

Université de Montréal

**États cohérents et comprimés du potentiel de Morse et intrication  
créée par un miroir semi-transparent**

par  
Anaëlle Hertz

Département de physique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)  
en physique

mai, 2013

© Anaëlle Hertz, 2013.

Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**États cohérents et comprimés du potentiel de Morse et intrication  
créée par un miroir semi-transparent**

présenté par:

Anaëlle Hertz

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Manu Paranjape,	président-rapporteur
Véronique Hussin,	directrice de recherche
Yvan Saint-Aubin,	membre du jury

Mémoire accepté le: 20 juin 2013

## RÉSUMÉ

Pour décrire les vibrations à l'intérieur des molécules diatomiques, le potentiel de Morse est une meilleure approximation que le système de l'oscillateur harmonique. Ainsi, en se basant sur la définition des états cohérents et comprimés donnée dans le cadre du problème de l'oscillateur harmonique, la première partie de ce travail suggère une construction des états cohérents et comprimés pour le potentiel de Morse. Deux types d'états seront construits et leurs différentes propriétés seront étudiées en portant une attention particulière aux trajectoires et aux dispersions afin de confirmer la quasi-classicité de ces états. La deuxième partie de ce travail propose d'insérer ces deux types d'états cohérents et comprimés de Morse dans un miroir semi-transparent afin d'introduire un nouveau moyen de créer de l'intrication. Cette intrication sera mesurée à l'aide de l'entropie linéaire et nous étudierons la dépendance par rapport aux paramètres de cohérence et de compression.

**Mots clés :** États cohérents et comprimés, potentiel de Morse, quasi-classicité, miroir semi-transparent, intrication, entropie linéaire.

## ABSTRACT

In order to describe the vibrations inside a diatomic molecule, the Morse potential is a better approximation than the harmonic oscillator system. Thus, based on the definition of the coherent states given in the context of the harmonic oscillator, the first part of this work suggests a construction for the squeezed coherent states of the Morse potential. Two types of states will be constructed and their diverse properties will be studied with special attention to the trajectories and dispersions in order to confirm their quasi-classicity. The second part of this work proposes to insert those two types of Morse squeezed coherent states in a beam splitter in order to introduce a new way of creating entanglement. This entanglement will be measured by the linear entropy and we will study the dependence with the coherence and squeezing parameters.

**Keywords:** Squeezed coherent states, Morse potential, quasi-classicity, beam splitter, entanglement, linear entropy.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	<b>xi</b>
<b>INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>1</b>
Bibliographie . . . . .	4
<b>CHAPITRE 1 : ÉTATS COHÉRENTS ET COMPRIMÉS DE L’OS- CILLATEUR HARMONIQUE</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1 Définition des états cohérents et comprimés . . . . .	6
1.2 Le modèle . . . . .	8
1.3 Valeurs moyennes et dispersions . . . . .	9
1.4 Trajectoires . . . . .	15
1.4.1 Cas classique . . . . .	15
1.4.2 Cas quantique . . . . .	17
1.5 Densités de probabilité . . . . .	19
1.6 États cohérents et comprimés à travers un miroir semi-transparent .	21
Bibliographie . . . . .	24
<b>CHAPITRE 2 : SQUEEZED COHERENT STATES AND THE ONE- DIMENSIONAL MORSE QUANTUM SYSTEM</b> .	<b>26</b>
2.1 Introduction . . . . .	27
2.2 Squeezed coherent states for a quantum system with infinite spectrum	29
2.3 The Morse potential and different types of squeezed coherent states	31

2.3.1	The model . . . . .	31
2.3.2	Ladder operators . . . . .	32
2.3.3	The harmonic oscillator limit . . . . .	33
2.3.4	Squeezed coherent states and their time evolution . . . . .	34
2.3.5	Oscillator-like squeezed coherent states . . . . .	38
2.3.6	Energy-like squeezed coherent states . . . . .	39
2.3.7	Behaviour of the squeezed coherent states for the case of the hydrogen chloride molecule . . . . .	42
2.3.8	Coherent system of states ( $\gamma = 0$ ) . . . . .	43
2.3.9	Squeezed vacuum ( $z = 0$ ) . . . . .	45
2.3.10	General system of states . . . . .	46
2.4	Conclusions . . . . .	47
	Bibliographie . . . . .	49

**CHAPITRE 3 : BEAM SPLITTER AND ENTANGLEMENT CREA-  
TED WITH THE SQUEEZED COHERENT STATES  
OF THE MORSE POTENTIAL . . . . . 53**

3.1	Introduction . . . . .	54
3.2	Squeezed coherent states and generalized Heisenberg algebra . . . . .	55
3.3	Beam splitter and a measure of entanglement . . . . .	57
3.3.1	Beam splitting transformation . . . . .	57
3.3.2	Linear entropy as a quantification of entanglement . . . . .	59
3.3.3	Harmonic oscillator squeezed coherent states and measure of entanglement . . . . .	60
3.4	The Morse squeezed coherent states and measure of entanglement . . . . .	64
3.4.1	The model . . . . .	64
3.4.2	Dynamical behaviour of the linear entropy . . . . .	68
3.4.3	Entanglement and non-symmetric beam splitter . . . . .	69
3.5	Conclusions . . . . .	70
	Bibliographie . . . . .	72

CONCLUSION . . . . .	76
Bibliographie . . . . .	78
ANNEXE A : RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE RÉCURRENCE POUR LA FONCTION $Z(z, \gamma, n)$ . . . . .	xii
ANNEXE B : TRAJECTOIRES OUVERTES DANS L'ESPACE DE PHASE POUR LES ÉTATS COMPRIMÉS DE MORSE . . . . .	xvi

## LISTE DES FIGURES

1.1	Dispersion en $\hat{X}$ et en $\hat{P}$ et produit des dispersions en fonction du paramètre de compression $\gamma$ . . . . .	13
1.2	Dispersion en $\hat{X}$ et en $\hat{P}$ et produit des dispersions pour $\gamma = 0$ (ligne pleine) et $\gamma = 0.2$ (lignes en pointillés). . . . .	14
1.3	Densité de probabilité $ \psi(1.2, 0.2, x, t) ^2$ pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ . . .	15
1.4	Trajectoire d'une particule dans un oscillateur harmonique avec comme condition initiale $z(0) = 1 + i$ et une vitesse angulaire $\omega = 1$ . . .	16
1.5	À gauche, trajectoire décrite par un état cohérent avec $\omega = 1$ et $z = 3$ et à droite, trajectoire décrite par un état comprimé avec $\omega = 1$ , $z = 3$ et $\gamma = 0.4$ . La courbe pleine représente la trajectoire et les cercles (ellipses) sont les « cercles d'erreur » (« ellipses d'erreur ») causés par la dispersion qui intervient dans le cas quantique. . . .	18
1.6	Courbes de niveau des densités de probabilité $ \psi(z, 0, x; 0) ^2$ (gauche) et $ \psi(z, 0.4, x; 0) ^2$ (droite) . . . . .	20
1.7	Comparaison des densités de probabilité $ \psi(z, 0, x; 0) ^2$ (ligne pleine) et $ \psi(z, 0.4, x; 0) ^2$ (ligne pointillée) pour des des valeurs de $z = 1, 2, \dots, 6$ . . . . .	20
1.8	Configuration d'un miroir semi-transparent. . . . .	22
2.1	Phase-space trajectories for oscillator-like (dashed line) and energy-like (plain line) states when $(z, \gamma) = (2, 0)$ and $t \in [0, 1]$ . . . . .	43
2.2	Uncertainty and dispersions for the energy-like states at $\gamma = 0$ , $\Delta$ and $(\Delta\hat{x})^2$ with $z \in ]0, 25]$ (left) and $\Delta$ , $(\Delta\hat{x})^2$ and $(\Delta\hat{p})^2$ with $z \in [10, 27]$ (right). . . . .	44
2.3	Density probability $ \Psi_e'(1, 0, x; t) ^2$ (left) and $ \Psi_o'(1, 0, x; t) ^2$ (right) for $x \in [-1, 2]$ and $t \in [0, 1]$ . . . . .	44
2.4	Phase-space trajectories for energy-like states in the vacuum with $\gamma = 0.2, 0.5, 0.7$ and $t \in [0, 1]$ . . . . .	45



2.5	Comparison of Mandel parameter $Q(0, \gamma)$ in the vacuum for the energy-like and oscillator-like squeezed states as a function of $r$ such that $\gamma = \tanh r$ . . . . .	46
2.6	Density probability $ \Psi'_e(0, \gamma, x; t) ^2$ in the vacuum for energy-like coherent states for $x \in [-1, 2]$ as a function of $\gamma \in [0, 1]$ with $t = 0$ (left) and a function of $t \in [0, 1]$ with $\gamma = 0.2$ (right). . . . .	46
2.7	Comparison between the Mandel parameter for the energy-like and oscillator-like squeezed states as a function of $r$ such that $\gamma = \tanh r$ for $z = 2$ . . . . .	47
3.1	Dispersion in position $(\Delta x)^2$ , momentum $(\Delta p)^2$ and product of dispersions $\Delta(z, 0)$ for the usual (plain line) and quadratic (dashed line) CS ( $\gamma = 0$ ) of the harmonic oscillator. . . . .	62
3.2	Comparison of the density probability $ \Psi_{OH}(z, 0, x; 0) ^2$ for the usual (left) and quadratic (right) CS of the harmonic oscillator. . . . .	62
3.3	Linear entropy $S$ for the usual (plain line) and quadratic (dashed line) SCS of the harmonic oscillator for different values of the squeezing $\gamma$ . . . . .	63
3.4	Morse potential for the hydrogen chloride molecule. . . . .	64
3.5	Linear entropy for the Morse potential oscillator-like SCS as a function of $z$ for different values of the squeezing $\gamma$ . . . . .	66
3.6	Linear entropy for the Morse potential energy-like SCS as a function of $z$ for different values of the squeezing $\gamma$ . . . . .	67
3.7	Comparison of the linear entropy for oscillator-like (plain line) and energy-like (dashed line) SCS as a function of $z$ with moderate squeezing $\gamma = 0.5$ (left) and big squeezing $\gamma = 0.9$ (right). . . . .	67
3.8	Comparison of the density probability $ \Psi_{Morse}(z, 0.5, x; 0) ^2$ for the oscillator-like and energy-like SCS of the Morse potential. . . . .	68

3.9	Comparison of $S(t)$ for oscillator-like (plain line) and energy-like (dashed line) SCS with an amplitude $z = 4$ and without squeezing $\gamma = 0$ (left) or with a big squeezing $\gamma = 0.95$ (right). . . . .	69
3.10	Fourier transform (with the mean value removed) for oscillator-like and energy-like SCS with amplitude $z = 4$ and without squeezing, $\gamma = 0$ (up), or with a big squeezing, $\gamma = 0.95$ (down). We show only positive values of the frequencies since the graph is symmetric.	70
3.11	Linear entropy as a function of the angle $\theta$ for oscillator-like (plain line) and energy-like (dashed line) SCS with different values of the amplitude $z$ and the squeezing $\gamma$ . . . . .	70

## REMERCIEMENTS

---

Je tiens à remercier tout particulièrement ma directrice de recherche, Véronique Hussin, pour l'encadrement exceptionnel dont j'ai pu bénéficier ces deux dernières années. Merci d'avoir été si disponible et d'avoir su me guider, me conseiller ou m'encourager quand il le fallait.

J'aimerais aussi remercier les professeurs Maia Angelova et Hichem Eleuch pour leur collaboration dans mon travail de recherche.

Finalement, j'aimerais remercier ma famille qui n'a cessé de m'encourager et mes amis sans qui ces deux années n'auraient pas été si agréables et mémorables.

## INTRODUCTION

---

Une fois les bases de la mécanique quantique mises en place, plusieurs physiciens se penchèrent sur la question du lien entre cette nouvelle théorie et celle de la mécanique classique. C'est dans ce contexte que les états cohérents ont été introduits par Schrödinger dans les années 1920 [1]. Il les décrivit comme des états quantiques de l'oscillateur harmonique ayant la propriété de se comporter de façon semblable aux états classiques du modèle équivalent. En effet, ces états cohérents ont la particularité de minimiser la relation d'incertitude de Heisenberg. Pourtant, malgré cette caractéristique intéressante, ces états sont restés dans l'ombre jusque dans les années 1960 où ils sont redevenus populaires auprès d'autres physiciens tels que Glauber et Klauder. Le premier construisit les états cohérents comme des états propres de l'opérateur d'annihilation de l'oscillateur harmonique [2, 3], alors que le deuxième les analysa sous un côté plus algébrique [4, 5]. Beaucoup d'autres scientifiques les ont alors suivis sur cette voie ce qui permit de grandes avancées, particulièrement au niveau de l'optique quantique [6, 7], et en particulier lorsque furent introduits les états comprimés [8–11]. En effet, puisque le champ électromagnétique peut être vu comme une superposition d'états classiques décrits par les équations de l'oscillateur harmonique, les états cohérents offrent une description parfaite. Cependant, il faut garder en tête que bien que de nombreux systèmes puissent, dans une certaine mesure, être approximés par le modèle de l'oscillateur harmonique, il existe de nombreux systèmes qui pourraient être représentés de façon plus juste par un autre modèle. C'est le cas, par exemple, des vibrations des atomes dans une molécule diatomique, mieux décrites par le potentiel de Morse. Il est donc utile de chercher à construire les états cohérents et comprimés de ce nouveau système afin d'obtenir des représentations plus réalistes.

Plus récemment, les états cohérents sont également très utilisés dans le domaine de l'informatique quantique (par exemple [12–14]). Si l'on s'attarde aux états comprimés, nous savons qu'ils permettent de générer de l'intrication [15]. Puisque c'est

un des phénomènes qui donne toute sa force à l'informatique quantique, les physiciens cherchent donc les meilleurs moyens pour en créer. La possibilité de créer de l'intrication avec d'autres potentiels que celui de l'oscillateur harmonique permettrait d'ouvrir de nouvelles portes aux expérimentateurs.

Le chapitre 1 se concentre sur les états cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique. Leurs propriétés fondamentales sont rappelées afin d'aider à la compréhension des chapitres suivants. Pour ce faire, nous analyserons leurs valeurs moyennes, leurs dispersions et leurs trajectoires dans l'espace de phase en fonction des deux paramètres continus qui les caractérisent.

Le chapitre 2 traite des états cohérents et comprimés du potentiel de Morse. Les états cohérents seulement étaient déjà connus et ont été construits de plusieurs façons. Notamment, dans les dernières années, cette construction prenait une tournure très mathématique et certains ont utilisé une approche basée sur la supersymétrie [16] ou sur la théorie des groupes [17]. Ici, nous utiliserons une approche plus physique basée sur les opérateurs d'échelle. De plus, nous proposons une construction non pas seulement des états cohérents, mais également des états comprimés, ce qui n'avait encore jamais été fait. Nous allons étudier deux sortes d'états cohérents et comprimés et discuter de leur propriétés en étudiant leur localisation au niveau de la position, leurs dispersions et leurs trajectoires dans l'espace de phase. Nous verrons alors qu'un type se comporte plus classiquement que le second.

Ce chapitre est l'objet d'un article publié dans *Journal of Physics A* en collaboration avec les professeures Véronique Hussin (ma superviseure) et Maia Angelova (de l'université de Northumbria au Royaume-Uni). Il résume le travail de ma première année de maîtrise. Une partie significative de ma contribution a été de créer un code *Mathematica* permettant d'étudier les propriétés des états cohérents et comprimés. Ce code a, entre autres, permis la création de toutes les figures de l'article, figures qui m'ont aidé lors de l'analyse des résultats. J'ai aussi participé à l'élaboration des formules permettant de construire les états cohérents et comprimés et de calculer certaines valeurs moyennes dans ces états. Il est à noter que l'analyse de ces états se faisait de façon numérique alors que nous avons élaboré des

formules analytiques qui accélèrent grandement les vitesses de calcul. Aussi, nous avons développé une méthode qui peut être généralisée à d'autres potentiels.

Le chapitre 3 introduit la notion de miroir semi-transparent (beam splitter), un appareil très utilisé en informatique quantique dans le but de créer de l'intrication. Nous proposons ici d'insérer des états cohérents et comprimés de Morse, plutôt que ceux de l'oscillateur harmonique, comme cela a déjà été fait, dans un tel appareil et d'étudier la possibilité qu'il y ait effectivement de l'intrication créée. Encore une fois, nous analyserons nos résultats en fonction de deux types différents d'états cohérents et comprimés et l'entropie linéaire nous servira de mesure de l'intrication.

Ce dernier chapitre est également l'objet d'un article écrit en collaboration avec les professeurs Véronique Hussin et Hichem Eleuch (professeur invité à l'Université de Montréal). Il a été soumis pour publication à *Physics Letters A* et résume le travail de ma deuxième année de maîtrise. Pour cet article, j'ai contribué de façon significative à toutes les parties du travail, aussi bien au niveau de l'élaboration des formules mathématiques (en développant, par exemple, les équations permettant de mesurer l'intrication générée) que de la rédaction de l'article. Encore une fois, j'ai également créé un programme Mathematica permettant d'étudier l'intrication générée par le miroir semi-transparent.

Dans l'appendice A, nous présentons une méthode permettant de résoudre la relation de récurrence pour  $Z(z, \gamma, n)$ , une fonction essentielle à la construction des états cohérents et comprimés. Cette méthode est particulièrement utile pour les personnes qui voudraient reproduire nos calculs à l'aide d'un logiciel de calcul tel que *Mathematica*.

Finalement, dans l'appendice B, nous expliquons un peu plus en détails pourquoi les trajectoires dans l'espace de phase des états comprimés sont fermées dans le cas de l'oscillateur harmonique, mais ouvertes dans le cas du potentiel de Morse (voir le chapitre 2). En particulier, nous montrons que le fait que les trajectoires soient ouvertes n'a rien à voir avec le fait que l'énergie évoluerait dans le temps, car cette dernière demeure constante.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik. *Naturwissenschaften*, **14** (1926) 664.
- [2] Glauber R J. The Quantum Theory of Optical Coherence. *Physical Review*, **130** (1963) 2529.
- [3] Glauber R J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, **131** (1963) 2766.
- [4] Klauder, J. R. Continuous-representation theory. *Journal of Mathematical Physics*, **4** (1963) 1055 (Part I); 1058 (Part II).
- [5] Klauder J R. The action option and a Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers. *Annals of Physics*, **11** (1960) 123.
- [6] Klauder J R and Skagerstam B S. *Coherent States-Applications in Physics and Mathematical Physics* (World Scientific, Singapore) (1985).
- [7] Mandel L and Wolf E. *Optical Coherence and Quantum Optics*. (Cambridge University Press) (1995).
- [8] Yuen H P. Two-photon coherent states of the radiation field. *Physical Review A*, **13** (1976) 2226.
- [9] Fujiwara I and Miyoshi K. Pulsating States for Quantal Harmonic Oscillator. *Progress of Theoretical Physics*, **64** (1980) 715.
- [10] Dodonov V V, Kurmyshev E V, Man'ko V I. Generalized uncertainty relation and correlated coherent states. *Physics Letters A*, **79** (1980) 150.
- [11] Rajogopal P A K and Marshal J Tl. New coherent states with applications to time-dependent systems. *Physical Review A*, **26** (1982) 2977.

- [12] Sanders B C. Review of entangled coherent states. *Journal of Physics A*, **45** (2012) 244002.
- [13] Gazeau J-P. *Coherent States in Quantum Physics* (Wiley-VCH) (2009).
- [14] Huttner B, Imoto N, Gisin N, Mor T. Quantum Cryptography with Coherent States. *Physical Review A*, **51** (1995) 1863.
- [15] Berrada k, Abdel-Khalek S, Eleuch H, Hassouni Y. Beam splitting and entanglement generation : excited coherent states. *Quantum Information Processing*, **12** (2013) 69.
- [16] Benedict M G, Molnar B. Algebraic construction of the coherent states of the Morse potential based on supersymmetric quantum mechanics. *Physical Review A*, **60** (1999) R1737 .
- [17] Molnar B, Benedict M G, Bertrand J. Coherent states and the role of the affine group in the quantum mechanics of the Morse potential. *Journal of physics A*, **34** (2001) 3139 .



## CHAPITRE 1

### ÉTATS COHÉRENTS ET COMPRIMÉS DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

---

#### 1.1 Définition des états cohérents et comprimés

Les états cohérents ont initialement été introduits pour le système quantique de l'oscillateur harmonique. Plusieurs physiciens ont travaillé sur leur formulation et différentes définitions en sont ressorties. En résumant leur travail, on peut retenir trois façons distinctes mais équivalentes d'obtenir les états cohérents [1–3] :

- à l'aide de l'opérateur déplacement  $D(z) = e^{(za^\dagger - z^*a)}$  appliqué à l'état fondamental  $|0\rangle$  ;
- en cherchant à minimiser la relation d'incertitude de Heisenberg  $(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geq \hbar^2/4$  où  $(\Delta x)^2$  et  $(\Delta p)^2$  représentent les dispersions de la position et de l'impulsion respectivement ;
- comme états propres de l'opérateur d'annihilation  $a$ , c'est-à-dire des états  $|z\rangle$  tels que  $a|z\rangle = z|z\rangle$ .

C'est cette troisième définition que nous utiliserons afin de définir les états cohérents associés au potentiel de Morse. La variable complexe continue  $z$  est appelée le paramètre de cohérence.

