theta$ puisque :

$$\begin{array}{rcl} \theta_{(x,y)}j & = & (dx\otimes(x+yj)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+dy\otimes(x+yj)^{-1}\frac{\partial}{\partial y})j \\ & = & (dx)j\otimes(x+yj)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+(dy)j\otimes(x+yj)^{-1}\frac{\partial}{\partial y} \\ & = & -dy\otimes(x+yj)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+dx\otimes(x+yj)^{-1}\frac{\partial}{\partial y} \\ & = & dy\otimes(x+yj)^{-1}j\frac{\partial}{\partial y}+dx\otimes(x+yj)^{-1}j\frac{\partial}{\partial x} \\ & = & j(dy\otimes(x+yj)^{-1}\frac{\partial}{\partial y}+dx\otimes(x+yj)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}) \\ & = & j\theta_{(x,y)} \end{array}$$

La forme de Maurer-Cartan sur $GL_1(\mathbb{C})$ est $\rho_*\theta\rho_*^{-1}$ et vérifie $(\rho_*\theta\rho_*^{-1})_z = z^{-1}$. Enfin, la 1-forme complexe $\rho_*\theta : T(\mathbb{C}^*,\cdot)\to\mathbb{C}$ nous sera très utile. De $(\rho_*\theta\rho_*^{-1})_z = z^{-1}$ on trouve $(\rho_*\theta)_{(x,y)} = (x+iy)^{-1}(\rho_*)_{(x,y)}$, c'est-à-dire $(\rho_*\theta)_{(x,y)} = (\rho(x,y))^{-1}(\rho_*)_{(x,y)}$. En voyant ρ comme une simple fonction complexe z sur $\mathbb{C}^*$, on peut réécrire $\rho_*\theta$ comme $(\rho_*\theta)_{(x,y)} = \frac{dz}{z} = d(ln(z))$ ou même $\rho_*\theta = \frac{d\rho}{\rho} = d(ln(\rho))$. Notons enfin que $\rho_*^{-1}z^{-1} = \theta_{\rho^{-1}(z)}\rho_*^{-1}$.

De retour aux fibrés :

Étudions le cas particulier où $V=\mathbb{C}$, une droite complexe (en tant qu'espace vectoriel complexe de dimension complexe 1). On y fait agir le groupe $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ via la représentation bijective (j,i)-holomorphe ρ décrite ci-haut.

Soit $\pi : L^*\to M$, un $(\mathbb{C}^*,\cdot)$-fibré principal muni d'une forme de connexion $\alpha : TL^*\to$

$T_e(\mathbb{C}^*,\cdot)$. Le fibré $\pi : L^* \to M$ est à fibres difféomorphes à $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

Définition Soit $pr : L \to M$, où $L := L^* \times_\rho \mathbb{C}$, le fibré vectoriel associé au $(\mathbb{C}^*,\cdot)$-fibré principal L^* via la représentation de ρ sur $\mathbb{C}$. Le fibré $pr : L \to M$ est à fibres isomorphes à $\mathbb{C}$. On dit que $pr : L \to M$ est un « fibré en droites complexes » sur M.

Soit $\Psi_\alpha = (\pi,\lambda_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times (\mathbb{C}^*,\cdot)$ une trivialisation locale de $\pi : L^* \to M$ et la section trivialisante locale $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ telle que $\lambda_\alpha \circ s_\alpha = e$. Le choix d'une section trivialisante locale associée s à s_α passe par le choix d'un vecteur $v \in \mathbb{C}\backslash^{\{0\}}$. Pour la suite, prenons $v = 1 \in \mathbb{C}^*$ (ici $\mathbb{C}^*$ est l'espace vectoriel privé du vecteur nul et non le groupe $(\mathbb{C}^*,\cdot)$!). Ainsi, la section trivialisante locale associée $s : U_\alpha \to pr^{-1}(U_\alpha)$ définie par $s(\pi(a)) = [a,\lambda_\alpha^\sharp(a)], \forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ où $\lambda_\alpha^\sharp = \rho(\lambda_\alpha)^{-1}v = \rho(\lambda_\alpha)^{-1}$. Souvenons-nous que $\forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall a \in \pi^{-1}(U_\alpha), (\nabla_X s)(\pi(a)) = [a, \rho_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)}X_{\pi(a)})\lambda_\alpha^\sharp(a)]$. Mais, $(\rho_*)_e : T_e(\mathbb{C}^*,\cdot) \to \mathbb{C}$ et donc $\rho_*((\theta_\alpha)(X))$ est une fonction complexe sur U_α. On a donc

$$\begin{aligned}(\nabla_X s)(\pi(a)) &= [a,\rho_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)}X_{\pi(a)})\lambda_\alpha^\sharp(a)] = \rho_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)}X_{\pi(a)})[a,\lambda_\alpha^\sharp(a)] \\ &= \rho_*((\theta_\alpha)_{\pi(a)}X_{\pi(a)})s(\pi(a)) = (\rho_*(\theta_\alpha(X))s)(\pi(a))\end{aligned}$$

C'est-à-dire que $\forall X \in \mathfrak{X}(M), x \in U_\alpha$ on a $(\nabla_X s)(x) = (\rho_*(\theta_\alpha(X))s)(x)$. En tant qu'applications $\theta_\alpha : TU_\alpha \to T_e(\mathbb{C}^*,\cdot)$ et $(\rho_*)_e : T_e(\mathbb{C}^*,\cdot) \to \mathbb{C}$ j'écrirai simplement $\rho_*\theta_\alpha : TU_\alpha \to \mathbb{C}$. Ainsi, $\forall x \in U_\alpha$ on écrit plus simplement $(\nabla_X s)(x) = (\rho_*\theta_\alpha(X)s)(x)$, ou même

$$\boxed{\nabla_X s = \rho_*\theta_\alpha(X)s}$$

Définition On dénote par $\Gamma(L)$ l'espace des sections globales et différentiables du fibré en droite complexes $pr : L \to M$.

Puisque le groupe $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ agit librement via ρ sur $\mathbb{C}^*$ et que localement il existe toujours une section trivialisante locale associée $s : U_\alpha \to pr^{-1}(U_\alpha)$ partout non-nulle sur U_α, toute section globale $s' \in \Gamma(L)$ peut s'écrire localement comme $s' = fs$ où $f \in \mathscr{C}^\infty(U_\alpha,\mathbb{C})$ (où f peut se permettre d'être nulle comme bon lui semble).

Définition Sous-entendue une section trivialisante locale associée $s : U_\alpha \to pr^{-1}(U_\alpha)$, on dit que le $f \in \mathscr{C}^\infty(U_\alpha, \mathbb{C})$ vérifiant $s' = fs$ est le « représentant de s' ».

Remarque Remarquons que le représentant de s est la fonction constante 1 puisque $s = 1s$.

Proposition 2.7.3. *Sous trivialisation locale associée s, la dérivée covariante de $s' = fs$ en X est $\nabla_X(s') = (df(X) + \rho_*\theta_\alpha(X))s$.*

Démonstration. Via la formule de Leibniz pour ∇_X on calcule directement que $\nabla_X(s') = \nabla_X(fs) = df(X)s + \nabla_X s = df(X)s + \rho_*\theta_\alpha(X)s = (df(X) + \rho_*\theta_\alpha(X))s$. □

Proposition 2.7.4. *Dans de telles conditions, on a pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M;\mathbb{C})$ l'égalité $(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})s = \rho_* d\theta_\alpha(X,Y)s$.*

Démonstration. Dans de telles conditions, on a que $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M;\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})s &= (\rho_*\theta_\alpha(X)\rho_*\theta_\alpha(Y) - \rho_*\theta_\alpha(Y)\rho_*\theta_\alpha(X) - \rho_*\theta_\alpha([X,Y]))s \\
&= -\rho_*\theta_\alpha([X,Y])s = -\rho_* s_\alpha^*\alpha([X,Y])s \\
&= -\rho_*\alpha(s_{\alpha*}([X,Y]))s = -\rho_*\alpha([s_{\alpha*}X, s_{\alpha*}Y])s \\
&= \rho_* d\alpha(s_{\alpha*}X, s_{\alpha*}Y)s = \rho_* ds_\alpha^*\alpha(X,Y)s \\
&= \rho_* d\theta_\alpha(X,Y)s
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.7.5. *La 2-forme complexe $curv_\nabla$ sur M donnée par $curv_\nabla|_{U_\alpha} := \rho_* d\theta_\alpha$ est bien définie.*

Démonstration. Soient deux trivialisations locales $\Psi_\alpha = (\pi, \lambda_\alpha) : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times (\mathbb{C}^*, \cdot)$ et $\Psi_\beta = (\pi, \lambda_\beta) : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times (\mathbb{C}^*, \cdot)$ telles que $U_\alpha \cap U_\beta$ est non-vide. On a les sections trivialisantes locales $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ et $s_\beta : U_\beta \to \pi^{-1}(U_\beta)$ vérifiant $\lambda_\alpha \circ s_\alpha = 1$ et $\lambda_\beta \circ s_\beta = 1$ et reliées par la fonction de transition $\Psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ comme $s_\beta = s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta}$. On a $\theta_\alpha = s_\alpha^*\alpha$ et $\theta_\beta = s_\beta^*\alpha$ reliées par $\theta_\beta = Ad_{(\Psi_{\alpha\beta})^{-1}}\theta_\alpha + \theta_{\alpha\beta}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$ et où $\theta_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha\beta}^*\theta$ où θ est la forme de Maurer-Cartan sur $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Le groupe de Lie $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ étant abélien, la représentation adjointe Ad est triviale. Ainsi, $\theta_\beta = \theta_\alpha + \theta_{\alpha\beta}$. D'autre part, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ étant abélien, l'équation de Maurer-Cartan implique que la forme de Maurer-Cartan θ est fermée, i.e. $d\theta = -\theta([,]) = 0$. Donc $d\theta_{\alpha\beta} = d\Psi^*_{\alpha\beta}\theta = \Psi^*_{\alpha\beta}d\theta = 0$. C'est-à-dire que $d\theta_\alpha = d\theta_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$, i.e. $\rho_* d\theta_\alpha = \rho_* d\theta_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Définissons $curv_\nabla|_{U_\alpha\cap U_\beta} = \rho_* d\theta_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = \rho_* d\theta_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$. Remarquons que $curv_\nabla$ étant indépendante de la section trivialisante locale, un recouvrement ouvert de M nous donne un $curv_\nabla$ défini globalement sur tout M. □

Remarque On a $\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = curv_\nabla(X,Y)$ sur tout M. D'autre part, puisque $curv_\nabla$ est partout localement exacte, elle est globalement fermée.

Définition Une « structure hermitienne » h différentiable est une application bilinéaire non-dégénérée et définie positive telle que $\forall x \in M, h_x : L_{pr^{-1}(x)} \times L_{pr^{-1}(x)} \to \mathbb{C}; h(z_1 a, z_2 b) = \bar{z}_1 z_2 h(a,b)$ et $\forall a \in L_{pr^{-1}(x)}, h(a,a) \in \mathbb{R}_+$. Elle est dite « ∇-invariante » si pour tout $\forall X \in \mathfrak{X}(M;\mathbb{C})$ et pour tout $s_1, s_2 \in \Gamma(L)$ elle vérifie $X(h(s_1,s_2)) = h(\nabla_{\overline{X}}(s_1), s_2) + h(s_1, \nabla_X(s_2))$.

Remarque $\overline{\rho_*\theta_\alpha(X)} = \overline{\rho_*\theta_\alpha}(\overline{X})$.

