

UNIVERSITE DE MONTREAL

ANALYSE COMPARATIVE DES DECISIONS D'EMPLOI
EN INCERTITUDE
DE LA COOPERATIVE DE TRAVAILLEURS
ET DE LA FIRME CAPITALISTE TRADITIONNELLE
A PROPRIETAIRE UNIQUE

PAR
MIREILLE FILION

DEPARTEMENT DE SCIENCES ECONOMIQUES
FACULTE DES ARTS ET DES SCIENCES

RAPPORT DE RECHERCHE PRESENTE
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE
DE MAITRE ES SCIENCES (M. SC.)

AOUT 1991

TABLE DES MATIERES

Remerciements	P. 4
Préliminaires	P. 5
INTRODUCTION	P. 7
Notes de l'introduction	P. 15
CHAPITRE 1: Cadre d'analyse	P. 17
1.1 Industrie	P. 17
1.2 Firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique	P. 18
1.3 Coopérative de travailleurs	P. 19
Notes du chapitre 1	P. 21
CHAPITRE 2: Niveau d'emploi optimal	P. 26
2.1 Niveau d'emploi optimal en certitude	P. 26
2.2 Effet de l'introduction de l'incertitude sur le niveau d'emploi optimal	P. 27
2.3 Niveau d'emploi optimal en incertitude	P. 35
Notes du chapitre 2	P. 37
CHAPITRE 3: Statique comparative	P. 43
3.1 Variation des coûts fixes	P. 43
3.2 Variation du prix du produit	P. 47
3.3 Variation de l'incertitude sur le prix du produit	P. 49

3.4	Variation des politiques fiscales	P. 53
3.4.1	Impôt proportionnel sur les revenus nets de l'entreprise	P. 53
3.4.2	Taxe forfaitaire par travailleur	P. 60
3.4.3	Taxe <i>ad valorem</i> sur le produit	P. 64
3.4.4	Taxe forfaitaire sur le produit	P. 69
	Notes du chapitre 3	P. 71
CHAPITRE 4: Diversification de la production		P. 79
4.1	Effets sur les profits	P. 79
4.2	Effets sur les dividendes	P. 84
4.3	Effets équivalents sur le prix du produit	P. 86
4.4	Niveau d'emploi optimal	P. 88
	Notes du chapitre 4	P. 91
CHAPITRE 5: Modèle alternatif		P. 92
5.1	Hypothèses	P. 95
5.2	Statique comparative	P. 95
5.3	Niveau d'emploi optimal	P. 97
	Notes du chapitre 5	P. 100
CONCLUSION		P. 102
BIBLIOGRAPHIE		P. 109
ANNEXE A:	Principes coopératifs énoncés par l'Alliance coopérative internationale (A.C.I.)	P. 112
ANNEXE B:	Traduction des principes coopératifs dans la Loi sur les coopératives du Québec	P. 114
ANNEXE C:	Développements mathématiques	P. 122

Remerciements

Nous désirons exprimer notre profonde reconnaissance à nos parents, Annette et Paul, primo, pour nous avoir inculqué une autodiscipline rigoureuse et le vif désir du travail bien fait; secundo, pour avoir semé en nous les germes de la curiosité intellectuelle qui nous ont aiguillonnée vers les études supérieures; et, tertio, pour nous avoir soutenue financièrement et moralement tout au long de la maîtrise.

Nous tenons également à adresser un mot de remerciement sincère à notre directeur de recherche, M. Georges Dionne, pour nous avoir transmis à travers son enseignement sa passion pour les sciences économiques et pour nous avoir prodigué maints conseils judicieux dans la réalisation de notre rapport.

Préliminaires

Notre choix d'une analyse comparative des décisions d'emploi en incertitude de la coopérative de travailleurs et de la firme capitaliste traditionnelle a trois racines principales:

1^o Nourrissant un intérêt marqué pour l'organisation coopérative, nous avons, après un baccalauréat spécialisé en sciences économiques, réalisé un diplôme de deuxième cycle en gestion et développement des coopératives. Cependant, l'approche multidisciplinaire qui fut privilégiée nous laissa en quelque sorte sur notre appétit. Aussi, désirions-nous tout d'abord assouvir une soit, soit celle d'utiliser les instruments particuliers des sciences économiques à l'examen d'une coopérative.

Toutefois, il existe plusieurs types de coopérative et notre analyse aurait pu porter notamment sur les coopératives de consommateurs ou les coopératives d'épargne et de crédit. Or, notre attrait pour les formes de travail participatives (participation des travailleurs à la gestion et/ou aux profits) orienta notre étude vers les coopératives de travailleurs.

2^o Etant *a priori* une athée de la coopération, en ce sens que nous ne croyons pas de prime abord en la supériorité de la formule coopérative, nous voulions vérifier l'efficacité de la coopérative de travailleurs en matière de création d'emplois par rapport à la firme capitaliste traditionnelle parfaitement compétitive avant de lui donner notre préférence comme solution au chômage endémique qui accable les économies occidentales.

3^e L'incertitude caractérisant les prises de décision dans les économies occidentales, nous souhaitons intégrer cet élément à notre exposé théorique afin de lui insuffler plus de réalisme.

INTRODUCTION

La coopérative de travailleurs est une entreprise coopérative dont l'objet premier consiste à fournir du travail à ses membres. Or, l'entreprise coopérative telle que définie par l'Alliance coopérative internationale (A.C.I.) est régie par six principes coopératifs.¹ En outre, pour les coopératives de nombre de pays, dont notamment celles du Québec, aux principes coopératifs de l'A.C.I. se greffe également celui de la dévolution désintéressée de l'actif net.² L'ensemble de ces principes et leur traduction dans la loi différencient la coopérative de travailleurs de la firme capitaliste traditionnelle à la fois quant au traitement du capital financier et des travailleurs.³

Les principes coopératifs 3 et 4 de l'A.C.I., qui concernent la rémunération du capital et l'usage des profits de la coopérative, ainsi que le principe de la dévolution désintéressée de l'actif net expriment la différence de traitement du capital financier.⁴ Au Québec, par exemple, le capital des coopératives de travailleurs est formé de parts sociales et privilégiées. Ces parts, non transigeables en bourse, ne sont rachetables qu'à leur valeur initiale par la coopérative et ce remboursement n'est autorisé que sous certaines conditions.⁵ De plus, la Loi sur les coopératives interdit tout paiement d'intérêt sur les parts sociales et ne permet que la perception d'un intérêt limité sur les parts privilégiées.⁶ En outre, les dividendes sont versés non pas en fonction du nombre de parts détenues dans la coopérative de travailleurs, mais au prorata du nombre d'heures travaillées par le travailleur-membre au sein de celle-ci. Par surcroît, la loi oblige l'affectation d'au moins 20% des profits de la coopérative de travailleurs à une réserve générale impartageable entre les travailleurs-membres jusqu'à ce que celle-ci soit au moins égale à 25% des dettes de la coopérative. Finalement, le principe de la dévolution désintéressée

de l'actif net stipule que ce qui reste une fois que toutes les dettes y inclus les parts de capital sont remboursées doit être distribué à d'autres associations coopératives ou fédérations en cas de dissolution de la coopérative de travailleurs. En résumé, le paiement des dividendes n'est pas subordonné à la valeur du capital investi dans la coopérative de travailleurs, le taux d'intérêt sur le capital est limité et les gains en capital sont nuls puisque les parts sont rachetées à leur prix initial et que l'accroissement de la valeur de la coopérative (sous forme d'accumulation de réserves et d'appréciation de ses actifs) revient à d'autres organisations coopératives lors de sa dissolution. Aussi, la rémunération du capital souscrit par le travailleur-membre dans la coopérative de travailleurs prend uniquement deux formes: une première, directe, qui consiste en un intérêt limité et une autre, indirecte, que lui confère sa qualité de membre, soit de meilleurs dividendes pour le nombre d'heures travaillées au sein de la coopérative. Par conséquent, comme le souligne Bastien [1987, p. 17], contrairement à la firme capitaliste, il existe une asymétrie entre la rémunération du capital et le risque au sein de la coopérative de travailleurs: comme l'actionnaire d'une firme capitaliste, le travailleur-membre d'une coopérative de travailleurs risque de perdre l'entièreté du capital qu'il a investi, mais, *a contrario*, se voit plafonné quant à l'appropriation des gains générés par son investissement. Le travailleur-membre n'étant donc pas pleinement rémunéré pour le risque encouru tendra, en toute rationalité, à souscrire en capital le montant minimal requis à la qualification de membre. Pour ces raisons, les coopératives de travailleurs éprouvent fréquemment des difficultés de financement et sont minées par le manque d'investissements. Plusieurs auteurs ont modélisé ces problèmes dont Furubotn et Pejovich [1970, 1973], Vanek [1975], Jensen et Meckling [1979], Ellerman [1986] et Uvalick [1986]. Toutefois, dans le cadre de ce rapport, étant donné notre attrait pour les formes

de travail participatives, nous n'aborderons pas l'analyse de l'impact des différences de traitement du capital sur l'investissement et, par ricochet, sur l'emploi de la coopérative de travailleurs et de la firme capitaliste traditionnelle en incertitude. Nous supposerons donc absentes les difficultés de financement de la coopérative de travailleurs et les carences en investissement qu'elles entraînent. Nous nous intéresserons exclusivement aux différences de traitement des travailleurs et à leurs incidences sur les décisions d'emploi des deux formes d'entreprise en incertitude.

Aussi, nous ne retiendrons comme caractérisation de la coopérative de travailleurs que les éléments des principes coopératifs se rapportant aux différences de traitement des travailleurs, soit le contrôle démocratique par les travailleurs-membres selon la modalité un travailleur-membre égale un vote (principe 2 de l'A.C.I.) et la distribution des profits entre les travailleurs-membres au prorata du nombre d'heures travaillées au sein de la coopérative (partie c du principe 4 de l'A.C.I.). Quant à la firme capitaliste "traditionnelle", nous la circonscrivons par l'absence de toutes formes de participation des travailleurs à la gestion et aux profits.

Ensuite, bien que l'engagement de travailleurs non membres par la coopérative de travailleurs ne fasse pas entorse aux principes coopératifs, une telle procédure élimine à la limite le statut particulier des travailleurs au sein de la coopérative et aplanit toutes différences de traitement des travailleurs par rapport à la firme capitaliste traditionnelle.⁷ Aussi, notre définition de la coopérative de travailleurs exclura une telle possibilité et tous les travailleurs y jouiront de la qualité de membre.

Enfin, comme la riscophobie caractérise en général les individus et que les travailleurs-membres, qui contrôlent la coopérative de travailleurs, ne peuvent ni diversifier ni assurer leurs revenus de travail, les décisions de la

coopérative de travailleurs en incertitude doivent tenir compte de l'aversion au risque des travailleurs-membres.⁸ Aussi, pour des fins de comparaison, nous considérerons la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique afin d'éliminer la possibilité pour les propriétaires de capital, qui contrôlent la firme capitaliste traditionnelle, d'éliminer tous risques quant à leurs revenus par la diversification de leur portefeuille et d'être considérés neutres au risque dans les prises de décision.⁹

Au fil des pages qui vont suivre, nous tenterons de mettre en relief les différences entre les décisions d'emploi en incertitude de la coopérative de travailleurs riscophobe et de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe dans une industrie parfaitement compétitive.¹⁰ Notre analyse sera donc partielle. Des sources traditionnelles d'incertitude (prix des produits, prix des intrants ou fonction de production aléatoire), nous ne considérerons que celle sur le prix des produits. En outre, nous limiterons notre étude au cas où le niveau de capital est fixe et identique dans les deux types d'entreprise. Ce faisant, nous chercherons à répondre à la question suivante pour une industrie parfaitement compétitive dont les prix des produits sont incertains: étant donné un certain niveau de capital initial, quelle forme d'organisation faudrait-il mettre sur pied, coopérative de travailleurs ou firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, afin de créer le plus grand nombre d'emplois? Cependant, si la création d'emplois est importante, le bien-être qu'elle génère est lui primordial. En effet, quel serait l'avantage de créer deux emplois dans une coopérative de travailleurs si ceux-ci procurent chacun la moitié du bien-être engendré par la création d'un seul emploi au sein d'une firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique. En supposant qu'il n'y a qu'un seul argument à la fonction d'utilité des agents économiques, soit leur richesse, le gouvernement pourrait alors tout aussi bien faire en privilégiant la firme

capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, grâce à l'impôt sur le revenu et aux prestations d'assurance-chômage. Aussi allons-nous supposer que le bien-être généré par la création d'un emploi est identique au sein des deux types d'entreprise.

Afin de répondre à cette interrogation, nous nous pencherons sur les décisions d'emploi de court terme de la coopérative de travailleurs riscophobe lorsque les prix des produits qu'elle fabrique sont aléatoires et suivent une distribution de probabilités indépendante de son niveau de production et nous mettrons en parallèle les résultats obtenus avec ceux de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe en pareilles circonstances. Etant donné la primauté accordée aux coopératives de travailleurs dans le cadre de notre rapport, les résultats concernant le comportement de la coopérative de travailleurs feront l'objet d'amples démonstrations tandis que ceux se rapportant au comportement de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique seront simplement énoncés. En outre, afin de ne pas surcharger l'exposé, nous reléguerons les notes à la fin de chaque chapitre et reporterons certains développements mathématiques à l'Annexe C.

Dans la littérature deux modèles permettent de déterminer les décisions d'emploi de court terme de la coopérative de travailleurs lorsque les prix des produits sont incertains et leurs probabilités de réalisation indépendantes du niveau de production individuelle des entreprises, soit le modèle "illyrien" et la théorie des contrats implicites.¹¹ Ces modèles se distinguent par le processus de sélection des travailleurs-membres mis à pied qu'ils supposent et, par ricochet, par la fonction objectif de la coopérative de travailleurs qu'ils définissent. Dans le modèle "illyrien", il existe un ordre exogène de licenciement des travailleurs-membres (par exemple, selon l'ancienneté) et la coopérative de travailleurs maximise l'espérance de l'utilité des dividendes qu'elle verse à ses

travailleurs-membres. Dans la théorie des contrats implicites, les travailleurs-membres licenciés sont désignés par un processus de sélection aléatoire où chaque travailleur-membre possède la même probabilité d'être démis de ses fonctions et la fonction objectif de la coopérative de travailleurs incorpore le risque de perte d'emploi encouru par les travailleurs-membres.

Les quatre premiers chapitres de notre rapport seront consacrés au modèle "illyrien". Au chapitre 1, nous présenterons nos hypothèses de travail. Au chapitre 2, nous comparerons le niveau d'emploi optimal de court terme de la coopérative de travailleurs riscophobe et de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe lorsqu'elle ne fabrique qu'un seul produit, que le prix de celui-ci est aléatoire et suit une distribution de probabilités indépendante du niveau de production de chacune des entreprises. De la synthèse des résultats de Ward [1958], Sandmo [1971] et Muzondo [1979], nous verrons que l'on ne peut rien dire quant à la supériorité de l'une ou l'autre des entreprises en termes de nombre de travailleurs lorsqu'elles ne fabriquent qu'un seul produit. Au chapitre 3, sur la base des travaux de Sandmo [1971], Muzondo [1979, 1980] et Bonin [1980], nous examinerons dans quelle direction changera le niveau optimal d'emploi de court terme de la coopérative de travailleurs riscophobe et de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe suite à une variation des coûts fixes, du prix du produit, de l'incertitude sur le prix du produit, d'un impôt proportionnel sur les revenus nets de l'entreprise, d'une taxe forfaitaire par travailleur, d'une taxe *ad valorem* sur le produit et d'une taxe forfaitaire sur le produit. Nous découvrirons que, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente (diminue) l'emploi suite à une diminution (augmentation) du prix du produit et à une augmentation (diminution) des coûts fixes, de l'incertitude sur le prix du produit, d'un impôt proportionnel sur les

revenus nets ou d'une taxe forfaitaire par travailleur. Et qu'à l'instar de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, l'effet sur le niveau d'emploi optimal d'une variation d'une taxe *ad valorem* sur le produit est ambigu pour la coopérative de travailleurs riscophobe. Au chapitre 4, nous considérerons le cas où les entreprises diversifient leur production. En généralisant l'approche de Ireland et Law [1982] et en utilisant les résultats de l'effet d'une diminution du risque à la Sandmo sur le prix du produit et d'une augmentation du prix du produit sur le nombre optimal de travailleurs, nous démontrerons que l'ambiguïté demeure quant au niveau d'emploi en incertitude de la coopérative de travailleurs riscophobe par rapport à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe lorsqu'il y a diversification de la production. Toutefois, nous observerons que plus le niveau de diversification de la production des entreprises est élevé, moins la coopérative de travailleurs riscophobe a de chances d'employer davantage de travailleurs que la firme capitaliste traditionnelle riscophobe.

Le cinquième chapitre portera sur la théorie des contrats implicites. Essentiellement, nous résumerons le papier de Miyazaki et Neary [1983]. Nous noterons que l'on ne peut encore rien dire quant au nombre de travailleurs optimal de court terme de la coopérative de travailleurs riscophobe par rapport à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe lorsque le prix du produit est incertain et suit une distribution de probabilités indépendante du niveau de production de chacune des entreprises. Cependant, l'emploi de la coopérative de travailleurs devient invariable à court terme et n'est plus affecté par une variation des coûts fixes, du prix du produit, d'un impôt proportionnel sur les revenus nets de l'entreprise, d'une taxe forfaitaire par travailleur, d'une taxe *ad valorem* sur le produit et d'une taxe forfaitaire sur le produit.

Nous concluons notre rapport par un résumé de l'ensemble des propositions énoncées tout au long de notre analyse. Puis, en regard de la résolution du problème du chômage, nous identifierons les avantages et les inconvénients de la coopérative de travailleurs par rapport à la firme traditionnelle à propriétaire unique.

Notes de l'introduction

- (1) Comme l'indique Bastien [1987, p. 9], fondée en 1895, l'Alliance coopérative internationale (A.C.I.) est un organisme qui regroupe les coopératives d'environ soixante-dix pays dont le Canada. Les principes coopératifs énoncés par l'A.C.I. sont présentés à l'Annexe A.
- (2) Nous décrivons le principe de la dévolution désintéressée de l'actif net dans le paragraphe suivant.
- (3) La traduction des principes coopératifs dans la Loi sur les coopératives du Québec figure à l'Annexe B.
- (4) Précisons que dans le vocabulaire de la coopération, on désigne les profits des coopératives par les termes "excédents" ou "surplus".
- (5) Comme le souligne Bastien [1987, p. 6], les parts sociales de la coopérative servant de garantie aux emprunts de la coopérative, la Loi sur les coopératives du Québec limite considérablement la possibilité pour les membres de retirer leurs parts sociales. Voir l'article 38 de la Loi sur les coopératives du Québec à l'Annexe B, p.113. Quant aux parts privilégiées, leurs titulaires ne peuvent être remboursés avant l'expiration d'un délai de trois ans de la date de leur émission. Voir l'article 48 de la Loi sur les coopératives du Québec à l'Annexe B, p.113.
- (6) Concernant l'intérêt versé sur les parts sociales et privilégiées voir les articles 42 et 48 de la Loi sur les coopératives du Québec à l'Annexe B, p.113.
- (7) Soulignons que la Loi sur les coopératives du Québec permet l'engagement de personnes non membres par la coopérative de travailleurs pour l'exécution de travaux occasionnels et de courte durée. Voir l'article 224.5 de la Loi sur les coopératives du Québec.

(8) Comme le mentionnent Ireland et Law [1982, pp. 148 et 152], les travailleurs des coopératives de travailleurs ne sont pas en mesure de diversifier leurs revenus de travail puisqu'ils ne peuvent pas travailler simultanément pour plusieurs entreprises. Ils sont généralement également dans l'impossibilité d'assurer leurs revenus de travail, selon ces auteurs, pour des raisons de sélection adverse, mais également de risque moral. Effectivement, tout marché d'assurance qui assurerait les travailleurs des coopératives de travailleurs contre l'éventualité de bas revenus ferait face à un problème de sélection adverse, puisque cela aurait pour effet d'attirer des coopératives à faible niveau de productivité, et à un problème de risque moral, puisque les travailleurs auraient tendance à fournir moins d'effort.

(9) Comme le souligne Daigneault [1986, p. 1], si les propriétaires de capital pouvaient diversifier parfaitement leur portefeuille et être considérés neutres au risque dans les prises de décision par le conseil d'administration, nous devrions avoir recours à des modèles tels que le Capital Asset Pricing Model (CAPM) et l'Arbitrage Pricing Theory (APT) pour expliquer les comportements des firmes capitalistes en incertitude plutôt que de modéliser ces entreprises comme maximisant l'espérance de leur utilité.

(10) Spécifions que la riscophobie des entreprises émane de l'aversion au risque de ceux qui les contrôlent.

(11) "Illyrien" vient ici de la traduction de "illyrian". Il réfère à une région de la Yougoslavie, soit l'Illyrie, puisque ce modèle fut à l'origine formulé par Ward [1958] pour expliquer l'autogestion yougoslave.

CHAPITRE 1: Cadre d'analyse

1.1 Industrie

Nous considérons une industrie parfaitement compétitive composée d'un grand nombre d'entreprises. Celles-ci sont de deux types, soit des coopératives de travailleurs et des firmes capitalistes traditionnelles à propriétaire unique. Le produit qu'on y fabrique est unique et homogène. Son caractère périssable et/ou ses coûts d'entreposage prohibitifs en rendent le stockage impossible. En outre, les entreprises sont incapables d'ajuster leur production une fois le prix du produit, P , connu. Par conséquent, les quantités du produit mises en marché sont nécessairement décidées avant que le prix du produit ne soit révélé.¹ Celui-ci est aléatoire mais sa fonction de densité est connue de tous les gestionnaires de l'industrie. De plus, étant donné la structure parfaitement compétitive de l'industrie, les probabilités de réalisation du prix du produit sont indépendantes des décisions de production individuelles des firmes qui la composent.² Ainsi, les entreprises déterminent leur niveau de production et d'emploi sur la base des probabilités de réalisation du prix du produit fournies par le marché.³ Afin de pouvoir comparer la situation où le prix du produit est aléatoire avec celle où il est certain, nous posons l'espérance du prix du produit égale au prix du produit en certitude, i.e. $E(P) = P_{ce}$.⁴

Les deux types d'entreprise utilisent la même technique de production, $Q = F(N, K)$. Celle-ci emploie uniquement deux catégories d'intrant, soit des travailleurs, N , et du capital, K . Le stock de capital est fixe et posé identique dans les deux types d'entreprise, $K = \underline{K}$, tandis que le nombre de travailleurs est variable. Les entreprises louent le capital à un prix fixe, r . La productivité marginale des travailleurs est positive, $F_N > 0$, et décroissante, $F_{NN} < 0$. Les

travailleurs sont tout à fait identiques, notamment, quant au nombre d'heures de travail qu'ils fournissent, que nous supposerons fixe, ainsi qu'en termes de qualifications et de préférences.⁵

Tous les agents économiques, qu'ils soient travailleurs ou propriétaires de capital, ont la même attitude vis-à-vis du risque que résume une fonction d'utilité de von Neuman-Morgenstern, $U(R)$ où R représente la richesse de l'agent, telle que l'utilité marginale procurée par un dollar est positive, $U'(R) > 0$. Ils sont riscophobes, $U''(R) < 0$, leur aversion absolue au risque (AAR) est décroissante avec leur richesse, $d(AAR)/dR < 0$, et leur aversion relative au risque (ARR) non croissante avec leur richesse, $d(ARR)/dR \leq 0$.⁶

1.2 Firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique

Les travailleurs ne participent ni à la gestion ni aux profits. Leur rémunération est fixe et égale au salaire sur le marché, w .

Le propriétaire de l'entreprise prend toutes les décisions et empoche tous les profits de la firme, π . Ceux-ci sont résiduels et aléatoires étant donné la nature stochastique du prix du produit: $\pi = PF(N, K) - wN - rK$. En outre, l'espérance des profits est égale aux profits de la firme lorsque le prix du produit est certain, $E(\pi) = \pi^{ce}$.⁷

L'intérêt du propriétaire, qui est riscophobe, réside dans la maximisation de l'espérance de l'utilité que lui procure les profits de la firme. Conséquemment, l'objectif de la firme capitaliste à propriétaire unique, qui a la même attitude vis-à-vis du risque que celle de son propriétaire qui la contrôle, consiste à maximiser l'espérance de l'utilité des profits par rapport au nombre de travailleurs,

$$\text{Max}_N E[U(\pi)] .$$

1.3 Coopérative de travailleurs

Par définition, tous les travailleurs endossent le statut de membre au sein de la coopérative de travailleurs dans sa forme pure. Ce statut leur confère une voix au chapitre des prises de décision et leur assure une part des profits. Aussi, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle, la participation à la gestion et aux profits ne dépend pas de la valeur du capital investi dans l'entreprise mais est inhérente à la qualité de membre.

Quoique l'exercice directe de la démocratie par l'ensemble des travailleurs-membres soit idéalement souhaitable, son application n'est possible que lorsque le nombre de travailleurs-membres est restreint.⁸ Aussi, d'ordinaire, est-ce la démocratie représentative qui prévaut: les travailleurs-membres élisent des leurs au conseil d'administration qu'ils investissent du pouvoir de décision.⁹ Mais le conseil d'administration doit généralement engager un directeur général pour la gestion courante de la coopérative.¹⁰ Or, les intérêts du directeur général peuvent différer de ceux du conseil d'administration et donner lieu à des problèmes d'agence. Toutefois, dans l'étude présente, nous supposons qu'il y a identité des intérêts du directeur général et du conseil d'administration et que de tels problèmes d'agence n'existent pas.

Les travailleurs-membres se partagent en parts égales l'entièreté des profits.¹¹ La rémunération des travailleurs-membres est identique, résiduelle et aléatoire puisque le prix du produit est stochastique: les revenus de la coopérative nets des coûts du capital sont divisés également entre les travailleurs-membres et versés à ces derniers sous forme de dividendes, $y = [PF(N, K) - rK]/N$.¹² L'espérance des dividendes est égale aux dividendes de

la coopérative de travailleurs lorsque le prix du produit est certain, $E(y) = y^{ce}$, et supérieure au salaire offert sur le marché, $E(y) > w$.¹³

Puisque tous les administrateurs sont des travailleurs-membres, la fonction d'utilité individuelle des travailleurs-membres constitue la fonction d'utilité de groupe représentant l'attitude du conseil d'administration vis-à-vis du risque. Les travailleurs-membres étant riscophobes, le conseil d'administration est lui aussi riscophobe et l'intérêt de ses membres réside dans la maximisation de l'espérance de l'utilité que leur procurent les dividendes.¹⁴ Par conséquent, l'objectif de la coopérative de travailleurs, qui a la même attitude vis-à-vis du risque que celle du conseil d'administration qui la contrôle, consiste à maximiser l'espérance de l'utilité des dividendes par rapport au nombre de travailleurs, $\text{Max } E[U(y)]$.

