

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

LA DYNAMIQUE DE TRANSITION ET LA CROISSANCE ÉCONOMIQUE DANS LE
MODÈLE NÉOCLASSIQUE - UN ÉVALUATION DU MODÈLE DE KING ET REBELLO

PAR JORGE CLAUDIO CAVALCANTE DE OLIVEIRA LIMA

DÉPARTEMENT DE SCIENCES ÉCONOMIQUES

DIRECTEUR : PROF. JEAN MERCENIER

RAPPORT DE MAÎTRISE PRÉSENTÉ À LA FACULTÉ
DES ÉTUDES SUPÉRIEURES EN VUE DE L'OBTENTION
DU GRADE DE MAÎTRE EN SCIENCES (M.Sc.)
EN ÉCONOMIE

AOÛT 1995

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.....2

REVUE DE LA LITTÉRATURE.....4

MODÈLE DE BASE.....14

L'ACCUMULATION DE CAPITAL ET LE MODÈLE DE LUCAS30

CONCLUSION.....42

NOTES.....44

BIBLIOGRAPHIE.....51

GRAPHIQUES.....53

1 - INTRODUCTION

La théorie de la croissance économique cherche à expliquer le comportement de long terme de l'économie. Le long terme signifie que l'attention se porte sur la dynamique de l'accumulation (de la richesse des facteurs de production) et néglige les phénomènes de court terme (interaction offre-demande) qui sont l'objet d'étude de l'analyse macro-économique. En d'autres termes, la théorie de la croissance cherche à fournir une explication rigoureuse et formalisée pour plusieurs faits observés le long d'une période très longue.

Dans son papier qui dès sa parution s'est révélé un classique de l'étude de la théorie de la croissance, Solow(1956) présente un modèle fondamental de l'accumulation du capital. Le succès de son modèle est dû au fait qu'il a fourni un "cadre" empirique qui a stimulé la recherche sur les sources et la nature de la croissance économique ; il a aussi permis de nombreux travaux de nature quantitative et toute sorte de simulation. La croissance dans le modèle néoclassique peut survenir pour deux raisons: d'abord, il y a un croissance de long terme liée à la croissance de la productivité du au progrès technique mais il y a aussi une croissance de transition associé avec le déplacement d'un stock initial de capital vers le sentier de croissance de l'état stationnaire. Pour un stock initial de capital, disons k_0 , on converge de façon monotone vers une valeur stationnaire

unique comme démontré par Solow. Mais malgré le rôle fondamental joué par le modèle de Solow, rien n'est dit sur la vitesse de convergence du processus vers l'état stationnaire. La convergence monotone du modèle de Solow laisse ouverte la question de la vitesse de cette dynamique de transition. On appelle dynamique de transition, l'effet de rattrapage du capital initial vers un sentier de croissance à l'état stationnaire.

King et Rebello(1993) prétendent que la trajectoire décrite pendant la dynamique de transition reste peu connue d'un point de vue quantitative. Nous reprenons le modèle et on étudie leurs résultats à l'aide du logiciel Gams/Minos en vue de vérifier leurs postulats. Ensuite on argumente que l'introduction du capital humain peut s'avérer fort intéressant pour expliquer quelques résultats inattendus de King et Rebello.

2 - REVUE DE LA LITTÉRATURE

2.1. Le travail de Solow (1963)

Solow suppose une fonction de production du type Cobb-Douglas et deux inputs agrégés, le capital K qui peut être accumulé, et travail N qui ne peut pas être accumulé.

$$(2.1) Y_t = K_t^\beta N_t^\alpha \quad \alpha, \beta > 0$$

L'accroissement de K le long du temps $dk/dt - \dot{k}$ est l'investissement agrégée nette. Dans une économie fermée l'investissement nette est égal à l'épargne. Solow suppose que l'épargne est une proportion fixe du revenu Y .

$$(2.2) \dot{K}_t = sK_t^\beta N_t^\alpha - \delta K_t$$

On définit k le ratio capital/travail (K/N). Si l'on dérive k_t par rapport au temps, on aura:

$$(2.3) \dot{k}_t = s k_t^{\beta} N_t^{\alpha+\beta-1} - (\delta+\eta) k_t \quad (1)$$

On divise les deux côtés de (2.3) par k_t et on définit $\dot{k}_t/k_t = \gamma_k$ le taux de croissance de capital par travailleur.

On appelle "l'état stationnaire" la situation dans laquelle les variables croissent à un taux constant donc ; à l'état stationnaire γ_k est constant.

$$\dot{k}_t/k_t = sK_t^\beta N_t^\alpha/k_t - (\delta + \eta)k_t$$

$$\gamma_k = sK_t^{\beta-1}N_t^{\alpha+\beta-1} - (\delta + \eta)$$

$$\ln \gamma_k = \ln s + (\beta-1)\ln k_t + (\alpha+\beta-1)\ln N_t - \ln (\delta+\eta)$$

$$\frac{\delta \ln \gamma_k}{\delta t} = \frac{\delta \ln s}{\delta t} + (\beta-1)\frac{\delta \ln k_t}{\delta t} + (\alpha+\beta-1)\frac{\delta \ln N_t}{\delta t} - \frac{\delta \ln (\delta+\eta)}{\delta t}$$

$$(2.4) \quad 0 = (\beta-1) \cdot \gamma_k + \eta(\alpha+\beta-1)$$

Dans le papier original de Solow(1956) et Swan(1956) la fonction de production présente des rendements d'échelle constants dans le capital et travail ($\alpha+\beta=1$) mais des rendements décroissants si l'on considère le capital seulement ($\beta<1$). Pour cette raison, on a :

$$(2.4') \quad 0 = (\beta-1) \cdot \gamma_k$$

Mais puisque $\beta < 1$, l'égalité (2-4') implique que le seul taux de croissance soutenable à l'état stationnaire est $\gamma_k = 0$. Donc Solow suppose que l'économie croît à cause de facteurs exogènes. C'est-à-dire on a une fonction de production :

$$Y_t = A_t K_t^\beta N_t^\alpha$$

où A_t reflète le niveau de technologie que c'est supposé de croître à un taux constant g , c-à-d $A_t = A_0 \cdot e^{gt}$. Le paramètre g est souvent appelé "taux de croissance exogène de la productivité".

Donc si on répète la démarche ci-dessus (avec $\alpha + \beta = 1$), on aura la dynamique décrite à la Figure 1.

$$(2.5) \quad \dot{k}_t/k_t = sAk_t^{-(1-\beta)} - (\delta + \eta)$$

La fonction $(\delta + \eta)$ est indépendant de k et donc c'est une droite parallèle à l'axe x . La fonction $sAk^{-(1-\beta)}$, par contre décroît de façon monotone en k et s'approche asymptotiquement de 0 (2).

Les deux courbes se croisent au point k^* , le ratio capital-travail de l'état stationnaire. Si l'on considère une économie avec un niveau de capital k_0 plus petit que k^* , le taux de croissance sera très élevé (d'après (2.4) c'est la différence vertical entre les deux courbes), et sera décroissant à travers le temps.

2.3 L'Expérience de Sato(1963)

D'après (2.5) si l'on suppose qu'on est à l'état stationnaire et tout-à-coup le taux d'épargne s augmente, la figure 1 suggère que la courbe $sAk^{-(1-\beta)}$ se déplacera vers la droite et rien arrivera à la courbe $(\delta+\eta)$. C'est ce qu'on voit à la Figure 2 et:

- (1) Le taux de croissance augmente immédiatement;
- (2) Le taux de croissance sera décroissant jusqu'à ce qu'elle retourne vers zéro;
- (3) Le ratio capital-travail est plus élevé ;

Le papier de Sato décrit cette expérience (c'est-à-dire l'augmentation de s) et s'intéresse à la vitesse de convergence du processus . Selon lui:

$$(2.6) \quad Y_t = A_t K_t^\beta N_t^\alpha \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ A_t = A_0 e^{gt} \\ N_t = N_0 e^{\eta t} \text{ et } \delta = 0 . \end{cases}$$

$$\text{donc : } \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \beta \frac{\dot{K}}{K} + \alpha \frac{\dot{N}}{N}$$

d'où :

$$\gamma_Y = g + \beta \frac{\dot{K}}{K} + \alpha \frac{\dot{N}}{N} \quad , \quad \text{mais } \dot{K} = sY \text{ et } K/Y = k$$

$$\gamma_Y = g + \beta (\dot{K}/Y) \cdot (Y/K) + \alpha \eta = g + \beta s(1/k) + \alpha \eta$$

Si l'on prend $K_t = k_t Y_t$ et si l'on dérive par rapport au temps :

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} + \frac{\dot{Y}_t}{Y_t} \quad s(1/k) = \dot{k}/k + g + \beta s(1/k) + \alpha \eta$$

$$\dot{k} + gk + \beta s + \alpha \eta k = s \quad \dot{k} = s - \beta s - gk - \alpha \eta k$$

$$\dot{k} = s(1-\beta) - (g+\alpha\eta)k \quad \text{mais} \quad \alpha = 1 - \beta, \text{ donc}$$

(2.7) $\dot{k} = s\alpha - (g+\alpha\eta)k$. Si l'on résout cette équation, on a :

$$k_t = \frac{s\alpha}{g+\alpha\eta} + Ce^{-(g+\alpha\eta)t} \quad (2.8) \quad \text{où } C \text{ est une constante}$$

ou en termes du ratio output-capital $v = Y/K = 1/k$

$$v_t = \frac{g + \alpha\eta}{\alpha(s + Be^{-(g+\alpha\eta)t})} \quad (2.8') \quad \text{et } B \text{ est une constante.}$$

Soit s_0 et s_1 des taux d'épargne avant et après l'augmentation respectivement, et v_0^* et v_1^* les ratios output/capital associés à s_0 et s_1 . Au fur et à mesure que t croît (période d'ajustement) on aurait comme le vieux et le nouveau équilibres respectivement

$$v_0^* = \frac{g + \alpha\eta}{\alpha s_0} \quad \text{et} \quad v_1^* = \frac{g + \alpha\eta}{\alpha s_1} \quad (3)$$

si $t = 0$ on a $v_1^* = \frac{g + \alpha\eta}{\alpha(s_1 + B)}$ (3) (d'après (2.8)') et cela doit

être égal à v_0^* .

de là on prend que $B = s_0 - s_1$ et (2.8')

peut être écrit comme :

$$v_t = \frac{g + \alpha\eta}{\alpha(s + (s_0 - s_1)e^{-(g+\alpha\eta)t})} \quad (2.8'')$$

soit l'ajustement total de v_0^* à v_1^* noté Δr^* et alors $v_0^* - v_1^*$ sera égal à :

$$v_0^* - v_1^* = \frac{g + \alpha\eta}{\alpha s_0} - \frac{g + \alpha\eta}{\alpha s_1} = \frac{(s_1 - s_0)(g + \alpha\eta)}{\alpha s_0 s_1}$$

On suppose qu'à l'instant $t = t_k$, l'ajustement est de $k\%$ de l'ajustement total. Donc Δv_k^* est l'ajustement à t_k .

Soit v_k la valeur de v à t_k , alors :

$$v_k = v_0^* - \Delta r_k^* = \frac{(g + \alpha\eta) \cdot (s_1 - k(s_1 - s_0))}{\alpha s_0 s_1}$$

mais v_k doit être égal à v dans l'équation (2.8'') avec $t = t_k$

et on peut écrire $e^{(g+\alpha\eta)t_k} = 1 + \frac{s_0 k}{s_1(1-k)}$

ou encore :

$$t_k = \frac{\log(1 + s_0 k / (s_1(1-k)))}{g + \alpha\eta} \quad (2.9)$$

De là, par exemple, si le taux d'épargne croît de 11.55 à 12.54, pour un ajustement de 10% il faut 4 années, 50% d'ajustement 30 années, 70% d'ajustement 90 années et pour 90% 100 années. Comme on peut constater par le biais du Tableau 1, l'ajustement serait en effet très lent. L'expérience de Sato peut être vu à la Figure 3. On montre aussi que on peut interpréter les résultats de Sato comme en fait un choc où le stock de capital est réduit par rapport a l'état stationnaire (Figure 2) sauf que dans ce cas-là on n'a pas un changement du stock de capital à l'état stationnaire, tandis qu'un changement de s implique un nouveau k^* , c'est ce genre d'expérience qui font King et Rebello.

T A B L E A U 1

	POURCENTAGE D'AJUSTEMENT								
	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
	TEMPS NÉCESSAIRE EN ANNÉES POUR ATTEINDRE % D'AJUSTEMENT								
	3.60	8.40	13.89	20.28	27.88	37.25	49.43	66.72	96.49

Donc pour atteindre 40 % d'ajustement il faut 20 années, et l'ajustment serait en effet très lent comme le pretendait Sato.

2.3 Le modèle de Ramsey-Cass-Koopmans

Dans les modèles précédents il n'y avait aucune hypothèse d'optimisation et c'est ce qui les distingue des modèles de Ramsey-Cass-Koopmans que nous examinons dans cette section.

Les consommateurs choisissent une suite de consommations futures de sorte à maximiser une somme actualisée des utilités futures de chaque période ⁽⁴⁾:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(C_t) N_t dt = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} N_t dt \quad (2.10)$$

Il y a aussi une contrainte de ressources qui doit être satisfaite $\dot{K}_t = F(K_t, N_t) - C_t - \delta K_t$ où $F()$ est une fonction homogène de degré 1 et satisfait les propriétés d'une fonction de production néoclassique standard (concavité etc..). On peut réécrire la contrainte en termes par tête comme $\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - \eta k_t - \delta k_t$ ($f(k)$ respecte les conditions d'Inada).

Donc le problème revient à :

$$\text{MAX } U_0 = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-\eta)t} U(C_t) dt$$

$$\text{s.c. } \dot{k}_t = f(k_t) - c_t - \eta k_t - \delta k_t$$

$$k_0 > 0 \text{ donné.}$$

Par le biais de la théorie de la commande optimale on peut écrire l'Hamiltonien et dériver les conditions de premier ordre du problème.

$$H() = e^{-(\rho-\eta)t} \cdot ((C_t^{1-\sigma}) / 1-\sigma) + \lambda [f(k_t) - c_t - \eta k_t - \delta k_t]$$

où λ est le prix d'ombre de l'investissement

Les C.P.O. sont :

$$(A) H_c = 0 \text{ et donc } e^{-(\rho-\eta)t} c^{-\sigma} = \lambda$$

$$(B) H_k = -\dot{\lambda} \text{ et donc } \dot{\lambda} = -\lambda (f'(k) - \eta - \delta)$$

$$(C) \lim_{t \rightarrow \infty} k_t \lambda_t = 0$$

De (A) et (B) on peut écrire :

$$\dot{c}/c = \sigma^{-1} \cdot (-\rho + f'(k) - \delta) \quad (5) \quad (2.11)$$

(On peut voir la dynamique de transition à la Figure 4 . Si on est à (c_0, k_0) , on va converger vers k^* . Le long de cette trajectoire, le capital par tête croît mais à un taux décroissant ($\dot{k}/k > 0$) qui sera égal à zéro à l'état stationnaire. Au fur et à mesure que le ratio capital/travail croît le productivité marginal du capital diminue et donc le taux d'intérêt. Mais encore une fois il reste ouverte la question de la duration de ce processus.

3 - LE MODÈLE DE BASE

Ayant déjà présenté quelques modèles sous-jacentes à l'analyse, on montre ici le modèle que King et Rebello utilisent et qui sera l'objet de notre étude. Le modèle considéré est un modèle tout-à-fait standard d'inspiration néoclassique à un secteur.

3.1 Description de L'économie

A) La fonction de Production

Il y a un bien final dans cet économie qui peut être consommé ou investi. Ce bien est produit par le biais d'une technologie à rendements d'échelle constants donnée par :

$$Y_t = A_t F(K_t, X_t N_t) \quad (3.1)$$

où Y_t est l'output, K_t le capital physique et N_t l'input travail. On peut avoir des changements temporaires dans le facteur de productivité total A_t , mais les variations technologiques permanents sont restreints à la productivité du travail X_t ⁽⁶⁾.

L'accumulation de Capital

Dans le cadre du modèle néoclassique le bien peut être consommé ou investi, donc la dynamique du stock de capital est, en termes discrets :

$$(3.2) \quad K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

où I_t est l'investissement brut et δ est le taux de dépréciation du capital. Il y a aussi la contrainte de ressources qui nous dit que les utilisations totales des biens doivent être égaux à l'output.

$$(3.3) \quad C_t + I_t = Y_t$$

On peut aussi définir le taux de croissance de la productivité du travail et de l'input travail comme étant :

$$(3.4) \quad N_t = \gamma_n N_{t-1}$$

$$(3.5) \quad X_t = \gamma_x X_{t-1}$$

$$\text{où } \gamma_n - 1 = (N_t - N_{t-1})/N_{t-1} \quad \gamma_x - 1 = (X_t - X_{t-1})/X_{t-1}$$

Il y a deux spécifications possibles pour l'épargne :

(A) suivant la ligne Solow/Sato où l'épargne est une fraction fixe du revenu :

(3.6) $I_t = sY_t + \delta Y_t$, où s est précisément le taux d'épargne, et

(B) suivant la spécification de Ramsey-Cass-Koopmans où l'épargne est déterminée pour un comportement optimal d'un consommateur représentatif qui choisit une suite de consommations futures optimales. King et Rebello travaillent avec la spécification suivante pour la fonction de d'utilité :

$$(3.7) U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j M_{t+j}^{\eta} U\left(\frac{C_{t+j}}{M_{t+j}}\right)$$

Dans cette spécification β est le facteur d'actualisation et c 'est compris entre 0 et 1, M_t est le numéro de membres de la famille, et η c 'est un paramètre qui reflète l'évaluation des futurs membres de la famille, et

$$U(C_t) = \begin{cases} \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}, & \text{pour } 0 < \sigma < 1 \\ \log(C_t), & \text{si } \sigma = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Pour l'offre de travail ils considèrent que chaque membre de la population offre n heures , tel que $N_t = n.M_t$

3.2 Estimations du modèle de Solow/Sato - Démarche suivie.

On suppose d'abord une fonction de production Cobb-Douglas

$$Y_t = A_t K_t^{1-\alpha} (N_t X_t)^\alpha \quad (8) \quad (3.8)$$

où $N_t X_t$ est le travail mesuré en unités d'efficience. Puisque la variation en A est supposé d'être temporaire, on peut négliger son effet et on normalise A à 1. Cela tient compte du fait qu'on est intéressé à l'état stationnaire, c'est-à-dire le long terme. Comme on a déjà dit, on a utilisé le logiciel GAMS/MINOS (General Algebraic Modelling System) qui a été conçu pour résoudre ce genre de problème. La démarche comprend 3 pas :

- 1) Résoudre analytiquement le problème ;
- 2) Calibrer les paramètres du modèle et
- 3) Résoudre numériquement le problème.