Pour le potentiel de l'oscillateur harmonique, une généralisation des états précédents est connue. Ils sont appelés états comprimés, car en plus de dépendre du paramètre  $z$ , ils dépendent d'un paramètre de compression qui aura pour effet de réduire la dispersion sur une observable (la position ou l'impulsion), mais au prix d'augmenter celle sur l'autre, tout en maintenant minimale la relation d'incertitude de Heisenberg. Les états comprimés ont été introduits en s'inspirant de la première

définition des états cohérents, c'est-à-dire en appliquant, à la suite de l'opérateur déplacement, un deuxième opérateur, l'opérateur de compression  $S(\zeta)$  [1, 4] :

$$|\alpha, \zeta\rangle = D(\alpha)S(\zeta)|0\rangle \quad \text{où} \quad S(\zeta) = e^{\frac{1}{2}(\zeta(a^\dagger)^2 - \bar{\zeta}a^2)}. \quad (1.1)$$

Si l'on préfère la troisième définition, on peut montrer qu'un état comprimé (pour un système avec un spectre d'énergie discret infini) est un état propre de l'opérateur  $a + \gamma a^\dagger$  [1]. C'est donc un état  $|\psi(z, \gamma)\rangle$  solution de l'équation

$$(a + \gamma a^\dagger)|\psi(z, \gamma)\rangle = z|\psi(z, \gamma)\rangle. \quad (1.2)$$

Notons que  $a$  et  $a^\dagger$  sont les opérateurs d'annihilation et de création de l'oscillateur harmonique ( $[a, a^\dagger] = 1$ ). Ils agissent de la façon suivante sur les états propres  $|n\rangle$  du système :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (1.3)$$

Par ailleurs, la variable complexe  $\gamma$  est le paramètre de compression. Pour des raisons de normalisation, on observe que  $|\gamma| < 1$ . Notons que (1.2) est équivalent à (1.1) moyennant le changement de variable

$$\zeta = \frac{\gamma}{|\gamma|} \tanh^{-1}(|\gamma|) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{z}{\sqrt{1-|\gamma|^2}} \quad (1.4)$$

On remarque qu'en l'absence de compression (c'est-à-dire quand  $\gamma = 0$ ), l'équation (1.2) se réduit à la définition initiale des états cohérents et  $\alpha = z$ , ce qui nous ramène bien au paramètre de cohérence déjà introduit. Les solutions de l'équation (1.2) peuvent être exprimées comme une superposition des états propres  $|n\rangle$  de la façon suivante :

$$|\psi(z, \gamma)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (1.5)$$

où  $\mathcal{N}$  est le facteur de normalisation :

$$\mathcal{N} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|Z(z, \gamma, n)|^2}{n!}. \quad (1.6)$$

Il reste à trouver l'expression de  $Z(z, \gamma, n)$ . Pour cela, il suffit d'insérer la définition de  $|\psi(z, \gamma)\rangle$  dans l'équation (1.2) et on trouve alors la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} Z(z, \gamma, n+1) - z Z(z, \gamma, n) + \gamma n Z(z, \gamma, n-1) &= 0, & n = 1, 2, \dots \\ Z(z, \gamma, 0) &= 1, & Z(z, \gamma, 1) = z. \end{aligned} \quad (1.7)$$

On trouve ainsi que [5, 6]

$$Z_{OH}(z, \gamma, n) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{i!(n-2i)!} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^i z^{(n-2i)} = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathcal{H}\left(n, \frac{z}{\sqrt{2\gamma}}\right), \quad (1.8)$$

où  $\mathcal{H}(n, w)$  sont les polynômes d'Hermite avec  $z, \gamma \in \mathbb{C}$ . Pour des questions de normalisation, il est facile de montrer que  $|\gamma| < 1$ . Dans le cas des états cohérents, on obtient  $Z_{OH}(z, 0, n) = z^n$ . Dans un état comprimé pur, l'expression de  $Z$  s'écrit :

$$Z_{OH}(0, \gamma, 2n) = \frac{(2n)!}{n!} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n, \quad Z_{OH}(0, \gamma, 2n+1) = 0. \quad (1.9)$$

## 1.2 Le modèle

Avant de poursuivre, voici un petit rappel du modèle de l'oscillateur harmonique. Ce dernier est représenté par l'hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_{OH} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (1.10)$$

Les états propres de cet hamiltonien sont les états

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (1.11)$$

et ils ont comme valeurs propres associées les énergies  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ . En représentation  $\{|x\rangle\}$ , on introduit la notation  $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$  et les états propres s'écrivent :

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \mathcal{H} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2}. \quad (1.12)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation  $a$  et  $a^\dagger$  s'écrivent

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{i}{m\omega} p \right), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{i}{m\omega} p \right). \quad (1.13)$$

Ils satisfont les relations (1.3).

### 1.3 Valeurs moyennes et dispersions

Les états cohérents et comprimés sont définis comme des états quasi-classiques, car ils minimisent la relation d'incertitude d'Heisenberg. C'est ce que nous allons étudier.

De façon générale, on définit la valeur moyenne d'une observable  $\theta$  dans les états comprimés comme  $\langle \theta \rangle(z, \gamma; t) = \langle \psi(z, \gamma, x; t) | \theta | \psi(z, \gamma, x; t) \rangle$  où l'évolution temporelle de ces états est donnée par

$$\psi(z, \gamma, x; t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{n!}} e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \phi_n(x). \quad (1.14)$$

Alors,

$$\langle \theta \rangle(z, \gamma; t) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{Z(z, \gamma, n)} Z(z, \gamma, k)}{\sqrt{n! k!}} e^{-i\omega(k-n)t} \langle \phi_n | \theta | \phi_k \rangle \quad (1.15)$$

où nous avons utilisé le fait que pour l'oscillateur harmonique, le spectre d'énergie est  $\hbar\omega(n + 1/2)$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots$

À partir de ces valeurs moyennes on pourra alors calculer la dispersion d'une observable, définie comme  $(\Delta\theta)^2 = \langle \theta^2 \rangle - \langle \theta \rangle^2$ .

Ce qui nous intéresse ici, ce sont les moyennes de  $x$ ,  $p$ ,  $x^2$  et  $p^2$ . On remarque que

dans la formule (1.15), tout est connu exceptées les valeurs moyennes de ces mêmes quantités, mais dans les états propres de l'énergie,  $\langle \phi_n | \theta | \phi_k \rangle$ . Pour les trouver, il suffit d'utiliser les relations qui permettent d'écrire la position et l'impulsion en fonction des opérateurs d'échelle :

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a), \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a). \quad (1.16)$$

On obtient alors les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | x | \phi_k \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\sqrt{k+1}\delta_{n,k+1} - \sqrt{k}\delta_{n,k-1}), \\ \langle \phi_n | p | \phi_k \rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\sqrt{k+1}\delta_{n,k+1} + \sqrt{k}\delta_{n,k-1}), \\ \langle \phi_n | x^2 | \phi_k \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}(\sqrt{(k+1)(k+2)}\delta_{n,k+2} + (2k+1)\delta_{n,k} + \sqrt{k(k-1)}\delta_{n,k-1}), \\ \langle \phi_n | p^2 | \phi_k \rangle &= -\frac{\hbar m\omega}{2}(\sqrt{(k+1)(k+2)}\delta_{n,k+2} - (2k+1)\delta_{n,k} + \sqrt{k(k-1)}\delta_{n,k-1}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ceci nous permet maintenant de facilement calculer toutes les valeurs moyennes ainsi que les dispersions. En particulier, examinons le cas des états cohérents à  $t = 0$ . On obtient alors les valeurs moyennes suivantes :

$$\begin{aligned} \langle x \rangle(z, 0; 0) &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \Re(z), \\ \langle p \rangle(z, 0; 0) &= \sqrt{2\hbar m\omega} \Im(z), \\ \langle x^2 \rangle(z, 0; 0) &= \frac{\hbar}{2m\omega} (2|z|^2 + 1 + \Re(z^2)), \\ \langle p^2 \rangle(z, 0; 0) &= \frac{\hbar m\omega}{2} (2|z|^2 + 1 - \Re(z^2)), \end{aligned} \quad (1.18)$$

De là, on peut déduire les dispersions en  $x$  et en  $p$  :

$$(\Delta x)^2(z, 0, 0) = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad (\Delta p)^2(z, 0, 0) = \frac{\hbar m\omega}{2}, \quad (1.19)$$

ce qui minimise bien la relation d'incertitude de Heisenberg, puisque le produit des

dispersions est minimal :

$$\Delta(z, 0, 0) = (\Delta x)^2(z, 0, 0) (\Delta p)^2(z, 0, 0) = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (1.20)$$

Cette propriété a d'ailleurs donné un autre nom aux états cohérents parfois appelés états d'incertitude minimale.

Afin de mieux mettre en évidence les propriétés des états comprimés, il est utile d'introduire deux nouveaux opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  proportionnels aux opérateurs de position et d'impulsion :

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x, \quad \hat{P} = \sqrt{\frac{2}{\hbar m\omega}} p, \quad (1.21)$$

ce qui nous permet alors d'écrire l'opérateur d'échelle  $a$  de la façon suivante [2, 4] :

$$a = \frac{\hat{X} + i\hat{P}}{2}. \quad (1.22)$$

Si on retourne aux états cohérents, les dispersions  $(\Delta\hat{X})^2$  et  $(\Delta\hat{P})^2$  deviennent maintenant chacune égales à 1 indépendamment des valeurs de  $z$  et donc leur produit aussi. Pour ce qui est des états comprimés, les dispersions sont beaucoup plus faciles à calculer en introduisant l'opérateur  $A = a + \gamma a^\dagger$  de telle sorte que  $A|\psi(z, \gamma)\rangle = z|\psi(z, \gamma)\rangle$ . En effet, on peut alors définir les opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  en fonction de  $A$  et  $A^\dagger$  (notons que les résultats suivants sont valables pour  $\gamma \in \mathbb{R}$  puisqu'en pratique, c'est ce que nous utilisons, mais il est possible de généraliser pour toutes valeurs de  $\gamma$ ) :

$$\hat{X} = \frac{A + A^\dagger}{1 + \gamma}, \quad \hat{P} = -i \frac{A - A^\dagger}{1 - \gamma}. \quad (1.23)$$

Nous obtenons ainsi les valeurs moyennes suivantes :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{X} \rangle(z, \gamma; 0) &= \frac{2}{1 + \gamma} \Re(z), \\
\langle \hat{P} \rangle(z, \gamma; 0) &= \frac{2}{1 - \gamma} \Im(z), \\
\langle \hat{X}^2 \rangle(z, \gamma; 0) &= \frac{2}{(1 + \gamma)^2} (|z|^2 + \Re(z^2)) + \frac{1 - \gamma^2}{(1 + \gamma)^2}, \\
\langle \hat{P}^2 \rangle(z, \gamma; 0) &= \frac{2}{(1 - \gamma)^2} (|z|^2 - \Re(z^2)) + \frac{1 - \gamma^2}{(1 - \gamma)^2}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Il est alors facile de calculer les dispersions qui se ramènent bien à 1 quand  $\gamma = 0$  :

$$(\Delta \hat{X})^2(z, \gamma, 0) = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad (\Delta \hat{P})^2(z, \gamma, 0) = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}. \tag{1.25}$$

Si on calcule le produit des dispersions, on constate qu'il vaudra 1 pour toutes les valeurs de  $\gamma$ . Ceci implique que les états comprimés conservent la propriété de quasi-classicité (puisqu'ils minimisent toujours la relation d'incertitude de Heisenberg). Cependant, si on parle ici d'états comprimés, c'est parce que les dispersions prises séparément ne sont plus constantes en  $\gamma$ . La compression  $\gamma$  aura pour effet de diminuer la dispersion associée à l'un des opérateurs, au prix de devoir augmenter celle de l'autre opérateur. C'est ce qu'on observe sur la figure 1.1. Par ailleurs, plus la compression est grande, plus les dispersions en  $\hat{X}$  et en  $\hat{P}$  sont différentes l'une de l'autre. On note également que la dispersion ne dépend pas de la valeur de  $z$ .

On comprend bien maintenant pourquoi les états comprimés deviennent très intéressants et pourquoi ils sont si présents dans plusieurs domaines de la physique : tout en maintenant la relation d'incertitude de Heisenberg minimale, ils nous donnent une certaine liberté sur la connaissance précise de la position de la particule, par exemple.

Comme on a pu remarquer dans les équations 1.25, les dispersions sont constantes en  $z$  et différent de plus en plus quand on ajoute de la compression. Mais ces propriétés sont-elles toujours vraies à un temps différent de 0 ? Si on calcule la dispersion

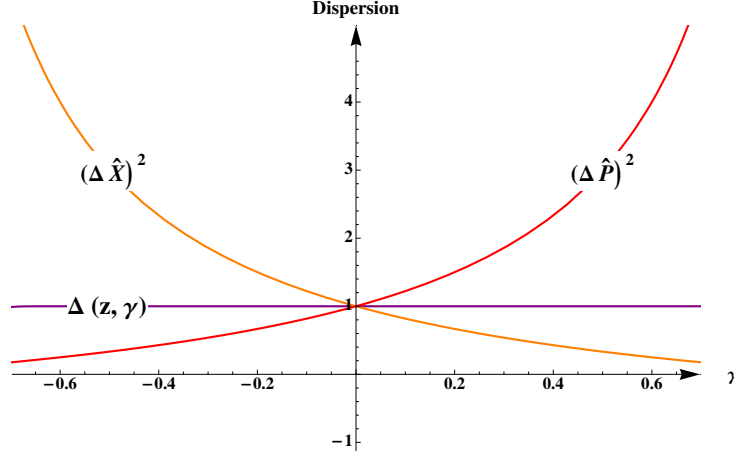


Figure 1.1 – Dispersion en  $\hat{X}$  et en  $\hat{P}$  et produit des dispersions en fonction du paramètre de compression  $\gamma$ .

en  $\hat{X}$ , d'abord pour les états cohérents (avec  $\gamma = 0$ ), on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
(\Delta \hat{X})^2(z, 0, t) &= \langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2 \\
&= \left[ 2 \left( \Re(z^2) \cos(2\omega t) + \Im(z^2) \sin(2\omega t) \right) + 2|z|^2 + 1 \right] \\
&\quad - \left[ 2 \left( \Re(z) \cos(\omega t) + \Im(z) \sin(\omega t) \right) \right]^2 \\
&= -2|z|^2 + 2|z|^2 + 1 \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

De la même façon, on obtient également  $(\Delta \hat{P})^2(z, 0, t) = 1$ . Ainsi, on voit que chacune des dispersions, et donc leur produit, sera constante non pas seulement en  $z$ , mais également dans le temps. Cependant, en ce qui concerne les états comprimés, les dispersions en  $\hat{X}$  et en  $\hat{P}$  dépendent de  $t$ . En effet, cette fois-ci, la dispersion en  $\hat{X}$  aura la forme

$$(\Delta \hat{X})^2(z, \gamma, t) = A(z, \gamma) e^{-2i\omega t} + \overline{A(z, \gamma)} e^{2i\omega t} + B(z, \gamma), \tag{1.27}$$

où  $A(z, \gamma)$  et  $B(z, \gamma)$  sont des quantités indépendantes du temps. De la même façon, la dispersion en  $\hat{P}$  aura la forme

$$(\Delta \hat{P})^2(z, \gamma, t) = -A(z, \gamma) e^{-2i\omega t} - \overline{A(z, \gamma)} e^{2i\omega t} + B(z, \gamma), \tag{1.28}$$



ce qui donne le produit des dispersions suivant :

$$\Delta(z, \gamma, t) = -A(z, \gamma)^2 e^{-4i\omega t} - \overline{A(z, \gamma)}^2 e^{4i\omega t} + B(z, \gamma)^2 - 2|A(z, \gamma)|^2. \quad (1.29)$$

Ainsi, plutôt que de rester constantes, les dispersions des états comprimés oscillent dans le temps, comme on peut le voir sur la figure 1.2. On remarque, en particulier, que le minimum est atteint à  $t = 0$ , ce qui implique que la relation d'incertitude de Heisenberg est minimisée au temps initial. Elle sera à nouveau minimisée pour tous les temps  $t = n\pi/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Notons toutefois que l'effet de compression ne s'applique pas forcément à la même observable, selon le temps observé. En effet, initialement, la dispersion en  $\hat{X}$  est inférieure à celle en  $\hat{P}$  ce qui implique une meilleure localisation en  $\hat{X}$ . À  $t = \pi/2$ , c'est toutefois l'inverse et maintenant, on aura une meilleure localisation en impulsion, et donc un étalement de la densité de probabilité en  $\hat{X}$ . C'est le phénomène que l'on observe sur la figure 1.3.

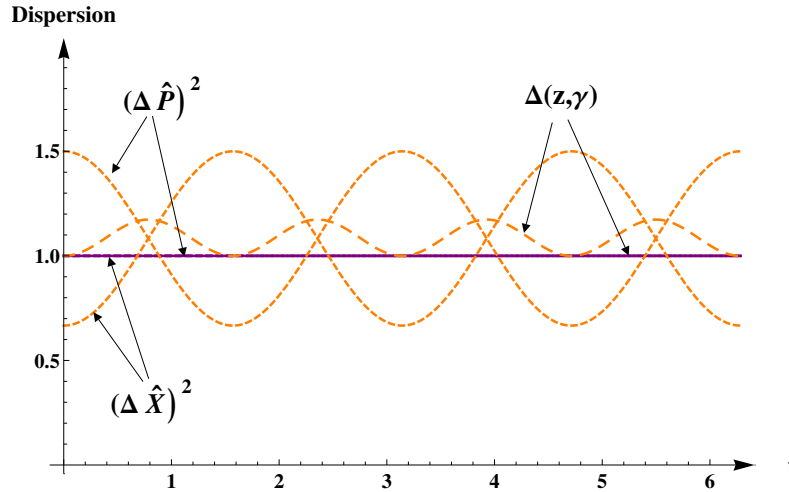


Figure 1.2 – Dispersion en  $\hat{X}$  et en  $\hat{P}$  et produit des dispersions pour  $\gamma = 0$  (ligne pleine) et  $\gamma = 0.2$  (lignes en pointillés).

Notons finalement que, même dans le temps, les dispersions demeurent indépendantes de  $z$ , tandis que plus la compression  $\gamma$  est grande, plus l'écart maximal entre les dispersions sera important.

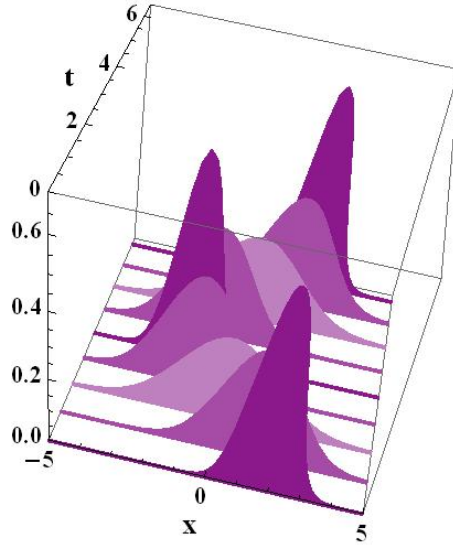


Figure 1.3 – Densité de probabilité  $|\psi(1.2, 0.2, x, t)|^2$  pour  $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ .

## 1.4 Trajectoires

### 1.4.1 Cas classique

Dans le cas d'un oscillateur harmonique classique, il est connu que les équations décrivent un mouvement oscillatoire. Plus précisément, si on trace les trajectoires évoluant dans le temps dans l'espace de phase, ces dernières prendront la forme d'un cercle [3].

Prenons un oscillateur harmonique de masse  $m$  et de fréquence angulaire  $\omega$  décrit par l'hamiltonien

$$H = \frac{p(t)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x(t)^2. \quad (1.30)$$

Les équations du mouvement de ce problème sont connues. Si, comme fait précédemment pour le cas quantique, on introduit les quantités  $X$  et  $P$  proportionnelles à la position  $x$  et à l'impulsion  $p$  telles que

$$X(t) = \sqrt{m\omega} x(t), \quad P(t) = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p(t), \quad (1.31)$$

alors, ces équations s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}X(t) = \omega P(t), \quad \frac{d}{dt}P(t) = -\omega X(t). \quad (1.32)$$

Classiquement, pour déterminer l'état de la particule, il faut connaître à la fois sa position et son impulsion. On peut donc réunir ces deux quantités dans une nouvelle quantité complexe  $z(t)$  définie ainsi :

$$z(t) = \frac{X(t) + iP(t)}{2}. \quad (1.33)$$

Cela nous permet de réunir les deux équations différentielles ci-dessus en une seule de la forme :

$$\frac{d}{dt}z(t) = i\omega z(t) \quad (1.34)$$

et ayant pour solution  $z(t) = z_0 e^{-i\omega t}$ . On voit bien ici que le mouvement est sinusoïdale et si on trace  $z(t)$  dans l'espace de phase ( $\langle X \rangle, \langle P \rangle$ ), on observe bien des trajectoires circulaires (voir figure 1.4). Bien sûr, le rayon et le point initial de cette trajectoire dépendront des conditions initiales et de la vitesse angulaire  $\omega$ .

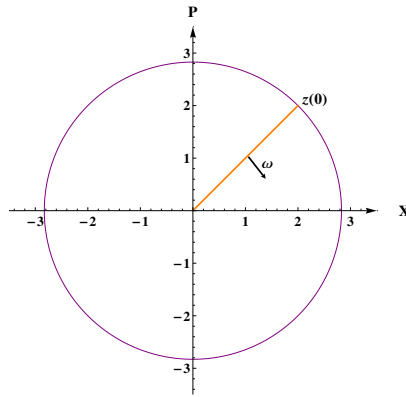


Figure 1.4 – Trajectoire d'une particule dans un oscillateur harmonique avec comme condition initiale  $z(0) = 1 + i$  et une vitesse angulaire  $\omega = 1$ .

Il est possible de trouver l'évolution temporelle des quantités  $X$  et  $P$  indivi-

duellement à partir de l'équation (1.33) et de la solution de (1.34) :

$$X(t) = z_0 e^{-i\omega t} + \bar{z}_0 e^{i\omega t}, \quad P(t) = -i(z_0 e^{-i\omega t} - \bar{z}_0 e^{i\omega t}). \quad (1.35)$$

Ceci nous sera utile pour faire des comparaisons avec les résultats obtenus dans le cas quantique.

### 1.4.2 Cas quantique

Qu'en est-il maintenant des états cohérents? À partir des formules (1.15) et (1.17), on peut calculer les valeurs moyennes de  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  dans le cas quantique en fonction du temps. On trouve alors les relations suivantes :

$$\langle \hat{X}(t) \rangle = z_0 e^{-i\omega t} + \bar{z}_0 e^{i\omega t}, \quad \langle \hat{P}(t) \rangle = -i(z_0 e^{-i\omega t} - \bar{z}_0 e^{i\omega t}), \quad (1.36)$$

Ces relations sont identiques à celles de la formule (1.35). Ainsi, les états cohérents se comportent exactement de la même façon que les états classiques d'un oscillateur harmonique de même fréquence. Cependant, il faut faire attention ici, car on a calculé l'évolution temporelle des valeurs moyennes seulement et non pas des valeurs exactes puisque quantiquement elles ne sont pas connues. Il ne faut donc pas oublier de tenir compte de la dispersion. Autour de chaque point de la trajectoire dans l'espace de phase, il y aura un « cercle d'erreur » délimitant l'espace dans lequel la particule pourrait réellement se trouver. Pour les états cohérents, nous aurons bien des cercles, car les dispersions en  $\hat{X}$  et en  $\hat{P}$  sont égales dans ce cas-ci. La figure 1.5 décrit une trajectoire dans l'espace de phase ( $\langle X \rangle, \langle P \rangle$ ). On remarque, tel qu'attendu, qu'elle forme bel et bien un cercle. On remarque également que puisque la dispersion est constante dans le temps, le cercle d'erreur est constant en tout point de la trajectoire. Notons que le fait de changer la valeur de  $z$  aura pour effet de changer le rayon de la trajectoire.