N

Notes du chapitre 1

(1) Tel est le cas, entre autres, de l'industrie agricole. Précisons que si les entreprises pouvaient ajuster leur production une fois le prix du produit connu, les décisions de production et d'emploi ne seraient pas prises *ex ante* mais *ex post* i.e. en situation de certitude.

(2) Poser que la fonction de densité du prix du produit est exogène et connue de tous les gestionnaires de l'industrie est analogue à formuler que tous les décideurs perçoivent les mêmes probabilités de réalisation du prix du produit, i.e. possèdent les mêmes probabilités subjectives quant à la réalisation du prix du produit.

(3) Si le stockage du produit était possible, l'entreprise prendrait ses décisions de production et d'emploi en tenant compte à la fois du niveau des stocks et des probabilités de réalisation du prix du produit.

(4) L'indice supérieur "ce" signifie "certitude". Soulignons que nous reprenons ici la définition de la situation de certitude proposée par Sandmo [1971]. Or, au dire de Hawawini [1984, p. 119], celle-ci est arbitraire et il serait plus réaliste de spécifier la situation de certitude comme étant celle où le prix du produit est réalisé, mais non nécessairement égal à l'espérance du prix du produit en incertitude. Cependant, nous verrons au chapitre 2 que l'adoption de cette définition alternative ne modifie pas l'ambiguïté du niveau d'emploi de la coopérative de travailleurs riscophobe par rapport à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe lorsque le bien-être généré par la création d'un emploi est identique au sein des deux types d'entreprise, i.e. lorsque $E(y) > w$ (voir la note 12).

(5) Soulignons que si les employés de la firme capitaliste traditionnelle n'ont pas intérêt à fournir plus que l'effort minimal leur permettant de garder leur

emploi (nous considérons ici qu'il n'y a pas de promotion possible), il en est autrement de ceux de la coopérative de travailleurs qui se partagent les profits de la coopérative et jouissent des fruits de leur effort. Aussi faudrait-il idéalement permettre au nombre d'heures de travail par travailleur de varier au sein de la coopérative de travailleurs et greffer le niveau d'effort au revenu dans la fonction d'utilité des travailleurs. Cependant, le fait de poser le nombre d'heures de travail par travailleur fixe et de ne considérer que le revenu comme argument de la fonction d'utilité des travailleurs simplifie grandement l'analyse.

(6) Nous avons retenu cette caractérisation de l'attitude des agents économiques vis-à-vis du risque parce qu'elle reflète en général le comportement des individus. Pratt [1964] et Arrow [1971] ont défini les mesures d'aversion absolue au risque (AAR) et d'aversion relative au risque (ARR) de la façon suivante: $AAR = - U''(R)/U'(R)$, $ARR = - R U''(R)/U'(R)$. Intuitivement, comme le rapportent Copeland et Weston [1988, pp. 89 et 90], il est raisonnable de penser que plus un individu est riche moins il sera affecté en termes de diminution d'utilité par la perte d'un montant donné puisque ce montant représente une plus faible proportion de sa richesse totale, et moins il sera réticent à risquer ce montant dans une loterie, i.e. moins il sera riscophobe. En d'autres termes, l'aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $d(AAR)/dR < 0$. En outre, il semble irrationnel de croire qu'une personne millionnaire qui joue et perd la moitié de sa fortune et se retrouve avec 500 000 \$ en banque y perde davantage en termes d'utilité que celle qui, ne possédant que 20 000 \$, participe à la même loterie et se retrouve en bout de ligne avec seulement 10 000 \$ en poche. En d'autres termes, l'aversion relative au risque peut être soit décroissante soit constante mais non croissante avec la richesse, i.e. $d(ARR)/dR \leq 0$. Or, les deux auteurs citent les résultats d'une étude empirique réalisée par Friend et Blume [1975] où il appert que les

investisseurs manifestent effectivement une aversion absolue pour le risque décroissante ainsi qu'une aversion relative au risque constante.

(7) Etant donné que $\Pi = PF(N, K) - wN - rK$, alors $E(\Pi) = E(P)F(N, K) - wN - rK$. Maintenant, comme nous avons posé $E(P) = P^{ce}$, alors $E(\Pi) = P^{ce}F(N, K) - wN - rK = \Pi^{ce}$.

(8) Au Québec, par exemple, lorsqu'une coopérative de travailleurs compte moins de vingt-cinq travailleurs-membres, ceux-ci peuvent convenir de ne pas élire d'administrateurs. Ils administrent alors eux-mêmes les affaires de la coopérative et ne sont pas tenus d'engager un directeur général. Voir les articles 61 et 62 de la Loi sur les coopérative du Québec à l'Annexe B, p.112 et p.113.

(9) Au Québec, notamment, le conseil d'administration d'une coopérative de travailleurs est composé d'au moins trois et d'au plus quinze administrateurs, lesquels peuvent être tout travailleur-membre de la coopérative. Voir les articles 223.2 et 81 de la Loi sur les coopérative du Québec à l'Annexe B, p. 111.

(10) C'est le cas, en autres, au Québec. Voir l'article 90 de la Loi sur les coopératives du Québec à l'Annexe B, p.112.

(11) Rappelons que la participation des travailleurs-membres aux profits de la coopérative de travailleurs se fait au prorata du nombre d'heures travaillées au sein de la coopérative. Or, nous avons posé les travailleurs-membres identiques notamment quant au nombre d'heures de travail qu'ils fournissent à la coopérative. Aussi, les travailleurs-membres se partagent-ils à parts égales les profits de la coopérative. Ensuite, comme nous énonçons que l'entièreté des profits est distribuée entre les travailleurs-membres, nous supposons qu'aucune part des profits n'est versée à la réserve générale de la coopérative de travailleurs. Au Québec, cela n'est possible que si cette réserve est au moins égale à 25% des dettes de la coopérative. Voir l'article 146 de la Loi sur les coopérative du Québec à l'Annexe B, p. 114.

(12) En fait, il serait sans doute plus juste de dire, en regard de la pratique des coopératives, que les travailleurs-membres reçoivent un salaire identique à celui des travailleurs employés dans les firmes capitalistes traditionnelles à propriétaire unique, w , lequel est ajusté à la hausse ou à la baisse en fonction des profits réalisés par la coopérative dont une part égale revient à chacun des travailleurs-membres. La rémunération des travailleurs-membres est donc identique et composée d'une partie fixe, w , et d'une partie aléatoire et résiduelle, π/N . Il nous est donc possible de réécrire les dividendes de la façon suivante: $y = w + \pi/N$.

(13) Etant donné que $y = w + \pi/N$, alors $E(y) = w + E(\pi)/N$. Or, $E(\pi) = \pi^{ce}$. Aussi, $E(y) = w + \pi^{ce}/N = y^{ce}$.

Notons que $E(y) > w$ est équivalent à $E(\pi) > 0$. En effet, $E(y) = w + E(\pi)/N$ et on constate que $E(y) > w$ si et seulement si $E(\pi) > 0$.

Soulignons qu'il est nécessaire de poser $E(y) > w$ si l'on veut que le bien-être généré par la création d'un emploi dans la coopérative de travailleurs soit identique au bien-être généré par la création d'un emploi dans la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, i.e. $E[U(y)] = U[w]$ (a). En effet, comme le rapportent Copeland et Weston [1988, p. 86], selon Markowitz [1959], l'espérance de l'utilité des dividendes est inférieure à l'utilité de l'espérance des dividendes pour un individu riscophobe, i.e. $E[U(y)] < U[E(y)]$ (b). En combinant (a) et (b), on obtient que $U[w] < U[E(y)]$ ce qui implique que $w < E(y)$ puisqu'un individu même riscophobe préfère toujours plus de richesse à moins, i.e. bien que décroissante, l'utilité marginale est toujours positive, $U'(y) > 0$. Ainsi, en présumant que l'utilité des travailleurs provienne uniquement de leur richesse (et non, par exemple, de leur participation à la gestion), étant donné la riscophobie des travailleurs et l'incertitude de leurs revenus dans la coopérative, l'espérance des revenus des travailleurs au sein de la coopérative de travailleurs devra

nécessairement être plus élevée que le salaire offert dans la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique.

Spécifions qu'en posant $E(y) > w$, la coopérative de travailleurs est alors assurée d'attirer le nombre optimal de travailleurs. En effet, la coopérative de travailleurs est en mesure d'attirer le nombre optimal de travailleurs seulement si l'espérance de l'utilité des dividendes est au moins égale à l'utilité procurée par les revenus alternatifs. Comme nous supposons que l'économie est caractérisée par la présence d'une multitude de chômeurs involontaires, les revenus alternatifs qu'il faut considérer sont ceux des allocations d'assurance-chômage et des activités domestiques, soit k . Il est donc nécessaire que $E[U(y)] = U[k]$ pour que la coopérative puisse attirer le nombre optimal de travailleurs. Etant donné la riscophobie des travailleurs, ceci implique que $E(y) > k$. Or, les revenus alternatifs sont nécessairement plus faibles que le salaire offert dans les firmes capitalistes traditionnelles à propriétaire unique, i.e. $k < w$, autrement les individus préféreraient rester à la maison plutôt que de se rendre à l'usine. Par conséquent, $E(y) > w$ implique $E(y) > k$.

(14) Selon Wilson [1968, p.129], l'existence d'une fonction d'utilité de groupe est possible si les membres du groupe s'accordent sur les probabilités de réalisation du prix du produit ou s'ils ont tous les mêmes préférences vis-à-vis du risque. Dans le cas présent, ces deux conditions sont respectées puisque la distribution des probabilités du prix du produit est donnée par le marché et connue de tous et qu'en vertu de l'hypothèse de l'homogénéité des travailleurs-membres les administrateurs sont tout à fait identiques.

CHAPITRE 2: Niveau d'emploi optimal

En utilisant certains résultats des travaux de Ward [1958], Sandmo [1971] et Muzondo [1979], nous allons comparer le nombre optimal de travailleurs qu'emploient la coopérative de travailleurs riscophobe et la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe en incertitude.

Rappelons qu'en situation de certitude, le prix du produit, les profits et les dividendes sont dénotés respectivement par P^{ce} , π^{ce} et y^{ce} , et qu'en incertitude les distributions de probabilités du prix du produit, des profits et des dividendes sont telles que l'espérance mathématique de ces variables est égale à leur valeur en situation de certitude, i.e. $E(P) = P^{ce}$, $E(\pi) = \pi^{ce}$ et $E(y) = y^{ce}$. Maintenant, spécifions le sens de notre notation quant au nombre de travailleurs à l'optimum: l'indice inférieur "0" dénote la situation où le prix du produit est certain et l'indice inférieur "1" celle où le prix du produit est aléatoire; l'indice supérieur "a" représente la coopérative de travailleurs riscophobe et l'indice supérieur "an" la coopérative de travailleurs neutre au risque;¹ finalement, l'indice supérieur "c" désigne la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe.

2.1 Niveau d'emploi optimal en certitude

Des travaux de Ward [1958, p. 576], nous savons qu'en situation de certitude, indépendamment de l'attitude des entreprises vis-à-vis du risque, la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, emploie plus, autant ou moins de travailleurs que la coopérative de travailleurs selon que les dividendes sont supérieurs, égaux ou inférieurs au salaire en vigueur sur le marché du

travail, i.e. selon que $y^{ce} \geq w$. Or, comme nous nous intéressons
<
uniquement au cas où $E(y) = y^{ce} > w$, nous reprendrons uniquement une partie
du résultat de Ward:

Résultat 1: Lorsque le prix du produit est certain, la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscofobe emploie plus de travailleurs que la coopérative de travailleurs riscofobe si et seulement si les dividendes sont supérieurs au salaire du marché, i.e. $N_0^c > N_0^a$ ssi $y^{ce} > w$.

2.2 Effet de l'introduction de l'incertitude sur le niveau d'emploi optimal

(a) Coopérative de travailleurs

Nous nous baserons sur l'analyse de Muzondo [1979, pp. 131 - 133] pour démontrer que la coopérative de travailleurs riscofobe emploie un plus grand nombre de travailleurs lorsque le prix de son produit est aléatoire plutôt que certain.

Résultat 2: Une coopérative de travailleurs riscofobe emploie un plus grand nombre de travailleurs si le prix de son produit est aléatoire plutôt que certain, i.e. $N_1^a > N_0^a$.²

Preuve du Résultat 2:

Nous allons prouver le Résultat 1 en démontrant alternativement les Lemmes 1 et 2.³

Lemme 1: Le nombre de travailleurs optimal de la coopérative de travailleurs riscophobe lorsque le prix du produit est certain est égal au nombre de travailleurs optimal de la coopérative de travailleurs neutre au risque lorsque le prix du produit est incertain, i.e. $N_0^a = N_1^{an}$.

Preuve du Lemme 1.

(i) Fonction objectif de la coopérative de travailleurs riscophobe lorsque le prix du produit est certain:

Lorsque le prix du produit est certain, l'objectif de la coopérative de travailleurs riscophobe consiste à maximiser l'utilité des dividendes par rapport au nombre de travailleurs:⁴

$$(2.1) \quad \text{Max}_N \quad U[y^{ce}] \quad \text{où} \quad y^{ce} = [P^{ce}F(N, \underline{K}) - r\underline{K}] / N$$

Puisque l'utilité marginale des dividendes est positive pour la coopérative de travailleurs riscophobe, $U'(y^{ce}) > 0$, il nous est possible de réécrire l'équation (2.1) de la façon suivante:⁵

$$(2.2) \quad \text{Max}_N \quad y^{ce} \quad \text{où} \quad y^{ce} = [P^{ce}F(N, \underline{K}) - r\underline{K}] / N$$

(ii) Fonction objectif de la coopérative de travailleurs neutre au risque lorsque le prix du produit est incertain:

Lorsque le prix du produit est incertain, l'objectif de la coopérative de travailleurs neutre au risque consiste à maximiser l'espérance de l'utilité des dividendes par rapport au nombre de travailleurs:⁶

$$(2.3) \quad \text{Max}_N \quad E[U^n(y)] \quad \text{où} \quad y = [PF(N, \underline{K}) - r\underline{K}] / N$$

Or, Markowitz [1959] a démontré que $E[U(y)] = U[E(y)]$ s'il y a neutralité au risque.⁷ Par conséquent, lorsque le prix du produit est incertain, l'objectif de la coopérative de travailleurs neutre au risque consiste à maximiser l'utilité de l'espérance des dividendes par rapport au nombre de travailleurs:

$$(2.4) \quad \text{Max}_N \quad U^n[E(y)] \quad \text{où} \quad y = [PF(N, \underline{K}) - r\underline{K}] / N$$

Comme $E(y) = y^{ce}$, nous pouvons réécrire l'équation (2.4) de la façon suivante:

$$(2.5) \quad \text{Max}_N \quad U^n[y^{ce}] \quad \text{où} \quad y^{ce} = [P^{ce}F(N, \underline{K}) - r\underline{K}] / N$$

Puisque l'utilité marginale des dividendes est positive pour la coopérative de travailleurs neutre au risque, $U^n(y^{ce}) > 0$, l'équation (2.5) est équivalente à:⁸

$$(2.6) \quad \text{Max}_N \quad y^{ce} \quad \text{où} \quad y^{ce} = [P^{ce}F(N, \underline{K}) - r\underline{K}] / N$$

L'identité des équations (2.2) et (2.6) montre l'équivalence des fonctions objectif de la coopérative de travailleurs riscophobe dont le prix du produit est certain et de la coopérative de travailleurs neutre au risque dont le prix du produit est incertain. En conséquence, le nombre de travailleurs optimal est le même dans les deux cas, i.e. $N_0^a = N_1^{an}$, et nous avons démontré le Lemme 1.⁹

Maintenant, à partir du Lemme 1 ($N_0^a = N_1^{an}$), nous pouvons affirmer que comparer les décisions d'emploi d'une coopérative de travailleurs riscophobe lorsque le prix du produit est incertain à celles d'une coopérative de travailleurs riscophobe lorsque le prix du produit est certain (N_1^a vs N_0^a) est équivalent à comparer les décisions d'emploi d'une coopérative de travailleurs riscophobe lorsque le prix du produit est incertain à celles d'une coopérative de travailleurs neutre au risque lorsque le prix du produit est incertain (N_1^a vs N_1^{an}). En conséquence, démontrer le Résultat 1 ($N_1^a > N_0^a$) revient à établir que $N_1^a > N_1^{an}$. C'est ce que nous allons faire en prouvant le Lemme 2.

Lemme 2: Lorsque le prix du produit est incertain, une coopérative de travailleurs riscophobe emploie davantage de travailleurs qu'une coopérative de travailleurs neutre au risque, i.e. $N_1^a > N_1^{an}$.

Preuve du Lemme 2:

Lorsque le prix du produit est incertain, le choix optimal de la coopérative de travailleurs en matière d'emploi, qu'elle soit risco-phobe ou neutre au risque, est celui qui maximise l'espérance de l'utilité des dividendes:

$$(2.7) \quad \text{Max}_N \quad E[U(y)] \quad \text{où} \quad y = [PF(N, \underline{K}) - r\underline{K}]/N$$

Les conditions de premier et de deuxième ordre nécessaires et suffisantes à cette maximisation sont respectivement:¹⁰

$$(2.8) \quad \text{C.P.O.} \quad E[U'(y) (PF_N(N) - y)] = 0$$

$$(2.9) \quad \text{C.D.O.} \quad H = E[U''(y)(PF_N(N, \underline{K}) - y)^2 (1/N) + U'(y) P F_{NN}(N, \underline{K})] < 0 \quad 11$$

Comme l'espérance d'un produit de variables aléatoires est égale au produit de l'espérance des variables aléatoires additionné de leur covariance, nous pouvons réécrire la condition de premier ordre, soit l'équation (2.8), de la manière suivante:¹²

$$(2.10) \quad E[PF_N(N, \underline{K}) - y] = - \text{cov} [U'(y), PF_N(N, \underline{K}) - y] / E[U'(y)]$$

Puisque $E(P) = P^{ce}$ et $E(y) = y^{ce}$, en appliquant l'espérance mathématique à l'expression entre crochets du côté gauche de l'équation (2.10), nous obtenons:

$$(2.11) \quad P^{ce} F_N(N, \underline{K}) - y^{ce} = - \text{cov} [U'(y), PF_N(N, \underline{K}) - y] / E[U'(y)]$$

Etant donné que l'utilité marginale procurée par les dividendes, pour la coopérative de travailleurs riscophobe comme pour la coopérative de travailleurs neutre au risque, est toujours positive, $U'(y) > 0$, quelque soit la réalisation de y , i.e. de P , alors l'espérance mathématique de l'utilité marginale est supérieure à zéro, $E[U'(y)] > 0$. Aussi, à partir de l'équation (2.11), nous avons:

$$(2.12) \text{ signe de } \{ P^{ce} F_N(N, K) - y^{ce} \} = - \text{ signe de } \{ \text{cov} [U'(y), PF_N(N, K) - y] \}$$

Afin de déterminer le signe de la covariance entre $U'(y)$ et $[PF_N(N, K) - y]$, exprimons tout d'abord le prix du produit en incertitude comme étant composé d'une partie fixe, son espérance mathématique, $E(P)$, et d'un élément stochastique, e , de moyenne nulle, $E(e) = 0$:¹³

$$(2.13) P = E(P) + e$$

Ensuite, remplaçons P dans $U'(y)$ et $[PF_N(N, K) - y]$ par le côté droit de l'équation (2.13) et différencions par rapport à e :¹⁴

$$(2.14) dU'(y)/de = [U''(y)F(N, K)/N]$$

$$(2.15) d[PF_N(N, K) - y]/de = [F_N(N, K) - F(N, K)/N]$$

Puisque la coopérative de travailleurs neutre au risque se distingue de la coopérative de travailleurs riscophobe par le signe de la dérivée seconde de sa fonction d'utilité, le signe de $dU'(y)/de$ variera en fonction de l'attitude vis-à-vis du risque de la coopérative. En effet, pour la coopérative de travailleurs neutre au risque $U''(y) = 0$ tandis que pour la coopérative de travailleurs riscophobe

$U''(y) < 0$. Conséquemment, dans le cas d'une coopérative de travailleurs neutre au risque, le côté droit de l'équation (2.14) est nul et $dU'(y)/de = 0$ et pour ce qui est de la coopérative de travailleurs riscophobe, le côté droit de l'équation (2.14) est négatif et $dU'(y)/de < 0$.

Comme le souligne Muzondo [1979, p.132], lorsque les rendements à l'échelle sont non croissants, l'entreprise rationnelle produit toujours dans la région de sa fonction de production où la productivité marginale des travailleurs est inférieure à leur productivité moyenne, $F_N(N, K) < F(N, K)/N$, alors le côté droit de l'équation (2.15) est négatif et $d[PF_N(N, K) - y]/de < 0$ quelque soit l'attitude de la coopérative de travailleurs vis-à-vis du risque.

Par conséquent, la covariance entre $U'(y)$ et $[PF_N(N, K) - y]$ est nulle, $cov [U'(y), PF_N(N, K) - y] = 0$, pour la coopérative de travailleurs neutre au risque et positive, $cov [U'(y), PF_N(N, K) - y] > 0$, pour la coopérative de travailleurs riscophobe. Aussi, selon l'identité (2.12), $P^{ce} F_N(N, K) - y^{ce} = 0$ pour la coopérative de travailleurs neutre au risque et $P^{ce} F_N(N, K) - y^{ce} < 0$ pour la coopérative de travailleurs riscophobe.¹⁵ A partir de ces résultats, on voit clairement à la Figure 1 de la page suivante que la coopérative de travailleurs riscophobe emploie à l'optimum un plus grand nombre de travailleurs que la coopérative de travailleurs neutre au risque lorsque le prix du produit est incertain, i.e. $N_1^a > N_1^{an}$, et nous avons prouvé le Lemme 2.

C.Q.F.D.

Comme le relève Muzondo [1979, p. 133], intuitivement, le Résultat 2 s'explique par l'interaction de deux effets contraires. Pour voir cela, notons que $PF_N(N, K)$ constitue l'apport pécuniaire de chaque travailleur-membre à la coopérative de travailleurs tandis que $y = [PF(N, K) - rK]/N$ représente ce que

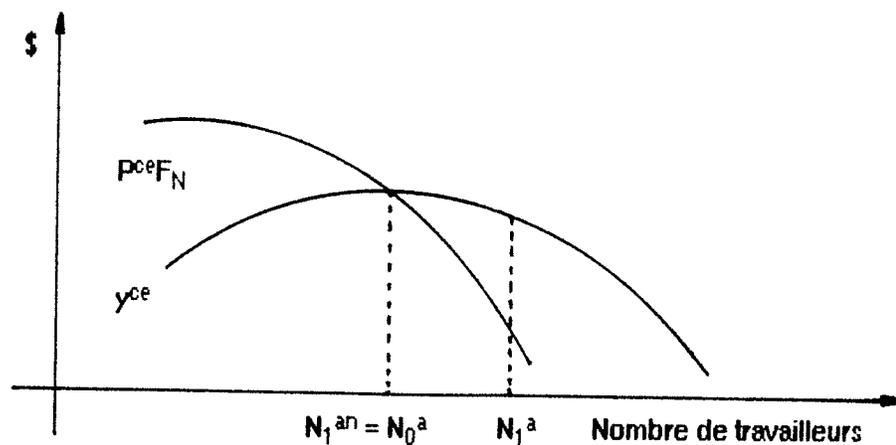
coûte chaque travailleur-membre à la coopérative. Exprimons les dividendes sous une forme légèrement différente, soit $y = P [F(N, K)/N] - [rK/N]$. L'apport net de chaque travailleur-membre à la coopérative peut donc se formuler de la façon suivante: $AN = PF_N(N, K) - P [F(N, K)/N] + [rK/N]$, i.e. $AN = P[F_N(N, K) - (F(N, K)/N)] + [rK/N]$. L'augmentation de l'apport net par travailleur-membre résulte en une hausse des dividendes. Il est donc dans l'intérêt des travailleurs-membres d'accroître l'apport net par travailleur-membre. Or, l'augmentation du nombre de travailleurs-membres se traduit, d'une part, par un effet positif sur l'apport net de chaque travailleur-membre à la coopérative par la diminution de la part des coûts fixes que supporte chacun des travailleurs-membres [$d(rK/N)/dN < 0$] et, d'autre part, par un effet négatif sur l'apport net de chaque travailleur-membre à travers la diminution de $[F_N(N, K) - (F(N, K)/N)]$, étant donné que la productivité marginale et moyenne sont décroissantes et que la courbe de la productivité marginale coupe celle de la productivité moyenne en son maximum. Mais, puisque le prix du produit est aléatoire, le deuxième effet, négatif, est incertain. Or, l'espérance de la désutilité d'une perte incertaine est plus faible que la désutilité d'une perte certaine pour la coopérative de travailleurs risco-phobe tandis qu'elle est égale à la désutilité d'une perte certaine pour la coopérative de travailleurs neutre au risque. En conséquence, l'effet négatif sur l'apport net par travailleur-membre d'une augmentation du nombre de travailleurs-membres a plus de poids pour la coopérative de travailleurs neutre au risque que pour la coopérative de travailleurs risco-phobe. Comme l'effet positif sur l'apport net de l'augmentation du nombre de travailleurs-membres, qui est certain, a le même poids pour la coopérative de travailleurs neutre au risque que pour la coopérative de travailleurs risco-phobe, la coopérative de travailleurs risco-phobe privilégiera donc l'emploi d'un plus

grand nombre de travailleurs-membres que la coopérative de travailleurs neutre au risque.

Le Résultat 2 est contraire au comportement de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique. En effet, Sandmo [1971, p.67] a démontré qu'une firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe produit moins lorsque le prix de son produit est aléatoire plutôt que certain. Or, le capital étant fixe par hypothèse, cela équivaut à énoncer le résultat suivant:

Résultat 3: Une firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe emploie moins de travailleurs si le prix de son produit est aléatoire plutôt que certain, i.e. $N_1^c < N_0^c$.¹⁶

Figure 1 17



2.3 Niveau d'emploi optimal en incertitude

De la combinaison des Résultats 1, 2 et 3, il est clair qu'avec l'introduction de l'incertitude sur le prix du produit, le niveau d'emploi optimal de la coopérative de travailleurs riscophobe converge vers celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, mais nous ne pouvons pas dire de prime abord que le nombre optimal de travailleurs est plus

élevé dans l'un ou l'autre des deux types d'entreprise.¹⁸ Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Proposition 1: Lorsque le prix du produit est incertain, le nombre de travailleurs optimal de la coopérative de travailleurs riscophobe est supérieur, égal ou inférieur à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe si l'espérance des dividendes est supérieure au salaire du marché, i.e. $N_1^a \geq N_1^c$ si $E(y) = y^{ce} > w$.¹⁹

Le tableau 1 synthétise l'ensemble des conclusions précédentes.