Proposition 2.7.6. *Soit $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ une section trivialisante locale de L^* et s sa section trivialisante locale associée de L. La structure hermitienne h est ∇-invariante si et seulement si $d(ln(h(s,s))) = \rho_*\theta_\alpha + \overline{\rho_*\theta}_\alpha$ sur U_α.*

Démonstration. Puisque h est hermitienne et que s ne s'annule jamais sur U_α, $h(s,s)$ est une fonction réelle strictement positive définie sur U_α. D'autre part, sur U_α on peut exprimer toutes autres sections s_1 et s_2 de L sur U_α comme $s_1 = fs$ et $s_2 = gs$ où $f, g \in \mathscr{C}^\infty(U_\alpha;\mathbb{C})$. Soit un $X \in \mathfrak{X}(U_\alpha;\mathbb{C})$ quelconque et supposons h ∇-invariante. On a donc $X(h(s_1,s_2)) = h(\nabla_{\overline{X}}(s_1), s_2) + h(s_1, \nabla_X(s_2))$. Calculons d'une part sur U_α :

$$
\begin{aligned}
h(\nabla_{\overline{X}}(s_1),s_2)+h(s_1,\nabla_X(s_2)) &= h(\nabla_{\overline{X}}(fs),gs)+h(fs,\nabla_X(gs)) \\
&= h((\overline{X}f+\rho_*\theta_\alpha(\overline{X})f)s,gs)+h(fs,(Xg+\rho_*\theta_\alpha(X)g)s) \\
&= (X\bar{f}+\overline{\rho_*\theta}_\alpha(X)\bar{f})(g)h(s,s)+(\bar{f})(Xg+\rho_*\theta_\alpha(X)g)h(s,s) \\
&= (gX\bar{f}+\bar{f}g\overline{\rho_*\theta}_\alpha(X)+\bar{f}Xg+\bar{f}g\rho_*\theta_\alpha(X))h(s,s) \\
&= (X(\bar{f}g))h(s,s)+(\bar{f}g(\rho_*\theta_\alpha+\overline{\rho_*\theta}_\alpha)(X))h(s,s)
\end{aligned}
$$

et d'autre part sur U_α :

$$
\begin{aligned}
X(h(s_1,s_2)) &= X(h(fs,gs)) \\
&= X(\bar{f}gh(s,s)) \\
&= (X(\bar{f}g))h(s,s)+(\bar{f}g)X(h(s,s))
\end{aligned}
$$

Mais puisque $X(h(s_1,s_2)) = h(\nabla_{\overline{X}}(s_1),s_2)+h(s_1,\nabla_X(s_2))$, nous obtenons l'égalité $(\bar{f}g)X(h(s,s)) = (\bar{f}g(\rho_*\theta_\alpha+\overline{\rho_*\theta}_\alpha)(X))h(s,s)$. Comme X est arbitraire, ceci revient à dire que $\frac{d(h(s,s))}{h(s,s)} = \rho_*\theta_\alpha+\overline{\rho_*\theta}_\alpha$, ou encore, puisque $h(s,s)$ est réelle strictement positive, à $d(ln(h(s,s))) = \rho_*\theta_\alpha+\overline{\rho_*\theta}_\alpha$.

Inversement, supposons $d(ln(h(s,s))) = \rho_*\theta_\alpha+\overline{\rho_*\theta}_\alpha$. Ce qui revient à l'égalité $d(h(s,s)) = (\rho_*\theta_\alpha+\overline{\rho_*\theta}_\alpha)h(s,s)$ et l'on calcule directement

$$
\begin{aligned}
d(h(s,s)) &= (\rho_*\theta_\alpha+\overline{\rho_*\theta}_\alpha)h(s,s) \\
&= (\rho_*\theta_\alpha)h(s,s)+(\overline{\rho_*\theta}_\alpha)h(s,s) \\
&= h(s,(\rho_*\theta_\alpha)s)+h((\rho_*\theta_\alpha)s,s) \\
&= h(s,\nabla s)+h(\nabla s,s)
\end{aligned}
$$

Et ainsi h est ∇-invariante. □

Corollaire 2.7.7. *h est ∇-invariante si et seulement si la partie réelle de $\rho_*\theta_\alpha$ est exacte.*

Remarque Il est possible de montrer que cela implique que la partie réelle de $\rho_*\alpha$:

$TP \to \mathbb{C}$ est exacte sur tout P si et seulement s'il existe h qui est ∇-invariante, mais je ne le ferai pas. D'autre part, si $\rho_*\alpha$ est de partie réelle exacte, alors $\rho_* d\alpha$ purement imaginaire.

D'autre part, pour h ∇-invariante, on a $curv_\nabla|_{U_\alpha} = \rho_* d\theta_\alpha = d(\rho_*\theta_\alpha)$ et puisque la partie réelle de $\rho_*\theta_\alpha$ est exacte (et donc fermée) on obtient $d(\rho_*\theta_\alpha) = iIm(d(\rho_*\theta_\alpha))$. C'est-à-dire que pour h ∇-invariante, $curv_\nabla$ est purement imaginaire.

Soit une constante $\hbar \in \mathbb{R}_+$. Sur chaque U_α, définissons

$$\boxed{\Theta_\alpha := i\hbar\rho_*\theta_\alpha}$$

Définissons aussi

$$\boxed{\omega := i\hbar curv_\nabla}$$

Sur chaque U_α, on obtient

$$\boxed{\omega|_{U_\alpha} = d\Theta_\alpha}$$

Puisque $curv_\nabla$ est globalement définie et fermée, ω est aussi globalement définie et fermée.

L'équation $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M;\mathbb{C}), \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = curv_\nabla(X,Y)$ sur tout M se reformule en

$$\boxed{\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M;\mathbb{C}), \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = \frac{1}{i\hbar}\omega(X,Y)}$$

La dérivée covariante sur U_α prend ainsi la forme

$$\boxed{\nabla_X(fs) = (df(X) + \frac{1}{i\hbar}\Theta_\alpha(X))s}$$

Sur $U_\alpha \cap U_\beta$ on a $\theta_\beta - \theta_\alpha = \theta_{\alpha\beta}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\Theta_\beta - \Theta_\alpha &= i\hbar\rho_*\theta_{\alpha\beta} = i\hbar\rho_*(\Psi^*_{\alpha\beta}\theta) = i\hbar(\rho_*\theta)_{\Psi_{\alpha\beta}}(\Psi_{\alpha\beta})_* \\
&= i\hbar(\rho(\Psi_{\alpha\beta}))^{-1}(\rho_*)_{\Psi_{\alpha\beta}}(\Psi_{\alpha\beta})_* = i\hbar(\rho\circ\Psi_{\alpha\beta})^{-1}(\rho\circ\Psi_{\alpha\beta})_* \\
&= i\hbar d(ln(\rho\circ\Psi_{\alpha\beta}))
\end{aligned}$$

Bref :

$$\boxed{\Theta_\beta - \Theta_\alpha = i\hbar d(ln(\rho\circ\Psi_{\alpha\beta})) \text{ sur } U_\alpha \cap U_\beta}$$

Aussi, la formule $d(ln(h(s,s))) = \rho_*\theta_\alpha + \overline{\rho_*\theta}_\alpha$ prend la forme

$$\boxed{d(ln(h(s,s))) = \frac{2}{\hbar}Im(\Theta_\alpha)}$$

et l'on en retient que h est ∇-invariante si et seulement si $Im(\Theta_\alpha)$ est exacte, i.e. si ω est réelle.

Définition Un fibré en droites complexes muni d'une structure hermitienne ∇-invariante est dit être un « fibré en droites hermitien ».

CHAPITRE 3

QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE

« Cosmogonie arithmétique et philosophique fondée
sur la sublimité paranoïaque du nombre douze. »
S. Dali, 1955.

3.1 Condition d'intégralité de Weil

Références : (Woodhouse [21]) et (Simms et Woodhouse [17])

Condition nécessaire :

Soit $pr : L \to M$ un fibré en droites hermitien associé à un $(\mathbb{C}^*)$-fibré principal $\pi : L^* \to M$ muni d'une forme de connexion α. On a vu dans la section §2.6 que la propriété abélienne de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ impliquait que $\omega := i\hbar curv_\nabla$ est définie globalement sur M et est fermée. Puis on a vu que la ∇-invariance de la métrique hermitienne h de L impliquait ω réelle. Nous allons maintenant montrer que ω vérifie aussi une condition d'intégralité.

Théorème 3.1.1. ***(condition d'intégralité (i)) :*** *Supposons* $dim(M) \geq 3$ *et* M *orientable. Soit* $\mathscr{S}$*, une variété différentielle compacte orientable de dimension* 2 *et* $\iota : \mathscr{S} \hookrightarrow M$*, un immersion de* $\mathscr{S}$ *en* M*. Alors l'intégrale de* ω *sur* $\Sigma = \iota(\mathscr{S}) \subset M$ *est un multiple entier de* $2\pi\hbar$*.*

Démonstration. Commençons par prouver le théorème pour $\mathscr{S} = S^2$, la 2-sphère.

Soit $\tilde{U}_\alpha$ l'ouvert « hémisphère nord » de S^2 (contenant l'équateur mais non un certain voisinage du point sud) et soit $\tilde{U}_\beta$ l'ouvert « hémisphère sud » de S^2 (contenant l'équateur mais non un certain voisinage du point nord) tels que l'intersection $\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta$ est un voisinage tubulaire de l'équateur (ne contenant ni un certain voisinage du nord ni un certain voisinage du sud) et tels que $\iota(\tilde{U}_\alpha) = U_\alpha|_\Sigma$ et $\iota(\tilde{U}_\beta) = U_\beta|_\Sigma$. Remarquons que $\iota(\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta) \subset (U_\alpha \cap U_\beta)|_\Sigma$. On a $\tilde{\omega}|_{U_\alpha} = d\theta_\alpha$ et $\tilde{\omega}|_{U_\beta} = d\theta_\beta$. Soit les courbes paramétrées $\gamma_\alpha : [0,1] \to S^2$ recouvrant le bord de $\tilde{U}_\alpha$ (dans la même orientation que $\partial\tilde{U}_\alpha$) et $\gamma_\beta : [0,1] \to S^2$ recouvrant le bord de $\tilde{U}_\beta$ (dans la même orientation que

$\partial\tilde{U}_\beta$). Ainsi, $\partial(U_\alpha|_\Sigma) = \iota \circ \gamma_\alpha([0,1])$ et $\partial(U_\beta|_\Sigma) = \iota \circ \gamma_\beta([0,1])$ et $\partial((U_\alpha \cap U_\beta)|_\Sigma) = \iota \circ \gamma_\alpha([0,1]) \bigsqcup \iota \circ \gamma_\beta([0,1])$, où « $\bigsqcup$ » est l'union disjointe. Notons aussi que la continuité de $\rho \circ \Psi_{\alpha\beta} \circ \iota \circ \gamma_\beta(t)$ implique $\rho \circ \Psi_{\alpha\beta} \circ \iota \circ \gamma_\beta(1) = \rho \circ \Psi_{\alpha\beta} \circ \iota \circ \gamma_\beta(0)$.

Souvenons-nous que $\Theta_\beta - \Theta_\alpha = i\hbar d(ln(\rho \circ \Psi_{\alpha\beta}))$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$.

Calculons directement l'intégrale :

$$
\begin{aligned}
\oint_\Sigma \omega &= \int_{U_\alpha|_\Sigma} \omega + \int_{U_\beta|_\Sigma} \omega - \int_{(U_\alpha \cap U_\alpha)|_\Sigma} \omega \\
&= \int_{U_\alpha|_\Sigma} d\Theta_\alpha + \int_{U_\beta|_\Sigma} d\Theta_\beta - \int_{(U_\alpha \cap U_\alpha)|_\Sigma} d\Theta_\alpha \\
&= \int_{\partial U_\alpha|_\Sigma} \Theta_\alpha + \int_{\partial U_\beta|_\Sigma} \Theta_\beta - \int_{\partial((U_\alpha \cap U_\alpha)|_\Sigma)} \Theta_\alpha \\
&= \oint_{\iota\circ\gamma_\alpha([0,1])} \Theta_\alpha + \oint_{\iota\circ\gamma_\beta([0,1])} \Theta_\beta - \int_{\iota\circ\gamma_\alpha([0,1]) \bigsqcup \iota\circ\gamma_\beta([0,1])} \Theta_\alpha \\
&= \oint_{\iota\circ\gamma_\alpha([0,1])} \Theta_\alpha + \oint_{\iota\circ\gamma_\beta([0,1])} \Theta_\beta - \int_{\iota\circ\gamma_\alpha([0,1])} \Theta_\alpha - \int_{\iota\circ\gamma_\beta([0,1])} \Theta_\alpha \\
&= \oint_{\iota\circ\gamma_\beta([0,1])} (\Theta_\beta - \Theta_\alpha) = \oint_{\iota\circ\gamma_\beta([0,1])} i\hbar d(ln(\rho \circ \Psi_{\alpha\beta})) \\
&= i\hbar \int_{[0,1]} \gamma_\beta^* \iota^*(d(ln(\rho \circ \Psi_{\alpha\beta}))) = i\hbar \int_{[0,1]} d(ln(\rho \circ \Psi_{\alpha\beta} \circ \iota \circ \gamma_\beta)) \\
&= i\hbar(ln(\rho \circ \Psi_{\alpha\beta} \circ \iota \circ \gamma_\beta))|_0^1 = i\hbar(ln(\frac{\rho \circ \Psi_{\alpha\beta} \circ \iota \circ \gamma_\beta(1)}{\rho \circ \Psi_{\alpha\beta} \circ \iota \circ \gamma_\beta(0)})) \\
&= i\hbar(ln(1)) = i\hbar(2\pi i k) = -2\pi\hbar k \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Maintenant, soit $\mathscr{S}$, une variété différentielle compacte orientable de dimension 2 quelconque et $\iota : \mathscr{S} \hookrightarrow M$ une immersion de $\mathscr{S}$ en M. Puisque ω est fermée, toute homotopie de Σ préserve $\oint_\Sigma \omega$ (et ce même lors de pincement de Σ). En homotopant Σ à une union disjointe de sphères immersées $S^2 \hookrightarrow M$, on trouve que $\oint_\Sigma \omega$ est la somme des intégrales de ω sur chaque sphère plongée. Mais l'intégrale de ω sur chaque sphère plongée est un multiple entier de $2\pi\hbar$. Donc $\oint_\Sigma \omega \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}$. $\square$

Corollaire 3.1.2. *Soit* (M,ω) *une variété symplectique de dimension* $dim(M) \geq 4$. *Une condition* <u>*nécessaire*</u> *à l'existence d'un fibré en droites hermitien de base* M *où* h *est*

∇-invariant et où $\omega = i\hbar curv_\nabla$ est que ω soit intégrale.

