UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Formes quadratiques ternaires représentant tous les entiers impairs

par

CRYSTEL BUJOLD

Département de mathématiques et statistiques
Faculté des arts et science

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Novembre 2013

Résumé

En 1993, Conway et Schneeberger fournirent un critère simple permettant de déterminer si une forme quadratique donnée représente tous les entiers positifs ; le théorème des 15. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à un problème analogue, soit la recherche d'un critère similaire permettant de détecter si une forme quadratique en trois variables représente tous les entiers impairs. On débute donc par une introduction générale à la théorie des formes quadratiques, notamment en deux variables, puis on expose différents points de vue sous lesquels on peut les considérer. On décrit ensuite le théorème des 15 et ses généralisations, en soulignant les techniques utilisées dans la preuve de Bhargava. Enfin, on démontre deux théorèmes qui fournissent des critères permettant de déterminer si une forme quadratique ternaire représente tous les entiers impairs.

Mots-clés : Formes quadratiques, ternaire, représentation d'entiers, nombres impairs, universalité.

Abstract

In 1993, Conway and Schneeberger gave a simple criterion allowing one to determine whether a given quadratic form represents all positive integers ; the 15-theorem. In this thesis, we investigate an analogous problem, that is the search for a similar criterion allowing one to detect if a quadratic form in three variables represents all odd integers. We start with a general introduction to the theory of quadratic forms, namely in two variables, then, we expose different points of view under which quadratic forms can be considered. We then describe the 15-theorem and its generalizations, with a particular emphasis on the techniques used in Bhargava's proof of the theorem. Finally, we give a proof of two theorems which provide a criteria to determine whether a ternary quadratic form represents all odd integers.

Keywords : Quadratic forms, ternary, integer representation, odd integers, universality.

Table des matières

Remerciements

Je souhaite remercier mon directeur de recherche Andrew Granville pour m'avoir suggéré un problème aussi fascinant et pour avoir partagé avec moi maintes discussions intéressantes. Je veux aussi remercier Dimitri Dias pour son aide et surtout pour m'avoir divertie quand j'en avais besoin. Je remercie tous les membres du groupe de théorie des nombres de former un environnement merveilleux pour travailler. Enfin, j'aimerais remercier mon conjoint, Sébastien Comtois, de me supporter dans les moments difficiles et mon fils, Édan Comtois, d'être un petit rayon de soleil.

Introduction

Depuis la naissance de la théorie des nombres moderne, l'étude des équations quadratiques a fasciné les mathématiciens. En effet, c'est à Fermat(1601-1655) que l'on associe l'éclosion de la théorie des nombres telle qu'on la connait aujourd'hui, et l'on retrouvait au coeur de ses intérêts les équations diophantiennes et les sommes de carrés. En 1640, il démontra entre autres qu'un nombre premier p peut s'écrire comme la somme de deux carrés si et seulement si p est congru à 1 *mod* 4. Les idées de Fermat inspirèrent plus tard Euler (1707- 1783) qui continua sur la même lancée, fournissant des preuves pour quelques unes des plus importantes assertions de Fermat. Euler poursuivit ainsi l'étude des polynômes quadratiques initiée par Fermat, étudiant notamment la célèbre équation de Pell et ses variantes. On doit aussi à Euler les premiers pas qui menèrent à la théorie analytique des nombres. Par la suite, Lagrange (1736-1813) et Legendre (1752-1833) se laissèrent à leur tour séduire et ouvrirent la voie à l'étude des formes quadratiques en toute généralité (soit des polynômes quadratiques où chaque terme a un degré total de 2 ; ex : $x^2 + xy + y^2$). Ils contribuèrent notamment avec les célèbres théorèmes des quatre carrés (Lagrange 1770) et des trois carrés (Legendre 1798).

Mais c'est vraiment par le biais du travail de Gauss (1777-1855) que la théorie des formes quadratiques se déploya et se forgea dans sa forme actuelle. En effet, dans son Disquisitiones arithmetica, il élabora en détails la théorie de formes quadratiques binaires, c'est-à-dire en deux variables, et introduisit des concepts qui sont aujourd'hui à la base de l'étude des formes quadratiques.
Ainsi, les formes quadratiques ont une longue et riche histoire et il est remarquable qu'aujourd'hui encore, leur étude soit un sujet des plus florissant qui rejoint toutes les sphères de la théorie des nombres.

Plusieurs questions entourent les formes quadratiques, mais l'une des plus intéressantes est sans contredit la description des solutions entières des formes quadratiques à coefficients entiers. En d'autres termes, on s'intéresse aux nombres entiers qui peuvent être obtenus en évaluant une forme quadratique donnée à certaines valeurs entières. En partant de cette question sur la représentation des entiers, il est naturel d'approcher le problème sous un autre angle, et de se questionner sur l'ensemble des formes quadratiques qui représentent tous les entiers ou encore tous les entiers contenus dans un ensemble donné.

L'un des tournants importants concernant ce problème a sans doute eu lieu en 1917, lorsque Ramanujan publia un article dans lequel il faisait un premier pas vers la classification des formes quadratiques positives universelles, c'est-à-dire représentant tous les entiers positifs. En effet, il produisit une liste contenant 55 polynômes de la forme $ax^2 + by^2 + cw^2 + dz^2$, et affirma qu'il s'agissait d'une liste exhaustive de toutes les formes quadratiques universelles (parmi les formes considérées). Bien que le travail de Ramanujan ait dû être légèrement corrigé (l'une des formes sur la liste n'étant pas universelle), il provoqua un vif intérêt quant à l'énumération de toutes les formes quadratiques représentant tous les nombres entiers. Le défi fut relevé par plusieurs, et diverses techniques furent élaborées pour mettre à jour les formes quadratiques universelles, mais l'un des plus grands apports en ce sens est certainement dû à Conway et Schneeberger (et Bhargava) pour leur admirable théorème ; le "Théorème des 15". Effectivement, en 1993, Conway et Schneeberger fournirent un critère permettant de déterminer l'universalité de formes quadratiques en n'importe quel nombre de variables. Malheureusement, leur démonstration du théorème étant plutôt complexe, elle ne fût jamais publiée et quelques années plus tard, elle était partiellement oubliée. Ce fut Bhargava [1] qui publia un preuve de ce théoreme en 2000. L'élégance du "Théorème des 15" tient à sa simplicité et à sa facilité d'application ; il suffit de vérifier qu'une forme quadratique représente tous les nombres entiers jusqu'à 15 pour en établir l'universalité ! Ce théorème ne s'applique cependant qu'à une sous-classe de formes quadratiques, soit les formes dont les coefficients des termes croisés $a_{i,j}, i \neq j$ sont pairs. Bhargava et Hanke [9] prouvèrent en 2005 un théorème semblable pour le cas général, c'est-à-dire sans restriction sur la parité des coefficients des formes impliquées, en spécifiant qu'il suffit de vérifier que les nombres jusqu'à 290 soient représentés par une forme quadratique pour qu'elle soit universelle.

Ces théorèmes fournissent donc une charmante solution à la question de l'universalité des formes quadratiques et incitent naturellement à investiguer le problème de façon générale ; étant donné un sous-ensemble des nombres entiers S, quelles sont les formes quadratiques qui représentent tous les nombres dans S ? Bhargava a démontré que pour tout sous-ensemble des entiers S, il existe un ensemble fini $S_0 \subseteq S$ tel que si une forme quadratique représente tous les entiers dans S_0, alors elle représente tous les entiers dans S. Il est donc intéressant de trouver des critères similaires pour différents sous-ensembles des nombres entiers.

L'un des faits frappants dans la théorie des formes quadratiques est qu'aucune forme en trois variables ne représente tous les entiers. Ainsi, il est naturel de restreindre notre attention aux formes ternaires et d'investiguer la representabilité de certains sous-ensembles des nombres entiers. En particulier, il est d'intérêt de chercher des critères semblables à celui du "Théorème des 15" dans le cas spécifique des formes quadratiques en trois variables, et ce pour une variété de sous-ensembles des entiers, notamment celui des nombres impairs.

Dans ce mémoire, nous introduirons les formes quadratiques et les concepts importants qui leur sont reliés. Avec ces outils nous serons donc en mesure de démontrer les théorèmes résultants du travail de recherche effectué au cours de ce projet. Dans le premier chapitre, nous donnerons plusieurs définitions utiles et introduirons les notions d'équivalence et de réduction, en nous attardant notamment sur le cas des formes quadratiques en deux variables. Dans le chapitre 2, nours montrerons que plusieurs points de vue peuvent être utilisés pour parler des formes quadratiques, certains étant préférables à d'autres selon le contexte. Le chapitre 3 traitera de techniques importantes dans la théorie des formes quadratiques et en particulier dans le cadre du travail de Kaplansky, travail essentiel à l'obtention de nos résultats. Dans le chapitre 4, nous parlerons du théorème ayant inspiré le présent projet, soit le "Théorème des 15". Nous soulignerons les idées sous-jacentes à la preuve fournie par Bhargava et mentionnerons l'une des extensions intéressantes du théorème. Finalement, le chapitre 5 exposera les résultats de ce projet, soit les deux critères permettant d'identifier les formes quadratiques ternaires représentant tous les entiers impairs. En effet, nous démontrerons tout d'abord

Théorème 1. *Si une forme quadratique ternaire à matrice entière représente les 6 entiers suivants,*

$$1, 3, 5, 7, 11 \textit{ et } 15,$$

alors elle est O-universelle.

Suivi du critère plus général

Théorème 2. *Supposons que la liste de candidats O-universels soit exacte. Si une forme quadratique ternaire à valeurs entières représente les 16 nombres suivants*

$$1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 29, 31, 35, 41 \textit{ et } 77,$$

alors elle est O-universelle.

Chapitre 1

Définitions et concepts de base

1.1 Définitions

Définition 1. *Une **forme quadratique** n**-aire** est un polynôme homogène de degré deux en n variables*

$$Q(x_1, ..., x_n) := \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} c_{ij} x_i x_j.$$

*Une forme quadratique est **entière** si elle prend une valeur entière pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n$.*

On observe qu'une forme quadratique $Q(x)$ est entière si et seulement si tous les coefficients du polynôme sont entiers. En effet, si tous les coefficients sont entiers, il est clair que si x est dans $\mathbb{Z}^n$, alors $Q(x)$ est aussi dans $\mathbb{Z}$. De l'autre côté, si $Q(x)$ est entier, alors en particulier, en posant $x_i = 1$ et $x_j = 0$ pour tout $j \neq i$, alors $Q(x) = c_{ii} \in \mathbb{Z}$, et de ce fait, en posant $x_i = x_j = 1$ et $x_k = 0$ pour tout $k \neq i, j$, on obtient $Q(x) = c_{ii} + c_{jj} + c_{ij} \in \mathbb{Z}$. Ainsi, tous les coefficients de la forme quadratique sont entiers.

Définition 2. *Une forme quadratique est dite **définie positive**, si elle prend une valeur non-négative pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ dans $\mathbb{Z}^n$.*

Dans ce qui suit, par simplicité, si le contexte est clair on utilisera le terme de **forme** pour désigner une forme quadratique Q et toutes les formes quadratiques traitées seront entières et définies positives.

Définition 3. *Un entier n est **représenté** par une forme quadratique s'il existe un élément $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que*

$$Q(x) = n.$$

Définition 4. *Un forme quadratique positive est dite **universelle** si elle représente tous les entiers positifs.*

Définition 5. *On appelera une forme quadratique qui représente tous les entiers impairs, une forme **O-universelle**.*

Définition 6. *Une **forme à matrice entière** est une forme quadratique dont tous les coefficients des termes croisés, $a_{i,j}$ avec $i \neq j$, sont pairs.*

L'une des motivations derrière cette définition provient de la matrice Hessienne H qui correspond aux dérivées secondes d'une forme quadratique. Effectivement, une formulation alternative peut être donnée en définissant une forme Q comme étant une forme à matrice entière si $\frac{1}{2}H_Q$ est une matrice à coefficients entiers.

Définition 7. *On appelle **forme à valeurs entières** une forme quadratique dont les coefficients sont entiers (sans restriction sur la parité des coefficients).*

Il est à noter que cette définition diffère de la précédente par le fait que tous les coefficients de $\frac{1}{2}H$ ne sont pas nécessairement entiers. La raison pour laquelle on désire faire une distinction entre les formes à matrices entières et les formes à valeurs entières est entre autres qu'il est plus facile de traiter le premier cas que le deuxième, notamment parce que plusieurs arguments pouvant s'appliquer aux formes à matrices entières, ne peuvent être utilisés avec les formes à valeurs entières. Ceci est dû au fait que tous les coefficients de $\frac{1}{2}H$ ne sont pas nécessairement des entiers, ce qui ne permet souvent pas de garantir que les résultats seront entiers suite aux manipulations. De plus,la condition sur les coefficients diminue grandement le nombre de formes à considérer. Il est donc normal de tout d'abord investiguer le premier cas avant de s'attaquer au deuxième lors de la recherche des formes universelles.

1.2 Équivalence et réduction

1.2.1 Équivalence

Il est souvent désirable de commencer par simplifier un problème en considérant certains éléments comme étant équivalents s'ils ont les mêmes propriétés étudiées. Dans le cas des formes quadratiques, comme nous étudions la représentabilité des entiers, on cherche donc à savoir dans quel cas deux formes représentent les mêmes entiers.

Proposition 1. *Soit $Q_1(x_1, ..., x_n)$ et $Q_2(x_1, ..., x_n)$ deux formes quadratiques en n variables. S'il existe des transformations $\mathbb{Z}$-linéraires $L_i = L_i(x_1, ..., x_n)$, $1 \leq i \leq n$, inversibles sur $\mathbb{Z}$, telles que*

$$Q_1(L_1, ..., L_n) = Q_2(x_1, ..., x_n),$$

alors Q_1 et Q_2 représentent les mêmes entiers.

Démonstration. La proposition est claire puisque s'il existe des transformations linéaires $L_1, ...L_n$ telles que $Q_1(L_1, ..., L_n) = Q_2(x_1, ..., x_n)$, alors le fait que $Q_2(x) = n$ implique qu'avec $x'_i = L_i$, on a $Q_1(x') = n$. Comme les transformations sont inversibles, il existe un système d'équations linéaires inverse $(L'_1, L'_2, ...L'_m)$ tel que $Q_2(L'_1, ..., L'_n) = Q_1(x_1, ..., x_n)$ et donc le contraire est aussi vrai, ce qui nous permet d'obtenir que Q_1 et Q_2 représentent effectivement les mêmes entiers. □

En d'autres termes, puisqu'à chaque transformation linéaire inversible correspond une unique matrice $L \in GL_n(\mathbb{Z})$, s'il existe $L \in GL_n(\mathbb{Z})$ tel que

$$Q_1(Lx) = Q_2(x),$$

alors, Q_1 et Q_2 représentent les mêmes entiers. En terme d'universalité, on désire donc considérer de telles formes quadratiques comme étant identiques, ce qui suggère de considérer l'universalité de classes de formes quadratiques, plutôt que de traiter ces dernières indépendamment. Comme il est souvent plus simple de travailler avec des matrices, on utilisera ce point de vue pour définir une relation d'équivalence entre les formes quadratiques.

Définition 8. *Deux formes quadratiques n-aires sont **équivalentes** s'il existe une matrice inversible $L \in GL_n(\mathbb{Z})$, telle que*

$$Q_1(Lx) = Q_2(x).$$

1.2.2 Réduction

Pour une classe d'équivalence donnée, on souhaite habituellement trouver un représentant **réduit**, par exemple une forme telle que la somme $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \mid c_{i,j} \mid$ est minimale . Ceci permet en effet de faciliter grandement les manipulations et de réduire le nombre d'opérations à effectuer lors des calculs. Or en général, pour une forme en n variables, il est difficile de trouver une forme équivalente dont les coefficients soient minimaux. Il existe toutefois des algorithmes qui permettent de réduire les coefficients à l'aide de transformations linéaires. Dans le cas des formes quadratiques en deux et trois variables, on peut en fait définir un unique représentant minimal. Nous donnons ici un bref aperçu des concepts et techniques liés à la recherche d'un représentant réduit.

Réduction des formes binaires

L'une des contributions remarquables de Gauss dans la théorie des formes quadratiques se situe au niveau du développement de la théorie des formes binaires. Il observa entre autres qu'il est possible de définir un unique représentant réduit dans chaque classe d'équivalence, soit une forme quadratique binaire (définie positive) $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ dont les coefficients respectent l'une des conditions suivantes :

$$-a < b \leq a < c$$

ou alors

$$0 \leq b \leq a = c.$$

Il prouva cette assertion à l'aide de l'algorithme qui suit ;

Soit une forme quadratique binaire non-réduite donnée par $Q(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$.

1. Si $c < a$, ou si $c = a$ et $b < 0$, alors on obtient Q' en interchangeant a et c et en substituant $-b$ pour b. Alors

   $$\begin{aligned} Q'(-y,x) &= c(-y)^2 - bx(-y) + ax^2 \\ &= ax^2 + bxy + cy^2 \\ &= Q(x,y) \end{aligned}$$

   et donc les formes Q et Q' sont équivalentes.
2. Si $a \leq c$, mais b n'est pas compris entre $-a$ et a, alors on substitue b par le résidu $b' \equiv b \bmod 2a$ tel que $-a < b' \leq a$. Ainsi, en écrivant $b = b' + 2ak$ et en prenant

$c' = ak^2 - bk + c$, on obtient

$$\begin{aligned} Q'(x+ky, y) &= a(x+ky)^2 + b'(x+ky)y + c'y^2 \\ &= ax^2 + 2akxy + ak^2y^2 + b'xy + b'ky^2 + ak^2y^2 - bky^2 + cy^2 \\ &= ax^2 + (b' + 2ak)xy + (2ak^2 + b'k - bk + c)y^2 \\ &= ax^2 + bxy + cy^2 \\ &= Q(x, y) \end{aligned}$$

Conséquemment, en itérant ce processus on obtient une suite de formes équivalentes et il suffit maintenant de montrer que cet algorithme se termine et que la forme réduite finale est unique.

