Université de Montréal

Les biens communs sans tragédie

Effets de la pression sociale et des convictions

par

Vincent Bezault

Département de sciences économiques

Faculté des arts et sciences

Mémoire présenté à la Faculté des arts et sciences
en vue de l'obtention du grade de maîtrise (M.Sc.)
en sciences économiques

Décembre 2012

Université de Montréal

Faculté des études supérieures et postdoctorales

Ce mémoire intitulé :

Les biens communs sans tragédie

Effets de la pression sociale et des convictions

Présenté par :

Vincent Bezault

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Président-rapporteur

Directeur de recherche

Membre du jury

Résumé

Pourquoi faire un effort pour la communauté sans rien recevoir en retour? C'est habituellement par conviction ou pour répondre à une norme sociale. En s'intéressant au problème du recyclage, nous définissons un modèle de comportement qui intègre ces deux facteurs. Nous déterminons sous quelles conditions un individu décide d'agir bénévolement, puis nous étudions comment ce comportement se propage dans la population. Cela nous permet de déduire comment un gouvernement doit pondérer ses efforts entre la publicité et la consigne pour tendre vers un taux de recyclage parfait au coût minimal. Nous prouvons aussi que dans certaines circonstances, il est préférable de ne pas encourager la participation au bien public. En effet, à mesure que plus de gens y participent, des tensions sociales émergent entre ceux qui font un effort et ceux qui n'en font pas. Celles-ci peuvent être assez fortes pour contrebalancer les bénéfices attendus du bien public.

Mots-clés : tragédie des biens communs, jeux de population, dynamique de meilleure réponse, pression sociale, conviction, contagion, bien public, coordination, réseau, ressource commune

Abstract

The commons need not be a tragedy: impact of peer-pressure and opinions

Why do people help the community without getting anything in return? Usually, they either hold the firm belief they should do so or they want to follow a social norm. The behavioural model of this paper takes those two factors into account and applies them to recycling issues. It shows under which condition people act selflessly and how this behaviour spreads across the population. This paper then determines how governments must balance advertising and packaging refunding in order to increase recycling rate at minimal cost. It also proves that under certain circumstances it is preferable not to start transition toward cooperation. Indeed, as people progressively start cooperating, the population becomes divided between followers and opponents to this new attitude. As long as this heterogeneity remains, peer-pressure causes a cost that may outweigh the expected benefits of cooperation.

Keywords : tragedy of the commons, population game, best-response dynamics, peer-pressure, opinion, contagion, public good, coordination, network, common pool resource

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Introduction

La protection de l'environnement en vaut-elle la peine? Pour l'ensemble de l'humanité, investir un certain effort aujourd'hui pour préserver l'environnement futur est préférable, même si on ne considère que les bénéfices purement économiques de cet effort (Stern 2008). Mais d'un point de vue individuel, cela n'a rien d'évident. Par exemple, si on profite tous des effets du recyclage en général, le gain qu'une personne retire de la récupération d'un déchet en particulier est minime. Habituellement, il est beaucoup trop faible pour justifier le désagrément de se lever pour amener le détritus jusqu'à un bac de recyclage. Certes, le coût de l'effort individuel est moindre que le bénéfice pour l'ensemble de l'humanité, mais celui qui recycle ne jouit que d'une infime partie de ce bénéfice. Pour une personne purement intéressée, la meilleure stratégie est de ne rien faire et de profiter de l'effort des autres. Au pays de l'*Homo Economicus*, personne ne devrait recycler, même si tout le monde y gagnerait. C'est ce qu'on appelle la tragédie des biens communs. Pourtant, on constate qu'au Québec, 89% du papier est recyclé (Recyc-Québec 2009). Pour comprendre les comportements, on ne peut donc pas se limiter à l'étude des coûts et des bénéfices que l'individu tire directement de l'effort de recyclage.

La tragédie des biens communs est un concept forgé par Hardin (1968), qui est devenu un exemple classique de paradoxe social. Dans ce type de situation, les participants préféreraient que tous soient contraints, plutôt que de choisir librement (Ostrom 2006). Dans le cas du recyclage des particuliers, il n'existe aucune structure explicite qui surveille les comportements ou qui punisse les infractions. Cependant, la pression sociale peut jouer ce rôle. À mesure que les individus interagissent, ils se bâtissent une réputation sur laquelle ils peuvent établir une relation de confiance (Ostrom 1999). Adopter une attitude différente revient alors à envoyer un signal qui menace la stabilité du groupe. La valeur que l'individu attache à la relation de confiance l'encourage à aligner son comportement sur le groupe, même si ses convictions personnelles peuvent être assez fortes pour y résister (Davis & Rusbult 2001). Qu'advient-il de la tragédie des biens communs quand on prend en compte les normes sociales et les convictions?