Voyons maintenant le comportement des états comprimés. Si on retourne aux équations (1.15) et (1.17), on en déduit les évolutions temporelles des valeurs

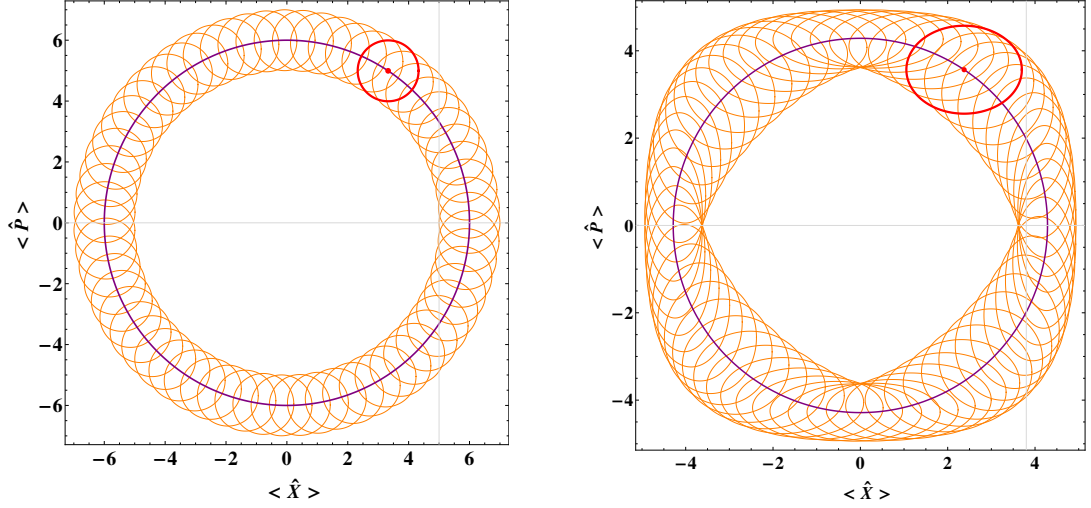


Figure 1.5 – À gauche, trajectoire décrite par un état cohérent avec  $\omega = 1$  et  $z = 3$  et à droite, trajectoire décrite par un état comprimé avec  $\omega = 1$ ,  $z = 3$  et  $\gamma = 0.4$ . La courbe pleine représente la trajectoire et les cercles (ellipses) sont les « cercles d’erreur » (« ellipses d’erreur ») causés par la dispersion qui intervient dans le cas quantique.

moyennes de  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  :

$$\begin{aligned}\langle \hat{X}(t) \rangle &= W(z, \gamma) e^{-i\omega t} + \overline{W(z, \gamma)} e^{i\omega t}, \\ \langle \hat{P}(t) \rangle &= -i \left( W(z, \gamma) e^{-i\omega t} - \overline{W(z, \gamma)} e^{i\omega t} \right).\end{aligned}\quad (1.37)$$

où

$$W(z, \gamma) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{Z(z, \gamma, k)} Z(z, \gamma, k+1)}{k!}.\quad (1.38)$$

On note bien sûr que  $W(z, 0) = z$ , ce qui nous ramène à l’équation (1.36) dans le cas des états cohérents seulement. Puisque  $W(z, \gamma)$  ne dépend pas du temps, l’équation (1.37) a la même forme que (1.36). Ainsi, même dans le cas des états comprimés, les trajectoires seront circulaires. Le rayon cependant sera modifié en fonction de la compression appliquée.

Il demeure tout de même une différence importante entre les états cohérents et les états comprimés. Comme on l’a vu précédemment, elle se situe au niveau de la dispersion. Ainsi, le « cercle d’erreur » qui nous indique la région dans laquelle peut

se trouver la particule se transformera maintenant en « ellipse d'erreur » : il sera possible de connaître plus précisément une des deux observables, tout en perdant de l'information sur la deuxième. De plus, puisque la dispersion évolue en fonction du temps, cette ellipse ne sera pas constante en fonction du temps. La figure 1.5 donne un exemple de cette dispersion en différents points de la trajectoire.

## 1.5 Densités de probabilité

Pour bien voir l'effet du paramètre de compression  $\gamma$  dans les états comprimés, il est utile de tracer leur densité de probabilité. Il est à noter qu'ici nous avons choisi  $\gamma$  de telle sorte que ce soit la dispersion sur la position qui diminue. Sur la figure 1.6, nous avons tracé la densité de probabilité des états comprimés à  $t = 0$  avec  $\gamma = 0$  puis  $\gamma = 0.4$ . On observe alors que pour un  $\gamma$  donné, la densité de probabilité ne change pas de forme en fonction de  $z$ . Par contre, elle translate en  $x$ . Cela concorde avec les résultats précédents qui indiquaient que pour un  $\gamma$  donné, la dispersion est constante en  $z$ . Changer  $z$  modifie donc la valeur moyenne de la position (et de l'impulsion), mais pas de la dispersion. Quand on rajoute de la compression, on voit sur la figure 1.7 que la densité de probabilité s'amincit et devient plus haute, ce qui est normal puisque la compression a pour effet de diminuer la dispersion sur la position.

Que se passe-t-il maintenant au fil du temps ? Dans le cas des états cohérents, ces derniers demeurent cohérents pour tout  $t$ , mais le paramètre de cohérence change. En effet,

$$\begin{aligned}
 \psi(z, 0, x; t) &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(z)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+1/2)\omega t} \phi_n(x) \\
 &= \sqrt{\frac{\mathcal{N}(ze^{-i\omega t})}{\mathcal{N}(z)}} e^{-i\omega t/2} \psi(ze^{-i\omega t}, 0, x, 0) \\
 &= e^{-i\omega t/2} \psi(ze^{-i\omega t}, 0, x, 0),
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

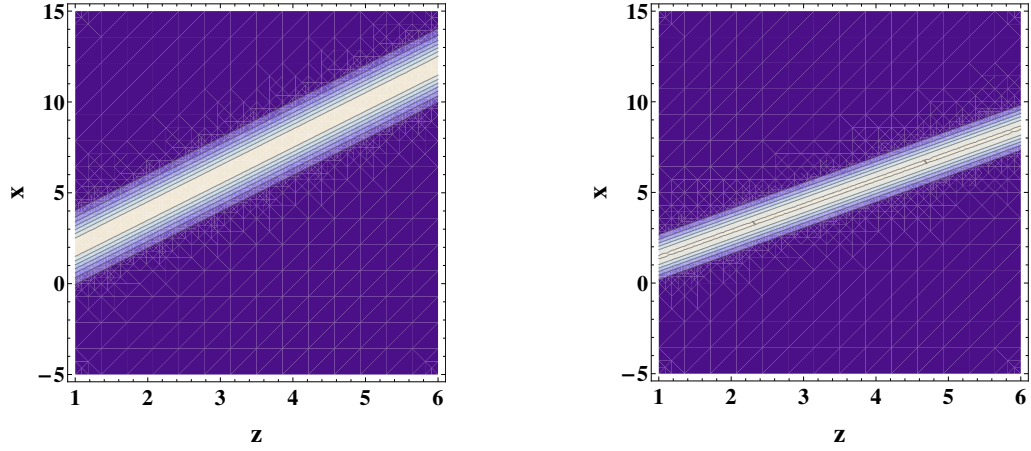


Figure 1.6 – Courbes de niveau des densités de probabilité  $|\psi(z, 0, x; 0)|^2$  (gauche) et  $|\psi(z, 0.4, x; 0)|^2$  (droite)

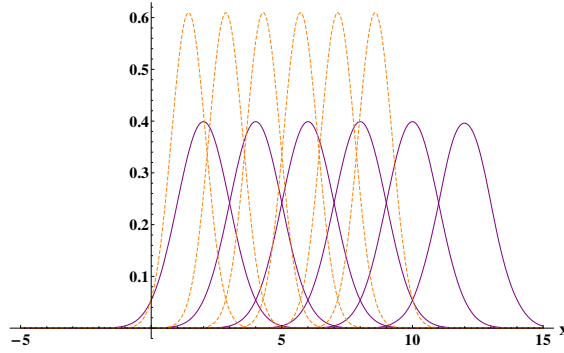


Figure 1.7 – Comparaison des densités de probabilité  $|\psi(z, 0, x; 0)|^2$  (ligne pleine) et  $|\psi(z, 0.4, x; 0)|^2$  (ligne pointillée) pour des des valeurs de  $z = 1, 2, \dots, 6$ .

et donc

$$|\psi(z, 0, x; t)|^2 = |\psi(ze^{-i\omega t}, 0, x, 0)|^2. \quad (1.40)$$

On voit donc bien que l'état cohérent  $\psi(z, 0, x; t)$  demeure un état cohérent, mais avec une valeur de cohérence qui vaut maintenant  $ze^{-i\omega t}$ . Cela rejoint ce qu'on avait observé au niveau du produit des dispersions, soit qu'il demeure minimal en tout temps.

Au niveau des états comprimés, le même phénomène est observé, mais le paramètre de compression change également pour passer de  $\gamma$  à  $\gamma e^{-2i\omega t}$ . En effet,

$$\begin{aligned}
\psi(z, \gamma, x; t) &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(z, \gamma)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathcal{H}\left(n, \frac{z}{\sqrt{2\gamma}}\right)}{\sqrt{n!}} e^{-i(n+1/2)\omega t} \phi_n(x) \\
&= \sqrt{\frac{\mathcal{N}(ze^{-i\omega t}, \gamma e^{-2i\omega t/2})}{\mathcal{N}(z, \gamma)}} e^{-i\omega t/2} \psi(ze^{-i\omega t}, \gamma e^{-2i\omega t}, x, 0) \\
&= e^{-i\omega t/2} \psi(ze^{-i\omega t}, \gamma e^{-2i\omega t}, x, 0),
\end{aligned} \tag{1.41}$$

et donc

$$|\psi(z, \gamma, x; t)|^2 = |\psi(ze^{-i\omega t}, \gamma e^{-2i\omega t}, x, 0)|^2. \tag{1.42}$$

Ainsi, un état comprimé demeure bien un état comprimé au fil du temps.

## 1.6 États cohérents et comprimés à travers un miroir semi-transparent

Dans les dernières années, le domaine de l'informatique quantique a pris énormément d'ampleur et de nombreux physiciens s'attèlent à la tâche de trouver des moyens de créer de l'intrication, car c'est ce phénomène qui donne toute sa force à l'informatique ou à la cryptographie quantique. On dira qu'un état global est intriqué si les propriétés des états le formant sont corrélées bien que ces états soient séparés physiquement (et possiblement par de très grandes distances). Mathématiquement, un état global sera intriqué s'il est impossible de le réécrire comme le produit tensoriel de plusieurs états.

Afin d'étudier ce phénomène qu'est l'intrication, il est important de définir des méthodes permettant de le mesurer. Il en existe aujourd'hui plusieurs telles que la concurrence [7], la négativité [8, 9], l'entropie de von Neumann [10, 11] ou encore l'entropie linéaire [12, 13]. Elles ont chacune leurs forces et leurs faiblesses et sont souvent choisies en fonction de ce qui a permis initialement de préparer des états intriqués. Pour ce faire, il existe différents procédés. On peut penser, par exemple, aux cavités QED (*cavity quantum electrodynamics*) [14, 15], aux systèmes NMR (*nuclear magnetic resonance*) [16, 17] ou encore aux miroirs semi-transparentes



(*beam splitter*) [18, 19]. C'est de ce dernier appareil que nous traiterons au chapitre 3 et l'intrication sera mesurée par l'entropie linéaire.

Plusieurs articles ont été publiés en proposant de faire passer des états cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique à travers un miroir semi-transparent. La conclusion fut qu'on peut effectivement générer de l'intrication avec des états comprimés, mais pas avec des états cohérents. Ceci se démontre très facilement, mais pour mieux comprendre, introduisons d'abord plus formellement la notion de miroir semi-transparent.

Un miroir semi-transparent est un appareil optique à travers lequel on passe deux états (voir figure 1.8). Le premier sera le vide et le second, un état  $|\psi\rangle$  à priori quelconque. Habituellement, on choisira un miroir semi-transparent 50 : 50, c'est-à-dire que l'intensité réfléchie sera égale à celle transmise, car il a été montré que c'est la configuration qui permet de créer le maximum d'intrication [18]. Mathématiquement, l'effet d'un miroir semi-transparent sera décrit par l'opérateur unitaire  $\hat{B}(\theta)$  agissant sur l'état initial  $|in\rangle = |\psi\rangle \otimes |0\rangle$  :

$$|out\rangle = \hat{B}(\theta) |in\rangle = \exp\left[\frac{\theta}{2}(a^\dagger b e^{i\phi} - a b^\dagger e^{-i\phi})\right] |in\rangle. \quad (1.43)$$

Les opérateurs  $a^\dagger, a$  et  $b^\dagger, b$  sont les opérateurs d'échelle agissant respectivement sur la première et la deuxième composante de l'état, et  $\phi$  est une phase qui n'aura pas d'incidence sur nos calculs.

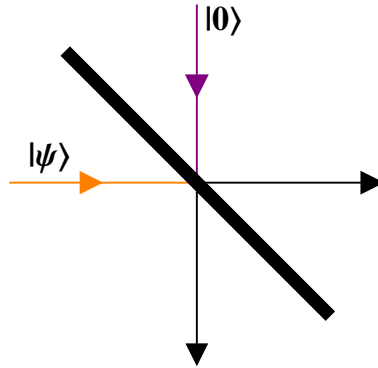


Figure 1.8 – Configuration d'un miroir semi-transparent.

Pour calculer l'effet d'un miroir semi-transparent sur un état cohérent, commençons par décrire son effet sur un état propre de l'énergie :

$$\hat{B}(\theta)(|n\rangle \otimes |0\rangle) = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q}^{\frac{1}{2}} t^q r^{(n-q)} |q\rangle \otimes |n-q\rangle \quad (1.44)$$

avec  $|t|^2 + |r|^2 = 1$  où  $t$  est la transmissibilité du miroir,  $r$  sa réflectivité et toutes deux sont reliées à l'angle  $\theta$ . À partir de cette formule, on peut maintenant écrire l'état  $|out\rangle$  à la sortie du miroir semi-transparent lorsqu'on y insère initialement un état cohérent ou comprimé :

$$\begin{aligned} |out\rangle &= \hat{B}(\theta)(|\psi(z, \gamma)\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{n!}} \hat{B}(\theta)(|n\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^n \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{n!}} \binom{n}{q}^{\frac{1}{2}} t^q r^{(n-q)} |q\rangle \otimes |n-q\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Z(z, \gamma, m+q)}{\sqrt{q!m!}} t^q r^m |q\rangle \otimes |m\rangle. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Dans le cas des états cohérents, l'état  $|out\rangle$  ne sera jamais un état intriqué. En effet, ici,  $Z(z, \gamma, n) = z^n$  et (3.16) devient :

$$|out\rangle = \hat{B}(\theta)(|\psi(z, 0)\rangle \otimes |0\rangle) = |\psi(z, 0)\rangle \otimes |\psi(z, 0)\rangle. \quad (1.46)$$

Ce phénomène ne devrait pas nous étonner puisque les états cohérents sont les états les plus classiques. Or, un état classique ne pourra jamais créer de l'intrication puisque c'est un phénomène purement quantique.

Dans le cas des états comprimés, l'état  $|out\rangle$  ne pourra jamais s'écrire comme un produit tensoriel de deux autres états et ainsi, le miroir semi-transparent offre un moyen de créer de l'intrication. Une étude plus approfondie des états comprimés sera faite au chapitre 3.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Nieto M M. The Discovery of Squeezed States - In 1927. arXiv : quant-ph/9708012 (1997).
- [2] Gazeau J-P. *Coherent States in Quantum Physics* (Wiley-VCH) (2009).
- [3] Cohen-Tannoudji C, Diu B, Laloë F. *Mécanique quantique I* (Hermann, Paris) (1973).
- [4] Walls D F and Milburn G J. *Quantum Optics, 2nd Edition* (Springer, Berlin) (2008).
- [5] Alvarez N and Hussin V. Generalized coherent and squeezed states based on the  $\mathfrak{h}(1)\oplus\mathfrak{su}(2)$  algebra. *J Math Phys*, **43** (2002) 2063.
- [6] Yuen H P. Two-photon coherent states of the radiation field. *Physical Review A*, **13** (1976) 2226.
- [7] Wootters W K. Entanglement of Formation and Concurrence. *Quantum Information and Computation*, **1** (2001) 27.
- [8] Zyczkowski K, Horodecki P, Sanpera A, Lewenstein M. Volume of the set of separable states. *Physical Review A*, **58** (1998) 883.
- [9] Vidal G, Werner R F. A computable measure of entanglement. *Physical Review A*, **65** (2002) 032314.
- [10] Bengtsson I, Zyczkowski K. *Geometry of Quantum States : An Introduction to Quantum Entanglement* ( Cambridge University Press) (2006).
- [11] Zachos C K. A classical bound on quantum entropy. *Journal of Physics A*, **40** (2007) F407.
- [12] C. C. Gerry, A. Benmoussa. Beam splitting and entanglement : Generalized coherent states, group contraction, and the classical limit. *Physical Review A*, **71** (2005) 062319.

- [13] Peters N A, Wei T-C, Kwiat P G. Mixed state sensitivity of several quantum information benchmarks. *Physical Review A*, **70** (2004) 052309.
- [14] Kim M S, Agarwal G S. Reconstruction of an entangled state in cavity QED. *Physics Review A*, **59** (1999) 3044.
- [15] Xiao X Q, Zhu J, He G Q, Zeng G H. A scheme for generating a multiphoton NOON state based on cavity QED. *Quantum Information Processing*, **12** (2013) 449.
- [16] Eskandari M R, Rezaee L. Thermal Entanglement of Two Qubits with Dipolar Ordered Initial State Coupled to a Spin Chain in MQ NMR System. *International Journal of Modern Physics B*, **26** (2012) 1250184.
- [17] Soares-Pinto D O, Auccaise R, Maziero J, Gavini-Viana A, Serra R M, Celeri L C. Research article : On the quantumness of correlations in nuclear magnetic resonance. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* **370** (2012) 4821.
- [18] Kim M S, Son W, Buzek V, Knight P L. Entanglement by a beam splitter : Nonclassicality as a prerequisite for entanglement. *Physics Review A* , **65** (2002) 032323.
- [19] Berrada K, Abdel-Khalek S, Eleuch H, Hassouni Y. Beam splitting and entanglement generation : excited coherent states. *Quantum Information Processing*, **12** (2013) 69.

## CHAPITRE 2

# SQUEEZED COHERENT STATES AND THE ONE-DIMENSIONAL MORSE QUANTUM SYSTEM

---

Auteurs : M. Angelova, A. Hertz et V. Hussin

Référence : *J. Phys. A : Math. Theor.* **45** 24400 (2012)

### Résumé

Le système quantique unidimensionnel qu'est le potentiel de Morse est un modèle réaliste pour l'étude des vibrations des atomes dans une molécule diatomique. Ce système est très proche de celui de l'oscillateur harmonique quantique. Nous proposons donc une construction des états cohérents et comprimés, similaire à celle utilisée pour l'oscillateur harmonique, en utilisant les opérateurs d'échelle. Les propriétés de ces états sont analysées par rapport à la localisation au niveau de la position, à la minimisation de la relation d'incertitude de Heisenberg et aux propriétés statistiques de ces états. Nous utilisons le nombre fini d'états d'une molécule diatomique bien connue afin d'illustrer ces propriétés par un exemple.

### Abstract

The Morse potential one-dimensional quantum system is a realistic model for studying vibrations of atoms in a diatomic molecule. This system is very close to the harmonic oscillator one. We thus propose a construction of squeezed coherent states similar to the one of harmonic oscillator using ladder operators. Properties of these states are analysed with respect to the localization in position, minimal Heisenberg uncertainty relation, the statistical properties and illustrated with examples using the finite number of states in a well-known diatomic molecule.

## 2.1 Introduction

Coherent and squeezed states are known to be very important in many fields of physics. Coherent states were discovered in 1926 by Schrödinger [1], while squeezed states were introduced by Kennard in 1927 [2]. However, these works were, in the main, ignored or forgotten until the sixties, when these states became very popular and received a lot of attention from both fields, mathematics and physics. Among many important papers, let us mention the works of Glauber [3, 4], Klauder [5, 6], and Nieto [7]. In the particular field of quantum optics, the books of Walls and Milburn [8], Gazeau [9] and Rand [10] are very good reading which also consider the applications. The study of squeezed states for systems admitting an infinite discrete spectrum, obtained as a generalisation of coherent states, has been recently the center of much attention (see, for example, [11–15]).

In modern developments, coherent states (CS) are standardly defined in three equivalent ways : displacement operator method, ladder (annihilation) operator method and minimum uncertainty method (for review see for example [7]). Initially defined for the case of the harmonic oscillator, coherent states have been generalised for other systems. We can use, for example, the definition of Klauder [16] saying that they are obtained as the following superposition of energy eigenstates  $\{|\psi_n\rangle, n \in \mathbb{N}\}$

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(|z|^2)}} \sum_{n \in I} \frac{z^n}{\sqrt{\rho(n)}} |\psi_n\rangle. \quad (2.1)$$

The sum is taken over all the discrete values of  $n$  and the set  $I$  is usually infinite. The parameter  $z$  is a complex variable in general,  $\mathcal{N}$  is a normalization factor and  $\{\rho(n), n \in \mathbb{N}\}$  is a set of strictly positive parameters, usually depending on the energy of the system under consideration. These last quantities correspond to a moment problem (see [16] for details).

For a quantum system which admits an infinite discrete spectrum  $\{|\psi_n\rangle, n =$

$0, 1, \dots\}$  and ladder operators  $A^-$  and  $A^+$  acting on the energy eigenstates as

$$A^-|\psi_n\rangle = \sqrt{k(n)} |\psi_{n-1}\rangle, \quad A^+|\psi_n\rangle = \sqrt{k(n+1)} |\psi_{n+1}\rangle, \quad (2.2)$$

these coherent states are defined as eigenstates of  $A^-$ . We thus get [16]

$$\rho(n) = \prod_{i=1}^n k(i), \quad \rho(0) = 1. \quad (2.3)$$

Note that the quantity  $k(i)$  is not unique and can be chosen to impose additional constraints to the ladder operators. In particular, for the harmonic oscillator, we have  $k(i) = i$ ,

$$[A^-, A^+] = \mathbb{I}, \quad H_{ho} = \hbar\omega(A^+A^- + \frac{1}{2}), \quad (2.4)$$

and the expression (2.1) gives the usual coherent states.

Now, for a quantum system which admits a finite discrete spectrum like the one which involves the Morse potential, various constructions of coherent states have been adapted [17–20]. In a recent paper [21], we have used ladder operators [22, 23] to construct different types of coherent states of the Morse potential and have compared them with the so-called Gaussian coherent states [24]. In particular, such a construction has been inspired by the approach mentioned above (see formula (2.1)) but where the set  $I$  of values of  $n$  is now finite. The coherent states are not exactly eigenstates of the annihilation operator  $A^-$  but we have shown [21] that, in practice, the last terms on the right hand side of the sum in (2.1) does not contribute significantly. In some approaches (see, for example, [25]) these states are called pseudo-coherent states.

To our knowledge, squeezed coherent states for the Morse potential have not been constructed. The aim of this paper is thus to show that such a construction can be closely related to the one for infinite spectrum systems. In fact, these states would be almost eigenstates of a linear combination of the ladder operators. Moreover, we demonstrate using numerical evaluations that one set of these states, the energy-like, behave properly as squeezed states.