Tableau 1

	<u>Coopérative de travailleurs riscophobe</u>	<u>Firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe</u>
<u>Prix certain</u> P^{ce}	$K^a = \underline{K}$ $N^a = N_0^a$ $w^a = y^{ce} > w$ $\eta^a = \eta^{ce} > 0$	$K^c = \underline{K}$ $N^c = N_0^c$ $w^c = w$ $\eta^c = \eta^{ce} > 0$
	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Si $y^{ce} > w$ alors $N_0^a < N_0^c$</div> → <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Ward [1958]</div>	
<u>Prix incertain</u> P $E(P) = P^{ce}$	$K^a = \underline{K}$ $N^a = N_1^a$ $E(w^a) = E(y) = y^{ce} > w$ $E(\eta^a) = E(\eta) = \eta^{ce} > 0$	$K^c = \underline{K}$ $N^c = N_1^c$ $w^c = w$ $E(\eta^c) = E(\eta) = \eta^{ce} > 0$
	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$N_1^a > N_0^a$</div> → <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Muzondo [1979]</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">$N_1^c < N_0^c$</div> → <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Sandmo [1971]</div>
	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">Si $E(y) = y^{ce} > w$ alors $N_1^a \geq N_1^c$</div>	

Notes du chapitre 2

- (1) Comme dans la littérature, on désigne fréquemment la coopérative de travailleurs par entreprise autogérée, le "a" remplace ici le terme "autogestion".
- (2) Soulignons que Hawawini [1984, p.129], qui adopte la définition alternative de la situation de certitude spécifiée à la note 4 du chapitre 1, arrive au même résultat que Muzondo [1979], soit $N_1^a > N_0^a$.
- (3) Mentionnons que Muzondo [1979] ne démontre pas l'affirmation inscrite dans le Lemme 1 mais l'énonce uniquement.
- (4) Il s'agit en fait de l'objectif de la coopérative de travailleurs lorsque le prix du produit est certain, quelque soit son attitude vis-à-vis du risque.
- (5) En fait, l'utilité marginale des dividendes est toujours positive quelque soit l'attitude de la coopérative de travailleurs vis-à-vis du risque. En effet, l'attitude vis-à-vis du risque affecte uniquement la dérivée seconde de la fonction d'utilité et non sa dérivée première.
- En ce qui concerne la preuve de l'identité des équations (2.1) et (2.2) voir la démonstration (1) à l'Annexe C.
- (6) Il s'agit en fait de l'objectif de la coopérative de travailleurs lorsque le prix du produit est incertain, quelque soit son attitude vis-à-vis du risque. L'indice supérieur "n" indique ici qu'il s'agit de la fonction d'utilité de la coopérative de travailleurs neutre au risque. Celle-ci se différencie de la fonction d'utilité de la coopérative de travailleurs riscophobe en ce qu'elle est constante dans la richesse plutôt que décroissante, i.e. en ce qu'elle est linéaire dans la richesse plutôt que concave.
- (7) Voir Copeland et Weston [1988, p. 86].
- (8) A un indice près, soit "n", la démonstration de l'équivalence des équations (2.5) et (2.6) est analogue à la démonstration (1) de l'Annexe C.

(9) Soulignons que si, à l'optimum, le nombre de travailleurs et, donc, les dividendes sont identiques dans la coopérative de travailleurs risco-phobe lorsque le prix est certain et la coopérative de travailleurs neutre au risque lorsque le prix est incertain, l'utilité générée par les dividendes est plus élevée pour la coopérative neutre au risque que pour la coopérative risco-phobe. En effet, l'utilité marginale des dividendes est constante avec les dividendes pour la coopérative neutre au risque ($dU(y)/dy = U''(y) = 0$) mais décroissante avec les dividendes pour la coopérative risco-phobe ($U''(y) < 0$).

(10) Voir la démonstration (2) à l'Annexe C.

(11) Deux hypothèses garantissent le respect de la condition de deuxième ordre, soit la risco-phobie de la coopérative de travailleurs ($U''(y) < 0$) et la productivité marginale décroissante des travailleurs ($F_{NN} < 0$).

(12) Puisque P est stochastique, $U'(y)$ et $[P F_N(N, K) - y]$ sont aléatoires. Par conséquent, la condition de premier ordre, soit l'équation (2.8), peut se réécrire: $E[P F_N(N, K) - y] E[U'(y)] + \text{cov}[U'(y), P F_N(N, K) - y] = 0$. Or, on voit aisément que quelques manipulations suffisent pour obtenir l'équation (2.10).

(13) Rappelons que la fonction de densité du prix du produit est, par hypothèse, connue de tous les gestionnaires de l'industrie. Aussi, la fonction de densité de e est connue des travailleurs et des propriétaires de capital. En outre, soulignons qu'il est nécessaire de poser $E(e) = 0$ pour isoler l'effet-prix du risque, puisqu'en prenant l'espérance mathématique de l'équation (2.13), nous obtenons $E(P) = E(P) + E(e)$.

(14) Voir la démonstration (3) à l'Annexe C.

(15) Soulignons que la condition d'emploi optimal de la coopérative neutre au risque lorsque le prix du produit est incertain, soit $P^{ce} F_N(N, K) - y^{ce} = 0$, correspond à celle de la coopérative de travailleurs lorsque le prix du produit est certain, quelque soit son attitude vis-à-vis du risque. Voir la démonstration (4) à

l'Annexe C. Ceci prouve à nouveau, mais autrement, le Lemme 1 qui stipule que le nombre de travailleurs optimal de la coopérative de travailleurs riscophobe lorsque le prix du produit est certain est égal au nombre de travailleurs optimal de la coopérative de travailleurs neutre au risque lorsque le prix du produit est incertain.

(16) Spécifions que Hawawini [1984, p.125], qui adopte la définition alternative de la situation de certitude spécifiée à la note 4 du chapitre 1, obtient un résultat différent de celui de Sandmo [1971], soit: $N_1^c \geq N_0^c$.

<

(17) Soulignons que la courbe de la productivité marginale des travailleurs-membres ($P^{ce}F_N$) coupe celle des dividendes (y^{ce}) en son maximum puisque: (i) lorsque $P^{ce}F_N > y^{ce}$, l'ajout d'un nouveau travailleur-membre accroît y^{ce} car l'apport pécuniaire d'un travailleur-membre à la coopérative est plus important que son coût; et (ii) lorsque $P^{ce}F_N < y^{ce}$, le recrutement d'un nouveau membre diminue y^{ce} étant donné que l'apport pécuniaire d'un travailleur-membre à la coopérative est inférieur à son coût. Par conséquent, y^{ce} est à son maximum lorsque $P^{ce}F_N = y^{ce}$.

(18) Cependant, soulignons que lorsque le prix du produit est incertain et que $E(y) = y^{ce} > w$, la coopérative de travailleurs riscophobe n'emploie pas nécessairement moins de travailleurs que la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe comme en situation de certitude et, le cas échéant, la différence d'emploi est moindre.

(19) Contrairement à la Proposition 1, Muzondo [1979, p. 139] affirme que lorsque le prix du produit est incertain, la coopérative de travailleurs riscophobe emploie plus de travailleurs qu'une firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe opérant dans les mêmes conditions. Bonin [1980, p. 336] s'objecte à l'assertion de Muzondo [1979] en proclamant, en accord avec la

Proposition 1, l'ambiguïté du résultat. Muzondo [1980, pp. 343 - 344] rétorque à Bonin [1980] en démontrant son affirmation de 1979. Nous avons pensé de prime abord que cette preuve venait clore la discussion. Cependant, grâce à notre synthèse des résultats de Ward [1958], Sandmo [1971] et Muzondo [1979], en y regardant de plus près nous avons découvert que Muzondo [1980] réussit à lever l'ambiguïté en posant une hypothèse restrictive. En effet, Muzondo [1980] suppose que l'espérance des dividendes est égale au salaire sur le marché, i.e. $E(y) = y^{ce} = w$. Dans ce cas, Ward [1958, p. 576] a démontré que le nombre de travailleurs optimal de la coopérative de travailleurs est égal à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique lorsque le prix du produit est certain, i.e. $N_0^a = N_0^c$ ssi $y^{ce} = w$. Comme nous avons vu que la coopérative de travailleurs riscofobe augmente le nombre de ses travailleurs suite à l'introduction de l'incertitude (Résultat 2) et que la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscofobe réduit au contraire le nombre de ses travailleurs (Résultat 3), on peut dire sans équivoque que la coopérative de travailleurs riscofobe emploie davantage que la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscofobe lorsque le prix du produit est incertain. Nous pourrions ajouter qu'on obtient le même résultat si l'on pose l'espérance des dividendes par travailleur inférieure au salaire sur le marché. Dans ce cas, Ward [1958, p. 576] a démontré que l'emploi optimal est plus élevé dans la coopérative de travailleurs que dans la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique lorsque le prix du produit est certain. Le Tableau 2 résume l'ensemble des résultats pour $E(y) = y^{ce} \leq w$.

Tableau 2

	<u>Coopérative de travailleurs riscophobe</u>	<u>Firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe</u>
<u>Prix certain</u> p^{ce}	$K^a = \underline{K}$ $N^a = N_0^a$ $w^a = y^{ce} \leq w$ $\pi^a = \pi^{ce} \leq 0$	$K^c = \underline{K}$ $N^c = N_0^c$ $w^c = w$ $\pi^c = \pi^{ce} \leq 0$
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Si $y^{ce} < w$ alors $N_0^a > N_0^c$ $=$ $=$ </div> → <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-left: 20px;"> Ward [1958] </div>	
<u>Prix incertain</u> P $E(P) = p^{ce}$	$K^a = \underline{K}$ $N^a = N_1^a$ $E(w^a) = E(y) = y^{ce} \leq w$ $E(\pi^a) = E(\pi) = \pi^{ce} \leq 0$	$K^c = \underline{K}$ $N^c = N_1^c$ $w^c = w$ $E(\pi^c) = E(\pi) = \pi^{ce} \leq 0$
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $N_1^a > N_0^a$ </div> → <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-left: 20px;"> Muzondo [1979] </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $N_1^c < N_0^c$ </div> → <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-left: 20px;"> Sandmo [1971] </div>
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Si $E(y) = y^{ce} \leq w$ alors $N_1^a > N_1^c$ </div>	

En résumé, Muzondo [1979, 1980] aurait dû formuler son affirmation de la façon suivante: Lorsque le prix du produit est incertain, si l'espérance des dividendes est inférieure ou égale au salaire sur le marché, alors la coopérative de travailleurs riscophobe emploie davantage de travailleurs à l'optimum que la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, i.e. si $E(y) = y^{ce} \leq w$ alors $N_1^a > N_1^c$. En outre, ce résultat se voit aisément et la preuve qu'il fournit n'est pas nécessaire.

En regard des notes (2) et (17), on constate que nous aurions obtenu le même résultat ($N_1^a \geq N_1^c$ si $E(y) = y^{ce} > w$) si au lieu d'employer la définition < de la situation de certitude de Sandmo [1971] nous avions utilisé celle de Hawawini [1984].

CHAPITRE 3: Statique comparative

Nous avons vu au chapitre précédent quel est le niveau d'emploi optimal de la coopérative de travailleurs riscophobe comparativement à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe lorsque qu'il n'y a qu'un seul produit et que le prix de celui-ci est incertain. Sur la base des travaux de Sandmo [1971], Muzondo [1979, 1980] et Bonin [1980], nous examinerons maintenant dans quelle direction change ce niveau d'emploi dans la coopérative de travailleurs riscophobe par rapport à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe suite à une variation des coûts fixes, du prix du produit, de l'incertitude sur le prix du produit, d'un impôt proportionnel sur les revenus nets de l'entreprise, d'une taxe forfaitaire par travailleur, d'une taxe *ad valorem* sur le produit et d'une taxe forfaitaire sur le produit.

3.1 Variation des coûts fixes

Corrigeant une erreur dans l'article de Muzondo [1979, p.140], Bonin [1980, pp. 333-334] a démontré que:¹

Résultat 4: Lorsque le prix du produit est incertain, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) des coûts fixes si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $d(N_1^a)/d(rK) > 0$ si $d(AAR)/dy < 0$.

Mais, tel que l'a souligné Muzondo [1980, p.334], la preuve mathématique de Bonin est indûment lourde. Aussi, la reprendrons-nous.

Preuve du Résultat 4:

Nous allons démontrer le Résultat 4 en prouvant alternativement les Lemmes 3 et 4.

Lemme 3: Signe de $\{dN/d(r\underline{K})\} = -$ signe de $\{E[U''(y) (PF_N(N, \underline{K}) - y)] - E[U'(y)]\}$

Preuve du Lemme 3:

A partir de la différentielle totale de la condition de premier ordre nécessaire à la maximisation de l'espérance de l'utilité des dividendes par rapport à N , i.e de l'équation (2.8), par rapport à $r\underline{K}$ et N , nous obtenons:²

$$(3.1) \quad dN/d(r\underline{K}) = \{E[U''(y) (PF_N(N, \underline{K}) - y)] - E[U'(y)]\} / NH$$

Or, H est négatif en vertu de la condition de deuxième ordre, i.e. de l'équation (2.9), et nous avons démontré le Lemme 3.

Lemme 4: Une condition suffisante pour que $E[(U''(y) (PF_N(N, \underline{K}) - y))]$ soit plus petit ou égal à zéro est que l'aversion absolue au risque (AAR) soit décroissante, i.e. $E[(U''(y) (PF_N(N, \underline{K}) - y))] \leq 0$ si $d(\text{AAR})/dy < 0$.

Preuve du Lemme 4:

Parce que les dividendes sont résiduels, ils peuvent être supérieurs, égaux ou inférieurs à la valeur de la productivité marginale des travailleurs, i.e

$$y \geq PF_N(N, K) \quad 3$$

$$<$$

Définissons $y^{\#} = PF_N(N, K)$. En vertu de l'aversion absolue au risque décroissante, nous avons:

$$(3.2) \quad AAR(y) = \begin{array}{ll} -U''(y)/U'(y) > AAR(y^{\#}) = -U''(y^{\#})/U'(y^{\#}) & \text{si } y < PF_N(N, K) = y^{\#} \\ -U''(y)/U'(y) = AAR(y^{\#}) & \text{si } y = PF_N(N, K) = y^{\#} \\ -U''(y)/U'(y) < AAR(y^{\#}) & \text{si } y > PF_N(N, K) = y^{\#} \end{array}$$

D'autre part, puisque $U'(y) > 0$, il est clair que:

$$(3.3) \quad -U'(y)(PF_N(N, K) - y) \begin{array}{ll} < 0 & \text{si } y < PF_N(N, K) = y^{\#} \\ = 0 & \text{si } y = PF_N(N, K) = y^{\#} \\ > 0 & \text{si } y > PF_N(N, K) = y^{\#} \end{array}$$

Multiplions les deux côtés de l'équation (3.2) par le côté gauche de l'équation (3.3):

$$(3.4) \quad -U''(y)/U'(y) [-U'(y)(PF_N(N, K) - y)] \leq AAR(y^{\#}) [-U'(y)(PF_N(N, K) - y)]$$

pour $y < PF_N(N, K) = y^{\#}$
 $y = PF_N(N, K) = y^{\#}$
 $y > PF_N(N, K) = y^{\#}$

Après quelques manipulations, l'équation (3.4) peut se réécrire:

$$(3.5) \quad [U''(y)] [PF_N(N, K) - y] \leq -AAR(y^*) [U'(y)(PF_N(N, K) - y)]$$

Prenons l'espérance mathématique des deux côtés de l'équation (3.5):⁴

$$(3.6) \quad E [(U''(y)) (PF_N(N, K) - y)] \leq -AAR(y^*) E [U'(y)(PF_N(N, K) - y)]$$

Par la condition de premier ordre, i.e. l'équation (2.8), le côté droit de l'équation (3.6) est nul et donc:

$$(3.7) \quad E [(U''(y)) (PF_N(N, K) - y)] \leq 0$$

Ce qui complète la démonstration du Lemme 4.

Or, $-E[U'(y)] < 0$ et donc $E[U''(y) (PF_N(N, K) - y)] - E[U'(y)] < 0$ si l'aversion absolue au risque est décroissante.

C.Q.F.D.

Quant à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, Sandmo [1971, pp. 68 - 69] a démontré que l'aversion absolue au risque décroissante est une condition suffisante pour que son niveau de production demeure invariable ou varie inversement avec ses coûts fixes, i.e. $dQ/d(rK) \leq 0$ si $d(AAR)/d\eta < 0$. Comme le niveau de capital est fixe, cela nous permet de formuler le résultat suivant:

Résultat 5: Lorsque le prix du produit est incertain, la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe diminue (augmente) ou maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) des coûts fixes si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $d(N_1^C)/d(rK) \leq 0$ si $d(AAR)/d\eta < 0$.

La comparaison des Résultats 4 et 5, nous permet de formuler la proposition suivante:

Proposition 2: Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) des coûts fixes si son aversion absolue au risque est décroissante.⁵

3.2 Variation du prix du produit

Lorsque le prix du produit est incertain, il est défini par une fonction de densité qui indique les probabilités qu'il prenne telle ou telle valeur. Aussi en incertitude, une augmentation du prix du produit correspond à la situation où les probabilités de réalisation demeurent inchangées, mais la valeur qui y est rattachée s'accroît d'une somme spécifique. En d'autres termes, lorsque le prix du produit est incertain, une augmentation du prix du produit correspond à un déplacement vers la droite de la fonction de densité du prix du produit sans que sa forme soit modifiée, i.e. à un accroissement de la moyenne du prix du produit sans variation de ses moments supérieurs.⁶ Une augmentation du prix du produit correspond donc à un accroissement exclusif de $E(P)$.

A partir de la correction de ladite erreur de Muzondo [1979, p.140] (voir la note 1), Bonin [1980, p. 335] a démontré le résultat suivant:

Résultat 6: Lorsque le prix du produit est incertain, la coopérative de travailleurs riscophobe diminue (augmente) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du prix de son produit si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $d(N_1^*)/d(E(P)) < 0$ si $d(AAR)/dy < 0$.

Preuve du Résultat 6:

Au chapitre 2, nous avons défini le prix du produit comme étant composé d'une partie fixe, son espérance mathématique, $E(P)$, et d'un élément stochastique, e , de moyenne nulle, $E(e) = 0$. Réécrivons l'équation (2.13):

$$(2.13) P = E(P) + e \quad \text{où} \quad E(P) > 0^7$$

En remplaçant P dans la condition de premier ordre, soit l'équation (2.8), par le côté droit de l'équation (2.13), en différenciant totalement la condition de premier ordre par rapport à $E(P)$ et à N et en réarrangeant les termes, nous obtenons:⁸

$$(3.8) \quad dN/d(E(P)) = - (F(N, K)/NH) E [(PF_N(N, K) - y) (U''(y))] \\ + (1/H) E [(U'(y)) \{ (F(N, K)/N) - F_N(N, K) \}]$$

Or, le côté gauche de l'équation (3.8) est négatif puisque:

$$H < 0 \quad \text{(Equation (2.9) C.D.O.)}$$

$$E [(U''(y)) (PF_N(N, K) - y)] \leq 0 \text{ si } d(AAR)/dy < 0 \text{ (Lemme 4)}$$

$$F(N, K)/N - F_N(N, K) > 0 \quad \text{(Muzondo [1979, p.132])}$$

C.Q.F.D.

Quant à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, Sandmo [1971, p. 69] a démontré que l'aversion absolue au risque décroissante est une condition suffisante pour que son niveau de production varie dans le même sens que le prix de son produit lorsque celui-ci est incertain. Comme le niveau de capital est fixe, cela nous permet de formuler le résultat suivant:

Résultat 7: Lorsque le prix du produit est incertain, la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du prix du produit si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $d(N_1^C)/d(E(P)) > 0$ si $d(AAR)/d\sigma < 0$.

La comparaison des Résultats 6 et 7 nous permet de formuler la proposition suivante:

Proposition 3: Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe diminue (augmente) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du prix du produit si son aversion absolue au risque est décroissante.⁹

3.3 Variation de l'incertitude sur le prix du produit

Nous considérerons une variation du risque à la Sandmo sur le prix du produit. Une augmentation (diminution) du risque à la Sandmo sur le prix du

produit correspond à une augmentation (diminution) de a dans l'équation suivante:¹⁰

$$(3.9) \quad P' = a[P - E(P)] + E(P)$$

En utilisant la formulation de Hey et Suckling [1980] pour étendre le résultat de Ishii [1977], nous démontrerons que:

Résultat 8 : Lorsque le prix du produit est incertain, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du risque à la Sandmo sur le prix de son produit si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $d(N_1^*)/da > 0$ si $d(AAR)/dy < 0$.¹¹

Preuve du Résultat 8 :

Tel que proposé par Hey et Suokling [1980, p. 341], nous allons utiliser leur modèle pour obtenir l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la coopérative de travailleurs riscophobe d'une variation du risque à la Sandmo sur le prix du produit à partir de l'effet sur le niveau de production optimal de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe d'une variation du risque à la Sandmo sur le prix du produit, soit à partir du résultat de Ishii [1977].

A l'instar de Hey et Suckling [1980], reformulons le problème de la coopérative de travailleurs de la façon suivante:

(3.10) Max E [U(y)]

N

où $y = Pq - k(q)$

$q = \text{productivité moyenne des travailleurs} = Q/N = F(N, \underline{K})/N$

$k(q) = \text{Coûts fixes minimaux par travailleur} = r\underline{K}/N$

$k(0) \geq 0$

$k'(q) > 0$ 12

Formellement, le problème de la coopérative de travailleurs est alors exactement le même que celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique. En effet, le problème de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique est le suivant:

(3.11) Max E[U(Π)]

N

où $\Pi = PQ - c(Q)$

$c(Q) = wN + r\underline{K} = \text{fonction de coût}$

$c(0) \geq 0$

$c'(Q) > 0$ 13

Il s'en suit que les choix optimaux de q pour la coopérative de travailleurs riscofobe lorsque le prix du produit est incertain sont exactement les mêmes que les choix optimaux de Q pour la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscofobe. Or, comme la relation entre q et N_1^a est négative pour la coopérative de travailleurs - en effet, une augmentation du nombre de travailleurs réduit la productivité moyenne des travailleurs - la relation entre Q et N_1^a est également négative. Aussi, l'effet sur N_1^a d'une variation de l'incertitude sur le prix du produit pour la coopérative de travailleurs est-il contraire à l'effet sur Q

d'une variation de l'incertitude sur le prix du produit pour la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, i.e. signe $\{dQ/da\} = -$ signe $\{d(N_1^a)/da\}$.

Or, Ishii [1977, p.769] a démontré que lorsque le prix du produit est incertain, la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe réduit (accroît) sa production suite à une augmentation (diminution) du risque à la Sandmo sur le prix de son produit si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $dQ/da < 0$ si $d(AAR)/d\eta < 0$.¹⁴

C.Q.F.D.

Quant à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la relation entre Q et N_1^c est positive et signe $\{d(N_1^c)/da\} =$ signe $\{dQ/da\}$. Aussi, à partir du résultat de Ishii [1977, p. 769], nous avons:

Résultat 9: Lorsque le prix du produit est incertain, la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe diminue (augmente) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du risque à la Sandmo sur le prix de son produit si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $d(N_1^c)/da < 0$ si $d(AAR)/d\eta < 0$.

La comparaison des Résultats 8 et 9 nous permet d'énoncer la proposition suivante:

Proposition 4 : Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du risque à la Sandmo sur le prix du produit si son aversion absolue au risque est décroissante.

3.4 Variation des politiques fiscales

3.4.1 Impôt proportionnel sur les revenus nets de l'entreprise

Soit b un impôt proportionnel sur les revenus nets de l'entreprise.

Nous allons voir que percevoir un impôt proportionnel sur les revenus nets de la coopérative de travailleurs est équivalent à prélever un impôt proportionnel sur les dividendes et que conséquemment:

Résultat 10: Pour la coopérative de travailleurs, analyser l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la variation d'un impôt proportionnel sur les revenus nets est équivalent à analyser l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la variation d'un impôt proportionnel sur les dividendes.

Preuve du Résultat 10:

Les revenus nets de la coopérative de travailleurs avant et après impôt sont respectivement:

$$(3.12) \text{ RN}^a = \text{PF}(\text{N}, \text{K}) - r\text{K}$$

$$(3.13) \text{ RN}^{aj} = (1 - b) \text{ RN}^a$$

Puisque $y = [\text{PF}(\text{N}, \text{K}) - r\text{K}]/\text{N}$, il nous est possible de réécrire l'équation (3.12) de la manière suivante:

$$(3.14) \text{ RN}^a = \text{N} y$$

En remplaçant RN^a dans le côté droit de l'équation (3.13) par le côté droit de l'équation (3.14) et en réarrangeant les termes, nous obtenons:¹⁵

$$(3.15) \quad RN^{ni} = N [(1 - b) y]$$

C.Q.F.D.

Quant aux revenus nets de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, ils correspondent aux profits:

$$(3.16) \quad RNC = PF(N, K) - wN - rK \\ = \pi$$

Par conséquent,

Résultat 11: Pour la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, analyser l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la variation d'un impôt proportionnel sur les revenus nets est équivalent à analyser l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la variation d'un impôt proportionnel sur les profits.

La conjonction des Résultats 10 et 11 nous permet d'énoncer le résultat suivant:

Résultat 12: Comparer l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la coopérative de travailleurs et de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique de la variation d'un impôt proportionnel sur les revenus nets est équivalent à comparer l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la

coopérative de travailleurs de la variation d'un impôt proportionnel sur les dividendes à l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique de la variation d'un impôt proportionnel sur les profits.

Contrairement à ce qu'a démontré Muzondo [1979, pp.136-137], Bonin [1980, p. 335] affirme que:

Résultat 13: Lorsque le prix du produit est incertain, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente (diminue) ou maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'un impôt proportionnel sur les dividendes si son aversion relative au risque est croissante, i.e. $d(N_1^*)/db \geq 0$ si $d(ARR)/dy < 0$.

Preuve du Résultat 13:

Nous allons démontrer le Résultat 13 en prouvant alternativement les Lemmes 5 et 6.