Pour répondre à cette question, ce mémoire identifie deux types d'effets normatifs qui influencent les décisions : ceux liés aux normes sociales, où les individus cherchent à satisfaire les attentes de leurs proches; et les effets des normes personnelles, qui proviennent du désir d'agir conformément à nos valeurs. Plusieurs études empiriques confirment l'importance de ces facteurs dans les choix individuelles relatifs aux biens communs (Brekke *et al.* 2003; Bamberg *et al.* 2007; Brekke *et al.* 2010).

Nous démontrons qu'en prenant en compte ces influences, on peut surmonter la tragédie des biens communs. Nous décrivons comment se propagent les comportements et sous quelles conditions ils peuvent converger vers l'adoption ou l'abandon d'attitudes favorables au bien commun. En prenant l'exemple du recyclage, nous expliquons quel prix donner aux contenants consignés et quelle somme investir en publicité afin que les citoyens changent leurs habitudes au coût minimal pour les finances publiques. Enfin, nous montrons que, même quand les bénéfices environnementaux dépassent le coût de l'effort, il peut être préférable que la population ne commence pas à recycler. En effet, avant que toute la population ne recycle, les tensions sociales qui émergent entre ceux qui font un effort et ceux qui n'en font pas peuvent être assez fortes pour contrebalancer entièrement le gain de bien-être qui provient du recyclage.

Chapitre 1. Modèle

1.1 Mise en forme du jeu

La tragédie des biens communs est un sujet bien documenté. La problématique est souvent abordée sous l'angle d'une ressource commune (*common pool resource*) où plusieurs individus exploitent une même ressource. Cette approche peut habituellement être transposée en une problématique plus générale de participation à un bien commun. En effet, moins exploiter la ressource commune augmente le niveau du bien commun, mais constitue un manque à gagner pour l'agent. Cela revient à choisir combien on veut investir pour participer au bien commun.

Bulte et Horan (2010) constatent que la littérature sur la tragédie des biens communs porte essentiellement sur deux points. Certains auteurs se demandent comment les institutions influencent les décisions individuelles. Ainsi, Faysse (2005) passe en revue les différentes façons dont les institutions permettent d'échapper à ladite tragédie. La deuxième approche consiste à chercher ce qui motive les individus à coordonner leurs actions. C'est notamment la voie choisie par Gowdy (2008) qui soutient qu'il faut d'abord de nouveaux modèles comportementaux pour établir des politiques efficaces. De nombreuses expériences portent sur la question des comportements face aux biens communs, mais aucun modèle expliquant les résultats ne fait actuellement l'unanimité (Anderies *et al.* 2011). Dans cette section, nous décrirons notre modèle en le situant par rapport à la littérature existante.

Quand il s'agit de recyclage, nous sommes dans une situation où un grand nombre d'individus anonymes jouent des rôles identiques et n'ont qu'un effet individuel négligeable. Cela correspond à la définition d'un jeu de population (*population game*) (Sandholm 2010). Une grande variété de jeux qui entrent dans cette catégorie. Ici, nous considérons le problème comme un jeu répété en stratégie pure. À chaque tour de jeu, chaque individu a la possibilité de faire un effort pour l'environnement ou non. Les agents sont répartis sur un réseau social et l'utilité qu'ils perçoivent dépend de leur action, mais aussi de celles de leurs proches. En ce sens, notre modèle est aussi un jeu graphique (*graphical game*)(Kearns *et al.* 2001).

Les agents sont myopes, ils ne s'intéressent qu'à l'effet immédiat de leurs actions. Les individus tirent une certaine utilité de la qualité de l'environnement, mais l'effet d'un effort individuel sur la nature est négligeable, de sorte que la qualité de l'environnement n'affecte pas les décisions. Pour choisir son niveau d'effort, l'agent s'intéresse seulement au coût de l'effort, à l'effet de la pression sociale et à son niveau de conviction personnelle. La fonction d'utilité que nous utiliserons dans ce mémoire est la suivante :

$$U_i\,(x_i, \bar{x}_{Vi}) = -\alpha(x_i - \bar{x}_{Vi}\,)^2 - \beta(x_i - c_i)^2 + u - kx_i \qquad (1)$$