Remarque Notons que si $\omega' = \omega + d\zeta$, l'intégrale de $d\zeta$ sur une surface compacte $\Sigma \subset M$ est nulle puisque $\partial\Sigma = \emptyset$. Donc la condition d'intégralité (i) est une condition sur ω à $d\zeta$ près, en particulier à potentiel de transition $\theta_{\alpha\beta}$ près. C'est-à-dire, la condition d'intégralité (i) est une contrainte cohomologique qui se résume à $[\omega] \in H^2(M; 2\pi\hbar\mathbb{Z})$. Ainsi, le corollaire précédent se reformule en :

Corollaire 3.1.3. ***(condition d'intégralité (ii)) :*** *Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $dim(M) \geq 4$. Une condition nécessaire à l'existence d'un fibré en droites hermitien de base M où h est ∇-invariant et où $\omega = i\hbar curv_\nabla$ est que $[\omega] \in H^2(M; 2\pi\hbar\mathbb{Z})$. On dit alors que ω est une 2-forme « intégrale ».*

Condition suffisante :

Théorème 3.1.4. ***(condition suffisante) :*** *Soit (M,ω) une variété symplectique. Si ω est intégrale, alors il existe un fibré en droites hermitien $pr : L \to M$ de métrique hermitienne h ∇-invariant telle que $curv_\nabla = -i\hbar^{-1}\omega$.*

Démonstration. Soit (M,ω) une variété symplectique telle que $[\omega] \in H^2(M; 2\pi\hbar\mathbb{Z})$. Soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert contractile de M. Soient trois ouverts $U_\alpha, U_\beta, U_\gamma \in \{U_\alpha\}$ tels que $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$. Puisque ω est fermée et les ouverts sont contractiles, on a

- $\exists \Theta_\alpha$ tel que $\omega|_{U_\alpha} = d\Theta_\alpha$
- $\exists \Theta_\beta$ tel que $\omega|_{U_\beta} = d\Theta_\beta$
- $\exists \Theta_\gamma$ tel que $\omega|_{U_\gamma} = d\Theta_\gamma$

Et encore puisque les ouverts sont contractiles on a donc

- $d(\Theta_\alpha - \Theta_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = (\omega - \omega)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = 0$
  $\implies \exists f_{\alpha\beta}$ telle que $(\Theta_\alpha - \Theta_\beta)|_{U_\alpha \cap U_\beta} = df_{\alpha\beta}$
- $d(\Theta_\beta - \Theta_\gamma)|_{U_\beta \cap U_\gamma} = (\omega - \omega)|_{U_\beta \cap U_\gamma} = 0$
  $\implies \exists f_{\beta\gamma}$ telle que $(\Theta_\beta - \Theta_\gamma)|_{U_\beta \cap U_\gamma} = df_{\beta\gamma}$

- $d(\Theta_\gamma - \Theta_\alpha)|_{U_\gamma \cap U_\alpha} = (\omega - \omega)|_{U_\gamma \cap U_\alpha} = 0$
  $\Longrightarrow \exists f_{\gamma\alpha}$ telle que $(\Theta_\gamma - \Theta_\alpha)|_{U_\gamma \cap U_\alpha} = df_{\gamma\alpha}$

On calcule sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ que

$$\begin{aligned} d(f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha}) &= df_{\alpha\beta} + df_{\beta\gamma} + df_{\gamma\alpha} \\ &= (\Theta_\alpha - \Theta_\beta) + (\Theta_\beta - \Theta_\gamma) + (\Theta_\gamma - \Theta_\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, encore puisque les trois ouverts sont contractiles, il existe une constante c telle que $(f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha})|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} = 2\pi\hbar c$. La condition d'intégralité de ω nous permet de supposer que $c \in \mathbb{Z}$. Soit $\rho : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to GL_1(\mathbb{C})$ la représentation holomorphe décrite au début de la section §2.7. Posons maintenant les trois applications $\Psi_{\alpha\beta} := \rho^{-1} \circ e^{-i\hbar^{-1} f_{\alpha\beta}}$, $\Psi_{\beta\gamma} := \rho^{-1} \circ e^{-i\hbar^{-1} f_{\beta\gamma}}$ et $\Psi_{\gamma\alpha} := \rho^{-1} \circ e^{-i\hbar^{-1} f_{\gamma\alpha}}$. Remarquons que sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ on a

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha\beta}\Psi_{\beta\gamma}\Psi_{\gamma\alpha} &= (\rho^{-1} \circ e^{-i\hbar^{-1} f_{\alpha\beta}})(\rho^{-1} \circ e^{-i\hbar^{-1} f_{\beta\gamma}})(\rho^{-1} \circ e^{-i\hbar^{-1} f_{\gamma\alpha}}) \\ &= \rho^{-1}(e^{-i\hbar^{-1} f_{\alpha\beta}} e^{-i\hbar^{-1} f_{\beta\gamma}} e^{-i\hbar^{-1} f_{\gamma\alpha}}) \\ &= \rho^{-1}(e^{-i\hbar^{-1}(f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha})}) = \rho^{-1}(e^{-2\pi i c}) = \rho^{-1}(1) = e \end{aligned}$$

où le dernier « e » est l'identité en $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ et non la constante de Néper. Par la proposition 2.5.1 (que l'on retrouve dans (Kobayashi et Nomizu [12])), ceci implique l'existence d'un $(\mathbb{C}^*, \cdot)$-fibré principal $\pi : L^* \to M$ où les « Ψ » sont les fonctions de transition. Donné L^*, on peut toujours construire un fibré en droites complexes $pr : L \to M$ associé à L^*.

Posons les trois 1-formes à valeurs en $T_e(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sur leurs ouverts $U_\alpha, U_\beta, U_\gamma$ respectifs suivantes :

$$\theta_\alpha := -i\hbar^{-1}(\rho^{-1})_* \Theta_\alpha \text{ et } \theta_\beta := -i\hbar^{-1}(\rho^{-1})_* \Theta_\beta \text{ et } \theta_\gamma := -i\hbar^{-1}(\rho^{-1})_* \Theta_\gamma$$

Soit θ la 1-forme de Maurer-Cartan sur $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Posons aussi les trois 1-formes à valeurs en $T_e(\mathbb{C}^*,\cdot)$ sur leurs ouverts respectifs $U_\alpha \cap U_\beta$, $U_\beta \cap U_\gamma$ et $U_\gamma \cap U_\alpha$ suivantes :

$$\theta_{\alpha\beta} := \Psi^*_{\alpha\beta}\theta \text{ et } \theta_{\beta\gamma} := \Psi^*_{\beta\gamma}\theta \text{ et } \theta_{\gamma\alpha} := \Psi^*_{\gamma\alpha}\theta$$

On calcule sur $U_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
(\theta_\beta - \theta_\alpha) &= -i\hbar^{-1}(\rho^{-1})_*(\Theta_\beta - \Theta_\alpha) = -i\hbar^{-1}(\rho^{-1})_*(df_{\alpha\beta})|_{U_{\alpha\beta}} \\
&= (\rho^{-1})_* d(ln(e^{-i\hbar^{-1}f_{\alpha\beta}})) = (\rho^{-1})_*(e^{-i\hbar^{-1}f_{\alpha\beta}})^{-1}(e^{-i\hbar^{-1}f_{\alpha\beta}})_* \\
&= \theta_{\rho^{-1}\circ e^{-i\hbar^{-1}f_{\alpha\beta}}}(\rho^{-1})_*(e^{-i\hbar^{-1}f_{\alpha\beta}})_* = \theta_{\rho^{-1}\circ e^{-i\hbar^{-1}f_{\alpha\beta}}}(\rho^{-1}\circ e^{-i\hbar^{-1}f_{\alpha\beta}})_* \\
&= (\rho^{-1}\circ e^{-i\hbar^{-1}f_{\alpha\beta}})^*\theta = \Psi^*_{\alpha\beta}\theta = \theta_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

De même, par permutation cyclique sur les indices α, β et γ on trouve $(\theta_\gamma - \theta_\beta)|_{U_{\beta\gamma}} = \theta_{\beta\gamma}|_{U_{\beta\gamma}}$ et $(\theta_\alpha - \theta_\gamma)|_{U_{\gamma\alpha}} = \theta_{\gamma\alpha}|_{U_{\gamma\alpha}}$. Par la deuxième partie de la proposition 2.5.4, ceci implique l'existence d'une forme de connexion α sur L^* qui donne lieu à θ_α, θ_β et θ_γ. Suivant la construction de la section §2.7, cette forme de connexion α sur L^* donne une dérivée covariante de courbure $curv_\nabla = -i\hbar^{-1}\omega$. Soit h une métrique hermitienne sur L. Puisque ω est réelle fermée, la métrique hermitienne est ∇-invariante. □

Conlusion :

Du corollaire « condition d'intégralité (ii) » et du théorème « condition suffisante » on en conclut le théorème suivant :

Théorème 3.1.5. ***(Condition d'intégralité de Weil [21]) :*** *Soit (M,ω) une variété symplectique. Il existe un fibré en droites hermitien $pr : L \to M$ muni d'une connexion ∇ de courbure $curv_\nabla = -i\hbar^{-1}\omega$ si et seulement si $[\omega] \in H^2(M; 2\pi\hbar\mathbb{Z})$.*

Acceptons sans preuve le résultat suivant :

Théorème 3.1.6. ***[21] :*** *Quand $[\omega] \in H^2(M; 2\pi\hbar\mathbb{Z})$, les différents choix de fibrés L et connexions ∇ sont paramétrés par $H^1(M; U(1))$.*

3.2 Préquantification

Référence : (Sniatycki [18]) et (Woodhouse [21]).

Définition (Condition de préquantification) : Une variété symplectique (M,ω) est dite « préquantifiable » si elle vérifie la condition d'intégralité de Weil $[\frac{\omega}{2\pi\hbar}] \in H^2(M;\mathbb{Z})$.

Soit (M,ω), une variété symplectique préquantifiable. Elle admet donc un $(\mathbb{C}^*,\cdot)$-fibré principal $\pi : L^* \to M$ muni d'une forme de connexion $\alpha : TL^* \to T_e(\mathbb{C}^*,\cdot)$ vérifiant $curv_\nabla = -i\hbar^{-1}\omega$. Soit le fibré en droites hermitien $pr : L = L^* \times_\rho \mathbb{C} \to M$ via la représentation ρ décrite au début de la section §2.7. Puisque ω est réelle, le fibré L admet une structure hermitienne h qui est ∇-invariante. Un tel fibré en droites hermitien $pr : L \to M$ sur une variété symplectique (M,ω) préquantifiable telle que $curv_\nabla = -i\hbar^{-1}\omega$ est un dit « fibré préquantique » sur (M,ω). Puisque $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ est abélien, l'équation structurelle d'Élie Cartan implique $d\alpha = \Omega$. Mais $\rho_*\Omega = \pi^* curv_\nabla = \frac{1}{i\hbar}\pi^*\omega$. Bref, $\rho_* d\alpha = \frac{1}{i\hbar}\pi^*\omega$.