Dans l'expérience de SATO/SOLOW la résolution du modèle est assez simple et consiste à combiner les équations (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) et (3.8), D'où on tire :

$$K_{t+1} - K_t = s K_t^{1-\alpha} (N_t X_t)^\alpha - \delta K_t$$

Si l'on étudie l'économie transformée avec $k_t = K_t / M_t X_t$, $y_t =$

$Y_t / M_t X_t$ etc.. on en obtient :

$$\frac{K_{t+1}M_{t+1}X_{t+1}}{M_{t+1}X_{t+1}M_tX_t} - \frac{K_t}{M_tX_t} = s(K_t/M_tX_t)^{1-\alpha}(N_tX_t/M_tX_t)^\alpha - \delta K_t/M_tX_t$$

$$k_{t+1}\gamma_x\gamma_n - k_t = sk_t^{1-\alpha}n^\alpha - \delta k_t \quad (3.9)$$

La démarche adoptée pour le calibrage des paramètres du modèle suit une logique simple. À partir des données issues de King et Rebello, l'équilibre stationnaire initial est dérivé de (3.9).

$$k^*\gamma_x\gamma_n - k^* = sk^{*(1-\alpha)}n^\alpha - \delta k^*$$

$$k^*(\gamma_x\gamma_n - (1-\delta)) = sk^{*(1-\alpha)}n^\alpha$$

$$d'où \quad k^* = \left[\frac{sn^\alpha}{(\gamma_x\gamma_n - (1-\delta))} \right]^{1/\alpha} \quad (3.10)$$

D'après les valeurs des paramètres de King et Rebello (basées sur les données de Sato), $s = 0.12$, $\alpha = 2/3$, $\gamma_x = 1.02$, $\gamma_n = 1.015$ et $\delta = 0.10$ ⁽¹⁰⁾ ça implique une valeur pour k^* de 0.167.

La convergence de (3.9) peut être vue à partir de

$k_{t+1}/k_t = sk_t^{-\alpha}n^\alpha + (1-\delta)$ dont le graphique est dessiné à la Figure 5. Si $k_0 < k^*$, $k_{t+1} > k_t$ ce qui implique que à l'instant suivant k_t ira croître pour k_1 , mais $k_1 < k^*$ etc.... Si par contre $k_0 > k^*$ le processus va dans le sens contraire ⁽¹¹⁾.

On est maintenant prêt à réaliser l'expérience envisagée. On suppose que initialement l'économie est à l'état stationnaire donné par (3.10). On donne un choc à $t = 0$ et le résultat est que l'économie n'est plus à l'équilibre, et le stock de capital doit s'ajuster jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint à nouveau. Mais au lieu de se concentrer sur un choc sur le taux d'épargne (ce qui change l'équilibre stationnaire), King et Rebello supposent plutôt que le choc est donné sur le stock de capital initial k_0 (ce qui ne change pas l'équilibre stationnaire - voir Figures 5 et 2). Le stock de capital initial qui est une donnée fondamentale pour le problème et qui donne la magnitude du choc est tel que l'output est 50% au-dessous du niveau de l'état stationnaire.⁽¹²⁾ Donc le modèle a été calibré pour les variables à l'état stationnaire et ensuite on a donné un choc en fixant k_0 à 12.5 % du niveau de l'état stationnaire. Or,

$$k_{t+1}\gamma_x\gamma_n - k_t = sk_t^{1-\alpha}n^\alpha - \delta k_t, \quad t = 1 \dots n$$

est un système de équations aux différences et donc on utilise GAMS pour le résoudre. Nos résultats ne sont pas similaires à ceux obtenus par King et Rebello comme on peut le voir à la Figure 5-C. Nos résultats sont beaucoup plus semblables aux obtenus par Barro et Sala-i-Martin(1990) où le modèle prévoyait que l'écart entre k_0 et k^* disparaît en moins que six

années. On a travaillé aussi ne supposant pas de dépréciation ce que ralentit beaucoup la convergence et augmente la durée de la dynamique de transition et confirme l'observation de Sato(1966). L'évolution du stock de capital et de l'output sont montrés aux figures 5-A et 5-B. On note particulièrement la vitesse de la convergence.

3.3 Le modèle d'optimisation de Ramsey-Cass-Koopmans

Comme on l'a souligné, une autre possibilité c'est que le taux d'épargne soit endogène et découle des choix optimaux des consommateurs le long d'un horizon de temps. Puisque ce sont les trajectoires de consommation qui découlent de l'optimisation intertemporelle qui nous intéressent, on doit considérer comment le stock de capital et son prix d'ombre évoluent à travers le temps comme c'est standard dans ce genre de modèles. Mais comme on travaille avec un modèle en temps discret, on arrivera à un système d'équations aux différences dans le stock de capital et le prix d'ombre du capital. King et Rebello ont choisi la méthode qui s'appelle shooting pour résoudre ce système d'équations.⁽¹³⁾

La méthode standard d'analyser des modèles avec "steady state growth" consiste à transformer l'économie de telle sorte que la dynamique soit plus facile à étudier. Dans le contexte de ce modèle ici considéré, cette transformation consiste à diviser toutes les variables du système par la composante de croissance X_t . On suit la démarche de King et Rebello et on divise toutes les variables par $M_t X_t$, de sorte que $c=C/MX$, $k=K/MX$ etc... Cet économie est identique à celle d'une économie simple sans croissance sauf que l'équation d'accumulation de capital changera ainsi que le taux de préférence effective du temps (à cause de la transformation de la consommation). Selon la méthode qu'on utilise, on résout analytiquement le problème, et on trouve les

conditions de première ordre (C.P.O.)

On travaille avec les équations (3.2) + (3.3) + (3.4) + (3.5) + (3.7) + (3.8).

$$U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j M_t^{\eta} U \left[\frac{C_t}{M_t} \right]$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j M_t^{\eta} \frac{1}{1-\sigma} \left[\frac{C_t}{M_t} \right]^{1-\sigma}$$

$$\beta^0 M_0^{\eta} \frac{1}{1-\sigma} \left[\frac{C_0}{M_0} \right]^{1-\sigma} + \beta^1 M_1^{\eta} \frac{1}{1-\sigma} \left[\frac{C_1}{M_1} \right]^{1-\sigma} + \beta^2 M_2^{\eta} \frac{1}{1-\sigma} \left[\frac{C_2}{M_2} \right]^{1-\sigma} \dots$$

$$= \frac{1}{1-\sigma} \left[\beta^0 M_0^{\eta} X_0^{1-\sigma} \left[\frac{C_0}{M_0 X_0} \right]^{1-\sigma} + \beta^1 M_1^{\eta} X_1^{1-\sigma} \left[\frac{C_1}{M_1 X_1} \right]^{1-\sigma} + \beta^2 M_2^{\eta} X_2^{1-\sigma} \left[\frac{C_2}{M_2 X_2} \right]^{1-\sigma} \dots \right]$$

$$= \frac{1}{1-\sigma} \left[\beta^0 M_0^{\eta} X_0^{1-\sigma} C_0^{1-\sigma} + \beta^1 M_1^{\eta} X_1^{1-\sigma} C_1^{1-\sigma} + \beta^2 M_2^{\eta} X_2^{1-\sigma} C_2^{1-\sigma} \dots \right]$$

$$= M_0^{\eta} \frac{X_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} \left[\beta^0 C_0^{1-\sigma} + \beta^1 \left[\frac{M_1}{M_0} \right]^{\eta} \left[\frac{X_1}{X_0} \right]^{1-\sigma} C_1^{1-\sigma} + \beta^2 \left[\frac{M_2}{M_0} \right]^{\eta} \left[\frac{X_2}{X_0} \right]^{1-\sigma} C_2^{1-\sigma} \dots \right]$$

$$= M_0^\eta \frac{X_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} [\beta^0 C_0^{1-\sigma} + \beta^1 \gamma_n^\eta \gamma_x^{1-\sigma} C_1^{1-\sigma} + \beta^2 [\gamma_n^2]^\eta [\gamma_x^2]^{1-\sigma} C_2^{1-\sigma} \dots \dots \dots]$$

$$= M_0^\eta \frac{X_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} [\beta^0 C_0^{1-\sigma} + \beta^1 \gamma_n^\eta \gamma_x^{1-\sigma} C_1^{1-\sigma} + [\beta \gamma_n^\eta \gamma_x^{1-\sigma}]^2 C_2^{1-\sigma} \dots \dots \dots]$$

$$= M_0^\eta \frac{X_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} [\beta_*^0 C_0^{1-\sigma} + \beta_*^1 C_1^{1-\sigma} + [\beta_*]^2 C_2^{1-\sigma} \dots \dots \dots]$$

$$M_0^\eta X_0^{1-\sigma} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_*^j \frac{1}{1-\sigma} [C_t]^{1-\sigma} \quad (3.11a)$$

$$\beta_* = \gamma_n^\eta \gamma_x^{1-\sigma} \beta, \sigma \neq 1 (0 < \sigma)$$

$$U = M_0^\eta \sum_{j=0}^{\infty} \beta_*^j [\log C_j + \log X_j], \sigma = 1 \quad (3.11b)$$

où $\beta_* = \gamma_n^\eta \gamma_x^{1-\sigma}$ et $\beta_* < 1$ pour assurer que l'utilité ne soit pas infinie. Le problème consiste donc à maximiser (3.11a) ou (3.11b) selon σ égal à 1 ou diffère de 1 sous la contrainte

$k_{t+1}\gamma_x\gamma_n - k_t + c_t = k_t^{1-\alpha}\eta^\alpha - \delta k_t$ ⁽¹⁴⁾ et le lagrangien est donc :

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \Lambda_t [F_t(k_t, n) - c_t + (1-\delta)k_t - \gamma_x\gamma_n k_{t+1}]$$

c'est convenable de définir λ_t comme $\Lambda_t / (\beta_*)^t$

$$L = U(c_t) + \beta_* U(c_{t+1}) + \dots + \\ \lambda_t [F_t(k_t, n) - c_t + (1-\delta)k_t - \gamma_x\gamma_n k_{t+1}] \\ + \lambda_{t+1} [F_{t+1}(k_{t+1}, n) - c_{t+1} + (1-\delta)k_{t+1} - \gamma_x\gamma_n k_{t+2}]$$

Ceci nous donne les Conditions de Premier Ordre (C.P.O.) du problème :

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = U'(c_t) - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = F_t(k_t, n) - c_t + (1-\delta)k_t - \gamma_n\gamma_x k_{t+1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t \gamma_n \gamma_x + \beta_* \lambda_{t+1} \left[\frac{\partial F_{t+1}}{\partial k_{t+1}} (k_{t+1}, n) + (1-\delta) \right] = 0$$

ça nous permet d'obtenir les équations dynamiques pour le capital et pour son prix d'ombre ⁽¹⁵⁾ :

$$(A) \lambda_t \gamma_n \gamma_x = \beta_* \lambda_{t+1} \left[\frac{\partial F_{t+1}}{\partial k_{t+1}} (k_{t+1}, n) + (1-\delta) \right] = 0$$

$$(B) c_t^{-\sigma} = \lambda_t$$

$$(C) F_t(k_t, n) - c_t + (1-\delta) k_t = \gamma_n \gamma_x k_{t+1}$$

et plus la condition terminale exprimée par la condition de transversalité :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\beta_*)^t \lambda_t k_{t+1} = 0$$

où (A), (B), (C) doivent tenir pour $t = 0, \dots, \infty$, le stock de capital k_0 est donné et la condition de transversalité doit être satisfaite. On a donc un système d'équations pour t allant de 0 à ∞ et pour le résoudre on utilise GAMS.

Le calibrage du modèle

La démarche suivie pour le calibrage des paramètres du modèle suit une logique relativement simple. Le calibrage est la procédure ou plutôt une description de comment les valeurs pour les paramètres de la technologie, des préférences etc... sont assignées. Les données tirés de l'étude de King et Rebello sont : la part de la main d'oeuvre, $\alpha = 2/3$, nombre d'heures que chaque membre de la population consacre à la production, $n = 0.2$, taux de dépréciation $\delta = 0.10$, taux de croissance de la main d'oeuvre $\gamma_n = 1.1024$, et le taux d'intérêt à l'équilibre stationnaire est de 6.5% a.a.. On sait que à l'état stationnaire la productivité marginale du capital doit satisfaire $(D_1 F(k_t, n) - \delta) = r^*$, où r^* est le taux d'intérêt à l'état stationnaire. De là on prend le stock de capital k^* , car :

$$[(1-\alpha)k^{2/3}n^\alpha - \delta] = r^* \quad \text{et alors}$$

$$k^* = \left(\frac{r^* + \delta}{(1-\alpha)n^\alpha} \right)^{3/2}$$

la valeur pour k^* est 0.574. Avec la valeur de k^* on trouve β^* car $\beta^*(1+r^*) = \gamma_x^{1-\sigma}\gamma_n^\eta$ et on trouve $\beta^* = 0.9629$.

$$F_c(k_*, n) - c_* + (1 - \delta)k_* = \gamma_n \gamma_x k_* \quad \text{on prend } c_*$$

$$c_*^{-\sigma} = \lambda_* \quad \text{et } \lambda_* = 4.713$$

et donc on trouve aussi y^* car $y^* = k^{*1/3} = 0.284$.

Le capital initial a été choisi de façon que $F(k_0, 1) / (F(k^*, 1) \gamma_x^{100}) = 1/7$ et on trouve $y_0 = 0.126$ ce qu'implique $k_0 = 0.00585$. La valeur de γ_x est égal à 1.0114 et c'est la solution à $\gamma_x^{100} = 4$ (la croissance de la productivité pendant 100 années).

On suppose que l'économie est à l'instant initial à l'équilibre stationnaire et tout-à-coup au temps $t=0$, le stock de capital est réduit. Le résultat est que la position présente de l'économie n'est à l'équilibre et le logiciel GAMS va chercher la solution en maximisant la fonction objectif sous contraintes. Puisque on a déjà résolu le système de façon analytique et on a donné les C.P.O. comme systèmes d'équation, GAMS va résoudre un problème trivial (sauf pour l'extension des 100 périodes) qui satisfait aux contraintes à chaque t et la condition terminale.

Les figures 6, 7, 8 et 9 fournissent l'information de base sur la dynamique de transition du modèle néoclassique (RAMSEY-CASS-KOOPMANS) lorsque on travaille avec une fonction d'utilité du type log ($\sigma=1$). On montre la consommation (fig.6) et le stock de capital par tête (fig.7) et toutes les variables sont déflatées

par X et leurs valeurs à l'équilibre stationnaire sont normalisés à 1. La consommation monte de façon monotone mais à un taux décroissant. Ce résultat était attendu d'un point de vue analytique lorsque on travaille avec une fonction du type CRRA à élasticité constante (pas d'incertitude dans le modèle). Le pas de convergence est assez vite ce qui contredit ce qu'on attendait.

Le taux de croissance de l'output (fig.8) est , au début élevé, mais après ce taux se réduit. Finalement la valeur impliquée pour le taux d'intérêt (fig.9) est très élevé, aux environs de 40%. Ce fait traduit le rendement décroissant par rapport au facteur qui s'accumule (capital) et nous dit que pour financer la croissance le taux d'intérêt devrait être de l'ordre de 40% au début du processus. Ce fait est un élément clé dans le modèle néo-classique. Puisque un taux d'intérêt de 40% nous semble démesuré, vis-à-vis l'expérience nord-américaine, on essaie quelques variations des paramètres du modèle de base.

Le pas de convergence de la dynamique de transition peut être réduit de façon considérable si l'on diminue l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation ($1/\sigma$). Les figures 10,11,12,13 et 15 décrivent la dynamique de transition associé à $\sigma=5$. Cette diminution du degré de substitutabilité rend le processus plus lent, mais le taux d'intérêt demeure encore élevé (figure 15).

Les figures 16 ,17 et 17-A montrent la dynamique associée à une version du modèle de base où la part du capital physique est de 0.5. La dynamique de transition est plus persistante par rapport au modèle de base, mais le taux d'intérêt, malgré le fait qu'il est plus bas (28%) est encore élevé si l'on prend en compte son niveau historique (figure 17-A).

De là on sort la conclusion que le taux d'intérêt réel est très élevé au début du siècle si l'on considère le modèle néo-classique. King et Rebello utilisent ce fait là pour dire que la croissance exogène ne explique rien. On a encore considéré la possibilité de travailler avec une fonction de production un peu plus général, on a choisi la fonction CES, avec $\rho=0.5$ (paramètre de substitution). Dans ce cas-là le taux d'intérêt est encore plus élevé, comme on peut voir à l'aide de la figure 18-B.

On regarde avec soin les résultats de King et Rebello, car à mon avis il reste encore une possibilité que s'avère fort intéressant, c-à-d, l'introduction du capital humain. Cette possibilité pourrait fournir des résultats plus raisonnables, car on introduit une variable de choix de plus pour les agents, la partie de son temps destiné à sa formation, ce qui va influencer l'output et donc la productivité marginal du capital. On peut faire ça, tout en gardant les propriétés asymptotiques du modèle néo-classique et la croissance exogène. Il faut donc explorer ça.

4 - L'ACCUMULATION DE CAPITAL HUMAIN ET LE MODÈLE DE LUCAS (1988)

Les modèles de capital humain ont une histoire très longue et sont associées aux noms de Schultz et Becker. Le thème a été repris récemment avec un article que Lucas lança et qui traite des nouvelles théories de la croissance endogène. Lucas attache une grande importance aux effets externes, qui jouent un grand rôle dans le processus d'éducation. Lucas argumente qu'on peut avoir des rendements d'échelle constants dans les inputs qui sont accumulés en argumentant que tous les inputs peuvent être accumulés. Donc il introduit le capital humain dans la fonction de production au lieu des corps physiques. Le capital humain peut changer par le biais de l'investissement (les individus peuvent choisir combien de son temps ils vont dédier aux études) et alors on peut accumuler dans les deux inputs de la fonction de production. Tout ce dont on a besoin pour générer la croissance est avoir que l'incitation à investir dans le capital humain soit non décroissant dans le capital humain. Autrement dit, il postule une fonction de production que c'est à rendement constant d'échelle de sorte que son produit marginal (qui représente l'incitation à dépenser son temps étudiant) soit constant.

Lucas considère une économie fermée avec des marchés compétitifs et une population N_t à l'instant t où les agents sont tous identiques et rationnels. La population croît à un taux constant γ_n .

Soit c_t , $t > 0$ un flux de consommation par tête d'un seul bien qui peut être à la fois consommé ou investi. Les préférences sont :

$$U_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j M_{t+j}^{\eta} U\left(\frac{C_{t+j}}{M_{t+j}}\right) \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\beta^*)^j N_{t+j} \frac{C_{t+j}^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (4.2)$$

Soit h_t le niveau individuel de capital humain d'un travailleur typique. Il représente un indice d'efficacité du travail. À un nombre N_t de travailleurs employés dans la productions de biens physiques correspond une quantité $H_t = h_t N_t$ de capital Humain. C'est cette quantité qui intervient comme input dans la fonction de production. Considérons maintenant la production de capital humain. Si l'on néglige le rôle du capital physique dans cette production, on peut écrire :

$$h_{t+1} - h_t = G(1-u_t)h_t \quad (4.3)$$

L'individu consacre une partie u de son temps de travail aux activités productives et une partie $1-u_t$ à sa formation. Le taux de croissance de son capital humain dépende du temps passé à la formation selon une fonction de production de capital humain G

qui a des rendements d'échelle constants , c'est-à-dire le taux de croissance est proportionnel au temps qu'il a passé en étudiant $(1-u)$. Si aucun effort n'est dédié au capital humain $u_t = 1$ et on n'accumule pas. Si toute effort est dédié au capital humain, u_t croît à son taux maximal.

