

Université de Montréal

**Les bulles de masse négative dans un espace de de Sitter**

Par

Saoussen Mbarek

Département de physique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Maîtres ès sciences (M.Sc.)  
en Physique

Décembre, 2013

© Saoussen Mbarek, 2013

Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :  
**Les bulles de masse négative dans un espace de de Sitter**

présenté par :  
Saoussen Mbarek

A été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Richard Mackenzie : président rapporteur

Manu B. Paranjape : directeur de recherche

Victor Zacek : membre de jury

Mémoire accepté le : .....

## Résumé

Nous étudions différentes situations de distribution de la matière d'une bulle de masse négative. En effet, pour les bulles statiques et à symétrie sphérique, nous commençons par l'hypothèse qui dit que cette bulle, étant une solution des équations d'Einstein, est une déformation au niveau d'un champ scalaire. Nous montrons que cette idée est à rejeter et à remplacer par celle qui dit que la bulle est formée d'un fluide parfait. Nous réussissons à démontrer que ceci est la bonne distribution de matière dans une géométrie Schwarzschild-de Sitter, qu'elle satisfait toutes les conditions et que nous sommes capables de résoudre numériquement ses paramètres de pression et de densité.

**Mots-clés : Les bulles de masse négative, Espace-temps de de Sitter, Espace-temps Schwarzschild-de Sitter, Les équations d'Einstein, Les conditions d'énergie, Champ scalaire, Fluide parfait.**

## **Abstract**

We study different situations of matter distribution of a negative mass bubble. For the case of static and spherically symmetric bubbles, we start with the hypothesis saying that this kind of bubble, being a solution of Einstein equations, is a deformation of scalar field. We show that this idea must be rejected and replaced by another saying that the bubble is formed by a perfect fluid. We succeed to demonstrate that this is the proper matter distribution within Schwarzschild-de Sitter geometry, that it satisfies all conditions and that we're capable of resolving numerically its parameters of pressure and density.

**Keywords: Negative mass bubbles, De Sitter Spacetime, Schwarzschild-de Sitter spacetime, Einstein equations, Energy conditions, Scalar field, Perfect fluid.**

# Table des matières

<b>Résumé</b> .....	<b>i</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>ii</b>
<b>Liste des tableaux</b> .....	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b> .....	<b>vi</b>
<b>Remerciements</b> .....	<b>viii</b>
<b>Introduction</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre1: La théorie de la relativité d'Einstein</b> .....	<b>3</b>
1.1 Outils de la géométrie différentielle .....	3
1.1.1 Les vecteurs .....	4
1.1.1.1 Les vecteurs contravariants .....	5
1.1.1.2 Les vecteurs covariants .....	5
1.1.2 Les tenseurs .....	6
1.1.2.1 Définition .....	7
1.1.2.2 Opérations sur les tenseurs .....	7
1.1.2.3 Le tenseur métrique .....	9
1.1.2.4 La trace .....	10
1.1.3 La connexion affine .....	10
1.1.4 Les Dérivées .....	12
1.1.4.1 Dérivée covariante .....	12
1.1.4.2 La géodésique .....	13
1.1.5 La courbure .....	14
1.1.5.1 Le tenseur de Riemann .....	15
1.1.5.2 Le tenseur de Ricci et la courbure scalaire .....	16
1.2 Théorie de la relativité générale .....	17
1.2.1 Tenseur d'énergie-impulsion .....	18
1.2.2 Les équations d'Einstein .....	19
1.2.3 Les conditions d'énergie .....	20

1.2.3.1	La condition d'énergie faible :	21
1.2.3.2	La condition d'énergie nulle :	21
1.2.3.3	La condition d'énergie dominante :	22
1.2.3.4	La condition d'énergie forte :	22
1.2.4	Les conditions d'énergie : cas d'un fluide parfait	23
1.2.4.1	La condition d'énergie faible	23
1.2.4.2	La condition d'énergie nulle	23
1.2.4.3	La condition d'énergie dominante	24
1.2.4.4	La condition d'énergie forte	24
1.2.5	L'identité de Bianchi	24
1.2.6	Le théorème de Birkhoff	25
<b>Chapitre2: Structure et propriétés de la bulle de vide de masse négative</b>		<b>27</b>
2.1	Champs scalaire:	27
2.2	Fluide parfait:	33
2.2.1	Cas particulier	39
2.2.1.1	Vérification des conditions d'énergie :	40
2.2.1.2	Interprétation	41
2.2.2	Généralisation	43
<b>Conclusion</b>		<b>53</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>55</b>
<b>Annexe : Les codes numériques</b>		<b>i</b>

# Liste des tableaux

## Liste des figures

Figure 1 La fonction $\theta(r)$ .....	47
Figure 2 La fonction de masse $m(r)$ .....	48
Figure 3 La dérivée de la fonction de masse $m'(r)$ .....	48
Figure 4 La densité du fluide parfait $\rho(r)$ .....	49
Figure 5 Agrandissement de la courbe de densité du fluide parfait $\rho(r)$ pour $y > 0.000038$ .....	50
Figure 6 La densité du fluide parfait $\rho(r)$ à la limite externe de la bulle où $r=y$ .....	50
Figure 7 La pression du fluide parfait $p(r)$ .....	51



*À mon pays... Ma Tunisie*

## Remerciements

Je commence par remercier Professeur Manu Paranjape pour la chance qu'il m'ait donnée durant ma maîtrise ainsi que pour son soutien et ses encouragements. Je remercie également le Ministère d'Enseignement Supérieur de la Tunisie et la Mission Universitaire Tunisienne en Amérique du Nord (MUTAN) pour m'accorder la bourse nationale tunisienne une première fois pendant ma maîtrise et une deuxième fois pendant mon futur PhD.

J'aimerais aussi remercier mon âme-sœur, ma mère. Elle a toujours été mon idole et elle est toujours là pour moi malgré les distances qui nous séparent. Aussi un grand merci à ma sœur Sabria, elle a cru en moi dès l'enfance et elle m'a toujours soutenu. Merci maman et merci sœurette pour me rendre la personne que je suis aujourd'hui; c'est grâce à vous deux que je me suis rendu ici. Je n'oublierai jamais de remercier mon père pour être le héros de ma vie, merci Papa, t'es adorable. Je remercie aussi mon frère Bassem pour son amour inconditionnel et ses encouragements. Merci mon cher.

Merci à mon amie Fatima Ezzahra Mansouri, à mes étudiants Khalil Elmahdi Ismaili et Sophia Bojji et à mon collègue Solomon Owerre Akaraka pour leur aide et leur soutien moral durant toute la période de ma maîtrise.

Merci à mes anciens professeurs de physique, et surtout à Mr. Abdallah El Fersi et Mme. Hayet Koussa qui m'ont donné l'envie et le courage d'être physicienne.

Finalement, je remercie mon collègue Jonathan Belletête qui, avec son travail concernant « la structure et les interactions de bulles d'espaces-temps en

relativité générale » sous la direction de Professeur Paranjape, m'a facilité plusieurs tâches et m'a aidé à mieux comprendre mon sujet de recherche.

# Introduction

La masse négative a toujours été un sujet fascinant pour les physiciens. Elle est à l'origine de l'antigravitation. Dans ce cadre, nous allons étudier, en se basant sur la théorie de la relativité générale, les bulles de masse négative. Ces dernières sont les solutions de masses négatives des équations d'Einstein dans la géométrie de Schwarzschild-De Sitter. L'idée de notre sujet de recherche est de fixer les propriétés de la bulle de masse négative ainsi que sa structure en utilisant la distribution de la matière qui la forme. Pour ce fait, nous divisons ce texte en deux chapitres :

Le premier chapitre, lui-même est divisé en deux parties. La première introduit d'une manière générale les objets mathématiques nécessaires pour la théorie de la relativité générale et par la suite pour l'étude de la bulle de vide. Nous commençons par définir les vecteurs en leurs formes covariantes et contravariantes. Puis, nous développons les notions de tenseurs, les symboles de Christoffel, les dérivées covariantes et les géodésiques. Et finalement, nous terminons cette partie par une translation de la géométrie différentielle en général introduite par les notions précédemment stipulées vers la géométrie riemannienne ou pseudo-riemannienne où nous déterminons le tenseur de Riemann, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire. Alors que la deuxième partie de ce chapitre est, comme prévue, la partie où nous introduisons la théorie de la relativité générale. Nous stipulons au début les tenseurs d'énergie-impulsion, les objets les plus importants pour cette théorie. Nous passons par la suite à représenter les équations d'Einstein. Après, nous précisons les conditions

d'énergie et les identités de Bianchi qui fixent d'une manière directe ou indirecte le choix du tenseur d'énergie-impulsion. Enfin, nous terminons cette partie par une citation du théorème de Birkhoff.

Ainsi, le premier chapitre englobe toutes les notions nécessaires pour étudier la bulle de vide de masse négative, sujet d'étude dans la deuxième partie de ce document.

Pour le deuxième chapitre, il est aussi formé de deux parties. La première partie est basée sur l'hypothèse que la bulle de vide de masse négative résulte d'une déformation d'un champ scalaire. Une supposition qui est logique mais ses résultats ne nous seront pas satisfaisants puisque la résolution des équations d'Einstein ne nous amènera nulle part. Ceci nous amène à la deuxième partie où nous supposons que la matière de base de la bulle est un fluide parfait. Nous serons heureusement capables de déterminer les propriétés de ce fluide, c'est-à-dire sa densité et sa pression, en résolvant numériquement les équations obtenus à travers les équations d'Einstein. Les résultats seront impressionnants puisque les courbes d'intégration numérique de ces deux paramètres sont lisses et tout à fait comme attendues.

Finalement, nous concluons ce texte par un simple résumé des résultats obtenus par une citation de quelques problèmes qui seront probablement envisagés dans le futur.

# **Chapitre1: La théorie de la relativité d'Einstein**

La théorie de relativité d'Einstein est la combinaison de la théorie de la relativité restreinte, le principe d'équivalence et la théorie de relativité générale publiés dans cet ordre entre les années 1905 et 1915 par le physicien allemand Albert Einstein. Puisque cette théorie globale est assez vaste et comprend beaucoup de notions qui ne nous seront pas utiles dans ce texte, nous n'allons introduire que les parties que nous utiliserons plus tard dans le deuxième chapitre. Nous divisons donc ce chapitre en deux grandes parties. La première s'intéresse à l'étude des outils de la géométrie différentielle qui sont les outils de mathématiques de base pour construire mathématiquement la théorie de la relativité générale. Cette dernière est le sujet d'intérêt de la deuxième partie du chapitre où nous la détaillons selon nos besoins et nos utilisations dans ce texte.

## **1.1 Outils de la géométrie différentielle**

Certains voient que la géométrie différentielle est définie comme une branche en mathématiques qui utilise les objets de calcul différentiel pour étudier les géométries. Celle-ci est une manière simplifiée d'introduire une telle combinaison assez complexe. Mais en ce qui concerne ce texte, notre but d'introduire de telles notions est tout simplement de s'en servir plus tard en étudiant la théorie de la relativité générale. Donc nous allons commencer par les

définitions des vecteurs et des tenseurs. Ensuite, nous stipulons les connexions affines, les dérivées covariantes et les géodésiques. Et finalement, nous utilisons toutes ces notions pour introduire les tenseurs de courbure qui sont les objets de base de ce qu'on appelle la géométrie riemannienne ou pseudo-riemannienne. Cette dernière est la géométrie sur laquelle se base la théorie de la relativité d'Einstein.

### 1.1.1 Les vecteurs

En général un vecteur est un élément de l'espace vectoriel permettant de faire des opérations de multiplications par un scalaire et aussi d'addition vectorielle. En particulier nous nous intéressons dans ce document à la notion de vecteur lié à la théorie d'Einstein de la gravitation qui est le quadrivecteur.

Nous commençons par définir un quadrivecteur (ou encore un 4-vecteur) de l'espace-temps comme un vecteur à quatre composante qui se transforment lors d'un changement de référentiel. Ces changements sont faits par les transformations de Lorentz ce qui signifie que la pseudo-norme est invariante par changement de référentiel : ceci est appelé la covariance des coordonnées.

Pour la suite du document, nous utilisons le terme vecteur pour indiquer tout quadrivecteur et on désigne ses quatre composantes en utilisant un indice grec,  $A_\mu$  où  $\mu$  varie de 0 à 3.

$$A_0=ct; \quad A_1=x; \quad A_2=y; \quad A_3=z \quad (1.1)$$

Nous allons classifier les vecteurs d'une manière à alléger les façons d'écriture du calcul algébrique. Soit deux classes :

### 1.1.1.1 Les vecteurs contravariants

Soit un espace vectoriel  $E_4$  muni d'une base vectorielle  $(e_\mu)$  où l'indice  $\mu$  varie de 0 à 3. Un vecteur  $A$  de  $E_4$  s'écrit habituellement :

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu e_\mu \quad (1.2)$$

où les  $A^\mu$  sont les composantes de  $A$  et  $A^0$  est la composante temporelle.

Dans cette base, le vecteur  $A$  est dit contravariant. Cela signifie que lors d'un changement de référentiel, les coordonnées du vecteur se transforment inversement au vecteur de base. Nous fixons les conventions d'écriture ainsi : un vecteur est écrit sans avoir une flèche au-dessus.