On fait d'abord quelques remarques utiles pour le reste de la preuve. Premièrement, on remarque que si le $m = pgcd(a, b, c) \neq 1$, alors en factorisant on obtient $Q(x, y) = mQ'(x, y)$ donc il suffit de connaître les valeurs prises par Q' pour obtenir celles de Q. Ainsi, on peut supposer que le $pgcd(a, b, c) = 1$. Introduisons maintenant le **discriminant** d de la forme binaire $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ définit par $d = b^2 - 4ac$. On observe que si Q est une forme définie positive, alors $d < 0$. Pour le voir, il suffit de noter que $Q(1, 0) = a$ et $Q(b, -2a) = ab^2 - 2ab^2 + 4ca^2 = -da$, et puisque a et $-da$ prennent des signes opposés si $d > 0$, l'on conclut que $d < 0$. De plus, en diagonalisant on a $4aQ(x, y) = (2ax + by)^2 - dy^2$, et puisque $d < 0$, il s'ensuit qu'une forme quadratique est définie positive si et seulement si $a > 0$.

Remarque 1. *La forme quadratique Q avec discrimant $d \leq 0$ est soit toujours définie positive, (si a>0) ou toujours définie négative (si a<0). En considérant $-f$ plutôt que f, on peut donc obtenir la théorie des formes quadratiques négatives facilement à partir de celle des formes positives.*

Enfin, si Q_1 et Q_2 sont deux formes équivalentes alors, il y a des transformations linéaires telles que $Q_1(L_1, L_2) = Q_2(x, y)$. En écrivant $L_1(x, y) = \alpha x + \beta y$ et $L_2(x, y) = \gamma x + \delta y$, on a

$$\begin{aligned} Q_2(x, y) =& Q_1(L_1, L_2) \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 =& a(\alpha x + \beta y)^2 + b(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) + c(\gamma x + \delta y)^2 \end{aligned}$$

et on déduit donc que

$$\begin{aligned} A &= a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2 \\ B &= 2(a\alpha\beta + b\beta\gamma + c\gamma\delta) + b \\ C &= a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2 \end{aligned}$$

Remarque 2. *On fait ici l'importante remarque que par simple substitution, si les transformations son inversibles sur* $\mathbb{Z}$*, alors* $det(L) = \pm 1$ *et on obtient* $D = B^2 - 4AC = b^2 - 4ac = d$*. Ainsi, les discriminants de formes équivalentes sont égaux.*

Aussi, puisqu'il s'agit de transformations linéaires inversibles, on note que la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ *doit être respectée.*

Maintenant, pour montrer que l'algorithme se termine après un nombre fini d'itérations, on observe d'abord que si $a = c$ et $b \leq 0$ alors on obtient le résultat directement après la première opération. Dans le cas contraire, la première opération réduit la taille du premier coefficient, c'est-à-dire que $a' < a$, et soit on obtient les inégalités désirées, ou alors on utilise la deuxième opération. Ensuite, on note que cette deuxième opération fixe la valeur de a et réduit la valeur de c, c'est-à-dire que $a' = a$ et $c' < c$. Pour le voir, on observe que $|b'| < b$ et donc que $c' = \frac{b'^2 - d}{4a} < \frac{b^2 - d}{4a} = c$. Si cette dernière opération ne termine pas l'algorithme, alors on se retrouve soit dans le cas $a = c$ et $b \leq 0$ et donc une seule étape supplémentaire suffit, ou on recommence la première opération. Mais comme l'opération numéro 2 n'affecte pas le premier coefficient a et que la première opération en réduit la taille, l'algorithme doit se terminer après au plus $2a+1$ itérations.

On montre maintenant qu'il existe un unique représentant réduit dans chaque classe d'équivalence. Puisque deux formes équivalentes représentent les mêmes entiers, on considère les plus petites valeurs prisent par une forme réduite $Q_1(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, avec $pgcd(x, y) = 1$. En utilisant les valeurs $(x, y) = (1, 0)$ et $(0, 1)$ on sait que Q représente a et c avec $a \leq c$. Sans perdre de généralité, on peut supposer $x \geq 0$ puisque $x^2 = (-x)^2$ et $(-x)y = x(-y)$ et il est donc suffisant de laisser seulement y prendre des valeurs négatives.

Supposons que $|b| < a$ et que $x > |y|$, alors

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy &\geq ax^2 - |by|x \\ &\geq x^2(a - |b|) \\ &\geq x^2 \end{aligned}$$

qui suit de l'hypothèse $|b| < a$. Ainsi, il en découle que

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &\geq x^2 + cy^2 \\ &\geq (c+1)y^2. \end{aligned}$$

Dans le cas où $a = b$, on obtient

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= ax(x+y) + cy^2 \\ &\geq ax + cy^2 \\ &> |y|(1 + c|y|) \\ &> cy^2 \\ &\geq (c+1)y^2. \end{aligned}$$

Le même argument que dans le premier cas ci-dessus montre que si $x < |y|$, alors

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &\geq ax^2 + (c - |b|)y^2 \\ &\geq (a + c - |b|)x^2. \end{aligned}$$

Comme $|b| \leq a \leq c$ on constate dans les deux cas que si y est différent de zéro, alors $Q_1(x, y) \geq c$. Si $y = 0$, alors $Q_1(x, y) = ax^2$ et si k est le plus grand entier tel que $ak^2 \leq c$, alors les plus petits entiers représentés par Q_1 sont $0 < a < 4a < 9a < \ldots < k^2 a \leq c$.

Supposons maintenant que $Q_2(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ soit une forme quadratique réduite équivalente à Q_1. Alors Q_2 représente les mêmes entiers que Q et respecte la condition ci-dessus, soit que les plus petits entiers représentés sont $0 < A < 4A < \ldots < m^2 A \leq C$, où m est le plus grand entier tel que $m^2 A \leq C$. Il s'ensuit donc que $A = a$, et que $C = r^2 a = r^2 A$ ou $c = s^2 A = s^2 A$ pour un certain $r \leq k$ ou $s \leq m$. Dans ce cas, comme $A = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$ et $C = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2$, on déduit que $\beta = r\alpha$ et $\delta = r\gamma$. Mais alors $\alpha\delta - \beta\gamma = r\alpha\gamma - r\alpha\gamma = 0$, ce qui contredit l'équivalence entre Q_1 et Q_2 et donc on doit avoir $C = c$, auquel cas $b = B$ puisque les formes sont équivalentes. On conclut que $Q_1 = Q_2$ ce qui démontre l'unicité du représentant réduit de chaque classe d'équivalence.

Remarque 3. *Sauf mention du contraire, pour le reste de ce travail, lorsque nous mentionnerons une forme quadratique, il sera fait référence à la classe d'équivalence de cette forme.*

Réduction des formes ternaires et cas général

Le cas des formes quadratiques binaires montre qu'il est possible de définir un représentant réduit unique pour chaque classe d'équivalence. Cependant, en augmentant le nombre de variables, on augmente considérablement la difficulté à établir une technique permettant de trouver un tel représentant.

Lorsque Q est une forme quadratique ternaire (en 3 variables), il est également possible de définir un représentant réduit dans chaque classe en posant des conditions similaires sur les coefficients. Dans son "Disquisitiones arithmeticae", Gauss donna notamment un algorithme permettant d'obtenir un représentant réduit pour les formes ternaires. Nous donnons ici les conditions établies par d'Alexander Schiemann dans [16] et définissant un unique représentant réduit pour les formes ternaires de la façon suivante ;

Définition 9. *Soit une forme quadratique ternaire $Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$, alors Q est réduite si*

$$\begin{gathered}
0 < a \leq b \leq c, \\
0 \leq d \leq a, \\
0 \leq e \leq a, \\
-b < f \leq b, \\
a + b \geq d + e - f, \\
si\ d = 0\ \ ou\ e = 0, alors\ f \geq 0, \\
si\ a = b, alors\ |f| \leq e, \\
si\ b = c, alors\ e \leq d, \\
si\ d = a, alors\ e \leq 2f, \\
si\ e = a, alors\ d \leq 2f,
\end{gathered}$$

Puisque l'on ne fera pas expressément usage d'un représentant réduit unique au cours de ce projet, et comme les techniques utilisées pour montrer l'existence et l'unicité d'un tel représentant sont hors du cadre de ce travail, nous n'entrerons pas davantage dans les détails.

Étant donnée une forme quadratique de degré n, il devient impossible d'identifier un représentant réduit unique lorsque la valeur de n augmente. On veut toutefois, dans la mesure du possible, trouver une forme équivalente dont les coefficients sont réduits. Pour ce faire, plusieurs notions de formes réduites ont été introduites au cours du temps, l'une des plus naturelles étant due à Minkowski qui a défini une forme comme étant réduite si les coefficients des termes diagonaux sont minimaux, c'est-à-dire que $c_{11} \leq c_{22} \leq ... \leq c_{nn}$. Puisque la réduction de Minkowski se fait plus naturellement en terme de réseaux, nous en relèguerons les détails à la fin du prochain chapitre.

Chapitre 2

Différents points de vue sur les formes quadratiques

L'un des aspects fascinants des formes quadratiques réside dans le fait qu'elles rejoignent plusieurs domaines des mathématiques et on peut donc approcher le problème sous différents angles, choisissant celui qui offre une optique simplifiée du problème. Du point vue analytique, on peut considérer qu'un forme quadratique provient d'une forme bilinéaire symétrique, alors qu'en prenant un angle plus géométrique, on peut aussi voir une forme quadratique comme provenant d'un $\mathbb{Z}$-module libre équipé d'une fonction quadratique formant un réseau dans un espace quadratique. Dans cette section, nous exposerons ces idées, utilisées pour étudier et comprendre les formes quadratiques.

2.1 Formes quadratiques et formes bilinéaires

On débute avec quelques définitions, que nous citerons en toute généralité.

Définition 10. *Soit un anneau commutatif avec unité R et un R-module M. Une **forme bilinéaire** est une application*

$$B : M \times M \longrightarrow R$$

qui est un homomorphisme de module dans chaque argument, c'est-à-dire

$$B(x+y,w) = B(x,w) + B(y,w)$$
$$B(\alpha x, y) = \alpha B(x,y)$$
$$B(x,y+w) = B(x,y) + B(x,w)$$
$$B(x,\alpha y) = \alpha B(x,y).$$

*De plus, si $B(x,y) = B(y,x)$, alors la forme bilinéaire B est dite **symétrique**.*

Lorsque que le contexte est clair, on utilisera simplement l'appelation "forme symétrique" pour faire référence à une "forme bilinéaire symétrique".

Définition 11. *Une forme bilinéaire symétrique est **définie positive** si $B(x,x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.*

Remarque 4. *Étant donné une base $\{e_1, ...e_n\}$ pour M sur R, alors il est clair qu'une forme bilinéaire est complètement déterminée par les valeurs prises par la forme évaluée sur la base, puisque pour tout $x, y \in M$, on a $B(x,y) = B(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j B(e_i, e_j)$.*

Remarque 5. *Toutes les formes bilinéaires considérées pour la suite seront symétriques et définies positives.*

Commençons premièrement par montrer la relation qui existe entre les formes quadratiques et les formes bilinéaires symétriques. Rappelons d'abord qu'une forme quadratique définie sur $\mathbb{Z}$ est un polynôme homogène de degré 2,

$$Q(x_1, x_2, ...x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

Proposition 2. *Soit un anneau commutatif R et un R-module M. Il existe une bijection entre les formes bilinéaires symétriques (définies positives) sur M et les matrices symétriques (définies positives) sur R.*

Démonstration. Soit $B(x,y)$ une forme bilinéaire symétrique définie sur M et choisissons une base $e = \{e_1, ...e_n\}$ pour M sur R. Alors pour tout $x, y \in M$, on peut écrire $x = \sum_i \alpha_i e_i$ et $y = \sum_j \beta_j e_j$. Par conséquent, on a

$$B(x,y) = B(\sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j e_j) \tag{2.1}$$
$$= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j B(e_i, e_j). \tag{2.2}$$

En posant $b_{ij} = B(e_i, e_j)$ et $B = [b_{ij}]$, on obtient

$$B(x,y) = b_{i,j}\alpha_i\beta_j \tag{2.3}$$
$$= \alpha^T B\beta, \tag{2.4}$$

où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ constituent les représentations de x et y dans la base $\{e_1, ..., e_n\}$. Ainsi, étant donnée une base pour M sur R, on a une représentation $B(x,y) \mapsto B = [b(e_i, e_j)]$, où par symétrie de $B(x,y)$, B est une matrice symétrique, c'est-à-dire que $B \in Sym_n(R)$.

De l'autre côté, prenons une matrice $B = [b_{ij}] \in Sym_n(R)$ et une base $\{e_1, ...e_n\}$ pour M sur R. On définit une forme bilinéaire symétrique sur M en posant $B(e_i, e_j) = b_{ij}$, que l'on étend bilinéairement à tout $x, y \in M$. Ainsi,

$$\begin{aligned} B(x,y) &= B(\sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j e_j) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i\beta_j B(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j} b_{i,j}\alpha_i\beta_j \\ &= \alpha^T B\beta, \end{aligned}$$

qui découle aisément par commutativité de R. Par conséquent, en comparant avec (2.1) à (2.4), on conclut qu'il existe une bijection entre $B(x,y)$ et B. $\square$

On observe qu'un changement de base avec matrice de passage P, c'est-à-dire $e = Pe'$, entraîne une modification de la bijection ci-haute de la façon suivante ;

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \alpha^T B\beta \\ &= (P\xi)^T BP\mu \\ &= \xi^T(P^T BP)\mu \\ &= \xi^T B'\mu, \end{aligned}$$

où du côté droit, α, β refèrent aux représentations de x, y dans la base e, et ξ, μ réfèrent aux représentations de x, y dans la base e'. Ainsi, la bijection obtenue dépend de la base choisie.

Proposition 3. *Soit un anneau commutatif R et un R-module M. Il existe une bijection entre les formes quadratiques à coefficients dans R et les formes bilinéaires symétriques définies sur M telles que $B(e_i, e_i) = 2a$, pour tout $i \leq n$ et un certain $a \in R$.*

Démonstration. Choisissons d'abord une base $e = \{e_1, ..., e_n\}$ pour M sur R. Soit une forme bilinéaire $H(x, y)$ définie sur M telle que $H(e_i, e_i) = 2a$. Posons $Q(\alpha) = \frac{1}{2}H(x, x)$, où $x = \alpha e = \sum_i \alpha_i e_i$. Par la proposition 2 , il existe une matrice $H \in Sym_n(R)$ associée à $H(x, y)$ dont, par construction, les coefficients diagonaux sont de la forme $h_{ii} = 2a$ pour un certain $a \in R$. Ainsi, on a $Q(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha^T H\alpha$ et donc $Q(\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i,j\leq n} b_{ij}\alpha_i\alpha_j$. Puisque R est commutatif et H est symétrique avec $h_{ii} = 2a$, il en résulte que $Q(\alpha)$ est une forme quadratique définie sur R^n à coefficients dans R.

Prenons maintenant une forme quadratique $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i\leq j\leq n} c_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$ où $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_n)$ est dans R^n, et posons $h_{ij} = (c_{ij}+c_{ji})$, où $c_{ji} = 0$ si $j > i$. Alors, la matrice $H = [h_{ij}]$ est une matrice symétrique à coefficients dans R et diagonale $h_{ii} = 2a$. Pour deux éléments $x, y \in M$, avec représentation α et β dans la base e, on laisse $H(x, y) = \alpha^T H\beta$. Il s'ensuit par Proposition 2 que $H(x, y)$ est une forme bilinéaire symétrique avec $H(e_i, e_i) = 2a$, $a \in R$.

Ainsi, par construction, on constate que les applications ci-dessus sont réciproques et qu'il existe donc une bijection entre les formes quadratiques à coefficients dans R et les formes bilinéaires sur M avec $H(e_i, e_i) = 2a$. $\square$

Maintenant, par définition, deux formes quadratiques sont équivalentes s'il existe une matrice inversible L telle que $Q_1(x) = Q_2(Lx)$. Considérons donc

$$\begin{aligned} 2Q_2(Lx) &= (Lx)^T H_2(Lx) \\ 2Q_1(x) &= x^T(L^T H_2 L)x \\ x^T H_1 x &= x^T Hx. \end{aligned}$$

Alors, on peut déduire que $H_1 = (L^T H_2 L)$ et que deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice inversible L telle que $H_1 = (L^T H_2 L)$. Puisque pour chaque matrice inversible L la matrice $L^T B_2 L$ correspond à un changement de base pour M sur R, on observe aussi que l'équivalence entre les formes quadratiques coïncide avec les changements de base pour M. Ainsi, en définissant une équivalence entre les formes bilinéaires sur M s'il existe un changement de base pour M, avec matrice de passage P, tel que $H_1(x, y) = H_2(Px, Py)$, on obtient clairement une bijection entre classes d'équivalence de formes bilinéaires et classes d'équivalence de formes quadratiques, laquelle bijection est indépendante du choix de base pour M sur R.

Il est parfois fort utile de considérer une forme quadratique comme provenant d'une forme bilinéaire symétrique, ce qui permet de travailler avec une représentation matricielle et d'utiliser les propriétés intéressantes des formes bilinéaires.

Définition 12. *La matrice $H = [h_{ij}]$ définie ci-haut et associée à la forme quadratique Q est appelée la **matrice Hessienne** de Q.*

*La matrice $B = \frac{1}{2}H$ est appelée la **matrice de Gram** associée à Q (et est dénotée par B).*

Bien qu'il soit plus courant de parler de la matrice de Gram de Q, il est somme toute plus naturel de travailler avec la **matrice Hessienne** associée à la **forme bilinéaire Hessienne définie par** $H(x, y) := 2B(x, y)$, et ce pour deux raisons. Premièrement, on note que la matrice de Gram de Q est en fait dans $Sym_n(R[\frac{1}{2}])$ et donc, si la division par 2 n'est pas définie dans R, comme par exemple lorsque $R = \mathbb{Z}$, l'utilisation de la matrice de Gram est peu naturelle, alors que la matrice Hessienne $H = 2B$ est bien définie sur R. De plus, la matrice associée à la forme bilinéaire Hessienne correspond à la matrice Hessienne des dérivées de deuxième ordre de Q, et elle est donc directement liée à la forme quadratique. En contre-partie, la représentation d'une forme quadratique par sa matrice de Gram, $Q(x) = x^T By$, n'implique pas l'utilisation de la division par 2, d'où la préférence générale pour la matrice de Gram.

Remarque 6. *La correspondance entre la matrice H et une forme quadratique Q peut être échangée sans problème par une correspondance avec la matrice de Gram B. On peut donc utiliser de façon équivalente cette bijection et la relation $Q(\alpha) = \alpha^T B\alpha$. (La forme bilinéaire correspondante sera évidemment aussi modifiée en conséquence).*

On dérive maintenant une relation importante entre une forme quadratique Q et la forme bilinéaire (de Gram) $B(x, y)$ qui lui associée.