Puisque la forme de connexion α est $(\mathbb{C}^*,\cdot)$-équivariante, $\forall z \in (\mathbb{C}^*,\cdot), (\Phi_z)^*\alpha = Ad_{z^{-1}}\alpha$. Mais $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ étant abélien, la représentation adjointe Ad de $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ est triviale, i.e. $\forall z \in (\mathbb{C}^*,\cdot), (\Phi_z)^*\alpha = \alpha$. En version infinitésimale, ceci revient à dire que pour tout champ vectoriel fondamental $A^* \in \mathfrak{X}^\Phi(L^*), \mathscr{L}_{A^*}\alpha = 0$. Mais n'y aurait-il pas un autre champ vectoriel (réel) sur L^* qui préserve α ?

Définition $\mathfrak{X}^\alpha(L^*) := \{\xi \in \mathfrak{X}(L^*) | \mathscr{L}_\xi \alpha = 0\}$.

Évidemment $\mathfrak{X}^\Phi(L^*) \subset \mathfrak{X}^\alpha(L^*)$, puisque les champs vectoriels fondamentaux préservent la forme de connexion α.

Théorème 3.2.1. *[18] : Il existe un monomorphisme de l'algèbre de Poisson* $(\mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{R}),\{,\})$ *vers l'algèbre* $(\mathfrak{X}^\alpha(L^*;\mathbb{R}),[,])$.

Voici une preuve dont la première partie est largement inspirée de (Sniatycki [18]).

Démonstration. Souvenons-nous de la description faite du groupe structurel $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ faite au début de la section §2.7 en tant que $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ muni d'une structure presque-complexe intégrable j. Tout élément de $T_e(\mathbb{C}^*,\cdot)$ pouvait s'écrire $(a+bj)\frac{\partial}{\partial z}$ pour $a,b \in \mathbb{R}$. Soit

$\xi \in \mathfrak{X}^{\alpha}(L^*)$, i.e. $\mathscr{L}_{\xi}\alpha = 0$. C'est-à-dire $0 = d\boldsymbol{i}_{\xi}\alpha + \boldsymbol{i}_{\xi}d\alpha$, ou encore, $0 = d(\alpha(\xi)) + d\alpha(h\xi, h\cdot)$. En évaluant cette dernière expression sous un A^* fondamental quelconque, on trouve $0 = d(\alpha(\xi))(A^*) + d\alpha(h\xi, hA^*) = d(\alpha(\xi))(A^*)$, c'est-à-dire qu'il existe $\check{c} = \check{a} + \check{b}j$, où $\check{a}, \check{b} \in \mathscr{C}^{\infty}(L^*; \mathbb{R})$, constante le long des fibres de $\pi : L^* \to M$ définie par $\check{c}\frac{\partial}{\partial z} = \alpha(\xi)$. La partie verticale de ξ est $\forall a \in L^*, v\xi_a = (\Phi_*(\check{c}(a)\frac{\partial}{\partial z}))_a$, ce qui vérifie bien $\alpha_a(\xi_a) = \alpha_a(v\xi_a) = \alpha_a((\Phi_*(\check{c}(a)\frac{\partial}{\partial z}))_a) = \check{c}(a)\frac{\partial}{\partial z}$. En dénotant $d\check{c} := d\check{a} + d\check{b}j$ et en reprenant $0 = d(\alpha(\xi)) + d\alpha(h\xi, h\cdot)$ et en y insérant $\check{c}\frac{\partial}{\partial z} = \alpha(\xi)$ on trouve $0 = d\check{c} \otimes \frac{\partial}{\partial z} + d\alpha(h\xi, h\cdot)$, i.e. $d\alpha(h\xi, h\cdot) = -d\check{c} \otimes \frac{\partial}{\partial z}$. Mais puisque l'on a une structure hermitienne h qui est ∇-invariante, $\rho_* d\alpha$ est à valeurs purement imaginaires. Donc, $\rho_* d\alpha(h\xi, h\cdot) = -d(\check{a} + i\check{b})$ implique que la fonction $\check{a}$ est constante (mais pas nécessairement nulle !). Soit $f^{\sharp} \in \mathscr{C}^{\infty}(L^*; \mathbb{C})$ définie par $f^{\sharp} := i\hbar\rho_*\check{c} = \hbar(-\check{b} + i\check{a})$. Donc $\rho_* d\alpha(h\xi, h\cdot) = -\frac{1}{i\hbar} df^{\sharp}$. Mais $\rho_* d\alpha = \frac{1}{i\hbar}\pi^*\omega$ et ainsi $\frac{1}{i\hbar}(\pi^*\omega)(h\xi, h\cdot) = -\frac{1}{i\hbar} df^{\sharp}$, i.e. $(\pi^*\omega)(h\xi, h\cdot) = -df^{\sharp}$, i.e. $\omega(\pi_* hX, \pi_* h\cdot) = -df^{\sharp}$. Comme $\check{c}$ est contante le long des fibres, $\exists f \in \mathscr{C}^{\infty}(M; \mathbb{C})$ telle que $f^{\sharp} = f \circ \pi$. Tout comme $df^{\sharp}$ est purement réelle, df l'est aussi. Ainsi, $\pi_* h\xi$ est le champ vectoriel hamiltonien (réel) X_f de f, i.e. que la partie horizontale de ξ est le relevé horizontal du champ vectoriel hamiltonien X_f de f. On obtient donc la décomposition $\xi_a = h\xi_a + v\xi_a = (X_f^{\sharp})_a + (\Phi_*(-\frac{f^{\sharp}(a)}{\hbar} j\frac{\partial}{\partial z}))_a$. On écrit ainsi $(\xi_f)_a = (X_f^{\sharp})_a + (\Phi_*(-\frac{f^{\sharp}(a)}{\hbar} j\frac{\partial}{\partial z}))_a$, le champ vectoriel sur L^* qui préserve α. Puisque Φ_* est une application linéaire, on peut écrire $\xi_f = X_f^{\sharp} - \hbar^{-1} f^{\sharp}\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})$. À chaque $\xi \in \mathfrak{X}^{\alpha}(L^*)$ correspond un unique $f \in \mathscr{C}^{\infty}(M; \mathbb{C})$ de partie imaginaire constante tel que $\xi = \xi_f$. Et à chaque $f \in \mathscr{C}^{\infty}(M; \mathbb{C})$ de partie imaginaire constante il existe un unique $\xi_f \in \mathfrak{X}^{\alpha}(L^*)$. Puisque $\mathscr{C}^{\infty}(M; \mathbb{R})$ est une sous-algèbre des fonctions complexes de partie imaginaire constante sur M, on a l'injection de $\mathscr{C}^{\infty}(M; \mathbb{R})$ vers $\mathfrak{X}^{\alpha}(L^*)$ donnée par $f \hookrightarrow \xi_f$.

Vérifions maintenant que le crochet est préservé par l'injection. Soient $f, g \in \mathscr{C}^{\infty}(M; \mathbb{R})$. Les relevés $f^{\sharp} := f \circ \pi$ et $g^{\sharp} := g \circ \pi$ sont constant le long des fibres et $\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})$ est fondamental. Donc, $\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})f^{\sharp} = 0$ et $\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})g^{\sharp} = 0$ et ainsi $[f^{\sharp}\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}), g^{\sharp}\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})] = f^{\sharp}g^{\sharp}[\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}), \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})] = 0$ puisque le groupe structurel $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ est abélien. Remarquons aussi que $X_g^{\sharp} f^{\sharp} = df^{\sharp}(X_g^{\sharp}) = (d\pi^* f)(X_g^{\sharp}) = (\pi^*)df(X_g^{\sharp}) = df_{\pi}(\pi_* X_g^{\sharp}) = df_{\pi}(X_g)_{\pi} =$

$(df(X_g))_\pi = \{f,g\}_\pi = \{f,g\}^\sharp$. Donc, $X_g^\sharp f^\sharp = \{f,g\}^\sharp$ et $X_f^\sharp g^\sharp = -\{f,g\}^\sharp$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
& v[X_f^\sharp, X_g^\sharp]_a \\
= \; & (\Phi_*(\alpha_a(v[X_f^\sharp, X_g^\sharp]_a)))_a = (\Phi_*(\alpha_a([X_f^\sharp, X_g^\sharp]_a)))_a \\
= \; & (\Phi_*(-(d\alpha)_a((X_f^\sharp)_a, (X_g^\sharp)_a)))_a = -(\Phi_*((\rho^{-1})_*\rho_*(d\alpha)_a((X_f^\sharp)_a, (X_g^\sharp)_a)))_a \\
= \; & -(\Phi_*((\rho^{-1})_*\frac{1}{i\hbar}(\pi^*\omega)_a((X_f^\sharp)_a, (X_g^\sharp)_a)))_a \\
= \; & -(\Phi_*((\rho^{-1})_*\frac{1}{i\hbar}\omega_{\pi(a)}(\pi_*(X_f^\sharp)_a, (\pi_* X_g^\sharp)_a)))_a \\
= \; & -(\Phi_*((\rho^{-1})_*\frac{1}{i\hbar}\omega_{\pi(a)}((X_f)_{\pi(a)}, (X_g)_{\pi(a)})))_a = -(\Phi_*((\rho^{-1})_*\frac{1}{i\hbar}(-1\{f,g\})_{\pi(a)}))_a \\
= \; & (\Phi_*((\rho^{-1})_*\frac{1}{i\hbar}\{f,g\}^\sharp(a)))_a = -\hbar^{-1}\{f,g\}^\sharp(a)(\Phi_*((\rho^{-1})_* i))_a \\
= \; & -\hbar^{-1}\{f,g\}^\sharp(a)(\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}))_a
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $v[X_f^\sharp, X_g^\sharp] = -\hbar^{-1}\{f,g\}^\sharp(\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}))$. Souvenons-nous que les relevés horizontaux sont invariants sous l'action du groupe structurel, c'est-à-dire $[X_f^\sharp, \Phi(j\frac{\partial}{\partial z})] = 0$ et $[X_g^\sharp, \Phi(j\frac{\partial}{\partial z})] = 0$. Les formules $[X, fY] = X(f)Y + f[X,Y]$ et $[fX, Y] = -Y(f)X + f[X,Y]$ nous seront aussi utiles. Ainsi, $\forall f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$, calculons

$$\begin{aligned}
[\xi_f, \xi_g] \; = \; & [X_f^\sharp - \hbar^{-1} f^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}), X_g^\sharp - \hbar^{-1} g^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})] \\
= \; & h[X_f^\sharp, X_g^\sharp] + v[X_f^\sharp, X_g^\sharp] - \hbar^{-1}[X_f^\sharp, g^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})] \\
& -\hbar^{-1}[f^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}), X_g^\sharp] + \hbar^{-2}[f^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}), g^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})] \\
= \; & [X_f, X_g]^\sharp - \hbar^{-1}\{f,g\}^\sharp(\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})) - \hbar^{-1}((X_f^\sharp g^\sharp)\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}) + g^\sharp[X_f^\sharp, \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})]) \\
& -\hbar^{-1}(-X_g^\sharp f^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}) + f^\sharp[\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}), X_g^\sharp]) \\
= \; & (-X_{\{f,g\}})^\sharp - \hbar^{-1}\{f,g\}^\sharp(\Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})) - \hbar^{-1}(-\{f,g\}^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z})) \\
& -\hbar^{-1}(-\{f,g\}^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -(X_{\{f,g\}})^\sharp + \hbar^{-1}\{f,g\}^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= -\xi_{\{f,g\}} \end{aligned}$$

C'est-à-dire, $[\xi_f, \xi_g] = -\xi_{\{f,g\}}$. L'injection $(\mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{R}), \{,\}) \hookrightarrow (\mathfrak{X}^\alpha(L^*;\mathbb{R}), [,]); f \hookrightarrow \xi_f$ préserve donc le crochet, ce qui en fait un monomorphisme d'algèbres. $\square$

Puisque $(\mathfrak{X}^\alpha(L^*), [,])$ est une sous-algèbre de $(\mathfrak{X}(L^*), [,])$, on a un monomorphisme d'algèbres $(\mathscr{C}^\infty, \{,\}) \hookrightarrow (\mathfrak{X}(L^*), [,])$ induit par l'inclusion de $(\mathfrak{X}^\alpha(L^*), [,])$ en $(\mathfrak{X}(L^*), [,])$.