Finalement, en se basant sur la convention d'Einstein sur les indices, nous omettons le symbole de sommation et ainsi le vecteur s'écrit :

$$A = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu e_\mu = A^\mu e_\mu \quad (1.3)$$

### 1.1.1.2 Les vecteurs covariants

Un vecteur covariant (ou covecteur ou vecteur dual) est une forme linéaire représentée par la base duale (ou covariante) de la base initialement choisie.

Nous introduisons la base duale  $(e^\nu)$  à partir de la base  $(e_\mu)$  en vérifiant la relation suivante :

$$\langle e_\mu, e^\nu \rangle = \delta_\mu^\nu \quad (1.4)$$



Le terme  $\delta_{\mu}^{\nu}$  est appelé le symbole de Kronecker et est égale à 0 si  $\mu \neq \nu$  ou bien 1 si  $\mu = \nu$ .

Alors, contrairement au vecteur contravariant, les composantes de vecteur covariant  $L$  se transforment de la même manière que les vecteurs de base lors d'un changement de référentiel d'où l'appellation covecteur. Ce dernier s'écrit :

$$L = \sum_{\nu=0}^3 L_{\nu} e^{\nu} = L_{\nu} e^{\nu} \quad (1.5)$$

Nous rappelons que les indices des coordonnées sont en bas et les indices des vecteurs de base sont en haut.

### 1.1.2 Les tenseurs

Les tenseurs présentent la notion généralisée des vecteurs. Ils ont des caractéristiques supplémentaires par rapport aux vecteurs lors d'un changement de la base. Leur étude demande beaucoup de détails et des connaissances approfondies en mathématiques. Mais notre objectif ici est de définir d'une manière simple cette notion pour être capable d'introduire la théorie de relativité générale et les parties de notre recherche sans avoir de la misère à comprendre ou à utiliser les tenseurs.

Donc, dans ce paragraphe, nous donnerons une définition rigoureuse à la notion de tenseur, nous citerons les différentes opérations applicables sur ce genre d'objet et nous finirons par donner l'exemple de tenseur le plus utilisé qui est le tenseur métrique et par introduire l'opérateur trace.

### 1.1.2.1 Définition

Les tenseurs sont des objets mathématiques très généraux. Ils sont utilisés pour représenter des applications multilinéaires<sup>1</sup> et leurs valeurs s'expriment dans l'espace vectoriel.

Soit  $E$  un espace vectoriel à  $n$  dimensions sur un corps commutatif  $K$  et soit  $V$  l'espace dual composé de toutes les formes linéaires définies sur  $E$ . Pareillement à  $E$ ,  $V$  est à  $n$  dimensions. Comme nous l'avons mentionné auparavant, les éléments de  $E$  et de  $V$  sont respectivement les vecteurs et les covecteurs. Ainsi, soit  $T$  le tenseur défini par être une application multilinéaire :

$$T = V \times V \times \dots \times V \times E \times E \times \dots \times E \rightarrow K \quad (1.6)$$

Supposons que nous avons  $j$  vecteurs  $A_1 A_2 \dots A_j$  et  $i$  covecteurs  $L_1 L_2 \dots L_i$ . Alors  $T$  associe, à  $j$  vecteurs et à  $i$  covecteurs, un scalaire  $T(L_1, L_2, \dots, L_i, A_1, A_2, \dots, A_j)$ .

Finalement, l'ordre du tenseur est donné par le couple  $(i, j)$ , c'est-à-dire l'ordre ou le rang du tenseur est la somme  $i+j$ . Le nombre de ses composantes est de  $n^{i+j}$  sachant que  $n$  est la dimension des vecteurs et de même des vecteur duaux. La notion d'un tenseur dépend donc du nombre de ses vecteurs et de ses contravecteurs.

### 1.1.2.2 Opérations sur les tenseurs

---

<sup>1</sup> Une application multilinéaire est une application ayant plusieurs variables vectorielles. Ses valeurs sont généralement vectorielles. Son appellation est dû au fait qu'elle est linéaire en chaque variable. Si cette application est à valeurs scalaires, nous l'appelons forme multilinéaire.

Dans cette partie, nous allons introduire quelques opérations applicables sur les tenseurs comme l'égalité et l'addition de deux tenseurs; le produit tensoriel; la contraction des indices;...etc. Nous parlerons plus tard de l'abaissement et l'élévation des indices puisque nous aurons besoin de définir le tenseur métrique avant. Ce dernier est l'élément le plus important pour ce type d'opérations. Détaillons alors les propriétés générales initialement mentionnées.

Nous commençons d'abord par l'égalité entre deux tenseurs. Celle-ci n'est permise qu'entre deux tenseurs de même type. Elle s'effectue par l'égalité de leurs suites de composantes. Il existe une assimilation mathématique d'espace isomorphe<sup>2</sup> entre les deux entités égales. Mais pourtant, les lois de physique nécessitent l'homogénéité de l'égalité en dimension physique des grandeurs considérées.

Pareillement à l'égalité, la sommation ne s'applique que sur deux tenseurs de même type. Par exemple  $T_{jk}^i = a V_{jk}^i + b W_{jk}^i$ .

Par contre, pour le produit tensoriel qui présente l'opération de multiplication entre deux tenseurs, ces derniers peuvent être d'ordres différents. Il en résulte un nouveau tenseur d'ordre égal à la somme des ordres des deux tenseurs initiaux. Soit l'exemple de deux tenseurs  $V_{jk}^i$  et  $W^{lm}$ ; leurs produit tensoriel est donnée par  $V_{jk}^i \times W^{lm} = T_{jk}^{ilm}$ . Nous rappelons que pour le cas où il existe un indice répété dans les deux tenseurs multipliés dont l'un est un indice en haute est l'autre est en bas, ils peuvent être contractés comme suit :  $V_{jk}^i \times W^{jm} = T_k^{im}$

---

<sup>2</sup> L'isomorphisme entre deux ensembles structurés est une application bijective qui, pareillement à sa réciproque, conserve la structure.

### 1.1.2.3 Le tenseur métrique

Le tenseur métrique est un élément fondamental en géométrie différentielle et en relativité générale. Il est un tenseur d'ordre 2, c'est-à-dire une forme bilinéaire définie sur l'espace vectoriel  $E$  par :

$$\begin{aligned} g: E \times E &\rightarrow K \\ (u, v) &\rightarrow g(u, v) = u \cdot v \end{aligned} \tag{1.7}$$

Soit  $u$  et  $v$  deux vecteurs de la base naturelle dont leur produit scalaire nous donne le tenseur métrique noté par «  $g$  ». Ce dernier est symétrique, non dégénéré et définie positivement, à l'exception des pseudo-métriques.

Par convention, nous notons ses éléments par  $g_{\mu\nu}$  où  $\mu$  et  $\nu$  prennent les valeurs de 0 à 3. Donc, en termes de coordonnées locales, la métrique s'écrit :

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.8}$$

Les composantes covariantes de la métrique, notées par  $g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu$ , sont les inverses des composantes contravariantes  $g^{\mu\nu} = e^\mu \cdot e^\nu$  et la signature de la métrique, que nous allons utiliser dans tout ce document, est  $(+, -, -, -)$ .

Finalement, il sera utile de mentionner que les composantes mixtes de  $g$  sont :

$$g(e^\nu, e_\mu) = g(e_\mu, e^\nu) = \delta_\mu^\nu \tag{1.9}$$

N'oublions pas d'indiquer que cette dernière égalité est une résultante de la propriété de réciprocity entre les vecteurs de la base naturelle et ceux de la base duale.

### 1.1.2.4 La trace

La trace est un opérateur qui s'applique d'une manière générale sur les matrices et les tenseurs d'ordre deux quelconques. Elle présente la somme des valeurs propre du tenseur (matrice) et donc la somme de ses éléments de la diagonale.

En termes d'équation, la trace est facile à définir. Elle est notée par «  $tr$  » et elle est donnée, pour un tenseur  $T$ , par :

$$tr(T) = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T_{\mu}^{\mu} \quad (1.10)$$

### 1.1.3 La connexion affine

Les connexions affines, ou les symboles de Christoffel dans une terminologie plus ancienne, sont des objets définis par des expressions mathématiques qui ont l'air compliquées. Mais l'idée de laquelle dérivent ces objets est très simple. Considérons deux tenseurs dont les composantes sont définies par rapport à deux repères différents. Ils ne peuvent être comparés que si nous connaissons un lien entre ces deux repères. Ceci est le but des connexions affines, c'est-à-dire elles permettent d'effectuer un lien entre deux repères naturels infiniment voisins [7].

En termes mathématiques, il existe deux espèces de connexions affines. La définition de la première espèce dérive de celle de la deuxième. Alors nous commençons par cette dernière. Soient  $de_i$  les variations élémentaires des vecteurs de base de notre premier repère dont la base naturelle est formée par les vecteurs  $e_i$ . Ces variations sont données par :

$$de_\mu = \omega_\mu^\nu e_\nu = \Gamma_{\sigma\mu}^\nu du^\sigma e_\nu \quad (1.11)$$

où les  $\omega_\mu^\nu$  sont les combinaisons linéaires des différentielles, les  $u^\mu$  sont les coordonnées curvilignes et les  $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu$  sont les connexions affines de deuxième espèce. Généralement, il existe  $n^3$  connexions qui sont des fonctions des coordonnées curvilignes.

Revenons maintenant aux connexions affines de première espèce. Ces dernières dérivent de l'expression des composantes covariantes des différentielles  $de_i$  notées par :

$$\omega_{\mu\nu} = e_\nu de_\mu = \Gamma_{\sigma\nu\mu} du^\sigma \quad (1.12)$$

où  $\Gamma_{\sigma\nu\mu}$  sont pareillement les connexions affines de première espèce.

Les deux connexions de première et de deuxième espèce sont liées l'une à l'autre par l'expression suivante :

$$\Gamma_{\sigma\nu\mu} = g_{\nu\rho} \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \quad (1.13)$$

Il est facile de démontrer que les deux espèces de symboles sont symétriques, par rapport à leurs indices inférieurs pour les connexions de la première espèce et par rapport à leurs indices extrêmes pour celles de la deuxième espèce. Ceci implique que :

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\nu = \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \quad (1.14)$$

$$\Gamma_{\sigma\nu\mu} = \Gamma_{\mu\nu\sigma} \quad (1.15)$$

Pour effectuer le calcul des connexions affines, nous avons besoin d'une ou plusieurs expressions simples permettant de calculer ses objets en fonctions de la métrique. Ces expressions sont données par :

$$\Gamma_{\sigma\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (\partial_{\sigma} g_{\mu\rho} + \partial_{\mu} g_{\rho\sigma} + \partial_{\rho} g_{\sigma\mu}) \quad (1.16)$$

$$\Gamma_{\sigma\nu\mu} = \frac{1}{2} (\partial_{\sigma} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu}) \quad (1.17)$$

Pour la première espèce, nous pouvons avoir une contraction d'indice en cas de d'existence d'un indice répété. Dans cette situation l'expression de la connexion devient :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \partial_{\nu} \ln \sqrt{|g|} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\nu} \sqrt{|g|} \quad (1.18)$$

## 1.1.4 Les Dérivées

Les dérivées sont des objets mathématiques de base de la géométrie différentielle. Elles permettent, en général, d'effectuer l'analyse vectorielle en dimension  $n$ . Nous citons plusieurs versions de dérivées telles que la dérivée partielle et la dérivée covariante. Nous nous intéressons à cette dernière qui sera utile pour l'introduction et plusieurs calculs en relativité générale.

### 1.1.4.1 Dérivée covariante

Cette notion représente une version particulière des dérivées. Commençons par déterminer son expression applicable sur les vecteurs.

Soit un quadrivecteur «  $v$  » donnée par  $v = v^\mu e_\mu$ . Sa dérivée covariante s'exprime ainsi :

$$\nabla_\sigma v^\mu = \partial_\sigma v^\mu + v^\nu \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \quad (1.19)$$

où les  $\nabla_\sigma$  sont les composantes mixtes du tenseur<sup>3</sup> dérivée covariante. Cette dérivée peut aussi être appelée parfois une différentielle absolue [9]. Si la dérivée covariante d'un champ vectoriel est nulle, alors le champ est dit uniforme.

De cette définition, nous pouvons déduire une équation générale qui s'applique sur les tenseurs. Ainsi, l'équation (1.19) nous donne :

$$\nabla_\sigma T_\mu^\nu = \partial_\sigma T_\mu^\nu - T_\rho^\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho + T_\mu^\rho \Gamma_{\sigma\rho}^\nu \quad (1.20)$$

Parmi les propriétés de ce genre de dérivée nous citons la distributivité qui implique que la dérivée covariante d'une somme de tenseurs est égale à la somme des dérivées covariantes de ces tenseurs. Aussi, étant un opérateur agissant sur les vecteurs, la dérivée covariante peut avoir lieu en même temps que l'opération de contraction d'indices. Dans ce cas, ces deux opérateurs sont dits permutables, c'est-à-dire l'ordre auquel ils sont appliqués n'influence pas le résultat final.