Proposition 4. *Soit une forme quadratique Q et la forme symétrique $B(x, y)$ qui lui est associée, alors on a l'identité de polarisation*

$$2B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
2B(x, y) &= 2x^T By \\
&= 2 \sum_{i,j \le n} b_{ij} x_i y_j \\
&= 2 \sum_{i,j \le n} \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}) x_i y_j \\
&= \sum_{i<j \le n} c_{ij} x_i y_j + \sum_{i<j \le n} c_{ij} x_j y_i
\end{aligned}$$

De l'aute côté, on a

$$\begin{aligned}
Q(x+y)-Q(x)-Q(y) &= \sum_{i<j\leq n} c_{ij}(x+y)_i(x+y)_j - \sum_{i<j\leq n} c_{ij}x_ix_j - \sum_{i<j\leq n} c_{ij}y_iy_j \\
&= \sum_{i<j\leq n} c_{ij}(x_i+y_i)(x_j+y_j) - \sum_{i<j\leq n} c_{ij}x_ix_j - \sum_{i<j\leq n} c_{ij}y_iy_j \\
&= \sum_{i<j\leq n} c_{ij}(x_ix_j+x_iy_j+y_ix_j+y_iy_j) - \sum_{i<j\leq n} c_{ij}x_ix_j - \sum_{i<j\leq n} c_{ij}y_iy_j \\
&= \sum_{i<j\leq n} c_{ij}x_iy_j + c_{ij}x_jy_i \\
&= 2B(x,y)
\end{aligned}$$

□

Remarque 7. *Nous avons montré ci-haut que le lien entre formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques existe pour toutes formes définies sur un anneau commutatif arbitraire R. En particulier, le concept est applicable dans le cas qui nous concerne, soit le cas où $R = \mathbb{Z}$.*

2.2 Réseaux et formes quadratiques

Il existe une façon différente d'approcher les formes quadratiques, en les considérant comme des normes sur des réseaux dans $\mathbb{R}^n$. Dans cette section, nous montrerons qu'à chaque forme quadratique, on peut associer un réseau dans $\mathbb{R}^n$ et qu'ainsi, le problème de représentabilité des entiers par une forme quadratique deviendra un problème d'existence de vecteurs de normes entières dans un réseau. On commence avec quelques définitions pour se mettre dans le contexte géométrique.

Définition 13. *Un* ***réseau*** *Λ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$ pour l'addition, engendrant $\mathbb{R}^n$ comme sous-espace vectoriel.*

Conséquemment, étant donnée une base $e = \{e_1, ..., e_n\}$ pour $\mathbb{R}^n$, un réseau avec base e est en fait donné par

$$\Lambda = \{x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i : \alpha_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Définition 14. *Soit un réseau Λ, la* ***matrice génératrice*** *M de Λ est la matrice dont les lignes sont données par les vecteurs $e_i = (e_{i1}, ..., e_{in})$ de la base.*

La matrice M est effectivement génératrice du réseau puisque pour tout $x \in \Lambda$, c'est-à-dire $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, alors on a $x = \alpha M$ où $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_n)$.

Définition 15. *Si M est la matrice génératrice du réseau Λ, alors la matrice $A = M^T M$ est appelée la* ***matrice de Gram*** *de Λ.*

Remarque 8. *Il est bon de noter que par construction, A est une matrice symétrique.*

Maintenant, 2 bases e et e' dans $\mathbb{R}^n$ engendrent le même réseau Λ si et seulement s'il y a un changement de base avec matrice de passage $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ tel que $e' = eU$, ou de façon équivalente $M' = MU$, ce qui implique évidemment que $A' = U^T AU$. Ceci nous incite à faire la définition suivante.

Définition 16. *Deux réseaux avec matrices de Gram A_1 et A_2 sont dits* ***équivalents*** *s'il existe une matrice $U \in GL_n(\mathbb{Z})$, telle que $A_2 = U^T A_1 U$.*

Avant de poursuivre, on prend le temps de rappeler que par la section précédente, l'on sait qu'il existe des bijections

$$\{\text{Formes quadratiques à coefficients dans } \mathbb{Z}\}$$

$$\updownarrow \tag{2.5}$$

$$\{B \in Sym_n\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right) : \text{les coefficients diagonaux} a_{ii} \in \mathbb{Z}\}$$

$$\updownarrow \tag{2.6}$$

$$\{\text{Formes bilinéaires telles que } B(x,y) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \text{ et } B(e_i, e_i) \in \mathbb{Z}\},$$

données par $Q(\alpha) = \alpha^T B\alpha$ et $B = [B(e_i, e_j)]$. Par conséquent, on parlera d'une forme quadratique en naviguant librement entre ces bijections.

On montre à présent la correspondance qui existe entre les classes d'équivalence de formes quadratiques entières et les réseaux munis d'une norme entière.

Ainsi, on muni maintenant $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne et on considère la norme au carré, soit $N(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. En restreignant la norme sur un réseau Λ avec base $\{e_1, ..., e_n\}$, on observe que pour $x = \sum_i \alpha_i e_i$,

$$\begin{aligned} N(x) &= N\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j e_i e_j \\ &= \alpha^T M^T M\alpha \\ &= \alpha^T A\alpha. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Remarque 9. *On observe qu'en munissant $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne au carré, la matrice A coïncide avec la matrice définissant le produit scalaire euclidien sur le réseau Λ correspondant. En effet, on a $A = M^T M = [\sum_m e_{im}e_{jm}]$ et donc il s'ensuit que $A = [< e_i, e_j >]$ correspond à la représentation matricielle du produit scalaire sur Λ.*

Posons donc $Q(\alpha) = N(x)$. Alors, par (2.5) , $Q(\alpha) = \alpha^T A\alpha$ est une forme quadratique si et seulement si A est une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ avec diagonale entière. On peut aisément constater que les réseaux correspondant à de telles matrices sont les réseaux sur lesquels la norme $N(x)$ induit une norme entière. Nous appelerons ces réseaux des **réseaux à norme entière**. Ainsi, il est clair par (2.5) et (2.7), que l'on obtient une bijection entre les formes quadratiques entières et les réseaux à norme entière.

Maintenant, il n'est pas difficile de voir que l'équivalence entre réseaux à norme entière coïncide avec l'équivalence entre formes quadratiques puisque si Q_1 et Q_2 sont deux formes équivalentes, alors il existe un matrice inversible L telle que $Q_1(\alpha) = Q_2(L\alpha)$, et donc

$$\begin{aligned} Q_1(\alpha) &= Q_2(L\alpha) \\ \alpha^T A_1\alpha &= (L\alpha)^T A_2(L\alpha) \\ \alpha^T A_1\alpha &= \alpha^T(L^T A_2 L)\alpha, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que Q_1 et Q_2 sont équivalentes exactement lorsque les réseaux correspondants avec matrices de Gram A_1 et A_2 sont équivalents. Ainsi, il en résulte qu'on obtient en fait une bijection entre classes d'équivalence de formes quadratiques entières et les réseaux à norme entière.

Pour la suite, ce sera toujours cette bijection qui sera considérée et les formes quadratiques et réseaux en question feront toujours référence aux classes d'équivalence correspondantes.

Maintenant, à l'aide de la bijection entre les formes quadratiques et les réseaux, on peut obtenir un point de vue des plus intéressants sur les formes quadratiques. En effet, pour chaque réseau Λ dans $\mathbb{R}^n$ ayant pour base $\{e_1, ..., e_n\}$ et étant muni de la norme Euclidienne N, on obtient l'espace $(\Lambda_{\{e_1,...,e_n\}}, N)$. Tel que décrit plus tôt, on sait que $N(x) = Q(\alpha)$. Ainsi, on identifie $x \in \Lambda$ avec sa représentation α dans $\mathbb{Z}^n$ et afin de préserver la norme on identifie $(\Lambda_{\{e_1,...,e_n\}}, N)$ avec (Λ_E, Q), où E est la base standard dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi, à chaque réseau à norme entière correspond une paire (Λ_E, Q) appelé **réseau quadratique**, c'est-à-dire un réseau Λ_E muni d'une norme quadratique Q. Il en résulte que l'on peut considérer les formes quadratiques comme étant différentes normes entières sur Λ_E. Cette perspective est intéressante puisqu'elle soumet notamment Q aux conditions analytiques que doivent respecter les normes et la représentabilité d'un entier n devient une question d'existence de vecteurs de norme n.

Remarque 10. *Il est bon noter que l'appelation de norme pour caractériser $Q(x)$ est abusive, puisque $N(x)$ tel que définie plus haut est une norme au carré et par conséquent, Q n'est pas une norme mais bien une norme au carré. En d'autres termes, pour obtenir une norme sur Λ, on doit utiliser $\sqrt{(Q)}$ plutôt que Q. Il est important de garder ce fait en tête, mais puisqu'il s'agit d'un détail technique, nous dirons tout de même que Q est une norme sur le réseau Λ.*

2.3 Réduction de Minkowski

Dans cette section, nous revenons au concept de réduction de formes introduit dans le premier chapitre. On note que par la bijection entre les formes quadratiques et les réseaux obtenue plus tôt, si la notion de réduction d'une forme quadratique se définit en terme de ses coefficients, alors on peut la considérer comme une réduction de la norme des vecteurs composants la base du réseau correspondant. En effet, puisque la matrice de Gram A d'un réseau correspond à la matrice de Gram de la forme associée et que l'une représente le produit scalaire sur le réseau et l'autre les coefficients de la forme quadratique, on a la relation $c_{ii} = |e_i|$ et $c_{ij} = \frac{<e_i,e_j>}{2}$, et donc la réduction des coefficients des termes diagonaux est équivalente à trouver une base dont les normes sont inférieures. On introduit donc ici la notion de réduction de Minkowski.

Définition 17. *Une base $\{e_1, ..., e_n\}$ pour un réseau Λ est **Minkowski-réduite** si*

1. *e_1 est un vecteur de plus petite norme de Λ,*
2. *e_i est un vecteur de plus petite norme tel que $\{e_1, ..., e_i\}$ peut être prolongé en une base entière pour Λ.*

On note que les conditions ci-hautes sont plus fortes que seulement l'indépendance linéaire des vecteurs, puisqu'elles exigent que tous les vecteurs de la base aient une norme entière avec $|e_1| \leq |e_2| \leq ... \leq |e_n|$. On observe qu'une base Minkowski-réduite requiert que chaque vecteur soit le plus petit possible. La définition de base réduite de Minkowski est donc discutablement la plus forte que l'on puisse utiliser. Toutefois, en applications, les choses se compliquent en dimension $n \geq 5$, puisque dans ce cas les n plus petits vecteurs linéairement indépendants d'un réseau ne forment pas nécessairement une base, ce qui rend difficile de construire des algorithmes efficaces pour trouver une base Minkowski-réduite. Heureusement, dans le cas des réseaux de dimensions $n \leq 4$, il est toujours possible de former une base à partir de vecteurs linéairement indépendants de plus petites normes. Ce fait nous sera grandement utile pour la suite.

Chapitre 3

La liste de Kaplansky

Depuis la classification des formes quadratiques quaternaires par Ramanujan, beaucoup d'intérêt a été porté sur la classification des formes quadratiques. Toutefois, l'étude des formes ternaires s'avère plus difficile que celle des formes quaternaires. En outre, bien qu'elle soit avancée, la classification des formes quadratiques ternaires est toujours incomplète à ce jour. Motivé par le fait qu'il n'y a aucune forme ternaire universelle, mais que la forme $x^2 + y^2 + 2z^2$ représente tous les nombres impairs, Kaplansky s'attaqua à la classification des formes quadratiques ternaires possédant cette propriété et montra qu'il y a au plus 23 formes ternaires représentant tous les entiers impairs. De fait, Kaplansky prouva que 19 d'entre elles représentent tous les nombres impairs et Jagy en démasqua une vingtième, alors que trois candidats demeurent incertains. Mentionnons toutefois qu'en 2011, Jeremy Rouse démontra dans [15] que l'hypothèse de Riemann généralisée implique l'O-universalité des trois candidats restants.

Le travail de Kaplansky étant crucial à l'obtention de nos résultats, dans ce chapitre, nous effectuerons un survol des concepts et techniques utilisés pour l'élaboration de la liste des formes quadratiques ternaires O-universelles. Sans en donner les détails, nous exposerons donc dans le présent chapitre quelques-uns des outils importants dans la théorie des formes quadratiques.

3.1 Déterminant, Génus et Équivalence

L'une des étapes difficiles dans l'étude des formes quadratiques est de différencier les multiples classes d'équivalence existantes et de détermimer si deux formes données appartiennent à la même classe d'équivalence. Puisqu'il n'est pas toujours possible d'obtenir un unique représentant réduit, d'autres outils doivent être utilisés afin de pouvoir comparer les formes quadratiques. Il s'avère que ces outils permettent aussi d'obtenir de l'information quant aux nombres entiers représentés par les formes, ce qui en fait des outils essentiels à leur compréhension. Les sections qui suivent sont grandement basées sur la théorie des formes quadratiques exposée dans [4], le lecteur est donc invité à consulter cet excellent ouvrage de Cassels sur les formes quadratiques rationelles afin d'obtenir plus de détails.

3.1.1 Le déterminant

Définition 18. *Le* ***déterminant*** *d'une forme quadratique est défini par le déterminant de la matrice de Gram qui lui est associée,*

$$Det(Q) = |B|.$$

Proposition 5. *Toutes formes quadratiques équivalentes possèdent le même déterminant.*

Démonstration. Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice inversible L telle que

$$B_1 = L^T B_2 L$$

où B_1 et B_2 sont les matrices de Gram de Q_1 et Q_2 respectivement. Conséquemment, on a

$$\begin{aligned} Det(Q_1) &= Det(B_1) \\ &= Det(L^T B_2 L) \\ &= Det(L)^2 Det(B_2) \\ &= Det(B_2), \end{aligned}$$

qui découle du fait que $Det(L) = \pm 1$. Ainsi, tel que désiré, on obtient

$$Det(Q_1) = Det(Q_2).$$

□

Ainsi, le déterminant est un invariant des différentes classes d'équivalence de formes quadratiques et fournit donc, entre autres, un premier outil de comparaison. En fait, le théorème suivant, originalement dû à Hermite, montre que le déterminant est caractéristique d'un nombre fini de classes d'équivalence ;

Théorème 3. *Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $d \neq 0$, il existe seulement un nombre fini de classes d'équivalence de formes quadratiques en n variables dont le déterminant est d.*

Remarque 11. *Le théorème ainsi que la preuve s'applique autant aux formes indéfinies (qui représentent des nombres positifs et négatifs) qu'aux formes définies positives. Nous ne la restreindrons donc pas aux formes définies positives par souci de complétude.*

Démonstration. La preuve du théorème découle du lemme suivant ;

Lemme 1. *Pour tout $n \geq 1$, il y a une constante C_n avec la propriété suivante :*

Soit Q une forme quadratique n-aire. Alors, il existe un élément $a \in \mathbb{Z}^n$ tel que $Q(a) \neq 0$ et

$$|Q(a)| \leq C_n |d|^{\frac{1}{n}},$$

où $d = det(Q)$ est le déterminant de Q.

On commence par démontrer que le Lemme 1 implique Théorème 3. Supposons donc que le Lemme 1 soit vrai et procédons par induction sur n, le cas $n = 1$ étant trivial. Sans perdre de généralité, on peut supposer que a est primitif, c'est-à-dire que $pgcd(a_1, ..., a_n) = 1$, puisque si $a = ca'$, alors $Q(a) = c^2 Q(a')$ et donc $|Q(a')| \leq |Q(a)|$. Posons

$$Q(a) = h,$$

alors, par l'hypothèse du Lemme 1, h est un élément différent de zéro compris dans un ensemble fini d'entiers qui dépend seulement de d et de n. Maintenant, puisque a est primitif, alors il y a une base pour $\mathbb{Z}^n$ composée de $a = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ et donc, par un changement de base approprié, Q est équivalent à une forme

$$Q'(x) = \sum_{i \leq j \leq n} c'_{ij} x_i x_j$$

telle que $c'_{11} = h$.

En complètant le carré, il s'ensuit que

$$hQ'(x) = (hx_1 + c'_{12}x_2 + ... + c'_{1n}x_n)^2 + g(x_2, ..., x_n) \tag{3.1}$$

pour une forme quadratique g en $n-1$ variables de déterminant $det(g) = h^{n-2}d$. Ainsi, par l'hypothèse d'induction, g est équivalente à une forme faisant partie d'un nombre fini de formes en $n-1$ variables et de déterminant $h^{n-2}d$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que g elle-même fait partie de cet ensemble fini.

Maintenant, en fixant $x_2, ..., x_n$, on effectue le changement de variables

$$x_1 \to x_1 + u_2 x_2 + ... + u_n x_n$$

où u_i est un entier, afin de s'assurer que $|c_{1j}| \leq |h|$ pour $j \leq n$. De cette façon, il s'ensuit que le côté droit de l'équation 3.1 fait partie d'un ensemble fini de formes dépendant seulement de d, n et h. Puisque par le Lemme 1, h est aussi borné, il en résulte que Q' fait partie d'un ensemble fini de formes en n variables et de déterminant d, ce qui prouve le théorème.

On doit donc maintenant démontrer le Lemme 1. Pour ce faire, nous démontrerons le lemme plus général suivant qui implique le Lemme 1.

Lemme 2. *Pour tous les entiers $r \geq 1$ et $s \geq 0$, avec $r + s = n$, il existe une constante k dépendant de r et s, avec la propriété suivante :*

Soit une forme quadratique Q n-aire équivalente sur $\mathbb{R}$ à

$$\xi_1^2 + ... + \xi_r^2 - \xi_{r+1}^2 - ... - \xi_{r+s}^2.$$

Alors il existe un élément $a \in \mathbb{Z}$ tel que

$$0 < Q(a) < k|d|^{\frac{1}{n}},$$

où $d = det(Q)$ et l'on peut choisir $k = 3^s \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Remarque 12. *Deux formes quadratiques sont équivalentes sur les réels s'il existe une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $Q_1(x) = Q_2(Ax)$. Sur les réels (ou tout autre corps), toute forme quadratique définie positive est équivalente à une forme diagonale.*

La preuve procède par induction sur n. Le cas $n = 1$ est clair, puisqu'il suffit d'utiliser $k = 1$. On suppose donc que $n > 1$ et on laisse M être la plus petite valeur strictement positive atteinte par la forme Q. On laisse a être un élément de $\mathbb{Z}^n$ telle que $M = Q(a)$. Notons que dans ce cas, a doit être primitif ($pgcd(a_1, ..., a_n) = 1$). Comme dans la preuve précédente, en prenant une forme équivalente, on peut supposer que

$$M = Q(1, 0, ..., 0).$$

Ainsi, en procèdant de la même façon que lors de la preuve du théorème, on a

$$MQ(x) = (Mx_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n)^2 + g(x_2, ..., x_n), \tag{3.2}$$

où g est une forme quadratique en $n-1$ variables et $det(g) = M^{n-2}d$.