L'output Y dans cette économie (défini comme produit national net) dépende du stock de capital, K , de la main d'oeuvre effective, uN :

$$Y_t = A_t K_t^\alpha [u_t h_t N_t]^{1-\alpha} \quad (4.4)$$

Le terme $u_t h_t N_t$ est souvent appelé capital humain. On peut donc considérer le modèle de King et Rebello dans son papier comme un cas particulier d'une formulation plus général c-à-d

$$Y_t = A_t K_t^\alpha [u_t h_t X_t M_t]^{1-\alpha} \quad (4.5)$$

sauf que u_t et h_t sont endogènes tandis que pour King et Rebello ils étaient plutôt exogènes. L'accumulation de capital est supposé de suivre :

$$K_{t+1} - K_t = Y_t - C_t \quad (4.6)$$

Le truc consiste à travailler avec une équation d'accumulation de capital humain un peu truqué ⁽¹⁶⁾ :

$$h_{t+1} - h_t = \phi(1-u_t)^\epsilon h_t^{1-\epsilon}, \quad 0 < \epsilon < 1 \quad (4.7)$$

Le truc ici, c'est de supposer de rendements décroissants à l'échelle, tandis que Lucas travaillait avec des rendements constants. Avec les équations (3.2) + (3.3) + (3.4) + (3.5) + (4.8) + (4.2), on ajoute l'équation à différences qui donne la dynamique d'accumulation du capital humain, c-à-d, une équation reliant le taux de croissance de h_t à son niveau:

$$h_{t+1} - h_t = \phi(1-u_t)^\epsilon h_t^{1-\epsilon} - \delta_h h_t, \quad 0 < \phi \quad (4.8)$$

où δ_h est le taux de dépréciation du capital humain fixé à 0.08, u_t variable de choix qui mesure l'effort dédié à la production de capital physique. le paramètre ϵ est situé entre 0 et 1, ce qui veut dire qu'au fur et à mesure que h croît on reprend le modèle de croissance néoclassique (croissance exogène),

Le problème de maximisation (ici on maximise par rapport à c et u) , peut être écrit comme suit :

$$\text{MAX} \sum_{t=0}^{\infty} (\beta^*)^t \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

assujetti aux conditions :

$$k_{t+1}\gamma_n\gamma_x = (1-\delta_k)k_t + Y_t - C_t$$

$$h_{t+1} - h_t = \phi(1-u_t)^\epsilon h_t^{1-\epsilon} - \delta_h h_t$$

Ça nous permet écrire le lagrangien du problème comme suit :

$$L = U(C_t) + \beta^* U(C_{t+1}) + (\beta^*)^2 U(C_{t+2}) + (\beta^*)^3 U(C_{t+3}) + (\beta^*)^4 U(C_{t+4}) + \dots +$$

$$\lambda_t \beta^* [Y_{t+1} - C_{t+1} + (1-\delta_k)k_{t+1} - \gamma_n\gamma_x k_{t+2}] + \lambda_{t+1} (\beta^*)^2 [Y_{t+2} - C_{t+2} + (1-\delta_k)k_{t+2} - \gamma_n\gamma_x k_{t+3}]$$

$$\theta_t [h_t^{1-\epsilon} \phi(1-u_t)^\epsilon + (1-\delta_h)h_t - h_{t+1}] + \theta_{t+1} [h_{t+1}^{1-\epsilon} \phi(1-u_{t+1})^\epsilon + (1-\delta_h)h_{t+1} - h_{t+2}] + \dots +$$

En dérivant les conditions de première ordre , on arrive à ⁽¹⁷⁾ :

$$\frac{\partial L}{\partial C_t} = U'(C_t) - \lambda_t = 0 \Rightarrow C_t^{-\sigma} = \lambda_t \quad (A)$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t \gamma_n \gamma_x + \beta^* \lambda_{t+1} [\alpha k_t^{\alpha-1} (u_t h_t)^{1-\alpha} + (1-\delta_k)] = 0 \quad (B)$$

$$\frac{\partial L}{\partial h_{t+1}} = \beta^* \lambda_{t+1} [(1-\alpha) k_{t+1}^\alpha u_{t+1}^{1-\alpha} h_{t+1}^{-\alpha}] - \theta_t + \theta_{t+1} \beta^* [(1-\epsilon) h_{t+1}^{-\epsilon} \phi(1-u_{t+1})^\epsilon + (1-\delta_h)] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = Y_t - C_t + (1 - \delta_k) k_t - \gamma_n \gamma_x k_{t+1} = 0 \quad (D)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_t} = \phi (1 - u_t)^\epsilon h_t^{1-\epsilon} + (1 - \delta_h) h_t - h_{t+1} = 0 \quad (E)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \lambda_t (1 - \alpha) k_t^\alpha h_t^{1-\alpha} u_t^{-\alpha} - \theta_t \phi (1 - u_t)^{\epsilon-1} h_t^{1-\epsilon} = 0 \quad (F)$$

ça nous permet d'obtenir les équations dynamiques pour le capital physique (k_t), pour le capital humain (h_t) et leur prix d'ombre λ_t et θ_t respectivement :

$$C_t^{-\sigma} = \lambda_t \quad (A)$$

$$\lambda_t \gamma_n \gamma_x = \beta_* \lambda_{t+1} [\alpha k_t^{\alpha-1} (u_t h_t)^{1-\alpha} + (1 - \delta_k)] = 0 \quad (B)$$

$$k_t^\alpha (u_t h_t)^{1-\alpha} = C_t + (1 - \delta_k) k_t - \gamma_n \gamma_x k_{t+1} \quad (D)$$

$$\phi (1 - u_t)^\epsilon h_t^{1-\epsilon} + (1 - \delta_h) h_t = h_{t+1} \quad (E)$$

$$\beta_* \lambda_{t+1} [(1-\alpha) k_{t+1}^\alpha u_{t+1}^{1-\alpha} h_{t+1}^{-\alpha}] + \theta_{t+1} \beta_* [(1-\epsilon) h_{t+1}^{-\epsilon} \phi (1-u_{t+1})^\epsilon + (1-\delta_h)] = \theta_t \quad (C)$$

où (A) donne l'évolution de la consommation, (B) donne l'évolution du prix d'ombre du capital physique (λ_t), (C) donne l'évolution du prix d'ombre du capital humain (θ_t), (D) donne l'évolution du capital physique (k_t) et (E) nous donne l'évolution du capital humain (h_t). À cela il faut ajouter les conditions terminales du problème exprimées par les conditions de transversalité pour le capital physique et humain :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\beta_*)^t \lambda_t k_{t+1} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\beta_*)^t \theta_t h_{t+1} = 0$$

Or, il faut que (A), (B), (C), (D) et (E) tiennent pour $t = 0, \dots, \infty$ et que les conditions terminales soient satisfaites étant donné k_0 et h_0 . On a donc un système d'équations pour t allant de 0 à ∞ et pour le résoudre on utilise GAMS.

Le calibrage du modèle

La démarche suivie pour le calibrage des paramètres du modèle est à peu près la même utilisée à tantôt. Les données sorties de l'étude de King et Rebello sont : la part de la main d'oeuvre, $\alpha = 2/3$, nombre d'heures que chaque membre de la population consacre à la production, $n = 0.2$, taux de dépréciation $\delta = 0.10$, taux de croissance de la main d'oeuvre $\gamma_n = 1.1024$, et le taux d'intérêt à l'équilibre stationnaire est de 6.5% a.a.. On a supposé que à l'état stationnaire $u^* = 0.99$ (en fait en imposant $u^* = 1$, on aurait une solution de coin, ce que poserait des problèmes additionnels sans ajouter rien à l'intuition du modèle). On maintient le même genre d'expérience que King et Rebello, c'est-à-dire, $F(k_o, u_o h_o) / F(k^*, u^* h^*) \gamma_x^{100} = 1/7$, autrement dit, l'output à l'instant initial est 1/7 de celui à l'état stationnaire et 50 % de la croissance de l'output est due au progrès technique exogène et 50 % due à la dynamique de transition. La différence ici c'est qu'on a deux types de capital et donc en fait on choisit une combinaison (k_o, h_o) qui respecte la relation mentionnée ci-dessus. Le paramètre ε a été choisi comme étant égal à 0.6. Il faut remarquer que on ne trouve pas dans la littérature une estimation pour ce paramètre, donc on a choisi le paramètre qui se conforme le mieux à nos résultats. Le paramètre ρ a été choisi comme étant égal à 0.5 et suit le même raisonnement valable pour ε .

(On suppose que l'économie est à l'instant initial à l'équilibre stationnaire et tout à coup au temps 0, le stock de capital est réduit (physique et humain). Le résultat est que la position présent de l'économie n'est plus à l'équilibre et le système d'équations va nous permettre de reconstituer l'évolution jusqu'à que nous atteignons l'équilibre stationnaire. Puisque on a déjà solutionné de façon analytique le problème et on a donné les CPO comme étant le système d'équations, GAMS va résoudre le problème en nous donnant la solution qui satisfait aux contraintes à chaque t e aux conditions terminales.

Les figures 19, 20, 21 et 22 fournissent l'information de base sur la dynamique de transition du modèle néoclassique avec l'introduction du capital humain. On montre l'évolution de la consommation (fig.19), le stock de capital physique par tête (fig.20), l'output (fig.21), le taux d'intérêt (fig.22) et l'évolution du stock de capital humain (fig.23). Toutes les variables sont déflatées par X et leurs valeurs à l'équilibre stationnaire sont normalisés à 1.

La consommation monte de façon monotone mais à un taux décroissante, ce qui était attendu, car on travaille avec une fonction d'utilité du type CRRA à élasticité constant.

Le taux de croissance de l'output est, au début élevé, mais après ce taux se réduit. Le même fait peut être observé pour le stock de capital physique. On a donc la même dynamique qu'on avait

avant (c-à-d, sans capital humain), la convergence est stable et unique.

L'évolution du stock de capital humain est aussi convergent vers l'état stationnaire, l'équilibre est stable et unique.

Mais la différence est dans la figure 22 qui nous montre l'évolution du taux d'intérêt. Ici, contrairement au modèle précédent, le taux d'intérêt sont assez raisonnables (d'ordre de 15 % a.a.) tandis qu'avant on avait des taux de 40 %. Donc l'introduction du capital humain résout le problème d'un taux d'intérêt très élevé au début du processus de croissance. Mais quelle est l'explication pour cela ? Avant la fonction de production n'était qu'une fonction du capital physique :

$$Y_t = F(K_t, N_t X_t)$$

En tenant N_t et X_t , la fonction de production est concave, ou elle montre des rendements positives mais décroissantes par rapport au facteur qui s'accumule K ⁽¹⁸⁾. Ça donne l'allure à la courbe de produit marginal qui est bien connue. Puisque le taux d'intérêt est défini comme étant :

$$\frac{\partial F(K_t, N_t X_t)}{\partial K_t} - \delta = r$$

le taux d'intérêt présente la même allure. Mais puisque le stock

de capital au début du processus est très rare (celui associé avec un output à l'instant $t=0$ égal à $1/7$ du niveau à l'équilibre stationnaire), on voit que la productivité marginal du capital est donc très élevé et aussi le taux d'intérêt (figure 24). Alors le taux d'intérêt au début est très haut en réfléchissant la rareté du capital physique et donc sa élevée productivité marginal. Au fur et à mesure que le processus d'accumulation prends place, le stock de capital augmente et sa productivité marginal baisse.

Par contre si l'on introduit un autre type de capital : le capital humain, la relation est changée. La courbe du produit marginal du capital montre encore des rendements décroissants ,mais le taux d'intérêt au début, la productivité marginal est plus basse. Or, maintenant si le produit marginal du capital physique est très élevé par rapport au capital humain, les individus vont augmenter u (l'effort dédié à l'accumulation de capital physique), l'accumulation de capital humaine baisse (moins de temps consacré aux études par exemple et plus de temps à la production de biens). Ensuite l'accumulation du capital physique fait croître le stock de capital , son produit marginal décroît et donc le capital humain devient relativement plus rare et alors son produit marginal est plus élevé par rapport au capital physique. Les agents réduisent u et vont consacrer plus de temps à l'accumulation de capital humain. Le processus contraire arrive. L'introduction du capital humain , en fait

introduit une condition d'arbitrage entre les deux types de capital, ce qui empêche des valeurs démesurées pour les produits marginaux. En particulier le problème d'un taux d'intérêt très élevé au début est corrigé.

5 - CONCLUSION

Dans le présent travail, on a essayé de reproduire les résultats des expériences qui ont fait King et Rebello. On a obtenu les mêmes résultats qualitatives qu'ils ont obtenu dans son papier. Quelques différences quantitatives peuvent être dû aux deux différentes méthodes utilisées.⁽¹⁹⁾

Mais au lieu de dire que la croissance exogène ne sert pas à fournir une explication adéquat à la croissance de l'économie américaine, soit à cause du taux d'intérêt (très élevé), soit à cause du pas de convergence (très vite), on préfère plutôt suggérer l'introduction du capital humain comme une autre possibilité à explorer . À quoi sert l'introduction du capital humain ? Or, l'introduction du capital humain fait que l'agent économique choisisse à chaque période la partie u de son temps dédié à sa formation, et par résidu la partie destiné à la production. Donc la choix va affecter l'output et donc la productivité marginal du capital physique et alors le taux d'intérêt. Ça peut être compris comme l'introduction d'une condition d'arbitrage entre les deux types de capitaux ce qui peut ralentir le pas de convergence et faire apparaître un taux d'intérêt plus raisonnable. Pour garder la propriété asymptotique du modèle et la croissance exogène, il faut supposer des rendements décroissantes d'échelle dans la fonction de production de capital humain (différemment de Lucas(1988) qui suppose des

rendements constants). Avec cet introduction , on a résolu le problème d'une taux d'intérêt très élevé au début. D'ailleurs, ça nous parait tout-à-fait intuitif, c'est-à-dire que le processus de croissance soit en partie expliqué par l'accumulation de capital physique mais aussi par l'accumulation de capital humain. Dans ce sens on est arrivé à la conclusion qu'il faut absolument prendre en compte le capital humain pour générer des dynamiques de transition qui puissent expliquer la convergence vers l'état stationnaire.

Malgré le fait d'avoir trouvé une formulation qui nous a permis de résoudre le problème pour le taux d'intérêt, la vitesse de convergence demeure encore beaucoup trop vite si l'on tient compte de la remarque de Sato (op.cit.). Pour résoudre cela, on pourrait essayer d'introduire des coûts d'ajustement , ce qui pourrait ralentir la vitesse de convergence. La question serait de savoir si l'introduction de ces coûts auraient des effets sur le taux d'intérêt. Cela reste encore une possibilité a être exploité.

5 - CONCLUSION

Dans le présent travail, on a essayé de reproduire les résultats des expériences qu'ont fait King et Rebello. On a obtenu les mêmes résultats qualitatives qu'ils présentent dans leur papier. Quelques différences quantitatives peuvent être dû aux deux différentes méthodes numériques utilisées.⁽¹⁹⁾

Mais au lieu de dire que la croissance exogène ne sert pas à fournir une explication adéquate à la croissance de l'économie américaine, soit à cause du taux d'intérêt (très élevé), soit à cause du pas de convergence (très vite), on préfère plutôt suggérer l'introduction du capital humain comme une autre possibilité à explorer. À quoi sert l'introduction du capital humain ? Or, l'introduction du capital humain fait que l'agent économique choisisse à chaque période la partie u de son temps dédié à sa formation, et par résidu la partie destinée à la production. Donc le choix va affecter l'output et donc la productivité marginale du capital physique et alors le taux d'intérêt. Ça peut être compris comme l'introduction d'une condition d'arbitrage entre les deux types de capital ce qui peut ralentir le pas de convergence et faire apparaître un taux d'intérêt plus raisonnable. Pour garder la propriété asymptotique du modèle et la croissance exogène, il faut supposer des rendements décroissants d'échelle dans la fonction de production de capital humain (différemment de Lucas(1988) qui suppose des

rendements constants). Avec cet introduction , on a résolu le problème d'une taux d'intérêt très élevé au début. D'ailleurs, ça nous paraît tout-à-fait intuitif, c'est-à-dire que le processus de croissance soit en partie expliqué par l'accumulation de capital physique mais aussi par l'accumulation de capital humain. Dans ce sens on est arrivé à la conclusion qu'il faut absolument prendre en compte le capital humain pour générer des dynamiques de transition qui puissent expliquer la convergence vers l'état stationnaire.

Malgré le fait d'avoir trouvé une formulation qui nous a permis de résoudre le problème pour le taux d'intérêt, la vitesse de convergence demeure encore beaucoup trop élevée si l'on tient compte de la remarque de Sato (op.cit.). Pour résoudre cela, on pourrait essayer d'introduire des coûts d'ajustement , ce qui pourrait ralentir la vitesse de convergence. La question serait de savoir si l'introduction de ces coûts auraient des effets sur le taux d'intérêt. Cela reste encore une possibilité à être explorée.

NOTES

(1) $\dot{K}_t = sK_t^\beta N_t^\alpha - \delta K_t$, si l'on divise par N_t

$$\frac{\dot{K}_t}{N_t} = \frac{sK_t^\beta N_t^\alpha}{N_t^{\beta+1-\beta}} - \delta k_t$$

$$\frac{\dot{K}_t}{N_t} = \frac{sK_t^\beta N_t^{\alpha+\beta-1}}{N_t^\beta} - \delta k_t \text{ mais } (\dot{K}_t/N_t) = \dot{k}_t = K_t/N_t - k_t \eta$$

$$k_t + \eta k_t = s k_t^\beta N_t^{\alpha+\beta-1} - \delta k_t$$

$$k_t = s k_t^\beta N_t^{\alpha+\beta-1} - (\eta + \delta) k_t$$

(2) $F = sA k_t^{-(1-\beta)}$

$$d\gamma_k/dk_t = dF/dk_t = sA(\beta-1)k_t^{(\beta-2)} < 0$$

$$dF^2/dk_t^2 = sA(\beta-1)(\beta-2)k_t^{(\beta-3)} > 0$$

$$F = sA k_t^{-(1-\beta)} = \frac{sA}{k_t^{(1-\beta)}} \text{ et}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F = 0$$

(3) on suppose que initialement l'économie est à l'équilibre sur le sentier de croissance à l'état stationnaire. À l'instant $t = 0$, le taux d'épargne est changé de s_0 à s_1 . Le résultat est que la présente position n'est plus une situation d'équilibre et le ratio capital/output doit s'ajuster jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint à nouveau. L'ajustement est décrit par (2.8'') et au fur et à mesure que t tend vers l'infini v_t tend vers $\frac{g + \alpha\eta}{\alpha s_1}$ que c'est le ratio output capital approprié au nouveau taux d'

épargne. Mais on voit aisément que l'ajustement n'est jamais accompli totalement, donc cela n'a pas du sens de demander combien de temps le processus prend, car il prendra une infinité de temps. On peut juste demander combien de temps il faut attendre pour que un pourcentage k de l'ajustement soit accompli.