Lemme 5: Signe $dN/db = -$ Signe $E[(PF_N(N, K) - y) y (U''(y^*))]$

Preuve du Lemme 5:

Définissons les dividendes après prélèvement d'un impôt proportionnel de la façon suivante:

$$(3.17) \quad y^i = (1 - b) y \quad \text{où} \quad b = \text{taux d'imposition sur les dividendes}$$

$$0 < b < 1$$

La coopérative de travailleurs maximise l'espérance de l'utilité des dividendes après impôt:

$$(3.18) \quad \text{Max } E [U(y^i)]$$

$$N$$

Les conditions de premier et de deuxième ordre nécessaires et suffisantes à cette maximisation sont les suivantes: 16

$$(3.19) \quad \text{C.P.O.: } E[U'(y^i)(PF_N(N, K) - y)] = 0$$

$$(3.20) \quad \text{C.D.O.: } H^i = E [(1/N) (PF_N(N, K) - y)^2 (1 - b) U''(y^i) + U'(y^i) PF_{NN}(N, K)] < 0$$

Par la différentielle totale de l'équation (3.19) par rapport à N et à b, nous obtenons: 17

$$(3.21) \quad dN/db = E [(PF_N(N, K) - y) y (U''(y^i))] / H^i$$

Puisque $H^i < 0$ selon l'équation (3.20), alors:

$$(3.22) \quad \text{Signe } dN/db = - \text{Signe } E[(PF_N(N, K) - y) y (U''(y^i))]]$$

et nous avons complété la démonstration du Lemme 5.

Lemme 6: Une condition suffisante pour que $E[(PF_N(N, K) - y) y (U''(y^i))]]$ soit inférieur ou égal à zéro est que l'aversion relative au risque soit non croissante, i.e. $E[(PF_N(N, K) - y) y (U''(y^i))]] \leq 0$ si $d(ARR)/dy \leq 0$.

Preuve du Lemme 6:

Nous allons démontrer le Lemme 6 en corrigeant une seconde erreur relevée par Bonin [1980, p. 335] dans l'article de Muzondo [1979, p.142] et en supposant l'aversion relative au risque non croissante plutôt que croissante.¹⁸

Puisque les dividendes sont résiduels, nous avons $y^i \geq (1 - b)PF_N(N, K)$.¹⁹

Définissons $y^{i\#} = (1 - b) P F_N (N, K)$. En vertu de l'aversion relative au risque décroissante, nous avons:

$$(3.23) \text{ ARR}(y) = \begin{array}{ll} -y^i U''(y^i)/U'(y^i) > \text{ARR}(y^{i\#}) = -y^{i\#} U''(y^{i\#})/U'(y^{i\#}) & \text{si } y^i < (1 - b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \\ -y^i U''(y^i)/U'(y^i) = \text{ARR}(y^{i\#}) & \text{si } y^i = (1 - b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \\ -y^i U''(y^i)/U'(y^i) < \text{ARR}(y^{i\#}) & \text{si } y^i > (1 - b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \end{array}$$

De même, en vertu de l'aversion relative au risque constante, nous avons:

$$(3.24) \text{ ARR}(y) = \begin{array}{ll} -y^i U''(y^i)/U'(y^i) = \text{ARR}(y^{i\#}) = -y^{i\#} U''(y^{i\#})/U'(y^{i\#}) & \text{si } y^i < (1 - b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \\ -y^i U''(y^i)/U'(y^i) = \text{ARR}(y^{i\#}) & \text{si } y^i = (1 - b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \\ -y^i U''(y^i)/U'(y^i) = \text{ARR}(y^{i\#}) & \text{si } y^i > (1 - b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \end{array}$$

D'autre part, puisque $U'(y^i) > 0$, il est clair que:

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad -U'(y^i)(PF_N(N, K) - y) &< 0 && \text{si } y < PF_N(N, K) \text{ i.e. } \text{si } y^i < (1-b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \\
 &= 0 && \text{si } y = PF_N(N, K) \text{ i.e. } \text{si } y^i = (1-b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \\
 &> 0 && \text{si } y > PF_N(N, K) \text{ i.e. } \text{si } y^i > (1-b)PF_N(N, K) = y^{i\#}
 \end{aligned}$$

Multiplions les deux côtés de l'équation (3.23) par le côté gauche de l'équation (3.25):

$$(3.26) \quad -y^i U''(y^i)/U'(y^i) [-U'(y^i)(PF_N(N, K) - y)] \leq AAR(y^{i\#}) [-U'(y^i)(PF_N(N, K) - y)]$$

$$\begin{aligned}
 \text{pour } y^i &< (1-b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \\
 y^i &= (1-b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \\
 y^i &> (1-b)PF_N(N, K) = y^{i\#}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ou pour } y &< PF_N(N, K) \\
 y &= PF_N(N, K) \\
 y &> PF_N(N, K)
 \end{aligned}$$

Multiplions les deux côtés de l'équation (3.24) par le côté gauche de l'équation (3.25):

$$(3.27) \quad -y^i U''(y^i)/U'(y^i) [-U'(y^i)(PF_N(N, K) - y)] = AAR(y^{i\#}) [-U'(y^i)(PF_N(N, K) - y)]$$

$$\begin{aligned}
 \text{pour } y^i &< (1-b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \\
 y^i &= (1-b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \\
 y^i &> (1-b)PF_N(N, K) = y^{i\#}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ou pour } y &< PF_N(N, K) \\
 y &= PF_N(N, K) \\
 y &> PF_N(N, K)
 \end{aligned}$$

En combinant les équations (3.26) et (3.27), en vertu de l'aversion relative au risque non croissante, nous avons:

$$(3.28) -y^i U''(y^i)/U'(y^i) [-U'(y^i)(PF_N(N, K) - y)] \leq AAR(y^{i\#}) [-U'(y^i)(PF_N(N, K) - y)]$$

$$\begin{array}{lll} \text{pour } y & < & P F_N (N, K) \\ y & = & P F_N (N, K) \\ y & > & P F_N (N, K) \end{array}$$

Après quelques manipulations, l'équation (3.28) peut se réécrire:

$$(3.29) (1 - b) y (U''(y^i)) (PF_N(N, K) - y) \leq -AAR(y^{i\#}) [U'(y^i)(PF_N(N, K) - y)]$$

Prenons l'espérance mathématique des deux côtés de l'équation (3.29):

$$(3.30) (1 - b) E [(U''(y^i)) y (PF_N(N, K) - y)] \leq -AAR(y^{i\#}) E [U'(y^i)(PF_N(N, K) - y)]$$

Par la condition de premier ordre, soit l'équation (3.19), le côté droit de l'équation (3.30) est nul et donc:

$$(3.31) (1 - b) E [(U''(y^i)) y (PF_N(N, K) - y)] \leq 0.$$

Puisque $0 < b < 1$, $(1 - b) > 0$ et l'équation (3.31) peut se réécrire:

$$(3.32) E [(U''(y^i)) y (PF_N(N, K) - y)] \leq 0$$

et nous avons complété la démonstration du Lemme 6.

C.Q.F.D.

Quant à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, lorsque le prix du produit est incertain, Sandmo [1971, p.70] affirme qu'elle augmente, garde constant ou réduit son niveau de production suite à une augmentation du taux d'imposition sur les profits, selon que son aversion relative au risque est croissante, constante ou décroissante.²⁰ Puisque le stock de capital est fixe, cela nous permet d'énoncer le résultat suivant:

Résultat 14: Lorsque le prix du produit est incertain, la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe diminue (augmente) ou maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'un impôt proportionnel sur les profits si son aversion relative au risque est non croissante, i.e. $d(N_1^C)/db \leq 0$ si $d(ARR)/d\eta \leq 0$.

La combinaison des Résultats 12, 13 et 14 nous permet d'énoncer la proposition suivante:

Proposition 5: Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'un impôt proportionnel sur les revenus nets si son aversion relative au risque est non croissante.²¹

3.4.2 Taxe forfaitaire par travailleur

Soit d une taxe forfaitaire par travailleur. Définissons y^d comme étant les dividendes après imposition d'une taxe forfaitaire par travailleur:

$$(3.33) y^d = [PF(N, K) - rK - dN]/N$$

Nous pouvons réécrire l'équation (3.33) de la façon suivante:

$$(3.34) y^d = [PF(N, K) - rK]/N - d$$

On voit alors aisément que la perception d'une taxe forfaitaire par travailleur au sein de la coopérative de travailleurs est équivalente au prélèvement d'un impôt forfaitaire sur les dividendes. En conséquence,

Résultat 15: Pour la coopérative de travailleurs, analyser l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la variation d'une taxe forfaitaire par travailleur est équivalent à analyser l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la variation d'un impôt forfaitaire sur les dividendes.

Pour ce qui est de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, l'imposition d'une taxe forfaitaire par travailleur correspond à une augmentation du salaire des travailleurs et conséquemment:

Résultat 16: Pour la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, analyser l'effet de la variation d'une taxe forfaitaire par travailleur sur le nombre de travailleurs optimal est équivalent à analyser l'effet de la variation du salaire des travailleurs.

La conjonction des Résultats 15 et 16 nous permet d'énoncer le résultat suivant:

Résultat 17: Comparer l'effet de la variation d'une taxe forfaitaire par travailleur sur le nombre optimal de travailleurs de la coopérative de travailleurs et de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique est équivalent à comparer l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la coopérative de travailleurs de la variation d'un impôt forfaitaire sur les dividendes à l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique de la variation du salaire.

Comme dans le cas de la variation des coûts fixes, Bonin [1980, p. 335] corrige l'erreur de Muzondo [1979, p.140] et arrive au résultat suivant:

Résultat 18: Lorsque le prix du produit est incertain, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente (diminue) ou maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire sur les dividendes si son aversion absolue pour le risque est décroissante, i.e. $d(N_1^a)/d(d) \geq 0$ si $d(AAR)/dy < 0$.

Preuve du Résultat 18:

L'objectif de la coopérative de travailleurs est de maximiser l'espérance de l'utilité des dividendes après impôt:

$$(3.35) \text{ Max } E [U (y^d)] \quad \text{où} \quad y^d = y - d$$

$$N \quad \quad \quad = [PF(N, K) - rK] / N - d$$

Les conditions nécessaires et suffisantes de premier et de deuxième ordre sont les suivantes:²²

$$(3.36) \text{ C.P.O.} \quad E [U'(y^d) (P F_N(N, K) - y)] = 0$$

$$(3.37) \text{ C.D.O.} \quad H^d = E [(1/N) U''(y^d) (P F_N(N, K) - y)^2 + U'(y^d) P F_{NN}(N, K)] < 0$$

A partir de la différentielle totale de la condition de premier ordre par rapport à N et à d, nous obtenons:²³

$$(3.38) \quad d(N)/d(d) = (1/H^d) E [U''(y^d) (P F_N(N, K) - y)]$$

Puisque $H^d < 0$ par la condition de deuxième ordre, soit l'équation (3.37), alors:

$$(3.39) \quad \text{Signe } d(N)/d(d) = - \text{Signe } E [U''(y^d) (P F_N(N, K) - y)]$$

Lemme 7: $E [U''(y^d) (P F_N(N, K) - y)] \leq 0$ si $d(\text{AAR})/dy < 0$.

Preuve du Lemme 7:

La preuve du Lemme 7 découle directement de la preuve du Lemme 4. Au lieu de y nous avons $y^d = y - d$ et au lieu de $y^\#$ nous avons $y^{d\#} = P F_N(N, K) - d$. Nous avons démontré à la section 3.1 qu'une condition suffisante pour que $E[(P F_N(N, K) - y) (U''(y))]$ soit inférieur ou égal à zéro est que l'aversion absolue au risque soit décroissante. En reprenant la même démarche qu'à la section 3.1 à un argument près, nous pouvons également démontrer que $E [U''(y^d) (P F_N(N, K) - y)] \leq 0$ si $d(\text{AAR})/dy < 0$.²⁴

Quant à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, selon Muzondo [1979, p.137], la reformulation du modèle de Sandmo [1971] en

termes de l'intrant travail plutôt que de la fonction de coût, permet de trouver le résultat suivant :²⁵

Résultat 19: Lorsque le prix du produit est incertain, la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe diminue (augmente) ou maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du salaire des travailleurs sur le marché si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $d(N_1^C)/dw \leq 0$ si $d(AAR)/d\eta < 0$.

La combinaison des Résultats 17, 18 et 19 nous permet d'énoncer la proposition suivante:

Proposition 6: Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire par travailleur si son aversion absolue pour le risque est décroissante.²⁶

3.4.3 Taxe *ad valorem* sur le produit

Soit c une taxe *ad valorem* sur le produit.

Définissons P^t comme étant le prix du produit suite au prélèvement d'une taxe *ad valorem*:

$$(3.40) P^t = (1 - c) P \quad \text{où} \quad 0 < c < 1$$

Lorsque le prix du produit est incertain, l'augmentation (diminution) d'une taxe *ad valorem* sur le produit est équivalente à une contraction (expansion) de la fonction de distribution du prix du produit et à un déplacement de la moyenne vers la gauche (droite).

Muzondo [1979, p.137- 138] démontre que la coopérative de travailleurs riscophobe réagit de façon ambiguë à une variation d'une taxe *ad valorem* sur le produit:²⁷

Résultat 20: Lorsque le prix du produit est incertain, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente, maintient constant ou diminue le nombre de ses travailleurs suite à une variation d'une taxe *ad valorem* sur le produit si son aversion absolue pour le risque est décroissante, i.e. $d(N_1^a)/dc \geq 0$ si

$$d(AAR)/dy < 0 .$$

Preuve du Résultat 20:

La coopérative de travailleurs maximise l'espérance de ses dividendes après taxation:

$$(3.41) \text{ Max } E[U(y^h)] \text{ où } y^h = [P^t F(N, K) - rK] / N$$

Les conditions nécessaires et suffisantes de premier et de deuxième ordre sont:²⁸

$$(3.42) \text{ C.P.O.: } E[(U'(y^h)((1-c) P F_N(N, K) - y^h)] = 0$$

$$(3.43) \text{ C.D.O.: } H^t = E[(1/N)(P^t F_N(N, K) - y^h)^2 U''(y^h) + U'(y^h) F_{NN}(N, K)] < 0$$

En différentiant totalement la condition de premier ordre, soit l'équation (3.42), par rapport à c et à N , nous obtenons:²⁹

$$(3.44) \quad dN/dc = \frac{[P F(N, K) / NH^t] E[U''(y^t) (P^t F_N(N, K) - y^t)] + E[U'(y^t) P(F_N(N, K) - F(N, K)/N)] / H^t}{}$$

Le signe de l'équation (3.44) est ambigu puisque:

$$\begin{array}{ll} U'(y^t) > 0 & \\ H^t < 0 & \text{(Equation (3.43) C.D.O.)} \\ F_N(N, K) - F(N, K) < 0 & \text{(Muzondo [1979, p.132])} \\ E[U''(y^t) (P^t F_N(N, K) - y^t)] \geq 0 \text{ si } d(AAR)/dy < 0 & \text{(Lemme 8)} \\ & < \end{array}$$

Lemme 8: Le signe de $E[P(P^t F_N(N, K) - y^t) U''(y^t)]$ est ambigu lorsque l'aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $E[P(P^t F_N(N, K) - y^t) U''(y^t)] \geq 0$ si $d(AAR)/dy < 0$.
<

Preuve du Lemme 8:

Puisque les dividendes sont résiduels, nous avons $y^t \geq P^t F_N(N, K)$.
<

Définissons $y^{tt} = P^t F_N(N, K)$. En vertu de l'aversion absolue au risque décroissante, nous avons:

$$(3.45) \quad \begin{array}{ll} -U''(y^t)/U'(y^t) > R_A(y^{tt}) & \text{si } y^t < P^t F_N(N, K) = y^{tt} \\ = & \text{si } y^t = P^t F_N(N, K) = y^{tt} \\ < & \text{si } y^t > P^t F_N(N, K) = y^{tt} \end{array}$$

Puisque $U'(y) > 0$, il est clair que:

$$(3.46) \quad \begin{aligned} -U'(y^t) P(P^t F_N(N, \underline{K}) - y^t) &< 0 & \text{si } y^t < P^t F_N(N, \underline{K}) \\ &= 0 & \text{si } y^t = P^t F_N(N, \underline{K}) \\ &> 0 & \text{si } y^t > P^t F_N(N, \underline{K}) \end{aligned}$$

Multiplions les deux côtés de l'équation (3.45) par le côté gauche de l'équation (3.46):

$$(3.47) \quad (U''(y^t)) P(P^t F_N(N, \underline{K}) - y^t) < -R_A(y^t) [U'(y^t) P(P^t F_N(N, \underline{K}) - y^t)]$$

pour y^t $\begin{cases} > P^t F_N(N, \underline{K}) \\ = P^t F_N(N, \underline{K}) \\ < P^t F_N(N, \underline{K}) \end{cases}$

Prenons l'espérance mathématique des deux côtés de l'équation (3.47):

$$(3.48) \quad E[(U''(y^t)) P(P^t F_N(N, \underline{K}) - y^t)] < -R_A(y^t) E[U'(y^t) P(P^t F_N(N, \underline{K}) - y^t)]$$

Puisque $E[U'(y^t) P(P^t F_N(N, \underline{K}) - y^t)]$ n'est pas nécessairement égal à 0, le signe de $E[(U''(y^t)) P(P^t F_N(N, \underline{K}) - y^t)]$ est indéterminé lorsque l'aversion absolue au risque est décroissante.

Lemme 9: $E[U'(y^t) P(P^t F_N(N, \underline{K}) - y^t)]$ peut être supérieur, égal ou inférieur à zéro, i.e. $E[(U''(y^c)) P(P^c F_N(N, \underline{K}) - y^c)] \geq 0$.

Preuve du Lemme 9:

$E [U'(y^h)P(P^t F_N(N, K) - y^h)]$ peut se réécrire:

$$(3.49) \ E [U'(y^h)P(P^t F_N(N, K) - y^h)] = \quad E [U'(y^h) (P^t F_N(N, K) - y^h)] E [P] \\ + \text{cov} [U'(y^h) (P^t F_N(N, K) - y^h), P]$$

Or, $E [U'(y^h) (P^t F_N(N, K) - y^h)] = 0$ par la condition de premier ordre, i.e. l'équation (3.42), et l'équation (3.49) peut se réécrire:

$$(3.50) \ E [U'(y^h)P(P^t F_N(N, K) - y^h)] = \text{cov} [U'(y^h) (P^t F_N(N, K) - y^h), P]$$

La covariance peut être supérieure, égale ou inférieure à zéro puisque par définition, $dP/de > 0$ et que $d[U'(y^h) (P^t F_N(N, K) - y^h)] \geq 0$.³⁰
<

Conséquemment, le côté gauche de l'équation (3.50) est indéterminé.

C.Q.F.D.

Selon Muzondo [1979, p.137], à l'instar de la coopérative de travailleurs riscophobe, la firme oapitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe réagira de façon ambiguë à une variation d'une taxe *ad valorem* sur le produit.³¹

Résultat 21: Lorsque le prix du produit est incertain, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente, maintient constant ou diminue le nombre de ses travailleurs suite à une variation d'une taxe *ad valorem* sur le produit si son aversion absolue pour le risque est décroissante, i.e. $N_1^c/dc \geq 0$

<

si $d(AAR)/d\eta < 0$.

La comparaison des Résultats 20 et 21 nous permet de formuler la proposition suivante:

Proposition 7: Lorsque le prix du produit est incertain, à l'instar de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente, maintient constant ou diminue le nombre de ses travailleurs suite à une variation d'une taxe *ad valorem* sur le produit si son aversion absolue au risque est décroissante.³²

3.4.4 Taxe forfaitaire sur le produit

Soit C un montant de taxe fixe prélevé sur le prix du produit. Définissons P^s comme le prix qui revient à l'entreprise après taxe:

$$(3.51) P^s = P - C$$

Lorsque le prix du produit est aléatoire, l'augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire sur le produit entraîne un déplacement de la fonction de distribution du prix vers la gauche (droite), i.e. une diminution (augmentation) de la moyenne du prix sans que les autres moments de sa fonction de distribution ne soient modifiés. Or, nous avons vu à la section 3.2 que ceci correspond à une diminution (augmentation) du prix du produit lorsque le prix du produit est incertain. Par conséquent,

Résultat 22: Lorsque le prix du produit est incertain, analyser l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de l'augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire sur le prix du produit est équivalent à analyser l'effet sur le nombre optimal de travailleurs de la diminution (augmentation) du prix du produit. i.e. signe $dN/dC = -$ Signe $dN/dE(P)$.

La conjonction du Résultat 22 aux résultats 6 et 7 nous permet de formuler les deux résultats suivants:

Résultat 23: Lorsque le prix du produit est incertain, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire sur son produit si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $d(N_1^a)/dC > 0$ si $d(AAR)/dy < 0$.

Résultat 24: Lorsque le prix du produit est incertain, la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe diminue (augmente) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire sur son produit si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $d(N_1^c)/dC < 0$ si $d(AAR)/d\eta < 0$.

La comparaison des Résultats 23 et 24 nous permet d'énoncer la proposition suivante:

Proposition 8: Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire sur le produit si son aversion absolue au risque est décroissante.³³

Notes du chapitre 3

(1) L'erreur que Bonin [1980] corrige dans l'article de Muzondo [1979] en est une de signe. En vertu de l'aversion absolue au risque décroissante, Muzondo [1979, p.140] affirme de façon inexacte que:

$$(A3) \quad -U''(y)/U'(y) < AAR(y^\#) \text{ si } y < PF_N(N, \underline{K}) = y^\#$$

En effet, comme nous l'énonçons à la page 43, en vertu de l'aversion absolue au risque décroissante, nous avons plutôt:

$$(3.2) \quad -U''(y)/U'(y) > AAR(y^\#) \text{ si } y < PF_N(N, \underline{K}) = y^\#$$

(2) Voir la démonstration (5) à l'Annexe C.

(3) Cependant, soulignons qu'en moyenne les dividendes sont supérieurs à la valeur de la productivité marginale des travailleurs-membres au sein de la coopérative de travailleurs riscophobe, i.e. $E(y) = y^{ce} > E(PF_N(N, \underline{K})) = P^{ce} F_N(N, \underline{K})$. Voir p. 32 du présent rapport.

Mentionnons que nous avons $y \underset{<}{\geq} PF_N(N, \underline{K})$ même lorsque le prix du produit est certain. En effet, $y = \pi/N + w$. Or, $w = PF_N(N, \underline{K})$ par la condition d'emploi de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique et $\pi \underset{<}{\geq} 0$ puisque les profits sont résiduels.

(4) La mesure d'aversion absolue au risque (AAR) est fixe pour tout niveau de dividendes de telle sorte que $E[AAR(y^\#)] = AAR(y^\#)$.

(5) Lorsque le prix du produit est certain, mentionnons qu'il est bien connu en théorie microéconomique que la variation des coûts fixes n'affecte pas les décisions d'emploi de court terme de la firme capitaliste traditionnelle à

propriétaire unique. Or, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, une variation des coûts fixes en situation de certitude affecte le niveau d'emploi de la coopérative de travailleurs lorsque le stock de capital est fixe. Ward [1958, p. 573] a en effet mis en évidence que, dans ce cas, la coopérative de travailleurs augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une hausse (réduction) des coûts fixes.

(6) Mentionnons que l'augmentation du prix du produit en incertitude constitue un cas particulier de dominance stochastique du premier degré. En effet, selon Copeland et Weston [1988, p.92], un actif ou portefeuille domine de façon stochastique un autre actif ou portefeuille si son détenteur reçoit des revenus plus importants pour chaque état de la nature. Il s'agit d'un cas particulier de dominance stochastique du premier degré puisque que celle-ci n'exige pas que les fonctions de densité soient de forme identique.

(7) Soulignons que $E(P)$ doit être supérieur à zéro puisque le prix du produit ne peut pas, par définition, prendre de valeurs négatives et que e , de moyenne nulle et de variance supérieure à zéro, peut être inférieur à zéro.

(8) Voir la démonstration (6) à l'Annexe C.

(9) Lorsque le prix du produit est certain, il est bien connu en théorie microéconomique que la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du prix du produit. Or, Ward [1958, p. 575] est arrivé au résultat contraire pour la coopérative de travailleurs.

(10) Pour voir cela, prenons l'espérance mathématique et la variance de l'équation (3.9). Nous obtenons, $E(P') = a [E(P) - E(P)] + E(P) = E(P)$ et $VAR(P') = a^2 VAR(P) + VAR(P) = (1 + a^2) VAR(P)$. Aussi, la moyenne demeure la même tandis que la variance augmente (diminue) suite à une augmentation (diminution) de a .

Dans Hey [1979, p.129], on retrouve une équation légèrement différente à l'équation (3.9), soit $P' = a [P - E(P)] + E(P)$ où $a > 1$ afin de s'assurer que $VAR(P') > VAR(P)$. En effet, puisque $VAR(P') = a^2 VAR(P)$, si $0 < a \leq 1$ alors $VAR(P') \leq VAR(P)$.

L'équation (3.9) nous fut présentée à l'hiver 1990 par M. Georges Dionne dans le cadre du cours "Economie de l'incertain et de l'information" (ECN 6085) qu'offre le Département de sciences économiques de l'Université de Montréal.

(11) Comme le souligne Hey [1981, p. 370], si au lieu d'une variation du risque à la Sandmo [1971], on considère une variation du risque à la Rothschild-Stiglitz [1970], on ne peut déduire aucun effet qui soit non ambigu. Comme l'augmentation (diminution) du risque à la Sandmo, l'augmentation (diminution) du risque à la Rothschild-Stiglitz est une transformation de la fonction de distribution qui ajoute (enlève) du poids des queues de la distribution tout en gardant la moyenne constante, mais, *a contrario*, elle n'est pas identique pour chaque état de la nature. La variation du risque à la Sandmo est donc un cas particulier de la variation du risque à la Rothschild-Stiglitz.

(12) La coopérative de travailleurs rationnelle produit toujours dans la région de sa fonction de production où la productivité marginale est inférieure à la productivité moyenne des travailleurs (Muzondo [1979, p.132]). Or, lorsque la productivité marginale des travailleurs est inférieure à leur productivité moyenne, la productivité moyenne des travailleurs décroît. Etant donné que la productivité moyenne est décroissante, si la productivité moyenne des travailleurs augmente, c'est que le nombre de travailleurs diminue et donc que les coûts fixes minimaux par travailleur croissent.

(13) Le coût marginal est croissant puisqu'en raison de la productivité marginale décroissante des travailleurs, pour produire une unité supplémentaire, il faut de plus en plus de travailleurs.

(14) Afin d'étoffer la démonstration du Résultat 8, nous avons repris la même démarche que Ishii [1977] pour la coopérative de travailleurs en utilisant la formulation de Hey et Suckling [1980]. Voir la démonstration (7).

$$(15) \quad RN^{ai} = (1 - b) RN^a = (1 - b) N y = N [(1 - b) y].$$

(16) Voir la démonstration (8) à l'Annexe C.

(17) Voir la démonstration (9) à l'Annexe C.