#### 1.1.4.2 La géodésique

D'une manière simple, nous définissons une géodésique par le chemin le plus court entre deux points ou évènements de l'espace-temps. L'idée initiale qui

---

<sup>3</sup> L'opérateur de dérivée covariante est effectivement un tenseur. Il est le même que la différentielle absolue pour le cas des tenseur Riemannien.



a introduit la notion de géodésique était proposée par Albert Einstein [9]. Son hypothèse était basée sur le scénario suivant :

Soit une particule de masse relativement petite par rapport à un autre corps qui crée un champ gravitationnel. Nous supposons que cette particule est plongée dans ce champ. Einstein a proposé que la trajectoire suivie par cette particule doit être une géodésique de l'espace-temps Riemannien.

Cette idée est défoncée par le faite que la particule est de masse relativement petite et est donc incapable de modifier le champ gravitationnel dans lequel elle baigne. Quelques années plus tard, cette hypothèse a été prouvée l'équation que Einstein et Grommer ont trouvé [9]. Cette équation représente l'ensemble des trajectoires que notre particule peut parcourir et est donnée par :

$$\frac{d^2 x^\mu}{du^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\sigma}{du} = 0 \quad (1.21)$$

où  $u$  est un paramètre affine et  $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$  sont les symboles de Christoffel dépendant uniquement du tenseur métrique de l'espace-temps considéré.

### 1.1.5 La courbure

Puisque la théorie de relativité générale se base sur la notion de courbure de l'espace-temps, nous aurons besoin d'introduire des outils de la géométrie différentielle permettant de l'interpréter mathématiquement et de simplifier son aspect abstrait. Ces outils seront :

### 1.1.5.1 Le tenseur de Riemann

Appelé aussi tenseur de courbure ou de Riemann-Christoffel, le tenseur de Riemann est un outil simple permettant d'exprimer mathématiquement la notion de courbure. Il peut être exprimé en fonction de la connexion de Levi-Civita<sup>4</sup> et de la dérivée covariante. Mais son expression la plus simple à utiliser [10] est :

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \quad (1.22)$$

Cette équation est dépendante seulement des symboles de Christoffel et elle nous permet d'écrire les composantes covariantes de ce tenseur comme :

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\mu\lambda}R_{\nu\sigma\rho}^{\lambda} \quad (1.23)$$

Un calcul énorme nous permet d'écrire ses composantes sous la forme suivante :

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2}(\partial_{\rho}\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} - \partial_{\rho}\partial_{\nu}g_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\nu}g_{\mu\rho} - \partial_{\sigma}\partial_{\mu}g_{\nu\rho}) - g^{\lambda\gamma}(\Gamma_{\lambda\mu\sigma}\Gamma_{\gamma\nu\rho} - \Gamma_{\lambda\mu\rho}\Gamma_{\gamma\nu\sigma}) \quad (1.24)$$

Cette écriture nous permet de déduire les formes de symétrie auxquelles obéit le tenseur de Riemann. Ce dernier est alors antisymétrique par permutation de ses premiers indices ou ses deux derniers et est symétrique par inversion de ses deux paires d'indices, c'est-à-dire :

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R_{\nu\mu\sigma\rho} \quad (1.25)$$

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.26)$$

---

<sup>4</sup> La connexion de Levi-Civita est une connexion de Koszul définie sur les variétés Riemannienne et pseudo-Riemannienne. Sa définition est basée sur les symboles de Christoffel.

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (1.27)$$

De ces propriétés de symétrie nous pouvons déduire l'identité cyclique du tenseur de Riemann donnée par :

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} + R_{\mu\sigma\rho\nu} + R_{\mu\rho\nu\sigma} = 0 \quad (1.28)$$

Cette identité est appelée la *première identité de Bianchi*<sup>5</sup>.

### 1.1.5.2 Le tenseur de Ricci et la courbure scalaire

D'une manière simple, le tenseur de Ricci est un tenseur de Riemann ayant deux indices contractés. Il exprime une déformation<sup>6</sup> dans l'espace-temps et il est donné par :

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} \quad (1.29)$$

En se basant sur l'identité cyclique donnée par (2.28), nous déduisons que le tenseur de Ricci est symétrique et sa propriété de symétrie est donnée par :

$$R_{\mu}^{\nu} = R_{\nu}^{\mu} \quad (1.30)$$

Pareillement, la courbure scalaire est définie comme la quantité résultante de la contraction des deux indices du tenseur de Ricci. Elle s'exprime par:

$$R = R_{\mu}^{\mu} = tr(R_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (1.31)$$

---

<sup>5</sup> Les identités de Bianchi sont des équations satisfaites par le tenseur de courbure (tenseur de Riemann). Elles seront traitées plus tard dans ce chapitre.

<sup>6</sup> Cette déformation est en fait le champ gravitationnel dans le cadre de la théorie de relativité générale.

En résumé, les notions de la géométrie différentielle introduites précédemment sont les bases qui construisent, à l'aide d'autres aspects physiques, la théorie de la relativité générale. Cette dernière, basée sur la géométrie pseudo-riemannienne, est fondée sur les tenseurs, les connexions affines et le tenseur de Riemann. Nous pouvons donc dire que la géométrie différentielle, comparée à la géométrie Euclidienne, est plus générale et est basée sur des objets mathématiques plus compliqués.

## **1.2 Théorie de la relativité générale**

Étant introduite en 1915 par Albert Einstein, cette théorie était et est encore l'une des plus importantes théories en physique. Elle est la version la plus généralisée de la théorie de relativité restreinte dans des référentiels accélérés. Elle stipule que la gravitation est une propriété géométrique de l'espace-temps au lieu d'être une force tel que Newton a démontré plus que deux cents années auparavant. Ainsi, Einstein a démontré que la géométrie de l'espace-temps dépend de la distribution de la matière ou plutôt de l'énergie et l'impulsion et inversement.

Cette théorie est à l'origine de l'explication de plusieurs phénomènes et aspects dans l'univers. Et plus, elle comporte les outils de base qui nous permettrons d'étudier les bulles de masse négatives. Mais puisque elle est bien développée et contient beaucoup de détails, nous n'allons introduire dans cette parties que les outils qui nous seront utiles plus tard. Donc nous allons commencer par définir les tenseurs d'énergie-impulsion, étant les outils de bases pour introduire après

les équations d'Einstein. Après nous allons fixer les conditions d'énergie qui délimiteront le choix du tenseur d'énergie-impulsion. Et finalement nous citons les deux identités de Bianchi et le théorème de Birkhoff pour compléter les notions nécessaires pour que nous puissions étudier dans le chapitre suivant notre fameuse bulle de masse négative.

### 1.2.1 Tenseur d'énergie-impulsion

Utilisé le plus souvent en relativité générale, le tenseur d'énergie-impulsion est un objet mathématique permettant de donner une idée sur la distribution de l'énergie et la masse dans l'espace-temps. Les composantes de ce tenseur ont chacune une signification bien précise.

Soit  $T^{\mu\nu}$  un tenseur d'énergie-impulsion donnée par :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

La composante  $T^{00}$  représente *la densité volumique d'énergie*. Les trois composantes  $T^{i0}$  sont *les densités de moments* alors que les trois composantes  $T^{0j}$  sont *les flux d'énergie*. Et finalement,  $T^{ij}$  est la sous-matrice qui représente *les flux de moments*.

En particulier, le tenseur d'énergie-impulsion pour un champ scalaire; qui dépend uniquement de la densité lagrangienne  $L$ , du champ scalaire  $\phi$  et de la métrique  $g^{\mu\nu}$  s'écrit :

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}L \quad (1.33)$$

Par contre, le tenseur d'énergie impulsion d'un fluide parfait est donnée par :

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu \quad (1.34)$$

où  $U^\mu$  est la quadri-vitesse de l'ensemble du fluide,  $\rho$  est la densité du fluide et  $p$  est sa pression. L'équation de conservation<sup>7</sup> d'énergie et d'impulsion de ce tenseur est donnée par :

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.35)$$

Ce tenseur est utile pour la description de la distribution de la matière en tout évènement de l'espace-temps.

### 1.2.2 Les équations d'Einstein

Ayant déjà défini le tenseur d'énergie-impulsion, celui de Ricci et la courbure scalaire, nous sommes maintenant capable d'introduire la notion de base de la théorie de relativité générale : les équations d'Einstein. Elles sont données par [10] :

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi\mathfrak{G}}{c^4}T^{\mu\nu} \quad (1.36)$$

---

<sup>7</sup> Cette conservation dérive des lois de l'hydrodynamique relativiste [10] et des équations d'Einstein qui seront expliquées plus tard dans ce chapitre.

où «  $\mathcal{G}$  » est la constante de gravitation newtonienne, «  $c$  » est la vitesse de lumière,  $T^{\mu\nu}$  est le tenseur d'énergie impulsion et finalement  $G^{\mu\nu}$  est le tenseur dit « d'Einstein ». Ce dernier est défini par :

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad (1.37)$$

où  $R^{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci et «  $R$  » est la courbure scalaire.

Malgré la simplicité de son aspect mathématique, l'équation (1.23) est très compliquée. Ceci est dû au fait que le tenseur de Ricci et la courbure scalaire sont dépendants de la métrique. Une forme qui lui est équivalente permet de faciliter la résolution de ses équations. Elle est donnée par :

$$R^{\mu\nu} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} \left[ T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg^{\mu\nu} \right] \quad (1.38)$$

Notons qu'en cas de considération de la constante cosmologique  $\Lambda$ <sup>8</sup>, l'équation (1.23) devient :

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi\mathcal{G}}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (1.39)$$

### 1.2.3 Les conditions d'énergie

Les conditions d'énergie sont des équations qui délimitent le choix du tenseur énergie-impulsion pour la matière à étudier. En effet, si nous ne précisons pas la nature de la matière à étudier, alors le choix du tenseur d'énergie-impulsion sera complètement arbitraire et n'importe quelle métrique peut le définir. Par contre nous risquons d'obtenir des résultats physiquement non réalistes. Pour cette raison, les physiciens ont introduits des équations qu'un tenseur d'énergie

---

<sup>8</sup> La constante cosmologique est définie par la densité moyenne d'énergie du vide sur des échelles cosmologiques.

impulsion doit satisfaire<sup>9</sup> pour que les résultats soient physiquement acceptables ou réaliste. Ces équations sont les conditions d'énergies. Donc, pour les expliquer, soient «  $l$  » un vecteur de type lumière, «  $t$  » un vecteur de type temporel et «  $s$  » un vecteur de type spatial dont ces trois vecteurs sont défini dans les trois différentes régions du cône de lumière.

On distingue quatre<sup>10</sup> conditions d'énergie :

### 1.2.3.1 La condition d'énergie faible :

Cette condition déclare que la densité d'énergie ne peut pas être négative. Autrement dit, un corps inertiel ne peut pas être influencé ou même sentir cette densité d'énergie négative. Alors elle s'écrit :

$$T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0 \quad (1.40)$$

Cette inégalité est toujours vraie pour les vecteurs de type temporel.

### 1.2.3.2 La condition d'énergie nulle :

Celle-ci est un cas particulier de la condition d'énergie faible où le vecteur temporel est remplacé par un vecteur de type lumière. Ceci implique que le corps inertiel est de vitesse qui tend vers la valeur de la vitesse de lumière  $c$ . Elle s'écrit :

---

<sup>9</sup> La satisfaction des conditions d'énergie par le tenseur d'énergie-impulsion peut être vérifiée partiellement ou complètement, c'est-à-dire le tenseur peut ne pas satisfaire quelques-unes des conditions mais donner des résultats physiquement réalistes.

<sup>10</sup> Il existe une cinquième condition appelée la condition d'énergie nulle-dominante [5]. Mais nous n'allons pas la traiter dans ce document car elle est inutile pour nos calculs



$$T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0 \quad (1.41)$$

La densité d'énergie dans ce cas peut être négative à condition que la pression soit positive.

### 1.2.3.3 La condition d'énergie dominante :

Cette condition inclut la condition d'énergie faible et une autre condition supplémentaire qui stipule que la quantité  $T_{\mu\nu}l^\mu$  est un vecteur non spatial; c'est-à-dire que le corps inertiel est incapable de mesurer un courant d'énergie se déplaçant plus vite que la lumière ou à l'envers dans l'échelle de temps [1]. Donc elle est donnée par :

$$\begin{cases} T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0 \\ T_{\mu\nu}T_\lambda^\nu t^\mu t^\lambda \leq 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

### 1.2.3.4 La condition d'énergie forte :

Finalement, la condition d'énergie forte est indépendante des autres conditions et n'implique pas la condition d'énergie faible. Sa signification physique exacte n'est pas claire. En plus elle n'est toujours vérifiée que pour les types de matière dont la pression est positive et elle viole plusieurs situations physiquement réalistes comme le champ scalaire. C'est pour cette raison qu'elle n'est pas toujours exigée comme les autres conditions. Elle est donnée par :

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_\alpha^\alpha g_{\mu\nu}\right)t^\mu t^\nu \geq 0 \quad (1.43)$$

## 1.2.4 Les conditions d'énergie : cas d'un fluide parfait

Tel que défini précédemment, le tenseur d'énergie-impulsion est donné par [1] :

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu \quad (1.44)$$

Nous allons appliquer les conditions d'énergie sur ce tenseur et nous allons définir de nouvelles inégalités simples à appliquer pour ce cas.