Avec

$U_i \in \mathbb{R}$, l'utilité de l'individu i

$x_i \in \{0; 1\}$, le niveau d'effort de i

$\bar{x}_{Vi} \in [0; 1]$, l'effort moyen de l'entourage de i à la date précédente

$c_i \in [0; 1]$, le niveau de conviction personnel

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, des constantes

$u \in \mathbb{R}^+$, l'utilité associée à la qualité de l'environnement

$k \in \mathbb{R}^+$, le coût associé à l'effort individuel

Notons que l'individu connaît toutes les variables au moment de son choix, en particulier son utilité dépend du niveau d'effort *passé* de ses proches. Dans la famille des jeux de population, notre modèle rentre donc dans la catégorie des dynamiques de meilleure réponse (*best-response dynamics*) (Sandholm 2010).

Il est standard de considérer que l'effet social dépend d'une combinaison linéaire de notre effort personnel et des efforts de nos proches (Jackson & Yariv 2011). Ainsi, Bramoullé et Kranton (2007) considèrent que l'utilité dépend de la somme de ses efforts et de ceux de son entourage. Face à un problème de bien commun, l'individu tel que modélisé par Bramoullé et Kranton souhaite simplement que l'effort total soit le plus grand possible. Avec une fonction d'utilité concave, ils en concluent que plus nos proches font d'efforts et moins il est payant d'en fournir un.

Nous utilisons une approche opposée. Dans notre cas, la décision individuelle a un effet négligeable sur le bien commun. Notre effort en soi n'est jamais payant. Par contre, nous introduisons une pression sociale qui dépend de l'écart entre l'effort moyen de l'entourage et celui de l'individu. Cela conduit au résultat inverse de Bramoullé et Kranton : plus nos proches font d'effort et plus il est désirable d'en produire un. Autrement dit, les individus n'aiment pas être différents. Cette pression sociale est définie sous une forme quadratique comme celle utilisée par Brock et Durlauf (2001). Pour l'effet des normes personnelles, nous avons opté pour la même forme que pour les normes sociale.

Notons que le modèle est présenté sous une forme « local-global », dans le sens qu'à chaque tour de jeu les gains de l'individu dépendent de la moyenne des efforts de son entourage. La littérature classique sur les jeux de population (Ellison 1993; Kandori *et al.* 1993; Young 1993) considère souvent des jeux de forme locale, où l'individu choisit son action puis la joue individuellement contre chacun de ses proches. C'est la moyenne des résultats de ces échanges bilatéraux qui détermine le gain à la fin du tour de jeu. Dans notre cas, il se trouve que ces deux approches sont équivalentes (voir annexe). La forme locale-globale semble cependant plus intuitive pour considérer la pression sociale exercée par l'ensemble de l'environnement social. On peut imaginer que l'individu souhaite se conformer à l'ensemble de la population, mais qu'il n'obtient de l'information qu'à travers les personnes avec qui il est en contact.

1.2. Équilibre dynamique

Par (1), la condition pour que l'individu i fasse l'effort est

$U_i\,(1, \bar{x}_{Vi}) > U_i\,(0, \bar{x}_{Vi})$

soit

$-\alpha(1-\bar{x}_{Vi}\,)^2 - \beta(1-c_i)^2 + u - k > -\alpha(-\bar{x}_{Vi}\,)^2 - \beta(-c_i)^2 + u$

Qui est équivalente à

$$\alpha\bar{x}_{Vi} + \beta c_i > \frac{k+\alpha+\beta}{2} \qquad (2)$$

On constate que si k >α + β, le coût de l'effort est tellement élevé que même avec la plus forte pression sociale et la plus grande conviction, on choisit 0.

A contrario, si k< α + β, alors avec une pression sociale et une conviction suffisamment fortes, la désutilité de l'effort peut être entièrement contrebalancée par l'effet des convictions et de la pression sociale. On peut alors échapper à la tragédie des biens communs. Mais nous allons montrer que l'on peut aussi y arriver sans avoir recours à ces paramètres extrêmes.

Considérons maintenant la situation de façon dynamique. Nous utilisons un modèle de temps discret, où le passage du temps est une succession de tours de jeux ponctuels. Au moment t, on observe les actions de nos proches et on choisit, selon le critère (2), si l'on fera un effort à la période t+1 ou non. On considère, de plus que, les convictions évoluent selon la formule suivante :

$$c_{i,t+1} = c_{i,t} + \gamma\,(\bar{x}_{Vi,t} - c_{i,t})$$

Avec $\gamma \in [0;1]$ une constante

ou, de façon équivalente

$$c_{i,t+1} = (1-\gamma)c_{i,t} + \gamma\,\bar{x}_{Vi,t} \tag{3}$$

Ainsi, les gens ne restent pas figés sur leurs convictions, elles évoluent proportionnellement à l'effort moyen de leurs proches.