On a maintenant deux cas possibles :

1. $r > 1$. Alors par hypothèse d'induction, on applique le lemme à la forme g avec $(r-1, s)$ plutôt que (r, s). Ainsi, il existe des entiers $b_2, ...b_n$ tels que

$$0 < g(b_2, ...b_n) \leq k_1|M^{n-2}d|^{\frac{1}{n-1}}, \tag{3.3}$$

où $k_1 = k(r-1, s)$.
On choisit un entier b_1 tel que

$$|(Mb_1 + c_{12}b_2 + ... + c_{1n}b_n)| \leq \frac{1}{2}M. \tag{3.4}$$

Il s'ensuit qu'avec $b = (b_1, ..., b_n)$, $Q(b) > 0$, et donc par minimalité de M, on doit avoir $Q(b) \geq M$. De l'autre côté, par 3.2, 3.3 et 3.4, on a

$$MQ(b) \leq \frac{1}{4}M^2 + k_1|M^{n-2}d|^{\frac{1}{n-1}}. \tag{3.5}$$

On déduit, à partir de 3.4 et 3.5, que

$$M^n \leq \left(\frac{4k_1}{3}\right)^{n-1} |d|$$

et par conséquent on obtient le résultat avec

$$k^n = \left(\frac{4k_1}{3}\right)^{n-1}$$

2. $r = 1$. En utilisant l'hypothèse d'induction, on applique le lemme à $-g$ avec $(s, 0)$ plutôt que r, s. Alors similairement, il existe des entiers $b_2, ..., b_n$ tels que

$$0 > g(b_2, ...b_n) \geq -k_2|M^{n-2}d|^{\frac{1}{n-1}}, \tag{3.6}$$

où $k_2 = k(s, 0)$.
On choisit b_1 de sorte à obtenir

$$\frac{1}{2}M \leq |(Mb_1 + c_{12}b_2 + ... + c_{1n}b_n| \leq M. \tag{3.7}$$

Ainsi, par 3.2, 3.6 et 3.7, on obtient

$$Q(b) < M$$

et donc, par minimalité (positive) de M, il s'ensuit que $Q(b) \leq 0$. Par conséquent, suivant l'argument du cas précédent, on obtient

$$M^n \leq (4k_2)^{n-1}|d|,$$

ce qui nous donne le résultat désiré en supposant que

$$k^n \leq (4k_2)^{n-1}.$$

Par induction, ceci complète la démonstration du lemme.

□

3.1.2 Nombres p-adiques et génus

Comme dans plusieurs autres cas lorsque l'on travaille avec les nombres entiers, l'une des stratégies pour mieux comprendre le comportement des formes quadratiques entières est d'utiliser la puissance du théorème des restes chinois et d'étudier les formes en les réduisant modulo p^α pour tous les nombres premiers p et nombre entier α.

Remarque 13. *Les réductions ci-haute sont habituellement décrites à l'aide des nombres p-adiques. En effet, puisque les entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$ peuvent être définis par la limite inverse $\varprojlim \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, le language des nombres p-adiques regroupe l'ensemble des réductions modulo p^α. (Toutefois, concrètement, ce sont tout de même les congruences prédédentes qui sont utilisées lors des calculs.)*

*On fait référence aux équivalences dans les nombres p-adiques comme étant des équivalences **locales**, alors que l'équivalence dans $\mathbb{Z}$ (ou dans $\mathbb{Q}$) est appelée **globale**.*

Cette méthode s'avère fructueuse dans le cas des formes quadratiques définies sur $\mathbb{Q}$, comme le montre le magnifique principe local-global de Hasse et Minkowski, que nous prenons ici le temps de mentionner.

Théorème 4. *Deux formes quadratiques sont équivalentes sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si elles sont équivalentes sur $\mathbb{Q}_p$ pour tout nombre premier p et sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 14. *Ici, $\mathbb{Q}_p$ dénote le corps des nombre p-adiques. (Obtenu entre autre par la complétion des entiers p-adiques par rapport à la valuation p-adique.)*

Malheureusement, ce théorème puissant ne peut être transféré au formes quadratiques définies sur $\mathbb{Z}$. Effectivement, bien que l'équivalence de formes sur $\mathbb{Z}$ implique l'équivalence sur $\mathbb{Z}_p$ pour tout p, le contraire est faux : deux formes quadratiques équivalentes sur $\mathbb{Z}_p$, pour tout p, et sur $\mathbb{R}$, ne sont pas nécessairement équivalentes sur $\mathbb{Z}$. On peut observer ce phénomène, par exemple, avec les formes $Q_1(x, y) = 2x^2 + 41y^2$ et $Q_2(x, y) = x^2 + 82y^2$ qui sont équivalentes localement et sur les réels, mais ne sont clairement pas équivalentes sur $\mathbb{Z}$ puisque Q_1 ne peut évidemment pas représenter 1, alors que $Q_2(1, 0) = 1$. Ainsi, puisque des formes équivalentes sur $\mathbb{Z}$ représentent les mêmes entiers, il s'ensuit que ces deux formes ne peuvent pas être équivalentes globalement. (Pour plus de détails, voir [4].)

Toutefois, cette méthode permet quand même d'obtenir de l'information sur les formes étudiées, notamment, elle permet d'effectuer une partition des formes quadratiques n-aires à l'aide des génus, que l'on définit maintenant.

Définition 19. *Les formes équivalentes sur $\mathbb{Z}_p$ pour chaque premier p, ainsi que sur les réels $\mathbb{R}$ forment un **génus**.*

Définition 20. *On dit qu'un nombre entier est **représenté par un génus**, s'il est représenté sur tout $\mathbb{Z}_p$ et sur $\mathbb{R}$ par une forme quadratique contenue dans le génus.*

Remarque 15. *On observe que la Proposition 5 implique que le nombre de classes de formes quadratiques dans un génus est fini.*

Les théorèmes suivants montrent qu'il est impossible de différencier les classes d'équivalence localement, c'est-à-dire de distinguer les différentes classes dans un génus, mais que l'on peut tout même obtenir des critères de différentiation.

Théorème 5. *Si Q_1 et Q_2 sont deux formes quadratiques n-aires dans le même génus, alors pour tout entier k, il existe une forme quadratique Q_2' qui est $\mathbb{Z}$-équivalente à Q_2 et telle que*

$$Q_2'(x) \equiv Q_1(x) \pmod{k}$$

pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$.

Théorème 6. *Soit Q_1 et Q_2, deux formes quadratiques entières de déterminant $D \neq 0$. Supposons qu'elles soient équivalentes sur les réels et que $B_{1(i,j)} \equiv B_{2(i,j)}$ mod $4D$ pour tous i, j, où B_1 et B_2 sont les matrices de Grams respectives. Alors Q_1 et Q_2 sont dans le même génus.*

Maintenant, l'étude des formes quadratiques par le biais du génus offre un outil intéressant quant au problème de la représentation des entiers. En effet, bien qu'il n'y ait pas d'équivalence entre les situations locales et globales, on peut tout de même obtenir de l'information sous la forme suivante.

Théorème 7. *Tout entier representé localement par un génus est représenté globalement par une forme contenue dans le même génus.*

En particulier, ce théorème implique que si une forme quadratique est seule dans son génus, alors elle représente globalement tous les entiers qu'elle représente localement. Ainsi, dans plusieurs cas, la question de représentabilité d'entiers par une forme quadratique se résume à la représentabilité locale de ces entiers. Finalement, le théorème suivant démontre que le principe local-global peut s'appliquer partiellement aux formes quadratiques entières en quatre variables et plus.

Théorème 8. *Soit Q, une forme quadratique définie positive n-aire, où $n \geq 4$. Alors il existe un entier N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, $Q(x) = N$ satisfait le principe local-global.*

Dans le cas des formes en 4 variables et plus, ce théorème donne une méthode afin de résoudre le problème de représentabilité des entiers par une forme quadratique. En effet, il est possible de déterminer explicitement la valeur de N_0 du théorème, puis de résoudre la représentatbilité localement à l'aide du théorème, pour enfin trouver manuellement les solutions pour la représentabilité des entiers $n < N_0$. Évidemment, les calculs ne sont pas toujours raisonnables et donc la technique s'avère souvent inefficace, mais dans plusieurs cas, elle permet d'obtenir des résultats satisfaisants, comme nous pourrons par ailleurs le constater dans le chapitre suivant.

3.2 Formes ternaires O-universelles

Avec ces quelques notions, nous prenons maintenant quelques lignes pour décrire les idées qui ont permises à Kaplansky d'établir sa liste de formes ternaires O-universelles. Pour les détails, le lecteur est redirigé vers [14].

Définition 21. *Une forme quadratique est dite* ***régulière*** *si elle représente tous les nombres représentés par son génus.*

Tel que mentionné plus tôt, Kaplansky démontra l'O-universalité de 19 des 23 candidats ternaires.(Il est bon de noter que la preuve implique une quantité considérable de calculs à la main et de simulation sur ordinateur.) Pour ce faire, il débuta par établir une liste restreinte de candidats potentiels en supposant que ces formes doivent représenter les petits entier impairs, soit 1,3,5,etc. Il obtint ainsi une liste finie de déterminants que ces formes peuvent posséder et testa toutes les formes correspondantes pour trouver celles qui représentent tous les impairs localement. Ceci lui permit d'obtenir une liste restreinte de formes quadratiques ternaires potentiellement O-universelles.

Il montra ensuite que 18 des 23 formes sont régulières, prouvant ainsi leur O-universalité. Pour 15 d'entre elles, cela découle seulement du fait qu'elles sont seules dans leur génus. Dans les 3 autres cas, chaque candidat Q_1 a une seule autre forme Q_2 dans son génus. Ainsi, par le théorème 7, si Q_2 ne représente pas un entier a, alors Q_1 doit le représenter. Par conséquent, en démontrant que tous les entiers représentés par Q_2 sont aussi représentés par Q_1, il obtint le résultat désiré. Afin de démontrer ce fait, il utilisa simplement de brillants changements de variables qui lui permirent de passer de la représentation de a par Q_2 pour arriver à une représentation de a par Q_1.

Finalement, il donna un argument spécial pour la 19ème forme, dont nous ommettrons la preuve ici (les arguments sont en majeur partie élémentaires). Nous rappelons que Jagy démontra qu'une vingtième forme parmi les candidats est O-universelle et que les trois formes restantes ont été prouvées O-universelles conditionnellement à l'hypothèse généralisé de Riemann par Rouse. La liste de Kaplansky se trouve en annexe C.

Chapitre 4

Le "Théorème des 15" et le "Théorème des 290"

En 1993, Conway et Schneeberger démontrèrent un résultat remarquable dans la théorie des formes quadratiques, soit le "Théorème des 15". Cependant, la preuve qu'ils fournirent était plutôt complexe et ne fût jamais publiée. En 2000, Bhargava [1] fournit une preuve considérablement simplifiée du théorème et en 2005, avec Jonathan Hanke [9], il démontra le "Théorème des 290", une conjecture de Conway qui s'applique aux formes quadratiques à coefficients entiers. (Alors que le "Théorème des 15" s'applique aux formes à matrices entières.) C'est en s'inspirant de ces théorèmes et de la preuve de Bhargava que nous avons entreprit le présent projet. Dans ce chapitre, nous prenons donc le temps de mentionner ces théorèmes et d'effectuer un survol des idées utilisées dans la preuve du "Théorème des 15". Nous discuterons ensuite des extensions obtenues par Bhargava à la suite de la preuve du théorème.

Remarque 16. *La preuve du "Théorème des 290" est en essence la même que celle du "Théorème des 15", bien qu'elle implique énormement de formes quadratiques à analyser et que la preuve de l'universalité des formes soit excessivement complexe dans certains cas.*

4.1 Les théorèmes

On commence par citer ces deux théorèmes exceptionnels.

Théorème 9. *Si une forme quadratique définie positive à matrice entière représente* *les 9 nombres critiques*

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14 \text{ \textit{et} } 15,$$

alors elle représente tous les entiers positifs.

Théorème 10. *Si une forme quadratique définie positive à coefficients entiers représente les 29 nombres critiques*

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 34, 35, 37, 42, 58, 93, 110, 145, 203 \text{ \textit{et} } 290$$

alors elle représente tous les entiers positifs.

Remarque 17. *Les nombres des listes précédentes sont appelés critiques dans le sens qu'il existe pour chacun d'eux une forme quadratique quaternaire qui ne le représente pas, mais représente tous les autres entiers.*

4.1.1 L'idée de la preuve du "Théorème des 15"

L'idée de base de la preuve de Bhargava est la suivante ; en utilisant le langage des réseaux, la caractéristique d'universalité d'une forme quadratique implique l'existence de vecteurs de normes 1,2,3... dans le réseau correspondant. Conséquemment, ce réseau doit contenir des sous-réseaux engendrés par ces vecteurs. On commence donc par considérer un sous-réseau engendré par un vecteur de norme 1 et on observe que ce sous-réseau ne peut contenir de vecteur de norme 2. Mais un réseau universel doit contenir un sous-réseau engendré pas des vecteurs de normes 1 et 2, on considère donc les sous-réseaux de dimension 2 pouvant être engendrés par de tels vecteurs. Puisque ces réseaux sont munis du produit scalaire Euclidien, ils doivent respecter l'inégalité de Cauchy-Schwartz et on obtient donc un nombre fini de réseaux potentiels.

Maintenant, en analysant chacun de ces réseaux, on trouve le plus petit entier n'étant pas représenté et puisqu'un réseau universel doit contenir des vecteurs de toutes normes, on engendre une fois de plus un réseau de dimension supérieure à l'aide d'un vecteur de norme manquante.

L'idée est donc de progresser de sous-réseaux en sous-réseaux de dimensions supérieures, en s'assurant que le réseau suivant contienne un vecteur dont la norme est la norme minimale manquante à l'étape précédente. Tout réseau universel devra contenir un tel sous-réseau, et par conséquent, on doit atteindre tous les réseaux universels en continuant à procéder de cette façon.

Il s'avère que la plupart des formes quadratiques quaternaires testées sont universelles (soit 201 sur les 207 généréees) et que toutes les (1630) formes quadratiques en

5 variables engendrées à partir des 6 formes quaternaires non-universelles sont universelles ! Ainsi, en collectant les normes des vecteurs utilisés pour générer les sous-réseaux à chaque étape, on obtient la liste désirée et le critère du "Théorème des 15".

4.1.2 Les preuves d'universalité

Il est connu qu'aucunes formes quadratiques binaires et ternaires ne sont universelles. Ainsi, les preuves pour l'universalité débute avec les formes quaternaires (c'est-à-dire les formes correspondantes aux sous-réseaux de dimension 4 engendrés par le procédé décrit ci-haut). En fait, la démonstration de l'universalité des formes quaternaires constitue le coeur du travail, puisque au cours de la preuve, on peut observer que toutes les formes quaternaires non-universelles représentent tous les entiers à l'exception d'un seul. Conséquemment, en introduisant un vecteur dont la norme correspond à celle manquante, on obtient automatiquement des réseaux de dimension 5 universels.

Dans cette section, nous soulignons quelques-unes des techniques utilisées par Bhargava pour prouver l'universalité des 201 formes quaternaires testées et donnons un exemple pour mieux illustrer la situation. Dans la plupart des cas, la démonstration procède de la même façon ; pour chacun des réseaux Λ_4 de dimension 4, on trouve un sous-réseau Λ_3 de dimension 3 qui représente un nombre important d'entiers. En général, ce sous-réseau est choisi de telle sorte qu'il est seul dans son génus et par conséquent, représente tous les entiers qu'il représente localement. Ensuite, à partir de ces informations, on montre que la somme direct de Λ_3 et de son complément orthogonal dans Λ_4 représente tous les entiers suffisament grands, soit tout $n \geq N$. Ainsi, pour montrer l'universalité de Λ_4 il ne reste qu'à démontrer qu'il représente tous les entiers $n < N$, ce qui est testé manuellement. On illustre maintenant ce procédé en suivant l'exemple donné pas Bhargava dans [1].

On considère la progression du sous-réseau de dimension 3 ayant comme matrice de Gram

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

vers un réseau de dimension 4, soit Λ_4. La forme quadratique correspondante étant seule dans son génus, un calcul local permet de déterminer que Λ_3 représente tous les entiers sauf ceux de la forme $4^e(8k+7)$, où e est un nombre entier. On laisse le complément orthogonal de Λ_3 dans Λ_4 avoir $[m] = vv^T$ en tant que matrice de Gram, où v est le vecteur générateur du complément orthogonal. Ainsi, on veut montrer que $\Lambda_3 \oplus [m]$ représente tous les entiers suffisament grands. Pour ce faire, supposons que Λ_4 ne soit pas universel et laissons u être le plus petit entier qui n'est pas représenté pas Λ_4. Puisque Λ_3 est un sous-réseau de Λ_4, il s'ensuit que Λ_3 ne peut pas représenter u et donc u doit être de la forme $4^e(8k+7)$. De plus, par minimalité, u n'est pas divisible par un carré puisque si $u = t^2 r$, alors $r = \frac{u}{t^2}$ ne peut pas être représenté (sinon $Q(x) = r$ implique que $Q(tx) = t^2 r = u$, ce qui contredit la minimalité de u.) De ce fait, on doit avoir $e = 0$ et donc $u = (8k+7)$, c'est-à-dire que $u \equiv 7 \pmod 8$.