In Section 2 we give a review of relevant results on squeezed coherent states and minimal uncertainty relations for a quantum system with infinite spectrum. In Section 3, starting with the definition of the Morse model and its ladder operators, we define the corresponding squeezed coherent states. We thus get two types of the states called oscillator-like and energy-like. In Section 4, we show that the energy-like states have stable trajectories in the phase space and minimize the uncertainty relation. Due to the complexity of the expressions of those states, numerical calculations are used. We end the paper with conclusions in Section 5.

## 2.2 Squeezed coherent states for a quantum system with infinite spectrum

As in the case of harmonic oscillator, general squeezed coherent states [7], for a quantum system with an infinite discrete energy spectrum, may be constructed as the solutions of the eigenvalue equation :

$$(A^- + \gamma A^+) \psi(z, \gamma) = z \psi(z, \gamma), \quad z, \gamma \in \mathbb{C}. \quad (2.5)$$

The mixing of  $A^-$  and  $A^+$  is said to be controlled by a squeezing parameter  $\gamma$  and  $z$  is called the coherent parameter. The coherent states are special solutions when  $\gamma = 0$ . Conditions on  $\gamma$  must be imposed for the states to be normalisable.

Squeezed coherent states (SCS) based on  $su(2)$  or  $su(1, 1)$  algebras [13, 14] and also direct sums of these algebras with the algebra  $h(2)$  [15], have been constructed using group theoretical methods. This involves, in particular, the operators displacement  $D$  and squeezing  $S$  similar to the ones of the harmonic oscillator. In fact, for  $su(2)$  or  $su(1, 1)$  algebras,  $k(n)$  is a quadratic function of  $n$ .

More generally, equation (2.5) may be solved by using a direct expansion of  $\psi(z, \gamma)$  in the form

$$\psi(z, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_g(z, \gamma)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} |\psi_n\rangle, \quad (2.6)$$



with

$$\mathcal{N}_g(z, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|Z(z, \gamma, n)|^2}{\rho(n)}, \quad (2.7)$$

where  $\rho(n)$  is given by (2.3). Indeed, for the case  $\gamma \neq 0$ , inserting (2.6) into (2.5), we get a 3-term recurrence relation

$$Z(z, \gamma, n+1) - z Z(z, \gamma, n) + \gamma k(n) Z(z, \gamma, n-1) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

and without restriction, we take  $Z(z, \gamma, 0) = 1$  and thus  $Z(z, \gamma, 1) = z$ .

For the harmonic oscillator,  $\rho(n) = n!$  and we get explicitly [15, 26] :

$$Z_{ho}(z, \gamma, n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{i!(n-2i)!} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^i z^{(n-2i)} = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathcal{H}\left(n, \frac{z}{\sqrt{2\gamma}}\right). \quad (2.9)$$

It is well-known that  $|\gamma| < 1$  for the states to be normalizable in this case. In (2.9), we see that the Hermite polynomials  $\mathcal{H}(n, w)$  take values on  $\mathbb{C}$ . These polynomials have interesting properties in terms of orthogonality, measure and resolution of the identity [27].

For the harmonic oscillator, these states minimize the Schrödinger-Robertson uncertainty relation [28] which becomes the usual Heisenberg uncertainty relation for  $\gamma$  real. Indeed, we get

$$(\Delta\hat{x})^2 = \frac{1}{1+\gamma} - \frac{1}{2}, \quad (\Delta\hat{p})^2 = \frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{2} \quad (2.10)$$

and the uncertainty becomes

$$\Delta(z, \gamma) = (\Delta\hat{x})^2(\Delta\hat{p})^2 = \frac{1}{4}. \quad (2.11)$$

We see that this implies the reduction of the “quantum noise” on one of the observables while increasing it on the other. In the following we will treat the case when the quantum noise is reduced on the observable  $x$  because we want a good localisation in the position.

## 2.3 The Morse potential and different types of squeezed coherent states

The Morse potential quantum system is a realistic model for studying vibrations of atoms in a diatomic molecule. Since this system is very close to the harmonic oscillator, the squeezed coherent states will be constructed following the procedure given for the harmonic oscillator, but we will deal with a finite number of eigenstates.

### 2.3.1 The model

The one-dimensional Morse model is given by the energy eigenvalue equation (see, for example, [22])

$$\hat{H} \psi(x) = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m_r} + V_M(x) \right) \psi(x) = E\psi(x), \quad (2.12)$$

where  $m_r$  is the reduced mass of the oscillating system composed of two atoms of masses  $m_1$  and  $m_2$ , *i.e.*  $\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ . The potential is  $V_M(x) = V_0(e^{-2\beta x} - 2e^{-\beta x})$ , where the space variable  $x$  represents the displacement of the two atoms from their equilibrium positions,  $V_0$  is a scaling energy constant representing the depth of the potential well at equilibrium  $x = 0$  and  $\beta$  is the parameter of the model (related to the characteristics of the well, such as its depth and width).

The finite discrete spectrum is known as

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m_r} \beta^2 \epsilon_n^2, \quad (2.13)$$

where

$$\epsilon_n = \frac{\nu - 1}{2} - n = p - n, \quad \nu = \sqrt{\frac{8m_r V_0}{\hbar^2 \beta^2}}, \quad (2.14)$$

and  $\{n = 0, 1, 2, \dots, [p]\}$ , with  $[p]$  the integer part of  $p = \frac{\nu-1}{2}$ . The following shifted energies

$$e(n) = \frac{2m_r}{\hbar^2 \beta^2} (E_n - E_0) = \epsilon_0^2 - \epsilon_n^2 = n(2p - n) \quad (2.15)$$

are useful for the construction of squeezed coherent states. Using the change of variable  $y = \nu e^{-\beta x}$ , we get the energy eigenfunctions, for the discrete spectrum, in terms of associated Laguerre polynomials, denoted by  $L_n^{2\epsilon_n}$ , as

$$\psi_n^\nu(x) = \mathcal{N}_n e^{-\frac{y}{2}} y^{\epsilon_n} L_n^{2\epsilon_n}(y), \quad (2.16)$$

where  $\mathcal{N}_n$  is a normalization factor given by

$$\mathcal{N}_n = \sqrt{\frac{\beta(\nu - 2n - 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(\nu - n)}} = \sqrt{\frac{2\beta(p - n)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(2p - n + 1)}}. \quad (2.17)$$

Since  $p$  is related to physical parameters (see (2.14)), it is not an integer in practice and  $\mathcal{N}$  is never zero as expected.

For many applications, it is convenient to introduce the number operator  $\hat{N}$  such that

$$\hat{N}\psi_n^\nu(x) = n \psi_n^\nu(x) \quad (2.18)$$

and we see from (2.13) that  $\hat{H}$  can be in fact written as  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_r}\beta^2 (p - \hat{N})^2$ .

### 2.3.2 Ladder operators

The ladder operators of the Morse system are defined as in (2.2), however the set of eigenfunctions  $\{|\psi_n\rangle\}$  is finite. As mentioned in the introduction, the quantity  $k(n)$  in (2.2) is not unique and we consider two natural choices [21]. The first choice, the ‘‘oscillator-like’’, corresponds to  $k(n) = n$ . The ladder operators satisfy a  $h(2)$  algebra. The second choice, the ‘‘energy-like’’, corresponds to  $k(n) = e(n)$ , as given in (2.15). Ladder operators satisfy a  $su(1, 1)$  algebra. In what follows, the subscripts  $o$  and  $e$  will be used to refer to these choices.

Though our future calculations do not need the explicit form of the ladder operators, we give them for completeness [20, 22, 29, 30]. For example, we get [22] :

$$A^- = -\left[\frac{d}{dy}(\nu - 2N) - \frac{(\nu - 2N - 1)(\nu - 2N)}{2y} + \frac{\nu}{2}\right]\sqrt{K(N)}, \quad (2.19)$$

$$A^+ = (\sqrt{K(N)})^{-1}\left[\frac{d}{dy}(\nu - 2N - 2) + \frac{(\nu - 2N - 1)(\nu - 2N - 2)}{2y} - \frac{\nu}{2}\right], \quad (2.20)$$

where  $K(n)$  is related to  $k(n)$  by

$$k(n) = \frac{n(\nu - n)(\nu - 2n - 1)}{\nu - 2n + 1}K(n). \quad (2.21)$$

These relations are valid for any integer  $n$  in the interval  $[0, [p] - 1]$ . Note that, for  $n = [p]$ , we get a permitted energy eigenstate  $\psi'_{[p]}(x)$  of the Morse potential but the action of the creation operators on this state does not give zero in general. It gives a state which may not be normalisable with respect to our scalar product. This problem has been already mentioned in some contributions (see, for example, [22, 29]). For arbitrary  $p$ , the special choice  $k(n) = n([p] + 1 - n)$ , leads to  $A_+\psi'_{[p]}(x) = 0$  and  $A_+\psi'_{[p]-1}(x) = \sqrt{[p]}\psi'_{[p]}(x)$ .

The ‘‘oscillator-like’’ ladder operators are thus obtained by taking

$$K_o(n) = \frac{\nu - 2n + 1}{(\nu - n)(\nu - 2n - 1)}, \quad (2.22)$$

while we see that  $K_e(n) = K_o(n)(\nu - 1 - n)$  for the ‘‘energy-like’’ ladder operators.

### 2.3.3 The harmonic oscillator limit

The harmonic oscillator limit [23] is obtained by first shifting the Morse potential by  $V_0 = \frac{k'}{2\beta^2}$  to get

$$V_1 = V_0(1 - e^{-\beta x})^2 = V_M + V_0, \quad (2.23)$$

and then taking  $\beta \rightarrow 0$  so that  $V_1 \rightarrow \frac{1}{2}k'x^2$  where  $k'$  is the force constant. Note that the new Hamiltonian with potential  $V_1$  has thus the energy levels shifted and

we get

$$E_n^1 = -\frac{\hbar^2}{2m_r} \beta^2 \left[ \left( \frac{\nu - 1}{2} - n \right)^2 - \left( \frac{\nu}{2} \right)^2 \right]. \quad (2.24)$$

Since,  $\nu$  is given by (2.14), we get here  $\nu = \frac{2\sqrt{m_r k'}}{\beta^2 \hbar}$ . The oscillator limit is obtained when  $\nu \rightarrow \infty$  giving, as expected, an infinite spectrum and the good limit for the energies

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} E_n^1 = \hbar \sqrt{\frac{k'}{m_r}} \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Second, we have to take the limit on the ladder operators. We replace  $\beta$  by its expression in terms of  $\nu$  and define  $c = \sqrt{\frac{4m_r k'}{\hbar^2}}$ . The annihilation operator  $A^-$ , given in (2.19), thus takes the form :

$$A^- = \sqrt{K(n)} \left[ \frac{e^{\sqrt{\frac{c}{\nu}} x}}{\sqrt{c} \nu} (\nu - 2n) \frac{d}{dx} + \frac{e^{\sqrt{\frac{c}{\nu}} x}}{2\nu} (\nu - 2n - 1)(\nu - 2n) - \frac{\nu}{2} \right]. \quad (2.25)$$

Since  $K(n)$  depends also on  $\nu$ , we have to take the limit carefully. To solve it, just take the Taylor expansion of the exponential to the first order. We then see that  $K(n)$  must behave as  $\nu^{-1}$ , which is exactly what we get from (2.22) and we find

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} A^- = \frac{1}{\sqrt{c}} \left( \frac{d}{dx} + \frac{c}{2} x \right). \quad (2.26)$$

A similar calculation gives the expected limit for  $A^+$ .

### 2.3.4 Squeezed coherent states and their time evolution

The squeezed coherent states of the Morse Hamiltonian are now defined as the finite sum

$$\Psi^\nu(z, \gamma, x) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}^\nu(z, \gamma)}} \sum_{n=0}^{[p]-1} \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} \psi_n^\nu(x), \quad (2.27)$$

where  $\rho(n)$  is given in (2.3),  $Z(z, \gamma, n)$  satisfies (2.8) and

$$\mathcal{N}^\nu(z, \gamma) = \sum_{n=0}^{[p]-1} \frac{|Z(z, \gamma, n)|^2}{\rho(n)}. \quad (2.28)$$

Such a definition is relevant since we have seen in the preceding subsection that the “oscillator-like” ladder operators tend to the ones of the harmonic oscillator when  $k(n) = n$  and the appropriate limit is taken. Moreover, these states are “almost” eigenstates of a linear combination of the generic ladder operators  $A^-$  and  $A^+$  which can be written as :

$$(A^- + \gamma A^+) \Psi^\nu(z, \gamma, x) \approx z \Psi^\nu(z, \gamma, x). \quad (2.29)$$

In fact, the correction can be computed expanding the left-hand side of the equation and using the recurrence relation (2.8). Then, comparing with the right-hand side, we find the the correction is

$$\chi^\nu(z, \gamma, [p], x) = \Lambda_1(z, \gamma, [p]) \psi_{[p]-1}^\nu(x) + \Lambda_0(z, \gamma, [p]) \psi_{[p]}^\nu(x), \quad (2.30)$$

where

$$\begin{aligned} \Lambda_1(z, \gamma, [p]) &= \frac{1}{\sqrt{\rho_{[p]-1}}} Z(z, \gamma, [p]), \\ \Lambda_0(z, \gamma, [p]) &= \frac{1}{\sqrt{\rho_{[p]}}} \gamma k([p]) Z(z, \gamma, [p] - 1). \end{aligned} \quad (2.31)$$

In practice, the last two terms of the sum in (2.27) have a very weak contribution which justifies thus the term “almost” eigenstates used above.

Other constructions of squeezed coherent states have been considered (see, for example, [20, 23]). They implicitly use the displacement operator  $D$ . It must be questioned first because we are dealing with a finite number of eigenstates in (2.27). Indeed, the action of this operator is not well defined even if we take a finite development of the exponentials. Moreover the Baker-Campbell-Hausdorff formulae for expanding  $D$  (as products of exponentials of simple operators) is not necessarily valid (see, for example [30]). Secondly, only one parameter is involved in this displacement operator, that is the reason why they are called coherent states by these authors [20, 23] . They are, in fact, special cases of our squeezed coherent states

where  $z$  and  $\gamma$  are not independent ( $\gamma \neq 0$ ).

Since our squeezed coherent states are closely related to the ones of the harmonic oscillator, we are interested in the behaviour of these states in the physical observable-position  $x$  and observable-momentum  $p$ . Here these observables are not obtained as linear combinations of the ladder operators (as we can see from (2.19) and (2.20)) and we must compute the mean values explicitly.

For an arbitrary observable  $\theta$ , we have  $\langle \theta \rangle(z, \gamma; t) = \langle \Psi^\nu(z, \gamma, x; t) | \theta | \Psi^\nu(z, \gamma, x; t) \rangle$ , where the time evolution of our squeezed coherent states is given by

$$\Psi^\nu(z, \gamma, x; t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}^\nu(z, \gamma)}} \sum_{n=0}^{[p]-1} \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \psi_n^\nu(x) \quad (2.32)$$

and we get explicitly

$$\begin{aligned} \langle \theta \rangle(z, \gamma; t) &= \frac{1}{\mathcal{N}^\nu(z, \gamma)} \left( \sum_{n=0}^{[p]-1} \frac{|Z(z, \gamma, n)|^2}{\rho(n)} \langle \theta \rangle_{n,n} \right. \\ &+ \sum_{n=0}^{[p]-1} \sum_{k=1}^{[p]-1-n} \left( \frac{Z(z, \gamma, n+k)}{\sqrt{\rho(n+k)}} \frac{Z^*(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} e^{-\frac{i(E_{n+k}-E_n)}{\hbar}t} \langle \theta \rangle_{n,n+k} \right. \\ &\left. \left. + \frac{Z^*(z, \gamma, n+k)}{\sqrt{\rho(n+k)}} \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} e^{\frac{i(E_{n+k}-E_n)}{\hbar}t} \langle \theta \rangle_{n+k,n} \right) \right), \quad (2.33) \end{aligned}$$

where

$$\langle \theta \rangle_{m,n} = \langle \psi_m^\nu | \theta | \psi_n^\nu \rangle. \quad (2.34)$$

In the following developments, we are considering observables which are such that  $\langle \theta \rangle_{m,n}$  are symmetric or skewsymmetric with respect to the exchange of  $m$  and  $n$ . We are thus led to two different cases. If  $\langle \theta \rangle_{n+k,n} = \langle \theta \rangle_{n,n+k}$ , we get

$$\begin{aligned}
\langle \theta \rangle(z, \gamma; t) &= \frac{1}{\mathcal{N}^\nu(z, \gamma)} \sum_{n=0}^{[p]-1} \frac{|Z(z, \gamma, n)|^2}{\rho(n)} \langle \theta \rangle_{n,n} \\
&+ \frac{2}{\mathcal{N}^\nu(z, \gamma)} \sum_{n=0}^{[p]-1} \sum_{k=1}^{[p]-1-n} \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{Z^*(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} \frac{Z(z, \gamma, n+k)}{\sqrt{\rho(n+k)}} \right) \cos(\alpha(n, k)t) \right. \\
&+ \left. \operatorname{Im} \left( \frac{Z^*(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} \frac{Z(z, \gamma, n+k)}{\sqrt{\rho(n+k)}} \right) \sin(\alpha(n, k)t) \right] \langle \theta \rangle_{n+k,n}, \quad (2.35)
\end{aligned}$$

where

$$\alpha(n, k) = \frac{\hbar \beta^2}{2m_r} k(2(p-n) - k). \quad (2.36)$$

If  $\langle \theta \rangle_{n+k,n} = -\langle \theta \rangle_{n,n+k}$ , we get

$$\begin{aligned}
\langle \theta \rangle(z, \gamma; t) &= \frac{2i}{\mathcal{N}^\nu(z, \gamma)} \sum_{n=0}^{[p]-1} \sum_{k=1}^{[p]-1-n} \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{Z^*(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} \frac{Z(z, \gamma, n+k)}{\sqrt{\rho(n+k)}} \right) \sin(\alpha(n, k)t) \right. \\
&- \left. \operatorname{Im} \left( \frac{Z^*(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} \frac{Z(z, \gamma, n+k)}{\sqrt{\rho(n+k)}} \right) \cos(\alpha(n, k)t) \right] \langle \theta \rangle_{n+k,n}. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

We get, from [31], the mean values of  $\hat{x}$  and  $\hat{p}$  (with  $\beta = 1$ )

$$\langle \hat{x} \rangle_{n+k,n} = (-1)^{k+1} \mathcal{N}_{n+k} \mathcal{N}_n \frac{\Gamma(\nu - k - n)}{k(\nu - k - 1 - 2n)n!}, \quad k \neq 0, \quad (2.38)$$

$$\langle \hat{x} \rangle_{n,n} = \ln \nu - \Phi(0, \nu - 1 - 2n) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\nu - n - j}, \quad (2.39)$$

where the function  $\Phi(0, z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$  is the digamma function and

$$\langle \hat{p} \rangle_{n+k,n} = i\hbar (-1)^{k+1} \mathcal{N}_{n+k} \mathcal{N}_n \frac{\Gamma(\nu - k - n)}{2 n!} (1 - \delta_{k0}). \quad (2.40)$$

We also get after some calculations,

$$\langle \hat{p}^2 \rangle_{n+k,n} = \hbar^2 (-1)^{k+1} \mathcal{N}_{n+k} \mathcal{N}_n \frac{\Gamma(\nu - k - n)}{4 n!} ((k-1)\nu - k(k+2n+1)), \quad k \neq 0 \quad (2.41)$$



and

$$\langle \hat{p}^2 \rangle_{n,n} = -\hbar^2 \frac{(2n+1)(2n+1-\nu)}{4}. \quad (2.42)$$

The computation of the mean values of  $\hat{x}^2$  is more tricky since it involves the functions  $\Phi(0, z)$  and  $\Phi(1, z)$ . We do not have an analytic expression but we will be able to compute explicitly  $\langle \hat{x}^2 \rangle_{n+k,n}$  and  $\langle \hat{x}^2 \rangle_{n,n}$  since we have a finite number of these expressions to plug in  $\langle \hat{x}^2 \rangle(z, \gamma; t)$ .

### 2.3.5 Oscillator-like squeezed coherent states

In this case, in accordance with the expression of  $\rho(n)$  given in (3.4), we take  $k(i) = i$  and  $\rho(n) = n!$  and we get  $Z_o(z, \gamma, n) = Z_{ho}(z, \gamma, n) = (2.9)$ . For the special case where  $\gamma = 0$ , we get  $Z_{ho}(z, 0, n) = z^n$  while, for the squeezed vacuum  $z = 0$ , we get

$$Z_o(0, \gamma, 2n) = \frac{(2n)!}{n!} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^n, \quad Z_o(0, \gamma, 2n+1) = 0. \quad (2.43)$$

Moreover, in those states, we get the same probability distribution as for the harmonic oscillator :

$$P_o(z, \gamma, n) = |\langle \psi_n^\nu(x) | \psi(z, \gamma, x) \rangle|^2 = \frac{1}{\mathcal{N}_o^\nu(z, \gamma)} \left(\frac{|\gamma|}{2}\right)^n \frac{|\mathcal{H}(n, \frac{z}{\sqrt{2\gamma}})|^2}{n!} \quad (2.44)$$

with

$$\mathcal{N}_o^\nu(z, \gamma) = \sum_{n=0}^{[p]-1} \left(\frac{|\gamma|}{2}\right)^n \frac{|\mathcal{H}(n, \frac{z}{\sqrt{2\gamma}})|^2}{n!}. \quad (2.45)$$

The mean value and dispersion of the number operator  $\hat{N}$  are now given by

$$\langle \hat{N} \rangle_o = \sum_{n=0}^{[p]-1} n P_o(z, \gamma, n), \quad (\Delta \hat{N})_o^2 = \sum_{n=0}^{[p]-1} n^2 P_o(z, \gamma, n) - \left(\sum_{n=0}^{[p]-1} n P_o(z, \gamma, n)\right)^2. \quad (2.46)$$

The statistical properties of these states are similar to the ones of the harmonic oscillator since we get essentially the same quantity for the Mandel's  $Q$ -parameter

[32] given in general by

$$Q(z, \gamma) = \frac{(\Delta \hat{N})^2 - \langle \hat{N} \rangle}{\langle \hat{N} \rangle}. \quad (2.47)$$

The only difference is that, in the calculation of the dispersion and mean values in  $\hat{N}$ , the sums are now finite. In particular, it is well-known (see, for example, [8]) that the probability density is a Poisson distribution in the special coherent case ( $\gamma = 0$ ).

### 2.3.6 Energy-like squeezed coherent states

In this case, in accordance with the expression of  $\rho(n)$  given in (2.3), we take  $k(i) = i(2p - i)$  and  $\rho(n) = (-1)^n n! (1 - 2p)_n$  where  $(a)_n$  is the usual notation for the Pochhammer symbol

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}. \quad (2.48)$$

The exact (infinite) recurrence relation (2.8) can be solved directly in terms of hypergeometric functions. The solution is

$$Z_e(z, \gamma, n) = (-1)^n \gamma^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(2p-n)} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, -\frac{z}{2\sqrt{\gamma}} + \frac{1-2p}{2} \\ 1-2p \end{matrix}; 2 \right), \quad n = 1, 2, \dots, [p] - 1. \quad (2.49)$$

Since this result is far from being trivial, we give some details of the proof and also the expressions of few first polynomials of this sequence.