Nous désirons trouver un critère pour les équilibres dynamiques. Nous définissons ces équilibres comme étant les situations où les décisions de tous les agents restent constantes à travers le temps, même si leurs convictions peuvent continuer à varier. Pour définir ce critère, on supposera que les comportements des proches de i sont fixes et on se demandera sous quelle condition celui de i serait constant, lui-aussi. Nous considérons donc $\bar{x}_{Vi}$ constant. Ce type de démonstration est connu en anglais sous le nom de *one-deviation property*.

Sous cette condition, par (3), $c_{i,t}$ est une suite arithmético-géométrique, de terme général :

$$c_{i,t} = (1-\gamma)^{t-t_0}\left(c_{i,t_0} - \bar{x}_{Vi}\right) + \bar{x}_{Vi}$$

On constate que $c_{i,t}$ converge vers $\bar{x}_{Vi}$. Donc, si

$$\bar{x}_{Vi} > \frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)} \quad (4)$$

alors, il existe un T, telle que pour t > T la formule (2) est satisfaite. Ce qui signifie qu'en attendant suffisamment longtemps, on finira toujours par faire l'effort.

À l'inverse, si l'équation (4) n'est pas satisfaite, il existe un T, telle que pout t > T l'équation (2) n'est pas satisfaite non plus.

Du fait de l'évolution de ses convictions, on sait donc quel niveau d'effort sera choisi à partir d'une date T. Si l'individu choisit ce niveau d'effort terminal au premier tour, l'évolution de ses convictions ne le poussera jamais à changer de comportement.

Ainsi, si les choix des proches de i ne changent pas et si son comportement est égal à $1(\bar{x}_{Vi} > \frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)})$, la fonction indicatrice de la condition (4), alors son comportement ne changera pas non plus. Si chacun suit cette règle, alors personne ne sera le premier à changer son comportement, il y a donc équilibre dynamique.

L'inverse est aussi vrai. L'équilibre dynamique implique cette règle. Si nous sommes en présence d'un équilibre dynamique, c'est que chacun agit de la même façon qu'il agira toujours par la suite. Si on avait un individu j tel que son niveau d'effort est fixe, mais $x_j \neq 1(\bar{x}_{Vj} > \frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)})$, alors inévitablement, si aucun de ses proches ne change de comportement, il devra changer le sien. Et si au moins un de ses proches change de comportement, l'équilibre dynamique est brisé aussi.

Nous obtenons donc un équilibre dynamique si et seulement si :

$$\forall i \in \{1; N\}, x_i = 1(\bar{x}_{Vi} > \frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)}) \quad (5)$$

Notons que les équilibres peuvent être multiples et le sont dans tous les cas non triviaux. Les deux équilibres extrêmes « tout le monde recycle » et « personne ne recycle » existent si et seulement si $-(\alpha+\beta)< k<\alpha+\beta$. Si cette double inégalité n'est pas satisfaite, alors nous sommes dans un de deux cas triviaux. Soit l'effort est tellement payant (k négatif) que même le manque de conviction et la pression sociale ne peuvent pas nous dissuader de faire l'effort. Soit le coût de l'effort est tellement élevé que même la meilleure volonté et la plus haute pression sociale ne peuvent pas le contrebalancer.

D'autre part, notre modèle ne mène pas nécessairement à un équilibre. Prenons un réseau social qui aurait seulement deux membres A et B. Ajoutons que k=0 et qu'à la période 0, $c_A=x_A=0$ et $c_B=x_B=1$. Au moment où A va commencer à faire l'effort, B va arrêter. Les positions devraient s'inter-changer ainsi à l'infini.

Chapitre 2. Propagation

2.1. Structure du réseau

Nous désirons maintenant étudier comment se propagent les habitudes écologiques. Pour lister tous les équilibres et trouver les conditions de convergence, il nous faut préciser la structure du réseau social.

Supposons que la population est composée d'un grand nombre d'individus. Comme Morris (2000) nous considérons qu'à chaque tour de jeu, le voisinage de chaque agent est tiré aléatoirement dans la population. Cela permet aux voisinages de rester représentatifs de la population globale, tour après tour. Chaque personne obtient ainsi n proches qui sont tirés indépendamment et avec probabilité égale.