### 1.2.4.1 La condition d'énergie faible

Pour cette condition, nous prenons l'équation (2.40) et nous remplaçons le tenseur d'énergie-impulsion par son expression. Nous obtenons les deux inégalités suivantes:

$$\begin{cases} p + \rho \geq 0 \\ \rho \geq 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

### 1.2.4.2 La condition d'énergie nulle

Pareillement à la méthode utilisée pour la condition précédente, la condition d'énergie nulle s'écrit :

$$p + \rho \geq 0 \quad (1.46)$$

### 1.2.4.3 La condition d'énergie dominante

Puisqu'elle dérive de la condition d'énergie faible et une autre condition exigible, la condition d'énergie dominante pour un fluide parfait se transforme en trois inégalités à satisfaire par les paramètres du fluide et qui sont données par :

$$\begin{cases} p + \rho \geq 0 \\ \rho \geq 0 \\ \rho \geq |p| \end{cases} \quad (1.47)$$

### 1.2.4.4 La condition d'énergie forte

Finalement, cette condition, en utilisant un tenseur d'énergie-impulsion caractérisant un fluide parfait, devient :

$$\begin{cases} p + \rho \geq 0 \\ 3p + \rho \geq 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

### 1.2.5 L'identité de Bianchi

Il existe deux identités de Bianchi. La première, telle qu'indiqué au paragraphe 1.1.5.2, représente l'identité cyclique et est donnée par :

$$R_{\mu\nu\sigma\rho} + R_{\mu\sigma\rho\nu} + R_{\mu\rho\nu\sigma} = 0 \quad (1.49)$$

Elle est basée sur les propriétés de symétrie et d'antisymétrie des tenseurs de Riemann, c'est-à-dire elle dépend des permutations d'indices de ces tenseurs.

Par contre, la seconde identité de Bianchi dépend des dérivées covariantes des tenseurs de Riemann. Elle est donnée par :

$$\nabla_{\lambda}R_{\mu\nu\sigma\rho} + \nabla_{\sigma}R_{\mu\nu\rho\lambda} + \nabla_{\rho}R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0 \quad (1.50)$$

Étant de nature tensorielle, cette équation est valide dans tous les systèmes de coordonnées.

Nous pouvons déduire l'expression de cette identité pour les tenseurs de Ricci en contractant en premier lieu les indices  $\mu$  et  $\rho$ , et  $\nu$  et  $\lambda$  en second lieu. En effectuant des élévations et des abaissements d'indices quand nécessaire, nous obtenons la propriété la plus importante du tenseur d'Einstein concernant sa divergence. Elle est donnée par :

$$\nabla_{\nu}G^{\mu\nu} = 0 \quad (1.51)$$

### 1.2.6 Le théorème de Birkhoff

Supposons que notre métrique a la forme la plus générale et est isotrope. Ceci implique que nous n'imposons pas qu'elle soit statique ou stationnaire. Elle s'écrit alors :

$$ds^2 = B(t,r)dt^2 - A(t,r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (1.52)$$

Ceci est dans le but de déterminer les fonctions  $B(t,r)$  et  $A(t,r)$  à partir des équations d'Einstein. Dans le vide; c'est-à-dire pour  $R_{\mu\nu} = 0$  ; un calcul simple et court nous permet d'obtenir les expressions des fonctions recherchées. Nous réussissons à retrouver la métrique, dite « métrique de Schwarzschild », donnée par :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mathfrak{M}}{rc^2}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2\mathfrak{M}}{rc^2}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (1.53)$$

Ce résultat représente le théorème de Birkhoff dont l'énoncée est [9] : « La géométrie de l'espace-temps à l'extérieur de toute distribution de masse à symétrie sphérique est la géométrie de Schwarzschild »

La réciproque de ce théorème est prouvée fautive mais il existe des contre-exemples. En conclusion, l'importance de ce théorème apparaît dans la particularité des équations d'Einstein dans le vide.

En résumé, la théorie de relativité générale a introduit la notion de courbure de l'espace-temps et a donc changé notre compréhension de la gravitation. Le succès de cette théorie s'est basé sur son pouvoir d'expliquer plusieurs phénomènes physiques qui ont toujours été mystérieux pour les physiciens. Pourtant, dans cette partie nous n'avons pas introduit toute la théorie, mais nous avons expliqué quelques notions qui nous seront utiles plus tard.

## Chapitre2: Structure et propriétés de la bulle de vide de masse négative

Les bulles de masse négative sont des objets supposés être statiques et à symétrie sphérique. Leur étude s'effectue en générale à l'aide de la théorie de la relativité générale. Cette étude sera basée sur la distribution de la matière constituant ces corps. Alors, nous divisons le chapitre en deux grandes parties. Dans la première partie, nous supposons que la bulle est formée suite à une déformation d'un champ scalaire. Par contre, dans la deuxième partie, nous détaillons le cas d'une bulle formée d'un fluide parfait.

### 2.1 Champs scalaire:

Nous nous intéressons dans toute cette partie aux espaces-temps statiques et à symétrie sphérique dont la métrique s'écrit [1] :

$$ds^2 = (exp2\theta(r))dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (2.1)$$

où la fonction  $m(r)$  est la masse gravitationnelle effective<sup>11</sup> et la fonction  $\theta(r)$  est le potentiel gravitationnel effectif de la distribution d'énergie.

Alors les matrices de changement des coordonnées qui dérivent de cette métrique permettent d'effectuer des transformations de Lorentz<sup>12</sup> et sont de la forme :

---

<sup>11</sup> Cette masse gravitationnelle effective signifie physiquement la quantité d'énergie contenue dans une sphère de rayon  $r$ .

$$e_{\mu}^i = \begin{pmatrix} \exp\theta(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \sin \theta \end{pmatrix}$$

et

$$e_i^{\mu} = \begin{pmatrix} \exp - (\theta(r)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r \sin \theta)^{-1} \end{pmatrix}$$

où les relations  $e_{\mu}^i e_j^{\mu} = \delta_j^i$ ,  $g_{\mu\nu} e_i^{\mu} e_j^{\nu} = \eta_{ij}$  et  $g^{\mu\nu} e_{\mu}^i e_{\nu}^j = \eta^{ij}$  sont vérifiés par ces matrices. N'oublions pas que  $\eta^{ij}$  est la métrique de l'espace de Minkowski dont la signature est  $(+, -, -, -)$ .

En considérant que cette métrique est une solution des équations d'Einstein, nous aurons une proportionnalité entre le tenseur d'énergie-impulsion  $T_{\mu\nu}$  et le tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$  qui se traduit par les équations d'Einstein :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Nous avons supposé que  $c=\mathbb{G}=1$  pour cette équation et pour le reste de ce document et que les deux tenseurs  $G_{\mu\nu}$  et  $T_{\mu\nu}$  sont deux tenseurs symétriques de rang 2.

L'équation (2.2) s'interprète comme un ensemble d'équations qui décrivent comment la courbure de l'espace-temps est liée au contenu de l'univers, c'est-à-dire sa matière/énergie. La partie gauche de l'équation représente la courbure de l'espace-temps déjà décrite par la métrique au niveau des deux premières composantes alors que la partie droite représente le contenu de l'univers.

---

<sup>12</sup> Ces transformations sont des transformations linéaires des coordonnées d'un point dans l'espace de Minkowski.

Commençons par introduire le tenseur d'Einstein. Les termes diagonaux de ce dernier sont les seuls termes non nuls et s'expriment dans le système de coordonnées données par (2.1) ainsi :

$$G_{00} = e^{2\theta(r)} \frac{2m'(r)}{r^2} \quad (2.3)$$

$$G_{11} = -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} \left[ \frac{2(m(r) - r(r - 2m(r)\theta'(r)))}{r^3} \right] \quad (2.4)$$

$$G_{22} = -[S + m'(r)(r\theta'(r) + 1)] \quad (2.5)$$

$$G_{33} = G_{22}\sin^2\theta \quad (2.6)$$

où nous avons:

$$S = -m(r) \left( \theta'(r) + \frac{1}{r} \right) - (r - 2m(r))[r\theta''(r) + r\theta'(r)^2 + \theta'(r)] \quad (2.7)$$

Pour faciliter notre calcul, nous allons simplifier notre métrique en choisissant un cas particulier de la fonction  $\theta(r)$ . Ce choix<sup>13</sup> sera

$$\theta(r) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) \quad (2.8)$$

Ce choix permet de traiter à la fois les solutions de Schwarzschild et aussi celles de De Sitter.

Dans ce cas la métrique que nous allons utiliser sera :

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{\left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (2.9)$$

Maintenant nous avons introduit les outils que nous allons utiliser pour traiter le cas de notre bulle. Cette dernière est définie comme une déformation dans le

---

<sup>13</sup> Ce choix est fait en se basant sur le théorème de Birkhoff qui assure qu'une solution des équations d'Einstein dans le vide a obligatoirement la forme soit d'une solution de Schwarzschild, soit d'une solution de De Sitter ou soit d'une combinaison linéaire entre les deux.



champ scalaire  $\phi$ , caractérisant l'espace Schwarzschild-De Sitter avec constante cosmologique auquel nous nous intéressons. Puisque nous supposons que cette déformation est radiale alors le corps qui se forme sera sphérique d'où l'appellation «bulle ». Elle est aussi caractérisée par une métrique non triviale. Cette métrique est donnée par (2.9). Elle permet de décrire la déformation de l'espace-temps dans le vide uniquement autour d'une masse sphérique.

Nous définissons notre tenseur d'énergie-impulsion d'un champ scalaire en se basant sur la définition de la densité lagrangienne  $L$  [16].

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi)}\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}L \quad (2.10)$$

où

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu\phi - V(\phi) \quad (2.11)$$

Alors l'expression de  $T^{\mu\nu}$  correspondante au champ scalaire  $\phi$  est :

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\sigma\phi\partial_\sigma\phi + g_{\mu\nu}V(\phi) \quad (2.12)$$

Nous allons essayer de résoudre les équations d'Einstein (2.2) pour le tenseur d'Einstein et celui d'énergie-impulsion définies précédemment.

Pour le choix fait pour la fonction  $\theta(r)$ , les termes qui dérivent de cette fonction et qui seront utiles pour notre calcul sont :

$$\Theta'(r) = \frac{m(r) - rm'(r)}{r(r - 2m(r))} \quad (2.13)$$

et

$$\Theta''(r) = -\frac{m''(r)}{r - 2m(r)} - (m(r) - rm'(r)) \left[ \frac{2r - 2m(r) - 2m'(r)}{r^2(r - 2m(r))^2} \right] \quad (2.14)$$

En remplaçant (2.8), (2.13) et (2.14) dans les expressions du tenseur d'Einstein données par les équations (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6); nous obtenons:

$$G_{00} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \frac{2m'(r)}{r^2} \quad (2.15)$$

$$G_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \frac{2m'(r)}{r^2} \quad (2.16)$$

$$G_{22} = -rm''(r) \quad (2.17)$$

$$G_{33} = -rm''(r) \sin^2\theta \quad (2.18)$$

Il est déjà clair que les expressions des termes non nuls du tenseur d'Einstein sont devenues très simples suite aux choix effectués.

Revenons au tenseur d'énergie-impulsion  $T_{\mu\nu}$ . Ce dernier, défini par l'équation (2.12), est supposé être indépendant du temps et il ne varie qu'en fonction de la composante radiale  $r$ , c'est-à-dire  $\phi = \phi(r)$ .

Alors l'expression de ce tenseur devient :

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)(\partial_r\phi)^2 + g_{\mu\nu}V(\phi) \quad (2.19)$$

Cette expression explicite de  $T_{\mu\nu}$  nous permet d'écrire ses composantes de la manière suivante:

$$T_{00} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^2 (\partial_r\phi)^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)V(\phi) \quad (2.20)$$

$$T_{11} = \frac{1}{2}(\partial_r\phi)^2 - \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} V(\phi) \quad (2.21)$$

$$T_{22} = \frac{-r^2}{2}\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)(\partial_r\phi)^2 - r^2V(\phi) \quad (2.22)$$

$$T_{33} = \sin^2\theta T_{22} \quad (2.23)$$

Maintenant que nous avons les expressions complètes des quatre composantes non nulles du tenseur d'Einstein ainsi que celles du tenseur d'énergie-impulsion, nous pouvons résoudre les équations d'Einstein données par (2.2) en traitant les quatre égalités suivantes :

$$G_{00} = 8\pi T_{00} \quad (2.24)$$

$$G_{11} = 8\pi T_{11} \quad (2.25)$$

$$G_{22} = 8\pi T_{22} \quad (2.26)$$

$$G_{33} = 8\pi T_{33} \quad (2.27)$$

L'équation (2.27) est la même que l'équation (2.26) puisque  $G_{33} = \sin^2\theta G_{22}$  de même  $T_{33} = \sin^2\theta T_{22}$  comme il est indiqué dans l'équation (2.23).