Let us first set

$$k(n) = n(A - n), \quad A \in \mathbb{R}, \quad (2.50)$$

so that the recurrence relation (2.8) becomes

$$Z(z, \gamma, n+1) - z Z(z, \gamma, n) + \gamma n(A - n) Z(z, \gamma, n-1) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.51)$$

with  $Z(z, \gamma, 0) = 1$  and thus  $Z(z, \gamma, 1) = z$ . Since we know the solution for the

harmonic oscillator (i.e. when  $k(n) = n$ ), we follow the same lines to solve (2.51) for an infinite sequence of values of  $n$ . We introduce the new complex variable  $w = \frac{z}{\sqrt{2\gamma}}$  and we take

$$Z(z, \gamma, n) = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}} f(n, w), \quad (2.52)$$

We thus get a new recurrence relation on the functions  $f(n, w)$  :

$$\begin{aligned} f(n+1, w) - 2w f(n, w) + 2n(A-n) f(n-1, w) &= 0, \\ f(1, w) = 2w, \quad f(0, w) = 1, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.53)$$

It is easy to see that  $f(n, w)$  is in fact a polynomial of degree  $n$  in  $w$ . Moreover, it can be expressed in terms of hypergeometric functions of the type  ${}_2F_1$ . We explicitly get

$$f(n, w) = 2^{\frac{n}{2}} (-A+1)_n {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, -\frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{1-A}{2} \\ 1-A \end{matrix}; 2 \right) \quad (2.54)$$

and the hypergeometric function is in fact a polynomial in  $w$  since we have

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, -v \\ 1-A \end{matrix}; 2 \right) = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \frac{(-n)_k (-v)_k}{(-A+1)_k}. \quad (2.55)$$

The original function (2.52) thus takes the form (2.49) when  $A = 2p$  as expected. It is valid for any real value of  $A$  and in fact, we see that the first polynomials of the sequence are given by

$$\begin{aligned} Z_e(z, \gamma, 0) &= 1, \quad Z(z, \gamma, 1) = z, \\ Z_e(z, \gamma, 2) &= z^2 - (A-1)\gamma, \\ Z_e(z, \gamma, 3) &= z^3 - (3A-5)\gamma z, \\ Z_e(z, \gamma, 4) &= z^4 - 2(3A-7)z^2\gamma + 3(A-1)(A-3)\gamma^2. \end{aligned}$$

To be complete, let us mention that for the special case where  $A$  is an integer, we see that the recurrence relation (2.53) splits in two different ones. Indeed, we

get first a finite sequence of  $f(n, w)$  satisfying (2.53) for  $n = 1, 2, \dots, A - 1$  and, second an infinite sequence of  $f(n, w)$  for  $n = A, A + 1, \dots$  satisfying the recurrence relation

$$f(A+k+1, w) - 2w f(A+k, w) - 2k(A+k) f(A+k-1, w) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.56)$$

Since for  $k = 0$ , we get  $f(A + 1, w) = 2wf(A, w)$ , we can write  $f(A + k, w) = h(k, w)f(A, w)$  where  $h(k, w)$  is a polynomial of degree  $k$  in  $w$  satisfying the recurrence relation

$$\begin{aligned} h(k+1, w) - 2w h(k, w) + 2k(-A - k) h(k-1, w) &= 0, \\ h(1, w) = 2w, \quad h(0, w) &= 1, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.57)$$

which is (2.53) where  $A$  has been replaced by  $-A$ . The polynomials  $h(k, w)$  are thus given by

$$h(k, w) = 2^{\frac{k}{2}} (A+1)_k {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -k, -\frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{1+A}{2} \\ 1+A \end{matrix}; 2 \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.58)$$

The solutions  $f(n, w)$  satisfying (2.53) for  $n = 1, 2, \dots, A - 1$  are in fact associated to a finite sequence of Krawtchouk polynomials while the solutions  $h(n, w)$  for  $n = 0, 1, \dots$  are associated with Meixner polynomials [33]. They both satisfy discrete orthogonality relations on the variable  $w$  but these are not relevant in our context since  $w$  is a continuous parameter.

When  $\gamma = 0$ , we get  $Z_e(z, 0, n) = z^n$  leading to coherent states while for the squeezed vacuum ( $z = 0$ ), we get

$$Z_e(0, \gamma, 2n) = 4^{(n-1)} (1-2p)(3/2)_{n-1} (3/2-p)_{n-1} \gamma^n, \quad Z_e(0, \gamma, 2n+1) = 0. \quad (2.59)$$

Now the probability distribution, denoted by  $P_e(z, \gamma, n)_e$ , is given by

$$P_e(z, \gamma, n) = \frac{1}{\mathcal{N}_e^\nu(z, \gamma)} \frac{\Gamma(2p-n)}{\Gamma(2p)n!} |Z(z, \gamma, n)|^2, \quad (2.60)$$

where

$$\mathcal{N}_e^\nu(z, \gamma) = \sum_{n=0}^{[p]-1} \frac{\Gamma(2p-n)}{\Gamma(2p)n!} |Z(z, \gamma, n)|^2. \quad (2.61)$$

Similar expressions for  $\langle \hat{N} \rangle_e$  and  $(\Delta \hat{N})_e^2$  are obtained as in (2.46).

### 2.3.7 Behaviour of the squeezed coherent states for the case of the hydrogen chloride molecule

For the hydrogen chloride molecule  $^1\text{H}^{35}\text{Cl}$  (already considered in a previous paper [21]), we will fix the values of the physical parameter  $\nu$  given in (2.14) with published values of  $m_r$ ,  $\beta$  and  $V_0$ , or as most often in practice, using  $\nu = \omega_e/\omega_e x_e$ , the ratio between the experimentally measured molecular harmonic  $\omega_e$  and anharmonicity  $\omega_e x_e$  constants (see for example [34–37]). For the ground state,  $X^1\Sigma^+$  we have  $\nu \approx 57.44$  and  $[p] = 28$ . We also choose the units such that  $\frac{\hbar}{2m_r} = 1$  and  $\beta = 1$ .

Let us start with some general facts. First, the squeezing parameter must be restricted to  $|\gamma| < 1$  for the states to be normalisable (as for the harmonic oscillator). Second, the minimisation of the Heisenberg uncertainty relation depends on the values of  $z$  when  $\gamma$  is real (and less than 1). Finally, we will see that the squeezing effect (reduction of the dispersion of one observable at the price of increasing it in the other) is always present even for  $\gamma = 0$ . Moreover, the dispersion in  $\hat{x}$  may be chosen smaller for the energy-like than for the oscillator-like states leading to a better localisation for the energy-like states.

In order to compare our results with the well-known ones for the harmonic oscillator, we restrict ourselves to positive real values of  $z$  and  $\gamma$  with  $\gamma < 1$ . In fact, no dramatic difference appear when  $z$  and/or  $\gamma$  are negatives.

### 2.3.8 Coherent system of states ( $\gamma = 0$ )

The oscillator-like and energy-like states differ only by the denominator (and the normalisation factor) in the development (2.27). In Fig 2.1, we show the trajectories for both states with  $z = 2$  and  $t \in [0, 1]$  and we see that the oscillator-like states are less stable than the energy-like ones for the same value of  $z$ . This is true when  $z < 20$ . We also see that, even if  $\gamma = 0$ , squeezing always appears in the coherent system of states for the Morse potential.

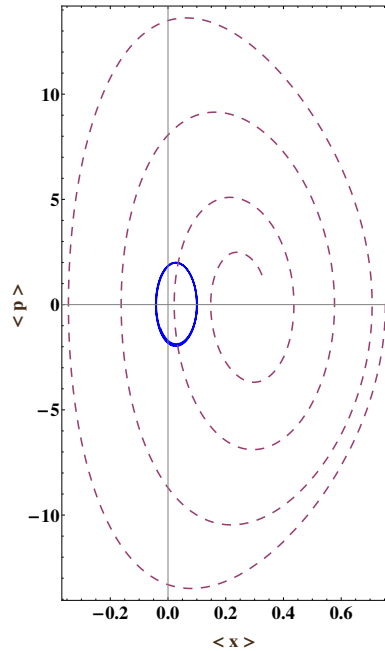


Figure 2.1 – Phase-space trajectories for oscillator-like (dashed line) and energy-like (plain line) states when  $(z, \gamma) = (2, 0)$  and  $t \in [0, 1]$ .

At  $t = 0$ , the uncertainty product  $\Delta(z, 0) = (\Delta x)^2(\Delta p)^2$  and the dispersion  $(\Delta x)^2$  show a very stable behaviour in  $z$  for the energy-like states (see Fig 2.2). These states are mostly minimal uncertainty states and the dispersion in  $x$  is very small leading to a very good localisation (at least for  $z < 20$ ). This last fact is confirmed by the large eccentricity (in fact, it is very close to 1) of the ellipses obtained before. Interestingly, if we want to minimise the dispersion in  $p$ , we see, again on Fig 2.2, that  $\Delta(z, 0)$  is no longer minimized. Also, reducing the dispersion

in  $p$  increases the dispersion in  $x$ . Moreover, we can easily see that the best minimisation of the dispersion in  $p$  is observed in this special case, i.e. for  $\gamma = 0$ . The oscillator-like states have almost the same behaviour but  $\Delta(z, 0)$  increases faster for smaller values of  $z$  (around  $z = 3$ ).

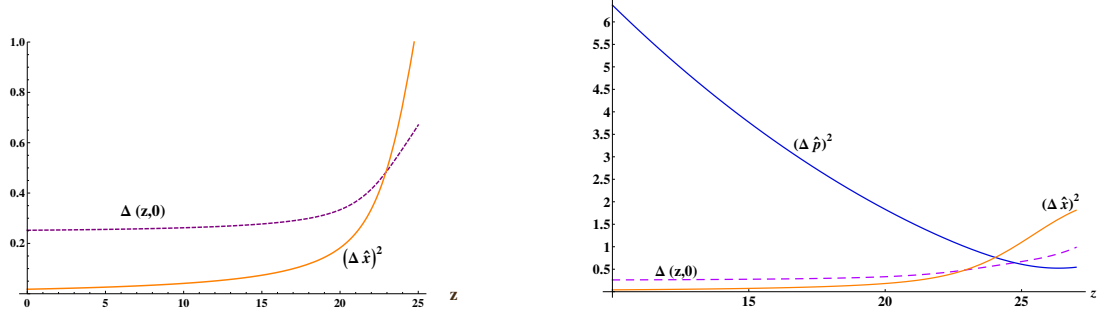


Figure 2.2 – Uncertainty and dispersions for the energy-like states at  $\gamma = 0$ ,  $\Delta$  and  $(\Delta \hat{x})^2$  with  $z \in ]0, 25]$  (left) and  $\Delta$ ,  $(\Delta \hat{x})^2$  and  $(\Delta \hat{p})^2$  with  $z \in [10, 27]$  (right).

Finally, the density probabilities of both types of states have been computed to confirm the preceding results. In Fig 2.3, the energy-like states show again a better behaviour then the oscillator-like states as time evolves.

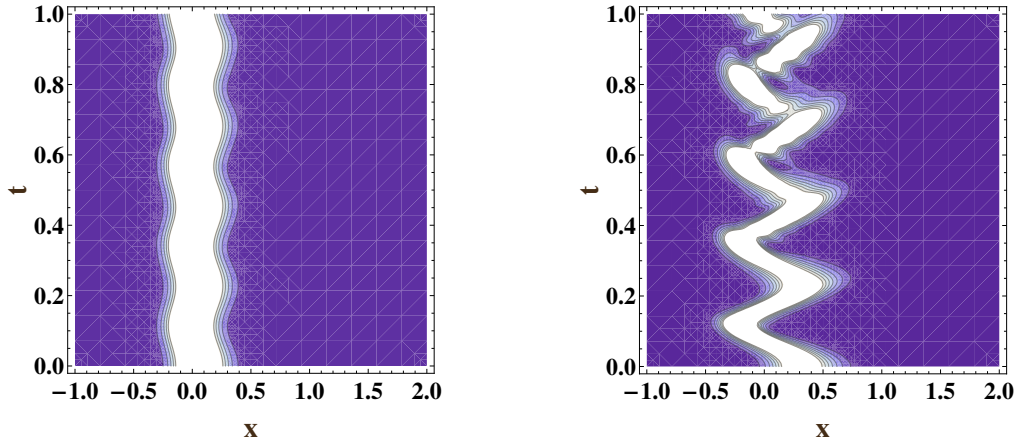


Figure 2.3 – Density probability  $|\Psi_e^\nu(1, 0, x; t)|^2$  (left) and  $|\Psi_o^\nu(1, 0, x; t)|^2$  (right) for  $x \in [-1, 2]$  and  $t \in [0, 1]$ .

### 2.3.9 Squeezed vacuum ( $z = 0$ )

In this case, both types of states are polynomials in  $\gamma$  and only even combinations of eigenfunctions appear (see (2.43) and (2.59)). Again, the energy-like states have more stable trajectories but for small values of  $\gamma$ . In Fig 2.4, we have compared the trajectories for the energy-like states when  $\gamma = 0.2, 0.5$  and  $0.7$ .

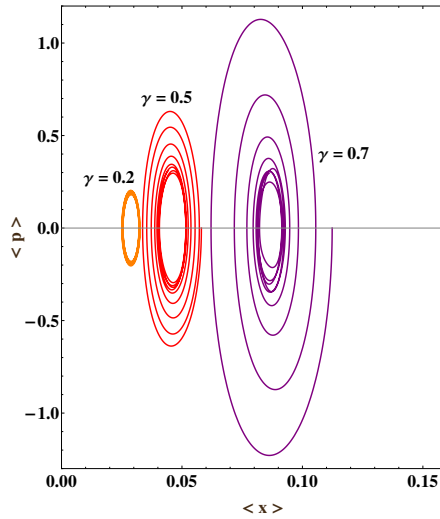


Figure 2.4 – Phase-space trajectories for energy-like states in the vacuum with  $\gamma = 0.2, 0.5, 0.7$  and  $t \in [0, 1]$ .

At  $t = 0$ , the uncertainty product  $\Delta(0, \gamma) = (\Delta x)^2(\Delta p)^2$  and the dispersion  $(\Delta x)^2$  take almost the same values for both types of states. Minimal uncertainty is satisfied for  $\gamma \in [0, 0.2]$  and we get very small values of the dispersion in  $x$  for the same values of  $\gamma$ . The behaviour is similar to the one in Fig 2.2.

With respect to the statistical properties, Fig 2.5 shows bunching effects of  $Q(0, \gamma) > 0$  both for the energy-like and oscillator-like states (for more information about bunching see [8]). It confirms that both types of states have similar statistical behaviour. Finally, the density probability has been computed for the energy-like states. In Fig 2.6 we see that the best localisation occurs when  $\gamma$  is smaller than 0.2. We see also, by observing the time evolution, that the vacuum states are less stable than the coherent states. Similar behaviour is observed for the oscillator-like states.



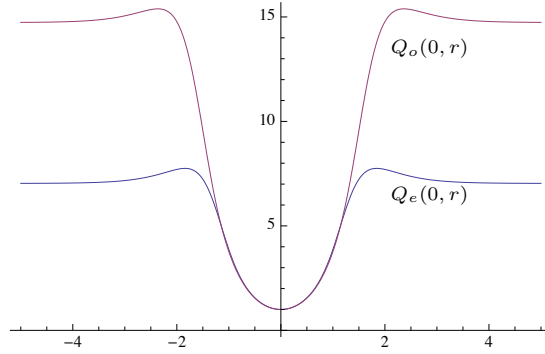


Figure 2.5 – Comparison of Mandel parameter  $Q(0, \gamma)$  in the vacuum for the energy-like and oscillator-like squeezed states as a function of  $r$  such that  $\gamma = \tanh r$ .

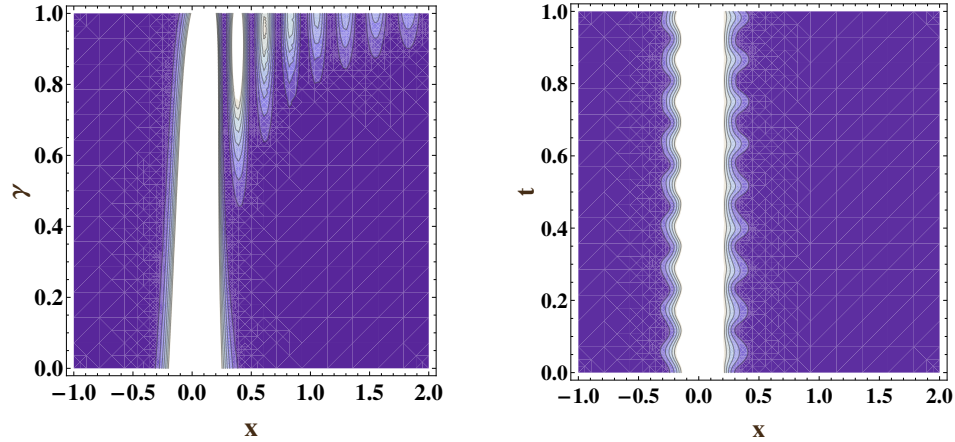


Figure 2.6 – Density probability  $|\Psi_e^\nu(0, \gamma, x; t)|^2$  in the vacuum for energy-like coherent states for  $x \in [-1, 2]$  as a function of  $\gamma \in [0, 1]$  with  $t = 0$  (left) and a function of  $t \in [0, 1]$  with  $\gamma = 0.2$  (right).

### 2.3.10 General system of states

In this case, we observe that the trajectories deviate quickly from closed curves while the minimum uncertainty is still realised but when  $\gamma < 0.2$ . The graphs for the Mandel's parameter for  $z = 2$  are given in Fig 2.7. The bunching and anti-bunching are observed for both types of states, the bunching is more prominent for energy-like states for all values of  $r$ . More significant anti-bunching effect is observed for oscillator-like states showing a steady effect for  $r < 0$  and a minimum for  $r > 0$  (when  $\gamma \approx 0.2$ ).

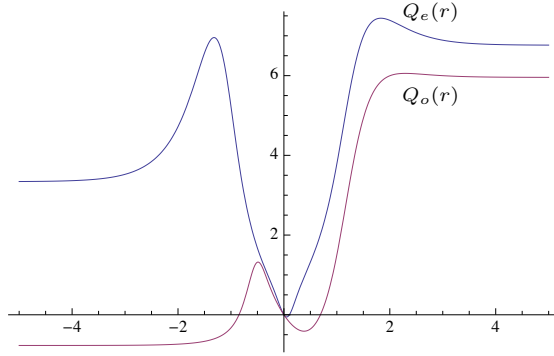


Figure 2.7 – Comparison between the Mandel parameter for the energy-like and oscillator-like squeezed states as a function of  $r$  such that  $\gamma = \tanh r$  for  $z = 2$ .

The calculations of observables for other diatomic molecules can be done in a similar way. For example, we have done such calculations for the molecule  $^{133}\text{CS}_2$  which has a larger value for  $\nu$ . Indeed, we have  $\nu \approx 524.55$  and thus  $[p] = 261$ . We have obtained similar behaviour for both types of states that is not relevant to produce here.

## 2.4 Conclusions

In this paper, we have introduced squeezed coherent states of a quantum system with a finite discrete energy spectrum described by the Morse potential. These states are almost eigenstates of linear combination of ladder operators and are characterised by two continuous parameters  $z$  and  $\gamma$ . We have considered two different types of ladder operators and constructed the corresponding oscillator-like and energy-like squeezed coherent states.

We have investigated the behaviour of these states regarding localisation and minimum uncertainty. The calculation of the dispersions and mean values have been done analytically except for the mean value of  $\hat{x}^2$  for which the analytical form is not known. We have computed the Mandel's parameter to investigate the statistical properties of our states.

The oscillator-like squeezed coherent states are closely related to the similar states of the harmonic oscillator. However, they do not have a very good localisation

except for the vacuum case for  $\gamma$  small and they exhibit a certain deviation from the minimal uncertainty principle. The energy-like squeezed coherent states minimise better the uncertainty relation for the case  $\gamma = 0$  and we get a good localisation in position. They are more stable in time than the oscillator-like states. Both type of states have similar statistical properties.

### **Acknowledgements**

V. Hussin acknowledge the support of research grants from NSERC of Canada. A. Hertz acknowledge the support of a NSERC research fellowship. This work has been started while V. Hussin visited Northumbria University (as visiting professor and sabbatical leave). This institution is acknowledged for hospitality. The authors thank J. Van der Jeugt for helpful discussions on special functions and orthogonal polynomials.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik. *Naturwissenschaften*, **14** (1926) 664.
- [2] Kennard E H. Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen. *Zeitschrift für Physik*, **44** (1927) 326.
- [3] Glauber R J. The Quantum Theory of Optical Coherence. *Physical Review*, **130** (1963) 2529.
- [4] Glauber R J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, **131** (1963) 2766.
- [5] Klauder J R. The action option and a Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers. *Annals of Physics*, **11** (1960) 123.
- [6] Klauder J R and Skagerstam B S, *Coherent States-Applications in Physics and Mathematical Physics* (World Scientific, Singapore) (1985).
- [7] Nieto M M. The Discovery of Squeezed States - In 1927. arXiv : quant-ph/9708012 (1997).
- [8] Walls D F and Milburn G J. *Quantum Optics, 2nd Edition* (Springer, Berlin) (2008).
- [9] Gazeau J P. *Coherent states in Quantum Physics* (Wiley, New York) (2009).
- [10] Rand S C. *Nonlinear and Quantum Optics* (Oxford University Press, Oxford) (2010).
- [11] Braunstein S L and McLachlan R I. Generalized squeezing. *Physical Review A*, **35** (1987) 1659.
- [12] Hillery M. Amplitude-squared squeezing of the electromagnetic field. *Physical Review A*, **36** (1987) 3796.

- [13] Bergou J A, Hillery M and Yu D. Minimum uncertainty states for amplitude-squared squeezing : Hermite polynomial states. *Physical Review A*, **43** (1991) 515.
- [14] Fu H-C and Sasaki R. Exponential and Laguerre Squeezed States for  $su(1,1)$  Algebra and Calogero-Sutherland Model. *Physical Review A*, **53** (1996) 3836.
- [15] Alvarez N and Hussin V. Generalized coherent and squeezed states based on the  $h(1) su(2)$  algebra. *J Math Phys*, **43** (2002) 2063.
- [16] Klauder J R, Penson K A , and Sixdernihiers J M. Constructing coherent states through solutions of Stieltjes and Hausdorff moment problems. *Physical Review A*, **64** (2001) 013817.
- [17] Dong S H. The  $SU(2)$  realization for the Morse potential and its coherent states. *Canadian Journal of Physics*, **80** (2002) 129.
- [18] Roy B and Roy P. Gazeau–Klauder coherent state for the Morse potential and some of its properties. *Physics Letters A*, **296** (2002) 187.
- [19] Récamier J and Jàuregui R. Construction of even and odd combinations of Morse-like coherent states. *Journal of Optics B*, **5** (2003) S365.
- [20] Daoud M and Popov D. Statistical properties of Klauder–Perelomov coherent states for the Morse potential. *International Journal of Modern Physics B*, **18** (2004) 325.
- [21] Angelova M and Hussin V. Generalised and Gaussian coherent states for the Morse potential. *Journal of Physics A*, **41** (2008) 30416.
- [22] Dong S H, Lemus R and Frank A. Ladder operators for the Morse potential. *International journal of quantum chemistry*, **86** (2002) 433.
- [23] Dong S-H *Factorization Method in Quantum Mechanics, Fundamental theories in physics 150* (Springer, Dordrecht, The Netherlands) (2008).