Si on prend un individu i au hasard et que le niveau moyen d'effort de la population est p_t, la variable aléatoire correspondant à son effort sera $X_{i,t}$ qui suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_t)$. La somme des efforts des proches de i est $n \times \bar{x}_{Vi}$, qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_t)$. Avec n grand, $\bar{x}_{Vi}$ peut être approximé par la loi normale $\mathcal{N}(p_t, \frac{(1-p_t)p_t}{n})$. Bien sûr, dans les faits, $\bar{x}_{Vi}$ est nécessairement compris entre 0 et 1. De même, bien que le niveau de conviction $c_{\,i,t}$ est toujours compris en 0 et 1, on approxime la distribution de cette variable par une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu, \sigma \in [0; 1]$. Déterminons maintenant comment évoluent les variables qui définissent ces distributions.

Par (2), $x_{i,t+1} = 1(\alpha\bar{x}_{Vi,t} + \beta c_{i,t} > \frac{k+\alpha+\beta}{2})$, donc

$$P\left(X_{i,t+1}\right) = p_{t+1} = P(\alpha\bar{x}_{Vi,t} + \beta c_{i,t} > \frac{k+\alpha+\beta}{2}) \qquad (6)$$

De plus, par (3) $c_{i,t+1} = (1-\gamma)c_{i,t} + \gamma\bar{x}_{Vi,t}$, donc $\mu_{t+1} = (1-\gamma)\mu_t + \gamma p_t$ et $\sigma_{t+1}^2 = (1-\gamma)^2\sigma_t^2 + \gamma^2\frac{p_t(1-p_t)}{n}$

2.2. Évolution

Pour simplifier notre analyse, nous supposerons d'abord que β = 0. Cela revient à ignorer l'effet des convictions sur le comportement et à se concentrer uniquement sur l'effet de la pression sociale. Nous ferons une étude complète de la dynamique sous cette condition, puis nous la relaxerons pour donner un aperçu de la complexité que revêt alors le problème.

Commençons par étudier p_{t+1} en fonction de p_t

$$p_{t+1} = \int_{h(p_t)}^{\infty} \varphi(t)dt$$

Avec

$$h(p_t) = n\frac{\frac{k+\alpha}{2\alpha} - p_t}{\sqrt{(1-p_t)p_t}}$$

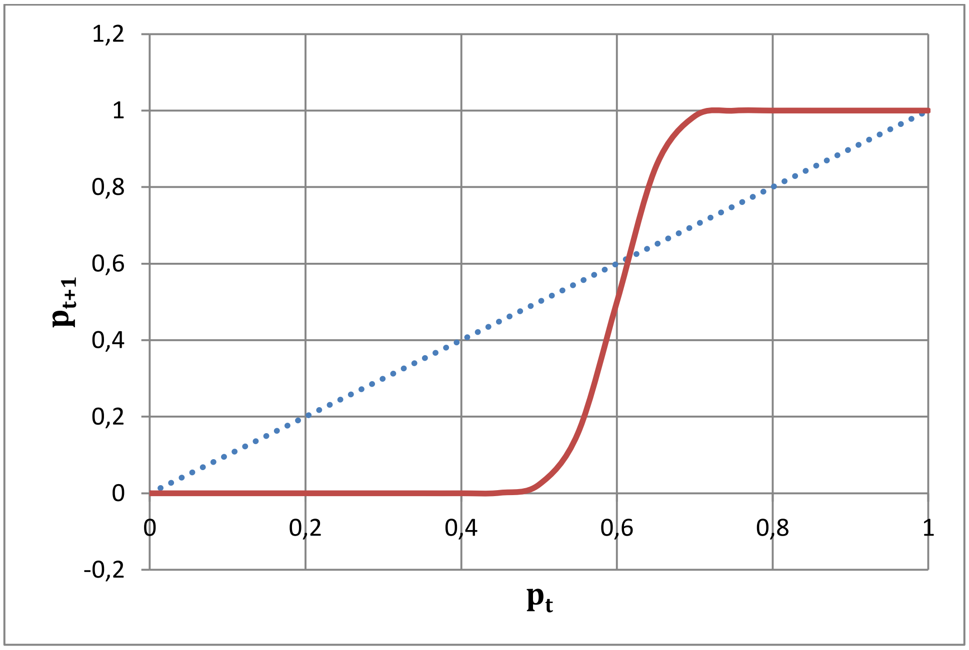
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

L'analyse de cette fonction mène au tableau suivant : (justification en annexe)

p_t	0				1
$h(p_t)$	$+\infty$				$-\infty$
$h'(p_t)$	$-\infty$	-		-	$-\infty$
$p_{t+1}(p_t)$	0				1
$p'_{t+1}(p_t)$		+		+	
$p''_{t+1}(p_t)$		+	0	-	