Soit $s \in \Gamma(L)$ telle que $s(\pi(a)) = [a, \lambda^\sharp(a)]$. Par définition de la dérivée covariante, $(\nabla_{X_f} s)(\pi(a)) = [a, (d\lambda^\sharp)_a((X_f^\sharp)_a)]$. D'autre part, la proposition 2.6.6 impliquait que $\forall A^* \in \mathfrak{X}^\Phi(L^*), (d\lambda^\sharp)_a(A_a^*) = -(\rho_* A_e)\lambda_\alpha^\sharp(a)$. En prenant $A_a^* = (\Phi_*(-\hbar^{-1} f^\sharp(a) j\frac{\partial}{\partial z}))_a$ et $A_e = -\hbar^{-1} f^\sharp(a) j\frac{\partial}{\partial z}$ on calcule

$$\begin{aligned} (d\lambda^\sharp)_a(\Phi_*(-\hbar^{-1} f^\sharp(a) j\frac{\partial}{\partial z}))_a &= -(\rho_*(-\hbar^{-1} f^\sharp(a) j\frac{\partial}{\partial z}))\lambda_\alpha^\sharp(a) \\ &= i\hbar^{-1} f^\sharp(a)\lambda_\alpha^\sharp(a) \\ &= -\frac{1}{i\hbar} f^\sharp(a)\lambda_\alpha^\sharp(a) \end{aligned}$$

Ainsi, la section correspondant à $[a, (d\lambda^\sharp)_a((\xi_f)_a)]$ est

$$\begin{aligned} [a, (d\lambda^\sharp)_a((\xi_f)_a)] &= [a, (d\lambda^\sharp)_a((X_f^\sharp)_a + (\Phi_*(-\hbar^{-1} f^\sharp(a) j\frac{\partial}{\partial z}))_a)] \\ &= [a, (d\lambda^\sharp)_a((X_f^\sharp)_a)] + [a, (d\lambda^\sharp)_a((\Phi_*(-\hbar^{-1} f^\sharp(a) j\frac{\partial}{\partial z}))_a)] \\ &= (\nabla_{X_f} s)(\pi(a)) + [a, -\frac{1}{i\hbar} f^\sharp(a)\lambda_\alpha^\sharp(a)] \\ &= (\nabla_{X_f} s)(\pi(a)) - \frac{1}{i\hbar} f^\sharp(a)[a, \lambda_\alpha^\sharp(a)] \\ &= (\nabla_{X_f} s)(\pi(a)) - \frac{1}{i\hbar}(fs)(\pi(a)) \\ &= ((\nabla_{X_f} - \frac{1}{i\hbar} f)s)(\pi(a)) \end{aligned}$$

Pour une section globale $s(\pi(a)) = [a, \lambda^\sharp(a)] \in \Gamma(L)$, on définit la section $\hat{f}s$ comme étant $(\hat{f}s)(\pi(a)) := -i\hbar[a, (\xi_f \lambda^\sharp)(a)] = -i\hbar((\nabla_{X_f} - \frac{1}{i\hbar} f)s)(\pi(a))$ et ainsi l'opérateur

$\hat{f} := -i\hbar(\nabla_{X_f} - \frac{1}{i\hbar} f)$, ou encore :

$$\boxed{\hat{f} := -i\hbar\nabla_{X_f} + f}$$

On dit que $\hat{f}$ est l'opérateur (pré)quantique associé à l'observable classique f. On a $\forall A^* \in \mathfrak{X}^{\Phi}(L^*)$ que :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\xi_f} A^* &= [\xi_f, A^*] = [X_f^\sharp - \hbar^{-1} f^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}), A^*] \\
&= [X_f^\sharp, A^*] - \hbar^{-1}[f^\sharp \Phi_*(j\frac{\partial}{\partial z}), A^*] = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

S'il advenait que ξ_f soit complet (i.e. X_f complet), on pourrait définir le flot (pré)quantique $\Phi^\sharp : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{Diff}(L^*)$ de ξ_f. Puisque ξ_f préserve α et l'action Φ (dans le sens $\mathscr{L}_{\xi_f}\alpha = 0$ et $\mathscr{L}_{\xi_f} A^* = 0$), $\Phi^\sharp$ préserve l'action de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sur L^* (i.e. $\Phi^\sharp$ commute avec Φ). Ainsi, on peut tirer-en-arrière $\lambda^\sharp$ par $\Phi_t^\sharp$ et la section résultante $[a, (\Phi_t^\sharp)^* \lambda^\sharp(a)]$ est l'évolution dynamique de l'état quantique s, ce qui est aussi en $\Gamma(L)$. On a enfin qu'avec Φ^f, le flot hamiltonien de f, $\pi \circ \Phi^\sharp = \Phi^f \circ \pi$.

On peut directement calculer via une section test $s \in \Gamma(L)$ vérifiant $s(\pi(a)) = [a, \lambda^\sharp(a)]$ que

$$\begin{aligned}
([\hat{f}, \hat{g}]s)(\pi(a)) &= (-i\hbar)^2 [a, ([\xi_f, \xi_g]\lambda^\sharp)(a)] \\
&= -(-i\hbar)^2 [a, (\xi_{\{f,g\}}\lambda^\sharp)(a)] \\
&= -(-i\hbar)(-i\hbar[a, (\xi_{\{f,g\}}\lambda^\sharp)(a)]) \\
&= -i\hbar(\widehat{\{f,g\}} s)(\pi(a))
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{[\hat{f}, \hat{g}] = -i\hbar\widehat{\{f,g\}}}$$

Nous avons ainsi obtenu l'opérateur (pré)quantique correspondant à un observable classique via le monomorphisme chapeau $\hat{}: \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathrm{End}(\Gamma(L)); f \hookrightarrow \hat{f}$ vérifiant les trois conditions de quantification de Dirac suivantes :

1. L'application $f \hookrightarrow \hat{f}$ est $\mathbb{R}$-linéaire ;

2. Si f est constante, alors $\hat{f}$ est l'opérateur multiplication ;

3. $[\hat{f}, \hat{g}] = -i\hbar\widehat{\{f, g\}}$.

Soient deux sections $s_1, s_2 \in \Gamma(L)$. La mesure de Liouville $\mu := \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n!}\omega^{\wedge n}$ est une forme volume sur M. Prenons la forme normalisée $\varepsilon := (\frac{1}{2\pi\hbar})^n\mu$ et définissons la norme $(s_1, s_2) = \int_M h(s_1, s_2)\varepsilon = \int_M < s_1, s_2 > \varepsilon$. L'ensemble sections de carré sommable en $\Gamma(L)$ forme un espace pré-hilbertien sous la norme $(\cdot, \cdot)$ donné par $L^2(M; L)$. La complétude de cet espace pré-hilbertien est un espace de Hilbert.

Après avoir construit toute cette belle théorie, essayons en coordonnées locales pour voir ce qui se passe.

Exemple Soit le système hamiltonien $(M, \omega, H) = (T^*\mathbb{R}^3, \omega, H)$ en tant qu'espace de phase en coordonnées de Darboux $\{\vec{p}, \vec{q}\}$ où $\omega = d\vec{p} \wedge d\vec{q}$ et où le potentiel symplectique est $\Theta = \vec{p} \cdot d\vec{q}$ (on a bien $\omega = d\Theta$) et où l'hamiltonien est $H(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2m} + V(\vec{q})$. Évidemment, (M, ω) est préquantifiable. Soit $pr : L \to M$ son fibré préquantique. L'équation d'Hamilton $\boldsymbol{i}_{X_f}\omega = -df$ donne $X_f = \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}}$. Ainsi, l'opérateur quantique associé à l'observable classique $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ est $\hat{f} = -i\hbar\nabla_{X_f} + f = -i\hbar X_f - \Theta(X_f) + f = -i\hbar(\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) - \vec{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + f$.

On a ainsi pour $j \in \{1, 2, 3\}$:

- $\hat{q}_j = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_j} + q_j$

- $\hat{p}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}$

et pour $H(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2m} + V(\vec{q})$:

- $\hat{H} = -i\hbar(\frac{1}{m}\vec{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} - (\vec{\nabla}_{\vec{q}}V(\vec{q})) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}}) - L_H$ où $\vec{\nabla}_{\vec{q}}V(\vec{q})$ est le gradient de V et où $L_H = \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2m} + V(\vec{q})$ la transformée de Legendre de H.

D'autre part, dans un tel système hamiltonien $(M, \omega, H) = (T^*\mathbb{R}^3, \omega, H)$, sous une section trivialisante associée s, toute autre section en $\Gamma(L)$ s'écrit $s' = gs$ où $g \in \mathscr{C}^\infty(M; \mathbb{C})$.

Remarquons aussi que les opérateurs obtenus ne sont pas exactement ceux attendus par la Première Quantification (i.e. on devrait avoir pour $j \in \{1,2,3\}$ que $\hat{q}_j = q_j$ et que $\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V$ où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_1^2}$). ♣

Voici trois problèmes frappants de la préquantification dans le dernier exemple :

(1) L'espace de Hilbert ainsi formé est trop gros. En effet, le représentant des sections en $\Gamma(L)$ ne devraient que dépendre des paramètres de l'espace de configuration (i.e. que de $\vec{q}$), mais jusqu'ici le représentant des sections $s \in \Gamma(L)$ dépendent de tout l'espace de phase $M = T^*Q$ (i.e. les $\vec{q}$ et les $\vec{p}$).

(2) Pour $j \in \{1,2,3\}$, la Première Quantification stipule que $\hat{q}_j = q_j$, ce que l'on n'a pas obtenu.

(3) La Première Quantification stipule que l'opérateur $\hat{H}$ associé à $H(\vec{p},\vec{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{q})$ est $\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V$ où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_1^2}$ est le Laplacien. Ce que l'on n'a pas non plus obtenu.

Pour remédier aux problèmes (1) et (2), on introduira donc le concept de polarisation (dans la prochaine section). Le problème (3) se corrige via la correction métaplectique et le noyau BKS.

3.3 Polarisation

Références : (Sniatycki [18]), (Woodhouse [21]), (de Buyl, Detournay et Voglaire [7]) et (Bates et Weinstein [3]).

Définition Soit (M,ω) une variété symplectique (réelle). Une « distribution complexe» F sur M est un sous-fibré de $(TM)^{\mathbb{C}}$. Dénotons par $\mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C}) := \Gamma(F)$ les champs vectoriels (complexes) qui reposent en F. Une distribution complexe F est dite « involutive» si $\forall X,Y \in \mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C}), [X,Y] \in \mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$. Une distribution complexe F sur M est dite lagrangienne si $dim_{\mathbb{C}}F = \frac{1}{2}dim_{\mathbb{R}}M$ et $\omega|_{F\times F} = 0$ (ici ω est étendue $\mathbb{C}$-linéairement à $(TM)^{\mathbb{C}}$ comme dans la section §2.2). On dénote par $\overline{F}$ la distribution complexe conjuguée à F (ce qui est aussi un sous-fibré de $(TM)^{\mathbb{C}}$).

Définition (Polarisation [18]) : Soit (M,ω), une variété symplectique. Une « polarisation » de (M,ω) est une distribution lagrangienne involutive complexe F sur M telle que $\forall x \in M, dim_{\mathbb{C}}(F_x \cap \overline{F}_x)$ est une constante.

Suivant (Woodhouse [21]), la propriété d'involutivité de F indique que localement sur M, il existe toujours n fonctions complexes en involution (i.e. qui commutent toutes deux à deux sous le crochet de poisson) telles que leurs champs vectoriels hamiltoniens (complexes) engendrent F. Remarquons que ces derniers champs vectoriels hamiltoniens commutent aussi tous deux à deux (puisque $[X_f,X_g] = -X_{\{f,g\}} = -X_0 = 0$). (Selon Sniatycki toutefois, il faut que F soit fortement admissible pour admettre n telles fonctions... qui a raison ?). Remarquons que de telles fonctions sont polarisées (i.e. constantes en F) puisque $\mathscr{L}_{X_f}g = X_f g = \{g,f\} = 0$.