- [24] Fox R F and Choi M F. Generalized coherent states for systems with degenerate energy spectra. *Physical Review A*, **64** (2001) 042104.
- [25] Draganescu G E, Messina A and Napoli A. Coherent and squeezed vibrations for discrete variable harmonic oscillators. *Journal of Modern Optics* **56** (2009) 508.
- [26] Yuen H P. Two-photon coherent states of the radiation field. *Physical Review A*, **13** (1976) 2226.
- [27] Szafraniec F H. Operator Theory for Complex and Hypercomplex Analysis. *Contemporary Mathematics*, **212** (1998) 269.
- [28] Merzbacher E *Quantum Mechanics* (Wiley, New York) (1998).
- [29] Singh A C and Babynanda D O. Ladder operators for the Kratzer oscillator and the Morse potential. *International Journal of Quantum Chemistry*, **106** (2006) 415.
- [30] Odake S and Sasaki R. Unified theory of annihilation-creation operators for solvable (“discrete”) quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, **47** (2006) 102102.
- [31] Sage M L. Morse oscillator transition probabilities for molecular bond modes. *Chemical Physics* **35**, (1978) 375.
- [32] Mandel L. Sub-Poissonian photon statistics in resonance fluorescence. *Optics Letters* **4**, (1979) 205.
- [33] Koekoek R and Swarttouw R F *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue* (Technical report 98-17, Delft University of Technology) (1998) ( <http://fa.its.tudelf.nl/koekoek/askey/contents.html>).
- [34] Herzberg G *Molecular Spectra and Molecular structure* Vol. I : Spectra of Diatomic Molecules, 2nd edition (Van Nostrand, Princeton) (1950).

- [35] Guelachvili G, Noah P and Bedace P. Infrared bands of HCl and DCl by Fourier transform spectroscopy : Dunham coefficients for HCl, DCl, and TCl. *Journal of Molecular Spectroscopy*, **85** (1981) 271.
- [36] *CRC Handbook of Chemistry and Physics* 90th Edition , Ed. David R. Lide, Section 9, Molecular Structure and Spectroscopy (CRC netBase, 2010 Taylor and Francis) (2010).
- [37] Angelova M and Frank A. Algebraic approach to thermodynamic properties of diatomic molecules. *Physics of Atomic Nuclei*, **68** (2005) 1625.

## CHAPITRE 3

### BEAM SPLITTER AND ENTANGLEMENT CREATED WITH THE SQUEEZED COHERENT STATES OF THE MORSE POTENTIAL

---

Auteurs : A. Hertz, V. Hussin et H. Eleuch

Référence : soumis pour publication à *Phys. Lett. A* le 8 mai 2013

#### Résumé

Le potentiel de Morse est un système quantique relativement proche de celui de l'oscillateur harmonique. Ainsi, en s'inspirant des méthodes utilisées pour ce dernier, nous étudions la possibilité de créer de l'intrication en faisant passer des états cohérents et comprimés de Morse à travers un miroir semi-transparent. Nous mesurons l'intrication à l'aide de l'entropie linéaire pour deux types différents d'états cohérents et comprimés et nous étudions la dépendance par rapport aux paramètres de cohérence et de compression. Les nouveaux résultats sont liés aux observations faites sur les densités de probabilité et les relations de dispersion de ces états. L'évolution dynamique de l'entropie linéaire est aussi étudiée.

#### Abstract

The Morse potential is relatively closed to the harmonic oscillator quantum system. Thus, following the idea used for the latter, we study the possibility of creating entanglement using squeezed coherent states of the Morse potential as an input field of a beam splitter. We measure the entanglement with the linear entropy for two types of such states and we study the dependence with the coherence and squeezing parameters. The new results are linked with observations made on probability densities and uncertainty relations of those states. The dynamical evolution of the linear entropy is also explored.



### 3.1 Introduction

Quantum entanglement is one of the fundamental cornerstones for the quantum information processing. It is this phenomenon that gives to the quantum information all its strength. A lot of research contributions have been done in the last two decades in order to create entangled states that will be used in a future quantum computer. Recently, many devices have been proposed in order to create entangled states [1]. We can name, for example, cavity QED [2, 3], NMR [4, 5], semiconductor microcavity [6], nanoresonator [7] or beam splitter [8, 9]. In this work we will concentrate on this last device.

Squeezed coherent states (SCS) are known since a long time now [10–13]. They are very useful in physics due to their property to be quasi-classical, i.e., they minimize the Heisenberg uncertainty relation. SCS of the harmonic oscillator are very well known, and recently, they have been generated for other systems [13–15]. In particular, we have recently [16, 17] constructed the SCS of the Morse potential, a potential that is a better approximation than the one of the harmonic oscillator for studying the vibrations in a diatomic molecule. This potential has the particularity to lead to a discrete spectrum of energies which is finite.

SCS of the one-dimensional harmonic oscillator have been used in several experiments [13, 14] and, for example, in a beam splitter in order to generate entanglement [8, 18, 19].

In this paper, we will follow the same idea, by studying the propagation of the SCS of the Morse potential through a beam splitter. In Section 2, we will resume the construction of SCS as eigenstates of a linear combination of ladder operators which are associated to a generalized Heisenberg algebra. Different types of states may be constructed and they correspond to deformation of the usual SCS. In Section 3, we introduce the known operator  $\hat{B}(\theta)$  that defines the beam splitter and a special measurement of entanglement given as the linear entropy  $S$ . We will also summarize the corresponding results for the case of the harmonic oscillator introducing two types of SCS. Section 4 deals with the case of the Morse potential

which has a discrete finite spectrum. Two different types of SCS, called oscillator-like and energy-like, are under study with respect to the measure of entanglement. In particular, we show that entanglement could be present even if there is no squeezing. The behaviour of the linear entropy explains some of the observations made on probability densities and uncertainty relations of those states in a previous work. The dynamical evolution of the linear entropy is also studied. We conclude the paper in Section 5.

### 3.2 Squeezed coherent states and generalized Heisenberg algebra

SCS of a one-dimensional quantum system could be constructed as solutions of the eigenvalue equation

$$(A + \gamma A^\dagger)\Psi(z, \gamma) = z \Psi(z, \gamma), \quad z, \gamma \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

where  $z$  is the amplitude of coherence and  $\gamma$  the squeezing parameter. The operators  $A^\dagger$  and  $A$  are the ladder (creation and annihilation) operators of the system under consideration and are defined, in general, as :

$$A^\dagger|n\rangle = \sqrt{k(n+1)}|n+1\rangle, \quad A|n\rangle = \sqrt{k(n)}|n-1\rangle, \quad (3.2)$$

where the set  $\{|n\rangle, n = 0, 1, \dots\}$  represents the eigenstates of the energy. We have some freedom in the choice of the positive function  $k(n)$  and it will lead to different types of SCS.

If the discrete energy spectrum is infinite (like for the harmonic oscillator potential), the SCS are exact solutions of (3.1). If the discrete energy spectrum is finite (like for the Morse potential), then the SCS are almost solutions of (3.1). Indeed, the difference between the left and right hand sides of (3.1) is negligible [17]. In all cases, we can write the SCS as

$$\Psi(z, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(z, \gamma)}} \sum_{n=0}^M \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} |n\rangle, \quad (3.3)$$

where  $\rho(n)$  is

$$\rho(n) = \prod_{i=1}^n k(i), \quad \rho(0) = 1. \quad (3.4)$$

The normalization factor is

$$\mathcal{N}(z, \gamma) = \sum_{n=0}^M \frac{|Z(z, \gamma, n)|^2}{\rho(n)}. \quad (3.5)$$

In the expression (3.3), the limit  $M$  of the sum depends on the fact that the energy spectrum is finite or not and  $Z(z, \gamma, n)$  satisfies the recurrence relation

$$Z(z, \gamma, n+1) - zZ(z, \gamma, n) + \gamma k(n)Z(z, \gamma, n-1) = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

with  $Z(z, \gamma, 0) = 1$  and  $Z(z, \gamma, 1) = z$ .

In order to make the connection with other approaches [20, 21], we will refine the definition of  $k(n)$  as

$$k(n) = n(f(n))^2. \quad (3.7)$$

The natural first choice  $f(n) = 1$  is called oscillator-like type and we get  $\rho(n) = n!$  which is essentially the product of the energies of the harmonic oscillator. In this case, we also know that the recurrence relation (3.6) leads to

$$Z_o(z, \gamma, n) = Z_{HO}(z, \gamma, n) = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathcal{H}\left(n, \frac{z}{\sqrt{2\gamma}}\right), \quad (3.8)$$

where the subscript  $o$  refers to this type of states and  $\mathcal{H}(n, w)$  are the Hermite polynomials. We could also consider the choice  $f(n) = \sqrt{v+n}$ ,  $v \geq 0$ . This case has been treated for potentials with infinite discrete spectrum like, for example, the trigonometric Pöschl-Teller potential [22, 23]. We could also consider the choice  $f(n) = \sqrt{v-n}$ ,  $v \geq 1$ . This case has been treated for potentials like the Morse and hyperbolic Pöschl-Teller potentials [24]. For special values of  $v$ , we find  $\rho(n)$  as a product of the quadratic energies of the quantum system under consideration that could have infinite or finite spectrum.

Let us mention that all these choices lead to generalized Heisenberg algebras as introduced in the recent literature [20, 21]. It is usually called a  $f$ -deformed algebra because of the introduction of the function  $f(N)$  in the definition of the ladder operators. Indeed, if we introduce the usual number operator  $N$  such that  $N|n\rangle = n|n\rangle$ , we get

$$\begin{aligned} [N, A] &= -A, & [N, A^\dagger] &= A^\dagger, \\ [A, A^\dagger] &= (N+1)(f(N+1))^2 - N(f(N))^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

The ladder operators  $A^\dagger$  and  $A$  may be related to the ones  $a^\dagger$  and  $a$  of the harmonic oscillator by

$$\begin{aligned} A &= af(N) = f(N+1)a, \\ A^\dagger &= f(N)a^\dagger = a^\dagger f(N+1). \end{aligned} \quad (3.10)$$

For  $f(n) = 1$ , the set  $\{A, A^\dagger, N\}$  closes the usual Heisenberg algebra. For  $f(n) = \sqrt{v + \epsilon n}$  with  $\epsilon = \pm 1$ , we can define new operators  $J_- = A$ ,  $J_+ = A^\dagger$ ,  $J_0 = N + \frac{1}{2}(\delta v + 1)$ . They generate a  $su(1, 1)$  algebra for  $\delta = 1$  or a  $su(2)$  algebra for  $\delta = -1$ , since we have

$$\begin{aligned} [J_0, J_-] &= -J_-, & [J_0, J_+] &= J_+, \\ [J_-, J_+] &= 2\delta J_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Thus, if we take the Morse potential ( $\epsilon = -1$ ), comparing (3.9) with (3.11), we get  $\delta = -1$ , i.e., a  $su(2)$  algebra. However, for an infinite potential ( $\epsilon = 1$ ), we get  $\delta = 1$ , i.e., a  $su(1, 1)$  algebra.

### 3.3 Beam splitter and a measure of entanglement

#### 3.3.1 Beam splitting transformation

A beam splitter is an optical device which can generate quantum entanglement with a bipartite input state composed of a state  $|\psi\rangle$  at one input and a vacuum

state  $|0\rangle$  at the other input. The beam splitter 50 :50 is a necessary part of almost all optical experiments [14] since it allows to split the incident intensity to equal reflected and transmitted intensities. Furthermore, a beam splitter can be used to create entangled states [18, 19]. These states have potential applications in quantum cryptography and quantum teleportation [25, 26].

The effect of a beam splitter can be described by an unitary operator  $\hat{B}(\theta)$  connecting the input state with the output one [8] :

$$|out\rangle = \hat{B}(\theta) |in\rangle = \exp\left[\frac{\theta}{2}(a^\dagger b e^{i\phi} - ab^\dagger e^{-i\phi})\right] |in\rangle, \quad (3.12)$$

where the input state is given as

$$|in\rangle = |\psi\rangle \otimes |0\rangle. \quad (3.13)$$

The ladder operators  $a^\dagger, a$  and  $b^\dagger, b$  act on the bipartite fields and satisfy  $[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$ . The quantity  $\phi$  is the phase difference between the reflected and transmitted fields.

The effect of this operator on the usual Fock state, written as  $|n\rangle \otimes |0\rangle$ , is given by :

$$\hat{B}(\theta)(|n\rangle \otimes |0\rangle) = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q}^{\frac{1}{2}} t^q r^{(n-q)} |q\rangle \otimes |n-q\rangle. \quad (3.14)$$

The quantities  $t$  and  $r$  are the transmissibility and reflectivity of the beam splitter that obey the normalization condition  $|t|^2 + |r|^2 = 1$ . They are related to the angle  $\theta$  of the beam splitter by the following equations :

$$t = \cos(\theta/2) \quad \text{and} \quad r = -e^{-i\phi} \sin(\theta/2). \quad (3.15)$$

Later for the calculations and plots, we will use a 50 :50 beam splitter, for which we will thus take  $\theta = \pi/2$ , but the equations in the following are given for the general case.

If the input state is chosen such that  $|\psi\rangle$  is a SCS as defined in (3.3), we get :

$$\begin{aligned}
|out\rangle &= \hat{B}(\theta)(\Psi(z, \gamma) \otimes |0\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=0}^M \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{n!}f(n)!} \hat{B}(\theta)(|n\rangle \otimes |0\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=0}^M \sum_{q=0}^n \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{n!}f(n)!} \binom{n}{q}^{\frac{1}{2}} t^q r^{(n-q)} |q\rangle \otimes |n-q\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{q=0}^M \sum_{m=0}^{M-q} \frac{Z(z, \gamma, m+q)}{\sqrt{q!m!}f(m+q)!} t^q r^m |q\rangle \otimes |m\rangle.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

For usual coherent states (CS) of the harmonic oscillator ( $Z(z, 0, n) = z^n$ ,  $f(n) = 1$  and  $M = \infty$ ), it is well-known that the output state (3.16) is a tensor product of two CS and so no entanglement is created. However, for SCS ( $\gamma \neq 0$ ), there is always entanglement and we can measure it. Since different SCS can be constructed for exactly solvable quantum systems, we will measure the level of entanglement for each type of states.

The beam splitter allowing the propagation of  $n$  and  $m$  integer numbers of photons in both output channels, we keep the same definition (3.14) of the beam splitter operator  $\hat{B}(\theta)$  acting on the eigenstates of the Morse potential.

### 3.3.2 Linear entropy as a quantification of entanglement

There exists several measurements of entanglement such as the concurrence [27], the negativity [28, 29] or the von Neumann entropy [30–33]. In this article, we chose the linear entropy [34, 35], an upper bound of the von Neumann entropy. It is easier to compute, but gives a good indication on the degree of entanglement.

Starting with the density operator  $\rho_{ab}$  of a given output state as introduced before, the linear entropy  $S$  is defined as

$$S = 1 - Tr(\rho_a^2), \tag{3.17}$$

where  $\rho_a$  is the reduced density operator of the system  $a$  obtained by performing a partial trace over system  $b$  of the density operator  $\rho_{ab}$ . The quantity  $S$  takes always values between 0 and 1 where 0 corresponds to the case of a pure state and 1 indicates that the considered states have a maximum of entanglement.

For an output state  $|out\rangle$  created with a SCS as an input through a beam splitter, the density operator is

$$\begin{aligned}\rho_{ab} &= |out\rangle\langle out| \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{q=0}^M \sum_{s=0}^M \sum_{m=0}^{M-q} \sum_{n=0}^{M-s} \frac{Z(z, \gamma, m+q)}{\sqrt{q!m!}f(m+q)!} \frac{\overline{Z(z, \gamma, n+s)}}{\sqrt{n!s!}f(n+s)!} \\ &\quad \times t^q \bar{t}^s r^m \bar{r}^n |q\rangle|m\rangle\langle s|\langle n|\end{aligned}\quad (3.18)$$

and the partial trace is

$$\rho_a = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{q=0}^M \sum_{s=0}^M \sum_{m=0}^{M-q} \frac{Z(z, \gamma, m+q)}{\sqrt{q!}f(m+q)!} \frac{\overline{Z(z, \gamma, m+s)}}{\sqrt{s!}f(m+s)!} t^q \bar{t}^s \frac{|r|^{2m}}{m!} |q\rangle\langle s|. \quad (3.19)$$

Thus, the linear entropy becomes

$$\begin{aligned}S &= 1 - \frac{1}{\mathcal{N}^2} \sum_{q=0}^M \sum_{j=0}^M \sum_{m=0}^{M-\max(q,j)} \sum_{n=0}^{M-\max(q,j)} |t|^{2(q+j)} |r|^{2(m+n)} \\ &\quad \times \frac{Z(z, \gamma, m+q)\overline{Z(z, \gamma, m+j)}Z(z, \gamma, n+j)\overline{Z(z, \gamma, n+q)}}{q!j!m!n!f(m+q)!f(m+j)!f(n+j)!f(n+q)!}.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Note that here, the phase  $\phi$  between the transmitted and reflected fields is not relevant. Indeed, in the calculation of  $S$ , the transmissibility  $t$  and reflectivity  $r$  only appear with the square of their norm.

### 3.3.3 Harmonic oscillator squeezed coherent states and measure of entanglement

The usual SCS of the harmonic oscillator are defined as (3.3) where  $Z(z, \gamma, n)$  is given by the expression (3.8). The behaviour of these states is well-known. In our

work, we analyze, in particular, the behaviour of the uncertainty relation and the density probability for two types of SCS, i.e., the usual ones for which  $f(n) = 1$  and the quadratic ones where we take  $f(n) = \sqrt{n}$ . This last choice is called quadratic since it leads to  $k(n) = n^2$  in (3.7) and it corresponds to an example of states constructed from a  $f$ -deformed Heisenberg algebra.

As well-known, the position  $x$  and momentum  $p$  may be written as a simple combination of the usual ladder operators  $a$  and  $a^\dagger$  :

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a). \quad (3.21)$$

Also, the mean value of an arbitrary observable  $\mathcal{O}$  in the SCS is  $\langle \mathcal{O} \rangle(z, \gamma; t) = \langle \Psi(z, \gamma, x; t) | \mathcal{O} | \Psi(z, \gamma, x; t) \rangle$  where the time evolution of the SCS is given from

$$\Psi(z, \gamma, x; t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(z, \gamma)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \psi_n(x), \quad (3.22)$$

where the  $\psi_n(x) = \langle x | n \rangle$  are the usual Hermite function in  $x$ . From this, we get the definition of the dispersion of this observable :  $(\Delta \mathcal{O})^2 = \langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2$ .

In our calculations, we choose units to be such that  $\hbar = 2m = 1$  and  $\omega = 2$ . This particular case is interesting since, for the usual CS, we have  $(\Delta x)^2 = (\Delta p)^2 = 1/2$ . The mean values and dispersion of  $x$  and  $p$  are calculated in the two types of CS ( $\gamma = 0$ ) and we have the following observations. As we could have expected, the CS constructed with  $f(n) = \sqrt{n}$  are more non-classical than the usual ones. Indeed, we see in Fig 3.1 that the product of the dispersions  $\Delta(z, 0) = (\Delta x)^2 (\Delta p)^2$  at  $t = 0$ , no matter what are the values of the amplitude  $z$ , is more minimized in the usual CS, reaching as expected, the value 1/4. Note though that in the quadratic case, it remains close to this value. However, the dispersions in position and momentum show a completely different behaviour. We have, as expected,  $(\Delta x)^2 = (\Delta p)^2 = \frac{1}{2}$  for the usual CS, but we see that, in the deformed ones,  $(\Delta x)^2$  decreases continuously in  $z$  while  $(\Delta p)^2$  increases maintaining the product almost the same.

These results are in agreement with Fig 3.2 which shows the density probability



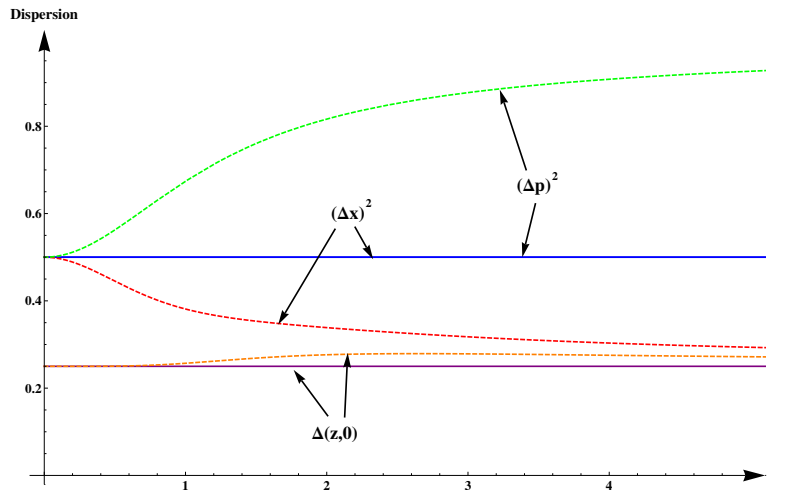


Figure 3.1 – Dispersion in position  $(\Delta x)^2$ , momentum  $(\Delta p)^2$  and product of dispersions  $\Delta(z,0)$  for the usual (plain line) and quadratic (dashed line) CS ( $\gamma = 0$ ) of the harmonic oscillator.

of both types of CS. For usual CS, we know that changing the value of the amplitude  $z$  has the effect of translating the probability density in  $x$  without any change of its form and its maximum value. For the quadratic CS, the density probability becomes narrower (and thus higher) when  $z$  increases. It is what we expected, since Fig 3.1 shows that the dispersion in  $x$  becomes smaller with  $z$  increasing. Note that the density probabilities for both types of SCS are similar, but the squeezing is apparent in the quadratic case even when  $\gamma = 0$ .