En remplaçant chaque terme par son expression, les trois égalités (2.24), (2.25) et (2.26) donnent respectivement :

$$\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) (\partial_r \phi)^2 = \frac{m'(r)}{2\pi r^2} - 2V(\phi) \quad (2.28)$$

$$\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) (\partial_r \phi)^2 = -\frac{m'(r)}{2\pi r^2} + 2V(\phi) \quad (2.29)$$

$$\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) (\partial_r \phi)^2 = \frac{m''(r)}{4\pi r} - 2V(\phi) \quad (2.30)$$

Cet ensemble de trois équations présente notre système d'équations à résoudre. En faisant la somme entre les équations (2.28) et (2.29) nous trouvons  $\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) (\partial_r \phi)^2 = 0$ . Mais, nous ne permettons pas que le premier facteur soit nul, alors il faut que  $(\partial_r \phi)^2 = 0$ . Ceci dit bien que le champ scalaire est constant alors que nous avons déjà pris comme hypothèse que  $\phi$  varie suivant  $r$  et qu'il n'est pas constant.

Dans ce cas il est clair qu'il n'y a pas de déformation dans le champ scalaire et donc il n'y a plus de bulle à étudier! Ceci dit bien que le champ scalaire n'est pas la solution que nous cherchons.

Maintenant que nous avons éliminé cette proposition d'avoir une bulle suite à une déformation au niveau du champ scalaire, la seule idée qui nous a semblé probablement logique c'est de traiter le cas d'un fluide parfait. Pour traiter ce cas, nous allons remplacer le tenseur d'énergie impulsion du champ scalaire en un tenseur d'énergie impulsion d'un fluide parfait caractérisé par sa pression  $p$  et sa densité  $\rho$ . Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous allons étudier en détail les bulles de vide caractérisées par l'existence d'un fluide parfait dans la couche qui sépare la zone interne de la zone externe de la bulle.

En résumé, nous avons décrit la bulle de masse négative en supposant que la matière étudiée est un champ scalaire. Nous avons réussi à démontrer que l'hypothèse suggérant que la bulle qui résulte d'une déformation d'un champ scalaire est fausse et ne peut pas avoir lieu. L'impossibilité de cette situation nous oblige de remplacer cette hypothèse par une autre qui sera étudiée dans la partie suivante de ce chapitre. Cette hypothèse sera basée sur l'étude d'une bulle de masse négative dans le cas d'un fluide parfait.

## **2.2 Fluide parfait:**

Pour traiter le cas de fluide parfait, nous allons effectuer quelques changements par rapport au cas du champ scalaire.

Nous commençons par une généralisation au niveau de la métrique où nous allons changer la composante temporelle en une autre plus générale. Ainsi la métrique devient :

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (2.31)$$

La fonction  $A(r)$  est toujours définie comme  $A(r) = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$  alors que  $B(r)$  est une fonction générale dépendante seulement du paramètre  $r$ .

Pour simplifier l'écriture, on note  $A(r)$  par  $A$  et  $B(r)$  par  $B$ .

La fonction  $\theta(r)$ , déjà introduite dans la partie précédente, est donc choisie comme :

$$\theta(r) = \frac{1}{2} \ln B \quad (2.32)$$

Ce changement va influencer les expressions des différents termes du tenseur d'Einstein. Commençons par les dérivées de la fonction  $\theta(r)$  qui s'écrivent :

$$\theta'(r) = \frac{1}{2} \frac{B'}{B} \quad (2.33)$$

et

$$\theta''(r) = \frac{1}{2} \left[ \frac{B''}{B} - \left( \frac{B'}{B} \right)^2 \right] \quad (2.34)$$

Le tenseur d'Einstein devient alors :

$$G_{00} = B \frac{2m'(r)}{r^2} \quad (2.35)$$

$$G_{11} = -A \left[ \frac{2(m(r) - r(r - 2m(r)\theta'(r)))}{r^3} \right] \quad (2.36)$$

$$G_{22} = -[S + m'(r)(r\theta'(r) + 1)] \quad (2.37)$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta \quad (2.38)$$

Nous rappelons que le terme S est donné par la relation (2.7) et peut être écrit comme :

$$S = -\frac{r^2}{A(r)} \Theta''(r) - \frac{r^2}{A(r)} \Theta'(r)^2 - \left[ \frac{r}{A(r)} + m(r) \right] \Theta'(r) - \frac{m(r)}{r} \quad (2.39)$$

Nous savons déjà que la fonction  $A(r) = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$ . Alors nous pouvons déduire que  $\frac{2m(r)}{r} = 1 - \frac{1}{A(r)}$  et  $\frac{2m'(r)}{r} = \frac{A'(r)}{A^2(r)} - \frac{1}{rA(r)} + \frac{1}{r}$ .

En remplaçant ces fonctions par leurs expressions dans les différents termes non nuls du tenseur d'Einstein, nous obtenons :

$$G_{00} = B \left[ \frac{A'}{rA^2} - \frac{1}{r^2A} + \frac{1}{r^2} \right] \quad (2.40)$$

$$G_{11} = A \left[ \frac{-1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) + \frac{1}{rA} \left(\frac{B'}{B}\right) \right] \quad (2.41)$$

$$G_{22} = \frac{r^2}{2A} \left(\frac{B''}{B}\right) - \frac{r^2}{4A} \left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \left[ \frac{r}{2A} - \frac{r^2 A'}{4A^2} \right] \left(\frac{B'}{B}\right) - \frac{rA'}{2A^2} \quad (2.42)$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta \quad (2.43)$$

En calculant la trace de ce tenseur, on obtient :

$$G = tr(G_{\mu\nu}) = -\frac{1}{A} \left(\frac{B''}{B}\right) + \frac{1}{2A} \left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \left[ \frac{A'}{2A^2} - \frac{2}{rA} \right] \left(\frac{B'}{B}\right) + \frac{2A'}{rA^2} - \frac{2}{r^2A} + \frac{2}{r^2} \quad (2.44)$$

Le tenseur d'Einstein et sa trace nous permettent d'obtenir le tenseur de Ricci défini par :

$$R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G \quad (2.45)$$

Nous calculons les différents termes non nuls de ce tenseur en se basant sur les équations (2.31), (2.40), (2.41), (2.42), (2.43) et (2.45). Nous aurons :

$$R_{00} = \frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left[ \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right] + \frac{B'}{rA} \quad (2.46)$$

$$R_{11} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left[ \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right] + \frac{A'}{rA} \quad (2.47)$$

$$R_{22} = 1 - \frac{r}{2A} \left[ \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right] - \frac{1}{A} \quad (2.48)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (2.49)$$

Le calcul du tenseur de Ricci qu'on vient de faire était basé sur la relation de ce dernier avec le tenseur d'Einstein (2.45) que nous avons dérivée de la définition initiale du tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ . Pareillement, nous pouvons calculer le tenseur de Ricci à travers sa relation avec le tenseur d'énergie-impulsion. Nous commençons par introduire ce dernier pour le cas d'un fluide parfait.

Un fluide parfait est caractérisée par deux paramètres importants qui sont la densité  $\rho$  et la pression  $p$ . Ainsi, un tenseur d'énergie impulsion pour un fluide parfait est défini par :

$$T_{\mu\nu} = -p g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_\mu U_\nu \quad (2.50)$$

Nous mentionnons que  $U$  est la quadri-vitesse de ce fluide. Il vérifie la relation  $g^{\mu\nu} U_\nu U_\mu = 1$ . Notons que notre choix du vecteur de vitesse est fait dans un référentiel où le fluide parfait est au repos, c'est-à-dire  $U_\mu = (\sqrt{B(r)}, 0, 0, 0)$

Alors les différents termes non nuls de  $T_{\mu\nu}$  sont :

$$T_{00} = B \cdot \rho \quad (2.51)$$

$$T_{11} = A p \quad (2.52)$$

$$T_{22} = A p r^2 \quad (2.53)$$

$$T_{33} = A p r^2 \sin^2 \theta \quad (2.54)$$

En calculant la trace de ce tenseur nous obtenons :

$$T = tr(T_{\mu\nu}) = \rho - 3p \quad (2.55)$$

Maintenant que nous avons bien introduit le tenseur d'énergie-impulsion, nous passons à la relation entre ce dernier et le tenseur de Ricci. Cette relation est très semblable à l'équation (2.45) et est donnée par :

$$R_{\mu\nu} = 8\pi \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right] \quad (2.56)$$

Nous pouvons donc déterminer les composantes non nulles du tenseur de Ricci en se basant sur (2.56) comme suit:

$$R_{00} = 4\pi(\rho + 3p)B \quad (2.57)$$

$$R_{11} = 4\pi(\rho - p)A \quad (2.58)$$

$$R_{22} = 4\pi(\rho - p)r^2 \quad (2.59)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (2.60)$$

Récapitulons ce que nous avons déjà fait ici. Nous avons calculé les composantes du tenseur de Ricci de deux manières, une fois en se basant sur sa relation avec le tenseur d'Einstein et une autre fois en se basant sur sa relation avec le tenseur d'énergie-impulsion caractérisant un fluide parfait. Par identification entre les équations {(2.46), (2.47), (2.48), (2.49)} et les équations {(2.57), (2.58), (2.59), (2.60)}, nous obtenons :



$$\frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left[ \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right] + \frac{B'}{rA} = 4\pi(\rho + 3p)B \quad (2.61)$$

$$-\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left[ \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right] + \frac{A'}{rA} = 4\pi(\rho - p)A \quad (2.62)$$

$$1 - \frac{r}{2A} \left[ \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right] - \frac{1}{A} = 4\pi(\rho - p)r^2 \quad (2.63)$$

Ces trois équations sont des équations majeures pour notre analyse du cas de notre bulle. Nous rappelons que cette dernière est statique et à symétrie sphérique. Il est absolument clair que ces équations ne sont pas faciles à résoudre non plus à comprendre.

Ce système des trois égalités permet de résoudre les paramètres  $A$  ou plutôt  $m(r)$ ,  $B$ ,  $p$  et  $\rho$  seulement dans le cas où  $B$  s'expriment en fonction de  $A$ . Sinon, dans le cas où  $B$  et  $A$  sont des fonctions complètement indépendantes, nous aurons besoin d'une quatrième équation pour trouver ces quatre paramètres. Cette équation sera la condition de l'équilibre hydrostatique.

Donc pour faciliter leur aspect mathématique compliqué, considérons la description suivante : supposons que nous avons une bulle dont l'intérieur est défini par l'espace de De Sitter pure. Ce corps sphérique est plongé dans un espace Schwarzschild-De Sitter. La logique nous oblige de se demander quelles sont les caractéristiques de la zone qui sépare l'intérieur de la bulle de son extérieur. Certains appellent cette zone « la peau » de la bulle mais nous avons choisi de l'appeler « la zone d'interpolation »<sup>14</sup>. Nous supposons dans notre travail que cette zone est une couche relativement épaisse contenant un fluide parfait dont le tenseur est défini par l'équation (2.50) et que nous essayerons de déterminer sa pression et sa densité.

---

<sup>14</sup>Ce choix d'appellation sera expliqué plus tard.

Nous commencerons par trouver ces paramètres en considérant un cas particulier puis nous passerons à la généralisation en diminuant le nombre d'hypothèses utilisées!

### 2.2.1 Cas particulier

Avant de traiter le cas général pour la fonction  $B$ , nous allons étudier la densité et la pression du fluide parfait en tenant compte de la relation entre  $A$  et  $B$  que nous avons déjà utilisé pour le cas du champ scalaire. Cette hypothèse est :

$$B = A^{-1} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \quad (2.64)$$

Donc la métrique (2.31) est dans ce cas la même que celle donnée par la relation (2.9).

À l'aide des équations (2.61) et (2.62) on peut faire l'opération  $\frac{A}{B}(2.61) + (2.62)$  qui nous donne :

$$\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} = 8\pi[\rho + p]Ar \quad (2.65)$$

Or notre hypothèse nous permet d'écrire  $\frac{B'}{B} = -\frac{A'}{A}$ . Ceci implique que la relation (2.65) est nulle. On obtient alors une relation entre la densité et la pression du fluide donnée par :

$$p = -\rho \quad (2.66)$$

Trouvons maintenant l'expression de densité. En utilisant la même hypothèse, l'équation (2.63) nous donne :

$$1 + r \frac{A'}{A} - \frac{1}{A} = 8\pi\rho r^2 \quad (2.67)$$

Ceci permet d'obtenir l'expression de la densité :

$$\rho = \frac{1}{8\pi r^2} \left[ 1 + r \frac{A'}{A} - \frac{1}{A} \right] \quad (2.68)$$

et en remplaçant  $A$  par son expression nous trouvons :

$$\rho = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{m'(r)}{r^2} \right) \quad (2.69)$$

Avant d'interpréter notre résultat, nous devons vérifier les conditions d'énergie pour s'assurer qu'on est sur le bon chemin.

### 2.2.1.1 Vérification des conditions d'énergie :

Les conditions d'énergie, telle qu'introduite précédemment, sont un ensemble de conditions capables de contribuer à la description de la matière dans l'espace-temps que nous étudions.