Proposition 3.3.1. *La distribution $\overline{F}$ est involutive si F l'est.*

Démonstration. Soient $X,Y \in \mathfrak{X}^{\overline{F}}(M;\mathbb{C})$ quelconques. On calcule $[X,Y] = [\overline{\overline{X}},\overline{\overline{Y}}] = \overline{[\overline{X},\overline{Y}]}$. Mais $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont en $\mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$ et F est involutive. Donc $[\overline{X},\overline{Y}] \in \mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$, c'est-à-dire $\overline{[\overline{X},\overline{Y}]} \in \mathfrak{X}^{\overline{F}}(M;\mathbb{C})$. Donc $[X,Y] \in \mathfrak{X}^{\overline{F}}(M;\mathbb{C})$. □

Remarque Pour un $x \in M$ et pour $dim(M) = 2n$, si $F_x = span_{\mathbb{C}}\{A_1,...,A_n\}$, alors $\overline{F}_x = span_{\mathbb{C}}\{\bar{A}_1,...,\bar{A}_n\}$.

Exemple Soit $\{U_\alpha\}$, un recouvrement ouvert d'une variété symplectique (M,ω) telle que $dim(M)=2n$. Sur chaque ouvert U_α, soient n fonctions complexes $f_i^{U_\alpha}\in\mathscr{C}^\infty(U_\alpha;\mathbb{C})$, où $i\in\{1,...,n\}$, en involution et telles que leurs champs vectoriels hamiltoniens $X_{f_i^{U_\alpha}}, i\in\{1,...,n\}$ ne s'annulent jamais sur U_α. On a naturellement $\forall i,j\in\{1,...,n\}$ que $[X_{f_i^{U_\alpha}},X_{f_j^{U_\alpha}}]=-X_{\{f_i^{U_\alpha},f_j^{U_\alpha}\}}=-X_0=0$ et donc la distribution locale $F_{U_\alpha}:=span_{\mathbb{C}}\{X_{f_1^{U_\alpha}},...,X_{f_n^{U_\alpha}}\}$ est involutive et ainsi la distribution F sur M définie sur chaque U_α par $F|_{U_\alpha}:=F_{U_\alpha}$ est une polarisation de M. ♣

On définit les distributions réelles D et E sur M telles que leurs complexification est donnée par $D^{\mathbb{C}}:=F\cap\overline{F}$ et par $E^{\mathbb{C}}:=F+\overline{F}$.

Sur (M,ω), la distribution D est isotrope et E est coisotrope. En fait $D\subset E$. Remarquons aussi que D et E sont symplectiquement perpendiculaires, i.e. $D=E^\perp$ ou encore $E=D^\perp$. Enfin, $E\backslash D$ est une distribution symplectique.

Proposition 3.3.2. *La distribution D est involutive.*

Démonstration. Soient $X,Y\in\mathfrak{X}^{D^{\mathbb{C}}}(M;\mathbb{C})$ quelconques. Donc $X,Y\in\mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$. Mais F involutive, donc $[X,Y]\in\mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$. D'autre part, $X,Y\in\mathfrak{X}^{\overline{F}}(M;\mathbb{C})$. Mais $\overline{F}$ est involutive. Donc $[X,Y]\in\mathfrak{X}^{\overline{F}}(M;\mathbb{C})$. Ainsi, $[X,Y]\in\mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})\cap\mathfrak{X}^{\overline{F}}(M;\mathbb{C})$. C'est-à-dire $[X,Y]\in\mathfrak{X}^{D^{\mathbb{C}}}(M;\mathbb{C})$, i.e. $D^{\mathbb{C}}$ est involutive et donc D aussi. □

Remarque La distribution D étant réelle, involutive et de dimension constante définit ainsi un feuilletage de M.

Définition Une polarisation F est dite « fortement admissible » si E est involutive.

Puisque D est involutive, on peut toujours définir la projection $\pi_D:M\to M/D$. Si la polarisation est fortement admissible (i.e. E involutive) on peut aussi définir les projections $\pi_E:M\to M/E$ et $\pi_{ED}:M/D\to M/E$ (qui est une submersion).

Proposition 3.3.3. ***[18] :*** *Soit F fortement admissible. Alors les champs vectoriels hamiltoniens complexes en F commutent deux à deux.*

Démonstration. Soient $X_f,X_g\in\mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$, deux champs vectoriels hamiltoniens complexes. Alors $[X_f,X_g]=X_{\omega(X_f,X_g)}=X_0=0$. □

Proposition 3.3.4. *Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{C})$. Alors f est constant en E si et seulement si $X_f \in \mathfrak{X}^D(M;\mathbb{C})$.*

Démonstration. Soit $Y \in \mathfrak{X}^E(M;\mathbb{C})$. Puisque $D = E^\perp$ et $Yf = \boldsymbol{i}_Y df = -\boldsymbol{i}_Y \boldsymbol{i}_{X_f}\omega = \omega(Y, X_f)$, on a $Yf = 0 \iff X_f \in \mathfrak{X}^D(M;\mathbb{C})$. □

Proposition 3.3.5. *[18] : Si F est fortement admissible, il y a un paralléllisme global sur les feuilles de D (i.e. toute feuille Λ de D a son tangeant $T\Lambda$ globalement engendré par des champs vectoriels qui commutent tous entre-eux).*

Démonstration. **[18]**. Soit $k = codim(E)$ et $(V;\{x_1,...,x_k\})$ un système de coordonnées locales sur M/E. Alors, les rappels $\tilde{x}_j := x_j \circ \pi_E$, $j \in \{1,...,k\}$, sont des fonctions (réelles) sur $\pi_E^{-1}(V)$. Mais $D \subset E$, donc les $\tilde{x}_j$ sont définies globalement sur les feuilles Λ de D reposant en $\pi_E^{-1}(V)$. Les $\tilde{x}_j$ sont constants en E, donc leurs champs vectoriels hamiltoniens $X_{\tilde{x}_j}$ sont en D et sont globalement définis sur les feuilles Λ en $\pi_E^{-1}(V)$. Puisque $D \subset E$, les fonctions $\tilde{x}_j$ sont aussi constantes en D. Les champs vectoriels hamiltoniens $X_{\tilde{x}_j}$ commutent deux à deux puisque D est isotrope. Les $X_{\tilde{x}_j}$ étant linéairement indépendant entre eux, et existants au nombre de k, on en conclut que ces derniers $X_{\tilde{x}_j}$ engendrent globalement D sur les feuilles Λ de D en $\pi_E^{-1}(V)$. □

Définition Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Une polarisation F de M est dite « réelle », (resp. « purement complexe ») si $F = \overline{F}$, (resp. si $F + \overline{F} = (TM)^{\mathbb{C}}$). Une polarisation F de M est dite « mixte » si elle n'est ni réelle ni purement complexe.

Remarque (Bates et Weinstein [3]) dit « totalement complexe » au lieu de « purement complexe ».

La condition $F = \overline{F}$ d'une polarisation réelle F est équivalente à $D^{\mathbb{C}} = E^{\mathbb{C}} = F$, i.e. D et E sont des distributions lagrangiennes de M. La condition $F + \overline{F} = (TM)^{\mathbb{C}}$ d'une polarisation purement complexe est équivalente à $D = \emptyset$ et E est symplectique.

Proposition 3.3.6. *Les énoncés suivants sont vrais :*

1. *Toute polarisation réelle est fortement admissible.*

2. *Toute polarisation purement complexe est fortement admissible.*

Démonstration. Les énoncés suivants sont vrais :

1. Une polarisation réelle a $E = D$, mais D est involutive, donc E aussi.

2. Une polarisation purement complexe a $E = TM$, mais TM est involutif.

□

Proposition 3.3.7. *Soit (M,ω) une variété symplectique munie d'une polarisation purement complexe F. Alors F induit une structure presque-complexe intégrable J sur M.*

Démonstration. Soit (M,ω) une variété symplectique munie d'une polarisation purement complexe F. Puisque $(TM)^{\mathbb{C}} = F + \overline{F}$, définissons un endomorphisme $J : (TM)^{\mathbb{C}} \to (TM)^{\mathbb{C}}$ par $\forall A \in F, JA = -iA$ et $\forall A \in \overline{F}, JA = iA$. Autant sur F que sur $\overline{F}$ on a $J^2 = -id$ et donc $J^2 = -id$ sur tout $(TM)^{\mathbb{C}}$. On dit que J est la « structure presque-complexe induite par la polarisation purement complexe F ». On peut ainsi dire que $F = (TM)^{(0,1)}$ et que $\overline{F} = (TM)^{(1,0)}$. Soit $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M;\mathbb{C})$ quelconques. Pour avoir J intégrable, il suffit de montrer que le tenseur de Nijenhuis $N_J(Z_1,Z_2)$ meurt. On peut toujours décomposer Z_1 et Z_2 en $Z_1 = X_1 + Y_1$ et $Z_2 = X_2 + Y_2$ où $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$ et $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}^{\overline{F}}(M;\mathbb{C})$. Évidemment $JX_1 = -iX_1$, $JX_2 = -iX_2$, $JY_1 = iY_1$ et $JY_2 = iY_2$. Comme F et $\overline{F}$ sont involutifs on a aussi $J[X_1,X_2] = -i[X_1,X_2]$ et $J[Y_1,Y_2] = i[Y_1,Y_2]$. Calculons

$$\begin{aligned}
N_J(Z_1,Z_2) &= [Z_1,Z_2] + J[Z_1,JZ_2] + J[JZ_1,Z_2] - [JZ_1,JZ_2] \\
&= [X_1+Y_1, X_2+Y_2] + J[X_1+Y_1, J(X_2+Y_2)] \\
&\quad + J[J(X_1+Y_1), X_2+Y_2] - [J(X_1+Y_1), J(X_2+Y_2)] \\
&= [X_1+Y_1, X_2+Y_2] + J[X_1+Y_1, -iX_2+iY_2] \\
&\quad + J[-iX_1+iY_1, X_2+Y_2] - [-iX_1+iY_1, -iX_2+iY_2] \\
&= [X_1+Y_1, X_2+Y_2] - iJ[X_1+Y_1, X_2] + iJ[X_1+Y_1, Y_2] \\
&\quad - iJ[X_1, X_2+Y_2] + iJ[Y_1, X_2+Y_2] + [-X_1+Y_1, -X_2+Y_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [X_1,X_2]+[Y_1,X_2]+[X_1,Y_2]+[Y_1,Y_2]-iJ[X_1,X_2] \\
&\quad -iJ[Y_1,X_2]+iJ[X_1,Y_2]+iJ[Y_1,Y_2]-iJ[X_1,X_2]-iJ[X_1,Y_2] \\
&\quad +iJ[Y_1,X_2]+iJ[Y_1,Y_2]+[X_1,X_2]-[X_1,Y_2]-[Y_1,X_2]+[Y_1,Y_2] \\
&= 2[X_1,X_2]+2[Y_1,Y_2]-2iJ[X_1,X_2]+2iJ[Y_1,Y_2] \\
&= 2[X_1,X_2]+2[Y_1,Y_2]-2i(-i)[X_1,X_2]+2i(i)[Y_1,Y_2] \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Remarque La structure presque-complexe intégrable $J:(TM)^{\mathbb{C}}\to(TM)^{\mathbb{C}}$ restreinte à TM induit une structure presque-complexe intégrable $J:TM\to TM$.