(4) dans ces modèles il n'y a pas d'incertitude et une clairvoyance parfaite est synonyme d'anticipations rationnelles

(5) si l'on prend le log de (A)

$$-(\rho - \eta)t - \gamma \log(c_t) = \log \lambda$$

Prenons la dérivé par rapport au temps :

$$-(\rho - \eta) - \gamma(\dot{c}/c) = \dot{\lambda}/\lambda \text{ et } \dot{c}/c = \gamma^{-1}(-\rho + \eta - \dot{\lambda}/\lambda)$$

$$\dot{c}/c = \sigma^{-1}(-\rho + \eta + f'(k) - \eta - \delta) \quad (\text{Par B})$$

$$\text{et finalement } \dot{c}/c = \sigma^{-1}(-\rho + f'(k) - \delta)$$

(6) L'introduction du changement technique comme dans (3.1) est exprimé comme augmentant le travail (labor augmenting). En fait $Y_t = F(K, N, t) = G[b(t)K_t, a(t)N_t]$ où G est homogène de degré 1. Par définition le progrès technique est purement labor augmenting si $b(t) = 0$ et $a(t) > 0$. Phelps(1966) montre que pour qu'un état stationnaire soit possible, il faut que le changement permanent soit exprimé comme labor augmenting ce que justifie la spécification ci-dessus. Plus précisément, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un état stationnaire est que le progrès technique soit neutre au sens de Harrod ou labor

augmenting. On appelle $b(t)K_t$ le stock de capital mesuré en unités d'efficience (capital effective) ainsi que $a(t)N_t$ que s'appelle travail mesuré en unités d'efficience.

(7) King et alii (1988) justifient ce choix en disant qu'on doit imposer une restriction sur la préférence due au fait que l'élasticité intertemporelle de substitution de la consommation doit être invariante par rapport à l'échelle de consommation. Cela découle du fait que $PMK = 1 + r$ à l'équilibre doit être constant à l'état stationnaire. Puisque la consommation croît à un taux constant et le ratio des utilités marginales escomptées $= 1 + r$, l'élasticité intertemporelle de substitution doit être constante et indépendante du niveau de la consommation.

(8) On peut noter que lorsqu'on travaille avec une fonction de production Cobb-Douglas les deux types de progrès (neutre au sens de Harrod et neutre au sens de Hicks) sont identiques.

$$Y(K, AN) = K^{1-\alpha} (AN)^\alpha = K^{1-\alpha} e^{g\alpha t} N^\alpha = e^{g\alpha t} (K^{1-\alpha} N^\alpha) = BY(K, L)$$

(9) Obs: $N_t = nM_t$ donc $N_t X_t / M_t X_t = n$ et $M_{t+1} / M_t = nN_{t+1} / nN_t$
 $= N_{t+1} / N_t = \gamma_n$

(10) En fait Sato ne travaille pas avec dépréciation dans son étude et King et Rebello ne disent rien sur la valeur de η .

(11) On peut calculer les dérivés (première et seconde) :

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{s(1-\alpha)k_t^{-\alpha}n^{\alpha} + 1 - \delta}{\gamma_x \gamma_n} > 0$$

$$\frac{d^2k_{t+1}}{dk_t^2} = \frac{-s(1-\alpha)\alpha k_t^{-\alpha-1}n^{\alpha}}{\gamma_x \gamma_n} < 0$$

(12) Puisque $Y_t = A_t K_t^{1-\alpha} N_t^{\alpha}$ ($A_t = 1$ par normalisation)

$$\frac{Y_t}{M_t X_t} = \frac{K_t^{1-\alpha}}{M_t X_t} \frac{N_t X_t^{\alpha}}{M_t X_t}$$

$Y_t = F(k_t, n) = k_t^{1-\alpha} n^{\alpha}$ et on trouve $y^* = 0.188$. Donc $0.50y^* = 0.094$ que c'est y_0 , ça nous permet de trouver k_0 car $k_0^{1/3} n^{\alpha} = 0.094$ et de là on tire $k_0 = 12.5\% k^*$.

(13) Ce genre de problème s'appelle "two boundary value problems" et est caractérisé pour le fait que les équations différentielles doivent satisfaire les conditions extrêmes pour plus qu'une valeur de la variable indépendante. On choisit les valeurs pour toutes les variables dépendantes variables à une extrémité. On intègre l'équation différentielle en avant et on atteint l'autre extrémité. On observe l'écart par rapport à la valeur désirée. On utilise

cette information pour mettre à jour la valeur de départ et on procède comme ça par itérations. On a donc un problème multidimensionnel dont on doit trouver les racines. La démarche est répétée plusieurs fois et on utilise chaque tir précédent pour améliorer l'essai antérieur. Les preferences sont concaves, la technologie est convexe et donc il y a un seul équilibre et une seule trajectoire optimale (sentier).

(14)

$$C_t + K_{t+1} - K_t + \delta K_t + C_t = K_t^{1-\alpha} (N_t X_t)^\alpha$$

$$\frac{K_{t+1}}{M_{t+1} X_{t+1}} \frac{M_{t+1} X_{t+1}}{M_t X_t} - \frac{K_t}{M_t X_t} + \delta \frac{K_t}{M_t X_t} + \frac{C_t}{M_t X_t} = \frac{K_t^{1-\alpha} (N_t X_t)^\alpha}{M_t X_t}$$

$$k_{t+1} \gamma_n \gamma_x - k_t + \delta k_t + c_t = \left(\frac{K_t}{M_t X_t} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{N_t X_t}{M_t X_t} \right)^\alpha$$

$$k_{t+1} \gamma_n \gamma_x - k_t + \delta k_t + c_t = k_t^{1-\alpha} n^\alpha$$

$$k_{t+1}\gamma_n\gamma_x - k_t + \delta k_t + c_t = F(k_t, n)$$

(15) puisque la fonction d'utilité est du type CRRA on a que :

$$U'(c_t) = (1-\sigma) \frac{c_t^{1-\sigma-1}}{1-\sigma} = c_t^{-\sigma}$$

(16)

$$\frac{h_{t+1} - h_t}{h_t} = \phi(1-u_t)^\epsilon h_t^{-\epsilon} = \gamma_h \rightarrow 0$$

au fur et à mesure que h croît, le taux de croissance du capital humain s'approche de zero et donc garde les propriétés asymptotiques du modèle et la croissance exogène. À l'état stationnaire, puisque h_t est un indice on peut le normaliser à 1 ($h^*=1$) et aussi puisque la consommation ne croît plus, $u^*=1$, c-à-d, les individus ne dédient plus une partie de son temps à sa formation et alors on reprends le modèle ci-dessus de King et Rebello.

$$(17) Y_t = k_t^\alpha (u_t h_t)^{1-\alpha} ; Y_{t+1} = k_{t+1}^\alpha (u_{t+1} h_{t+1})^{1-\alpha}$$

(18) Le produit marginal du capital :

$$\frac{\partial F(K_t, N_t X_t)}{\partial K_t} > 0$$

$$\frac{\partial^2 F(K_t, N_t X_t)}{\partial K_t^2} < 0$$

(19) King et Rebello ont travaillé avec multiple shooting et nous avons travaillé avec la méthode des différences finies. La différence peut être attribuée aux imprécisions numériques.

6 - BIBLIOGRAPHIE

- 1) Burmeister, E. et A. Dobell. Mathematical Theories of Economic Growth. New York: Collier-Macmillan, 1970.
- 2) Blanchard O. et S. Fischer. Lectures on Macroeconomics. Cambridge: Mit Press, 1989.
- 3) Cass, D. "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation." Review of Economic Studies, 32(2): 223-240.
- 4) King, R.G. et C.I. Plosser et S. Rebello. "Production, Growth and Business Cycles, I. The Basic Neoclassical Model." Journal of Monetary Economics, 22(2): 195-232.
- 5) King, R.G. et S. Rebello. "Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model." American Economic Review, 83(4): 908-931.
- 6) Koopmans, T. "On the Concept of Optimal Growth", in The Econometric Approach to Development Planning, ed. Rand McNally, pp. 225-87. 1st ed. Chicago, 1965.
- 7) Lucas, R.E. "On the Mechanics of Economic Development", Journal of Monetary Economics, 22(1): 3-42.

- 8) Phelps, E. Golden Rules of Economic Growth. New York: Norton, 1966.
- 9) Ramsey, F. "A Mathematical Theory of Savings", The Economic Journal, 38(149): 543-559.
- 10) Roberts, S. and J. Shipman. Two-Point Boundary Value Problems: Shooting Methods. New York: American Elsevier, 1972.
- 11) Sato, K. "On the Adjustment Time in Neoclassical Growth Models." Review of Economic Studies, 33(2): 263-268.
- 12) Solow, R. "A Contribution to the Theory of Economic Growth." Quartely Journal of Economics, 70(1): 65-94.