Maintenant, si $m \not\equiv 0, 3, 7 \pmod 8$, alors par de simples calculs et par des considérations de congruence modulo 8, $u - m$ ne peux pas être de la forme $4^e(8k+7)$. On en déduit que $u - m$ est représenté par Λ_3, mais puisque m est représenté par le complément orthogonal de Λ_3 dans Λ_4, alors u doit être représenté par Λ_3, contredisant l'hypothèse de départ. De façon semblable, si $m \equiv 3, 7 \; mod \; 8$, alors $u - 4m$ est congru à 3 modulo 8 et ne peut donc être de la forme $4^e(8k+7)$. Ainsi, $u - 4m$ est représenté par Λ_3 ce qui implique encore une fois que u est aussi représenté par Λ_3 par sensiblement le même argument. Il s'ensuit donc que si $m \not\equiv 0 \; mod \; 8$, alors tout entier $n \geq 4m$ est représenté par Λ_4. Les calculs montrent que dans le cas présent, m n'excède jamais 28 et par simulation sur ordinateur, on montre que Λ_4 représente tous les entiers jusqu'à $4 \times 28 = 112$. Ceci prouve l'universalité de tous les réseaux de dimension 4 engendrés à partir de Λ_3 lorsque $m \not\equiv 0$. Les cas où $m \equiv 0 \; mod \; 8$ ne sont pas nombreux et on les traite de façon semblable, en changeant notamment de sous-réseau Λ_3. Nous ommettrons ce cas, puisque les cas précédents suffisent à illustrer les techniques utilisées par Bhargava afin de démontrer l'universalité des formes quadratiques quaternaires.

4.1.3 Extensions du "Théorème des 15"

On termine ce chapitre en citant un autre magnifique théorème de Bhargava qui généralise l'idée du "Théorème des 15" et montre qu'il ne s'agit pas d'une coïncidence isolée.

Théorème 11. *Soit S, un ensemble quelconque de nombres entiers non-négatif. Il existe un unique sous-ensemble fini $T \subseteq S$, possèdant les propriétés suivantes :*

1. *Une forme quadratique à matrice entière représente tous les entiers contenus dans S si et seulement si elle représente tous les entiers contenus dans T,*
2. *Si T' satisfait aussi condition (1), alors $T \subseteq T'$.*

Chapitre 5

Les résultats

Dans l'optique de fournir un critère semblable à celui du "Théorème des 15" pour le cas spécial des formes quadratiques ternaires (entières et définies positives), les deux théorèmes suivants fournissent une liste de nombres entiers qui, lorsque représentée complètement par une forme ternaire, en implique l'O-universalité. Le problème est traité en deux cas ; celui, plus simple, des formes quadratiques à matrices entières, puis celui des formes à valeurs entières. Les résultats découlent de calculs effectués au moyen du logiciel SAGE. Les algorithmes utilisés se trouvent à l'annexe A et les résultats numériques à l'annexe B. La liste complète des 23 formes O-universelles de Kaplansky se trouve à l'annexe C.

5.1 Préliminaires

À partir de la liste de Kaplansky, nous savons que les seules formes quadratiques ternaires à matrices entières qui sont O-universelles sont

1. $x^2 + y^2 + 2z^2$
2. $x^2 + 2y^2 + 3z^2$
3. $x^2 + 2y^2 + 4z^2$
4. $x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz$
5. $x^2 + 2y^2 + 5z^2$.

Par conséquent, en générant une liste finie de formes quadratiques potentiellement O-universelles, nous pourrons la comparer avec la liste de Kaplansky et ainsi déterminer celles qui sont O-universelles et celles qui ne le sont pas. En recueillant les plus petits entiers non-représentés par les formes qui ne sont pas O-universelles, que nous appelerons des **truands**, nous obtiendrons les nombres qui formeront le critère recherché. Puisque les formes quadratiques sont en bijection avec les réseaux avec norme entière, dans ce qui suit, nous considérerons régulièrement les formes quadratiques en tant que normes sur ces réseaux et utiliserons davantage le langage des réseaux.

On commence par donner la définition suivante, qui nous sera utile pour la preuve des théorèmes.

Définition 22. *Dans un réseau Λ, un système de minima successifs $\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$, est un système de vecteurs que répond aux deux conditions :*

1. *λ_1 est un vecteur de plus petite norme de Λ,*
2. *λ_i est un vecteur de plus petite norme étant linéairement indépendant au système $\{\lambda_j : 1 \leq j < i\}$.*

Le lemme suivant nous permettra de borner les coefficients des formes quadratiques potentiellement universelles.

Lemme 3. *Soit un réseau Λ de dimension $n \leq 4$, alors tout système de minima successifs forme une base pour Λ.*

On prend aussi le temps de démontrer un lemme simple qui nous sera utile dans les sections suivantes.

Lemme 4. *Pour chaque dimension n, il existe un nombre fini de réseaux non-équivalents engendrés par des vecteurs $\{e_i\}_{i=1}^n$ dont les normes sont prescrites et les coefficients non-diagonaux a_{ij} $(i \neq j)$ des matrices de Gram correspondantes satisfont la borne $|a_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$.*

Démonstration. De façon générale, une forme quadratique définit sur le réseaux associé un produit scalaire, celui-ci étant décrit par la matrice de Gram du réseau (ou de la forme). Ainsi, étant donnée une base $e = \{e_i\}_{i=1}^n$ pour un tel réseau, on obtient la matrice de Gram $A = [a_{ij}]$, où $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Comme pour tout produit scalaire, l'inégalité de Cauchy-Schartz doit être respectée et donc, on doit avoir $\langle e_i, e_j \rangle \leq \|e_i\|\|e_j\|$, où $\|e_i\|^2 = \langle e_i, e_i \rangle = a_{ii}$. Conséquemment, en fixant les normes que possèdent les vecteurs d'une base du réseau, on obtient une borne sur les coefficients de la matrice de Gram, soit $a_{ij} \leq \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$, et donc une liste finie de réseaux possibles. □

Rappelons que la relation entre les coefficients de la matrice de Gram et les coefficients de la forme quadratique associée est donnée par $\langle e_i, e_j \rangle = \frac{c_{ij}}{2}$

5.2 Critère d'O-universalité pour les formes à matrices entières

Théorème 12. *Si une forme quadratique ternaire à matrice entière représente les 6 entiers suivants,*

$$1, 3, 5, 7, 11 \text{ et } 15,$$

alors elle est O-universelle.

Démonstration. Suppposons que la forme quadratique ternaire $Q(x, y, z)$ et le réseau Λ_Q qui lui est associé soient O-universels. Alors pour chaque nombre impair $k = 1, 3, 5, 7, ...$, il existe un vecteur de norme k dans Λ_Q. Puisque Λ_Q est de dimension 3, tout système de minima successifs forme une base pour Λ_Q.

Comme Λ_Q contient un vecteur de norme 1 et qu'il s'agit de la plus petite norme possible, on peut construire une base de minima successifs en commençant par un vecteur de norme 1, soit λ_1. Maintenant, λ_1 engendre un sous-réseau dont la forme quadratique correspondante est x^2. Ainsi, on constate qu'un tel réseau ne peut pas engendrer de vecteurs de norme 3 et comme Λ_Q contient un vecteur de norme 3, il existe une vecteur λ_2 tel que $b = |\lambda_2|^2 \leq 3$ et qui est linéairement indépendant à λ_1. Les vecteurs λ_1 et λ_2 engendrent donc un sous-réseau ayant une matrice de Gram de la forme

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & d \\ d & b \end{pmatrix},$$

où $b \leq 3$.

Par le Lemme 4, il existe une borne sur les valeurs de d possibles, soit $|d| \leq \sqrt{3}$ et par conséquent, $d \in \{-1, 0, 1\}$. On obtient ainsi, par simple élimination de Gauss, trois réseaux non-équivalents, soit

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, à A_2, A_2' et $\tilde{A}_2$ correspondent les formes quadratiques x^2+y^2, x^2+2y^2 et x^2+3y^2 respectivement. Puisque la première ne représente pas 3, et que la seconde et la troisième ne représentent toutes deux pas 5, on en conclut qu'il existe un vecteur λ_3 tel que $|\lambda_3|^2 \leq 5$ et que $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ forme une base de minima successifs pour Λ_Q.

Conséquemment, si un réseau en 3 dimensions avec matrice de Gram

$$A_3 = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix},$$

est O-universel, alors il possède une base de minima successifs telle que $a = |\lambda_1|^2 = 1$, $b = |\lambda_2|^2 \leq 3$ et $c = |\lambda_3|^2 \leq 5$. On sait déjà que dans chaque cas $d = 0$ et en utilisant le Lemme 4, on obtient les bornes $|e| \leq \sqrt{ac}$ et $|f| \leq \sqrt{bc}$. On note que puisque $d = 0$, on peut supposer que e et f sont non-négatifs, car en posant $z' = -z$ et soit $x' = -x$ ou $y' = -y$ (ou les deux), on observe que les formes ci-hautes sont équivalentes aux formes avec coefficients $-e$ ou $-f$ (ou les deux). On a donc les bornes $0 \leq e \leq 2$ et $0 \leq f \leq 3$ et on considère tous les réseaux dont les coefficients de la matrice de Gram satisfont les conditions établies.

Ainsi, si une réseau représente 1,3 et 5, il doit se trouver parmi les réseaux considérés. En comparant les formes quadratiques associées à chacun de ces réseaux avec la liste de Kaplansky, on constate que chacune des formes sur la liste de Kaplansky se retrouve effectivement parmi les formes obtenues et il ne reste donc qu'à trouver les plus petits entiers qui ne sont pas représentés par les formes restantes. Par calculs (par ordinateur), on obtient que les plus petits entiers non-réprésentés par les formes restantes sont 5,7,11 et 15. Afin d'illustrer les méthodes utilisées, nous donnons maintenant un exemple et déterminons le truand de

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2yz.$$

On commence par dériver les valeurs qui nous servirons à borner les variables x, y et z lors des tests. On veut donc savoir pour qu'elles valeurs de x, y, et z l'on peut avoir

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = n$$

pour un entier n donné. Puisque les formes qui nous intéressent sont O-universelles, en considérant le cas $n = 1$, par le Lemme 3 on peut supposer que $a = \langle e_1, e_1 \rangle = 1$. Nous posons donc $a = 1$ pour la suite des calculs.

On observe que l'égalité 5.2 est respectée pour x, y, z dans les entiers, alors en particulier, elle est respectée dans les réels. Ainsi, il suffit de diagonaliser la forme afin de borner les variables en fonction des coefficients. En effectuant un complétion de carrés, on a donc

$$\left(x+\frac{d}{2}y+\frac{e}{2}z\right)^2+\left(b-\frac{d^2}{4}\right)y^2+\left(c-\frac{e^2}{4}\right)z^2+(f-\frac{de}{2})yz=n$$

$$\left(x+\frac{d}{2}y+\frac{e}{2}z\right)^2+\left(b-\frac{d^2}{4}\right)\left(y+\left(\frac{f-\frac{de}{2}}{2\left(b-\frac{d^2}{4}\right)}\right)z\right)^2+\left(c-\frac{e^2}{4}-\frac{\left(f-\frac{de}{2}\right)^2}{4b-d^2}\right)z^2=n.$$

Puisque qu'aucun des termes de la somme ne peut excéder n, en posant

$$\alpha=c-\frac{e^2}{4}-\frac{\left(f-\frac{de}{2}\right)^2}{4b-d^2}$$

$$\beta=\sqrt{b-\frac{d^2}{4}}$$

$$\gamma=\frac{f-\frac{de}{2}}{2\beta},$$

on obtient

$$-\sqrt{\frac{n}{\alpha}}\leq z\leq\sqrt{\frac{n}{\alpha}} \tag{5.1}$$

$$\frac{-\sqrt{n}-\gamma z}{\beta}\leq y\leq\frac{\sqrt{n}-\gamma z}{\beta} \tag{5.2}$$

$$-\sqrt{n}-\frac{d}{2}y-\frac{e}{2}z\leq x\leq\sqrt{n}-\frac{d}{2}y-\frac{e}{2}z. \tag{5.3}$$

Maintenant, on trouve facilement que $Q(1,0,0)=1$, $Q(1,1,0)=3$ et $Q(1,0,1)=5$. Toutefois, avec $n=7$, on a recourt à 5.1, 5.2 et 5.3 afin de borner les valeurs pouvant être prises par x,y et z. On a $\alpha=4-\frac{2^2}{4\times 2}=\frac{7}{2}$, $\beta=\sqrt{2}$ et$\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$, et donc, il suffit de tester les valeurs prises pas $Q(x,y,z)$ lorsque $-\sqrt{2}\leq z\leq\sqrt{2}$, $y\leq\sqrt{14}-2z$ et $x\leq\sqrt{7}$. Notons qu'il est suffisant de laisser z prendre des valeurs négatives puisque $Q(-x,y,z) = Q(x,y,z)$ et $Q(x,-y,z) = Q(x,y,-z)$. En testant pour tous les triplets (x,y,z) possibles, il s'avère qu'aucun ne satisfait l'équation $Q(x,y,z) = 7$, d'où il découle que le truand de Q est 7. Toutes les formes générées ont été traitées de façon similaire et il en résulte que la liste des truands des formes non-O-universelles engendrées est 5,7,11 et 15.

En résumé, si une forme quadratique ternaire (définie positive) à matrice entière représente 1,3 et 5, elle doit être équivalente à l'une des formes considérées plus tôt, et si elle représente 7,11,et 15, alors elle ne peut être l'une des formes qui n'est pas sur la liste de Kaplansky. On en déduit donc que cette forme doit être équivalente à l'une des formes ternaires O-universelles.

Ainsi, si une forme quadratique ternaire à matrice entière représente 1,3,5,7,11 et 15, alors elle O-universelle. □

5.3 Critère d'O-universalité pour les formes à coefficients entiers

Dans la continuité du théorème précédent, nous avons

Théorème 13. *Supposons que la liste de candidats O-universels soit exacte. Si une forme quadratique ternaire à valeurs entières représente les 16 nombres suivants*

$$1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 29, 31, 35, 41 \textit{ et } 77,$$

alors elle est O-universelle.

Démonstration. La preuve du théorème suit la même ligne directrice que celle du théorème 12. Toutefois, plutôt que d'utiliser la matrice de Gram associée à une forme quadratique (ou réseau), nous utiliserons sa matrice Hessienne, soit $2A$, afin de travailler avec des matrices à coefficients entiers. On commence donc la démonstration de la même façon.

Suppposons que la forme quadratique ternaire, $Q(x,y,z)$ et Λ_Q, le réseau qui lui est associé, soient O-universels. Alors pour chaque nombre impair $k = 1, 3, 5, 7, ...$, il existe un vecteur de norme k dans Λ_Q. Puisque Λ_Q est de dimension 3, tout système de minima successifs forme une base pour Λ_Q.

Puisque Λ_Q contient un vecteur de norme 1 et qu'il s'agit de la plus petite norme possible, on peut construire une base de minima successifs en commençant par un vecteur de norme 1, λ_1. Maintenant, λ_1 engendre un sous-réseau dont la forme quadratique correspondante est x^2. Ainsi, on constate qu'un tel réseau ne peut engendrer de vecteurs de norme 3 et comme Λ_Q contient un vecteur de norme 3, il existe une vecteur λ_2 linéairement indépendant à λ_1 tel que $b = |\lambda_2|^2 \leq 3$. λ_1 et λ_2 engendrent ainsi un sous-réseau ayant une matrice Hessienne de la forme

$$H_2 = \begin{pmatrix} 2 & d \\ d & 2b \end{pmatrix},$$

où $b \leq 3$. (Notons qu'ici $d = 2 < \lambda_1, \lambda_2 >$)

Encore une fois, par le Lemme 4, on a $|d| \leq 2\sqrt{b}$, et puisque $b \leq 3$ on a $|d| \leq 3$. Aussi, on peut supposer que $d \geq 0$ puiqu'en posant $x' = -x$, on constate que les formes avec coefficients d et $-d$ sont équivalentes et donc, $d \in \{0, 1, 2, 3\}$. En considérant seulement les formes définies positives et en effectuant une simple élimination de Gauss, on obtient ainsi 6 sous-réseaux non-équivalents, soit les réseaux correspondants aux matrices Hessiennes

$$H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, H_2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \hat{H}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \dot{H}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \ddot{H}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Puisque le premier sous-réseau ne représente pas 3, que les quatre suivants ne représentent pas 5 et que le dernier ne représente pas 7, alors Λ_Q doit contenir un vecteur λ_3 linéairement indépendant à $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ de norme inférieure ou égale à 7 et qui complète $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ pour former une base de minima successifs. Ainsi, en considérant tous les réseaux satisfaisants $a = |\lambda_1|^2 = 1$, $b = |\lambda_2|^2 \leq 3$ et $c = |\lambda_3|^2 \leq 7$, on obtient tous les réseaux pouvant potentiellement représenter 1,3,5 et 7.

Remarque 18. *Il est clair que la borne pour λ_3 n'est pas optimale, un traitement cas-par-cas donnant de meilleures bornes, mais puisque les calculs ont été effectués par ordinateur, nous avons choisi cette borne afin d'obtenir un algorithme plus uniforme.*

On a ainsi des réseaux ayant des matrices Hessiennes de la forme

$$H_3 = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix},$$

où $a = 1$, $b \leq 3$, $c \leq 7$, $0 \leq d \leq 1$ et par le Lemme 4, $|e| \leq 2\sqrt{ac}$ et $f \leq 2\sqrt{bc}$.

On remarque comme précedemment que si $d = 0$, alors on peut supposer que e et f sont non-négatifs. Dans le cas contraire, comme par exemple dans le cas de $\hat{H}_3$, il suffit de considérer seulement que l'un des coefficients des termes croisés prend des valeurs négatives. En prenant par exemple $\hat{e}$ comme étant le coefficient en question, il s'ensuit que l'argument pour le cas $d = 0$ s'applique (avec un simple changement de variable) et on peut supposer que $\hat{f}$ est non-négatif.

Maintenant, en comparant avec la liste de Kaplansky toutes les formes quadratiques associées aux réseaux considérés , il en ressort que chacune des formes 23 O-universelles de la liste se retrouve bel et bien parmi les formes obtenues. Ainsi en collectant les plus petits entiers n'étant pas représentés par les formes restantes, en procédant de la même façon que dans l'exemple du théorème précédent, on obtient la liste d'entiers 1,3,5,7,11,13,15,17,19,21,23,29,31,35,41 et 77.

Par conséquent, si une forme représente 1,3,5, et 7, elle doit se trouver parmi les formes considérées et si elle représente le reste de la liste de nombres ci-haute, elle ne peut pas être l'une des formes non-O-universelles. Elle doit donc être O-universelle.

On a donc que si une forme quadratique ternaire (définie positive) représente 1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 29, 31, 35, 41 et 77, alors elle est O-universelle.