Proposition 3.3.8. *Soit F purement complexe sur (M,ω) et J la structure presque complexe intégrable induite sur TM. Alors J est compatible avec ω.*

Démonstration. Il faut montrer que la forme bilinéaire $g:TM\otimes TM\to\mathbb{R}$ définie par $g(\cdot,\cdot):=\omega(\cdot,J\cdot)$ est hermitienne, i.e. qu'elle soit symétrique, non-dégénérée et vérifie $x\in M,\forall A_1,A_2\in T_xM, g(JA_1,JA_2)=g(A_1,A_2)$, ce qui revient à dire que g est pseudo-riemannienne et J-invariante. Soit un $x\in M$ quelconque. Tout $A_1,A_2\in T_xM$ s'écrivent $A_1=X_1+\overline{X}_1$ et $A_2=X_2+\overline{X}_2$ pour $X_1,X_2\in F_x$. On a $JA_1=J(X_1+\overline{X}_1)=-iX_1+i\overline{X}_1$. De même, $JA_2=-iX_2+i\overline{X}_2$. D'une part, $\omega(A_1,A_2)=\omega(X_1+\overline{X}_1,X_2+\overline{X}_2)=\omega(X_1,\overline{X}_2)+\omega(\overline{X}_1,X_2)$. Et d'autre part, $\omega(JA_1,JA_2)=\omega(-iX_1+i\overline{X}_1,-iX_2+i\overline{X}_2)=-\omega(-X_1+\overline{X}_1,-X_2+\overline{X}_2)=\omega(X_1,\overline{X}_2)+\omega(\overline{X}_1,X_2)$. Donc, $\omega(JA_1,JA_2)=\omega(A_1,A_2)$. Ainsi, $\omega(A_1,JA_2)=\omega(JA_1,J^2A_2)=\omega(JA_1,-A_2)=\omega(A_2,JA_1)$. Donc on obtient $g(A_1,A_2)=\omega(A_1,JA_2)=\omega(A_2,JA_1)=g(A_2,A_1)$. Donc g est symétrique. D'autre part, soit $A\in T_xM$ non-nul. Alors A s'écrit $A=X+\overline{X}$ pour $X\in F_x$ non-nul. Ainsi $g(A,A)=\omega(A,JA)=\omega(X+\overline{X},J(X+\overline{X}))=\omega(X+\overline{X},-iX+i\overline{X})=2i\omega(X,\overline{X})$. Mais ω est non-dégénérée donc c'est non-nul, i.e. $g(A,A)\neq 0$. Enfin, $g(JA_1,JA_2)=\omega(JA_1,J^2A_2)=\omega(JA_1,-A_2)=\omega(A_2,JA_1)=g(A_2,A_1)=g(A_1,A_2)$. □

Remarque Lorsque la structure presque-complexe intégrable J est compatible avec ω, l'application $h : (TM)^{(J)} \times (TM)^{(J)} \to \mathbb{C}$ définie par $h = g + i\omega$ est une structure hermitienne sur $(TM)^{(J)}$.

Ainsi :

Définition $M^{(J)}$ vue comme variété complexe, on dit que $g_J = Re(h)$ est une « métrique kählerienne » sur $(TM)^J$ et que $\omega_J = Im(h)$ est une « forme kählerienne » sur $(TM)^{(J)}$. Une variété symplectique (M, ω, J) munie d'une structure presque-complexe intégrable J compatible avec ω, vue comme variété complexe $M^{(J)}$ munie d'une métrique kählerienne $g_J := Re(h)$ et d'une forme kählerienne $\omega_J := Im(h)$ est dite « variété kählerienne».

Remarque Sachant ce qui précède, il n'est pas un abus de langage de dire « polarisation kählerienne » au lieu de « polarisation purement complexe ».

Proposition 3.3.9. *[18] : Soit F une polarisation fortement admissible. Alors les fibres de $\pi_{ED} : M/D \to M/E$ sont des variétés kählerienne.*

Démonstration. Soit F une polarisation fortement admissible, donc la projection $\pi_{ED} : M/D \to M/E$ est bien définie. Soit Υ, une fibre de $\pi_{ED} : M/D \to M/E$. Soit $F|_{(\pi_D)^{-1}(\Upsilon)}$, la restriction de F à $(\pi_D)^{-1}(\Upsilon)$, et $F_\Upsilon \subset (T\Upsilon)^{\mathbb{C}}$, le poussé-en-avant de $F|_{(\pi_D)^{-1}(\Upsilon)}$ sous $(\pi_D)_*$, i.e. $F_\Upsilon = (\pi_D)_*(F|_{(\pi_D)^{-1}(\Upsilon)})$. On a $F_\Upsilon + \overline{F}_\Upsilon = (T\Upsilon)^{\mathbb{C}}$, i.e. F_Υ est purement complexe sur Υ, i.e. Υ est kählerienne. $\square$

Définition Une polarisation F est dite « positive » si $\forall A \in F, i\omega(A, \bar{A}) \geq 0$. Si F est purement complexe, ceci revient à ce que h soit définie positive, i.e. $\forall A \in F, h(A, A) \geq 0$.

Si F est une polarisation fortement admissible positive, la forme hermitienne $h_\Upsilon : T\Upsilon \times T\Upsilon \to \mathbb{R}$ définie sur les fibres Υ de $\pi_{ED} : M/D \to M/E$ est définie positive.

Évidemment, une polarisation réelle est positive.

Exemple *(polarisation réelle) :* Soit $(M, \omega) = (T^*\mathbb{R}^n, \omega)$ en coordonnées de Darboux $\omega = d\vec{p} \wedge d\vec{q}$. On dit que $F = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\}$ est la polarisation verticale. On a $\overline{F} = span_{\mathbb{C}}\{\overline{\frac{\partial}{\partial \vec{p}}}\} =$

$span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\}$ et ainsi $D^{\mathbb{C}} = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\} = F$ et $E^{\mathbb{C}} = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\}$. Donc, $D = span_{\mathbb{R}}\{\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\}$ et $E = span_{\mathbb{R}}\{\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\}$. Remarquons que $D^{\mathbb{C}} = E^{\mathbb{C}} = F$ et qu'ils sont lagrangiens. Donc la polarisation verticale est purement réelle et fortement admissible. ♣

Exemple *(polarisation kählerienne) :* Soit encore $(M,\omega) = (T^*\mathbb{R}^n,\omega)$ en coordonnées de Darboux $\omega = d\vec{p}\wedge d\vec{q}$. Soit $F = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial\vec{p}} + i\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\}$. On a $F+\overline{F} = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial\vec{p}} + i\frac{\partial}{\partial\vec{q}}, \frac{\partial}{\partial\vec{p}} - i\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\} = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial\vec{p}}, \frac{\partial}{\partial\vec{q}}\} = (TM)^{\mathbb{C}}$, ainsi F est une polarisation kählerienne (on a $D^{\mathbb{C}} = \emptyset$ et $E^{\mathbb{C}} = (TM)^{\mathbb{C}}$). Ceci induit une structure presque-complexe intégrable $J \in \Gamma(TM\otimes T^*M)$ définie par $J = d\vec{p}\otimes\frac{\partial}{\partial\vec{q}} - d\vec{q}\otimes\frac{\partial}{\partial\vec{p}}$ compatible avec ω. En posant $\vec{z} = \vec{p}+i\vec{q}$ on a $F = span_{\mathbb{C}}\{X_{\vec{z}}\} = span_{\mathbb{C}}\{\overline{\frac{\partial}{\partial\vec{z}}}\}$ et $J = id\vec{z}\otimes\frac{\partial}{\partial\vec{z}} - id\bar{\vec{z}}\otimes\overline{\frac{\partial}{\partial\vec{z}}}$. On voit bien que $\forall A\in F, JA = -iA$ et donc $F = (TM)^{(0,1)} \subset (TM)^{\mathbb{C}}$. De même, la forme symplectique ω sur M devient la forme kählerienne $\omega_J = \frac{i}{2}d\vec{z}\wedge d\bar{\vec{z}}$ sur $M^{(J)}$.♣

Définition [21] : Soit (M,ω) une variété symplectique, F une polarisation de M et U_α un ouvert de M. Soit Θ un potentiel symplectique (complexe) sur U_α, i.e. $\omega|_{U_\alpha} = d\Theta$. On dit que Θ est « adapté » à F si $F|_{U_\alpha} \subset ker(\Theta)$. On dit que F est « admissible » si $\forall x\in M$ il existe un voisinage de x sur lequel il existe potentiel symplectique adapté à F.

Proposition 3.3.10. *[21] : Toute polarisation fortement admissible est admissible.*

Définition Supposons maintenant que (M,ω) soit préquantifiable et soit munie d'une polarisation F. Soit L un fibré préquantique sur M et $s\in\Gamma(L)$. On dit que s est « polarisée» si $\forall X\in\mathfrak{X}|_F(M;\mathbb{C}), \nabla_X s = 0$. On dénote par $\Gamma^F(L)$ l'ensemble des sections polarisées du fibré préquantique L.

Exemple Soit $(M,\omega) = (T^*\mathbb{R}^3,\omega)$ en coordonnées de Darboux $\omega = d\vec{p}\wedge d\vec{q}$. La variété symplectique (M,ω) est évidemment préquantifiable. Soit $pr : L\to M$ son (unique) fibré préquantique. Soit $\Theta = \vec{p}\cdot d\vec{q}$ un potentiel symplectique sous-jacent à une section trivialisante associée s. Soit la polarisation verticale $F = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\}$ qui est purement réelle et fortement admissible et qui est adapté à Θ. On a que s est covariante constante le long de la polarisation F. En effet, tout $X\in\mathfrak{X}|_F(M;\mathbb{C})$ s'écrit $X = \vec{f}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}}$ où $\vec{f}\in\mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{C}^3)$ et $\nabla_X s = \rho_*\theta(X)s = -\frac{i}{\hbar}\Theta(X)s = -\frac{i}{\hbar}\Theta(\vec{f}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{p}})s = -\frac{i}{\hbar}\vec{f}\cdot\Theta(\frac{\partial}{\partial\vec{p}})s = -\frac{i}{\hbar}\vec{f}\cdot\vec{0}s = 0$. Donc, la section trivialisante associée est naturellement polarisée, i.e. $s \in \Gamma^F(L)$. D'autre part, toute section en $\Gamma(L)$ s'écrit $s' = gs$ où $g \in \mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{C})$. On a que s' est polarisée si $\nabla_X s' = 0$. Calculons $\nabla_X s' = \nabla_X(gs) = dg(X) + g\nabla_X s = dg(X) = Xg$. Ainsi, $s' \in \Gamma^F(L)$ si g est constante le long de la polarisation, i.e. si $g = g(\vec{q})$. Les représentant des sections polarisées $s' \in \Gamma^F(L)$ ne dépendent ainsi que des coordonnées de l'espace de configuration et non plus de tout l'espace de phase. D'autre part, faisant agir les opérateur $\hat{q}_j = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_j} + q_j, j \in \{1,2,3\}$, sur les sections polarisées, on voit que les $\hat{q}_j$ agissent tout simplement par multiplication par q_j. Enfin, puisque $Im(\Theta) = 0$, on a $d(ln(h(s,s))) = \frac{2}{\hbar}Im(\Theta) = 0$, i.e. $ln(h(s,s)) = c$ où c est une constante, i.e. $h(s,s) = e^c$. Ainsi, le produit hermitien de deux sections $s_1 = g_1 s$ et $s_2 = g_2 s$ est représenté par $h(s_1,s_2) = e^c g_1 \bar{g}_2$. ♣

L'espace pré-hilbertien constitué des sections polarisées et de carré sommable du fibré préquantique n'a plus les problèmes (1) et (2) de la dernière section. Néanmoins, le problème (3) subsiste. D'autre part, étant donné (M,ω) sous polarisation F, soient deux sections polarisées $s_1, s_2 \in \Gamma^F(L)$. On a la norme $L^2(M;L)$ donnée par $(s_1,s_2) = \int_M h(s_1,s_2)\varepsilon$. Mais $h(s,s)$ est constant le long des feuilles de D. En effet, pour $X \in \mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$ on a $Xh(s_1,s_2) = h(\nabla_X s_1, s_2) + h(s_1, \nabla_X s_2) = h(0,s_2) + h(s_1,0) = 0$. Ainsi, (s_1,s_2) diverge généralement à moins que les feuilles de D soient compactes. La solution à ce problème est donnée par la correction métaplectique.

Un autre problème vient qu'on ne peut quantifier que des observables dont le flot préserve la polarisation. En effet, pour $f \in \mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{C})$, le flot de f préserve F si et seulement si $\forall Y \in \mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C}), [X_f, Y] \in F$.