(18) A nouveau, l'erreur que Bonin [1980] relève dans l'article de Muzondo [1979] en est une de signe. En effet, Muzondo [1979, p. 142] affirme de façon inexacte en vertu de l'aversion relative au risque croissante:

$$(A14) \quad - (y) U''(y^i)/U'(y^i) > \text{ARR}(y^{i\#}) \quad \text{si} \quad y < PF_N(N, K)$$

$$\text{i.e.} \quad \text{si} \quad y^i < (1 - b)PF_N(N, K) = y^{i\#} \quad \text{puisque} \quad y^i = (1 - b) y$$

Aussi, par extrapolation, Muzondo aurait également énoncé de façon erronée en vertu de l'aversion relative au risque décroissante:

$$- (y) U''(y^i)/U'(y^i) < \text{ARR}(y^{i\#}) \quad \text{si} \quad y < PF_N(N, K)$$

$$\text{i.e.} \quad \text{si} \quad y^i < (1 - b)PF_N(N, K) = y^{i\#}$$

Or, comme nous l'indiquons à la page 55, en vertu de l'aversion relative au risque décroissante, nous avons:

$$(3.23) \quad - (y^i) U''(y^i)/U'(y^i) > \text{ARR}(y^{i\#}) \quad \text{si} \quad y < PF_N(N, K)$$

$$\text{i.e.} \quad \text{si} \quad y^i < (1 - b)PF_N(N, K) = y^{i\#}$$

Et puisque $y^i = (1 - b) y$ et que $0 < (1 - b) < 1$, ceci est équivalent à:

$$-(y) U''(y^i)/U'(y^i) > ARR(y^{i*}) \quad \text{si} \quad y < PF_N(N, K)$$

i.e. si $y^i < (1 - b)PF_N(N, K) = y^{i*}$

(19) Comme nous l'avons vu à la section 3.1, puisque les dividendes sont résiduels, ils peuvent être supérieurs, égaux ou inférieurs à la valeur de la productivité marginale des travailleurs, i.e. $y \geq PF_N(N, K)$. Maintenant, comme $y^i = (1 - b) y$ selon l'équation (3.17), dire que $y < PF_N(N, K)$ est équivalent

à énoncer que $y^i < (1 - b) PF_N(N, K)$.

(20) Précisons que Sandmo [1971, p. 70] démontre son affirmation pour le cas où l'aversion relative au risque est croissante et qu'il arrive à une inégalité "non stricte", i.e. $dQ^C/db \geq 0$ si $d(ARR)/d\pi > 0$. Or, il est possible d'étendre la preuve de Sandmo au cas où l'aversion relative au risque est décroissante et d'obtenir également une inégalité "non stricte", i.e. $dQ^C/db \leq 0$ si $d(ARR)/d\pi < 0$.

(21) Lorsque le prix du produit est certain, mentionnons qu'il est bien connu en théorie microéconomique que la variation du taux d'imposition sur les profits n'affecte pas les décisions d'emploi de court terme de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique. En outre, comme le souligne Muzondo [1979, p. 136], Suckling [1974] a démontré qu'une variation du taux d'imposition sur les dividendes n'a aucun effet à court terme sur le niveau d'emploi de la coopérative de travailleurs lorsque le prix du produit est certain.

- (22) Les conditions de premier et de deuxième ordre sont exactement les mêmes que lorsqu'on maximise l'espérance d'utilité de y sauf en ce qui regarde l'argument de la fonction $U'(\cdot)$ et $U''(\cdot)$ puisque les dérivées première et seconde de y^d par rapport à N sont identiques à celles de y .
- (23) Voir la démonstration (10) à l'Annexe C.
- (24) Voir la démonstration (11) à l'Annexe C.
- (25) Nous nous sommes appliquée à faire la démonstration afin de vérifier s'il s'agissait d'une inégalité stricte ou pas. Voir la démonstration (12) à l'Annexe C.
- (26) Lorsque le prix du produit est certain, la variation d'un impôt forfaitaire sur les dividendes n'a aucun effet à court terme sur l'emploi de la coopérative de travailleurs. En effet, maximiser y est équivalent à maximiser $y^d = y - d$. Par conséquent, la variation d'une taxe forfaitaire par travailleurs n'a aucun effet sur l'emploi de la coopérative de travailleurs lorsque le prix du produit est certain. Quant à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, elle réduira (augmentera) l'emploi suite à une augmentation (diminution) des salaires. En effet, lorsque le prix du produit est certain, la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique maximise ses profits par rapport au nombre de travailleurs. La condition de premier ordre est bien connue: $PF_N(N, K) = w$. Si w augmente (diminue), il faut que $PF_N(N, K)$ s'accroisse (baisse). Comme la productivité marginale des travailleurs est décroissante ($F_N(N, K) < 0$), cela n'est possible que si la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique réduit (augmente) l'emploi. Aussi, la firme capitaliste à propriétaire unique réduit (augmente) son niveau d'emploi optimal suite à une augmentation (diminution) d'une taxe par travailleur lorsque le prix du produit est certain.
- (27) Comme le souligne Bonin [1980, p. 335], si le résultat auquel arrive Muzondo [1979, p. 137] est exact, il commet toutefois une erreur de signe au

cours de sa démonstration. En effet, Muzondo [1979, p. 143] obtient l'équation suivante en vertu de l'aversion absolue au risque décroissante:

$$(A22) \quad (U''(y^t)) P (P^t F_N(N, K) - y^t) > -R_A(y^t) [U'(y^t) P (P^t F_N(N, K) - y^t)]$$

$$\text{pour } y^t \begin{array}{l} > P^t F_N(N, K) \\ = P^t F_N(N, K) \\ < P^t F_N(N, K) \end{array}$$

Or, nous démontrerons dans les pages qui suivent que le signe de cette équation est inexact et que celle-ci devrait s'écrire:

$$(3.47) \quad (U''(y^t)) P (P^t F_N(N, K) - y^t) < -R_A(y^t) [U'(y^t) P (P^t F_N(N, K) - y^t)]$$

$$\text{pour } y^t \begin{array}{l} > P^t F_N(N, K) \\ = P^t F_N(N, K) \\ < P^t F_N(N, K) \end{array}$$

(28) Voir la démonstration (13) à l'Annexe C.

(29) Voir la démonstration (14) à l'Annexe C.

(30) Voir la démonstration (15) à l'Annexe C.

(31) En effet, selon Muzondo [1979, p. 137], en définissant $P^t = (1 + c) P$ dans le modèle de Sandmo [1971], nous pourrions trouver que l'effet d'une variation de c sur la production de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe est indéterminé. K étant fixe, nous pourrions en déduire que l'effet d'une variation de c sur l'emploi de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe est également ambigu.

A notre avis, il s'est glissé une faute de frappe dans le papier de Muzondo et au lieu de $P^t = (1 + c) P$ il devrait être inscrit $P^t = (1 - c) P$.

(32) Lorsque le prix du produit est certain, l'augmentation (diminution) d'une taxe *ad valorem* sur le produit en diminue (accroît) la valeur. Ward [1958, p.575] a démontré qu'en situation de certitude, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs augmente (diminue) son niveau d'emploi suite à une baisse (augmentation) du prix de son produit. Par conséquent, *a contrario* de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à l'augmentation (diminution) d'une taxe *ad valorem* sur le produit.

(33) En certitude, l'augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire sur le produit correspond à une diminution (augmentation) du prix du produit. Ward [1958, p. 575] a démontré que, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs diminue (augmente) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du prix du produit. Par conséquent, contrairement à la firme capitaliste à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs augmente (diminue) son niveau d'emploi suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire sur le prix de son produit.

CHAPITRE 4: Diversification de la production

Une de nos hypothèses de départ limitait les deux types d'entreprise à la production d'un seul produit. Nous allons maintenant rendre possible la diversification de la production et, à partir de l'analyse de Ireland et Law [1982] ainsi que des Résultats 7 à 9 et de la Proposition 1, nous comparerons le niveau d'emploi optimal de la coopérative de travailleurs risco-phobe et de la firme capitaliste traditionnelle risco-phobe lorsque les prix des produits sont incertains.

4.1 Effets sur les profits

Dans un premier temps, nous allons examiner l'effet de la diversification de la production sur les profits des entreprises. Pour ce faire, nous appliquerons aux profits la même procédure que celle qu'ont utilisée Ireland et Law [1982, pp. 148 - 150] aux dividendes pour la coopérative de travailleurs. Notre analyse sera ainsi plus générale que celle de Ireland et Law [1982], en ce sens qu'elle nous permettra d'en tirer ensuite des résultats à la fois pour la coopérative de travailleurs et la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique.

Nous allons démontrer l'effet de la diversification de la production sur les profits en comparant les profits d'une entreprise qui ne produit qu'un seul produit, soit le produit X, à ceux d'une entreprise qui fabrique deux produits, soit les produits X et Y. Pour simplifier l'analyse, nous supposerons que la fonction de production des deux produits est de même forme, soit $Q_X = F(N, \underline{K})$ et $Q_Y = G(N, \underline{K})$, et qu'un niveau de facteurs de production donné permet de produire le même nombre d'unités du bien X ou du bien Y selon que les facteurs sont affectés à la production de l'un ou l'autre des biens, i.e. pour N et \underline{K} , $Q_X = Q_Y =$

Q. En outre, nous considérerons le cas où les prix des produits, bien que différents, ont une distribution de probabilités identique de moyenne $E(P) = P^{ce}$ et de variance $VAR(P)$.

Sans diversification de sa production, l'entreprise emploie N travailleurs, utilise \underline{K} unités de capital et produit Q unités du produit X. Lorsqu'elle diversifie sa production, l'entreprise double ses intrants et utilise une moitié de ceux-ci à la production du produit X et l'autre à la fabrication du produit Y. En somme, nous supposons que l'entreprise qui diversifie sa production est constituée de deux usines qui ont les mêmes niveaux d'emploi, N , et de capital, \underline{K} , mais dont l'une produit Q unités du produit X tandis que l'autre fabrique Q unités du produit Y. Le tableau 3 résume l'ensemble de ces hypothèses.¹

Tableau 3:

<u>Entreprise sans diversification de sa production</u>	<u>Entreprise avec diversification de sa production</u>	
<u>Usine X</u>	<u>Usine X</u>	<u>Usine Y</u>
Produit X	Produit X	Produit Y
$N_X = N$	$N_X = N$	$N_Y = N$
$K_X = \underline{K}$	$K_X = \underline{K}$	$K_Y = \underline{K}$
$Q_X = Q$	$Q_X = Q$	$Q_Y = Q$
P_X	P_X	P_Y
$E(P_X) = E(P) = P^{ce}$	$E(P_X) = E(P) = P^{ce}$	$E(P_Y) = E(P) = P^{ce}$
$VAR(P_X) = VAR(P)$	$VAR(P_X) = VAR(P)$	$VAR(P_Y) = VAR(P)$

(a) Variance

Tout d'abord, nous allons démontrer que la diversification de la production permet à l'entreprise de diminuer la variance de ses profits.

Résultat 25: Lorsque les prix des produits sont incertains, la variance des profits est plus petite lorsque l'entreprise, coopérative de travailleurs ou firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, diversifie sa production si et seulement si $-1 \leq r_{XY} < -1/2$, i.e. $\text{VAR}(\Pi^D) < \text{VAR}(\Pi)$ si $-1 \leq r_{XY} < -1/2$.²

Preuve du Résultat 25:

Sans diversification de la production, les profits de l'entreprise sont:

$$(4.1) \quad \Pi = P_X Q - wN - rK$$

Par conséquent, la variance des profits d'une entreprise qui ne fabrique qu'un seul produit est:³

$$(4.2) \quad \text{VAR}(\Pi) = Q^2 \text{VAR}(P)$$

Lorsqu'il y a diversification de la production, les profits de l'entreprise se définissent par:

$$(4.3) \quad \Pi^D = (P_X + P_Y) Q - 2wN - 2rK$$

Aussi, la variance des profits de l'entreprise qui fabrique deux produits est:⁴

$$(4.4) \quad \text{VAR}(\pi^D) = Q^2 \text{VAR}(P) [2(1 + r_{XY})]$$

L'effet de la diversification de la production sur la variance des profits se calcule par la différence entre les équations (4.2) et (4.4):

$$(4.5) \quad \text{VAR}(\pi) - \text{VAR}(\pi^D) = [Q^2 \text{VAR}(P)] [1 - 2(1 + r_{XY})]$$

Le premier terme du côté droit de l'équation (4.5) est nécessairement positif. Quant au second terme, il est positif si et seulement si $-1 \leq r_{XY} < -1/2$.⁵ Par conséquent, $\text{VAR}(\pi) - \text{VAR}(\pi^D) > 0$ ssi $-1 \leq r_{XY} < -1/2$, c'est-à-dire:

$$(4.6) \quad \text{VAR}(\pi^D) < \text{VAR}(\pi) \text{ ssi } -1 \leq r_{XY} < -1/2$$

C.Q.F.D.

(b) Moyenne

Nous prouverons maintenant que la diversification de la production augmente l'espérance des profits de l'entreprise.

Résultat 26 : Lorsque les prix des produits sont incertains, l'espérance des profits augmente lorsque l'entreprise, coopérative de travailleurs ou firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, diversifie sa production, i.e. $E(\pi^D) > E(\pi)$.

Preuve du Résultat 26:

L'espérance des profits de l'entreprise qui ne fabrique qu'un produit se calcule aisément en prenant la moyenne du côté droit de l'équation (4.1):⁶

$$(4.7) \quad E(\Pi) = P^{ce} Q - wN - rK$$

De même, en prenant la moyenne du côté droit de l'équation (4.3), nous obtenons l'espérance des profits de l'entreprise qui a diversifié sa production et qui fabrique deux produits:⁷

$$(4.8) \quad E(\Pi^D) = 2(P^{ce} Q - wN - rK)$$

En comparant les équations (4.7) et (4.8), on voit que la diversification de la production double la moyenne des profits de l'entreprise:

$$(4.9) \quad E(\Pi^D) = 2 E(\Pi) \\ > E(\Pi)$$

C.Q.F.D.

La conjonction des Résultats 25 et 26 nous permet d'énoncer le résultat suivant:

Résultat 27: Lorsque les prix des produits sont incertains, la diversification de la production permet à l'entreprise, coopérative de travailleurs

ou firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, de réduire la variance de ses profits et d'augmenter leur moyenne si et seulement si $-1 \leq r_{XY} < -1/2$.

4.2 Effets sur les dividendes

A partir des équations de la section 4.1 nous allons démontrer que la coopérative de travailleurs qui diversifie sa production diminue la variance de ses dividendes sans changer leur moyenne.

Résultat 28: Lorsque les prix des produits sont incertains, la diversification de la production permet à la coopérative de travailleurs de réduire la variance de ses dividendes sans changer leur moyenne si et seulement si $-1 \leq r_{XY} < 1$.

Preuve du Résultat 28:

Les dividendes, sans et avec diversification de la production, peuvent s'exprimer de la manière suivante:^B

$$(4.10) \quad y = \Pi/N - w$$

$$(4.11) \quad y^D = \Pi^D/2N - w$$

A partir de l'équation (4.10), il nous est possible de formuler l'espérance et la variance des dividendes de la coopérative de travailleurs sans diversification de sa production:

$$(4.12) \quad E(y) = (1/N) E(\Pi) - w$$

$$(4.13) \text{VAR}(y) = (1/N^2) \text{VAR}(\pi)$$

De même à partir de l'équation (4.11), il nous est possible de formuler l'espérance et la variance des dividendes de la coopérative de travailleurs avec diversification de sa production:

$$(4.14) E(y^D) = (1/2N) E(\pi^D) - w$$

$$(4.15) \text{VAR}(y^D) = (1/4N^2) \text{VAR}(\pi^D)$$

En remplaçant $E(\pi^D)$ dans le côté droit de l'équation (4.14) par le côté droit de l'équation (4.9), nous obtenons :

$$(4.16) E(y^D) = (1/N) E(\pi) - w$$

Or, par l'identité du côté droit des équations (4.12) et (4.16), nous avons:

$$(4.17) E(y) = E(y^D)$$

Maintenant, en soustrayant l'équation (4.13) de l'équation (4.15), nous avons:

$$(4.18) \text{VAR}(y^D) - \text{VAR}(y) = (1/4N^2) \text{VAR}(\pi^D) - (1/N^2) \text{VAR}(\pi)$$

En remplaçant $\text{VAR}(\pi)$ et $\text{VAR}(\pi^D)$ dans le côté droit de l'équation (4.18) par le côté droit des équations (4.2) et (4.4) respectivement et en factorisant, nous obtenons:⁹

$$(4.19) \text{VAR}(y^D) - \text{VAR}(y) = [(1/N^2) Q^2 \text{VAR}(P)] [(1 + r_{XY})/2 - 1]$$

Le premier terme du côté droit de l'équation (4.19) est positif. Quant au second, il est négatif si et seulement si $-1 \leq r_{XY} < 1$, i.e. ssi les prix des produits ne sont pas corrélés positivement.¹⁰ Donc, $\text{VAR}(y^D) - \text{VAR}(y) < 0$ ssi $-1 \leq r_{XY} < 1$, i.e.

$$(4.20) \text{VAR}(y^D) < \text{VAR}(y) \text{ ssi } -1 \leq r_{XY} < 1.$$

C.Q.F.D.

4.3 Effets équivalents sur le prix du produit

(a) Coopérative de travailleurs

Puisque le caractère aléatoire des dividendes émane de la nature stochastique du prix du produit, une diminution de la variance des dividendes sans variation de leur moyenne correspond à une diminution de la variance du prix du produit sans variation de sa moyenne. Or, dans le cas où le prix du produit obéit à une loi de distribution normale, une diminution du risque à la Sandmo sur le prix du produit correspond à une réduction de la variance du prix du produit sans modification de sa moyenne. Par conséquent, nous pouvons formuler le résultat suivant:

Résultat 29: Lorsque les prix des produits sont incertains et $-1 \leq r_{XY} < 1$, analyser l'effet de la diversification de la production de la coopérative de travailleurs sur le nombre optimal de travailleurs est équivalent à

analyser l'effet d'une diminution du risque à la Sandmo sur le prix du produit lorsque celui-ci suit une loi de distribution normale.

La conjonction des Résultats 8 et 29, nous permet d'énoncer le résultat suivant:

Résultat 30: Lorsque les prix des produits sont incertains, suivent une loi de distribution normale et $-1 \leq r_{XY} < 1$, la coopérative de travailleurs riscophobe réduit le nombre de ses travailleurs suite à la diversification de sa production si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $N_1^{aD} < N_1^a$ si $d(AAR)/dy < 0$.

(b) Firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique

A partir du Résultat 27, il nous est possible de séparer l'effet de la diversification sur les profits de l'entreprise en deux effets: 1^o une diminution de la variance des profits sans modification de leur moyenne et 2^o une augmentation exclusive de la moyenne des profits.

Puisque le caractère aléatoire des profits émane de la nature stochastique du prix du produit, le premier effet de la diversification de la production sur les profits de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique est identique à l'effet d'une diminution de la variance du prix de son produit sans variation de sa moyenne. Par conséquent, le premier effet de la diversification de la production est équivalent à celui d'une diminution du risque à la Sandmo sur le prix du produit lorsque celui-ci suit une loi normale. Quant au deuxième effet, il correspond à une augmentation du prix du produit en incertitude. Par conséquent,

Résultat 31: Lorsque les prix des produits sont incertains et $-1 \leq r_{XY} < -1/2$, analyser l'effet de la diversification de la production sur le nombre optimal de travailleurs d'une firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique est équivalent à analyser l'effet combiné d'une diminution du risque à la Sandmo sur le prix du produit et d'une augmentation du prix du produit sur le nombre optimal de travailleurs lorsque le prix du produit suit une loi de distribution normale.

Aussi, à partir des Résultats 7, 9 et 31, il nous est possible de formuler le résultat suivant:

Résultat 32: Lorsque les prix des produits sont incertains, suivent une loi de distribution normale et $-1 \leq r_{XY} < -1/2$, la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe augmente le nombre de ses travailleurs suite à la diversification de sa production si son aversion absolue au risque est décroissante, i.e. $N_1^{cD} > N_1^c$ si $d(AAR)/dy < 0$.

4.4 Niveau d'emploi optimal

Quant au niveau relatif de l'emploi dans la coopérative de travailleurs et de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique en incertitude, la combinaison de la Proposition 1 et des Résultats 30 et 32, nous permet de constater que l'ambiguïté demeure lorsqu'il y a diversification de la production, i.e. $N_1^{aD} \geq N_1^{cD}$ si $E(y) = y^{ce} > w$. Cependant, le niveau de

<
l'emploi dans la coopérative de travailleurs sera moins au-dessus du niveau de certitude pour la coopérative de travailleurs qui diversifie sa production et moins en-dessous du niveau de certitude pour la firme capitaliste traditionnelle à

propriétaire unique.⁹ Aussi, si la coopérative de travailleurs emploie plus de travailleurs que la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique lorsque les deux types d'entreprise ne fabriquent qu'un seul produit, cet avantage est réduit lorsqu'il y a diversification de la production; en outre, si sans diversification de la production des entreprises, la coopérative de travailleurs emploie autant que la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, avec diversification de la production, elle emploie moins; et, finalement, si sans diversification de la production des entreprises, la coopérative de travailleurs emploie moins de travailleurs que la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, ce désavantage est augmenté lorsque les entreprises diversifient leur production. En résumé, plus les entreprises diversifient leur production, moins la coopérative de travailleurs riscofobe est avantagée par rapport à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscofobe en regard de l'objectif de création d'emplois. D'ailleurs, à la limite, la diversification de la production permet d'obtenir pour le cas où les prix sont incertains, le résultat auquel était arrivé Ward [1958] en situation de certitude, i.e. $N_1^{aD} < N_1^{cD}$ si $E(y) = y^{ce} > w$.¹¹ Aussi, pouvons-nous formuler la proposition suivante:

Proposition 9: Lorsque les prix des produits sont incertains, suivent une loi de distribution normale et ont un coefficient de corrélation inférieur à $-1/2$, le niveau d'emploi de la coopérative de travailleurs riscofobe qui diversifie sa production est supérieur, égal ou inférieur à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscofobe qui diversifie sa production si l'espérance des dividendes est supérieure au salaire du marché, i.e. $N_1^{aD} \geq$
 $<$
 N_1^{cD} si $E(y) = y^{ce} > w$. Toutefois, plus le niveau de diversification de la production est élevé moins le niveau d'emploi de la coopérative de travailleurs

riscophobe a de chances d'être supérieur à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique.

Notes du chapitre 4

- (1) Comme la fonction de production et la fonction de densité des prix des deux produits sont identiques, pour un niveau de capital donné, nous pourrions démontrer que le nombre de travailleurs optimal est le même pour les deux types de produit, que l'entreprise soit une coopérative de travailleurs ou une firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique. Donc, si nous supposons un niveau de capital identique dans les deux usines, celles-ci emploient le même nombre de travailleurs à l'optimum et, en conséquence, ont un même niveau de production.
- (2) L'indice supérieur "D" indique que l'entreprise diversifie sa production.
 r_{XY} symbolise le coefficient de corrélation entre le prix du produit X et celui du produit Y. Par définition, le coefficient de corrélation peut prendre les valeurs suivantes: $-1 \leq r_{XY} \leq 1$.
- (3) Rappelons que $\text{VAR}(P_X) = \text{VAR}(P)$.
- (4) Voir la démonstration (16) à l'Annexe C.
- (5) Voir la démonstration (17) à l'Annexe C.
- (6) Rappelons que $E(P_X) = E(P) = P^{ce}$.
- (7) Voir la démonstration (18) à l'Annexe C.
- (8) Voir la note 11 du chapitre 1.
- (9) Voir la démonstration (19) à l'Annexe C.
- (10) Voir la démonstration (20) à l'Annexe C.
- (11) Toutefois, l'élimination de tout risque par la diversification de la production est dans la pratique impossible en raison des contraintes de capital.

CHAPITRE 5: Modèle alternatif

Au chapitre 3, nous avons vu plusieurs cas où la rationalité conduit la coopérative de travailleurs riscophobe à réduire le nombre de ses travailleurs-membres lorsque le prix du produit est incertain. Cependant, parce qu'apparaissant contraire à l'esprit coopératif et à la solidarité, Meade [1972, p.421] a critiqué le fait de modéliser la coopérative de travailleurs comme pouvant ainsi licencier librement certains de ses travailleurs-membres afin d'augmenter quelque peu le bien-être des travailleurs-membres restants. Aussi, comme le mentionne Danziger [1988, p. 240], une théorie alternative à la théorie "illyrienne" fut développée, notamment par Steinherr et Thisse [1979], Bonin [1981], Brewer et Browning [1982], Miyazaki et Neary [1983], Bonin [1984] et McCain [1985], afin d'expliquer le comportement de la coopérative de travailleurs, soit la théorie des contrats implicites.

Steinherr et Thisse [1979] ont souligné que le congédiement par la coopérative de travailleurs de certains travailleurs-membres au profit de quelques autres suppose implicitement deux hypothèses, soit: 1^o l'existence d'un ordre exogène de licenciement des travailleurs-membres; et 2^o l'indifférence des travailleurs-membres quant au bien-être de leurs pairs. Selon ces auteurs, ces deux hypothèses font entorse à l'esprit de la coopération: la première discrimine les travailleurs-membres sur la base de leurs caractéristiques (leur ancienneté par exemple) et va à l'encontre du principe coopératif de traitement égal des membres; la deuxième suppose les travailleurs-membres foncièrement égoïstes ce qui s'oppose aux fondements philosophiques de la coopération et à l'essence des véritables coopérateurs. Cependant, nous aimerions faire remarquer que la première hypothèse concerne le fonctionnement de la coopérative de travailleurs tandis que la deuxième a trait aux caractéristiques

des travailleurs-membres qui la composent. Or, rappelons que dans notre analyse, la coopérative de travailleurs se définit et se distingue de la firme capitaliste traditionnelle par un ensemble de règles de fonctionnement particulières, les principes coopératifs, et non par la nature des individus qui la constituent. En effet, nous avons posé au départ les agents économiques identiques, qu'ils participent à la production d'une firme capitaliste ou à celle d'une coopérative de travailleurs, et cherchant tous à maximiser l'espérance de leur utilité, laquelle dépend uniquement de leurs revenus et non du bien-être de leurs camarades.¹ Par conséquent, dans notre étude, le caractère individualiste des individus ne s'oppose pas à la formation et à l'existence des coopératives de travailleurs. Nous allons donc nous attacher à rectifier uniquement la première des hypothèses implicites relevées par Steinherr et Thisse [1979] et à analyser l'impact de cette modification sur le comportement de la coopérative de travailleurs en matière d'emploi lorsque le prix du produit est incertain.

Afin de respecter le principe coopératif de traitement égal des travailleurs-membres, les travailleurs-membres mis à pied seront désignés par un processus de sélection aléatoire où chaque travailleur-membre possède la même probabilité d'être démis de ses fonctions. L'incorporation d'un tel processus de sélection dans l'analyse de l'ajustement du niveau d'emploi en incertitude, nous oblige à intégrer dans la fonction objectif de la coopérative de travailleurs le risque de perte d'emploi encouru par les travailleurs-membres.