FIGURE 1 DYNAMIQUE DU MODELE DE SOLOW

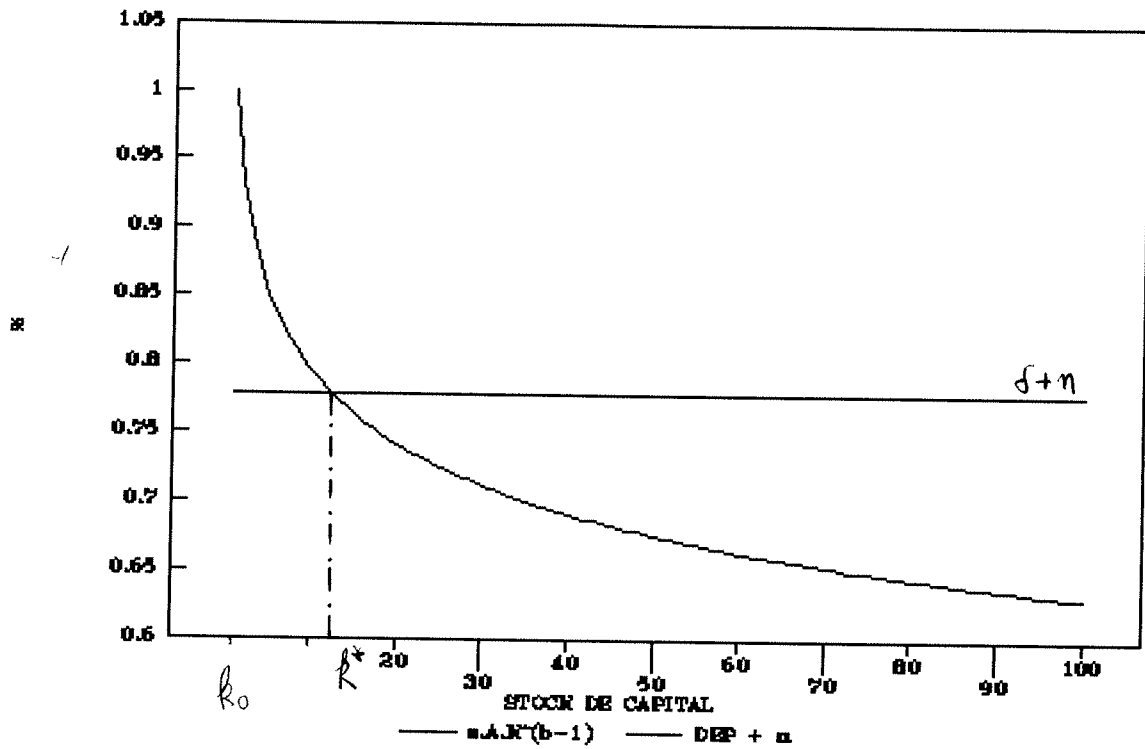


FIGURE 2 EXPERIENCE DE SATO

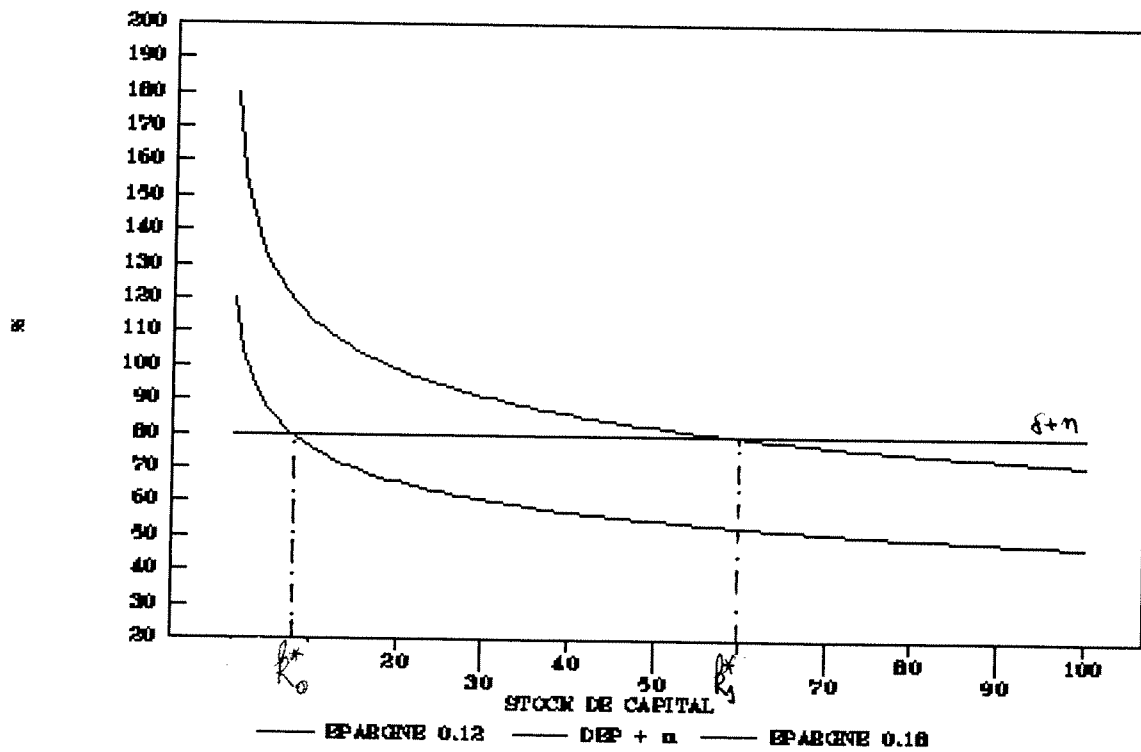


FIGURE 3 DYNAMIQUE DU STOCK DE CAPITAL
 BASÉ SUR L'EXPERIMENT DE SATO

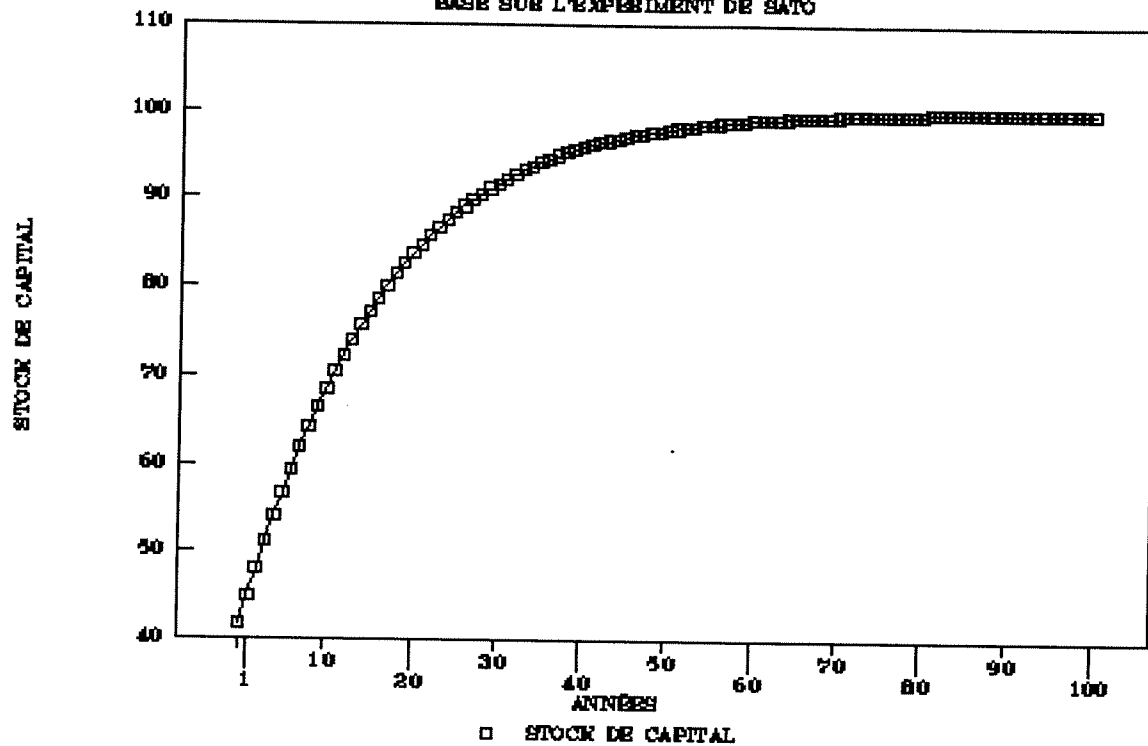


FIGURE 4 MODELE DE RAMSEY-CASS-KOOPMANS

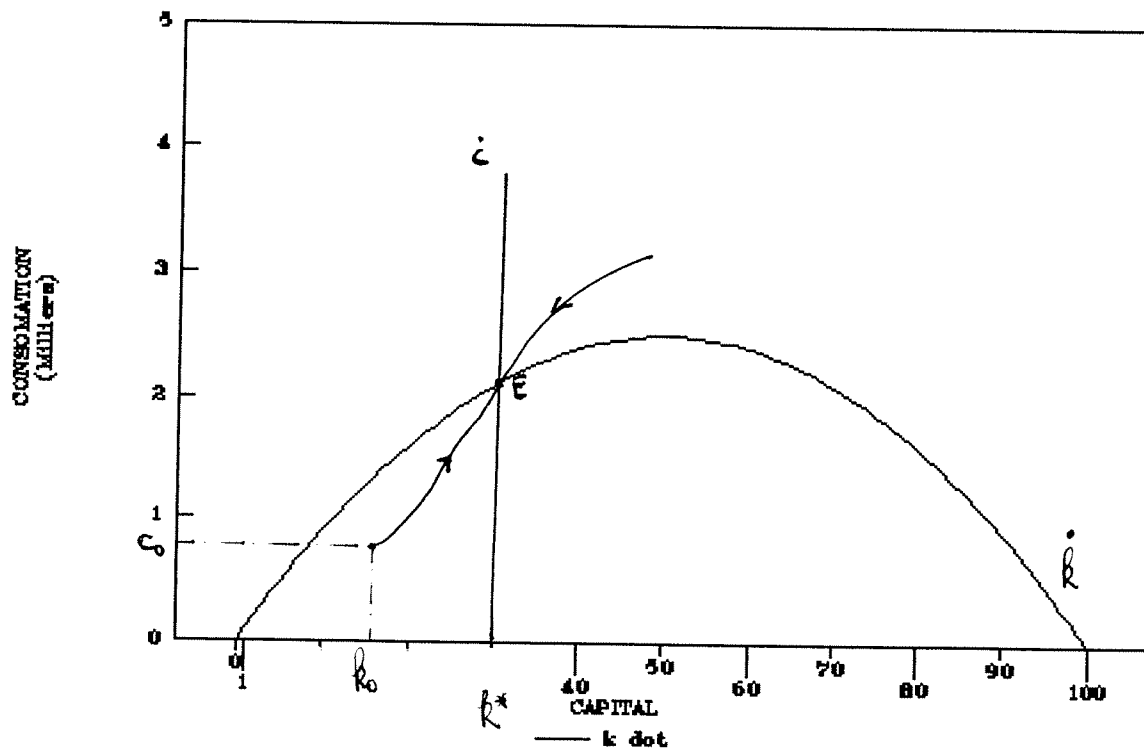


FIGURE 5 STOCK DE CAPITAL ÉTAT
STATIONNAIRE CONVERGENCE

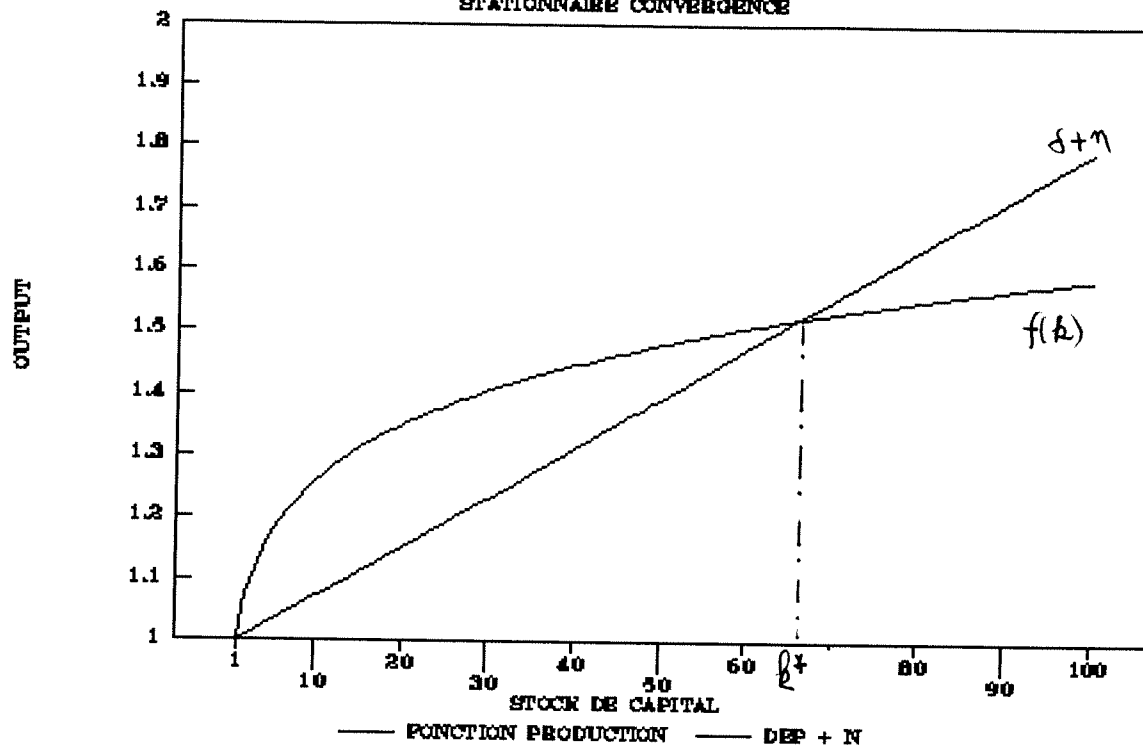


FIGURE 5-A STOCK DE CAPITAL
BASÉ SUR L'EXPERIENCE DE SATO

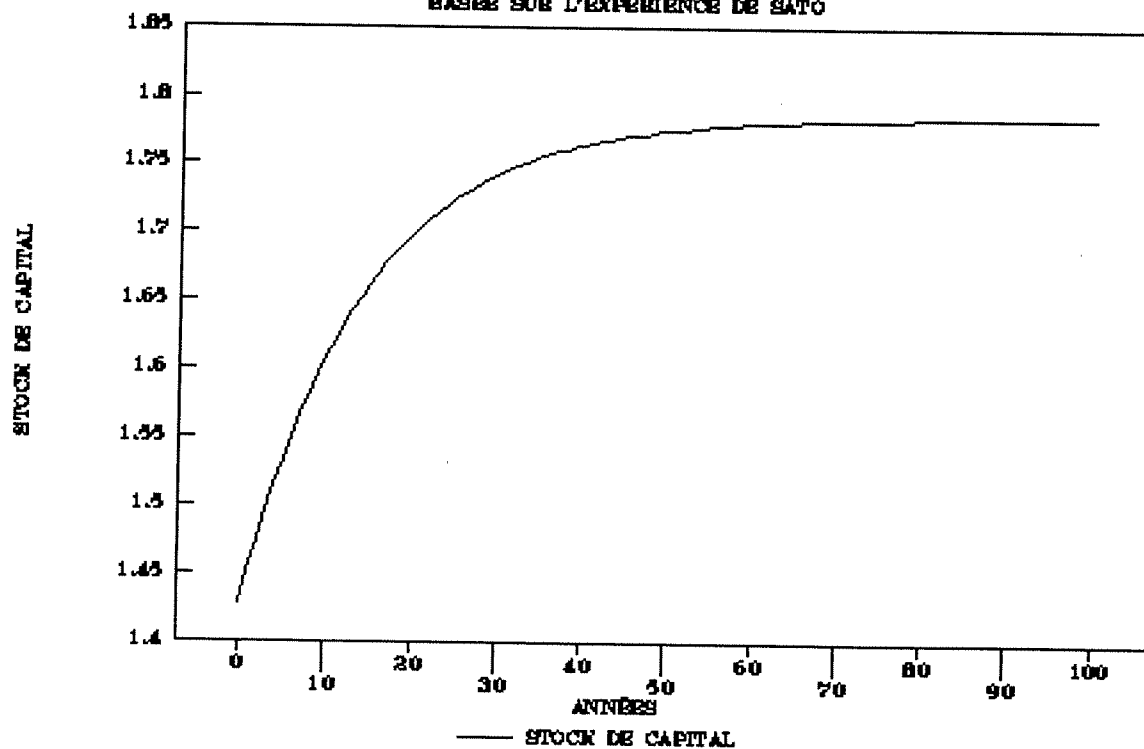


FIGURE 5-B OUTPUT

BASEÉ SUR L'EXPERIENCE DE SATO

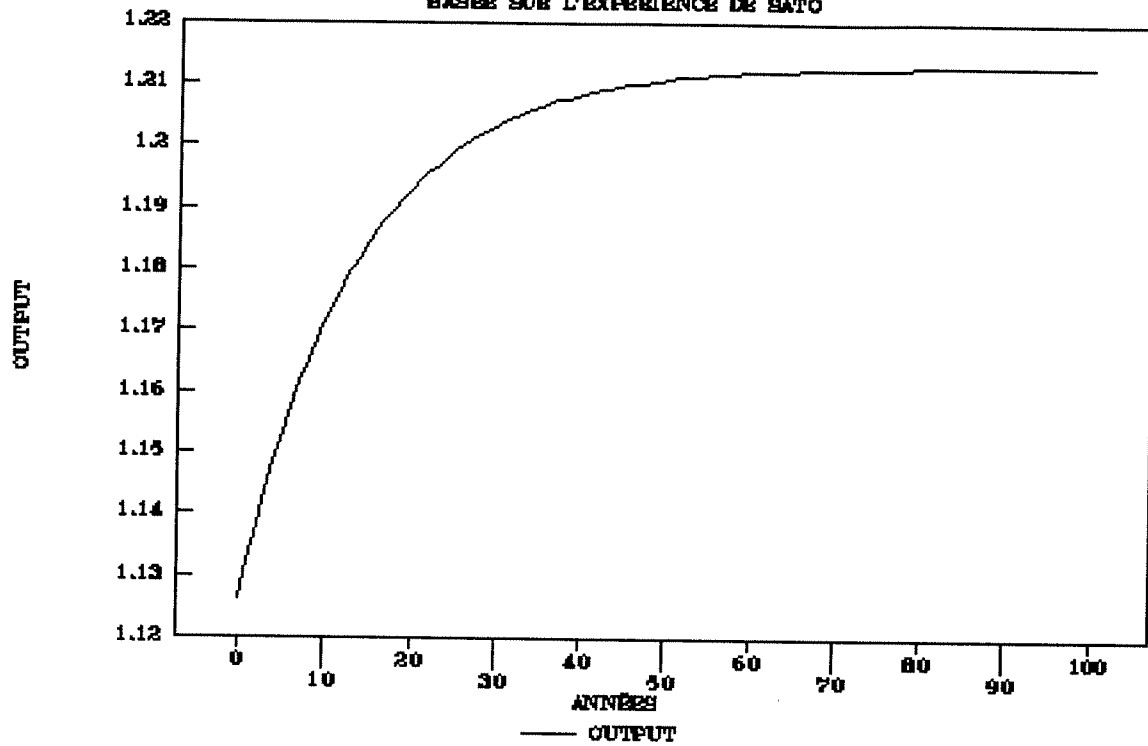


FIGURE 5-C ÉVOLUTION STOCK DE CAPITAL