Puisque nous nous intéressons à un fluide parfait, nous allons fixer nos conditions d'énergie applicable sur ce cas. Nous allons les appliquer sur la pression  $p$  et la densité  $\rho$  de notre fluide parfait. Telles qu'indiqués dans chapitre précédent, les trois conditions d'énergie s'interprètent en un ensemble de système d'inégalité données comme suit :

La condition d'énergie Faible :

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \rho + p \geq 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

La condition d'énergie dominante :

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \rho \geq |p| \\ \rho^2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

La condition d'énergie forte :

$$\begin{cases} \rho + 3p \geq 0 \\ \rho + p \geq 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

### 2.2.1.2 Interprétation

En considérant notre résultat  $p = -\rho$ , nous remarquons que toutes les inégalités sont satisfaites sauf la première inégalité du système donnée par (2.72), c'est-à-dire la condition d'énergie forte est non valide. Mais puisqu'il existe beaucoup de systèmes physiques qui violent cette condition, nous allons admettre qu'elle est pareillement violée par notre cas. Mais ceci n'influencera pas notre travail!

Maintenant que nous avons vérifié que les conditions d'énergie sont satisfaites, nous revenons à nos résultats donnés par (2.66) et (2.69). On peut interpréter ces équations par le fait qu'il s'agit d'un vide ou plutôt de la matière noire. Mais pour nous, ce résultat reste toujours non satisfaisant puisque nous avons supposé qu'au niveau de la zone d'interpolation nous avons un fluide parfait. Et par la suite, il est illogique de trouver  $p = -\rho$  là-dessus.

Alors nous allons garder ce résultat pour les zones extérieure et intérieure de la bulle déjà définies respectivement par l'espace Schwarzschild-De Sitter et De Sitter pure puisque ce résultat est déjà attendu pour ces deux espaces. Mais nous continuons à chercher la pression pour la zone d'interpolation.

Maintenant que nous avons trouvé un résultat convainquant pour l'intérieur et l'extérieur de la bulle, nous allons vérifier ces résultats en faisant les calculs inversés. C'est-à-dire nous supposons que l'équation (2.66) est vraie et nous vérifions que ceci nous donnera la relation  $B = A^{-1}$ .

En prenant  $p = -\rho$  et multipliant les équations (2.61), (2.62) et (2.63) respectivement par  $\frac{1}{2B}$ ,  $\frac{1}{2A}$  et  $\frac{1}{r^2}$ ; nous obtenons :

$$\frac{B''}{4AB} - \frac{B'}{8AB} \left[ \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right] + \frac{B'}{2rAB} = -4\pi\rho \quad (2.73)$$

$$-\frac{B''}{4AB} + \frac{B'}{8AB} \left[ \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right] + \frac{A'}{2rA^2} = 4\pi\rho \quad (2.74)$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2rA} \left[ \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right] - \frac{1}{r^2A} = 8\pi\rho \quad (2.75)$$

Les deux équations (2.73) et (2.74) peuvent être écrites respectivement :

$$\frac{B''}{4AB} - \frac{B'}{8AB} \left[ \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right] = \frac{1}{rA} \left( \frac{-B'}{B} \right) - 4\pi\rho \quad (2.76)$$

$$\frac{B''}{4AB} - \frac{B'}{8AB} \left[ \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right] = \frac{1}{rA} \left( \frac{A'}{A} \right) - 4\pi\rho \quad (2.77)$$

En observant les équations (2.76) et (2.77), nous pouvons conclure :

$$\frac{A'}{A} = -\frac{B'}{B} \quad (2.78)$$

Ainsi, nous avons réussi à refaire le calcul à l'envers. Ce calcul était tout simplement fait pour vérifier notre démarche et nous ne nous sommes pas trompés. Alors dans ce qui suit nous allons utiliser la métrique généralisée déjà introduite et donnée par l'équation (2.31).

Mais ça n'empêche que les résultats de pression et de densité resteront valides pour l'espace interne et externe de la bulle et que ce changement de la métrique n'influencera que l'expression de la pression. Ceci sera traduit par un calcul numérique effectué à l'aide du logiciel « Mathematica ».

La partie suivante expliquera notre démarche effectuée pour tracer la courbe de pression en fonction du paramètre radial de l'espace. Ce résultat dépendra de plusieurs conditions à respecter et des plusieurs paramètres à définir.

## 2.2.2 Généralisation

Pour le cas général, nous supposons que  $A$  et  $B$  sont deux fonctions indépendantes et que nous ne connaissons que l'expression de  $A$  donnée par :

$$A = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} \quad (2.79)$$

Nous commençons par une simplification des équations (2.61), (2.62) et (2.63) qui nous permettront d'obtenir une expression générale de la fonction  $B$  et la densité  $\rho$ .

La première opération est  $\frac{(2.61)}{2B} + \frac{(2.62)}{2A} + \frac{(2.63)}{r^2}$ . Elle nous permet d'obtenir une expression générale de la densité  $\rho$  en fonction de  $A$  donnée par :

$$\rho = \frac{1}{8\pi r^2} \left[1 + r \frac{A'}{A} - \frac{1}{A}\right] \quad (2.80)$$

En remplaçant  $A$  par son expression donnée par (2.79), nous obtenons :

$$\rho = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{m'(r)}{r^2}\right) \quad (2.81)$$

La deuxième opération est  $\frac{(2.61)}{2B} + \frac{(2.62)}{2A} - \frac{(2.63)}{r^2}$ . Elle nous permet d'obtenir l'égalité suivante :

$$\frac{1}{rA} \frac{B'}{B} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 A} = 8\pi p \quad (2.82)$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{B'}{B} &= -\frac{1}{r} + [1 + 8\pi p r^2] \frac{A}{r} \\ &= \frac{2}{r^2} \left[ r \left(1 - \frac{1}{A}\right) + 4\pi r^3 p \right] A \end{aligned} \quad (2.83)$$

En se basant sur l'équation (2.79), nous pouvons écrire  $m(r) = \frac{r}{2} \left[ 1 - \frac{1}{A} \right]$ . Donc l'équation (2.83) devient :

$$\frac{B'}{B} = \frac{2}{r^2} [m(r) + 4\pi r^3 p] A \quad (2.84)$$

Finalement une simple intégration des deux côtés nous donne :

$$B = \exp \left[ \int_{r'}^{\infty} \frac{2}{r^2} (m(r) + 4\pi r^3 p) A \, dr \right] \quad (2.85)$$

Nous rappelons que dans notre cas on peut utiliser la condition d'équilibre hydrostatique [21] donnée par la formule :

$$\frac{B'}{B} = \frac{-2p'}{p + \rho} \quad (2.86)$$

Des équations (2.84) et (2.86) nous dérivons la relation :

$$\frac{2}{r^2} (m(r) + 4\pi r^3 p) A = \frac{-2p'}{p + \rho} \quad (2.87)$$

Dans l'équation (2.87), nous remplaçons la densité  $\rho$  par son expression donnée par l'équation (2.81) puis nous utilisons l'expression de  $A$ . Alors nous aurons l'équation différentielle de la pression :

$$p'(r) = \frac{4\pi}{2m(r) - r} p^2(r) + \frac{m(r) + rm'(r)}{r(2m(r) - r)} p(r) + \frac{m(r)m'(r)}{4\pi r^3(2m(r) - r)} \quad (2.88)$$

En observant cette équation, nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'une équation différentielle de Riccati. Ce genre d'équations est difficile à résoudre analytiquement. C'est pour cette raison nous allons essayer de résoudre cette équation numériquement. Dans ce but, nous fixons les paramètres de l'équation. Commençons par la masse  $m(r)$ . Le choix de ce paramètre pour la zone extérieure et intérieure de la bulle est déjà fait en déterminant qu'ils sont respectivement définis par l'espace Schwarzschild-De Sitter et De Sitter pure.

Donc, il ne reste que de faire le choix du paramètre de masse pour la zone d'interpolation.

Notons les limites interne et externe de cette couche respectivement par  $x$  et  $y$ . dans ce cas, la masse sera définie par :

$$m(r) = \begin{cases} \frac{\lambda r^3}{6} & r < x \\ I(r) & x < r < y \\ \frac{\lambda' r^3}{6} - M & r > y \end{cases} \quad (2.89)$$

Nous rappelons que  $M$  est une constante déjà introduite précédemment et que  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont les constantes cosmologiques respectivement des espaces De Sitter pure et Schwarzschild-De Sitter. La fonction  $I(r)$  est appelée « fonction d'interpolation » du premier espace vers le deuxième via la région du fluide parfait d'où son appellation « zone d'interpolation ».

Après un certain nombre d'essaies, nous avons réussi à trouver une fonction  $I(r)$  permettant d'interpoler entre les deux fonctions de masse d'une façon lisse. Elle est de la forme :

$$I(r) = a(r - x)^3 \quad (2.90)$$

Nous n'oublions pas de dire que «  $a$  » est une constante déterminée par les conditions aux limites.

Aussi, nous avons décidé pour ce fait de faire une petite modification qui n'influencera pas physiquement les résultats à trouver mais facilitera l'interpolation et la résolution de l'équation de pression. Cette modification est de considérer un espace de Minkowski à l'intérieur de la bulle et un espace Schwarzschild-De Sitter à l'extérieur. Ce dernier est défini par une constante cosmologique  $\Lambda$  égale à la différence entre les constantes cosmologiques



extérieure et intérieure c'est-à-dire  $\Lambda = \lambda' - \lambda$  . Alors le paramètre de masse devient :

$$m(r) = \begin{cases} m_1(r) = 0 & r < x \\ I(r) = a(r - x)^3 & x < r < y \\ m_2(r) = \frac{\Lambda r^3}{6} - M & r > y \end{cases} \quad (2.91)$$

La première dérivée de cette fonction de masse est donnée par :

$$m'(r) = \begin{cases} m_1'(r) = 0 & r < x \\ I'(r) = 3a(r - x)^2 & x < r < y \\ m_2'(r) = \frac{\Lambda r^2}{2} & r > y \end{cases} \quad (2.92)$$

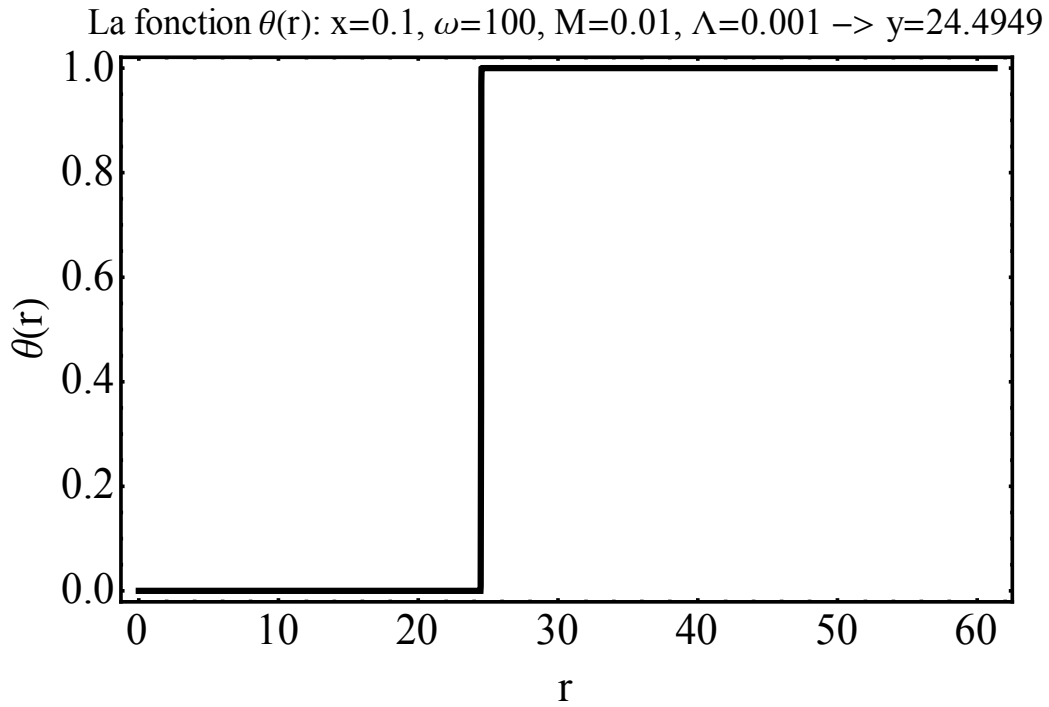
En appliquant les conditions de continuité de la fonction de masse  $m(r)$  et de a première dérivée  $m'(r)$  aux points  $x$  et  $y$ , nous obtenons:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{6M}{\Lambda x}} \\ a = \frac{\Lambda y^2}{6(y - x)^2} \end{cases} \quad (2.93)$$

En essayant de tracer les courbes de  $m(r)$ ,  $m'(r)$ ,  $p(r)$  et  $\rho(r)$ , nous avons remarqué que l'intégration par partie et même la résolution par partie ne nous permettent pas d'obtenir des courbes lisses. Il n'y avait aucun problème lors de l'intégration au niveau de la limite interne de la zone d'interpolation de la bulle ( $r=x$ ). Mais nous avons eu beaucoup de problèmes au niveau de la limite externe de la zone d'interpolation ( $r=y$ ).

Donc pour les résoudre, nous introduisons une fonction capable de remplacer la fragmentation de la fonction de masse sans influencer son allure. Elle permet à la fois d'interpoler entre l'intérieur et l'extérieur de la bulle sans apparition de fluctuation ou d'onde perturbatrice et de donner une expression unique et non fragmentée de la masse.