$\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, suite à une introduction sur les formes quadratiques et les outils qui permettent de les étudier, nous avons fourni deux critères permettants de déterminer si une forme quadratique ternaire donnée représente tous les nombres impairs. Pour se faire, nous nous sommes inspirés de la preuve du "Théoreme des 15" donnée par Bhargava et à l'aide de la correspondance entre les réseaux et les formes quadratiques, nous avons été en mesure d'établir une liste d'entiers impairs qui, lorsque représentée par une forme quadratique en gatantit l'O-universalité.

Le travail de Bhargava démontre que pour tout sous-ensemble des entiers, il est possible de déterminer un tel critère, soit une liste finie d'entiers qui permet de conlure que la totalité du sous-ensemble étudié est représentée. Ainsi, il serait intéressant de reproduire la procédure utilisée dans ce projet et de rechercher les listes correspondantes pour différents sous-ensembles des entiers, par exemple les nombres qui sont des cubes ou encore les nombres puissants. Toutefois, il semble que la complexité de telles entreprises augmente rapidement à mesure que la densité des sous-ensembles étudiés diminue. Nous croyons donc que cela demanderait un travail considérable et c'est pourquoi nous reléguons cette idée à un projet futur qui nous donnera peut-être d'autres magnifiques théorèmes où se mêlent simplicité et élégance.

Bibliographie

[1] Manjul Bhargava. On the Conway-Schneeberger fifteen theorem. In *Quadratic forms and their applications (Dublin, 1999)*, volume 272 of *Contemp. Math.*, pages 27–37. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[2] Johannes Buchmann and Ulrich Vollmer. *Binary quadratic forms*, volume 20 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007. An algorithmic approach.

[3] Duncan A. Buell. *Binary quadratic forms*. Springer-Verlag, New York, 1989. Classical theory and modern computations.

[4] J. W. S. Cassels. *Rational quadratic forms*, volume 13 of *London Mathematical Society Monographs*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1978.

[5] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*, volume 290 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1999. With additional contributions by E. Bannai, R. E. Borcherds, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov.

[6] William Duke. Some old problems and new results about quadratic forms. *Notices Amer. Math. Soc.*, 44(2) :190–196, 1997.

[7] Andrew Granville. Binary quadratic forms. Lecture notes on prime numbers.

[8] Jonathan Hanke. Some recent results about (ternary) quadratic forms. In *Number theory*, volume 36 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 147–164. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[9] Jonathan Hanke and Manjul Bhargava. Universal quadratic forms and the 290-theorem. Preprint.

[10] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles.

[11] W. C. Jagy. Integral Positive Ternary Quadratic Forms. *ArXiv e-prints*, October 2010.

[12] William C. Jagy, Irving Kaplansky, and Alexander Schiemann. There are 913 regular ternary forms. *Mathematika*, 44(2) :332–341, 1997.

[13] Ernst Kani. Lattices and quadratic modules. Lecture notes on Elliptic curves and modular forms.

[14] Irving Kaplansky. Ternary positive quadratic forms that represent all odd positive integers. *Acta Arith.*, 70(3) :209–214, 1995.

[15] J. Rouse. Quadratic forms representing all odd positive integers. *ArXiv e-prints*, November 2011.

[16] Alexander Schiemann. Ternary positive definite quadratic forms are determined by their theta series. *Math. Ann.*, 308(3) :507–517, 1997.

[17] William Alan Schneeberger. *Arithmetic and geometry of integral lattices*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1997. Thesis (Ph.D.)–Princeton University.

[18] Rainer Schulze-Pillot. Representation by integral quadratic forms—a survey. In *Algebraic and arithmetic theory of quadratic forms*, volume 344 of *Contemp. Math.*, pages 303–321. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[19] Igor Semaev. A 3-dimensional lattice reduction algorithm. In *Cryptography and lattices (Providence, RI, 2001)*, volume 2146 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 181–193. Springer, Berlin, 2001.

[20] J.-P. Serre. *A course in arithmetic*. Springer-Verlag, New York, 1973. Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7.

[21] Brigitte Vallée. An affine point of view on minima finding in integer lattices of lower dimensions. In *EUROCAL '87 (Leipzig, 1987)*, volume 378 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 376–378. Springer, Berlin, 1989.

Annexe A

Les algorithmes

Dans cet annexe, on illustre la procédure utilisée pour obtenir les listes servant de critères d'O-universalité. Dans les deux cas, soit dans le cas des formes à matrices entières et le cas des formes à valeurs entières, les algorithmes utilisés sont pratiquement identiques, à l'exception des bornes sur les coefficients qui sont ajustées en fonction des résultats du chapitre 5. On donne ici comme exemple les algorithmes pour les formes à matrices entières.

Le premier algorithme génère toutes les formes quadratiques ternaires dont les coefficients respectent les bornes obtenues au chapitre 5. Pour chaque nouvelle forme engendrée, il s'assure ensuite qu'elle soit définie positive et vérifie si elle est équivalente à une forme déjà générée afin de garder un minimum de candidats et de réduire la recherche de truands. Ensuite, pour chaque $n < 200$, le second algorithme teste toutes les valeurs possible pour x, y et z en utilisant les bornes établies ci-haut afin de trouver un truand. (Si aucun truand n'était détecté pour une forme en particulier, cette forme était comparée manuellement aux formes de la liste de Kaplansky afin d'en déterminer l'O-universalité.)

Algorithme 1 : Liste des formes ternaires

Input : Bornes pour les coefficients

Output : Liste des formes quadratiques ternaires potentiellement O-universelles

```
Génération des formes quadratiques;
a = 1;
for b in range(1,4) do
    for c in range(1,8) do
        for d in range(−2 ∗ sqrt(a ∗ b), 2 ∗ sqrt(a ∗ b) + 1) do
            for e in range(2 ∗ sqrt(a ∗ c) + 1) do
                for f in range (2 ∗ sqrt(b ∗ c) + 1) do
                    Q = Forme Quadratique ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz ;
                    q = Réduction LLL de Q ;
                    Vérification que les formes sont définies positives et
                    l'équivalence des formes générées;
                    if q est définie positive then
                        for Toutes les formes q' déjà générées do
                            if Det(q) = Det(q') then
                                if q = q' then
                                    break
                        Comparaison avec les formes O-universelles de Kaplansky;
                    else
                        for Toutes les formes q' de Kaplansky do
                            if Det(q) = Det(q') then
                                if q = q' then
                                    break
                            else
                                Ajouter q à la liste L des formes ternaires
                                potentielles
```

Algorithme 2 : Liste des truands

Input : Liste L des formes ternaires potentielles

Output : Liste des truands associés à chaque forme

```
Recherche des truands;
for Q in L do
    r1 = c − (e^2)/4 − ((f − d ∗ e/2)^2)/(4 ∗ b − d^2);
    r2 = sqrt(b − (d^2)/4);
    r3 = (f − d ∗ e/2)/(2 ∗ r2);
    while m < 100 do
        n = 2 ∗ m + 1;
        Recherche d'un vecteur (x, y, z) tel que Q(x, y, x) = n;
        for z in range(−sqrt(n/r1), sqrt(n/r1) + 1) do
            if z < 0 then
                w1 = 0
            else
                w1 = (−sqrt(n) − r3 ∗ z)/r2
            w2 = (sqrt(n) − r3 ∗ z)/r2;
            for y in range(w1, w2 + 1) do
                if y < 0 or z < 0 then
                    w3 = 0
                else
                    w3 = −sqrt(n) − d ∗ y/2 − e ∗ z/2
                w4 = sqrt(n) − d ∗ y/2 − e ∗ z/2;
                for x in range(w3, w4 + 1) do
                    t = [x, y, z];
                    if Q(t) = n then
                        break
                    else
                        Truand = n;
                        break
```