KING-BEBELLO X NOS RÉSULTATS

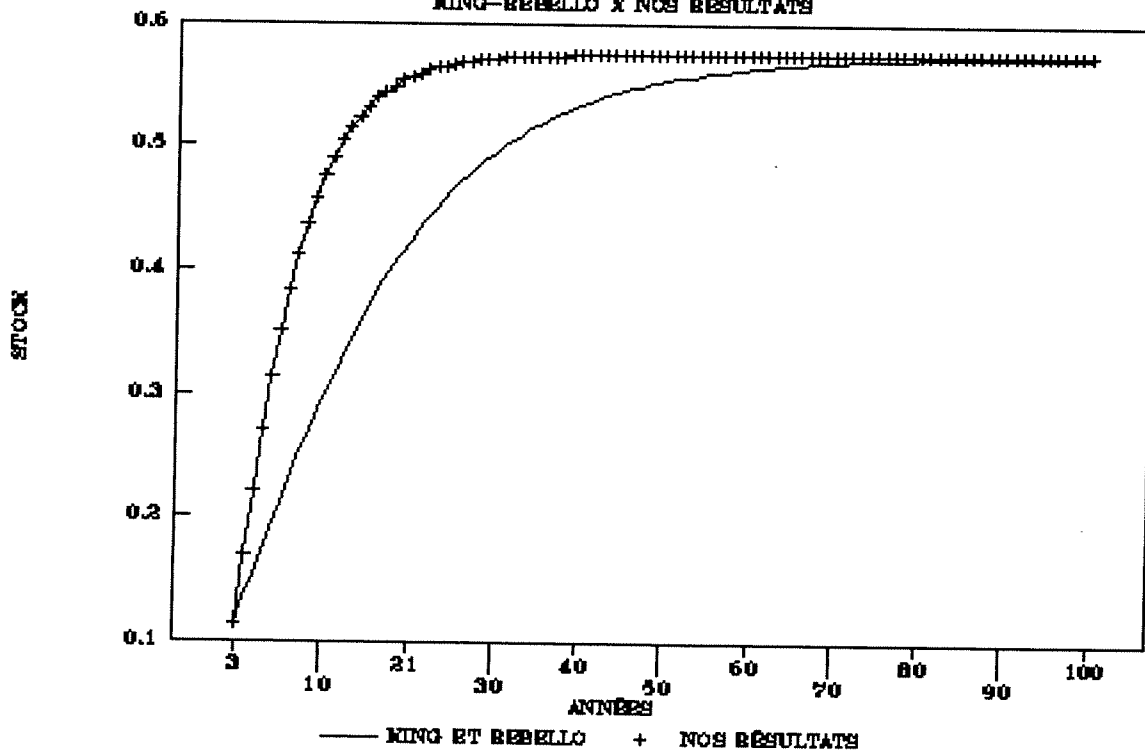


FIGURE 6 - MODELE DE BASE

CONSOMMATION - SIGMA = 1

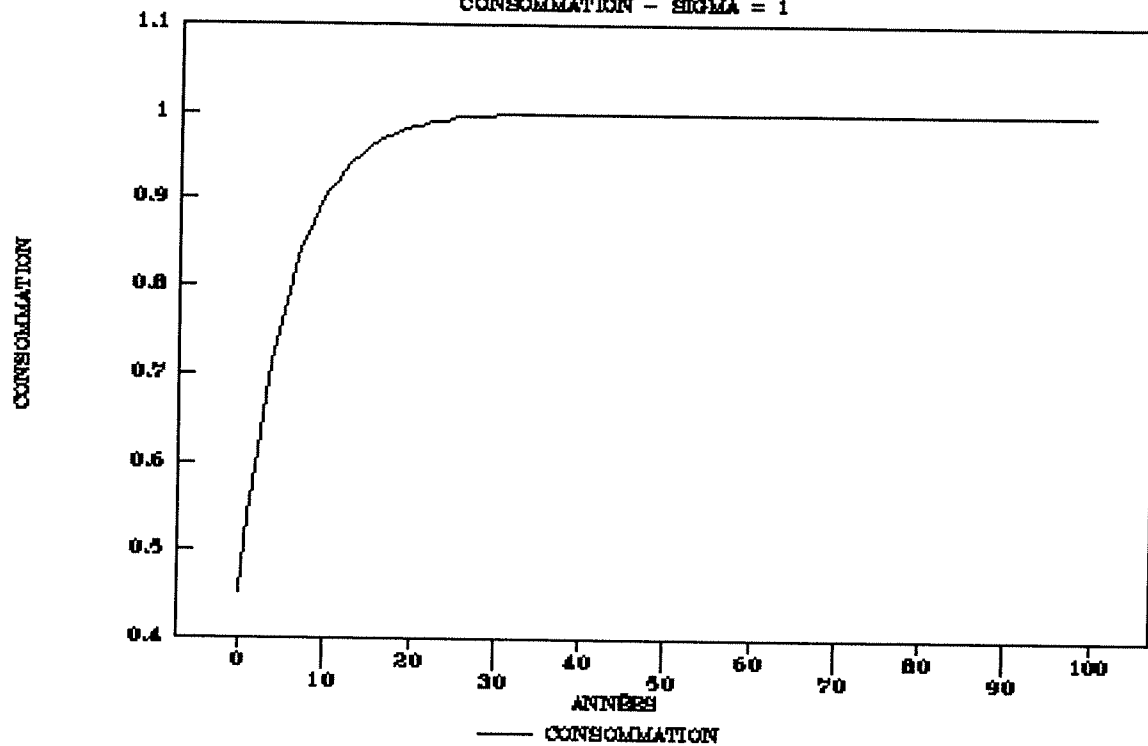


FIGURE 7 - MODELE DE BASE

STOCK DE CAPITAL - SIGMA = 1

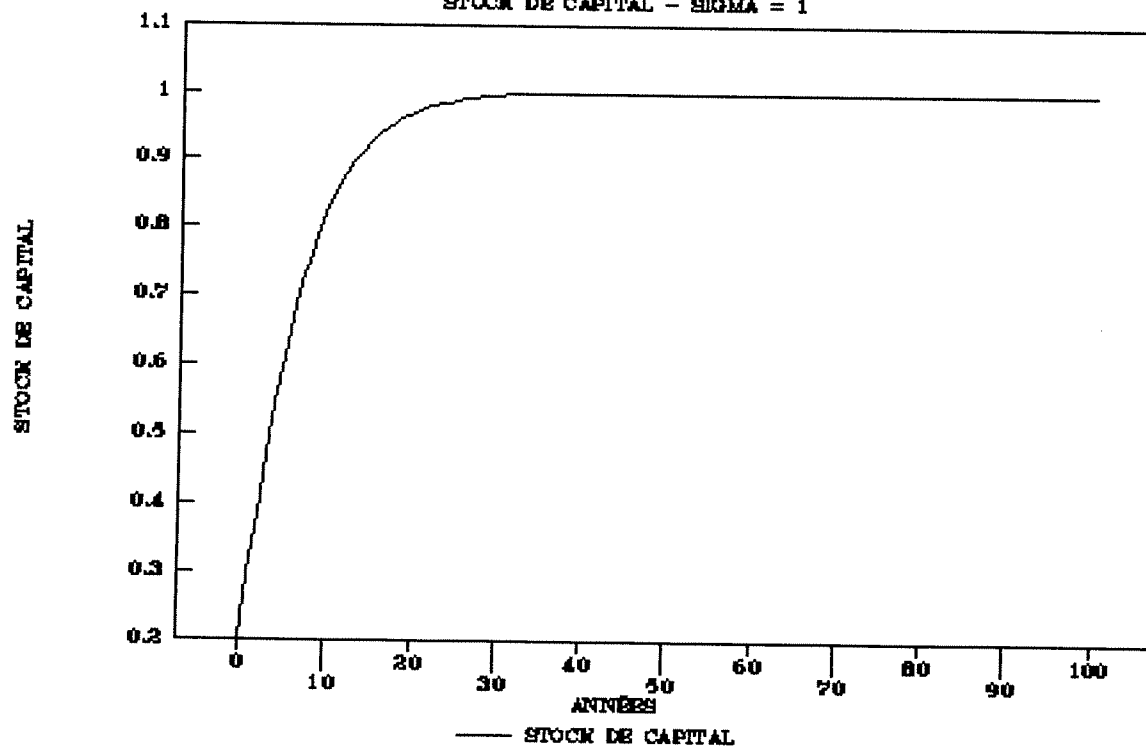


FIGURE 8 - MODELE DE BASE

OUTPUT - SIGMA = 1

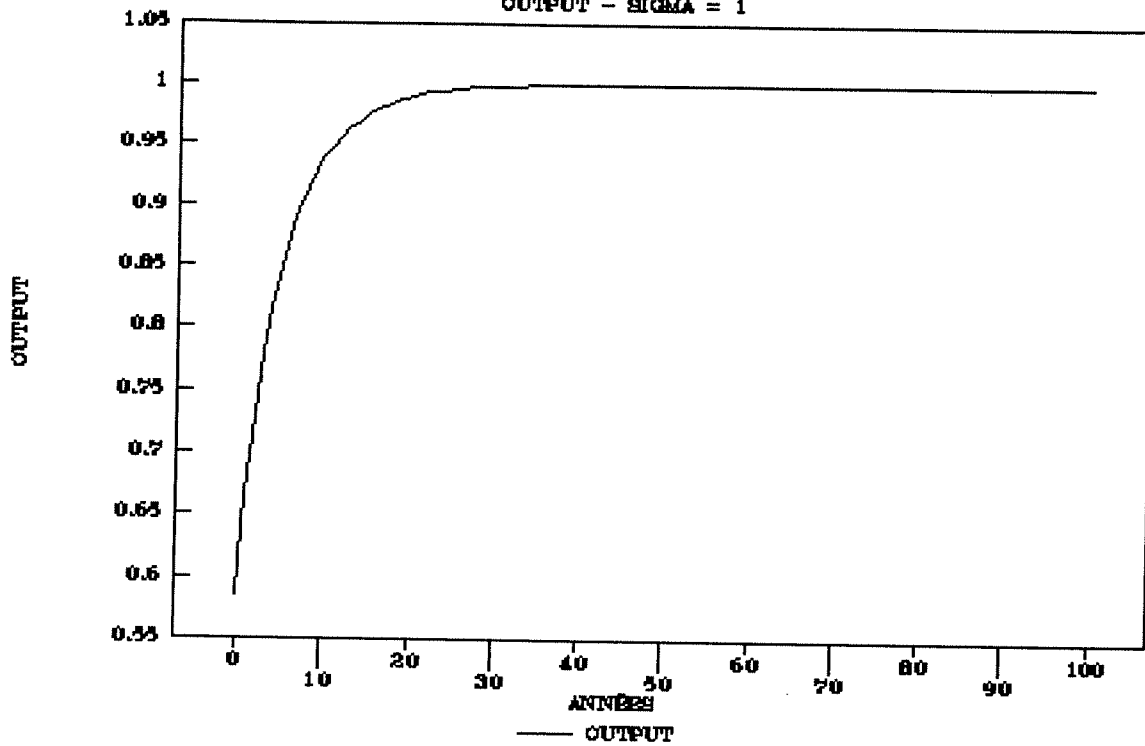


FIGURE 9 - MODELE DE BASE

TAUX D'INTERET - SIGMA = 1

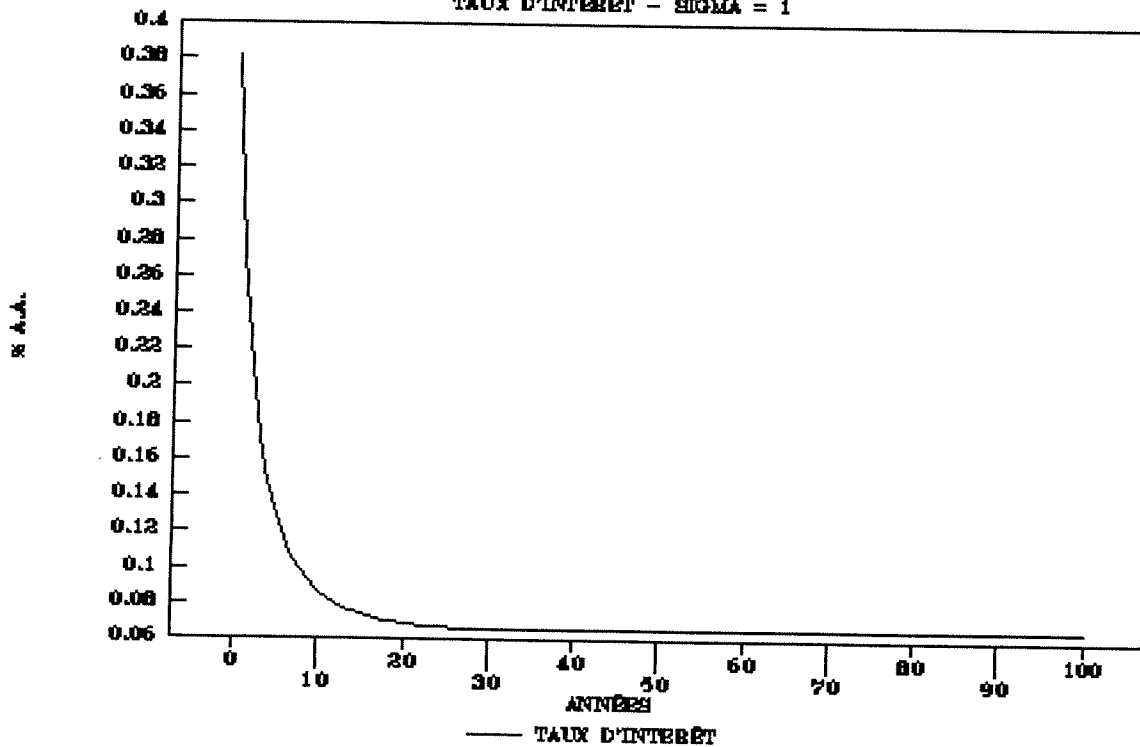


FIGURE 10 ÉVOLUTION DE LA CONSOMMATION

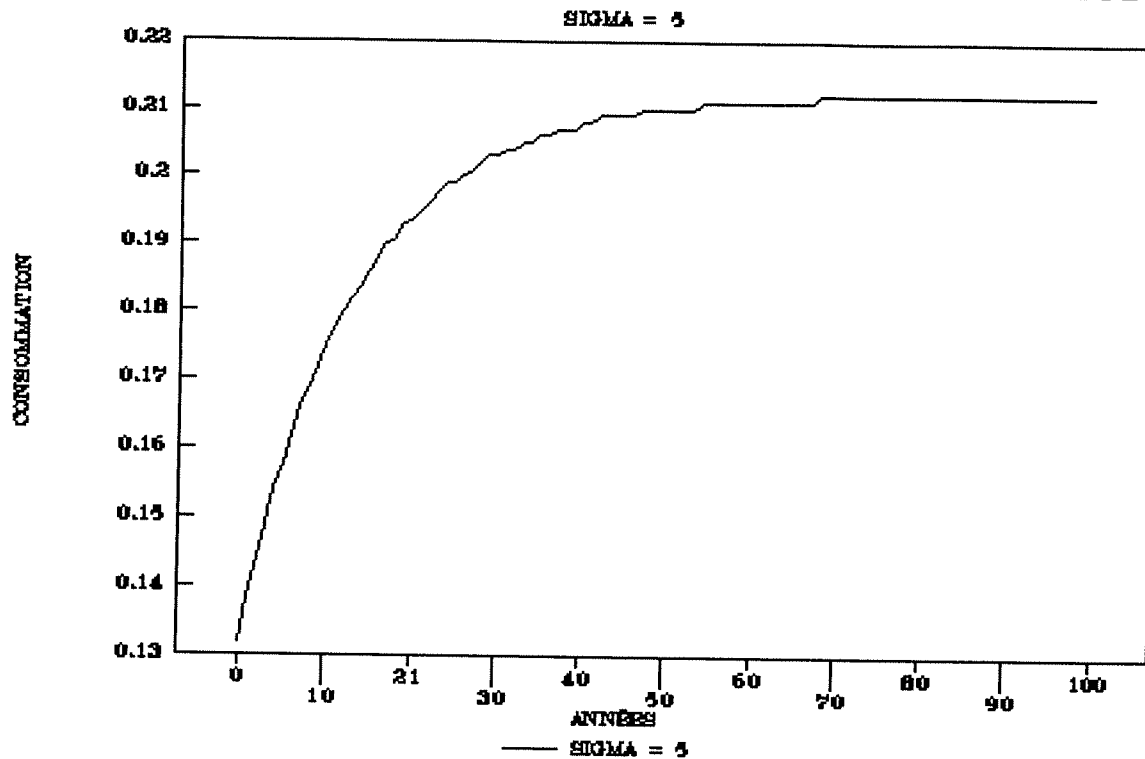


FIGURE 11 ÉVOLUTION DE LA CONSOMMATION

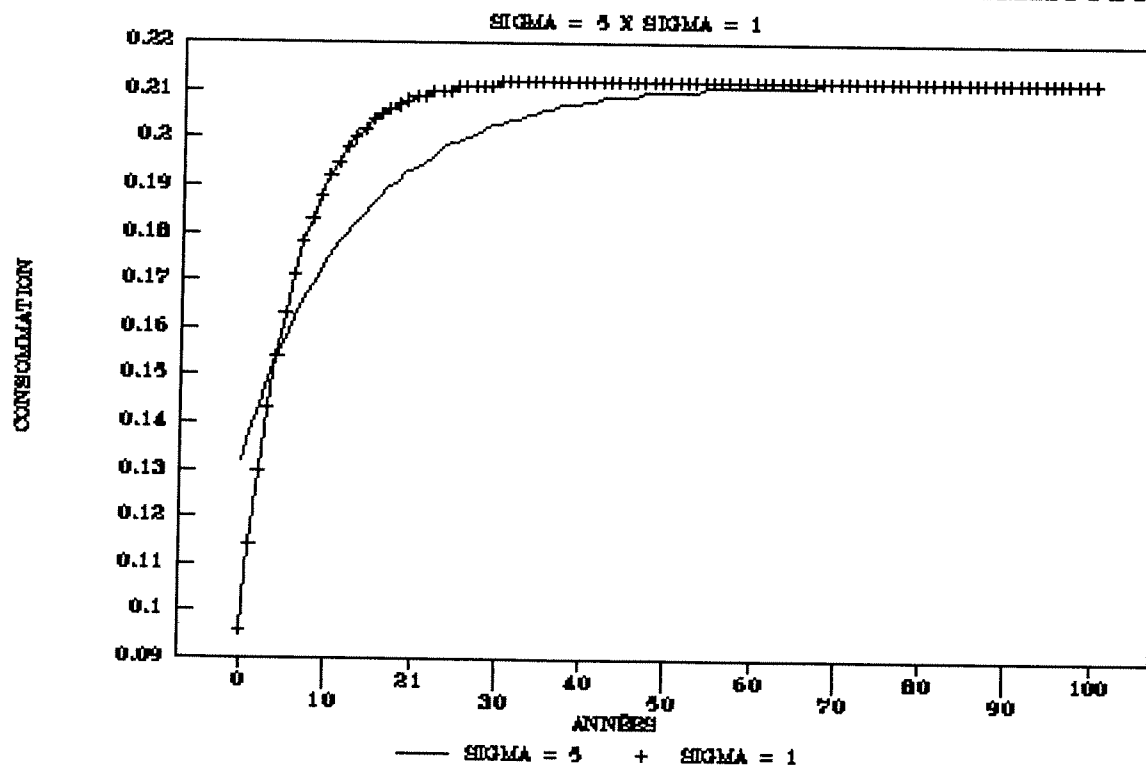


FIGURE 12 ÉVOLUTION STOCK DE CAPITAL