Tableau I. Analyse de $p_{t+1}(p_t)$

Graphiquement, la fonction $p_{t+1}(p_t)$ a typiquement la forme suivante :



Graphique 1. $p_{t+1}(p_t)$ comparé à la ligne de 45° pour n=100, k= 0,2α et β=0

Les points d'équilibres sont ceux où les deux lignes ce croisent, car en ces points on a $p_{t+1}= p_t$. Quels que soient les valeurs des variables, on obtient toujours 3 équilibres : 0, 1 et un équilibre intermédiaire. Si P_t se trouve à droite de cet équilibre, alors $p_{t+1}>p_t$, si on se trouve à sa gauche, alors $p_{t+1}<p_t$. L'équilibre intermédiaire est donc instable, tandis que 0 et 1 sont des équilibres stables. On en déduit que cet équilibre intermédiaire constitue une masse critique, qui délimite le type de convergence. Si p_t est supérieure à la masse critique, alors $(p_t)_{t>t_0}$converge vers 1. À l'inverse si p_t est inférieure à la masse critique alors $(p_t)_{t>t_0}$converge vers 0. Nous noterons la masse critique MC.

Pour chaque valeur des variables, on peut calculer numériquement la valeur de MC en résolvant l'équation suivante$\frac{\partial h}{\partial MC}(MC) \times \varphi\big(h(MC)\big) = -1$ (preuve en annexe).

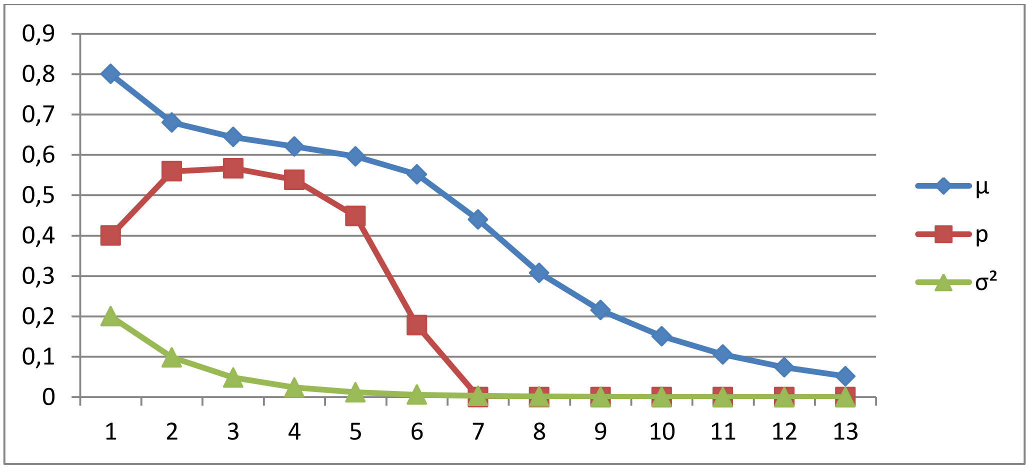
Que passe-t-il si $\beta > 0$? Il faut alors prendre en compte le rôle des convictions. La forme de la courbe en S, qu'on observe sur le graphique 1, dépend des variables σ_t et μ_t qui décrivent l'état des convictions. Cela signifie que cette même courbe évolue au fil des périodes. Si p_t est au niveau de la masse critique, alors p_{t+1} sera égal à p_t. Mais au tour d'après, la masse critique pourrait se déplacer et p_{t+2} serait alors différent de p_{t+1}. Pour qu'il existe un équilibre instable à travers le temps, il faut que la masse critique ne change pas. Une condition suffisante pour cela est que μ et σ demeurent constants. Cela nécessite

$$\mu_t=p_t=MC_t \text{ et } {\sigma_t}^2 = (1-\gamma)^2\sigma_t^2 + \gamma^2 \frac{p_t(1-p_t)}{n}\,. \tag{7}$$