Annexe B

Formes quadratiques potentielles et truands

Dans cet annexe se trouvent toutes les formes obtenues par l'algorithme 1 de l'annexe A et les truands t correspondants au formes non-universelles, obtenus au moyen du deuxième algorithme. Les matrices de Gram des forme obtenues sont numérotées selon l'itération de l'algorithme à laquelle elles ont été générées, et le truand associé à chaque forme est numéroté de la même façon. Il est à noter que l'algorithme 1 n'étant pas optimal, il ne détecte pas toutes les équivalences entres les formes générées. Par conséquent, il est possible que plusieurs formes dans la liste suivante soient équivalentes, mais comme la seule chose qui nous importe sont les truands et que deux formes équivalentes ont le même truand, cela n'affecte en rien les résultats (le processus de calcul est seulement plus long).

```
1
[1 0 0]
[0 2 0]
[0 0 2]
det = 32

6
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 1]
det = 8

30
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 3]
det = 24

47
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 4]
det = 32

74
[1 0 0]
[0 1 0]
[0 0 5]
det = 40

111
[1 0 0]
[0 2 1]
[0 1 2]
det = 24

129
[1 0 0]
[0 2 1]
[0 1 3]
det = 40

150
[1 0 0]
[0 2 1]
[0 1 4]
det = 56

179
[1 0 0]
[0 2 0]
[0 0 5]
det = 80

180
[1 0 0]
[0 2 1]
[0 1 5]
det = 72

222
[ 1  0  0]
[ 0  2 -1]
[ 0 -1  3]
det = 40

241
[1 0 0]
[0 3 0]
[0 0 3]
det = 72

253
[ 1  0  0]
[ 0  2 -1]
[ 0 -1  2]
det = 24

269
[1 0 0]
[0 3 0]
[0 0 4]
det = 96

270
[1 0 0]
[0 3 1]
[0 1 4]
det = 88

271
[ 1  0  0]
[ 0  3 -1]
[ 0 -1  3]
det = 64

305
[1 0 0]
[0 3 0]
[0 0 5]
det = 120

307
[ 1  0  0]
[ 0  3 -1]
[ 0 -1  4]
det = 88

321
[ 1  0  0]
[ 0  2 -1]
[ 0 -1  4]
det = 56
```

```
6
t = 7

30
t = 15

47
t = 3

74
t = 3

111
t = 5

129
t = 5

150
t = 7

179
t = 15

180
t = 7

222
t = 5

241
t = 5

253
t = 5

269
t = 15

270
t = 11

305

t = 11

307
t = 11

321
t = 7
```

```
1
[2 1 0]
[1 2 0]
[0 0 2]
det = 6

11
[ 2 -1  0]
[-1  2  0]
[ 0  0  2]
det = 6

12
[ 2 -1  1]
[-1  2 -1]
[ 1 -1  2]
det = 4

14
[ 2 -1  1]
[-1  2  0]
[ 1  0  2]
det = 4

20
[2 0 0]
[0 2 0]
[0 0 2]
det = 8

21
[2 0 0]
[0 2 1]
[0 1 2]
det = 6

24
[2 1 1]
[1 2 1]
[1 1 2]
det = 4

30
[ 2  1 -1]
[ 1  2 -1]
[-1 -1  2]
det = 4

56
[ 2 -1  0]
[-1  2  0]
[ 0  0  4]
det = 12

57
[ 2 -1  1]
[-1  2 -1]
[ 1 -1  4]
det = 10

59
[ 2 -1  1]
[-1  2  0]
[ 1  0  4]
det = 10
66
[2 0 0]
[0 2 1]
[0 1 4]
det = 14

68
[2 0 1]
[0 2 0]
[1 0 4]
det = 14

69
[2 0 1]
[0 2 1]
[1 1 4]
det = 12

75
[ 2  1 -1]
[ 1  2 -1]
[-1 -1  4]
det = 10

76
[ 2  1 -1]
[ 1  2  0]
[-1  0  2]
det = 4

77
[2 1 1]
[1 2 0]
[1 0 4]
det = 10

78
[2 1 1]
[1 2 1]
[1 1 4]
det = 10

108
[ 2 -1  0]
[-1  2  0]
[ 0  0  6]
det = 18

109
[ 2 -1  1]
[-1  2 -1]
[ 1 -1  6]
det = 16

112
[ 2 -1  1]
[-1  2  0]
[ 1  0  6]
det = 16

124
[2 0 0]
[0 2 0]
[0 0 6]
det = 24

125
[2 0 0]
[0 2 1]
[0 1 6]
det = 22

128
[2 0 1]
[0 2 0]
[1 0 6]
det = 22

129
[2 0 1]
[0 2 1]
[1 1 6]
det = 20

140
[2 1 0]
[1 2 0]
[0 0 6]
det = 18

142
[ 2  1 -1]
[ 1  2  0]
[-1  0  4]
det = 10

145
[2 1 1]
[1 2 1]
[1 1 6]
det = 16

197
[ 2 -1  0]
[-1  2  0]
[ 0  0  8]
det = 24

198
[ 2 -1  1]
[-1  2 -1]
[ 1 -1  8]
det = 22

202
[ 2 -1  1]
[-1  2  0]
[ 1  0  8]
det = 22

222
[2 0 0]
[0 2 0]
[0 0 8]
det = 32

223
[2 0 0]
[0 2 1]
[0 1 8]
det = 30

227
[2 0 1]
[0 2 0]
[1 0 8]
det = 30

228
[2 0 1]
[0 2 1]
[1 1 8]
det = 28

247
[2 1 0]
[1 2 0]
[0 0 8]
det = 24
```

```
248
[ 2  1 -1]
[ 1  2 -1]
[-1 -1  8]
det = 22

249
[ 2  1 -1]
[ 1  2  0]
[-1  0  6]
det = 16

252
[2 1 1]
[1 2 0]
[1 0 8]
det = 22

253
[2 1 1]
[1 2 1]
[1 1 8]
det = 22

322
[ 2 -1  0]
[-1  2  0]
[ 0  0 10]
det = 30

323
[ 2 -1  1]
[-1  2 -1]
[ 1 -1 10]
det = 28

327
[ 2 -1  1]
[-1  2  0]
[ 1  0 10]
det = 28

338
[ 2 -1 -1]
[-1  2  0]
[-1  0  2]
det = 4

347
[ 2  0  0]
[ 0  2  0]
[ 0  0 10]
det = 40

348
[ 2  0  0]
[ 0  2  1]
[ 0  1 10]
det = 38

352
[ 2  0  1]
[ 0  2  0]
[ 1  0 10]
det = 38

353
[ 2  0  1]
[ 0  2  1]
[ 1  1 10]
det = 36

372
[ 2  1  0]
[ 1  2  0]
[ 0  0 10]
det = 30

373
[ 2  1 -1]
[ 1  2 -1]
[-1 -1 10]
det = 28

374
[ 2  1 -1]
[ 1  2  0]
[-1  0  8]
det = 22

378
[ 2  1  1]
[ 1  2  1]
[ 1  1 10]
det = 28

447
[ 2 -1  0]
[-1  2  0]
[ 0  0 12]
det = 36

448
[ 2 -1  1]
[-1  2 -1]
[ 1 -1 12]
det = 34

452
[ 2 -1  1]
[-1  2  0]
[ 1  0 12]
det = 34

463
[ 2 -1 -1]
[-1  2  0]
[-1  0  4]
det = 10

467
[ 2 -1 -1]
[-1  2  1]
[-1  1  2]
det = 4

472
[ 2  0  0]
[ 0  2  0]
[ 0  0 12]
det = 48

473
[ 2  0  0]
[ 0  2  1]
[ 0  1 12]
det = 46

476 is
[ 2  0  1]
[ 0  2  0]
[ 1  0 12]
det = 46

478
[ 2  0  1]
[ 0  2  1]
[ 1  1 12]
det = 44

497
[ 2  1  0]
[ 1  2  0]
[ 0  0 12]
det = 36

498
[ 2  1 -1]
[ 1  2 -1]
[-1 -1 12]
det = 34

499
[ 2  1 -1]
[ 1  2  0]
[-1  0 10]
det = 28

502
[ 2  1  1]
[ 1  2  0]
[ 1  0 12]
det = 34

503
[ 2  1  1]
[ 1  2  1]
[ 1  1 12]
det = 34

583
[ 2 -1  0]
[-1  2  0]
[ 0  0 14]
det = 42

584
[ 2 -1  1]
[-1  2 -1]
[ 1 -1 14]
det = 40

589
[ 2 -1  1]
[-1  2  0]
[ 1  0 14]
det = 40

602
[ 2 -1 -1]
[-1  2  0]
[-1  0  6]
det = 16

607
[ 2 -1 -1]
[-1  2  1]
[-1  1  4]
det = 10

619
[ 2  0  0]
[ 0  2  0]
[ 0  0 14]
det = 56
```

```
620
[ 2  0  0]
[ 0  2  1]
[ 0  1 14]
det = 54

624
[ 2  0  0]
[ 0  2 -1]
[ 0 -1  2]
det = 6

625
[ 2  0  1]
[ 0  2  0]
[ 1  0 14]
det = 54

626
[ 2  0  1]
[ 0  2  1]
[ 1  1 14]
det = 52

655
[ 2  1  0]
[ 1  2  0]
[ 0  0 14]
det = 42

656
[ 2  1 -1]
[ 1  2 -1]
[-1 -1 14]
det = 40

657
[ 2  1 -1]
[ 1  2  0]
[-1  0 12]
det = 34

661
[ 2  1  1]
[ 1  2  0]
[ 1  0 14]
det = 40

662
[ 2  1  1]
[ 1  2  1]
[ 1  1 14]
det = 40

737
[ 2  0  1]
[ 0  2 -1]
[ 1 -1  4]
det = 12

746
[ 2  0  0]
[ 0  2 -1]
[ 0 -1  4]
det = 14

754
[ 2  0 -1]
[ 0  2  0]
[-1  0  4]
det = 14

755
[ 2  0 -1]
[ 0  2 -1]
[-1 -1  4]
det = 12

787
[ 2 -1  0]
[-1  4  0]
[ 0  0  4]
det = 28

788
[ 2 -1  0]
[-1  4  1]
[ 0  1  4]
det = 26

789
[ 2 -1  1]
[-1  4 -2]
[ 1 -2  4]
det = 20

792
[ 2 -1  1]
[-1  4  0]
[ 1  0  4]
det = 24

793
[ 2 -1  1]
[-1  4  1]
[ 1  1  4]
det = 20

802
[2 0 0]
[0 4 0]
[0 0 4]
det = 32

803
[2 0 0]
[0 4 1]
[0 1 4]
det = 30

804
[2 0 0]
[0 4 2]
[0 2 4]
det = 24

807
[2 1 0]
[1 4 0]
[0 0 4]
det = 28

808
[ 2  1  0]
[ 1  4 -1]
[ 0 -1  4]
det = 26

809
[2 1 1]
[1 4 2]
[1 2 4]
det = 20

818
[2 1 0]
[1 4 1]
[0 1 4]
det = 26

819
[ 2  1 -1]
[ 1  4 -2]
[-1 -2  4]
det = 20

822
[2 1 1]
[1 4 0]
[1 0 4]
det = 24

823
[2 1 1]
[1 4 1]
[1 1 4]
det = 24

825
[ 2  0 -1]
[ 0  2  1]
[-1  1  4]
det = 12

867
[ 2 -1  0]
[-1  4  0]
[ 0  0  6]
det = 42

868
[ 2 -1  0]
[-1  4  1]
[ 0  1  6]
det = 40

869
[ 2 -1  1]
[-1  4 -2]
[ 1 -2  6]
det = 34

870
[ 2 -1  1]
[-1  4 -1]
[ 1 -1  4]
det = 24

872
[ 2 -1  1]
[-1  4  0]
[ 1  0  6]
det = 38

873
[ 2 -1  1]
[-1  4  1]
[ 1  1  6]
det = 34

874
[ 2 -1  0]
[-1  4 -1]
[ 0 -1  4]
det = 26
```

```
888
[2 0 0]
[0 4 1]
[0 1 6]
det = 46

889
[2 0 0]
[0 4 2]
[0 2 6]
det = 40

890
[ 2  0  0]
[ 0  4 -1]
[ 0 -1  4]
det = 30

892
[2 0 1]
[0 4 0]
[1 0 6]
det = 44

893
[2 0 1]
[0 4 1]
[1 1 6]
det = 42

894
[2 0 1]
[0 4 2]
[1 2 6]
det = 36
908
[2 1 0]
[1 4 1]
[0 1 6]
det = 40

910
[ 2  1 -1]
[ 1  4 -1]
[-1 -1  4]
det = 24

912
[2 1 1]
[1 4 0]
[1 0 6]
det = 38

913
[2 1 1]
[1 4 1]
[1 1 6]
det = 38

914
[2 1 1]
[1 4 2]
[1 2 6]
det = 34

920
[ 2  1  1]
[ 1  4 -1]
[ 1 -1  4]
det = 20

932
[ 2  0  1]
[ 0  2 -1]
[ 1 -1  6]
det = 20

977
[ 2 -1  0]
[-1  4  0]
[ 0  0  8]
det = 56

978
[ 2 -1  0]
[-1  4  1]
[ 0  1  8]
det = 54

979
[ 2 -1  1]
[-1  4 -2]
[ 1 -2  8]
det = 48

980
[ 2 -1  1]
[-1  4 -1]
[ 1 -1  6]
det = 38

983
[ 2 -1  1]
[-1  4  0]
[ 1  0  8]
det = 52

984
[ 2 -1  1]
[-1  4  1]
[ 1  1  8]
det = 48

985
[ 2 -1  0]
[-1  4 -1]
[ 0 -1  6]
det = 40

1008
[2 0 0]
[0 4 1]
[0 1 8]
det = 62

1009
[2 0 0]
[0 4 2]
[0 2 8]
det = 56

1010
[ 2  0  0]
[ 0  4 -1]
[ 0 -1  6]
det = 46

1013
[2 0 1]
[0 4 0]
[1 0 8]
det = 60

1014
[2 0 1]
[0 4 1]
[1 1 8]
det = 58

1015
[2 0 1]
[0 4 2]
[1 2 8]
det = 52

1016
[ 2  0  1]
[ 0  4 -1]
[ 1 -1  6]
det = 42

1037
[2 1 0]
[1 4 0]
[0 0 8]
det = 56

1038
[2 1 0]
[1 4 1]
[0 1 8]
det = 54

1039
[ 2  1 -1]
[ 1  4 -2]
[-1 -2  8]
det = 48

1040
[ 2  1 -1]
[ 1  4 -1]
[-1 -1  6]
det = 38

1041
[ 2  1 -1]
[ 1  4  0]
[-1  0  4]
det = 24

1043
[2 1 1]
[1 4 0]
[1 0 8]
det = 52

1044
[2 1 1]
[1 4 1]
[1 1 8]
det = 52

1045
[2 1 1]
[1 4 2]
[1 2 8]
det = 48

1046
[ 2  1  0]
[ 1  4 -1]
[ 0 -1  6]
det = 40
```

```
1052
[ 2  1  1]
[ 1  4 -1]
[ 1 -1  6]
det = 34

1073
[ 2  0  1]
[ 0  2 -1]
[ 1 -1  8]
det = 28

1080
[ 2  0  0]
[ 0  2 -1]
[ 0 -1  6]
det = 22

1132
[ 2 -1  0]
[-1  4  0]
[ 0  0 10]
det = 70

1133
[ 2 -1  0]
[-1  4  1]
[ 0  1 10]
det = 68

1134
[ 2 -1  1]
[-1  4 -2]
[ 1 -2 10]
det = 62

1135
[ 2 -1  1]
[-1  4 -1]
[ 1 -1  8]
det = 52

1139
[ 2 -1  1]
[-1  4  0]
[ 1  0 10]
det = 66

1140
[ 2 -1  1]
[-1  4  1]
[ 1  1 10]
det = 62

1141
[ 2 -1  0]
[-1  4 -1]
[ 0 -1  8]
det = 54

1167
[ 2  0  0]
[ 0  4  0]
[ 0  0 10]
det = 80

1168
[ 2  0  0]
[ 0  4  1]
[ 0  1 10]
det = 78

1169
[ 2  0  0]
[ 0  4  2]
[ 0  2 10]
det = 72

1170
[ 2  0  0]
[ 0  4 -1]
[ 0 -1  8]
det = 62

1174
[ 2  0  1]
[ 0  4  0]
[ 1  0 10]
det = 76

1175
[ 2  0  1]
[ 0  4  1]
[ 1  1 10]
det = 74

1176
[ 2  0  1]
[ 0  4  2]
[ 1  2 10]
det = 68

1177
[ 2  0  1]
[ 0  4 -1]
[ 1 -1  8]
det = 58

1203
[ 2  1  0]
[ 1  4  1]
[ 0  1 10]
det = 68

1204
[ 2  1 -1]
[ 1  4 -2]
[-1 -2 10]
det = 62

1205
[ 2  1 -1]
[ 1  4 -1]
[-1 -1  8]
det = 52

1206
[ 2  1 -1]
[ 1  4  0]
[-1  0  6]
det = 38

1207
[ 2  1 -1]
[ 1  4  1]
[-1  1  4]
det = 20

1209
[ 2  1  1]
[ 1  4  0]
[ 1  0 10]
det = 66

1210
[ 2  1  1]
[ 1  4  1]
[ 1  1 10]
det = 66

1211
[ 2  1  1]
[ 1  4  2]
[ 1  2 10]
det = 62

1212
[ 2  1  0]
[ 1  4 -1]
[ 0 -1  8]
det = 54

1219
[ 2  1  1]
[ 1  4 -1]
[ 1 -1  8]
det = 48

1244
[ 2  0  1]
[ 0  2 -1]
[ 1 -1 10]
det = 36

1252
[ 2  0  0]
[ 0  2 -1]
[ 0 -1  8]
det = 30

1307
[ 2 -1  0]
[-1  4  0]
[ 0  0 12]
det = 84

1308
[ 2 -1  0]
[-1  4  1]
[ 0  1 12]
det = 82

1309
[ 2 -1  1]
[-1  4 -2]
[ 1 -2 12]
det = 76

1310
[ 2 -1  1]
[-1  4 -1]
[ 1 -1 10]
det = 66

1314
[ 2 -1  1]
[-1  4  0]
[ 1  0 12]
det = 80

1315
[ 2 -1  1]
[-1  4  1]
[ 1  1 12]
det = 76
```

```
1316
[ 2 -1  0]
[-1  4 -1]
[ 0 -1 10]
det = 68

1335
[ 2 -1 -1]
[-1  4 -1]
[-1 -1  4]
det = 20

1342
[ 2  0  0]
[ 0  4  0]
[ 0  0 12]
det = 96

1343
[ 2  0  0]
[ 0  4  1]
[ 0  1 12]
det = 94

1344
[ 2  0  0]
[ 0  4  2]
[ 0  2 12]
det = 88

1345
[ 2  0  0]
[ 0  4 -1]
[ 0 -1 10]
det = 78

1349
[ 2  0  1]
[ 0  4  0]
[ 1  0 12]
det = 92

1350
[ 2  0  1]
[ 0  4  1]
[ 1  1 12]
det = 90

1351
[ 2  0  1]
[ 0  4  2]
[ 1  2 12]
det = 84

1352
[ 2  0  1]
[ 0  4 -1]
[ 1 -1 10]
det = 74

1377
[ 2  1  0]
[ 1  4  0]
[ 0  0 12]
det = 84

1378
[ 2  1  0]
[ 1  4  1]
[ 0  1 12]
det = 82

1379
[ 2  1 -1]
[ 1  4 -2]
[-1 -2 12]
det = 76

1380
[ 2  1 -1]
[ 1  4 -1]
[-1 -1 10]
det = 66

1381
[ 2  1 -1]
[ 1  4  0]
[-1  0  8]
det = 52

1382
[ 2  1 -1]
[ 1  4  1]
[-1  1  6]
det = 34

1384
[ 2  1  1]
[ 1  4  0]
[ 1  0 12]
det = 80

1385
[ 2  1  1]
[ 1  4  1]
[ 1  1 12]
det = 80

1386
[ 2  1  1]
[ 1  4  2]
[ 1  2 12]
det = 76

1387
[ 2  1  0]
[ 1  4 -1]
[ 0 -1 10]
det = 68

1394
[ 2  1  1]
[ 1  4 -1]
[ 1 -1 10]
det = 62

1419
[ 2  0  1]
[ 0  2 -1]
[ 1 -1 12]
det = 44

1427
[ 2  0  0]
[ 0  2 -1]
[ 0 -1 10]
det = 38

1495
[ 2 -1  0]
[-1  4  0]
[ 0  0 14]
det = 98

1496
[ 2 -1  0]
[-1  4  1]
[ 0  1 14]
det = 96

1497
[ 2 -1  1]
[-1  4 -2]
[ 1 -2 14]
det = 90

1498
[ 2 -1  1]
[-1  4 -1]
[ 1 -1 12]
det = 80

1503
[ 2 -1  1]
[-1  4  0]
[ 1  0 14]
det = 94

1504
[ 2 -1  1]
[-1  4  1]
[ 1  1 14]
det = 90

1505
[ 2 -1  0]
[-1  4 -1]
[ 0 -1 12]
det = 82

1527
[ 2 -1 -1]
[-1  4 -1]
[-1 -1  6]
det = 34

1528
[ 2 -1 -1]
[-1  4  0]
[-1  0  4]
det = 24

1543
[ 2  0  0]
[ 0  4  0]
[ 0  0 14]
det = 112

1544
[ 2  0  0]
[ 0  4  1]
[ 0  1 14]
det = 110

1545
[ 2  0  0]
[ 0  4  2]
[ 0  2 14]
det = 104

1546
[ 2  0  0]
[ 0  4 -1]
[ 0 -1 12]
det = 94
```

```
1551
[ 2  0  1]
[ 0  4  0]
[ 1  0 14]
det = 108

1552
[ 2  0  1]
[ 0  4  1]
[ 1  1 14]
det = 106

1553
[ 2  0  1]
[ 0  4  2]
[ 1  2 14]
det = 100

1554
[ 2  0  1]
[ 0  4 -1]
[ 1 -1 12]
det = 90

1591
[ 2  1  0]
[ 1  4  0]
[ 0  0 14]
det = 98

1592
[ 2  1  0]
[ 1  4  1]
[ 0  1 14]
det = 96

1593
[ 2  1 -1]
[ 1  4 -2]
[-1 -2 14]
det = 90

1594
[ 2  1 -1]
[ 1  4 -1]
[-1 -1 12]
det = 80

1595
[ 2  1 -1]
[ 1  4  0]
[-1  0 10]
det = 66

1596
[ 2  1 -1]
[ 1  4  1]
[-1  1  8]
det = 48

1599
[ 2  1  1]
[ 1  4  0]
[ 1  0 14]
det = 94

1600
[ 2  1  1]
[ 1  4  1]
[ 1  1 14]
det = 94

1601
[ 2  1  1]
[ 1  4  2]
[ 1  2 14]
det = 90

1602
[ 2  1  0]
[ 1  4 -1]
[ 0 -1 12]
det = 82
1610
[ 2  1  1]
[ 1  4 -1]
[ 1 -1 12]
det = 76
1647
[ 2  0  1]
[ 0  2 -1]
[ 1 -1 14]
det = 52

1656
[ 2  0  0]
[ 0  2 -1]
[ 0 -1 12]
det = 46

1735
[ 2  0 -1]
[ 0  2  0]
[-1  0  6]
det = 22

1736
[ 2  0 -1]
[ 0  2 -1]
[-1 -1  6]
det = 20
1803
[ 2  0  1]
[ 0  4 -2]
[ 1 -2  6]
det = 36

1818
[ 2  0  0]
[ 0  4 -2]
[ 0 -2  6]
det = 40

1831
[ 2  0 -1]
[ 0  4  0]
[-1  0  6]
det = 44

1832
[ 2  0 -1]
[ 0  4 -1]
[-1 -1  6]
det = 42

1833
[ 2  0 -1]
[ 0  4 -2]
[-1 -2  6]
det = 36

1841
[ 2  0 -1]
[ 0  2  1]
[-1  1  6]
det = 20

1932
[ 2 -1  0]
[-1  6  0]
[ 0  0  6]
det = 66

1933
[ 2 -1  0]
[-1  6  1]
[ 0  1  6]
det = 64

1934
[ 2 -1  0]
[-1  6  2]
[ 0  2  6]
det = 58

1935
[ 2 -1  1]
[-1  6 -3]
[ 1 -3  6]
det = 48

1939
[ 2 -1  1]
[-1  6  0]
[ 1  0  6]
det = 60

1940
[ 2 -1  1]
[-1  6  1]
[ 1  1  6]
det = 56

1941
[ 2 -1  1]
[-1  6  2]
[ 1  2  6]
det = 48

1960
[2 0 0]
[0 6 0]
[0 0 6]
det = 72

1961
[2 0 0]
[0 6 1]
[0 1 6]
det = 70

1963
[2 0 0]
[0 6 3]
[0 3 6]
det = 54

1967
[2 1 0]
[1 6 0]
[0 0 6]
det = 66
```

```
1968
[ 2  1  0]
[ 1  6 -1]
[ 0 -1  6]
det = 64

1969
[ 2  1  0]
[ 1  6 -2]
[ 0 -2  6]
det = 58

1970
[2 1 1]
[1 6 3]
[1 3 6]
det = 48

1990
[2 1 0]
[1 6 2]
[0 2 6]
det = 58

1992
[ 2 -1 -1]
[-1  4  2]
[-1  2  6]
det = 34

1993
[ 2 -1 -1]
[-1  2  1]
[-1  1  6]
det = 16

1996
[2 1 1]
[1 6 1]
[1 1 6]
det = 60

1997
[2 1 1]
[1 6 2]
[1 2 6]
det = 56

1999
[ 2  0 -1]
[ 0  4  2]
[-1  2  6]
det = 36

2002
[ 2  0 -1]
[ 0  4  1]
[-1  1  6]
det = 42

2030
[ 2  0  0]
[ 0  4 -2]
[ 0 -2  4]
det = 24

2142
[ 2 -1  0]
[-1  6  0]
[ 0  0  8]
det = 88

2143
[ 2 -1  0]
[-1  6  1]
[ 0  1  8]
det = 86

2144
[ 2 -1  0]
[-1  6  2]
[ 0  2  8]
det = 80

2145
[ 2 -1  1]
[-1  6 -3]
[ 1 -3  8]
det = 70

2146
[ 2 -1  1]
[-1  6 -2]
[ 1 -2  6]
det = 56

2149
[ 2 -1  1]
[-1  6  0]
[ 1  0  8]
det = 82

2150
[ 2 -1  1]
[-1  6  1]
[ 1  1  8]
det = 78

2151
[ 2 -1  1]
[-1  6  2]
[ 1  2  8]
det = 70

2152
[ 2 -1  0]
[-1  6 -2]
[ 0 -2  6]
det = 58

2177
[2 0 0]
[0 6 0]
[0 0 8]
det = 96

2178
[2 0 0]
[0 6 1]
[0 1 8]
det = 94

2179
[2 0 0]
[0 6 2]
[0 2 8]
det = 88

2180
[2 0 0]
[0 6 3]
[0 3 8]
det = 78

2181
[ 2  0  0]
[ 0  6 -2]
[ 0 -2  6]
det = 64

2184
[2 0 1]
[0 6 0]
[1 0 8]
det = 90

2185
[2 0 1]
[0 6 1]
[1 1 8]
det = 88

2186
[2 0 1]
[0 6 2]
[1 2 8]
det = 82

2187
[2 0 1]
[0 6 3]
[1 3 8]
det = 72

2212
[2 1 0]
[1 6 0]
[0 0 8]
det = 88

2213
[2 1 0]
[1 6 1]
[0 1 8]
det = 86

2215
[ 2  1 -1]
[ 1  6 -3]
[-1 -3  8]
det = 70

2216
[ 2  1 -1]
[ 1  6 -2]
[-1 -2  6]
det = 56

2217
[ 2 -1 -1]
[-1  4  1]
[-1  1  6]
det = 38

2219
[2 1 1]
[1 6 0]
[1 0 8]
det = 82

2220
[2 1 1]
[1 6 1]
[1 1 8]
det = 82
```

```
2221
[2 1 1]
[1 6 2]
[1 2 8]
det = 78

2222
[2 1 1]
[1 6 3]
[1 3 8]
det = 70

2230
[ 2  1  1]
[ 1  6 -2]
[ 1 -2  6]
det = 48

2397
[ 2 -1  0]
[-1  6  0]
[ 0  0 10]
det = 110

2398
[ 2 -1  0]
[-1  6  1]
[ 0  1 10]
det = 108

2399
[ 2 -1  0]
[-1  6  2]
[ 0  2 10]
det = 102

2400
[ 2 -1  1]
[-1  6 -3]
[ 1 -3 10]
det = 92

2401
[ 2 -1  1]
[-1  6 -2]
[ 1 -2  8]
det = 78

2402
[ 2 -1  1]
[-1  6 -1]
[ 1 -1  6]
det = 60

2405
[ 2 -1  1]
[-1  6  0]
[ 1  0 10]
det = 104

2406
[ 2 -1  1]
[-1  6  1]
[ 1  1 10]
det = 100

2407
[ 2 -1  1]
[-1  6  2]
[ 1  2 10]
det = 92

2408
[ 2 -1  0]
[-1  6 -2]
[ 0 -2  8]
det = 80

2409
[ 2 -1  0]
[-1  6 -1]
[ 0 -1  6]
det = 64

2437
[ 2  0  0]
[ 0  6  0]
[ 0  0 10]
det = 120

2438
[ 2  0  0]
[ 0  6  1]
[ 0  1 10]
det = 118

2440
[ 2  0  0]
[ 0  6  3]
[ 0  3 10]
det = 102

2441
[ 2  0  0]
[ 0  6 -2]
[ 0 -2  8]
det = 88

2442
[ 2  0  0]
[ 0  6 -1]
[ 0 -1  6]
det = 70

2445
[ 2  0  1]
[ 0  6  0]
[ 1  0 10]
det = 114

2446
[ 2  0  1]
[ 0  6  1]
[ 1  1 10]
det = 112

2447
[ 2  0  1]
[ 0  6  2]
[ 1  2 10]
det = 106

2448
[ 2  0  1]
[ 0  6  3]
[ 1  3 10]
det = 96

2449
[ 2  0  1]
[ 0  6 -2]
[ 1 -2  8]
det = 82

2477
[ 2  1  0]
[ 1  6  0]
[ 0  0 10]
det = 110

2479
[ 2  1  0]
[ 1  6  2]
[ 0  2 10]
det = 102

2481
[ 2  1 -1]
[ 1  6 -2]
[-1 -2  8]
det = 78

2482
[ 2  1 -1]
[ 1  6 -1]
[-1 -1  6]
det = 60

2483
[ 2 -1 -1]
[-1  4  0]
[-1  0  6]
det = 38

2485
[ 2  1  1]
[ 1  6  0]
[ 1  0 10]
det = 104

2486
[ 2  1  1]
[ 1  6  1]
[ 1  1 10]
det = 104

2487
[ 2  1  1]
[ 1  6  2]
[ 1  2 10]
det = 100

2488
[ 2  1  1]
[ 1  6  3]
[ 1  3 10]
det = 92

2489
[ 2  1  0]
[ 1  6 -2]
[ 0 -2  8]
det = 80

2493
[ 2  1  0]
[ 1  6 -1]
[ 0 -1  8]
det = 86

2497
[ 2  1  1]
[ 1  6 -2]
[ 1 -2  8]
det = 70
```

```
2498
[ 2  1  1]
[ 1  6 -1]
[ 1 -1  6]
det = 56

2533
[ 2  0  0]
[ 0  4 -2]
[ 0 -2  8]
det = 56

2687
[ 2 -1  0]
[-1  6  0]
[ 0  0 12]
det = 132

2688
[ 2 -1  0]
[-1  6  1]
[ 0  1 12]
det = 130

2689
[ 2 -1  0]
[-1  6  2]
[ 0  2 12]
det = 124

2690
[ 2 -1  1]
[-1  6 -3]
[ 1 -3 12]
det = 114

2691
[ 2 -1  1]
[-1  6 -2]
[ 1 -2 10]
det = 100

2692
[ 2 -1  1]
[-1  6 -1]
[ 1 -1  8]
det = 82

2696
[ 2 -1  1]
[-1  6  0]
[ 1  0 12]
det = 126

2697
[ 2 -1  1]
[-1  6  1]
[ 1  1 12]
det = 122

2698
[ 2 -1  1]
[-1  6  2]
[ 1  2 12]
det = 114

2699
[ 2 -1  0]
[-1  6 -2]
[ 0 -2 10]
det = 102

2700
[ 2 -1  0]
[-1  6 -1]
[ 0 -1  8]
det = 86

2732
[ 2  0  0]
[ 0  6  0]
[ 0  0 12]
det = 144

2733
[ 2  0  0]
[ 0  6  1]
[ 0  1 12]
det = 142

2734
[ 2  0  0]
[ 0  6  2]
[ 0  2 12]
det = 136

2735
[ 2  0  0]
[ 0  6  3]
[ 0  3 12]
det = 126

2736
[ 2  0  0]
[ 0  6 -2]
[ 0 -2 10]
det = 112

2737
[ 2  0  0]
[ 0  6 -1]
[ 0 -1  8]
det = 94

2741
[ 2  0  1]
[ 0  6  0]
[ 1  0 12]
det = 138

2742
[ 2  0  1]
[ 0  6  1]
[ 1  1 12]
det = 136

2743
[ 2  0  1]
[ 0  6  2]
[ 1  2 12]
det = 130

2744
[ 2  0  1]
[ 0  6  3]
[ 1  3 12]
det = 120

2745
[ 2  0  1]
[ 0  6 -2]
[ 1 -2 10]
det = 106

2746
[ 2  0  1]
[ 0  6 -1]
[ 1 -1  8]
det = 88

2777
[ 2  1  0]
[ 1  6  0]
[ 0  0 12]
det = 132

2778
[ 2  1  0]
[ 1  6  1]
[ 0  1 12]
det = 130

2780
[ 2  1 -1]
[ 1  6 -3]
[-1 -3 12]
det = 114

2781
[ 2  1 -1]
[ 1  6 -2]
[-1 -2 10]
det = 100

2782
[ 2  1 -1]
[ 1  6 -1]
[-1 -1  8]
det = 82

2783
[ 2  1 -1]
[ 1  6  0]
[-1  0  6]
det = 60

2786
[ 2  1  1]
[ 1  6  0]
[ 1  0 12]
det = 126

2787
[ 2  1  1]
[ 1  6  1]
[ 1  1 12]
det = 126

2788
[ 2  1  1]
[ 1  6  2]
[ 1  2 12]
det = 122

2789
[ 2  1  1]
[ 1  6  3]
[ 1  3 12]
det = 114

2790
[ 2  1  0]
[ 1  6 -2]
[ 0 -2 10]
det = 102
```

```
2795
[ 2  1  0]
[ 1  6 -1]
[ 0 -1 10]
det = 108

2799
[ 2  1  1]
[ 1  6 -2]
[ 1 -2 10]
det = 92

2800
[ 2  1  1]
[ 1  6 -1]
[ 1 -1  8]
det = 78

2840
[ 2  0  0]
[ 0  4 -2]
[ 0 -2 10]
det = 72

2850
[ 2  0  1]
[ 0  4 -2]
[ 1 -2  8]
det = 52

3032
[ 2 -1  0]
[-1  6  0]
[ 0  0 14]
det = 154

3033
[ 2 -1  0]
[-1  6  1]
[ 0  1 14]
det = 152

3034
[ 2 -1  0]
[-1  6  2]
[ 0  2 14]
det = 146

3035
[ 2 -1  1]
[-1  6 -3]
[ 1 -3 14]
det = 136

3036
[ 2 -1  1]
[-1  6 -2]
[ 1 -2 12]
det = 122

3037
[ 2 -1  1]
[-1  6 -1]
[ 1 -1 10]
det = 104

3042
[ 2 -1  1]
[-1  6  0]
[ 1  0 14]
det = 148

3043
[ 2 -1  1]
[-1  6  1]
[ 1  1 14]
det = 144

3044
[ 2 -1  1]
[-1  6  2]
[ 1  2 14]
det = 136

3045
[ 2 -1  0]
[-1  6 -2]
[ 0 -2 12]
det = 124

3046
[ 2 -1  0]
[-1  6 -1]
[ 0 -1 10]
det = 108

3073
[ 2 -1 -1]
[-1  6 -2]
[-1 -2  6]
det = 48

3092
[ 2  0  0]
[ 0  6  0]
[ 0  0 14]
det = 168

3093
[ 2  0  0]
[ 0  6  1]
[ 0  1 14]
det = 166

3094
[ 2  0  0]
[ 0  6  2]
[ 0  2 14]
det = 160

3095
[ 2  0  0]
[ 0  6  3]
[ 0  3 14]
det = 150

3096
[ 2  0  0]
[ 0  6 -2]
[ 0 -2 12]
det = 136

3097
[ 2  0  0]
[ 0  6 -1]
[ 0 -1 10]
det = 118

3102
[ 2  0  1]
[ 0  6  0]
[ 1  0 14]
det = 162

3103
[ 2  0  1]
[ 0  6  1]
[ 1  1 14]
det = 160

3104
[ 2  0  1]
[ 0  6  2]
[ 1  2 14]
det = 154

3105
[ 2  0  1]
[ 0  6  3]
[ 1  3 14]
det = 144

3106
[ 2  0  1]
[ 0  6 -2]
[ 1 -2 12]
det = 130

3107
[ 2  0  1]
[ 0  6 -1]
[ 1 -1 10]
det = 112

3152
[ 2  1  0]
[ 1  6  0]
[ 0  0 14]
det = 154

3153
[ 2  1  0]
[ 1  6  1]
[ 0  1 14]
det = 152

3154
[ 2  1  0]
[ 1  6  2]
[ 0  2 14]
det = 146

3155
[ 2  1 -1]
[ 1  6 -3]
[-1 -3 14]
det = 136

3156
[ 2  1 -1]
[ 1  6 -2]
[-1 -2 12]
det = 122

3157
[ 2  1 -1]
[ 1  6 -1]
[-1 -1 10]
det = 104

3158
[ 2  1 -1]
[ 1  6  0]
[-1  0  8]
det = 82
```

```
3159
[ 2  1 -1]
[ 1  6  1]
[-1  1  6]
det = 56

3163
[ 2  1  1]
[ 1  6  1]
[ 1  1 14]
det = 148

3164
[ 2  1  1]
[ 1  6  2]
[ 1  2 14]
det = 144

3165
[ 2  1  1]
[ 1  6  3]
[ 1  3 14]
det = 136

3166
[ 2  1  0]
[ 1  6 -2]
[ 0 -2 12]
det = 124

3172
[ 2  1  0]
[ 1  6 -1]
[ 0 -1 12]
det = 130

3176
[ 2  1  1]
[ 1  6 -2]
[ 1 -2 12]
det = 114

3222
[ 2  0  1]
[ 0  4 -1]
[ 1 -1 14]
det = 106

3232
[ 2  0  0]
[ 0  4 -2]
[ 0 -2 12]
det = 88

3243
[ 2  0  1]
[ 0  4 -2]
[ 1 -2 10]
det = 68
```