Figure 1



Cette fonction est noté par  $\theta(r)$ . Son allure est donnée par la Figure 1 et son expression est donnée par :

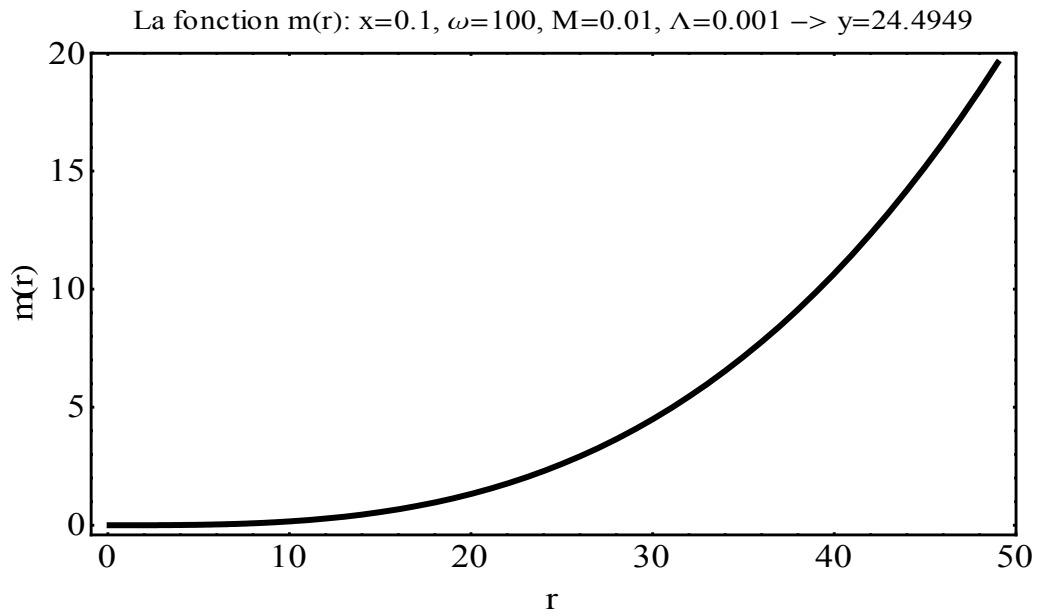
$$\theta(r) = \frac{1}{2} \tanh[\omega(r - y) + 1] \quad (2.94)$$

Alors, l'expression de la masse, en utilisant les équations (2.91) et (2.94), devient :

$$m(r) = \begin{cases} 0 & r < x \\ I(r)[1 - \theta(r)] + m_2(r)\theta(r) & r > x \end{cases} \quad (2.95)$$

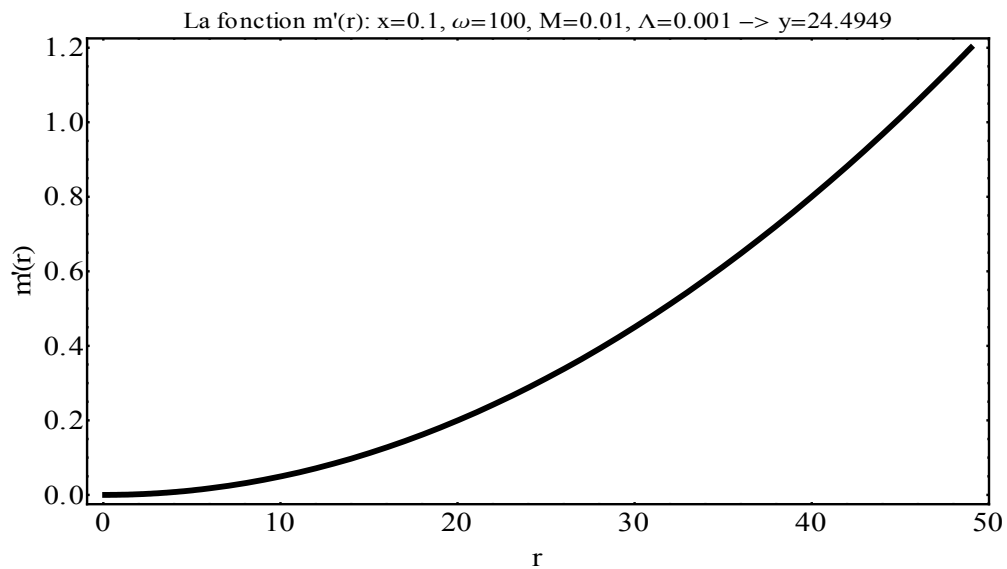
La courbe obtenue de  $m(r)$  est lisse et est donnée par la Figure2.

Figure 2

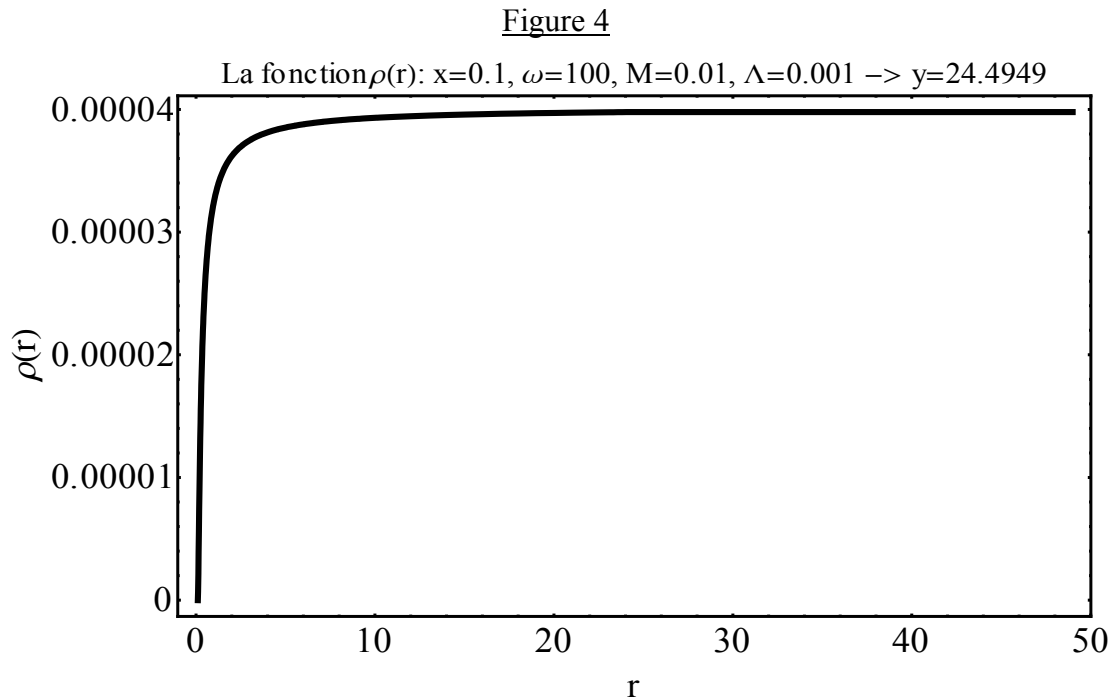


Maintenant que nous avons obtenu une expression simple de la masse, nous rappelons que sa première dérivée doit être continue pour que nos hypothèses soient valides. Ceci est démontré par l'obtention de sa courbe donnée par la figure3.

Figure 3

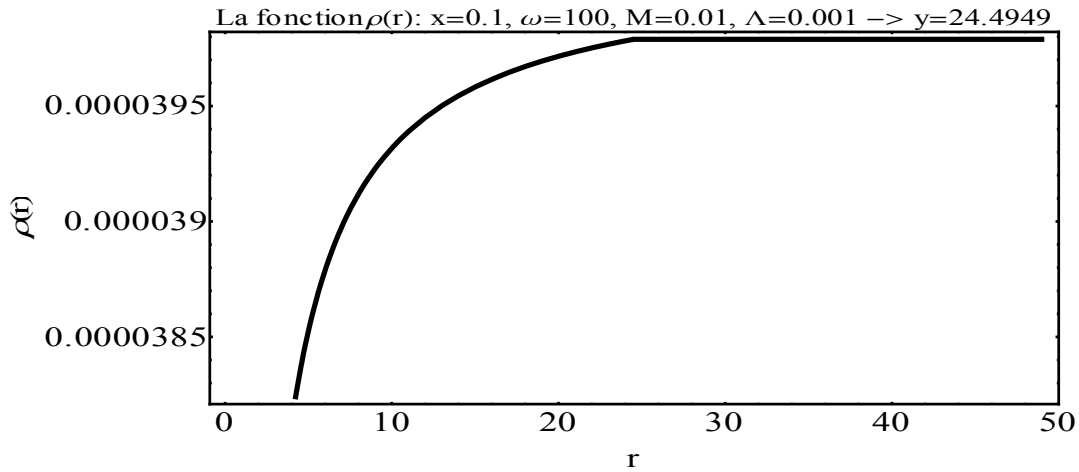


Maintenant que nous avons fixé nos paramètres pour la résolution graphique de densité et de pression, nous sommes capables de trouver une courbe numérique de la fonction densité en se basant sur les équations (2.81). Cette courbe est donnée par la Figure 4 :



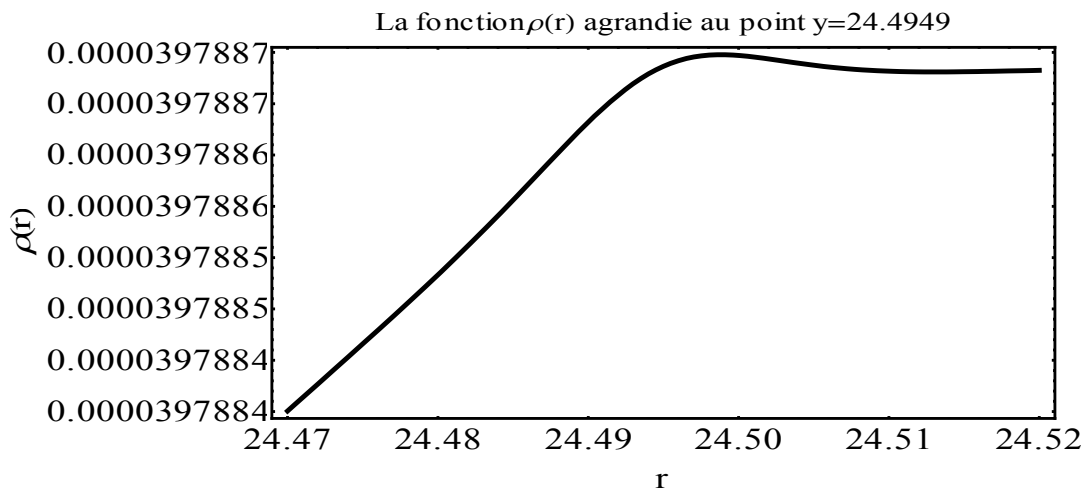
Cette courbe est en parfait accord avec nos hypothèses. Une densité croissante jusqu'à arriver à la limite externe de la zone d'interpolation et finalement constante à l'extérieur en maintenant toujours une valeur positive : ce résultat est bien évidemment ce que nous attendons. Nous faisons un premier agrandissement de la Figure 4 au niveau des valeurs de la densité nous permet d'obtenir la Figure 5.

Figure 5



Mais, nous remarquons qu'à la limite externe de la zone d'interpolation de la bulle il apparait une allure qui ressemble à une discontinuité! Donc pour s'assurer de notre résultat, nous avons fait une résolution de la courbe de densité entre les limites proches du point douté, c'est-à-dire la limite externe de la zone d'interpolation ou aussi le point  $r=y$ . Nous avons obtenu l'allure représentée par la Figure 6. Cette courbe ne contredit pas les résultats attendus. En ce point particulier, la courbe de pression reste toujours lisse et l'interpolation ne fait pas apparaitre des ondes perturbatrices. Pour cette raison, nous acceptons ce résultat.

Figure 6



Il reste maintenant à obtenir une courbe pour la pression pour pouvoir confirmer que notre bulle est bien définie par un fluide parfait.