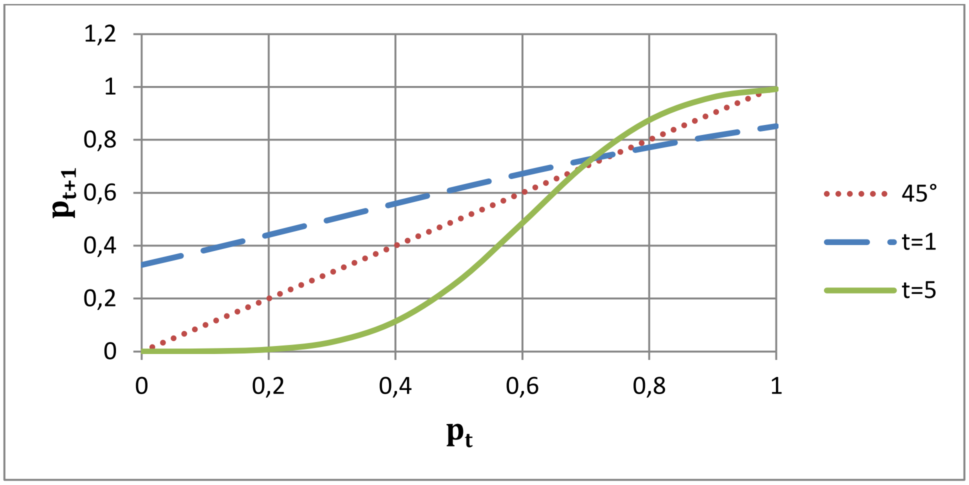
Cette dernière égalité peut se simplifier en

$${\sigma_t}^2 = \frac{\gamma}{\gamma-2}\frac{p_t(1-p_t)}{n}\,.$$

De plus, on peut avoir une situation où $MC_t<p_t$ donc $p_{t+1}>p_t$ mais $MC_{t+1}>p_{t+1}$, de sortes que p croît entre t et t+1, mais MC augmente plus vite, au point de doubler p. Donc p diminue entre t+1 et t+2. Ce changement de direction ne s'observait pas quand on avait β=0. Un exemple de ce phénomène est donné sur le graphique 2. Le graphique 3 explique ce qui se passe sur le graphique 2 en montrant comment la dynamique évolue en fonction de σ_t et μ_t.



Graphique 2. Évolution des variables pour n=100, α=2; β=3; k=1; γ=0,3; μ_1=0,8; p_1=0,4 et σ_1^2=0,2



Graphique 3. $p_{t+1}(p_t)$ comparé à la ligne de 45° pour deux situations tirées du graphique 2

On note sur le graphique 2 que p_1=0,4 tandis que sur le graphique 3, la courbe définie à t=1 se situe au-dessus de l'axe des 45° pour p_t=0,4. Donc $p_2>p_1$. Par contre, p_5=0,448, et la courbe pour t=5 est en dessous de l'axe des 45° à p_t=0,448, c'est pourquoi $p_6<p_5$.

Étant donné la complexité des équations, nous avons déterminé numériquement vers quelles valeurs $(p_t)_{t>t_0}$convergeait pour de multiples paramètres et valeurs initiales des variables. Ces simulations semblent indiquer que les seuls équilibres stables pour $(p_t)_{t>t_0}$ sont 0 et 1. De plus, pour α,β,γ et σ donnés, les conditions de convergence semblent être de la forme

Si $k > a \times \left(p_0 - \frac{1}{2}\right) + b \times \left(\mu_0 - \frac{1}{2}\right)$ alors $(p_t)_{t>t_0}$converge vers 0.

Si $k < a \times \left(p_0 - \frac{1}{2}\right) + b \times \left(\mu_0 - \frac{1}{2}\right)$ alors $(p_t)_{t>t_0}$converge vers 1

Avec

a, b des constantes positives qui dépendent de α,β,γ et σ

p_0, μ_0 les valeurs initiales des p et μ

2.3. Équilibres

Nous venons d'étudier comment évoluait la variable p_t -la moyenne des efforts de la population- à travers le temps. Mais ce n'est pas parce que la moyenne p est constante dans le temps que le comportement de chaque individu l'est aussi. L'exemple donné à la fin du chapitre 1 où deux individus inter-changent leurs niveaux d'efforts sans arrêt illustre bien ce point. Pour simplifier notre analyse, nous retirons maintenant l'hypothèse du voisinage tiré aléatoirement à chaque fois. On attribue à chaque individu un voisinage tiré aléatoirement à l'instant t_0. Mais pour tous les tours suivants, les membres de ce voisinage restent les mêmes.

Si les comportements individuels sont à l'équilibre dynamique défini dans l'équation (5), alors ces comportements ne changent pas et le voisinage reste représentatif. De plus, la variable p est forcément constante à travers le temps. Cette condition nécessaire nous permet d'isoler seulement trois types d'équilibres dynamiques potentiels, étant donné la structure que nous avons imposée à notre réseau dans ce chapitre : ceux qui satisfont p=0, p=1 et p=MC.