Truands des formes à valeurs entières

11
t = 15
20
t = 7
21
t = 15
57
t = 5
59
t = 5
66
t = 21
68
t = 21
69
t = 3
75
t = 5
77
t = 5
78
t = 5
108
t = 5
124
t = 15
125
t = 77
128
t = 77
140
t = 5
142
t = 5
197
t = 15
198
t = 11
202
t = 11
222
t = 3
223
t = 3
227
t = 3
228
t = 3
247
t = 15
248
t = 11
252
t = 11

253
t = 11
322
t = 11
347
t = 3
348
t = 3
352
t = 3
353
t = 3
372
t = 11
374
t = 11
447
t = 5
448
t = 5
452
t = 5
463
t = 5
472
t = 3
473
t = 3
477
t = 3
478
t = 3
497
t = 5
498
t = 5
502
t = 5
503
t = 5
583
t = 5
584
t = 5
589
t = 5
607
t = 5
619
t = 3
620
t = 3
624
t = 15

625
t = 3
626
t = 3
655
t = 5
656
t = 5
657
t = 5
661
t = 5
662
t = 5
737
t = 3
746
t = 21
754
t = 21
755
t = 3
787
t = 5
788
t = 13
789
t = 15
792
t = 15
793
t = 15
802
t = 7
803
t = 15
804
t = 5
807
t = 5
808
t = 13
809
t = 15
818
t = 13
819
t = 15
822
t = 15
823
t = 15
825
t = 3

867
t = 15
868
t = 5
869
t = 17
870
t = 15
872
t = 19
873
t = 17
874
t = 13
888
t = 23
889
t = 5
890
t = 15
893
t = 7
908
t = 5
910
t = 15
912
t = 19
913
t = 19
914
t = 17
920
t = 15
977
t = 3
978
t = 3
979
t = 3
980
t = 19
983
t = 3
984
t = 3
985
t = 5
1008
t = 31
1009
t = 7
1010
t = 23

1013
t = 5
1014
t = 29
1015
t = 5
1016
t = 7
1037
t = 3
1038
t = 3
1039
t = 3
1040
t = 19
1041
t = 15
1043
t = 3
1044
t = 3
1045
t = 3
1046
t = 5
1052
t = 17
1073
t = 3
1080
t = 77
1132
t = 3
1133
t = 3
1134
t = 3
1135
t = 3
1139
t = 3
1140
t = 3
1141
t = 3
1167
t = 15
1168
t = 13
1169
t = 7
1170
t = 31
1175
t = 29
1176
t = 13
1177
t = 29
1203
t = 3
1204
t = 3
1205
t = 3
1206
t = 19
1207
t = 15
1209
t = 3
1210
t = 3
1211
t = 3
1212
t = 3
1219
t = 3
1244
t = 3
1252
t = 3
1307
t = 3
1308
t = 3
1309
t = 3
1310
t = 3
1314
t = 3
1315
t = 3
1316
t = 3
1335
t = 15
1342
t = 5
1343
t = 5
1344
t = 5
1345
t = 13
1349
t = 5
1350
t = 5
1351
t = 5
1352
t = 29
1377
t = 3
1378
t = 3
1379
t = 3
1380
t = 3
1381
t = 3
1382
t = 17
1384
t = 3
1385
t = 3
1386
t = 3
1387
t = 3
1394
t = 3
1419
t = 3
1427
t = 3
1495
t = 3
1496
t = 3
1497
t = 3
1498
t = 3
1503
t = 3
1504
t = 3
1505
t = 3
1527
t = 17
1528
t = 15
1543
t = 5
1544
t = 5
1545
t = 5
1546
t = 5
1551
t = 5
1552
t = 5
1553
t = 5
1554
t = 5
1591
t = 3
1592
t = 3
1593
t = 3
1594
t = 3
1595
t = 3
1596
t = 3
1599
t = 3
1600
t = 3
1601
t = 3
1602
t = 3
1610
t = 3
1647
t = 3
1656
t = 3
1735
t = 77
1818
t = 5
1832
t = 7
1932
t = 29
1934
t = 29
1940
t = 21
1960
t = 5

1961
t = 15
1963
t = 5
1967
t = 29
1969
t = 29
1990
t = 29
1992
t = 17
1997
t = 21
2002
t = 7
2030
t = 5
2142
t = 77
2143
t = 7
2145
t = 7
2146
t = 21
2149
t = 13
2150
t = 7
2151
t = 7
2152
t = 29
2177
t = 15
2178
t = 11
2179
t = 11
2180
t = 15
2184
t = 5
2185
t = 5
2186
t = 41
2187
t = 5
2212
t = 77
2213
t = 7
2215
t = 7
2216
t = 21
2217
t = 19
2219
t = 13
2220
t = 13
2221
t = 7
2222
t = 7
2397
t = 7
2398
t = 17
2399
t = 7
2401
t = 7
2405
t = 13
2437
t = 11
2438
t = 17
2440
t = 35
2441
t = 11
2442
t = 15
2445
t = 15
2447
t = 29
2448
t = 15
2449
t = 41
2477
t = 7
2479
t = 7
2481
t = 7
2483
t = 19
2485
t = 13
2486
t = 13
2493
t = 7
2497
t = 7
2498
t = 21
2533
t = 7
2687
t = 13
2688
t = 13
2690
t = 13
2692
t = 13
2696
t = 7
2697
t = 13
2698
t = 13
2699
t = 7
2700
t = 7
2732
t = 5
2733
t = 5
2734
t = 5
2735
t = 5
2737
t = 11
2741
t = 5
2742
t = 5
2743
t = 5
2744
t = 5
2745
t = 29
2746
t = 5
2777
t = 13
2778
t = 13
2780
t = 13
2782
t = 13
2786
t = 7
2787
t = 7
2788
t = 13
2789
t = 13
2790
t = 7
2795
t = 17
2800
t = 7
2840
t = 7
2850
t = 5
3032
t = 13
3033
t = 19
3034
t = 13
3035
t = 17
3036
t = 13
3037
t = 13
3044
t = 17
3046
t = 17
3092
t = 5
3093
t = 5
3094
t = 5
3095
t = 5
3096
t = 5
3097
t = 17
3102
t = 5
3103
t = 5
3104
t = 5

```
3105
t = 5
3106
t = 5
3152
t = 13
3153
t = 19
3154
t = 13
3155
t = 17
3156
t = 13
3157
t = 13
3158
t = 13
3159
t = 21
3165
t = 17
3172
t = 13
3176
t = 13
3222
t = 5
3232
t = 5
3243
t = 13
```

Annexe C

La liste de Kaplansky

La liste suivante est composée de toutes les formes O-universelles de la liste de Kaplansky. Les cinq premières formes sont les formes à matrices entières O-universelles, et les suivantes sont les formes à valeurs entières O-universelles suivies des candidats conjecturés. Les nombres entre parenthèses font référence au déterminant de la forme qui suit (seulement pour les formes à valeurs entières).

1. $x^2 + y^2 + 2z^2$
2. $x^2 + 2y^2 + 3z^2$
3. $x^2 + 2y^2 + 4z^2$
4. $x^2 + 3y^2 + 2yz + 3z^2$
5. $x^2 + 3y^2 + 2yz + 5z^2$
6. $(2)x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz$
7. $(6)x^2 + xy + y^2 + 2z^2$
8. $(8)x^2 + y^2 + 3z^2 + xy + xz$
9. $(10)x^2 + y^2 + 3z^2 + xz + yz$
10. $(14)x^2 + y^2 + 5z^2 + xy + xz$
11. $(18)\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xz + 2yz$
12. $(22)\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xz$
13. $(24)\ x^2 + 3y^2 + 3z^2 + xy + 3yz$
14. $(30)\ x^2 + 3y^2 + 3z^2 + xy + xz$
15. $(32)\ x^2 + 3y^2 + 3z^2 + xy + yz$
16. $(38)\ x^2 + 2y^2 + 5z^2 + xz$

17. (40) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 + xy + 2yz$
18. (46) $x^2 + 3y^2 + 5z^2 + xy + 3yz$
19. (50) $x^2 + 3y^2 + 5z^2 + xy + xz - yz$
20. (56) $x^2 + 3y^2 + 5z^2 + xz + yz$
    Candidats
21. (62) $x^2 + 3y^2 + 6z^2 + xy + 2yz$
22. (72) $x^2 + 3y^2 + 11z^2 + xy + 7yz$
23. (74) $x^2 + 3y^2 + 7z^2 + xy + xz$