Proposition 3.3.11. *Soit (M,ω) préquantifiable muni d'une polarisation F. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} : \Gamma^F(L) \to \Gamma^F(L)$ si et seulement si $\forall Y \in \mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C}), [X_f, Y] \in F$.*

Démonstration. D'abord, $\forall Y \in \mathfrak{X}(M;\mathbb{C}), \omega(X_f, Y) = -Yf$. Ensuite :

1. $\forall f \in \mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{R}), \hat{f} = -i\hbar\nabla_{X_f} + f$
2. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M;\mathbb{C}), \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = \frac{1}{i\hbar}\omega(X,Y)$

Soit $s \in \Gamma^F(M)$ et $Y \in \mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$ quelconques. On a $\nabla_Y s = 0$. Calculons

$$\begin{aligned}
\nabla_Y \hat{f}s &= \nabla_Y((-i\hbar\nabla_{X_f} + f)s) \\
&= \nabla_Y(-i\hbar\nabla_{X_f}s + fs) \\
&= -i\hbar\nabla_Y\nabla_{X_f}s + \nabla_Y(fs) \\
&= -i\hbar\nabla_Y\nabla_{X_f}s + (Yf)s + f\nabla_Y s \\
&= -i\hbar\nabla_Y\nabla_{X_f}s - \omega(X_f,Y)s \\
&= -i\hbar\nabla_Y\nabla_{X_f}s + i\hbar(\nabla_Y\nabla_{X_f} - \nabla_{X_f}\nabla_Y - \nabla_{[Y,X_f]})s \\
&= -i\hbar\nabla_{X_f}\nabla_Y s - i\hbar\nabla_{[Y,X_f]}s \\
&= -i\hbar\nabla_{[Y,X_f]}s \\
&= i\hbar\nabla_{[X_f,Y]}s
\end{aligned}$$

Il saute aux yeux que $\hat{f}s \in \Gamma^F(L) \iff [X_f,Y] \in \mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$ □

Lemme 3.3.12. *$\forall f \in \mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{C})$ on a $X_f \in \mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$ si et seulement si f est polarisée.*

Ainsi, pour l'instant on ne peut quantifier que des observables dont le flot hamiltonien préserve la polarisation. Par exemple, avec la polarisation verticale, on peut quantifier la position $\vec{q}$ et l'impulsion $\vec{p}$ mais pas l'hamiltonien $H(\vec{p},\vec{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{q})$, ce qui pose problème. C'est via le noyau B.K.S. que l'on peut quantifier les observables dont le flot ne préserve pas la polarisation.

Un dernier exemple avant clore la présente section.

Exemple Soit encore $(M,\omega) = (T^*\mathbb{R}^3,\omega)$ en coordonnées de Darboux $\omega = d\vec{p}\wedge d\vec{q}$ munie de la polarisation kählerienne $F = span_{\mathbb{C}}\{\frac{\partial}{\partial\vec{p}} + i\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\}$ qui induit la structure presque-complexe intégrable $J \in \Gamma(TM\otimes T^*M)$ donnée par $J = d\vec{p}\otimes\frac{\partial}{\partial\vec{q}} - d\vec{q}\otimes\frac{\partial}{\partial\vec{p}}$ compatible avec ω. Prenons encore $\vec{z} = \vec{p} + i\vec{q}$ qui donne la structure kählerienne complexe $\omega_J = \frac{i}{2}d\vec{z}\wedge d\bar{\vec{z}}$ sur $M^{(J)}$. Soit le potentiel symplectique $\Theta = \frac{1}{2}(\vec{p}\cdot d\vec{q} - \vec{q}\cdot d\vec{p}) - \frac{i}{4}d(\vec{p}\cdot\vec{p} + \vec{q}\cdot\vec{q})$, sur M, de partie imaginaire fermée et qui vérifie bel et bien $d\Theta = \omega$. En coordonnées complexes on a $\Theta_J = -\frac{i}{2}\bar{\vec{z}}\cdot d\vec{z}$ sur $M^{(J)}$ qui vérifie aussi bel et bien $d\Theta_J = \omega_J$ (i.e. Θ_J

est un potentiel kählerien). En coordonnées complexes, on a $F = span_{\mathbb{C}}\{\overline{\frac{\partial}{\partial \vec{z}}}\}$ qui est purement complexe et fortement admissible (i.e. kählerienne). Le potentiel kählerien est adapté à F puisque $\forall \vec{a} \in \mathbb{C}^3, \vec{a} \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial \vec{z}}} \in ker(\Theta_J)$). La section trivialisante associée est naturellement polarisée puisque tout $X \in \mathfrak{X}^F(M;\mathbb{C})$ s'écrit $X = \vec{f} \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial \vec{z}}}$ où $\vec{f} \in \mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{C}^3)$ et $\nabla_X s = -\frac{i}{\hbar}\Theta(X)s = -\frac{i}{\hbar}\Theta(\vec{f} \cdot \overline{\frac{\partial}{\partial \vec{z}}})s = -\frac{i}{\hbar}\vec{f} \cdot \Theta(\overline{\frac{\partial}{\partial \vec{z}}})s = -\frac{i}{\hbar}\vec{f} \cdot \vec{0}s = 0$. D'autre part, toute section $s' \in \Gamma(L)$ s'écrit $s' = gs$ où $g \in \mathscr{C}^\infty(M;\mathbb{C})$. On a que s' est polarisée si $\nabla_X s' = 0$. Calculons $\nabla_X s' = \nabla_X(gs) = dg(X) + g\nabla_X s = dg(X) = Xg$. Ainsi, $s' \in \Gamma^F(L)$ si g est constante le long de la polarisation, i.e. si $g = g(\vec{z})$. Les représentant des sections polarisées $s' \in \Gamma^F(L)$ sont donc des applications holomorphes (i.e. ne dépendant que des coordonnées z). Enfin, puisque $Im(\Theta) = -\frac{1}{4}d(\vec{p} \cdot \vec{p} + \vec{q} \cdot \vec{q})$, on a $d(ln(h(s,s))) = \frac{2}{\hbar}Im(\Theta) = -\frac{1}{2\hbar}d(\vec{p} \cdot \vec{p} + \vec{q} \cdot \vec{q})$, i.e. $ln(h(s,s)) = -\frac{1}{2\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{p} + \vec{q} \cdot \vec{q}) + c$ où c est une constante, i.e. $h(s,s) = e^{-\frac{1}{2\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{p} + \vec{q} \cdot \vec{q}) + c}$, ou encore $h(s,s) = e^{-\frac{1}{2\hbar}(\vec{z} \cdot \bar{\vec{z}}) + c}$. Ainsi, le produit hermitien de deux sections $s_1 = g_1 s$ et $s_2 = g_2 s$ est donnée par $h(s_1, s_2) = e^{-\frac{1}{2\hbar}(\vec{z} \cdot \bar{\vec{z}}) + c} g_1 \bar{g}_2$ et donc $< s_1, s_2 >= \int_M e^{-\frac{1}{2\hbar}(\vec{z} \cdot \bar{\vec{z}}) + c} g_1 \bar{g}_2 \varepsilon$. ♣

CHAPITRE 4

CONCLUSION

Concluons ce mémoire par un aperçu de ladite correction métaplectique et dudit noyau BKS. Nous avons vu que deux problèmes subsistaient après la correction par une polarisation.

(1) Pour $s_1, s_2 \in \Gamma^F(L)$ le produit hermitien $h(s_1, s_2)$ est constant le long des feuilles de D et donc l'intégrale $\int_M h(s_1, s_2)\varepsilon$ diverge généralement à moins que les feuilles de D soient compactes.

(2) On ne peut quantifier que des observables classiques dont le flot hamiltonien préserve la polarisation.

Une première idée pour corriger le point (1) est d'intégrer $h(s_1, s_2)$ sur M/D. Toutefois, il n'existe pas de mesure d'intégration canonique sur M/D. Une seconde idée, c'est la correction métalinéaire. Grosso modo, par étapes :

1. Se donner le fibré des repères linéaires complexes $Fr(F) \to M$ de la polarisation, ce qui est un $GL_n(\mathbb{C})$-fibré principal.

2. Prendre le double recouvrement fibre par fibre de $Fr(F)$, i.e. un fibré des repères métalinéaires complexes $\widetilde{Fr}(F) \to M$ de la polarisation, ce qui est un $ML_n(\mathbb{C})$-fibré principal (où $ML_n(\mathbb{C})$ est le groupe métalinéaire).

3. Se donner un fibré en droites complexes $\sqrt{\bigwedge^n F} := \widetilde{Fr}(F) \times_{\sqrt{det \circ \kappa}} \mathbb{C}$ qui est un fibré associé à $\widetilde{Fr}(F)$ sous représentation $\sqrt{det \circ \kappa}$ holomorphe où κ est l'homomorphisme double recouvrement $\kappa : ML_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$.

4. Se donner une dérivée covariante partielle des sections dans $\Gamma(\bigwedge^n F)$ le long de F.

5. Définir un produit hermitien sur l'espace des sections polarisées en $\Gamma^F(L \times \sqrt{\bigwedge^n F})$, lequel induit une mesure d'intégration sur M/D.

6. Prendre comme espace de Hilbert la complétion de l'espace des sections polarisées et de carré sommable en $\Gamma^F(L \times \sqrt{\bigwedge^n F})$ sous le produit hermitien défini précédemment.

Dans le cas où le flot hamiltonien d'un observable classique préserve la polarisation, la correction métalinéaire suffit. Toutefois, les observables préservant une polarisation donnée sont plutôt limités. Par exemple un hamiltonien $H(\vec{p},\vec{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{q})$ en représentation de Schrödinger, i.e. polarisation verticale, ne préserve pas la polarisation. C'est alors que la correction métaplectique et le noyau BKS interviennent pour corriger le point (2), c'est-à-dire une projection unitaire pour passer d'une représentation hilbertienne à l'autre (i.e. d'une polarisation à l'autre). Pour deux polarisations F et F', le noyau BKS est un « pairing » entre différentes représentations qui vient projeter les sections polarisées sous F en $\Gamma^F(L \times \sqrt{\bigwedge^n F})$ à des sections polarisées sous F' en $\Gamma^{F'}(L \times \sqrt{\bigwedge^n F'})$. Ainsi, donné un flot hamiltonien ϕ_t^f d'un observable classique f qui ne préserve pas la polarisation F mais la pousse-en-avant à $F(t)$ (et aussi les sections polarisées sous F à des sections polarisées sous $F(t)$) on itère le noyau BKS à chaque Δt infinitésimal pour discrètement ramener les sections à leur polarisation initiale F. Ceci fait apparaître l'équation de Schrödinger ainsi que l'intégrale des chemins de Feynman (voir (Sniatycki [18])).

Enfin, notons que la correction métaplectique est sous-jacente à maints domaines d'actualité : structures Spin, intersections lagrangiennes, etc.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abraham, J. E. Marsden et T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Springer Applied Mathematical Sciences, 75, Springer-Verlag, New-York, 1988.

[2] V. I. Arnol'd. *Mathematical Methods in Classical Mechanics*. Springer Graduate Texts in Mathematics, 60, Springer-Verlag, New-York, second édition, 1989.

[3] S. Bates et A. Weinstein. Lectures on the geometry of quantization.

[4] Matthias Blau. Symplectic geometry and geometric quantization. 1992.

[5] Alexander Cardona. Geometric and mataplectic quantization.

[6] Ana Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Numbéro 1764 dans Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 2006.

[7] Sophie de Buyl, Stéphane Detournay et Yannick Voglaire. Symplectic geometry and geometric quantization.

[8] Johan Dupont. Fibre bundles and chern-weil theory. 2003.

[9] Jean Gallier. Notes on differential geometry and lie groups. 2013.

[10] Joseph Geraci. An introduction to geometric prequantization. 2009.

[11] Victor Guillemin, Viktor Ginzburg et Yael Karshon. *Moment Maps, Cobordisms, and Hamiltonian Group Actions*, volume 98. American Mathematical Society, 2002.

[12] S. Kobayashi et K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Wiley, New-York, 1963.

[13] Bertram Kostant. Quantization and unitary representations. *Lecture Notes in Mathematics*, 170:87–208, 1970.

[14] Charles M. Marle. Quantification géométrique : théorie et exemples. *Séminaire Paul Krée, Secrétariat mathématique, Paris*, 2(2):1–35, 1975-1976.

[15] Andrei Moroianu. Lectures on kähler geometry. 2004.

[16] Paul Reynolds. Associated vector bundles. 2010.

[17] D. J. Simms et N. M. J. Woodhouse. *Lectures on Geometric Quantization*. Numbéro 53 dans Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, 1976.

[18] J. Sniatycki. *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*. Springer Applied Mathematical Sciences, 30, Springer-Verlag, New-York, 1980.

[19] J.-M. Souriau. Quantification géométrique. *Communications in Mathematical Physics, Springer*, 1965.

[20] J.-M. Souriau. *Structure of Dynamical Systems, A symplectic View of Physics*. Birkhäuser Progress in Mathematics, 149, Birkhäuser Boston, 1997.

[21] N. M. J. Woodhouse. *Geometric Quantization*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New-York, second édition, 1997.