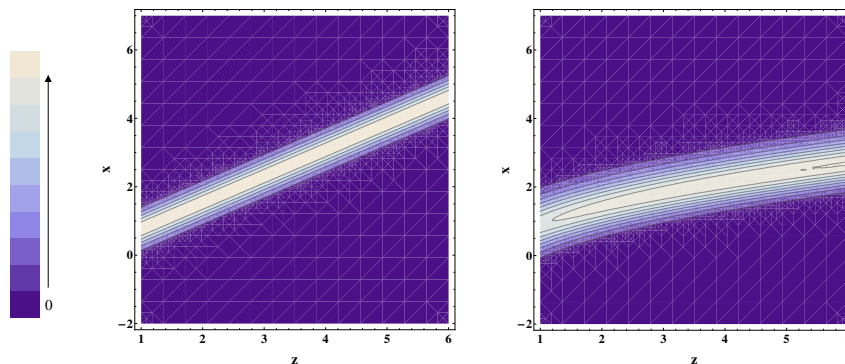


Figure 3.2 – Comparison of the density probability  $|\Psi_{OH}(z, 0, x; 0)|^2$  for the usual (left) and quadratic (right) CS of the harmonic oscillator.

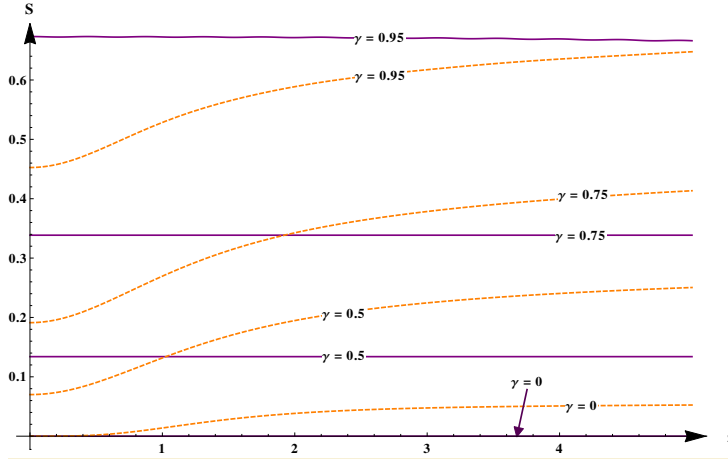


Figure 3.3 – Linear entropy  $S$  for the usual (plain line) and quadratic (dashed line) SCS of the harmonic oscillator for different values of the squeezing  $\gamma$ .

The entanglement of the usual SCS and of some deformed ones has received much attention [21, 36, 37]. Let us mention that in these approaches the deformation function  $f(n)$  always tends to 1 at a certain limit. It is not the case for our quadratic CS. Furthermore, the preceding approaches mainly used the von Neumann entropy. Here we use the linear entropy. As we can see on Fig 3.3, for small values of  $z$  and  $\gamma \neq 0$ , more entanglement is created with the usual CS. It corresponds to the case when the uncertainty is almost the same for both types of CS. For bigger value of  $z$ , depending on the value of the squeezing parameter, more entanglement can be created with the quadratic SCS.

In general, if we fix the type of SCS, the maximum entanglement appears, as expected, when the squeezing parameter  $\gamma$  tends to its maximum value close to 1. We also see, as it is well known, that the usual CS ( $\gamma = 0$ ) have always a null entropy, i.e. no entanglement is created. The quadratic CS, however, create always entanglement.

### 3.4 The Morse squeezed coherent states and measure of entanglement

#### 3.4.1 The model

The one-dimensional Morse potential model is a well known solvable oscillating system composed of two atoms given by the energy eigenvalue equation :

$$\hat{H} \psi(x) = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m_r} + V_M(x) \right) \psi(x) = E \psi(x), \quad (3.23)$$

where the potential is

$$V_M(x) = V_0(e^{-2\beta x} - 2e^{-\beta x}).$$

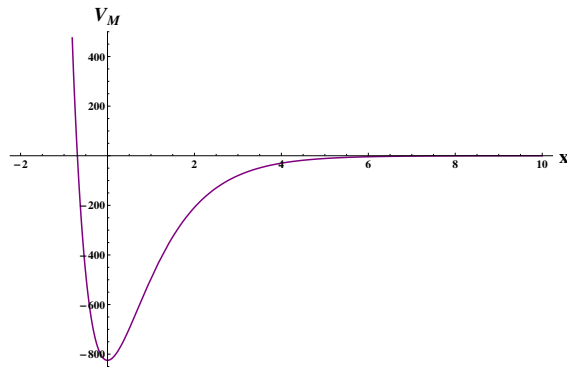


Figure 3.4 – Morse potential for the hydrogen chloride molecule.

In this paper, we use the same definitions and notations as in [17]. The unit convention is  $\hbar = 2m_r = 1$  and  $\beta = 1$ . For all the calculations and graphs, we are considering the example of the hydrogen chloride molecule for which the number of energy eigenstates is denoted by  $[p]$ . The parameter  $p$  is a physical quantity related to the parameters of the system under consideration and, in our case,  $p = 28.22$  [38]. The finite discrete spectrum can thus be written as

$$E_n = -(p - n)^2 \quad (3.24)$$

and the corresponding energy eigenfunctions are

$$\psi_{n,\text{Morse}}(x) = \mathcal{N}_n e^{-\frac{y}{2}} y^{\epsilon_n} L_n^{2\epsilon_n}(y), \quad (3.25)$$

where we have used the change of variable  $y = (2p+1)e^{-x}$ . The functions  $L_n^{2\epsilon_n}(y)$  are the associated Laguerre polynomials and  $\mathcal{N}_n = \sqrt{\frac{2(p-n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2p-n+1)}}$  is the normalization factor.

Two different types of SCS have been considered in [17]. They are given by (3.3) where  $M = [p] - 1$  and the  $|n\rangle$  are energy eigenstates (3.25). Let us explicitly write those states, evolving in time, as :

$$\Psi_{\text{Morse}}(z, \gamma, x; t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(z, \gamma)}} \sum_{n=0}^M \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{n! f(n)!}} e^{-i\frac{E_n}{\hbar} t} \psi_{n,\text{Morse}}(x). \quad (3.26)$$

The first type is given by the oscillator-like SCS since  $f(n) = 1$ . They are similar to the ones for the harmonic oscillator (undeformed) except that the superposition of eigenstates is now finite. The second type is called energy-like SCS since the product of the ladder operators factorizes the Hamiltonian. They are such that  $f(n) = \sqrt{2p-n}$  and we have  $Z(z, \gamma, n) = Z_e^{2p}(z, \gamma, n)$  for  $n = 1, 2, \dots, [p] - 1$  given by

$$Z_e^{2p}(z, \gamma, n) = (-1)^n \gamma^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(2p-n)} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, -\frac{z}{2\sqrt{\gamma}} + \frac{1-2p}{2} \\ 1-2p \end{matrix}; 2 \right). \quad (3.27)$$

Let us summarize the results and observations given in [17] about the behaviour of those states. The phase space trajectories for both types of SCS show always a squeezing effect even if  $\gamma = 0$ , i.e., they are elliptic (with large eccentricity). The oscillator-like SCS are less stable as time evolves than the energy-like SCS for the same value of  $z$  as we see from the phase space trajectories (see in [17]). When  $z < 20$  in our units, the energy-like SCS are mostly minimum uncertainty states and are well localized in position. For the oscillator-like SCS, we observe similar results but the values of  $z$  are smaller ( $z < 3$ ).

Our main observation was thus that energy-like SCS are less non classical than

the oscillator-like one and our concern now is to confirm this fact by computing the level of entanglement of our SCS states using the linear entropy.

For the oscillator-like SCS, we see that the linear entropy is essentially the same as for the usual harmonic oscillator since the equation (3.20) does not depend on the eigenstates of the system. The only difference is the number of states in the sums. Fig 3.5 gives the linear entropy for those states as a function of  $z$  for different values of  $\gamma$  where we have chosen  $z$  and  $\gamma$  real with the same range of values as in [17]. Again, we see that adding squeezing in our states has as an effect to create more entanglement. Let us insist on the fact that entanglement is not very sensitive to the value of  $z$  (at least when  $z$  is small enough).

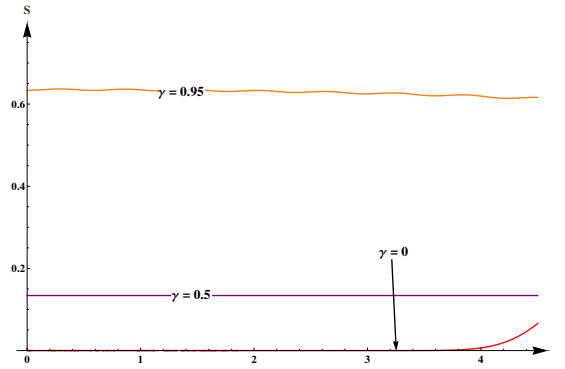


Figure 3.5 – Linear entropy for the Morse potential oscillator-like SCS as a function of  $z$  for different values of the squeezing  $\gamma$ .

Fig 3.6 shows a similar behaviour of the linear entropy for the energy-like SCS but now we have taken a bigger range of values of  $z$  as in [17].

In Fig 3.7 , we compare the linear entropy created by both types of SCS. If we look at the graphs for amplitude  $z$  smaller than 5, we see that both types create almost the same quantity of entanglement for a fixed squeezing  $\gamma$ , but the oscillator-like SCS create a little less entanglement than the energy-like SCS. However, for the oscillator-like SCS, the behaviour completely changes for  $z > 5$  creating big entanglement. It means that the energy-like SCS are more classical for a bigger range of values of the amplitude  $z$ . This result is clearly related to the behaviour of our states with respect to the density probability. First let us mention that it is

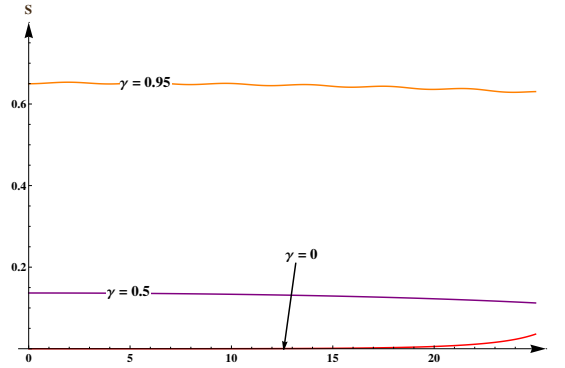


Figure 3.6 – Linear entropy for the Morse potential energy-like SCS as a function of  $z$  for different values of the squeezing  $\gamma$ .

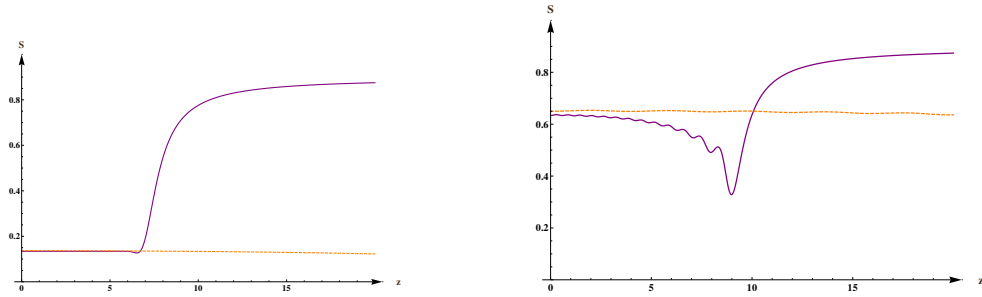


Figure 3.7 – Comparison of the linear entropy for oscillator-like (plain line) and energy-like (dashed line) SCS as a function of  $z$  with moderate squeezing  $\gamma = 0.5$  (left) and big squeezing  $\gamma = 0.9$  (right).

really different than in the harmonic case due to the form of the potential where, as it can be seen in Fig 3.4, if  $x$  is bigger than approximately 4, the Morse potential tends to 0 and the probability of finding a bound state is almost null. Second, for both types of SCS, we observe that changing the value of  $z$  does not only translate the density probability, but also flattens it. The limit value of  $z$  (different for the two types of SCS) observed on the previous figures corresponds to the place where the density probability tends to 0 (see Fig 3.8).

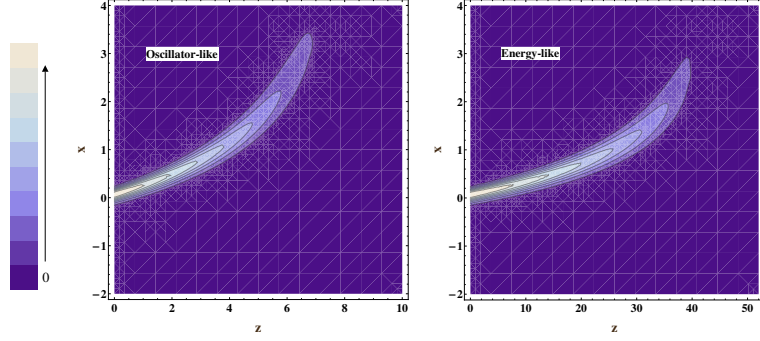


Figure 3.8 – Comparison of the density probability  $|\Psi_{Morse}(z, 0.5, x; 0)|^2$  for the oscillator-like and energy-like SCS of the Morse potential.

### 3.4.2 Dynamical behaviour of the linear entropy

Using the time dependent SCS given in (3.22), we get the time evolution of the linear entropy as :

$$\begin{aligned}
S(t) = 1 & - \frac{1}{\mathcal{N}^2} \sum_{q=0}^M \sum_{j=0}^M \sum_{m=0}^{M-\max(q,j)} \sum_{n=0}^{M-\max(q,j)} e^{-i(E_{m+q}-E_{m+j}+E_{n+j}-E_{n+q})t} \\
& \times \frac{Z(z, \gamma, m+q) \overline{Z(z, \gamma, m+j)} Z(z, \gamma, n+j) \overline{Z(z, \gamma, n+q)}}{q!j!m!n!f(m+q)!f(m+j)!f(n+j)!f(n+q)!} \\
& \times |t|^{2(q+j)} |r|^{2(m+n)}. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

We know that, for the harmonic oscillator, the linear entropy is time independent. It is not the case here. Indeed, using the expression (3.24) of the Morse potential energy  $E_n$ , we get

$$E_{m+q} - E_{m+j} + E_{n+j} - E_{n+q} = -2(m-n)(q-j). \tag{3.29}$$

Thus  $S(t)$  is periodic with period  $\pi$ . On Fig 3.9, we see that the minimum value of  $S$  is reached at  $t = 0$ . Thus, if the aim is to create more entanglement, it is better to let the states evolve in time and select the time for which  $S(t)$  is maximum. However, if we are looking for quasi-classicity, i.e., less entanglement, then it is enough to work at  $t = 0$ . We also observe that the two types of SCS do not

have the same oscillations. To further analyze these oscillations, we compute in Fig 3.10 the Fourier transform of the linear entropy, i.e., we compute the coefficients  $C_\Omega$  defined as

$$C_\Omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S(t) e^{-2\Omega it} dt \quad S(t) = \sum_{\Omega=-\infty}^{\infty} C_\Omega e^{2\Omega it}. \quad (3.30)$$

Note that in the plotting, we have removed the mean value of the oscillations (the coefficient  $C_0$ ) in order to see better the frequencies amplitudes. Then, when looking at Fig 3.10, we see that the first harmonics are more important than the others (here, the fundamental harmonic corresponds to  $\Omega = 2$ ). Also, the coefficients linked to different frequencies are not the same, depending on the type of SCS. This is what explains that the two plots have not the same amplitude of oscillations.

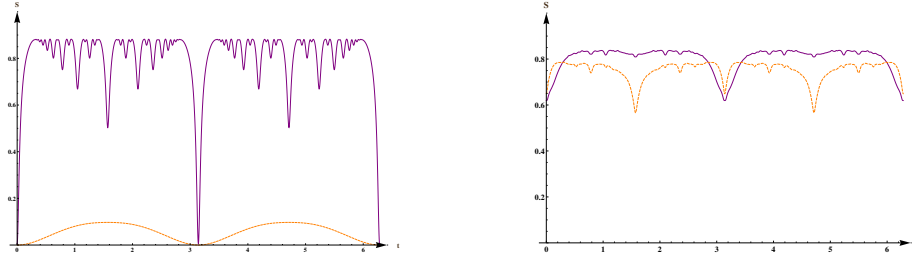


Figure 3.9 – Comparison of  $S(t)$  for oscillator-like (plain line) and energy-like (dashed line) SCS with an amplitude  $z = 4$  and without squeezing  $\gamma = 0$  (left) or with a big squeezing  $\gamma = 0.95$  (right).

### 3.4.3 Entanglement and non-symmetric beam splitter

All our calculations have been realized with a 50 :50 beam splitter, i.e., we have taken  $\theta = \pi/2$  in the operator  $\hat{B}(\theta)$ . In this subsection, we examined the effect on the linear entropy of changing the angle  $\theta$  of the beam splitter for both types of SCS and for different values of the amplitude  $z$  and the squeezing  $\gamma$ . Fig 3.11 shows that the level of entanglement is at its maximum for the symmetric beam splitter ( $\theta = \pi/2$ ). It is in agreement with what has been observed for the harmonic oscillator [2].



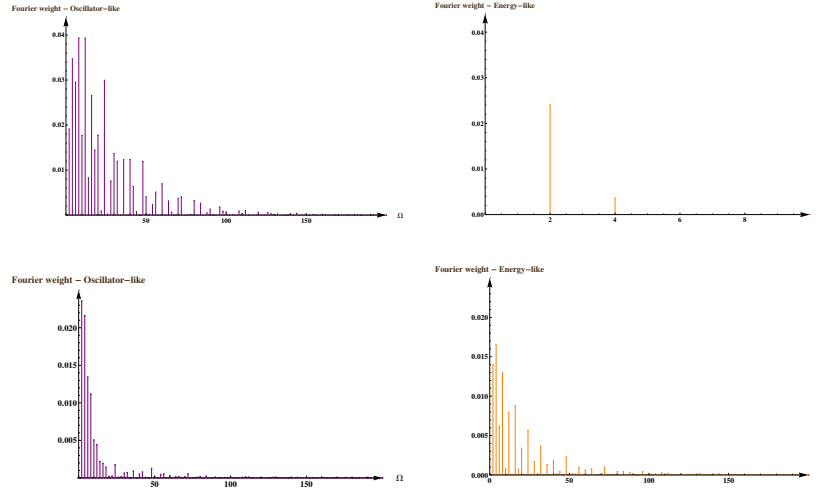


Figure 3.10 – Fourier transform (with the mean value removed) for oscillator-like and energy-like SCS with amplitude  $z = 4$  and without squeezing,  $\gamma = 0$  (up), or with a big squeezing,  $\gamma = 0.95$  (down). We show only positive values of the frequencies since the graph is symmetric.

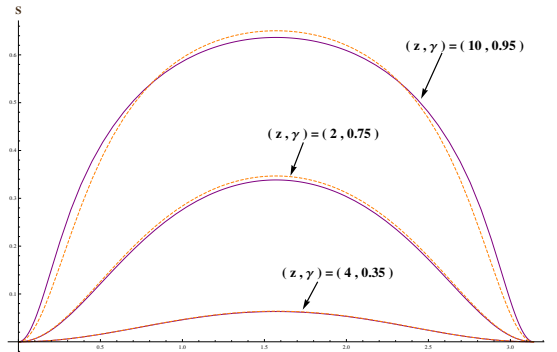


Figure 3.11 – Linear entropy as a function of the angle  $\theta$  for oscillator-like (plain line) and energy-like (dashed line) SCS with different values of the amplitude  $z$  and the squeezing  $\gamma$ .

### 3.5 Conclusions

In this paper, following the idea used for the harmonic oscillator, we have measured the level of entanglement of SCS of the Morse potential using a beam splitter. We have considered two types of such states and a symmetric beam splitter. We have used the linear entropy to measure the level of entanglement since it is a good

approximation of the von Newman entropy, which is mainly used in the recent literature.

We started the paper giving the general construction of SCS associated with deformed Heisenberg algebras for the case of the harmonic oscillator and the Morse potentials. Our deformed states are different from theses considered in preceding approaches. Moreover, these approaches were mainly focused on such states but with no squeezing.

Linear entropy has been computed first for different SCS of the harmonic oscillator giving expected results with respect to the behaviour of the usual CS, in particular. Second, the two types of SCS of the Morse potential that have been constructed in our preceding paper lead to interesting properties with respect to localization and dispersion [17]. We showed that squeezing was always present, even if we consider states for which the squeezing parameter is zero. With respect to the measure of entanglement, we have been able to confirm this fact. For small values of the amplitude  $z$ , both states create almost the same quantity of entanglement but while it stays stable in the case of energy -like SCS, it increases suddenly in the oscillator-like SCS. We have shown that these results are in agreement with the behaviour of the density probability of our states. We have also seen that Morse SCS are more non classical than those of the harmonic oscillator since they always create some entanglement. Time evolution of the linear entropy has shown periodicity with a minimum at the initial state ( $t = 0$ ) and the oscillations are different for different types of states. Finally, we have observed that the symmetric beam splitter is the one that creates a maximum of entanglement like in the case of the harmonic oscillator.

## **Acknowledgments**

VH acknowledges the support of research grants from NSERC of Canada.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Chen G, Church D A, Englert B-G, Henkel C, Rohwedder B, Scully M O, Zubairy M S. *Quantum Computing Devices : Principles, Designs, and Analysis*, Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics & Nonlinear Science, Taylor and Francis Group (New York) (2007).
- [2] Kim M S, Agarwal G S. Reconstruction of an entangled state in cavity QED. *Physics Review A*, **59** (1999) 3044.
- [3] Xiao X Q, Zhu J, He G Q, Zeng G H. A scheme for generating a multiphoton NOON state based on cavity QED. *Quantum Information Processing*, **12** (2013) 449.
- [4] Eskandari M R, Rezaee L. Thermal Entanglement of Two Qubits with Dipolar Ordered Initial State Coupled to a Spin Chain in MQ NMR System. *International Journal of Modern Physics B*, **26** (2012) 1250184.
- [5] Soares-Pinto D O, Auccaise R, Maziero J, Gavini-Viana A, Serra R M, Celeri L C. Research article : On the quantumness of correlations in nuclear magnetic resonance. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* **370** (2012) 4821.
- [6] Eleuch H. Entanglement and autocorrelation function in semiconductor microcavities. *International Journal of Modern Physics B*, **24** (2010) 5653.
- [7] Abdel-Aty M, Larson J, Eleuch H, Obada A S F. Multi-particle entanglement of charge qubits coupled to a nanoresonator. *Physica E*, **43** (2011) 1625.
- [8] Kim M S , Son W, Buzek V, Knight P L. Entanglement by a beam splitter : Nonclassicality as a prerequisite for entanglement. *Physics Review A* , **65** (2002) 032323.
- [9] Berrada K, Abdel-Khalek S, Eleuch H, Hassouni Y. Beam splitting and entanglement generation : excited coherent states. *Quantum Information Processing*, **12** (2013) 69.