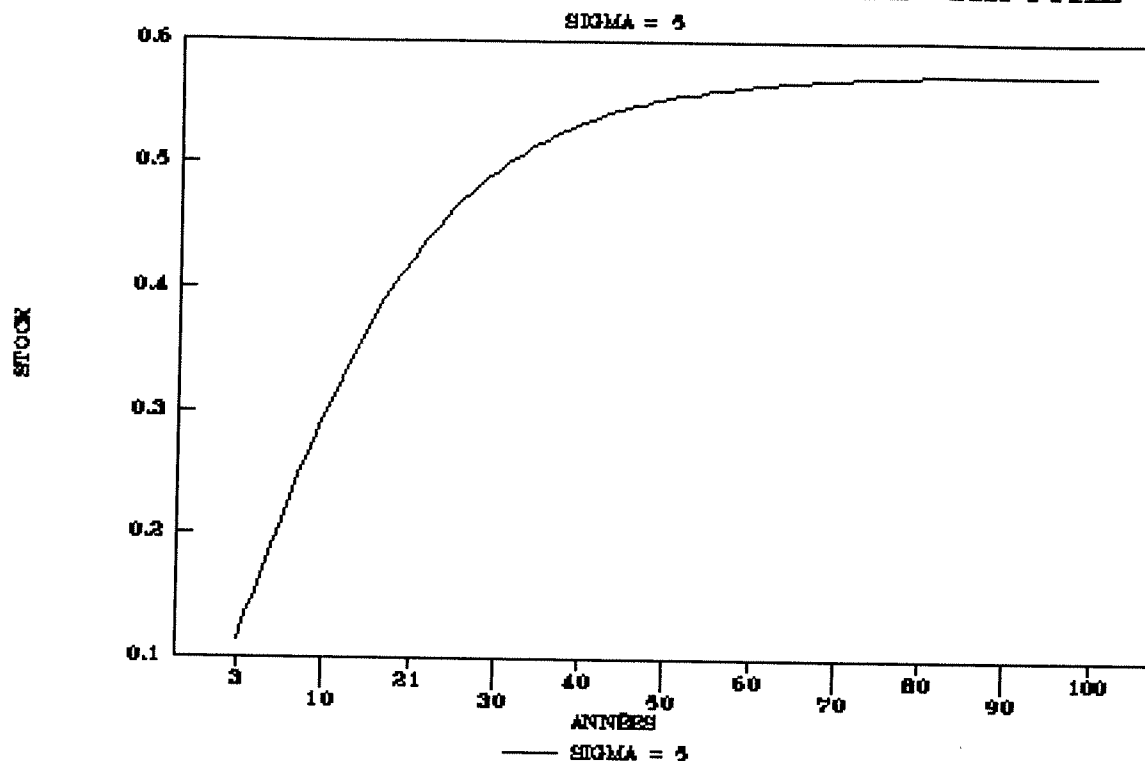


FIGURE 13 ÉVOLUTION STOCK DE CAPITAL

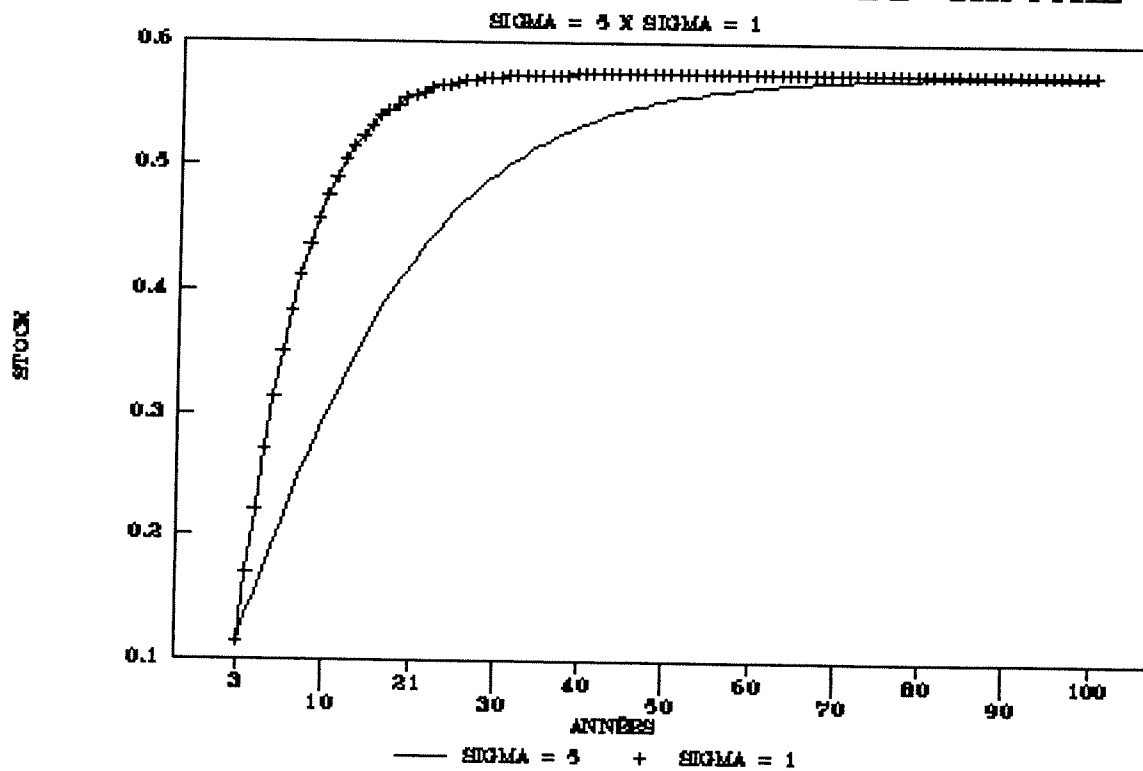


FIGURE 15 TAUX D'INTÉRÊT

AVEC SIGMA = 5

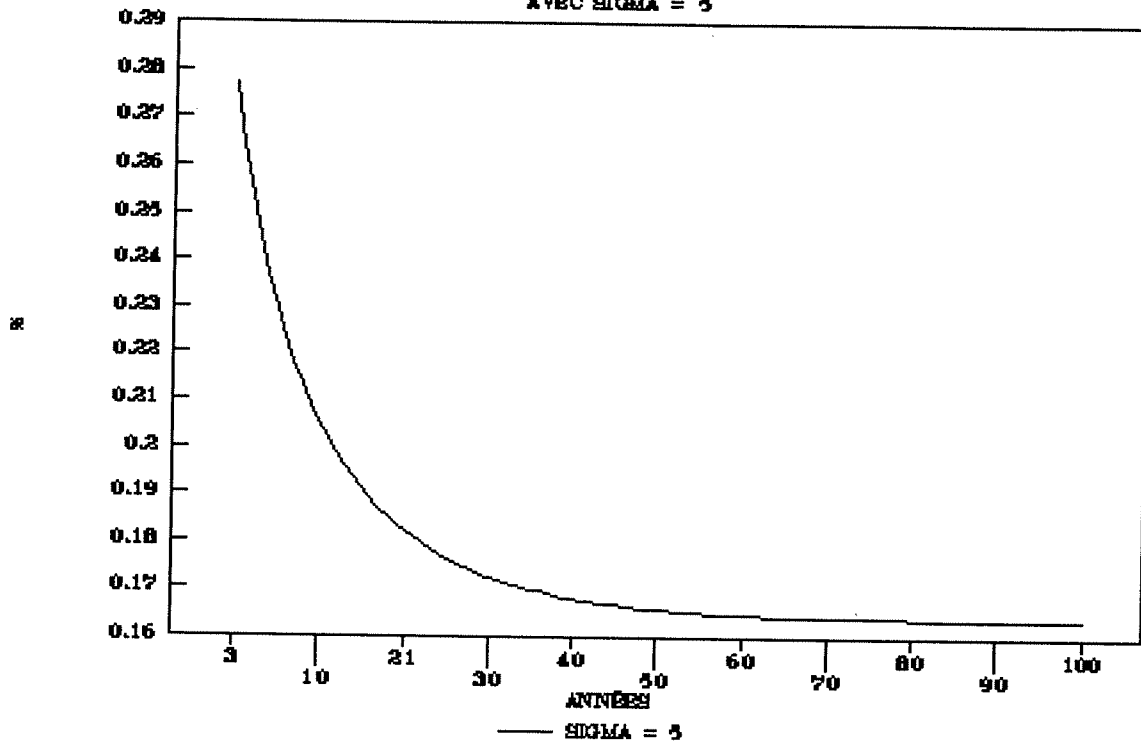


FIGURE 15 A TAUX D'INTÉRÊT

AVEC SIGMA = 1

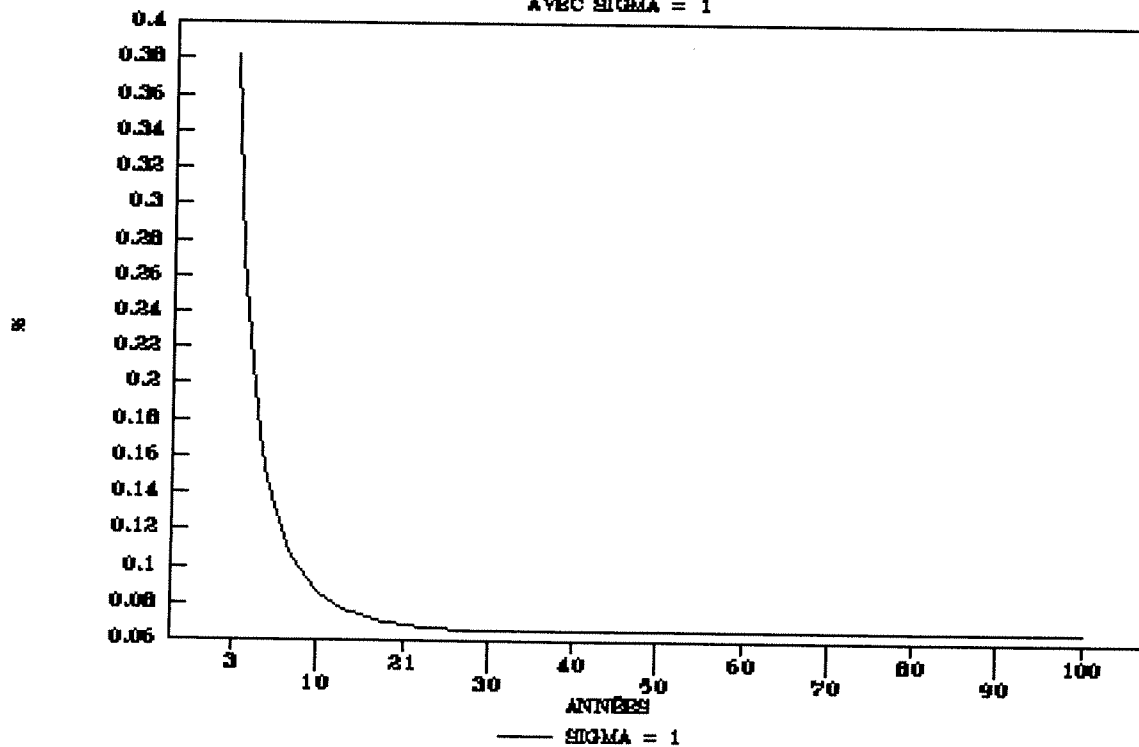


FIGURE 16 CONSOMMATION

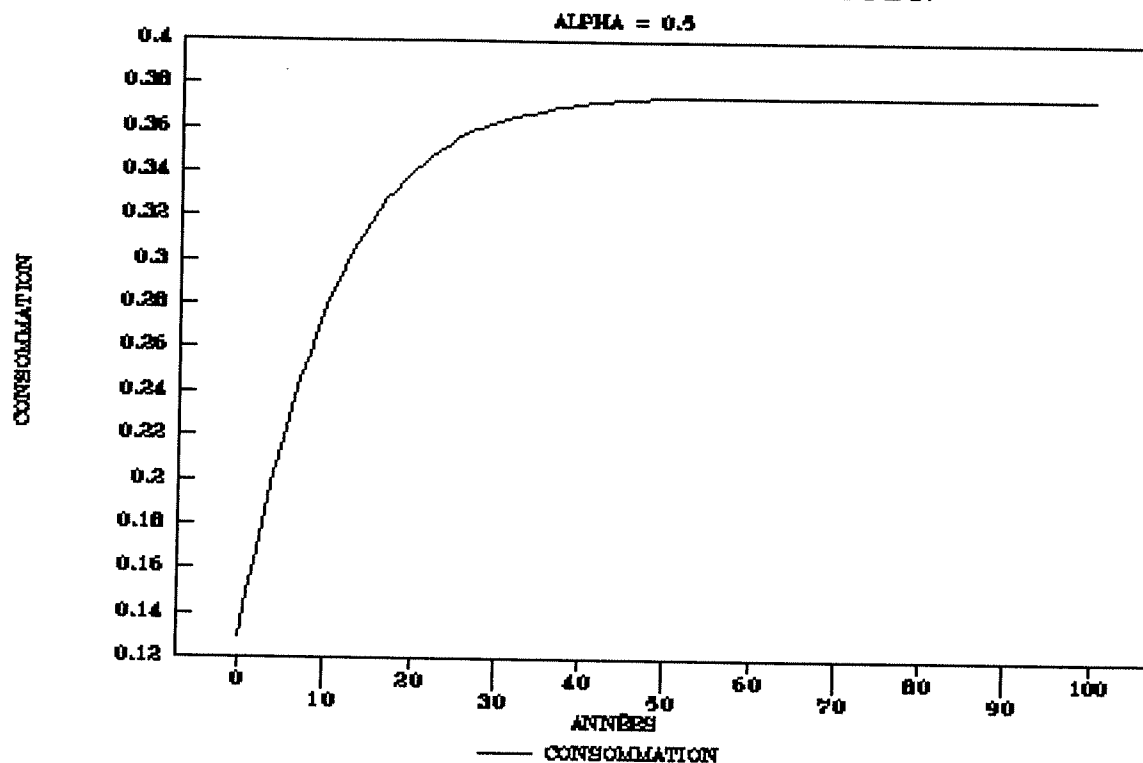


FIGURE 16 STOCK DE CAPITAL

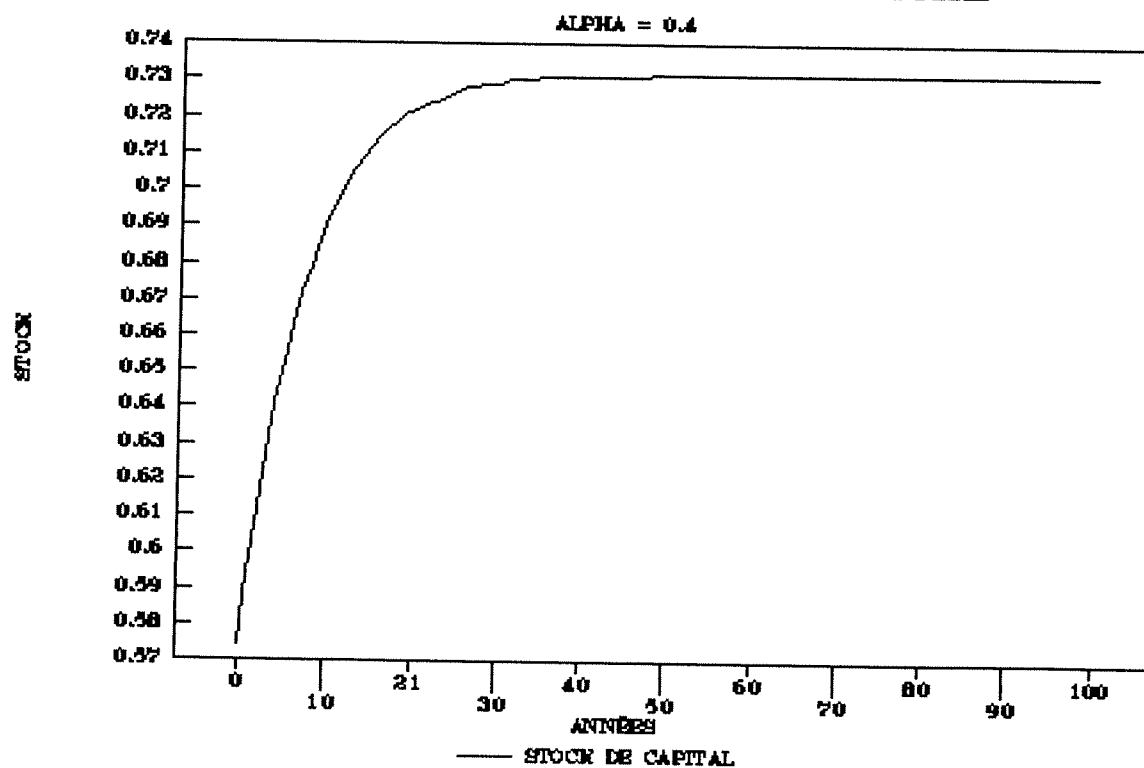


FIGURE 17 STOCK DE CAPITAL

ALPHA = 0.5

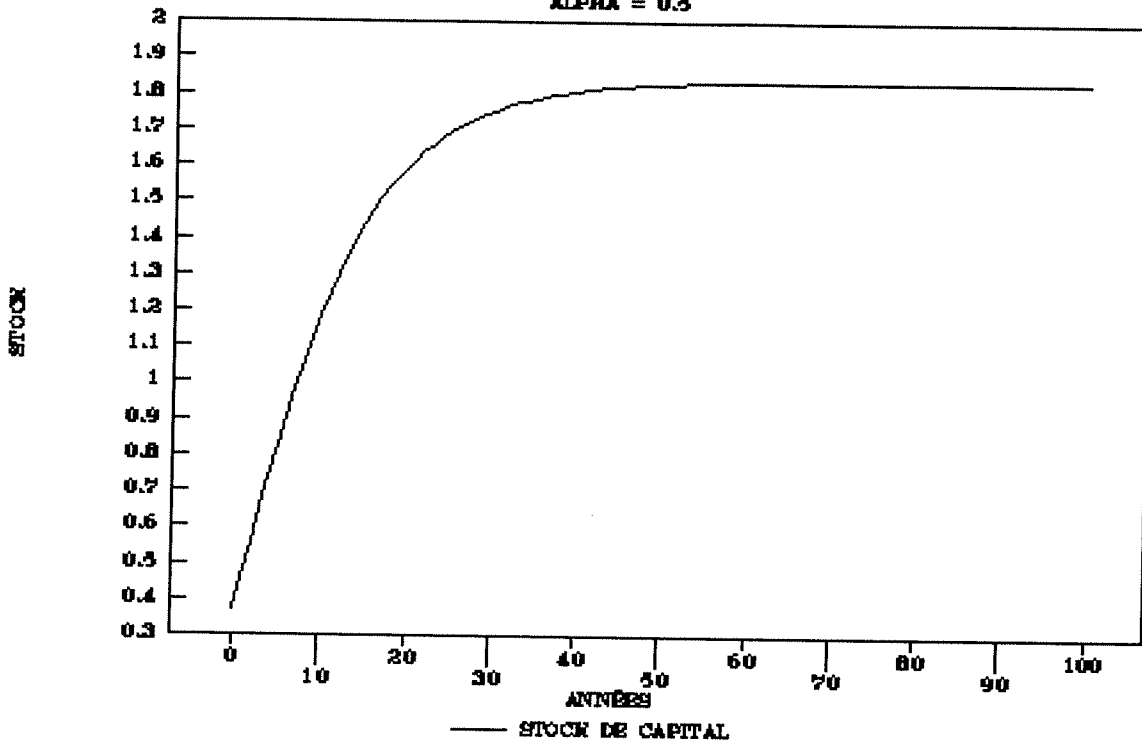


FIGURE 17-A TAUX D INTERÊT

ALPHA = 0.5

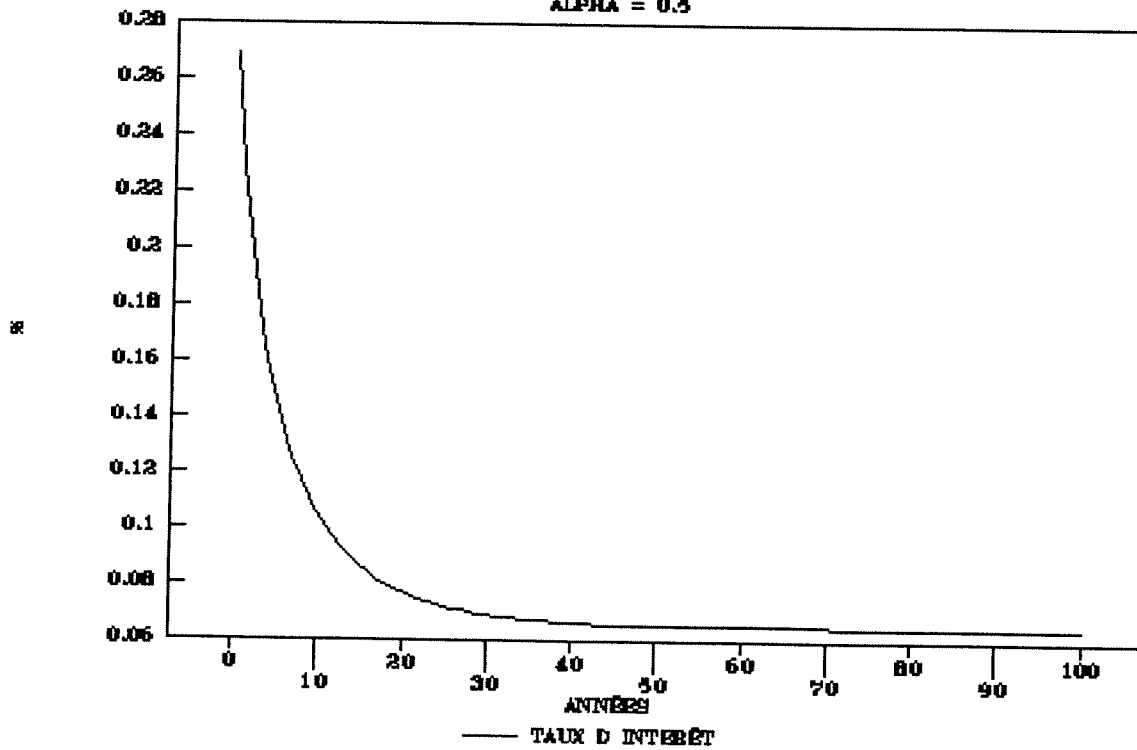


FIGURE 18 ÉVOLUTION DE LA CONSOMMATION

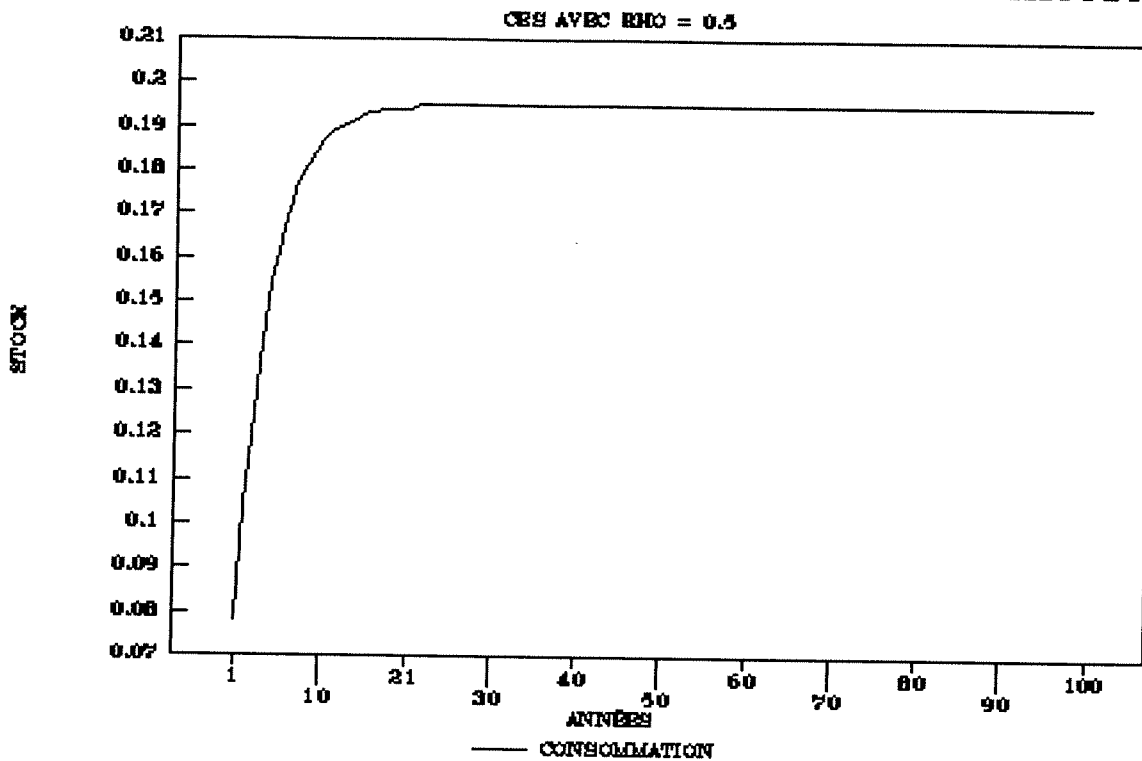