Miyazaki et Neary [1983], Bonin [1984] et McCain [1985] ont analysé les décisions d'emploi de la coopérative de travailleurs lorsque le prix du produit est incertain suite à l'incorporation d'un processus de sélection aléatoire des travailleurs-membres mis à pied. Toutefois, seuls Miyazaki et Neary [1983] et McCain [1985] se sont intéressés au cas où les travailleurs-membres sont riscophobes. Le modèle de Miyazaki et Neary [1983] est essentiellement de

même nature que celui de McCain [1985]. Cependant, l'analyse de McCain [1985] est plus générale que celle de Miyazaki et Neary [1983] puisqu'elle aborde non seulement les décisions de court terme de la coopérative de travailleurs mais également celles de long terme. Toutefois, rappelons que nous nous limitons dans le cadre de notre rapport à l'étude des décisions d'emploi de court terme. Or, l'analyse des décisions d'emploi de court terme de Miyazaki et Neary [1983] et de McCain [1985] se distinguent à deux niveaux. La première différence concerne la condition de formation de la coopérative. Puisque, par hypothèse, les travailleurs-membres sont riscophobes, une condition *sine qua non* à la signature d'un contrat d'association coopérative, et, conséquemment, à la constitution d'une coopérative de travailleurs, est que cette association permette à chaque travailleur-membre d'escompter une espérance d'utilité supérieure à l'utilité procurée par les revenus alternatifs. Or, Miyazaki et Neary [1983] supposent que la condition de formation de la coopérative de travailleurs est respectée tandis que McCain [1985] l'inclut formellement dans les contraintes de la fonction objectif de la coopérative de travailleurs. Mais ce que nous cherchons à déterminer c'est le nombre de travailleurs-membres lorsqu'il y a formation d'une coopérative. Nous nous intéressons donc au cas où la condition de formation de la coopérative est respectée. Secundo, McCain [1985] considère la richesse nette initiale de la coopérative de travailleurs non nulle et suppose que celle-ci est utilisée pour acheter en totalité ou en partie le capital physique de l'entreprise. Pour des fins de simplification, nous poserons, à l'instar de Miyazaki et Neary, la richesse nette initiale de la coopérative de travailleurs égale à zéro. Aussi, nous privilégierons la formulation de Miyazaki et Neary [1983] pour démontrer les résultats de la théorie des contrats implicites quant aux décisions d'emploi de la coopérative de travailleurs riscophobe en incertitude.

5.1 Hypothèses

Les hypothèses demeurent les mêmes qu'à la section 1.2 sauf que le nombre de travailleurs de la coopérative de travailleurs n'est maintenant plus variable mais fixe à court terme et que la fonction objectif de la coopérative de travailleur incorpore le risque de perte d'emploi encouru par les travailleurs-membres.

5.2 Statique comparative

Nous allons à présent considérer deux périodes. La première période est caractérisée par l'incertitude sur le prix du produit: il y a m réalisations de P possibles, soit $i = 1, \dots, m$, et, comme précédemment, les probabilités de réalisation de P , soit q_i où $i = 1, \dots, m$, sont connues de tous les agents économiques. Quant à la deuxième période, le prix du produit est certain.

A court terme, le nombre de travailleurs-membres *ex ante*, soit N , est fixe tandis que le nombre de travailleurs-membres *ex post*, soit n_i , peut être ajusté sans coûts suivant l'état de la conjoncture.² Il nous est donc possible d'énoncer le résultat suivant:

Résultat 33: Lorsque le prix du produit est incertain, les décisions d'emploi de la coopérative de travailleurs risco-phobe sont invariables aux coûts fixes, au prix du produit, à l'impôt proportionnel sur les revenus nets de l'entreprise, à la taxe forfaitaire par travailleur, à la taxe *ad valorem* sur le produit et à la taxe forfaitaire sur le produit.

En regard du Résultat 36, nous allons reformuler les Propositions du chapitre 3:

Proposition 2': Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe ne diminue (augmente) pas mais maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) des coûts fixes si son aversion absolue au risque est décroissante.

Proposition 3': Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe n'augmente (ne diminue) pas mais maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du prix du produit si son aversion absolue au risque est décroissante.

Proposition 5': Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe ne diminue (augmente) pas mais maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'un impôt proportionnel aux revenus nets si son aversion relative au risque est non croissante.

Proposition 6': Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe ne diminue (augmente) pas mais maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire par travailleur si son aversion absolue pour le risque est décroissante.

Proposition 7': Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe n'augmente pas et ne diminue pas mais maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une variation d'une taxe *ad valorem* sur le produit.

Proposition 8': Lorsque le prix du produit est incertain, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, la coopérative de travailleurs riscophobe ne diminue (augmente) pas mais maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire sur le produit si son aversion absolue au risque est décroissante.

5.3 Niveau d'emploi optimal

La coopérative de travailleurs est maintenant vue comme une association contractuelle de long terme entre les travailleurs-membres. Spécifiquement, la constitution d'une coopérative de travailleurs requiert que des travailleurs acceptent, *ex ante*, de signer un contrat d'association coopérative stipulant le nombre de travailleurs-membres *ex ante*, N , ainsi que le nombre de travailleurs-membres *ex post*, n_i , et les dividendes *ex post*, y_i , pour chaque réalisation de P .

Si le nombre de travailleurs-membres *ex ante* est N , le nombre de travailleurs-membres *ex post* est n_i et les dividendes *ex post* sont y_i , alors pour chaque réalisation de P , chaque travailleur-membre fait face à une probabilité $[(N - n_i)/N]$ d'être mis à pied. Par conséquent, pour chaque réalisation de P , l'espérance de l'utilité de chaque travailleur-membre est donnée par:³

$$(4.1) \quad v_i = [n_i/N] U[y_i] + [(N - n_i)/N] U[k]$$

L'objectif de la coopérative de travailleurs consiste à choisir un contrat d'association spécifiant N ainsi que n_i et y_i pour chaque réalisation de P , qui maximise $E[v_i]$ sujet aux $2n$ contraintes suivantes:⁴

$$(4.2) \quad n_i \leq N \text{ pour chaque } i$$

$$(4.3) \quad y_i \leq [PF(n_i, K) - rK] / n_i \quad \text{pour chaque } i$$

Formons le Lagrangien correspondant:

$$(4.4) \quad L = \text{Somme sur } i = 1 \text{ à } m \{ q_i [(n_i/N) U(y_i) + ((N - n_i)/N) U(k)] \} \\ + \text{Somme sur } i = 1 \text{ à } m [a_i (N - n_i)] \\ + \text{Somme sur } i = 1 \text{ à } m \{ b_i [(PF(n_i, K) - rK) / n_i - y_i] \}$$

où les a_i, b_i sont $2n$ multiplicateurs de Lagrange non négatifs.

Les conditions de premier ordre nécessaires à l'obtention d'un maximum sont:⁵

$$dL/dN = \text{Somme sur } i = 1 \text{ à } m \{ q_i (n_i/N)^2 [U(k) - U(y_i)] \} \\ + \text{Somme sur } i = 1 \text{ à } m [a_i] = 0$$

$$dL/dn_i = \{ q_i (1/N) [U(y_i) - U(k)] \} - a_i + b_i (1/n_i) [PF_{ni} - y_i] = 0$$

$$dL/dy_i = q_i (n_i/N) U'(y_i) - b_i = 0$$

$$dL/da_i = (N - n_i) = 0$$

$$dL/db_i = [PF(n_i, K) - rK] / n_i - y_i = 0$$

Malheureusement, à partir des conditions de premier ordre, il nous est impossible d'arriver à une formulation qui nous permette de comparer le niveau

d'emploi *ex ante* de la coopérative de travailleurs riscophobe avec celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe. En effet, la condition d'emploi optimal de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe lorsque le prix du produit est incertain est: $E(P)F_N > w$.⁶

Aussi pouvons-nous formuler une proposition analogue à la Proposition 1:

Proposition 1': Lorsque le prix du produit est incertain, on ne peut pas dire si le nombre de travailleurs optimal de la coopérative de travailleurs riscophobe est supérieur, égal ou inférieur à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe, i.e. $N_1^a \geq N_1^c$.
<

Notes du chapitre 5

- (1) A notre avis, l'homme moyen des années quatre-vingt-dix se caractérise encore principalement par sa nature individualiste.
- (2) En fait, Miyazaki et Neary [1983] analysent l'effet d'une variation du prix du produit sur les décisions d'emploi *ex post* de la coopérative de travailleurs, i.e. lorsque le prix du produit est certain. Leur résultat principal est que la coopérative de travailleurs ne réduit (augmente) plus l'emploi mais l'augmente (diminue) en réponse à une augmentation (diminution) du prix du produit en certitude si les dividendes sont supérieurs ou égaux aux revenus des travailleurs-membres mis à pied, i.e. aux revenus alternatifs.
- (3) Comme nous l'avons mentionné antérieurement, étant donné qu'il y a du chômage dans l'économie, les revenus alternatifs des travailleurs-membres, k , ne correspondent pas au salaire offert sur le marché du travail, w , mais lui sont inférieurs, i.e. $k < w$.
- (4) Précisons que les travailleurs accepteront de s'associer en une coopérative de travailleurs uniquement si $E[v_i] = U(k)$. Etant donné la riscophobie des travailleurs, cette condition est équivalente à $E(y_i) > k$. Voir la démonstration (21) à l'Annexe C. Or, comme nous avons posé le bien-être généré par la création d'un emploi identique dans la coopérative de travailleurs riscophobe et la firme capitaliste à propriétaire unique riscophobe, nous avons $E[v_i] = U(w)$, i.e. $E(y_i) > w$. Voir la démonstration (22) à l'Annexe C. Et, comme $w > k$, alors nous avons automatiquement $E(y_i) > k$.
- (5) Les conditions de deuxième ordre sont supposées satisfaites.
- (6) Nous avons obtenu la condition d'emploi optimal de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique riscophobe lorsque le prix du produit est

incertain directement de la condition de production optimale dérivée par Sandmo [1971, p. 67]. En effet,

Condition de production optimale de Sandmo: Coût marginal $< E[P]$

Or, Coût marginal = (w/F_N) .

Condition d'emploi optimal: $(w/F_N) < E[P]$
 $E[P] F_N > w$

CONCLUSION

A l'opposé de la firme capitaliste traditionnelle, les travailleurs participent à la gestion et aux profits au sein de la coopérative de travailleurs. Cette différence de traitement des travailleurs entraîne des divergences dans les décisions d'emploi des deux types d'entreprise.

En regard du chômage endémique qui accable les économies occidentales, l'objectif de notre rapport de recherche consistait à répondre à la question suivante: quelle forme d'organisation, coopérative de travailleurs ou firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, faudrait-il privilégier afin de créer le plus grand nombre d'emplois dans une industrie caractérisée par l'incertitude sur le prix des produits?

Afin d'y répondre, nous avons puisé dans la littérature deux modèles du comportement de la coopérative de travailleurs, soit le modèle "illyrien" et la théorie des contrats implicites.

Ces modèles nous ont permis de formuler quelques propositions quant aux décisions d'emploi de la coopérative de travailleurs par rapport à celles de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique.

Ces propositions s'appuient sur un ensemble d'hypothèses dont nous présentons ici la liste:

- L'industrie est parfaitement compétitive et les probabilités de réalisation des prix des produits sont indépendantes du niveau de production individuelle des entreprises.
- Les probabilités de réalisation des prix des produits sont connues de tous les agents économiques.
- Le stockage des produits est impossible.

- Les quantités mises en marché sont décidées *ex ante* sur la base des probabilités de réalisation des prix des produits.
- Le stock de capital est fixe et identique dans la coopérative de travailleurs et la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique.
- Le nombre d'heures de travail par travailleur est fixe.
- Les travailleurs sont homogènes.
- Les travailleurs et les propriétaires de capital ont les mêmes préférences et la même attitude vis-à-vis du risque: ils sont riscophobes, leur aversion absolue au risque est décroissante et leur aversion relative au risque non croissante avec leur richesse.
- Le bien-être généré par un emploi dans la coopérative de travailleurs est identique au bien-être généré par un emploi dans la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique.

Voici en résumé l'ensemble de ces propositions:

(i) Modèle "illyrien"

- Le nombre de travailleurs optimal de la coopérative de travailleurs est supérieur, égal ou inférieur à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique.
- Lorsque les prix des produits suivent une loi de distribution normale et que leur degré de corrélation est inférieur à $-1/2$, le niveau d'emploi de la coopérative de travailleurs qui diversifie sa production est supérieur, égal ou inférieur à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique qui diversifie sa production. Toutefois, plus le niveau de diversification de la

production est élevé moins le niveau d'emploi de la coopérative de travailleurs a des chances d'être supérieur à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique en regard de l'objectif de création d'emplois.

- Contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) des coûts fixes.
- Contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs diminue (augmente) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du prix du produit.
- Contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'un impôt proportionnel sur les revenus nets.
- Contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire par travailleur.
- A l'instar de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs augmente, maintient constant ou diminue le nombre de ses travailleurs suite à une variation d'une taxe *ad valorem* sur le produit.

- Contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs augmente (diminue) le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire sur le produit.

(ii) Théorie des contrats implicites

- Le nombre de travailleurs optimal de la coopérative de travailleurs est supérieur, égal ou inférieur à celui de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique.

- Contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs ne diminue (n'augmente) pas mais maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) des coûts fixes.

- Contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs n'augmente (ne diminue) pas mais maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) du prix du produit.

- Contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs ne diminue (n'augmente) pas mais maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'un impôt proportionnel sur les revenus nets.

- Contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs ne diminue (n'augmente) pas mais maintient constant

le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire par travailleur.

- Contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs n'augmente pas et ne diminue pas mais maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une variation d'une taxe *ad valorem* sur le produit.

- Contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs ne diminue (n'augmente) pas mais maintient constant le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation (diminution) d'une taxe forfaitaire sur le produit.

Si l'ensemble de ces propositions ne nous permet pas de statuer sur la supériorité de la coopérative de travailleurs ou de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique quant au nombre de travailleurs employés, il nous permet d'identifier certains avantages et inconvénients de la coopérative de travailleurs par rapport à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique en regard de l'objectif de création d'emplois lorsqu'il y a variation des coûts fixes, du prix du produit, d'un impôt proportionnel sur les revenus nets de l'entreprise, d'une taxe par travailleur et d'une taxe forfaitaire sur le produit.

Primo, selon le modèle "illyrien" et la théorie des contrats implicites, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle, il appert impossible que la coopérative de travailleurs diminue son niveau d'emploi suite à une augmentation des coûts fixes. Selon la théorie "illyrienne", la coopérative de travailleurs pourrait même employer davantage de travailleurs dans un tel cas. Aussi, dans un contexte de lutte à l'inflation et de hausse des taux d'intérêt, la

coopérative de travailleurs aura l'avantage de ne pas réduire le nombre de ses employés et voire possiblement de l'accroître.

Secundo, selon la théorie "illyrienne" *a contrario* de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique la coopérative de travailleurs diminue (augmente) l'emploi suite à une hausse (réduction) du prix du produit. Et, selon la théorie des contrats implicites, la coopérative de travailleurs maintient constant le nombre de ses travailleurs quelque soit la variation du prix du produit. Donc, dans un contexte de récession, la coopérative de travailleurs aura l'avantage de ne pas diminuer le nombre de ses travailleurs tandis que, dans un contexte de croissance de la demande, la coopérative de travailleurs aura l'inconvénient de ne pas créer d'emplois.

Et, tertio, selon la théorie "illyrienne", contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, la coopérative de travailleurs augmente l'emploi suite à une augmentation d'un impôt proportionnel sur les revenus nets, d'une taxe par travailleur et d'une taxe forfaitaire sur le produit. Aussi, selon la théorie des contrats implicites, contrairement à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique, il est impossible que la coopérative de travailleurs réduise le nombre de ses travailleurs suite à une augmentation d'un impôt proportionnel sur les revenus nets, d'une taxe par travailleur et d'une taxe forfaitaire sur le produit et d'une taxe *ad valorem* sur le produit. Par conséquent, la coopérative de travailleurs aura l'avantage de permettre la création d'emplois sans creuser davantage le déficit budgétaire du gouvernement et elle pourra même garnir du même coup les coffres de l'Etat.

En terminant, il nous apparaît important de rappeler qu'une des hypothèses sur lesquelles s'appuient nos résultats pose le niveau de capital fixe identique dans les deux types d'entreprise. Toutefois, comme nous l'avons relevé dans l'introduction, en raison des différences de traitement du capital

financier, les coopératives de travailleurs éprouvent fréquemment des difficultés de financement et sont minées par le manque d'investissements. Or, cette tendance à la sous-capitalisation de la coopérative de travailleurs par rapport à la firme capitaliste traditionnelle, la désavantage en regard de l'objectif de création d'emplois.

Au terme de notre analyse, nous croyons avoir, du moins théoriquement, éclaircie la question de la pertinence de privilégier cette forme particulière d'organisation qu'est la coopérative de travailleurs par rapport à la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique afin de solutionner le problème du chômage qui accable nos économies occidentales.

Il faudrait maintenant s'attacher à faire le tour des études empiriques qui traitent des décisions d'emploi de la coopérative de travailleurs et de la firme capitaliste traditionnelle à propriétaire unique et peut-être serait-il nécessaire d'en mener une, afin de vérifier la justesse de nos propositions dans la réalité.

En outre, comme nous nous sommes cantonnée à l'analyse partielle, il y aurait lieu d'examiner l'équilibre de marché.

Finalement, il serait intéressant d'analyser l'impact des différences de traitement des travailleurs au sein de la coopérative de travailleurs et de la firme capitaliste traditionnelle sur la productivité des travailleurs dans les deux types d'entreprise.

BIBLIOGRAPHIE

- ARROW, K. J. [1971], *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, North - Holland, Amsterdam.
- BASTIEN, R. [1987], *Les coopératives: une vision d'économiste*, Notes miméographiées.
- BINGER, B. R. et E. HOFFMAN [1988], *Microeconomics with Calculus*, Scott, Foresman and Company, Glenview.
- BONIN, J.P. [1980], "On the Theory of the Competitive Labor-Managed Firm under Uncertainty: a Correction", *Journal of Comparative Economics*, 4, pp. 331-337.
- BORTS, G. H. et E. J. MISHAN [1962], "Exploring the 'Uneconomic Region' of the Production Function", *Review of Economic Studies*, 29, pp. 300 - 312.
- BREWER, A.A. et M.J BROWNING [1982], "On the 'Employment' Decision of a Labour-Managed Firm", *Economica*, 49, pp. 141 - 146.
- COPELAND, T. A. et WESTON, J. F. [1988], *Financial Theory and Corporate Policy*, 3ième édition, Addison-Wesley Publishing Company.
- DAIGNEAULT, S. [1986], *Pomiculteur en incertitude*, Rapport de recherche présenté en vue de l'obtention du grade de maître es sciences, Université de Montréal, juillet 1986.
- ELLERMAN, D. P. [1986], "Horizon Problems and Property Rights in Labor-Managed Firms", *Journal of Comparative Economics*, 10(1), pp. 62 - 78.
- FRIEND, I. et M. BLUME [1975], "The Demand for Risky Assets", *American Economic Review*, Décembre, pp. 335 - 346.
- FURUBOTN, E. G. et S. PEJOVICH [1970], "Property Rights and the Behaviour of the Firm in a Socialist State: the Example of Yugoslavia", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 30, pp. 431 - 454.
- FURUBOTN, E. G. et S. PEJOVICH [1973], "Property Rights, Economic Decentralization and the Evolution of the Yugoslav Firm, 1965 - 72", *Journal of Law and Economics*, 16, pp. 275 - 302.

- HEY, J.D. [1979], *Uncertainty in Microeconomics*, New York University Press, New York, pp.126-134.
- HEY, J.D. [1981], "A Unified Theory of the Behaviour of Profit-Maximising, Labour-managed and Joint-Stock Firms Operating Under Uncertainty", *Economic Journal*, 91, pp. 364 - 374.
- HEY, J.D. et J. SUCKLING [1980], "On the Theory of the Competitive Labour-Managed Firm under Price Uncertainty: Comment", *Journal of Comparative Economics*, 4, pp. 338-341.
- IRELAND, N.J. et P.J. LAW [1982], *The Economics of Labour-Managed Enterprises*, CroomHelm, London et Canberra.
- ISHII, V. [1977], "On the Theory of the Competitive Firm under Price Uncertainty: a Note", *American Economic Review*, 67, pp. 768 -769.
- JENSEN, M. C. et W. H. MECKLING [1979], "Rights and Production Functions: An Application to Labour-Managed Firms and Codetermination", *Journal of Business*, 52 (4), pp. 469 - 506.
- Loi sur les coopératives*, Editeur Officiel du Québec, Québec, juillet 1990.
- MARKOWITZ, H. [1959], *Portfolio Selection*, Yale University Press, New Haven.
- MEADE, J. E. [1972], "The Theory of Labour-Managed Firms and of Profit-Sharing", *Economic Journal*, 82, pp. 402 - 428.
- MUZONDO, T.R. [1979], "On the Theory of the Competitive Labour-Managed Firm under Price Uncertainty", *Journal of Comparative Economics*, 3, pp. 127-144.
- MUZONDO, T.R. [1980], "On the Theory of the Competitive Labour-Managed Firm under Price Uncertainty: a Correction and Comment", *Journal of Comparative Economics*, 4, pp. 342-344.
- PRATT, J. W. [1964], "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, vol. 32, no. 1-2, pp. 122 - 136.
- Québec Coopératif*, Le Conseil de la Coopération du Québec, 1975.

- Rapport de la Commission des Principes de l'A.C.I., Alliance coopérative internationale, Vienne, 1966.*
- ROBINSON, J. [1967], "The Soviet Collective Farm as a Producer Cooperative: Comment", *American Economic Review*, 57, pp. 222 - 223.
- ROTHSCHILD, M. et J. STIGLITZ [1970], "Increasing Risk : A Definition", *Journal of Economic Theory*, 2, pp. 315 - 329
- SANDMO, A. [1971], "On the Theory of Competitive Firm under Price Uncertainty", *American Economic Review*, 61, pp. 65-73.
- STEINHERR, A. et J.- F. THISSE [1979], "Is There a Negatively-Sloped Supply Curve in the Labour-Managed Firm ?", *Economic Analysis and Workers' Management*, 13, pp. 23 - 33.
- SUCKLING J. [1974], "Employment Fiscal Policy and the Labour Managed Firm", *Pub. Fin.*, 29, 1, pp. 77-87.
- UVALIC, M. [1986], "The Investment Behavior of a Labour-Managed Firm", *Annals of Public and Cooperative Economy*, 57(1), pp. 11 - 34.
- VANEK, J. [1975], *Self Management: Economic Liberation of Man*, Penguin Book, Harmondsworth.
- WARD, B. [1958], "The Firm in Illyria: Market Syndicalism", *American Economic Review*, 48, pp. 566- 589.
- WILSON, Robert B. [1968], "The Theory of Syndicates", *Econometrica*, 36, pp. 119 - 132.

ANNEXE A: Principes coopératifs énoncés par l'Alliance coopérative internationale (A.C.I.)

Lors de son 23ième congrès tenu à Vienne du 5 au 8 septembre 1966, l'Alliance coopérative internationale (A.C.I.) a adopté les six principes coopératifs suivants: ¹

Premier principe: L'affiliation à une société coopérative devrait être volontaire, à la portée de toutes les personnes qui peuvent utiliser ses services et sont d'accord pour assumer les responsabilités inhérentes à la qualité de membre; elle ne devrait pas être l'objet de restrictions qui ne sont pas naturelles, ni d'aucune discrimination sociale, politique, raciale ou religieuse.

Deuxième principe: Les sociétés coopératives sont des organisations démocratiques. Leurs affaires devraient être administrées par les personnes élues ou nommées selon la procédure adoptée par les membres, devant lesquels elles sont responsables. Les membres des sociétés primaires devraient avoir les mêmes droits de vote (un membre: une voix) et de participation aux décisions touchant leur société. Dans toutes les autres sociétés, l'administration devrait être exercée sur une base démocratique, sous forme appropriée.

Troisième principe: Si un intérêt est payé sur le capital social, son taux devrait être strictement limité.

(1) Ces principes furent présentés par l'A.C.I. en page 40 d'un document intitulé "Rapport de la Commission des Principes Coopératifs de l'A.C.I." Le texte intégral de ces principes se retrouve également dans Québec Coopératif, Le Conseil de la Coopération du Québec, 1975, pp. 5 - 6.

Quatrième principe: Le surplus ou les épargnes éventuels résultant des opérations d'une société appartiennent aux membres de cette société et devraient être répartis de façon à éviter que l'un d'entre eux y gagne aux dépens des autres. Selon la décision des membres, cette répartition peut se faire comme suit: (a) en affectant une somme au développement des affaires de la coopérative; (b) en affectant une somme aux services collectifs; ou (c) en procédant à une répartition entre les membres, proportionnellement à leurs transactions avec la société.

Cinquième principe: Toutes les sociétés coopératives devraient prendre des mesures pour l'éducation de leurs membres, leurs dirigeants, leurs employés et du grand public, des principes et des méthodes de la Coopération, sur le plan économique et démocratique.

Sixième principe: Pour pouvoir servir au mieux les intérêts de ses membres et de la collectivité, chaque organisation coopérative devrait, de toutes les manières possibles, coopérer activement avec les autres coopératives, à l'échelle locale, nationale et internationale.

ANNEXE B: Traduction des principes coopératifs dans la Loi sur les coopératives du Québec¹

Les articles de la Loi sur les coopératives du Québec n'apparaissent pas ici en ordre croissant. Le classement des articles que nous avons privilégié est le suivant: présentation, primo, des articles qui exposent de façon générale l'ensemble des principes coopératifs et, secundo, des articles se rapportant spécifiquement à chacun des principes coopératifs.

La Loi sur les coopératives du Québec régit tous les types de coopératives y compris les coopératives de travailleurs. Seuls les articles 222 à 226 de la Loi sur les coopératives touchent exclusivement les coopératives de travailleurs. Aussi, pour ces articles, nous avons spécifié entre parenthèses "coopérative de travailleurs" à la suite du mot coopérative.

(a) Présentation générale de l'ensemble des principes coopératifs

Article 3: Une coopérative est une corporation regroupant des personnes qui ont des besoins économiques et sociaux communs et qui, en vue de les satisfaire, s'associent pour exploiter une entreprise conformément aux règles d'action coopérative.