- [10] D. Walls, *Nature*, **306** (1983) 141.
- [11] Loudon R. *The Quantum Theory of Light* (Oxford University Press, Oxford) (2000).
- [12] Dell Anno F, De Siena S, Illuminati F. Multiphoton quantum optics and quantum state engineering. *Physics Reports*, **428** (2006) 53.
- [13] Gazeau J P. *Coherent states in Quantum Physics* (Wiley, New York) (2009).
- [14] Walls D F and Milburn G J. *Quantum Optics, 2nd Edition* (Springer, Berlin) (2008).
- [15] Eberle T et al. Quantum enhancement of the zero-area Sagnac interferometer topology for gravitational wave detection. *Physical Review Letters*, **104** (2010) 251102.
- [16] Angelova M, Hussin V. Generalised and Gaussian coherent states for the Morse potential. *Journal of Physics A*, **41** (2008) 30416.
- [17] Angelova M, Hertz A, Hussin V. Squeezed coherent states and the one-dimensional Morse quantum system. *Journal of Physics A*, **45** (2012) 244007.
- [18] Sanders B C. Review of entangled coherent states. *Journal of Physics A*, **45** (2012) 244002.
- [19] Ourjoumtsev A, Ferreyrol F, Tualle-Brouri R, Grangier P. Preparation of non-local superpositions of quasi-classical light states . *Nature Physics*, **5** (2009) 189.
- [20] Hassouni Y, Curado E M F, Rega-Monteiro M A. Construction of coherent states for physical algebraic systems. *Physical Review A*, **71** (2005) 022104.
- [21] Abdel-Khalek S, Berrada K, Raymond Ooi C H. Beam Splitter Entangler for Nonlinear Bosonic Fields. *Laser Physics*, **22** (2012) 1449.

- [22] Pöschl G, Teller E. Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators. *Zeitschrift für Physik* , **83** (1933) 143.
- [23] Antoine J P, Gazeau J P, Monceau P, Klauder J R, Penson K A. Temporally stable coherent states for infinite well and Poschl-Teller potentials. *Journal of Mathematical Physics*, **42** (2001) 2349.
- [24] Levai G. Solvable potentials associated with  $su(1,1)$  algebras : a systematic study. *Journal of Physics A*, **27** (1994) 3809.
- [25] Jennewein T, Simon C, Weihs G, Weinfurter H, Zeilinger A. Quantum cryptography with entangled photons. *Physical Review Letters*, **84** (2000) 4729.
- [26] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, **70** (1993) 1895.
- [27] Wootters W K. Entanglement of Formation and Concurrence. *Quantum Information and Computation*, **1** (2001) 27.
- [28] Zyczkowski K, Horodecki P, Sanpera A, Lewenstein M. Volume of the set of separable states. *Physical Review A*, **58** (1998) 883.
- [29] Vidal G, Werner R F. A computable measure of entanglement. *Physical Review A*, **65** (2002) 032314.
- [30] Schumacher B. Quantum coding. *Physical Review A*, **51** (1995) 2738.
- [31] Jozsa R, Schumacher B. A new proof of the quantum noiseless coding theorem. *Journal of Modern Optic*, **41** (1994) 2343.
- [32] Hausladen P, Jozsa R, Schumacher B, Westmoreland M, Wootters W. Classical information capacity of a quantum channel. *Physical Review A*, **54** (1996) 1869.
- [33] Barnum H, Fuchs C, Jozsa R, Schumacher B. General fidelity limit for quantum channels. *Physical Review A*, **54** (1996) 4707.

- [34] Affleck I, Laflorencie N, Sorensen E S. Entanglement entropy in quantum impurity systems and systems with boundaries. *Journal of Physics A*, **42** (2009) 504009.
- [35] Gerry C C, Benmoussa A. Beam splitting and entanglement : Generalized coherent states, group contraction, and the classical limit. *Physical Review A*, **71** (2005) 062319.
- [36] Mancini S, Manko V I. The survival of quantum coherence in deformed states superposition. *Europhysics Letters*, **54** (2001) 586.
- [37] Berrada K, El Baz M, Eleuch H, Hassouni Y. Bipartite entanglement of nonlinear quantum systems in the context of the q-Heisenberg Weyl algebra. *Quantum Information Processing*, **11** (2012) 351.
- [38] Angelova M, Frank A. Algebraic approach to thermodynamic properties of diatomic molecules. *Physics of Atomic Nuclei*, **68** (2005) 1625.

## CONCLUSION

---

Ce travail avait pour but de présenter une construction des états cohérents et comprimés du potentiel de Morse. En nous inspirant de ce qui a déjà été fait pour les états cohérents et comprimés de l'oscillateur harmonique, nous avons construit deux types d'états. En étudiant leurs dispersions et leurs trajectoires dans l'espace de phase en fonction de leurs paramètres de cohérence et de compression, nous avons pu conclure que le second type d'états comprimés se comporte de façon plus classique que le premier, car les trajectoires sont plus stables et le produit des dispersions est plus minimal pour une plus grande fourchette de valeurs de  $z$ . Pour faire cette analyse, nous avons développé des formules permettant de calculer les valeurs moyennes des observables position et impulsion dans les états cohérents et comprimés du potentiel de Morse. Il est à noter que ces formules se généralisent à tous les potentiels ayant un spectre d'énergie discret aussi bien infini que fini.

Il serait donc intéressant de poursuivre la construction et l'analyse des états cohérents et comprimés pour d'autres potentiels. On peut penser, par exemple, au potentiel de Rosen-Morse [1, 2] ou bien à un cas particulier de ce dernier, le potentiel de Pöschl-Teller [3, 4]. Tous deux sont des potentiels exactement résolubles qui permettent, comme celui de Morse, d'étudier les vibrations internes des molécules et tous deux possèdent des spectres d'énergie finis. Des études sur leurs états cohérents ont déjà été faites [5–7], mais on pourrait pousser l'analyse au niveau des états comprimés. Nous avons d'ailleurs déjà publié un article à ce sujet, mais en nous concentrant particulièrement sur les liens avec les trajectoires dans les potentiels classiques équivalents [8].

Ce travail a également permis de montrer qu'il serait possible de créer de l'intrication en insérant dans un miroir semi-transparent les états cohérents et comprimés du potentiel de Morse. Une fois encore, nous avons comparé les deux types d'états créés en mesurant l'intrication à l'aide de l'entropie linéaire. Nous avons alors démontré que contrairement au cas de l'oscillateur harmonique, il est possible de

créer de l'intrication même avec les états cohérents. Ainsi, les états cohérents et comprimés du potentiel de Morse sont moins quasi-classiques que ceux de l'oscillateur harmonique. Nous avons également constaté que les deux types d'états créent plus ou moins le même niveau d'intrication pour des valeurs de cohérence et de compression égales, mais que dans le cas des états ressemblant le plus à ceux de l'oscillateur harmonique, il faut toutefois se limiter à des valeurs de  $z$  suffisamment petites (afin de conserver une bonne localisation des états).

Pour poursuivre un peu plus loin ce travail, il serait intéressant, par exemple, d'étudier les propriétés de ces états cohérents et comprimés de Morse dans des systèmes biparties de la forme  $|\Psi\rangle = A|z_1, \gamma_1\rangle \otimes |z_2, \gamma_2\rangle + B|z'_1, \gamma'_1\rangle \otimes |z'_2, \gamma'_2\rangle$  et de mesurer, encore une fois, l'intrication ainsi créée en utilisant, par exemple, la concurrence [9].



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Rosen N, Morse P M. On the Vibrations of Polyatomic Molecules. *Physicals Review*, **42** (1932) 210.
- [2] Nieto M. Exact wave-function normalization constants for the  $B_0 \tanh z - U_0 \cosh^{-2} z$  and Pöschl-Teller potentials. *Physical Review A*, **17** (1978) 1273.
- [3] Pöschl G, Teller E. Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators. *Zeitschrift für Physik*, **88** (1933) 148.
- [4] Rey M, Michelot F. Closed expressions for matrix elements of the trigonometric Pöschl-Teller potential. *Physics Letters A*, **374** (2010) 4761.
- [5] Chenaghlou A, Faizy O. Gazeau-Klauder coherent states for trigonometric Rosen-Morse potential. *Journal of Mathematical Physics*, **49** (2008) 022104.
- [6] El Kinani A H, Daoud M. Coherent states à la Klauder-Perelomov for the Pöschl-Teller potentials. *Physics Letters A*, **283** (2001) 291.
- [7] Cruz y Cruz S, Kuru S, Negro J. Classical motion and coherent states for Pöschl-Teller potentials. *Physics Letters A*, **9** (2008) 1391.
- [8] Angelova M, Hertz A, Hussin V. Trajectories of generalized quantum states for systems with finite discrete spectrum and classical analogs. *AIP Conference Proceeding*, **122** (2012) 122.
- [9] Berrada K, El Baz M, Eleuch H, Hassouni Y. Bipartite entanglement of nonlinear quantum systems in the context of the q-Heisenberg Weyl algebra. *Quantum Information Processing*, **11** (2012) 351.

## ANNEXE A

### RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE RÉCURRENCE POUR LA FONCTION $Z(z, \gamma, n)$

---

Afin de trouver la fonction  $Z(z, \gamma, n)$ , on a vu au chapitre 2 qu'il faut résoudre l'équation de récurrence suivante :

$$Z(z, \gamma, n+1) - zZ(z, \gamma, n) + \gamma n f(n)^2(z, \gamma, n-1) = 0, n = 1, 2, \dots \quad (\text{A-1})$$

Seulement, celle-ci n'est pas évidente à résoudre pour n'importe quelle fonction  $f(n)$ ; en particulier, si  $f(n)^2 = (A - n)$ . Nous allons voir ici comment résoudre cette équation. La méthode proposée sera particulièrement plus simple à implémenter dans un code numérique (par exemple en *Mathematica*).

Comme on l'a vu au chapitre 1, dans le cas de l'oscillateur harmonique, la fonction  $Z(z, \gamma, n)$  s'écrit de la façon suivante :

$$Z_{OH}(z, \gamma, n) = \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{n!}{i!(n-2i)!} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^i z^{(n-2i)} = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \mathcal{H}\left(n, \frac{z}{\sqrt{2\gamma}}\right). \quad (\text{A-2})$$

En s'inspirant de la première partie de cette équation, on suppose une solution à (A-1) de la forme

$$Z(z, \gamma, n) = z^n + \sum_{k=1}^{[n/2]} F(n, k) z^{n-2k} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k. \quad (\text{A-3})$$

Il reste donc à déterminer les coefficients  $F(n, k)$ . Pour cela on remplace (A-3) dans

l'équation de récurrence :

$$\begin{aligned}
0 &= z^{n+1} + \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} F(n+1, k) z^{n+1-2k} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k - z^{n+1} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{[n/2]} F(n, k) z^{n+1-2k} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k + \gamma n(A-n) z^{n-1} \\
&\quad + \gamma n(A-n) \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} F(n-1, k) z^{n-1-2k} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k, \tag{A-4}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} F(n+1, k) z^{n+1-2k} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{[n/2]} F(n, k) z^{n+1-2k} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k \\
&\quad + \gamma n(A-n) z^{n-1} + \gamma n(A-n) \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} F(n-1, k) z^{n-1-2k} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k. \tag{A-5}
\end{aligned}$$

Pour le cas  $n = 1$ , on peut tout de suite voir que

$$F(2, 1) \left(-\frac{\gamma}{2}\right) + \gamma(A-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{F(2, 1) = 2(A-1)}. \tag{A-6}$$

Gardons cela en mémoire. Pour les autres valeurs de  $n$ , il faut trouver une formule plus générale. Récrivons l'équation (A-5) en isolant le terme sans sommation :

$$\begin{aligned}
-\gamma n(A-n) z^{n-1} &= \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} F(n+1, k) z^{n+1-2k} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k \\
&\quad - \sum_{k=1}^{[n/2]} F(n, k) z^{n+1-2k} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k \\
&\quad + \gamma n(A-n) \sum_{k=2}^{[n/2]} F(n-1, k-1) z^{n+1-2k} \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{k-1}. \tag{A-7}
\end{aligned}$$

On remarque alors que le coefficient de  $z^{n-1}$  doit être égal à  $-\gamma n(A-n)$ , tandis que les coefficients des autres puissances de  $z$  sont tous nuls. On peut donc séparer

le problème en deux : on calcule d'abord les coefficients de  $F(n, 1)$ , puis on calcule les coefficients pour toutes les autres valeurs de  $k$ . Quand  $k = 1$ , l'équation (A-7) devient :

$$-\gamma n(A - n) = F(n + 1, 1) \left(-\frac{\gamma}{2}\right) - F(n, 1) \left(-\frac{\gamma}{2}\right), \quad (\text{A-8})$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} F(n + 1, 1) &= 2n(A - n) + F(n, 1) \\ &= 2n(A - n) + 2(n - 1)(A - n - 1) + F(n - 1, 1) \\ &= 2n(A - n) + 2(n - 1)(A - n - 1) + 2(n - 2)(A - n - 2) \\ &\quad + F(n - 2, 1) \\ &= \dots \text{ jusqu'à } F(2, 1) \\ &= \sum_{j=2}^n 2j(A - j) + F(2, 1) \\ &= \sum_{j=2}^n 2j(A - j) + 2(A - 1) \\ &= \sum_{j=1}^n 2j(A - j), \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

ou encore

$$\boxed{F(n, 1) = \sum_{j=1}^{n-1} 2j(A - j) = \sum_{j=1}^{n-1} 2e(j)} \quad (\text{A-10})$$

où  $e(j)$  fait référence aux énergies décalées.

Pour les autres valeurs de  $k$ , l'équation (A-7) devient :

$$\begin{aligned} 0 &= F(n + 1, k) \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k - F(n, k) \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^k \\ &\quad + \gamma n(A - n) F(n - 1, k - 1) \left(-\frac{\gamma}{2}\right)^{k-1}, \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

ce qui peut se réécrire comme

$$\begin{aligned}
F(n+1, k) &= F(n, k) + 2n(A-n)F(n-1, k-1) \\
&= F(n-1, k-1) + 2(n-1)(A-n-1)F(n-2, k-1) \\
&\quad + 2n(A-n)F(n-1, k-1) \\
&= F(n-2, k) + 2(n-2)(A-n-2)F(n-3, k-1) \\
&\quad + 2(n-1)(A-n-1)F(n-2, k-1) \\
&\quad + 2n(A-n)F(n-1, k-1) \\
&= \dots \text{ jusqu'à } F(2k-1, k) \\
&= \sum_{j=2k-1}^n 2j(A-j)F(j-1, k-1), \tag{A-12}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\boxed{F(n, k) = \sum_{j=2k-1}^{n-1} 2e(j)F(j-1, k-1)}. \tag{A-13}$$

On remarque que dans l'équation (A-12), on coupe à  $F(2k-1, k)$ , car sinon on ne répond plus à la condition  $n \geq 2k$ . En effet, puisque  $k$  est l'indice d'une somme allant jusqu'à  $[n/2]$ ,  $k$  ne peut pas dépasser cette valeur maximale. Cela implique d'ailleurs que  $F(2k-1, k) = 0$ .

En résumé, on a maintenant les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
F(n, 1) &= \sum_{j=1}^{n-1} 2e(j), \\
F(n, k) &= \sum_{j=2k-1}^{n-1} 2e(j)F(j-1, k-1),
\end{aligned}$$

ce qui nous permet de calculer les  $Z(z, \gamma, n)$ .

## ANNEXE B

### TRAJECTOIRES OUVERTES DANS L'ESPACE DE PHASE POUR LES ÉTATS COMPRIMÉS DE MORSE

---

Dans le chapitre 2, nous avons vu que lorsqu'on trace les trajectoires, dans l'espace de phase, des états cohérents et comprimés, ces dernières ne sont pas fermées dans le cas du potentiel de Morse (voir Figure 2.1 ou 2.4). Par contre, dans le cas de l'oscillateur harmonique, elles le sont (voir Figure 1.5). Pourquoi cette différence ? Nous serions portés à croire que cela signifie que, dans le cas du potentiel de Morse, l'énergie n'est pas constante dans le temps. Cependant, ce n'est pas le cas et nous allons voir que la différence se situe ailleurs.

Pour calculer la valeur moyenne de l'énergie dans les états cohérents et comprimés, aussi bien de l'oscillateur harmonique que du potentiel de Morse, il suffit d'utiliser la formule suivante :

$$\langle H \rangle = \langle \psi(z, \gamma, t) | H | \psi(z, \gamma, t) \rangle, \quad (\text{B-1})$$

où

$$|\psi(z, \gamma, t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=0}^M \frac{Z(z, \gamma, n)}{\sqrt{\rho(n)}} e^{-iE_n t} |n\rangle, \quad (\text{B-2})$$

avec  $M = \infty$  pour l'oscillateur harmonique et  $M = [p] - 1$  pour le potentiel de Morse et où, bien sûr, il faut prendre les états propres  $|n\rangle$  correspondants.

Calculons donc la valeur moyenne de  $H$  dans ces états :

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle &= \langle \psi(z, \gamma, t) | H | \psi(z, \gamma, t) \rangle \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=0}^M \sum_{k=0}^M \frac{\overline{Z(z, \gamma, n)} Z(z, \gamma, k)}{\sqrt{\rho(n)\rho(k)}} e^{i(E_n - E_k)t} \langle n | H | k \rangle \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=0}^M \sum_{k=0}^M \frac{\overline{Z(z, \gamma, n)} Z(z, \gamma, k)}{\sqrt{\rho(n)\rho(k)}} e^{i(E_n - E_k)t} E_k \langle n | k \rangle \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=0}^M \frac{|Z(z, \gamma, n)|^2}{\rho(n)} E_n.
\end{aligned} \tag{B-3}$$

Il est évident, à la suite de ce calcul, que  $\langle H \rangle$  ne dépend pas du temps dans les deux cas. Ainsi, le fait que les trajectoires soient fermées ou non n'est pas relié à l'énergie, car cette dernière demeure constante dans le temps pour les deux potentiels. Pour trouver une autre explication, étudions à nouveau la valeur moyenne de l'énergie, mais en nous servant, cette fois-ci, du fait que  $H = p^2 + V(x)$ .

Classiquement, dans le cas de l'oscillateur harmonique, il est très facile de calculer la valeur moyenne de  $H$ . En effet, nous avons (avec  $\hbar = 2m = \omega = 1$ ) :

$$\begin{aligned}
\langle H_{cl} \rangle &= \langle p^2 + x^2 \rangle \\
&= \langle p^2 \rangle + \langle x^2 \rangle \\
&= \langle p \rangle^2 + \langle x \rangle^2.
\end{aligned} \tag{B-4}$$

Ici, le passage entre la deuxième et la troisième ligne n'est justifié que parce que nous sommes dans un monde classique. En observant B-4, nous notons que puisque l'énergie est constante dans le temps, l'équation de la trajectoire dans l'espace de phase est celle d'un cercle. Cela confirme ce que nous savions déjà.

Faisons maintenant le même travail pour le cas quantique. Nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\langle H_{qu} \rangle &= \langle p^2 + x^2 \rangle \\
&= \langle p^2 \rangle + \langle x^2 \rangle \\
&= \langle p \rangle^2 + \langle x \rangle^2 + C,
\end{aligned} \tag{B-5}$$

où  $C = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} + \frac{1+\gamma}{4(1-\gamma)}$  est une constante qui apparaît en utilisant le fait que

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \quad \text{et} \quad (\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{1+\gamma}{4(1-\gamma)}, \tag{B-6}$$

puisque quantiquement,  $\langle x^2 \rangle \neq \langle x \rangle^2$  et  $\langle p^2 \rangle \neq \langle p \rangle^2$ . Toutefois, malgré cette différence, les trajectoires dans l'espace de phase  $\langle x \rangle, \langle p \rangle$ , décrites par l'équation B-6, représentent encore des cercles, car  $C$  est une constante, de même que la valeur moyenne de l'énergie.

Examinons maintenant le cas du potentiel de Morse. Classiquement, si nous calculons la valeur moyenne de l'énergie nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle H_{cl} \rangle &= \langle p^2 + V_0(e^{-2x} - e^{-x}) \rangle \\
&= \langle p^2 \rangle + V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle (-2x)^n \rangle - \langle (-x)^n \rangle}{n!} \\
&= \langle p^2 \rangle + V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\langle x \rangle)^n - (-\langle x \rangle)^n}{n!} \\
&= \langle p^2 \rangle + V_0(e^{-2\langle x \rangle} - e^{-\langle x \rangle}),
\end{aligned} \tag{B-7}$$

où encore une fois, le passage entre la deuxième et la troisième ligne n'est permis que parce que l'on se trouve dans un monde classique. L'équation obtenue décrit, comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, une trajectoire fermée pour des énergies négatives (ce qui est précisément le cas que nous étudions). Pour le voir, il suffit de tracer les deux courbes suivantes qui représentent l'équation paramétrique de la trajectoire :



$$\begin{cases} \{x, \sqrt{-E - V_0(e^{-2\langle x \rangle} - e^{-\langle x \rangle})}\} & \text{“courbe du haut”} \\ \{x, -\sqrt{-E - V_0(e^{-2\langle x \rangle} - e^{-\langle x \rangle})}\} & \text{“courbe du bas”} \end{cases}$$

où  $E$  représente la valeur de l'énergie. Nous remarquons alors que les courbes sont continues et que les deux racines carrées sont nulles pour deux valeurs de  $x$  différentes. En les traçant, nous observons donc bien une courbe fermée. De plus, si les énergies sont suffisamment faibles, les courbes ressembleront de plus en plus à des ellipses.

Naïvement, nous nous attendrions à voir la même chose pour le cas quantique. Toutefois, si nous calculons la valeur moyenne de l'énergie, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle H_{qu} \rangle &= \langle p^2 + V_0(e^{-2x} - e^{-x}) \rangle \\ &= \langle p^2 \rangle + V_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle (-2x)^n \rangle - \langle (-x)^n \rangle}{n!}. \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

Cette fois-ci, puisque nous sommes dans le monde quantique, nous ne pouvons pas dire que  $\langle x^n \rangle = \langle x \rangle^n$ . Nous voudrions, comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, utiliser les variances, mais ici, nous avons besoin d'aller chercher des valeurs moyennes de  $x$  supérieures à 2. Nous ne pourrions donc pas facilement lier l'énergie quantique à l'énergie classique comme dans le cas de l'oscillateur harmonique. En fait, quand nous observons l'équation B-8, nous voyons bien qu'elle est compliquée et il n'y a, a priori, aucune raison de s'attendre à ce que les courbes représentent des trajectoires fermées. Ici, nous n'avons pas, comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, la forme d'une ellipse qui apparaît.

Si nous étudions un peu les trajectoires de façon numérique, nous remarquons tout de même que pour certaines valeurs de  $z$  très petites et pour le cas “energy-like”, les trajectoires sont presque des ellipses. Ça veut dire que nous devons être capable, dans ces cas-là, d'écrire B-8 sous la forme :

$$\langle p \rangle^2 + \alpha(\langle x \rangle - \beta)^2 = E, \quad (\text{B-9})$$

pour certaines constantes  $\alpha$  et  $\beta$ . Cependant, ceci n'est vrai que sous certaines conditions particulières. Nous ne devons pas nous attendre, en général, à trouver des courbes fermées et nous ne devrions donc pas être surpris par le fait que les trajectoires dans l'espace de phase ressemblent à des spirales.