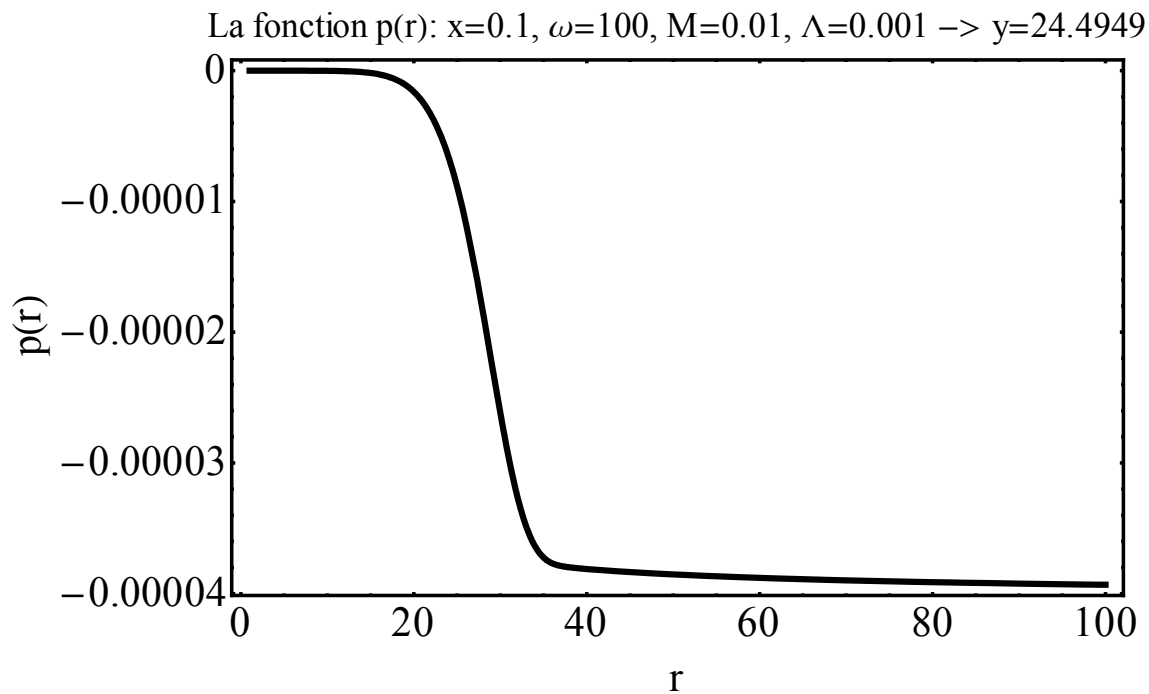
Le paramètre de pression est donné par l'équation (2.88). Cette équation est très difficile à résoudre analytiquement. Mais la résolution numérique est possible. Donc pour ce fait, nous l'avons réécrit d'une manière à faciliter la tâche pour le logiciel.

Elle est devenue :

$$p'(r) = \frac{(4\pi x^3 r^2 p(r) + m'(r)) \left( \frac{m(r)}{4\pi x^3 r^3} + p(r) \right)}{2m(r) - xr} \quad (2.96)$$

En remplaçant la masse par sa nouvelle expression dépendante de la fonction  $\theta(r)$ , nous obtenons la courbe de pression représentée dans la Figure 7.

Figure 7



Pareillement à la courbe de densité, celle du paramètre de pression est aussi en parfait accord avec nos hypothèses. Une pression négative décroissante en fonction du paramètre radial  $r$  jusqu'à arriver à la limite externe de la zone d'interpolation où elle devient constante est ce que nous voulions trouver.

Les choix fait des variables qui ont permis la résolution numérique des paramètres de la bulle était particuliers. Nous avons respecté dans nos choix les valeurs numériques de  $M$  et de  $\Lambda$  la condition de l'horizon de Schwarzschild-De Sitter donnée, en se basant sur [3], par :

$$3M\sqrt{\Lambda} \ll 1 \tag{2.97}$$

En effet, la bulle doit être loin de l'horizon et le croisement des fonctions de masse que nous avons interpolé doit être fait dans une région qui ne dépasse pas l'horizon. D'une manière plus claire, il faut que la limite externe de la bulle ou bien «  $y$  » ne soit pas plus grande que le rayon de l'horizon. Mais puisque les paramètres «  $x$  » et «  $y$  » qui sont respectivement les limites interne et externe de la bulle dépendent de  $M$  et  $\Lambda$ , alors la condition à respecter est basée sur ses deux paramètres et est donnée par l'équation (2.97).

Ainsi, nous avons réussi à bien définir une bulle de masse négative définie par un fluide parfait et à fixer ses paramètres.

En résumé, nous avons d'abord donné des formules générales des équations d'Einstein pour une bulle de masse négative statique et à symétrie sphérique définie par un fluide parfait. Ensuite, nous avons traité le cas particulier où les deux fonctions  $B(r)$  et  $A(r)$  de la métrique sont inversement proportionnelles. Finalement nous avons généralisé les solutions obtenues en considérant que  $A(r)$  et  $B(r)$  sont indépendantes et par la suite nous avons réussi à bien définir numériquement les paramètres du fluide parfait.

## Conclusion

La relativité générale était à l'origine d'un changement radical de la compréhension de l'espace, du temps et principalement de la gravitation. Elle nous a permis d'expliquer plusieurs phénomènes physiques et de trouver des réponses à plusieurs problèmes tels que celui que nous avons traité dans ce texte : les bulles de vide de masse négative.

D'abord, nous avons éliminé l'hypothèse qui disait que ce genre de bulle se forme suite à une déformation d'un champ scalaire. Cette élimination s'est basée sur la résolution des équations d'Einstein qui ont prouvé que ce cas n'est pas possible et qu'une déformation d'un champ scalaire ne peut pas donner naissance à une bulle de vide de masse négative.

Ensuite, nous avons supposé que la bulle est formée par un fluide parfait. Cette idée était prouvée par étape et était fructueuse puisque nous sommes arrivés à donner des courbes de résolution numérique des paramètres de pression et de densité telle que prévu. Nous pouvons donc dire que nous avons réussi à donner une distribution de la matière ou l'énergie des bulles de masse négative dans un espace de De Sitter qui sont non singulières et qui donnent naissance à la géométrie de Schwarzschild-De Sitter de masse négative à l'extérieur de ces bulles.

Finalement, en arrivant à ce niveau, plusieurs autres questions commencent à se poser telles que : comment ces bulles de vide de masse négative se forment? Peuvent-elles être nées par production de pair de bulles à



travers l'effet tunnel quantique? Y aura-t-il d'autres distributions de matière qui permettent de définir ces bulles de masse négative?...etc

La réussite à trouver une réponse à une question est toujours à l'origine de la naissance de plusieurs autres questions. Nous pensons que ce que nous avons traité dans ce document peut être une réponse à une parmi une infinité de questions sur notre univers et nous espérons que les physiciens continuerons à dévoiler ses secrets et à expliquer ses mystères.

## Bibliographie

- [1] J. Belletête. *Structure et interactions de bulles d'Espaces-temps en relativité générale*. Université de Montréal, 2012.
- [2] J. Belletête and M. B. Paranjape. *On negative mass*. International Journal of Modern Physics D, Vol. 22, No. 9, 2013.
- [3] S. Bhattacharaya and A. Lahiri. *Mass fonction and particle creation in Schwarzschild-De Sitter spacetime*. arXiv:1301.4532, 2013.
- [4] H. Bondi. *Negative mass in General Relativity*. Review Of Modern Physics, Vol. 29, No. 3, 1957.
- [5] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry: an introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2003.
- [6] P. M. Cohn. *Algebra*, Vol.1. Wiley-Blackwell, 1982.
- [7] Roland Fortunier. *Notes de cours : Éléments de calcul tensoriel*.
- [8] Mike Guidry. *Theoretical Astrophysics*. To be published
- [9] J. Hladik. *Introduction à la Relativité Générale*. Ellispes Édition Marketing, 2006.
- [10] Honson, Efstathou et Lasenby. *Relativité Générale*. De boeck, 2010.
- [11] K. Lake. *All static spherically symmetric perfect fluid solutions of Einstein's equations*. arXiv :gr-qc/0209104v4, 2008.
- [12] B. Linet. *Notes de cours de Relativité Générale*.
- [13] Malcolm Ludvigsen. *La Relativité Générale : une approche géométrique*. Paris: Dunad, 2000.
- [14] R. Mann. *Black holes of negative mass*. Class.Quant.Grav.14(1997)2927-2930, 1997.

- [15] Misner, Thorne and Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [16] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. An introduction to quantum field theory. ABP- Westview Press, 1995.
- [17] Eric Poisson. *A Relativist's toolkit*. Cambridge University Press, 2004.
- [18] A. Pressley. *Elementary Differential Geometry*. Springer, 2007.
- [19] Hans Stephani. *Relativity: an introduction to Special and General Relativity*. Cambridge University Press, 2004.
- [20] J. D. Walecka. *Introduction to General Relativity*. World Scientific Publishing, 2007.
- [21] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology : principles and applications of the General Relativity*. New York : John Wiley and Sons, 1972.

## Annexe : Les codes numériques

Ces codes sont les codes utilisés pour obtenir les figures du chapitre 2. Nous avons fait des modifications de notation pour que le programme fonctionne. Voici les changements de notation effectués : le paramètre radial  $r \rightarrow x$  ; la limite interne de la zone d'interpolation de la bulle  $x \rightarrow \delta$  ; la limite externe de la zone d'interpolation de la bulle  $y \rightarrow X$ .

### 1) La fonction $\theta(r)$ :

```
 $\delta = .1;$   
 $G = 1;$   
 $\Lambda = 0.001;$   
 $M = .01;$   
 $\omega = 100;$   
 $X = \text{Sqrt}[6 * M / (\delta * \Lambda)]$   
 $\theta[x\_]:= (\text{Tanh}[\omega(x - X)] + 1)/2;$   
 $\text{Plot}[\theta[x], \{x, 0, 2.5X\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\{\text{Thickness}[.009], \text{Hue}[0.]\}\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{"r", "\theta(r)"}]$ 
```

### 2) La fonction $m(r)$ :

```
 $\delta = .1;$   
 $G = 1;$   
 $\Lambda = 0.001;$   
 $M = .01;$   
 $\omega = 100;$   
 $X = \text{Sqrt}[6 * M / (\delta * \Lambda)]$   
 $f[x\_]:= \Lambda X^2 (x - \delta)^3 / (6(X - \delta)^2)$   
 $g[x\_]:= ((\Lambda x^3 / 6)) - M;$   
 $\theta[x\_]:= (\text{Tanh}[\omega(x - X)] + 1)/2;$ 
```

$$m[x_] := ((\Lambda X^2 (x - \delta)^3 / (6(X - \delta)^2)) * (1 - ((\text{Tanh}[\omega(x - X)] + 1) / 2)))$$

$$+ (((\Lambda x^3 / 6) - M) * ((\text{Tanh}[\omega(x - X)] + 1) / 2))$$

Plot[m[x], {x, \delta, 2X}, PlotStyle -> {{Thickness[.009], Hue[0.]}}, PlotRange  
-> All, AxesLabel -> {"r", "m(r)"}]

### 3) La fonction m'(r) :

$$\delta = .1;$$

$$G = 1;$$

$$\Lambda = 0.001;$$

$$M = .01;$$

$$\omega = 100;$$

$$X = \text{Sqrt}[6 * M / (\delta * \Lambda)]$$

$$f[x_] := \Lambda X^2 (x - \delta)^3 / (6(X - \delta)^2);$$

$$g[x_] := ((\Lambda x^3 / 6) - M);$$

$$\theta[x_] := (\text{Tanh}[\omega(x - X)] + 1) / 2;$$

$$m[x_] := ((\Lambda X^2 (x - \delta)^3 / (6(X - \delta)^2)) * (1 - ((\text{Tanh}[\omega(x - X)] + 1) / 2)))$$

$$+ (((\Lambda x^3 / 6) - M) * ((\text{Tanh}[\omega(x - X)] + 1) / 2));$$

Plot[m'[x], {x, \delta, 2X}, PlotStyle -> {{Thickness[.009], Hue[0.]}}, PlotRange  
-> All, AxesLabel -> {"r", "m'(r)"}]

### 4) La fonction p(r) :

$$\delta = .1;$$

$$G = 1;$$

$$\Lambda = .001;$$

$$\lambda = \Lambda * \delta^3;$$

$$M = .01;$$

$$\Omega = 100;$$

$$X = \text{Sqrt}[6 * M / (\delta * \Lambda)]$$

$$Y = \text{Sqrt}[6 * M / (\delta^3 * \Lambda)];$$

```

ep = Y/1000;
f[y_]:= λ * Y^2 (y - 1)^3/(6(Y - 1)^2)
g[y_]:= ((λ * y^3/6)) - M;
θ[y_]:= (Tanh[Ω * (y - Y)] + 1)/2;
m[y_]:= (f[y] * (1 - θ[y])) + (g[y] * θ[y])
solution = NDSolve [
  {Z'[y] == (((4πG * δ^3 * y^2 * Z[y] + m'[y]) * ((m[y] / 4 πG * δ^3 * y^3 ) + Z[y])))
    / ((2 * m[y] - δ * y ), Z[1] == 0}, Z, {y, 1, 2Y}, MaxSteps → 10000000];
Plot[Evaluate[{Z[y]}/. solution], {y, 1, 100}, PlotStyle
  → {{Thickness[.009], Hue[0. ]}}, PlotRange → All, AxesLabel → {"y", "p(y)"}]

```

### 5) La fonction $\rho(r)$ :

```

δ = .1;
G = 1;
Λ = 0.001;
M = .01;
ω = 100;
X = Sqrt[6 * M/(δ * Λ)]
f[x_]:= ΛX^2 (x - δ)^3/(6(X - δ)^2);
g[x_]:= ((Λ x^3/6)) - M;
θ[x_]:= (Tanh[ω(x - X)] + 1)/2;
m[x_]:= (f[x] * (1 - θ[x])) + (g[x] * θ[x]);
ρ[x_]:= (m'[x])/(4πGx^2);
Plot[ρ[x], {x, δ, 2X}, PlotStyle → {{Thickness[.009], Hue[0. ]}}, AxesLabel → {"r", "ρ(r)"}]

```