FIGURE 18-A ÉVOLUTION DU CAPITAL

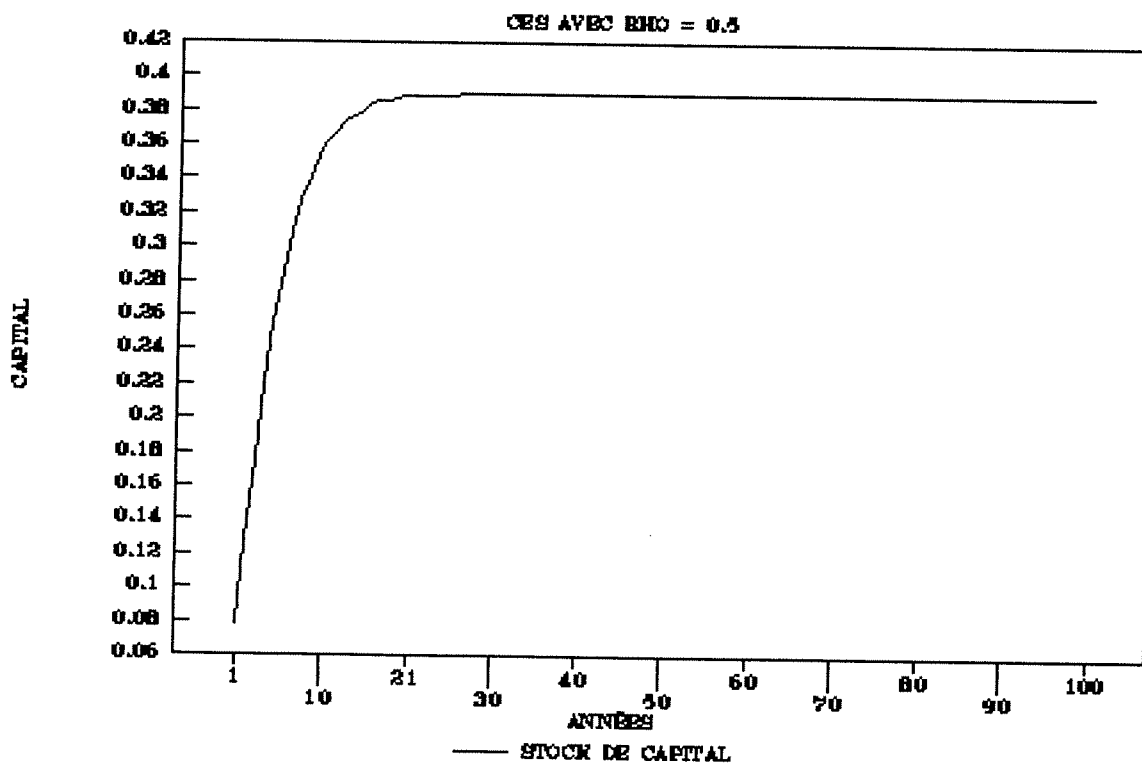


FIGURE 18-B TAUX D'INTÉRÊT

CES AVEC $RHO = 0.5$

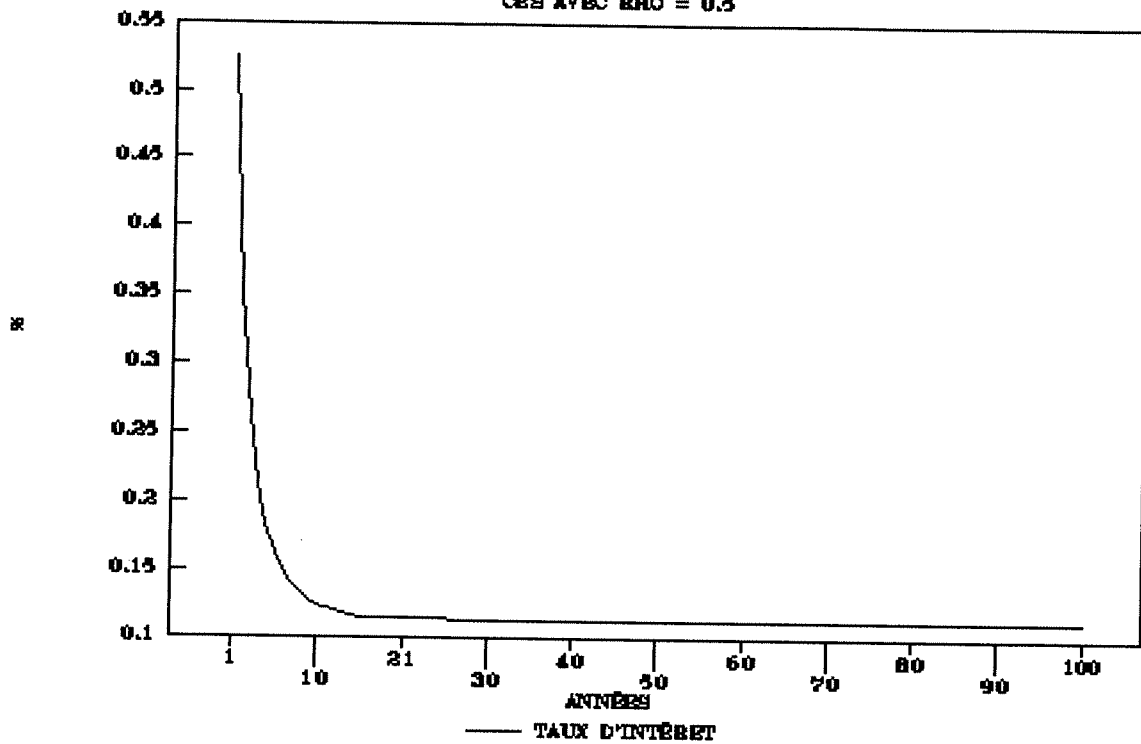


FIGURE 19

EVOLUTION DE LA CONSOMMATION

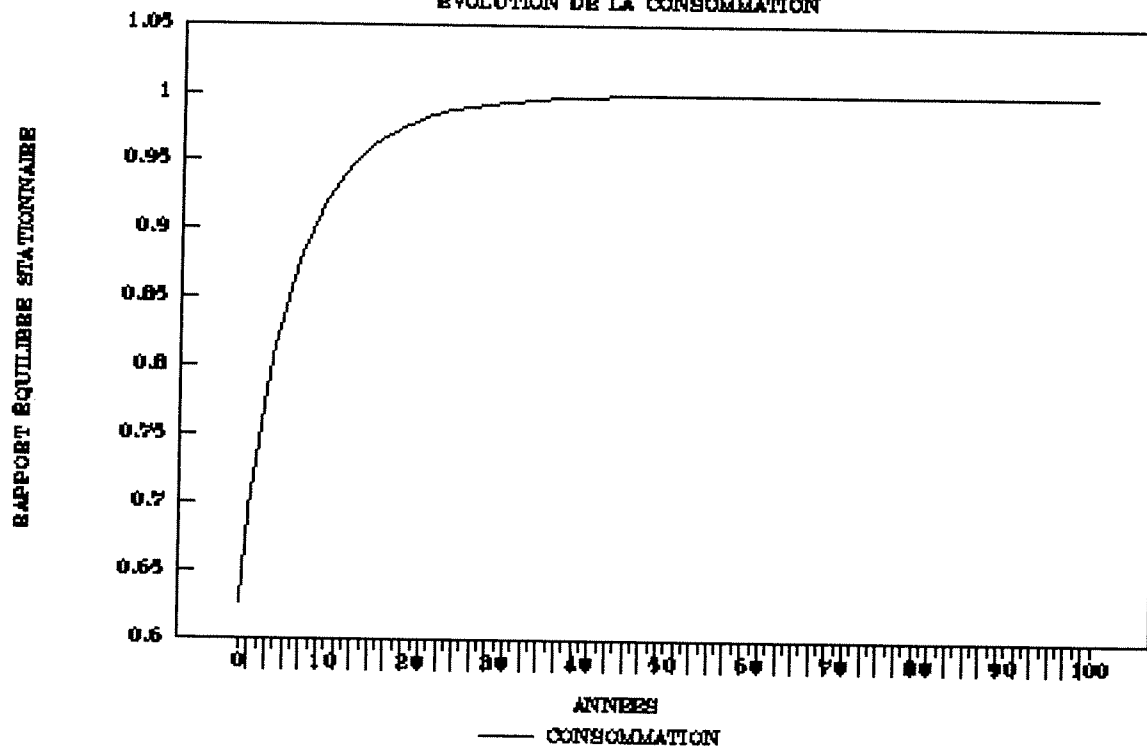


FIGURE 20
EVOLUTION DU CAPITAL PHYSIQUE

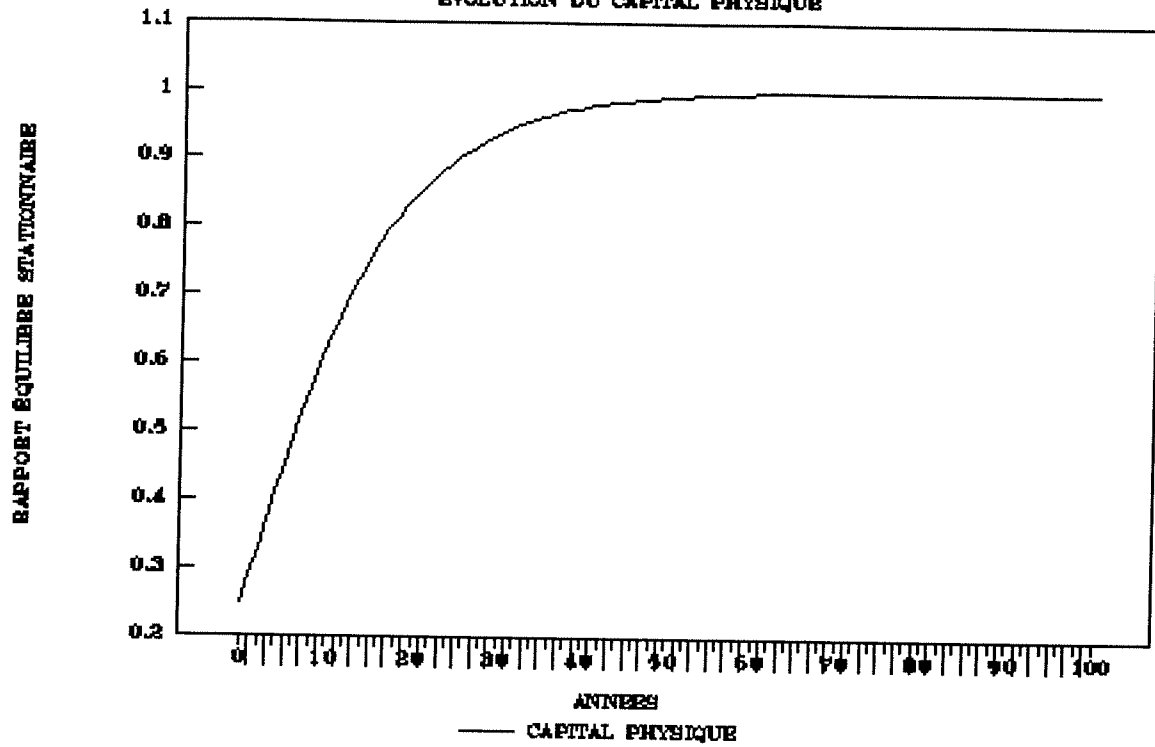


FIGURE 21
EVOLUTION OUTPUT

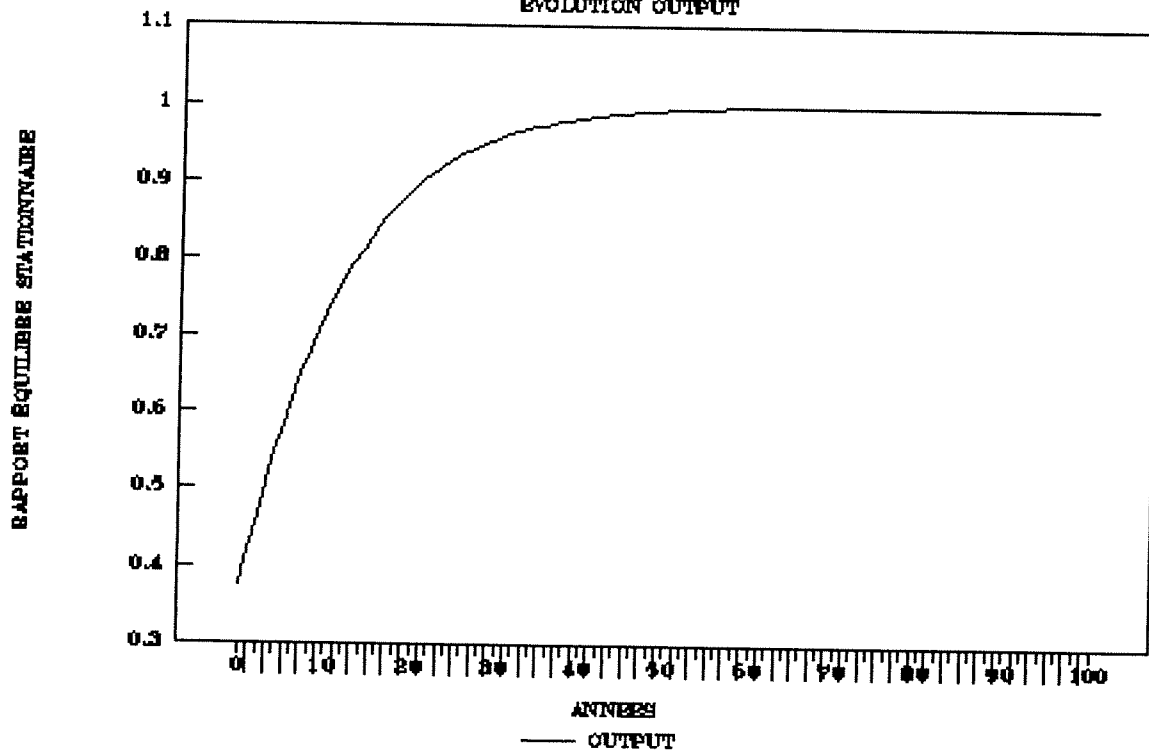


FIGURE 22

TAUX D'INTÉRÊT

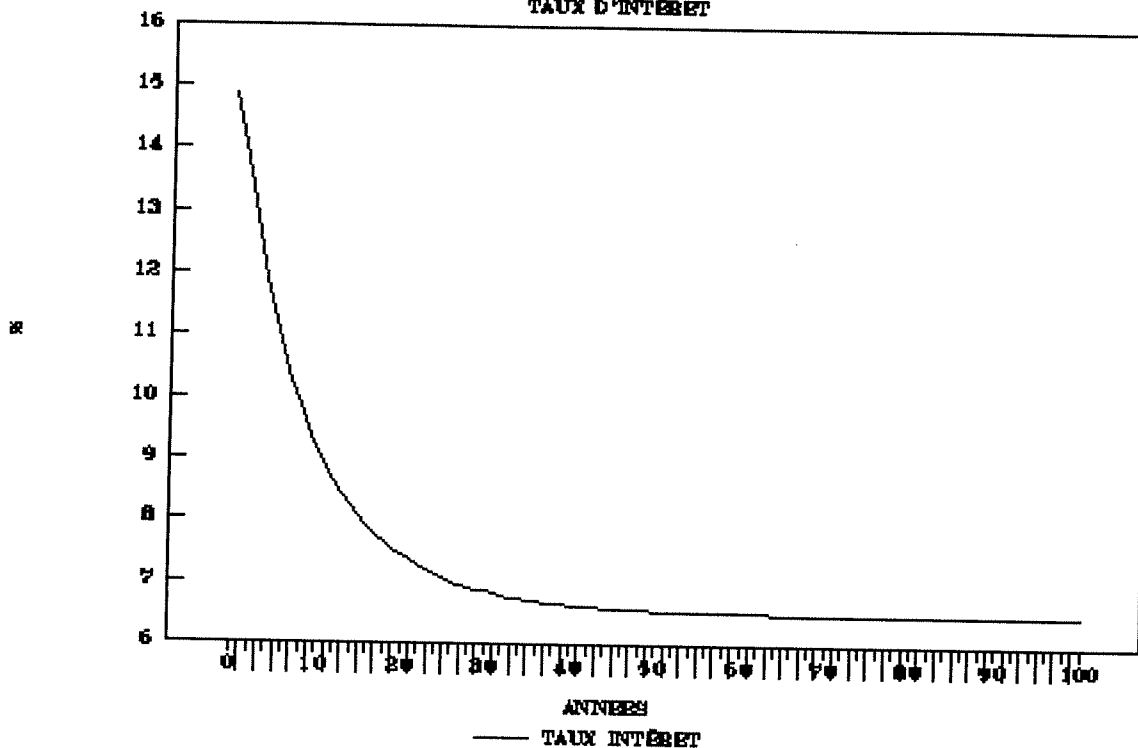


FIGURE 23

EVOLUTION CAPITAL HUMAIN

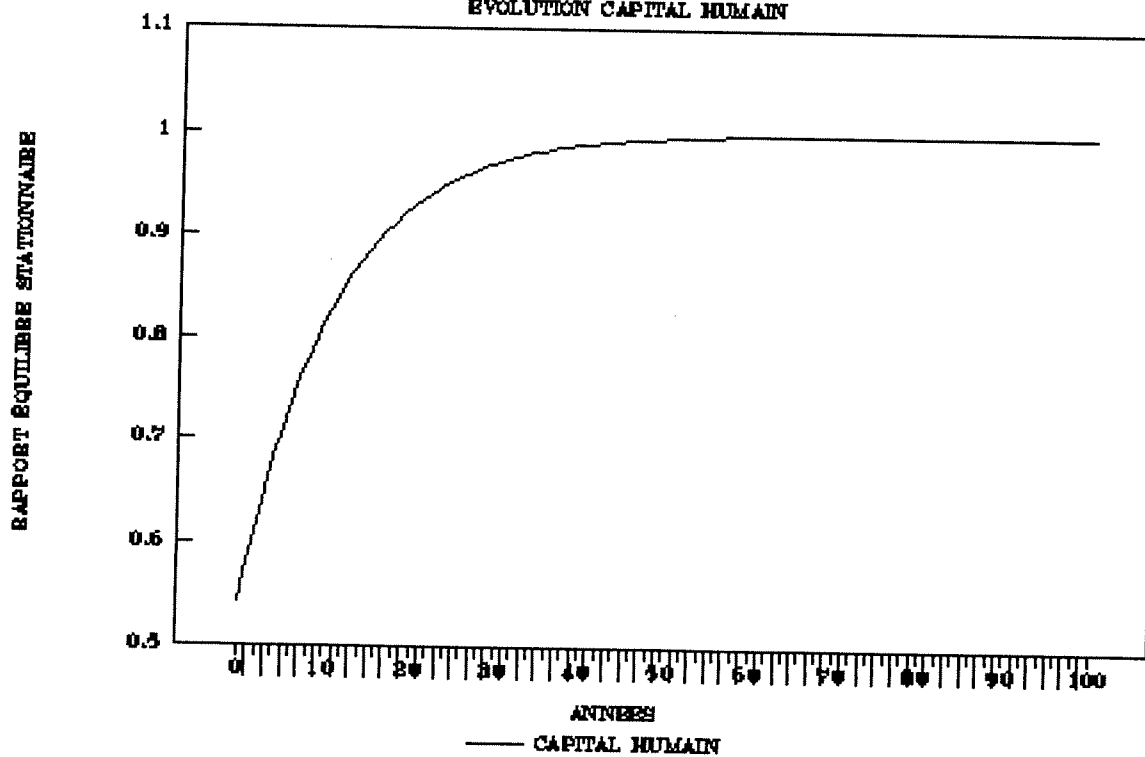


FIGURE 24

PRODUIT MARGINAL CAPITAL

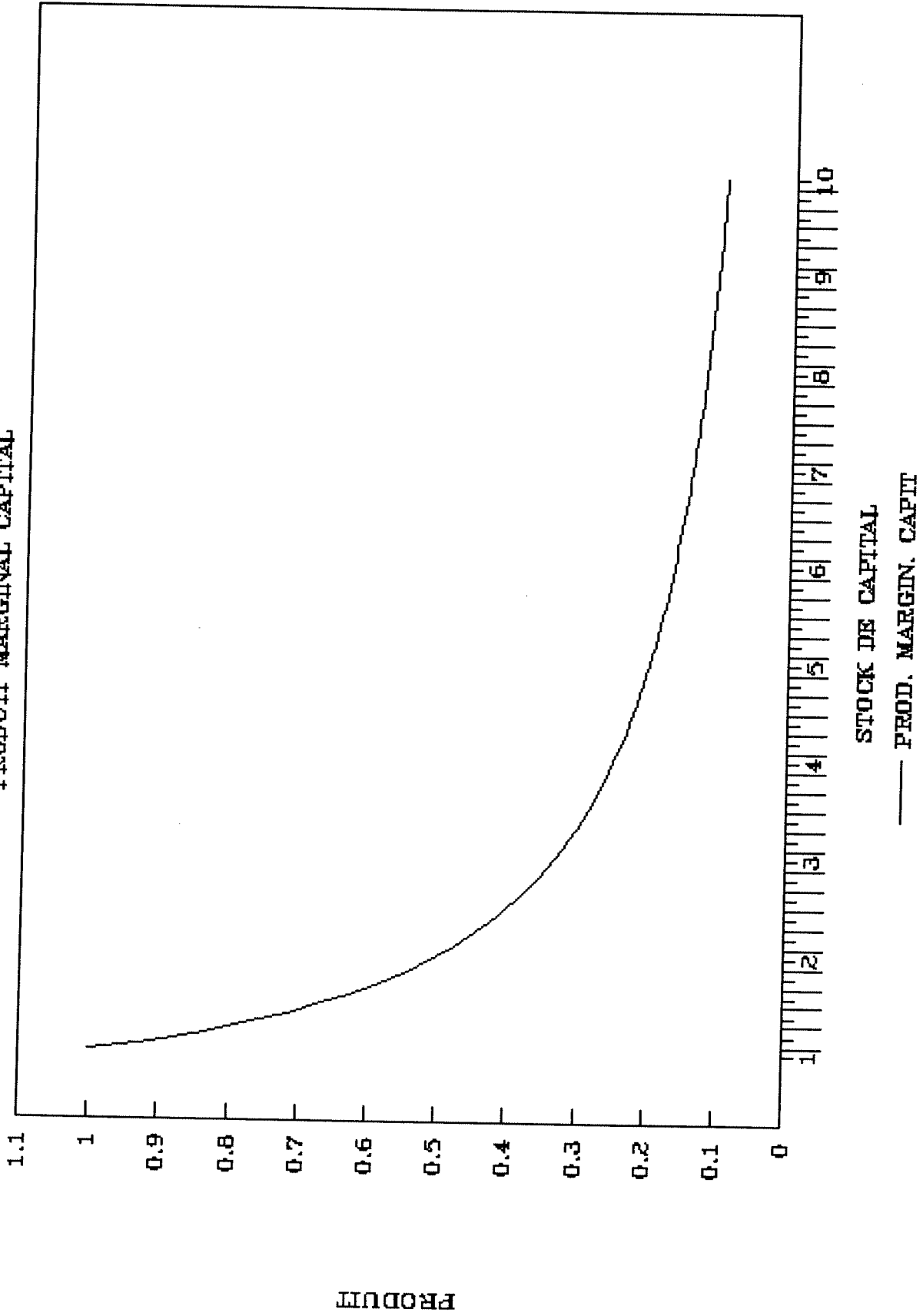


FIGURE 24
PRODUIT MARGINAL CAPITAL