Article 4: Les règles d'action coopérative sont les suivantes:

1^o l'adhésion d'un membre à la coopérative est subordonnée à l'utilisation des services offerts par la coopérative et à la possibilité pour la coopérative de les lui fournir;

(1) Chapitre C-67.2, Loi sur les coopérative, Editeur officiel du Québec, à jour au 10 juillet 1990.

2° le membre n'a droit qu'à une seule voix, quel que soit le nombre de parts sociales qu'il détient, et il ne peut voter par procuration;

3° le paiement d'un intérêt sur le capital social doit être limité;

4° la constitution d'une réserve qui ne peut être partagée entre les membres même en cas de liquidation;

5° l'affectation des trop-perçus ou excédents à la réserve et l'attribution de ristournes aux membres au prorata des opérations effectuées entre chacun d'eux et la coopérative;

6° la promotion de la coopération entre les membres et la coopérative et entre les coopératives;

7° l'éducation coopérative des membres, dirigeants et employés de la coopérative.

(b) Description détaillée de chacun des principes coopératifs

(i) Premier principe coopératif de l'A.C.I.

Article 51: Pour être membre d'une coopérative, une personne ou une société doit:

1° être en mesure de participer à l'objet pour lequel la coopérative est constituée;

2° faire une demande d'admission, sauf dans le cas d'un fondateur;

3° souscrire et payer le nombre minimum de parts sociales de 10\$ prévu par règlement;

4° s'engager à respecter les règlements de la coopérative;

5° être admise par le conseil d'administration, sauf dans le cas d'un fondateur.

Un mineur âgé d'au moins 16 ans peut être membre d'une coopérative et il est à cet égard réputé majeur.

Article 52: La coopérative peut, par règlement, prévoir une ou plusieurs catégories de membres auxiliaires et déterminer les conditions d'admission de ces membres, ainsi que leurs droits et obligations. Toutefois, une personne ou une société ne peut être admise comme membre auxiliaire si elle n'est pas en mesure de participer à l'objet pour lequel la coopérative est constituée.

Ces membres n'ont pas droit de vote et ne sont éligibles à aucune fonction.

Article 224.1: La coopérative (coopérative de travailleurs) peut, par règlement, établir des conditions supplémentaires d'admission, d'exclusion ou de suspension des membres.

Article 224.2: La coopérative (coopérative de travailleurs) doit soumettre toute personne acceptée comme membre à une période d'essai d'au plus un an et à un cours de formation technique et coopérative; pendant cette période d'essai, cette personne est un membre auxiliaire.

(ii) Deuxième principe coopératif de l'A.C.I.

Article 63: Les membres de la coopérative, qu'ils soient convoqués en assemblée annuelle ou en assemblée spéciale, en constitue l'assemblée générale.

Article 68: Un membre n'a droit qu'à une seule voix quel que soit le nombre de parts sociales dont il est titulaire.

Article 69: Un membre peut se faire représenter par son conjoint, sauf si celui-ci est déjà membre.

Article 71: Les décisions sont prises à la majorité des voix exprimées par les membres ou représentants présents.

Article 223.2 Le conseil d'administration de la coopérative (coopérative de travailleurs) est composé d'au moins trois et d'au plus quinze administrateurs.

Article 81: Peut être administrateur tout membre de la coopérative ou tout représentant d'une corporation ou d'une société qui en est membre.

Peut également être administrateur, le représentant d'une caisse ou d'une fédération de caisses régies par la Loi sur les caisses d'épargne et de crédit (chapitre C-4) et le représentant de la fédération à laquelle est affiliée la coopérative si la caisse, la fédération de caisses ou la fédération constitue un groupe aux fins de l'articles 83.

Article 83: Pour la formation du conseil d'administration, la coopérative peut, par règlement, diviser les membres en groupes ou son territoire en secteurs ou encore en groupes et en secteurs et attribuer à chacun de ces groupes et secteurs le droit d'élire un certain nombre d'administrateurs.

Article 89: Le conseil d'administration administre les affaires de la coopérative.

Toutefois le conseil d'administration ne peut nantir, hypothéquer ou autrement donner en garantie les biens de la coopérative ou les biens livrés à la coopérative par les membres sans y être autorisé par un règlement adopté aux deux tiers des voix exprimées par les membres ou représentants présents à une assemblée générale.

Il ne peut également exercer tout autre pouvoir que déterminent les règlements sans y être autorisé par l'assemblée générale.

Article 90: Le conseil d'administration doit notamment:

1^o engager un directeur général ou gérant et le convoquer à ses réunions;

2^o assurer la coopérative contre les risques d'incendie, de vol, de responsabilité publique et patronal et de détournement de la part des dirigeants, préposés ou employés;

3^o désigner les personnes autorisées à signer au nom de la coopérative tout contrat ou autre document;

4^o lors de l'assemblée annuelle, rendre compte de son mandat et présenter le rapport annuel;

5^o faciliter le travail du vérificateur;

6^o encourager l'éducation coopérative des membres, dirigeants et employés de la coopérative;

7^o favoriser la coopération entre les membres et la coopérative et entre les coopératives;

8^o fournir au ministre, si ce dernier en fait la demande, une copie des règlements, ainsi que les renseignements et documents qu'il pourrait requérir relativement à l'application du présent titre.

Article 122: Les règlements de la coopérative sont adoptés par l'assemblée générale.

Article 224: La fonction de directeur général ou gérant est compatible avec la qualité d'administrateur.

Article 61: Si une coopérative compte moins de 25 membres, les membres peuvent pour une durée d'un an convenir de ne pas élire d'administrateurs.

La convention doit être faite par écrit et recueillir le consentement d'au moins 90% des membres.

Copie de cette convention doit être transmise au ministre.

Article 62: Les membres administrent alors les affaires de la coopérative comme s'ils en étaient les administrateurs; il exercent les droits des administrateurs et assument leurs obligations.

Ils ne sont pas tenus d'engager un directeur général ou un gérant.

(iii) Troisième principe coopératif de l'A.C.I.

Article 37: Le capital social d'une coopérative est composé de parts sociales et de parts privilégiées.

Article 38: Une coopérative ne peut rembourser ou racheter une part:

1^o si elle est insolvable ou le deviendrait par suite de ce remboursement ou de ce rachat;

2^o si le conseil d'administration juge que le remboursement ou le rachat serait susceptible de porter atteinte à la stabilité financière de la coopérative.

Article 39: Les parts sociales sont nominatives. Elles ne peuvent être transférées que selon les conditions et modalités prévues par règlement.

Article 40: Chaque membre doit détenir le nombre minimum de parts sociales prévu par règlement. Ces parts sont désignées comme parts sociales de qualification.

Article 42: Aucun intérêt n'est payable sur les parts sociales.

Article 48: Les parts privilégiée ne peuvent conférer à leur titulaire le droit de se faire rembourser ou racheter leurs parts avant l'expiration d'un délai de trois ans de leur émission.

L'intérêt qui peut être payé sur ces parts doit être limité par règlement.

Article 49: Les parts privilégiées ne peuvent conférer à leur titulaire le droit d'être convoqué à une assemblée générale, ni d'assister ou de voter à une telle assemblée, ni d'être éligible à une fonction au sein de la coopérative.

(iv) Quatrième principe coopératif de l'A.C.I.

Article 143: Lors de l'assemblée annuelle, les membres de la coopérative affectent, après avoir pris connaissance des recommandations du conseil d'administration et en se basant sur l'état des résultats de l'exercice financier précédent, le montant des trop-perçus ou excédents:

1^o à la réserve;

2^o à l'attribution de ristournes aux personnes ou aux sociétés qui ont été membres de la coopérative au cours de l'exercice financier;

3^o à l'attribution de ristournes aux personnes ou aux sociétés qui ont été membres auxiliaires de la coopérative au cours de l'exercice financier, lorsque les membres le décident et dans la proportion qu'ils déterminent.

Article 146: Les membres doivent affecter à la réserve au moins 20% des trop-perçus ou excédents tant que celle-ci n'est pas au moins égale à 25% des dettes de la coopérative.

Article 147: La réserve ne peut être partagée entre les membres ou les membres auxiliaires ni être entamée par l'attribution d'une ristourne.

Article 150: La ristourne n'est pas le partage d'un profit mais une remise d'une partie du paiement fait en trop par le membre ou par le membre auxiliaire, le cas échéant, ou un rajustement du prix des produits ou des services qu'un membre ou un membre auxiliaire, le cas échéant, a livrés ou rendus, selon le cas, à sa coopérative.

Article 226: Les ristournes sont calculées en fonction du volume de travail que le membre effectue pour sa coopérative (coopérative de travailleurs) ou pour la compagnie dont sa coopérative est actionnaire.

Ce volume peut être mesuré par le revenu du membre ou par le nombre d'heures de travail ou selon toute autre mesure déterminée par règlement.

Article 102: Les administrateurs n'ont droit à aucune rémunération.

Ils ont toutefois droit au remboursement des frais justifiables faits par eux dans l'exercice de leurs fonctions et ils peuvent recevoir une allocation de présence fixée par l'assemblée annuelle.

(v) Principe coopératif de la dévolution désintéressée de l'actif net

Article 185: Le liquidateur paie d'abord les dettes de la coopérative ainsi que les frais de liquidation et, ensuite, les sommes versées sur les parts suivant la priorité établie par règlement.

Après ces paiements, le solde de l'actif est dévolu à une coopérative ou à une fédération, y compris la Coopérative fédérée de Québec, désignée par le ministre après avoir pris avis du Conseil de la Coopération du Québec.

ANNEXE C: Développements mathématiques

(1)

(i) (2.1) $\text{Max}_N \quad U [y^{ce}] \quad \text{où} \quad y^{ce} = [p^{ce} F(N, K) - rK]/N$

C.P.O. $U' [y^{ce}] [dy^{ce}/dN] = 0$

$U' [y^{ce}] > 0$

C.P.O. $dy^{ce}/dN = 0$

(ii) (2.2) $\text{Max}_N \quad y^{ce}$

C.P.O. $dy^{ce}/dN = 0$

(iii)

C.P.O. $\text{Max}_N \quad U [y^{ce}] \equiv \text{C.P.O. de} \quad \text{Max}_N \quad y^{ce}$

(2.1) $\text{Max}_N \quad U [y^{ce}] \equiv \quad (2.2) \quad \text{Max}_N \quad y^{ce}$

(2)

(2.7) $\text{Max}_N E [U(y)] \quad \text{où} \quad y = (PF(N, K) - rK)/N$

est équivalent à:

$\text{Max } V = E \{ U [(PF(N, K) - rK)/N] \}$

C.P.O. $dV/dN = 0$

$dV/dN = \quad E \{ U' (y) [(PF_N(N, K) N - (PF(N, K) - rK)) (1/N^2)] \}$
 $\quad E \{ U' (y) [(PF_N(N, K))(1/N) - (PF(N, K) - rK) (1/N) (1/N)] \}$
 $\quad E \{ U' (y) (PF_N(N, K) - y) (1/N) \} \quad \text{puisque } y = (PF(N, K) - rK)/N$

C.P.O. $E \{ U' (y) (PF_N(N, K) - y) (1/N) \} = 0$

(2.8) $E \{ U' (y) (PF_N(N, K) - y) \} = 0$

C.D.O. $d^2V/d^2N < 0$

$d^2V/d^2N \quad = \quad d[dV/dN]/dN$
 $\quad = \quad d \{ E \{ U' (y) (PF_N(N, K) - y) (1/N) \} \} / dN$
 $\quad = \quad E \{ d[U' (y) (1/N)]/dN (PF_N - y) + U' (y) (1/N) d(PF_N - y)/dN \}$

$$\begin{aligned} d[U'(y)(1/N)]/dN &= U''(y) (PF_N - y) (1/N) (1/N) + U'(y) (-1/N^2) \\ &= U''(y) (PF_N - y) (1/N^2) - U'(y) (1/N^2) \end{aligned}$$

$$d(PF_N - y)/dN = PF_{NN} - (PF_N - y) (1/N)$$

$$\begin{aligned} dV^2/d^2N &= E \{ [U''(y) (PF_N - y) (1/N^2) - U'(y) (1/N^2)] (PF_N - y) \\ &\quad + U'(y) (1/N) [PF_{NN} - (PF_N - y) (1/N)] \} \\ &= E [U''(y) (PF_N - y) (1/N^2) - U'(y) (1/N^2)] (PF_N - y) \\ &\quad + U'(y) (1/N) PF_{NN} - U'(y) (1/N) (PF_N - y) (1/N) \\ &= E [U''(y) (PF_N - y) (1/N^2) - (1/N) U'(y) (PF_N - y) (1/N) \\ &\quad + U'(y) (1/N) PF_{NN} - (1/N) U'(y) (PF_N - y) (1/N)] \\ &= E [U''(y) (PF_N - y) (1/N^2) + U'(y) (1/N) PF_{NN} - 2 (1/N) U'(y) (PF_N - y) (1/N)] \\ &= E [U''(y) (PF_N - y) (1/N^2)] + E [U'(y) (1/N) PF_{NN}] - 2 (1/N) E [U'(y) (PF_N - y) (1/N)] \end{aligned}$$

Or, $E [U'(y) (PF_N(N, K) - y) (1/N)] = 0$ par la C.P.O.

$$\begin{aligned} dV^2/d^2N &= E [U''(y) (PF_N - y) (1/N^2)] + E [U'(y) (1/N) PF_{NN}] \\ &= (1/N) E [U''(y) (PF_N - y) (1/N) + U'(y) PF_{NN}] \end{aligned}$$

C.D.O. $dV^2/d^2N < 0$
 $(1/N) E [U''(y) (PF_N - y) (1/N) + U'(y) PF_{NN}] < 0$
 (2.9) $H = E [U''(y) (PF_N - y) (1/N) + U'(y) PF_{NN}] < 0$

(3)

(i)

$$U'(y) \quad \text{où } y = [PF(N, K) - rK] / N$$

Remplaçons P par (E(P) + e)

$$U'(y) \quad \text{où } y = [(E(P) + e) F(N, K) - rK] / N$$

Différentions par rapport à e:

$$(2.14) \quad dU'(y)/de = U''(y) F(N, K) - rK / N$$

(ii)

$$A = [PF_N(N, K) - y] \quad \text{où } y = [PF(N, K) - rK] / N$$

Remplaçons P par (E(P) + e)

$$A = [(E(P) + e) F_N(N, K) - y] \quad \text{où } y = [(E(P) + e) F(N, K) - rK] / N$$

Différentions par rapport à e:

$$dA/de = F_N(N, K) - [F(N, K) - rK] / N$$

$$(2.15) \quad d[PF_N(N, K) - \gamma]/de = F_N(N, K) - [F(N, K) - rK] / N$$

(4)

$$\text{Max}_N U(y^{ce}) \quad \text{où} \quad y^{ce} = [P^{ce}F(N, K) - rK] / N$$

$$\text{C.P.O.} \quad d[U(y^{ce})]/dN = 0$$

$$[P^{ce}F_N(N, K) N - (P^{ce}F(N, K) - rK)] / N^2 = 0$$

$$[P^{ce}F_N(N, K) - (P^{ce}F(N, K) - rK)/N] / N = 0$$

$$[P^{ce}F_N(N, K) - y^{ce}] / N = 0$$

$$[P^{ce}F_N(N, K) - y^{ce}] = 0$$

(5)

$$\text{C.P.O. (2.8)} \quad E[U'(y) (PF_N(N, K) - \gamma)] = 0$$

(i) Différentielle de $E[U'(y) (PF_N(N, K) - \gamma)]$ par rapport N:

$$E[U''(y) (PF_N(N, K) - \gamma)^2 / N] + U'(y) [PF_{NN}(N, K) - (PF_N(N, K) - \gamma) / N] dN$$

$$= \{ E[U''(y) (PF_N(N, K) - \gamma)^2 / N] + U'(y) (PF_{NN}(N, K)) - E[U'(y) (PF_N(N, K) - \gamma) / N] \} dN$$

$$\text{Or} \quad E[U'(y) (PF_N(N, K) - \gamma) / N] = 0 \quad \text{par la C.P.O.}$$

$$E[U''(y) (PF_N(N, K) - \gamma)^2 / N] + U'(y) (PF_{NN}(N, K)) dN$$

$$\text{Or,} \quad H = E[(1/N) U''(y) (PF_N(N, K) - \gamma)^2 + U'(y) PF_{NN}(N, K)] \quad \text{par la C.D.O.}$$

$$H dN$$

(ii) Différentielle de la C.P.O. par rapport à N et rK:

$$E(H dN + [U''(y) (-1/N) (PF_N(N, K) - \gamma) - U'(y) (-1/N)] drK) = 0$$

$$E(H) dN + E[U''(y) (-1/N) (PF_N(N, K) - \gamma) - U'(y) (-1/N)] drK = 0$$

$$E(H) dN - E[U''(y) (1/N) (PF_N(N, K) - \gamma) - U'(y) (1/N)] drK = 0$$

$$dN/drK = (1/H) E[U''(y) (1/N) (PF_N(N, K) - \gamma) - U'(y) (1/N)]$$

$$= (1/H) (1/N) E[U''(y) (PF_N(N, K) - \gamma)] - E[U'(y)]$$

$$= \{ E[U''(y) (PF_N(N, K) - \gamma)] - E[U'(y)] \} / NH$$

$$(3.1) \quad dN/d(rK) = \{ E[U''(y) (PF_N(N, K) - \gamma)] - E[U'(y)] \} / NH$$

(6)

$$(2.8) \quad E [U'(\gamma) (P F_N(N, K) - \gamma)] = 0 \quad \text{où} \quad \gamma = [PF(N, K) - rK] / N$$

Substitution de P par (E(P) + u)

$$E [U'(\gamma) ((E(P) + u) F_N(N, K) - \gamma)] = 0 \quad \text{où} \quad \gamma = [(E(P) + u)F(N, K) - rK] / N$$

Différentielle totale par rapport à N et à E(P):

$$E [H dN + (U''(\gamma) (F(N, K)/N) ((E(P) + u) F_N(N, K) - \gamma) + U'(\gamma) (F_N(N, K) - F(N, K)/N)] d(E(P)) = 0$$

$$E [H dN + (U''(\gamma) (F(N, K)/N) (PF_N(N, K) - \gamma) + U'(\gamma) (F_N(N, K) - F(N, K)/N)] d(E(P)) = 0$$

$$H dN + ((F(N, K)/N) E [U''(\gamma) (PF_N(N, K) - \gamma)] + E [U'(\gamma) (F_N(N, K) - F(N, K)/N)]) d(E(P)) = 0$$

Réarrangement des termes:

$$dN/d(E(P)) = (1/H) \{ - (F(N, K)/N) E [U''(\gamma) (PF_N(N, K) - \gamma)] - E [U'(\gamma) (F_N(N, K) - F(N, K)/N)] \}$$

$$(3.8) \quad dN/d(E(P)) = - (F(N, K)/NH) E [(PF_N(N, K) - \gamma) (U''(\gamma))] \\ + (1/H) E [(U'(\gamma)) (F(N, K)/N - F_N(N, K))]$$

(7)

Nous utiliserons une définition légèrement différente de celle de Ishii (1977) pour l'accroissement du risque à la Sandmo:

Ishii (1977): $P^T = aP + b$ où $a > 1$ afin que $VAR(P^T) > VAR(P)$
 $b < 0$ afin que $E(P^T) = E(P)$
 et a et b varient en même temps de telle sorte que $E(P^T) = E(P)$.

Notre définition: $P^T = a(P - E(P)) + E(P)$ où $a > 0$.

Max $E [U(\gamma)]$ où $\gamma = P^T q - k(q)$
 q

C.P.O. $E [U'(\gamma) (P^T - k'(q))] = 0$

C.D.O. $H < 0$

Lemme 10: $E(P^T) - k'(q) \geq 0$

Preuve du Lemme 10:

C.P.O. $E [U'(\gamma) (P^T - k'(q))] = 0$

$$E [U'(\gamma) P^T - U'(\gamma) k'(q)] = 0$$

$$E [U'(\gamma) P^T] = E [U'(\gamma) k'(q)]$$

$$E [U'(\gamma) P^T] - E [U'(\gamma) E(P^T)] = E [U'(\gamma) k'(q)] - E [U'(\gamma) E(P^T)]$$

$$E [U'(\gamma) (P^T - E(P^T))] = E [U'(\gamma) (k'(q) - E(P^T))]$$

Signe de $E[U'(y) (P^T - E(P^T))] = \text{Signe de } E[U'(y) (k'(q) - E(P^T))]$

Signe de $E[U'(y) (P^T - E(P^T))]$:

$$E(y) = E(P^T) q - k(q)$$

$$y = E(y) + [P^T - E(P^T)] q$$

$$y \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} E(y) \text{ si } [P^T - E(P^T)] \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$$

$$U'(y) \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} U'(E(y)) \text{ si } [P^T - E(P^T)] \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$$

$$U'(y) (P^T - E(P^T)) \leq U'(E(y)) (P^T - E(P^T)) \text{ si } [P^T - E(P^T)] \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$$

$$E[U'(y) (P^T - E(P^T))] \leq E[U'(E(y)) (P^T - E(P^T))] \text{ si } [P^T - E(P^T)] \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$$

$$E[U'(y) (P^T - E(P^T))] \leq U'(E(y)) E[P^T - E(P^T)]$$

Or, $E[P^T - E(P^T)] = E(P^T) - E(P^T) = 0$, donc:

$$E[U'(y) (P^T - E(P^T))] \leq 0$$

Par conséquent $E[U'(y) (k'(q) - E(P^T))] \leq 0$

$$E[U'(y) (k'(q) - E(P^T))] \leq 0$$

$$E[U'(y)] [k'(q) - E(P^T)] \leq 0$$

Puisque $E[U'(y)] > 0$ alors $[k'(q) - E(P^T)] \leq 0$

C'est-à-dire: $E(P^T) - k'(q) \geq 0$

C.Q.F.D.

Lemme 11: $E[(P^T - k'(q)) U''(y)] \geq 0$ si $d(AAR)/dy < 0$

Preuve du Lemme 11.

$$dy^{\#}/dq = P^T - k'(q) = 0$$

P = apport marginal de Q/N

$k'(q)$ = coût marginal de Q/N

$$y = y^{\#} \text{ si } dy/dq = P^T - k'(q) = 0$$

$$y > y^{\#} \text{ si } dy/dq = P^T - k'(q) > 0$$

$$y < y^{\#} \text{ si } dy/dq = P^T - k'(q) < 0$$

En vertu de l'aversion absolue au risque décroissante nous avons:

$$(i) \quad -U''(y)/U'(y) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} AAR(y^{\#}) \text{ si } P^T - k'(q) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

Puisque $U'(y) > 0$, nous pouvons écrire:

$$(ii) \quad -U'(y) (P^T - k'(q)) < 0 \quad \text{si} \quad P^T - k'(q) > 0$$

$$\qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad 0$$

$$\qquad \qquad \qquad > \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad < \qquad \qquad \qquad <$$

Multiplications les deux côtés de (i) par le côté gauche de (ii):

$$[-U''(y)/U'(y)] [-U'(y) (P^T - k'(q))] \geq AAR(y^h) [-U'(y) (P^T - k'(q))]$$

pour $P^T - k'(q) > 0$

$$\qquad \qquad \qquad =$$

$$\qquad \qquad \qquad <$$

$$[U''(y) (P^T - k'(q))] \geq -AAR(y^h) [U'(y) (P^T - k'(q))]$$

$$E [U''(y) (P^T - k'(q))] \geq -AAR(y^h) E [U'(y) (P^T - k'(q))]$$

Or, $E [U'(y) (P^T - k'(q))] = 0$ par la C.P.O., donc:

$$E [U''(y) (P^T - k'(q))] \geq 0$$

C.Q.F.D.

Différentielle totale de la C.P.O. par rapport à q et a :

$$C.P.O. \quad E[U'(y) (P^T - k'(q))] = 0 \quad \text{où} \quad y = P^T q - k(q)$$

Remplaçons P^T par $[a (P - E(P)) + E(P)]$ dans la C.P.O.:

$$C.P.O. \quad E[U'(y) ([a (P - E(P)) + E(P)] - k'(q))] = 0 \quad \text{où} \quad y = [a (P - E(P)) + E(P)] q - k(q)$$

$$E \{ H dq + [U''(y) (P - E(P)) q (P^T - k'(q)) + U'(y) (P - E(P))] da \} = 0$$

$$H dq + E [U''(y) (P - E(P)) q (P^T - k'(q)) + U'(y) (P - E(P))] da = 0$$

$$dq/da = - (1/H) \{ E [U''(y) (P - E(P)) q (P^T - k'(q))] + E[U'(y) (P - E(P))] \}$$

$$\text{Signe } (dq/da) = \text{signe } \{ E [U''(y) (P - E(P)) q (P^T - k'(q))] + E[U'(y) (P - E(P))] \}$$

Signe de $E [U''(y) (P - E(P)) q (P^T - k'(q))]$:

$$E [U''(y) (P - E(P)) q (P - k'(q))] = q E [U''(y) (P - E(P)) (P - k'(q))]$$

$$E [U''(y) (P - E(P)) (P - k'(q))] = E [U''(y) (P - k'(q) + k'(q) - E(P)) (P - k'(q))]$$

$$= E [U''(y) (P - k'(q))^2 + U''(y) (k'(q) - E(P)) (P - k'(q))]$$

$$= E [U''(y) (P - k'(q))^2] + E[U''(y) (k'(q) - E(P)) (P - k'(q))]$$

$$= E [U''(y) (P - k'(q))^2] + (k'(q) - E(P)) E[U''(y) (P - k'(q))]$$

$$= E [U''(y) (P - k'(q))^2] - (E(P) - k'(q)) E[U''(y) (P - k'(q))]$$

$$E [U''(y) (P - k'(q))^2] < 0 \quad \text{puisque:} \quad U''(y) < 0 \quad \text{et} \quad (P - k'(q))^2 > 0$$

- $(E(P) - k'(q)) E[U''(y) (P - k'(q))] \leq 0$ puisque:

$$\begin{aligned} (E(P) - k'(q)) &> 0 \text{ par le Lemme 10} \\ E[U''(y) (P - k'(q))] &\geq 0 \text{ par le Lemme 11} \end{aligned}$$

Donc $E[U''(y) (P - E(P)) (P - k'(q))] \leq 0$

Signe de $E[U'(y) (P - E(P))]$:

$$\begin{aligned} E[U'(y) (P - E(P))] &= E[U'(y)] E[P - E(P)] + \text{COV}[U'(y), P - E(P)] \\ E[U'(y) (P - E(P))] &= \text{COV}[U'(y), P - E(P)] \text{ puisque } E[P - E(P)] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{COV}[U'(y), P - E(P)] = \text{COV}[U'(y), P]$$

$d[U'(y)]dP = U''(y) (dq) < 0$ puisque $U''(y) < 0$ en vertu de l'aversion au risque

Donc, $\text{COV}[U'(y), P] < 0$

$\text{COV}[U'(y), P - E(P)] < 0$

$E[U'(y) (P - E(P))] < 0$

$E[U''(y) (P - E(P)) q (P^T - k'(q))] + E[U'(y) (P - E(P))] < 0$
 puisque $E[U''(y) (P - E(P)) (P - k'(q))] \leq 0$ et $E[U'(y) (P - E(P))] < 0$

Donc,

$dq/da < 0$

Or, $dN/dq < 0$ et donc:

$dN/da > 0$

(8)

$$(3.18) \quad \text{Max}_N E[U(y^i)] \quad \text{où} \quad \begin{aligned} y^i &= (1-b)y \\ &= (1-b) [(PF(N, K) - rK)/N] \end{aligned}$$

est équivalent à:

$$\text{Max } V = E \{ U [(1-b) (PF(N, K) - rK) (1/N)] \}$$

C.P.O. $dV/dN = 0$

$$\begin{aligned} dV/dN = & E[U'(y^i) (1-b) (PF_N(N, K) (1/N) - (1/N^2) (PF(N, K) - rK))] \\ & E[U'(y^i) (1-b) (PF_N(N, K) - y) (1/N)] \quad \text{puisque } y = (PF(N, K) - rK)/N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C.P.O. } E[U'(y^i) (1-b) (PF_N(N, K) - y) (1/N)] &= 0 \\ (1-b) (1/N) E[U'(y^i) (PF_N(N, K) - y)] &= 0 \end{aligned}$$

$$(3.19) \quad E [U'(\gamma) (PF_N(N, K) - \gamma)] = 0$$

$$\text{C.D.O.} \quad dV^2/d^2N < 0$$

$$\begin{aligned} dV^2/d^2N &= d[dV/dN]/dN \\ &= d \{ E [U'(\gamma) (1-b) (PF_N(N, K) - \gamma) (1/N)] \} / dN \\ &= E \{ d[U'(\gamma) (1/N) (1-b)] / dN (PF_N - \gamma) + U'(\gamma) (1/N) (1-b) d(PF_N - \gamma) / dN \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d[U'(\gamma) (1/N) (1-b)] / dN &= U''(\gamma) (1-b) (PF_N - \gamma) (1/N) (1/N) (1-b) + U'(\gamma) (1-b) (-1/N^2) \\ &= U''(\gamma) (PF_N - \gamma) (1/N^2) (1-b)^2 - U'(\gamma) (1-b) (1/N^2) \end{aligned}$$

$$d(PF_N - \gamma) / dN = PF_{NN} - (PF_N - \gamma) (1/N)$$

$$\begin{aligned} dV^2/d^2N &= E \{ [U''(\gamma) (PF_N - \gamma) (1/N^2) (1-b)^2 - U'(\gamma) (1-b) (1/N^2)] (PF_N - \gamma) \\ &\quad + U'(\gamma) (1/N) (1-b) [PF_{NN} - (PF_N - \gamma) (1/N)] \} \\ &= E \{ [U''(\gamma) (PF_N - \gamma)^2 (1/N^2) (1-b)^2 - U'(\gamma) (PF_N - \gamma) (1-b) (1/N^2)] \\ &\quad + U'(\gamma) (1/N) (1-b) [PF_{NN} - (PF_N - \gamma) (1/N)] \} \\ &= E \{ [U''(\gamma) (PF_N - \gamma)^2 (1/N^2) (1-b)^2 - U'(\gamma) (PF_N - \gamma) (1-b) (1/N^2)] \\ &\quad + U'(\gamma) (1/N) (1-b) PF_{NN} - U'(\gamma) (1/N) (1-b) (PF_N - \gamma) (1/N) \} \\ &= E \{ [U''(\gamma) (PF_N - \gamma)^2 (1/N^2) (1-b)^2 - U'(\gamma) (PF_N - \gamma) (1-b) (1/N^2)] \\ &\quad + U'(\gamma) (1/N) (1-b) PF_{NN} - U'(\gamma) (PF_N - \gamma) (1-b) (1/N^2) \} \\ &= E \{ [U''(\gamma) (PF_N - \gamma)^2 (1/N^2) (1-b)^2 + U'(\gamma) (1/N) (1-b) PF_{NN} \\ &\quad - 2 U'(\gamma) (PF_N - \gamma) (1-b) (1/N^2)] \} \\ &= E [U''(\gamma) (PF_N - \gamma)^2 (1/N^2) (1-b)^2 + U'(\gamma) (1/N) (1-b) PF_{NN}] \\ &\quad - 2 (1-b) (1/N^2) E [U'(\gamma) (PF_N - \gamma)] \end{aligned}$$

$$\text{Or,} \quad E [U'(\gamma) (PF_N(N, K) - \gamma)] = 0 \quad \text{par la C.P.O.}$$

$$\begin{aligned} dV^2/d^2N &= E [U''(\gamma) (PF_N - \gamma)^2 (1/N^2) (1-b)^2 + U'(\gamma) (1/N) (1-b) PF_{NN}] \\ &= (1/N) (1-b) E [U''(\gamma) (PF_N - \gamma)^2 (1/N) (1-b) + U'(\gamma) PF_{NN}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C.D.O.} \quad dV^2/d^2N &< 0 \\ (1/N) (1-b) E [U''(\gamma) (PF_N - \gamma)^2 (1/N) (1-b) + U'(\gamma) PF_{NN}] &< 0 \\ E [U''(\gamma) (PF_N - \gamma)^2 (1/N) (1-b) + U'(\gamma) PF_{NN}] &< 0 \end{aligned}$$

$$(3.20) \quad H^i = E [(1/N) (PF_N(N, K) - \gamma)^2 (1-b) U''(\gamma) + U'(\gamma) PF_{NN}(N, K)] < 0$$

(9)

$$(3.19) \text{ C.P.O. } E \left[\frac{U'(y^d)}{N} (PF_N(N, K) - y) \right] = 0 \quad \text{où} \quad y^d = (1-b) [(PF(N, K) - rK)/N]$$

$$\frac{d}{dN} E \left[\frac{U'(y^d)}{N} (PF_N(N, K) - y) \right] = \frac{E \left\{ U''(y^d) (1-b) [PF_N(N, K) - y]^2 (1/N) + U'(y^d) PF_{NN} \right\}}{H^i}$$

(ii) Différentielle de la C.P.O. par rapport à N et à b:

$$E \left[H^i dN - U''(y^d) (y) (PF_N(N, K) - y) db \right] = 0$$

$$dN/db = E \left[U''(y^d) (y) (PF_N(N, K) - y) \right] / H^i$$

$$(3.21) \quad dN/db = E \left[(PF_N(N, K) - y) y (U''(y^d)) \right] / H^i$$

(10)

$$(3.36) \text{ C.P.O. } E \left[U'(y^d) (PF_N(N, K) - y) \right] = 0$$

Différentielle de la C.P.O. par rapport à N et d:

$$E \left[H^d dN + U''(y^d) (-1) (PF_N(N, K) - y) d(d) \right] = 0$$

$$(3.38) \quad dN/d(d) = (1/H^d) E \left[U''(y^d) (PF_N(N, K) - y) \right]$$

(11)

Définissons $y^{#d}$ comme étant y^d lorsque $y = PF_N(N, K)$.

En vertu de l'aversion absolue au risque décroissante, nous avons:

$$(i) \quad \begin{array}{ll} -U''(y^d)/U'(y^d) > R_A(y^{#d}) & \text{si } y < PF_N(N, K) \text{ i.e. } y^d < y^{#d} \\ < R_A(y^{#d}) & \text{si } y > PF_N(N, K) \text{ i.e. } y^d > y^{#d} \end{array}$$

Puisque $U'(y^d) > 0$, il est clair que:

$$(ii) \quad \begin{array}{ll} -U'(y^d)(PF_N(N, K) - y) < 0 & \text{si } y < PF_N(N, K) \\ > 0 & \text{si } y > PF_N(N, K) \end{array}$$

Multiplions les deux côtés de l'équation (i) par le côté gauche de l'équation (ii):

$$(iii) \quad \begin{array}{l} (U''(y^d)) (PF_N(N, K) - y) < -R_A(y^{#d}) [U'(y^d)(PF_N(N, K) - y)] \\ \text{pour } y > PF_N(N, K) \\ < PF_N(N, K) \end{array}$$

Et prenons l'espérance mathématique des deux côtés de l'équation (iii):

$$(iv) \quad E [(U''(\eta^d)) (PF_N(N, K) - \gamma)] < -R_A(\eta^d) E [U'(\eta^d) (PF_N(N, K) - \gamma)]$$

Par la condition de premier ordre ($E [U'(\eta^d) (PF_N(N, K) - \gamma)] = 0$), le côté droit de l'équation (iv) est nul et donc:

$$(v) \quad E [(U''(\eta^d)) (PF_N(N, K) - \gamma)] < 0.$$

(12)

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & E[U(\eta^d)] \\ N & \text{où} \quad \eta^d = PF_N(N, K) - w^d N - rK \\ & w^d = w + d \end{array}$$

$$\text{est équivalent à:} \quad \text{Max}_N V = E[U(PF_N(N, K) - (w + d)N - rK)]$$

$$\text{C.P.O.} \quad dV/dN = E [U'(\eta^d) (PF_N(N, K) - (w + d)N)] = 0$$

Différentielle totale de la C.P.O. par rapport à N et à d:

$$H^d dN - E[U''(\eta^d) (-N) (PF_N(N, K) - (w + d)N) + U'(\eta^d) (-1)] d(d) = 0 \quad \text{où } H^d = d^2V/d^2N$$

$$H^d dN + E[U''(\eta^d) (N) (PF_N(N, K) - (w + d)N) + U'(\eta^d)] d(d) = 0 \quad \text{où } H^d = d^2V/d^2N$$

$$dN/d(d) = - (1/H^d) E[U''(\eta^d) (N) (PF_N(N, K) - w^d N) + U'(\eta^d)]$$

$$\text{Signe } dN/d(d) = \text{Signe } E[U''(\eta^d) (N) (PF_N(N, K) - w^d N) + U'(\eta^d)] \quad \text{puisque } H^d < 0 \text{ par la C.D.O.}$$

$$\text{Signe de } E[U''(\eta^d) (N) (PF_N(N, K) - w^d N):$$

$$\text{Signe de } E[U''(\eta^d) (N) (PF_N(N, K) - w^d N)] = \text{Signe de } E[U''(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d N)]$$

$$\text{Signe de } E[U''(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d N)] = ?$$

$$\begin{array}{ll} PF_N(N, K) & > w^d \\ & = \\ & < \end{array}$$

$$\eta^{d\#} \text{ lorsque } PF_N(N, K) = w^d, \text{ i.e. } \eta^{d\#} = w^d - w^d N - rK$$

$$\eta^d = PF_N(N, K) - w^d N - rK$$

$$\begin{array}{ll} \eta^d < & \eta^{d\#} \text{ lorsque } PF_N(N, K) < w^d \\ = & \eta^{d\#} \text{ lorsque } PF_N(N, K) = w^d \\ > & \eta^{d\#} \text{ lorsque } PF_N(N, K) > w^d \end{array}$$

En vertu de l'aversion absolue au risque décroissante:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & -U''(\eta^d)/U'(\eta^d) < ARR(\eta^{d\#}) & \text{si} & \eta^d > \eta^{d\#} & \text{i.e. si } PF_N(N, K) > w^d \\
 & -U''(\eta^d)/U'(\eta^d) = ARR(\eta^{d\#}) & \text{si} & \eta^d = \eta^{d\#} & \text{i.e. si } PF_N(N, K) = w^d \\
 & -U''(\eta^d)/U'(\eta^d) > ARR(\eta^{d\#}) & \text{si} & \eta^d < \eta^{d\#} & \text{i.e. si } PF_N(N, K) < w^d
 \end{aligned}$$

Puisque $U'(\eta^d) > 0$:

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad & -U'(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d) > 0 & \text{si} & \eta^d > \eta^{d\#} & \text{i.e. si } PF_N(N, K) > w^d \\
 & = 0 & \text{si} & \eta^d = \eta^{d\#} & \text{i.e. si } PF_N(N, K) = w^d \\
 & < 0 & \text{si} & \eta^d < \eta^{d\#} & \text{i.e. si } PF_N(N, K) < w^d
 \end{aligned}$$

Multiplions les deux côtés de (i) par le côté gauche de (ii):

$$[-U''(\eta^d)/U'(\eta^d)] [-U'(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d)] \leq ARR(\eta^{d\#}) [-U'(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d)]$$

$$\begin{aligned}
 \text{pour } PF_N(N, K) & > w^d \\
 & = \\
 & <
 \end{aligned}$$

$$(iii) \quad [U''(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d)] \leq -ARR(\eta^{d\#}) [U'(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d)]$$

Prenons l'espérance mathématique de (iii):

$$E [U''(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d)] \leq -ARR(\eta^{d\#}) E [U'(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d)]$$

Or, $E [U'(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d)] = 0$ par la C.P.O.

$$E [U''(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d)] \leq 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Signe } dN/d(d) & = \text{Signe } E [U''(\eta^d) (N) (PF_N(N, K) - w^d) + U'(\eta)] \\
 & = \text{Signe de } E [U''(\eta^d) (PF_N(N, K) - w^d)]
 \end{aligned}$$

$$dN/d(d) \leq 0$$

(13)

$$\begin{aligned}
 (3.41) \quad \text{Max}_N E [U(y^*)] & \quad \text{où} \quad y^* = [P^* F(N, K) - rK]/N \\
 & \quad \quad \quad = (1-c) [PF(N, K) - rK]/N
 \end{aligned}$$

est équivalent à:

$$\text{Max}_N V = E \{ U [(1-c) (PF(N, K) - rK)/N] \}$$

$$\begin{aligned}
 dV/dN & = E \{ U'(y^*) [(1-c) (PF_N(N, K) - r) (1/N)] \} \\
 & = E [U'(y^*) (P^* F_N(N, K) - r) (1/N)] \\
 & = (1/N) E [U'(y^*) (P^* F_N(N, K) - r)]
 \end{aligned}$$

C.P.O. $dV/dN = 0$

$$(1/N) E [U'(\gamma) (P^1 F_N(N, K) - \gamma)] = 0$$

$$E [U'(\gamma) (P^1 F_N(N, K) - \gamma)] = 0$$

$$(3.42) \quad E [U'(\gamma) (1-c) (PF_{NN}(N, K) - \gamma)] = 0 \quad \text{puisque } P^1 = (1-c)P$$

$$dV^2/d^2N = E [d(U'(\gamma)/N)/dN (P^1 F_N(N, K) - \gamma) + U'(\gamma)/N d(P^1 F_N(N, K) - \gamma)/dN]$$

$$d(U'(\gamma)/N)/dN = [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma) (1/N) N - U'(\gamma)] (1/N^2)$$

$$= [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma) - U'(\gamma)] (1/N^2)$$

$$d(P^1 F_N(N, K) - \gamma)/dN = PF_{NN}(N, K) - (P^1 F_N(N, K) - \gamma) (1/N)$$

$$dV^2/d^2N = E [[U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma) - U'(\gamma)] (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma) + U'(\gamma)/N [PF_{NN}(N, K) - (P^1 F_N(N, K) - \gamma) (1/N)]]$$

$$= E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma) - U'(\gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma) + U'(\gamma)/N (PF_{NN}(N, K) - U'(\gamma)/N (P^1 F_N(N, K) - \gamma) (1/N))]$$

$$= E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma) - U'(\gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma) + U'(\gamma)/N (PF_{NN}(N, K) - U'(\gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma))]$$

$$= E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma) - U'(\gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma) + U'(\gamma)/N (PF_{NN}(N, K) - U'(\gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma))]$$

$$= E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma) - U'(\gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma) + U'(\gamma)/N (PF_{NN}(N, K) - U'(\gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma))]$$

$$= E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma)^2 (1/N^2) + U'(\gamma)/N (PF_{NN}(N, K) - 2 U'(\gamma) (1/N^2) (P^1 F_N(N, K) - \gamma))]$$

$$= E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma)^2 (1/N^2) + U'(\gamma)/N (PF_{NN}(N, K)) - 2 (1/N^2) E [U'(\gamma) (P^1 F_N(N, K) - \gamma)]]$$

$$= E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma)^2 (1/N^2) + U'(\gamma)/N (PF_{NN}(N, K)) - 2 (1/N^2) E [U'(\gamma) (P^1 F_N(N, K) - \gamma)]]$$

$$= E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma)^2 (1/N^2) + U'(\gamma)/N (PF_{NN}(N, K)) - 2 (1/N^2) E [U'(\gamma) (P^1 F_N(N, K) - \gamma)]]$$

$$= E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma)^2 (1/N^2) + U'(\gamma)/N (PF_{NN}(N, K)) - 2 (1/N^2) E [U'(\gamma) (P^1 F_N(N, K) - \gamma)]]$$

Or, $E [U'(\gamma) (P^1 F_N(N, K) - \gamma)] = 0$ par la C.P.O.

$$dV^2/d^2N = E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma)^2 (1/N^2) + U'(\gamma)/N (PF_{NN}(N, K))]$$

$$= (1/N) E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma)^2 (1/N) + U'(\gamma)(PF_{NN}(N, K))]$$

C.D.O. $dV^2/d^2N < 0$

$$(1/N) E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma)^2 (1/N) + U'(\gamma)(PF_{NN}(N, K))] < 0$$

$$E [U''(\gamma)(P^1 F_N(N, K) - \gamma)^2 (1/N) + U'(\gamma)(PF_{NN}(N, K))] < 0$$

$$(3.43) \quad H^1 = E [(1/N) (P^1 F_N(N, K) - \gamma)^2 U''(\gamma) + U'(\gamma)(PF_{NN}(N, K))] < 0$$

(14)

$$(3.42) \text{ C.P.O. } E [U'(\gamma^t) (P^t F_N(N, K) - \gamma^t)] \quad \text{où} \quad \gamma^t = [PF(N, K) - rK] / N$$

$$P^t = (1 - c) P$$

Différentielle de la C.P.O. par rapport à N et c:

$$E \{ H^t dN + [U''(\gamma^t) (-1) (PF(N, K) (1/N) (P^t F_N(N, K) - \gamma^t) + U'(\gamma^t) (-P F_N(N, K) + PF(N, K) (1/N))] \} dc = 0$$

$$H^t dN + E [- U''(\gamma^t) (PF(N, K) (1/N) (P^t F_N(N, K) - \gamma^t) - U'(\gamma^t) (P F_N(N, K) + PF(N, K) (1/N))] dc = 0$$

$$dN/dc = (1/H^t) E [U''(\gamma^t) (PF(N, K) (1/N) (P^t F_N(N, K) - \gamma^t) + U'(\gamma^t) (P F_N(N, K) - PF(N, K) (1/N))] /$$

$$dN/dc = E [U''(\gamma^t) (PF(N, K) (P^t F_N(N, K) - \gamma^t))] / NH^t + E [U'(\gamma^t) P (F_N(N, K) - F(N, K)/N)] / H^t$$

$$(3.44) \quad dN/dc = \frac{[PF(N, K) / NH^t] E [U''(\gamma^t) (P^t F_N(N, K) - \gamma^t)] + E [U'(\gamma^t) P (F_N(N, K) - F(N, K)/N)] / H^t}{}$$

(15)

$$P = E(P) + e$$

$$P^t = (1 - c) P$$

$$\gamma^t = [P^t F(N, K) - rK] / N$$

$$d[U'(\gamma^t) (P^t F_N(N, K) - \gamma^t)] / de = U''(\gamma^t) [F(N, K)/N] (P^t F_N(N, K) - \gamma^t) dP^t / de + U'(\gamma^t) [(F_N(N, K) - F(N, K)/N)] dP^t / de$$

$$U''(\gamma^t) < 0 \quad (\text{aversion au risque})$$

$$[F(N, K)/N] > 0$$

$$U'(\gamma^t) > 0$$

$$[(F_N(N, K) - F(N, K)/N)] < 0 \quad (\text{Borts et Mishan [1962]})$$

$$dP^t / de = (1 - c) dP / de > 0 \quad (0 < c < 1, dP / de > 0)$$

$$\text{Or, } \gamma > PF_N(N, K)$$

$$=$$

$$<$$

$$\text{Et donc } \gamma^t > P^t F_N(N, K)$$

$$=$$

$$<$$

$$\text{C'est-à-dire, } (P^t F_N(N, K) - \gamma^t) < 0$$

$$=$$

$$>$$

Le deuxième terme de $d[U'(\gamma^t) (P^t F_N(N, K) - \gamma^t)] / de$ est négatif

Mais le signe du premier terme est ambigu et, par conséquent, le signe de $d[U'(\gamma^t) (P^t F_N(N, K) - \gamma^t)] / de$ est ambigu.

Si $(P^*F_N(N, K) - y) = 0$ alors $d[U'(y) (P^*F_N(N, K) - y)]/dy < 0$

Si $(P^*F_N(N, K) - y) > 0$ alors $d[U'(y) (P^*F_N(N, K) - y)]/dy < 0$

Si $(P^*F_N(N, K) - y) < 0$ alors $d[U'(y) (P^*F_N(N, K) - y)]/dy \geq 0$

<

(16)

(i)

$$\begin{aligned} r_{XY} &= [\text{COV}(P_X, P_Y)] / [\text{VAR}(P_X) \text{VAR}(P_Y)]^{1/2} \\ &= [\text{COV}(P_X, P_Y)] / [\text{VAR}(P) \text{VAR}(P)]^{1/2} \\ &= [\text{COV}(P_X, P_Y)] / \text{VAR}(P) \end{aligned}$$

puisque $\text{VAR}(P_X) = \text{VAR}(P_Y) = \text{VAR}(P)$

$$\text{COV}(P_X, P_Y) = r_{XY} \text{VAR}(P)$$

(ii)

$$\begin{aligned} \text{VAR}(P_X + P_Y) &= \text{VAR}(P_X) + \text{VAR}(P_Y) + 2 \text{COV}(P_X, P_Y) \\ &= \text{VAR}(P) + \text{VAR}(P) + 2 r_{XY} \text{VAR}(P) \\ &= 2 \text{VAR}(P) (1 + r_{XY}) \end{aligned}$$

puisque $\text{VAR}(P_X) = \text{VAR}(P_Y) = \text{VAR}(P)$

puisque $\text{COV}(P_X, P_Y) = r_{XY} \text{VAR}(P)$

(iii)

$$(4.3) \quad \eta^D = (P_X + P_Y) Q - 2wN - 2rK$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}(\eta^D) &= Q \text{VAR}(P_X + P_Y) \\ &= Q^2 [2 \text{VAR}(P) (1 + r_{XY})] \\ &= Q^2 \text{VAR}(P) [2(1 + r_{XY})] \end{aligned}$$

puisque $\text{VAR}(P_X + P_Y) = 2 \text{VAR}(P) (1 + r_{XY})$

$$(4.4) \quad \text{VAR}(\eta^D) = Q^2 \text{VAR}(P) [2(1 + r_{XY})]$$

(17)

$$1 - 2(1 + r_{XY}) > 0$$

$$1 - 2 - 2r_{XY} > 0$$

$$-1 - 2r_{XY} > 0$$

$$-1 > 2r_{XY}$$

$$-1/2 > r_{XY}$$

(18)

$$(4.3) \quad \eta^D = (P_X + P_Y) Q - 2wN - 2rK$$

$$\begin{aligned} E(\eta^D) &= E(P_X + P_Y) Q - 2wN - 2rK \\ &= [E(P_X) + E(P_Y)] Q - 2wN - 2rK \\ &= [2E(P)] Q - 2wN - 2rK && \text{puisque } E(P_X) = E(P_Y) = E(P) \\ &= [2P^{ce}] Q - wN - rK && \text{puisque } E(P) = P^{ce} \end{aligned}$$

$$(4.8) \quad E(\eta^D) = 2(P^{ce} Q - wN - rK)$$

(19)

$$(4.18) \quad \text{VAR}(\eta^D) - \text{VAR}(\eta) = (1/4N^2) \text{VAR}(\eta^D) - (1/N^2) \text{VAR}(\eta)$$

$$(4.2) \quad \text{VAR}(\eta) = Q^2 \text{VAR}(P)$$

$$(4.4) \quad \text{VAR}(\eta^D) = Q^2 \text{VAR}(P) [2(1 + r_{XY})]$$

$$\text{VAR}(\eta^D) - \text{VAR}(\eta) = (1/4N^2) Q^2 \text{VAR}(P) [2(1 + r_{XY})] - (1/N^2) Q^2 \text{VAR}(P)$$

$$(4.19) \quad (\text{VAR}(\eta^D) - \text{VAR}(\eta)) = [(1/N^2) Q^2 \text{VAR}(P)] [(1 + r_{XY})/2 - 1]$$

(20)

$$[(1 + r_{XY})/2 - 1] < 0$$

$$[(1 + r_{XY})/2 < 1$$

$$1 + r_{XY} < 2$$

$$r_{XY} < 1$$

(21)

$$(4.1) \quad v_i = [N_i/n] U(y_i) + [(n - N_i)/n] U(k)$$

$$\text{Posons } p = [N_i/n]$$

$$v_i = p U(y_i) + (1 - p) U(k)$$

$$E[v_i] = p E[U(y_i)] + (1 - p) U(k)$$

$$E[v_i] = U(k)$$

$$p E[U(y_i)] + (1 - p) U(k) = U(k)$$

$$p EU(y) + (-p) U(k) = 0$$

$$p [EU(y) - U(k)] = 0$$

$$[EU(y) - U(k)] = 0$$

$$E[U(y)] = U(k)$$

$$E[U(y)] < U[E(y)] \quad \text{lorsqu'il y a riscophobie (Markowitz [1959])}$$

$$U(w) < U[E(y)]$$

$$E(y) > w$$

(22)

$$(4.1) \quad v_i = [N_i/n] U(y_i) + [(n - N_i)/n] U(k)$$

$$\text{Posons } p = [N_i/n]$$

$$v_i = p U(y_i) + (1 - p) U(k)$$

$$E[v_i] = p E[U(y_i)] + (1 - p) U(k)$$

$$E[v_i] = U(w)$$

$$p E[U(y_i)] + (1 - p) U(k) = U(w)$$

$$p EU(y) + (1 - p) U(w) > U(w) \quad \text{puisque } U(k) < U(w)$$

$$p EU(y) + (-p) U(w) > 0$$

$$p [EU(y) - U(w)] > 0$$

$$[EU(y) - U(w)] > 0$$

$$E[U(y)] > U(w)$$

$$U(w) < E[U(y)]$$

$$E[U(y)] < U[E(y)] \quad \text{lorsqu'il y a riscophobie (Markowitz [1959])}$$

$$U(w) < E[U(y)] < U[E(y)]$$

$$U(w) < U[E(y)]$$

$$E(y) > w$$