Les cas où p=0 et p=1 sont assez simples. La condition p=0 est satisfaite si $\forall i\ x_i = 0$ tandis que si $\forall i\ x_i = 1$, on a p=1. Comme nous l'avons signalé à la fin du chapitre 1, quelle que soit la structure du réseau, les situations où tout le monde fait un effort et où personne n'en fait constituent tous les deux des équilibres dynamiques si et seulement si $-\alpha-\beta<k<\alpha+\beta$. Peut-on avoir un équilibre dynamique qui corresponde à un équilibre instable de p? Nous allons nous attarder un peu sur cette question.

On a un équilibre dynamique si et seulement si $\forall i\ x_i = 1(\bar{x}_{Vi} > \frac{k+\alpha+\beta}{2\alpha})$, ce qui implique que si on est à l'équilibre dynamique et qu'on tire un individu i au hasard,

$$P(x_i = 1) = p = P\left(\bar{x}_{Vi} > \frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)}\right) = P(z > \frac{1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}(\frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)} - p)). \qquad (8)$$

Avec $z \sim \mathcal{N}(0,1)$

On note que cette équation donne une définition implicite de p à l'équilibre.

On peut vérifier que si -α-β < k < α+β alors les équilibres p=0 et p=1 satisfont cette condition, comme on peut le voir dans les équations (9) à (12).

$$\lim_{p\to 1} \frac{1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\left(\frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)} - p\right) = -\infty \tag{9}$$

$$\text{et } \lim_{p\to 0} \frac{1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\left(\frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)} - p\right) = +\infty \tag{10}$$

donc

$$\lim_{p\longrightarrow 1} P(z > \frac{1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\left(\frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)} - p\right) = 1 \tag{11}$$

$$\text{et } \lim_{p\longrightarrow 0} P(z > \frac{1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\left(\frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)} - p\right) = 0 \tag{12}$$

Mais un équilibre dynamique implique aussi une autre égalité que (8). On ne peut avoir un équilibre dynamique que si p est constant à travers le temps, c'est-à-dire $p_{t+1}=p_t=p$. Or d'après (6)

$$P\big(X_{i,t+1} = 1\big) = p_{t+1} = P\left(\alpha\bar{x}_{Vi,t} + \beta c_{i,t} > \frac{k+\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= P(z > \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\frac{p_t(1-p_t)}{n} + \beta^2\sigma^2}}(\frac{k+\alpha+\beta}{2} - \alpha p_t - \beta\mu) \tag{13}$$

Puisqu'un équilibre dynamique doit satisfaire les deux égalités (8) et (13), il nécessite la condition suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2\frac{p(1-p)}{n} + \beta^2\sigma^2}}(\frac{k+\alpha+\beta}{2} - \alpha p - \beta\mu)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}(\frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)} - p) \tag{14}$$

Si nous supposons de plus que σ et μ sont constants, nous pouvons réutiliser l'équation (7), ainsi la condition (14) devient

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2\frac{\gamma}{2-\gamma}}}(\frac{k+\alpha+\beta}{2} - (\alpha+\beta)p) = \frac{1}{\alpha+\beta}(\frac{k+\alpha+\beta}{2} - (\alpha+\beta)p)$$

Cette égalité est satisfaite si et seulement si au moins une des conditions suivantes tient

$$\frac{k+\alpha+\beta}{2} = (\alpha+\beta)p$$

ou $\alpha^2 + \beta^2 \frac{\gamma}{2-\gamma} = (\alpha+\beta)^2$

On peut les réécrire en

$$p = \frac{k+\alpha+\beta}{2(\alpha+\beta)} \qquad (15)$$

ou $\frac{\gamma}{2-\gamma} = \frac{2\alpha+\beta}{\beta}$ (16)

À l'équilibre dynamique, (15) implique k=0 et p=0,5. (Cela se démontre immédiatement en substituant (15) dans l'équation (8)). Notons que si k=0 et μ=p=0,5 alors même si σ n'est pas constant, on a tout de même $p_{t+1}=0,5=p_t$.

Si k est non nul, alors on peut avoir un équilibre dynamique qui constitue un équilibre instable de p si et seulement si (16) tient.

Chapitre 3. Politiques

3.1. Politique optimale

Considérons un gouvernement dont le but est simplement l'adoption des habitudes écologiques au bout du compte. Autrement dit, le seul but est que $(p_t)_{t>t_0}$ converge vers 1 quand t tend vers l'infini. Supposons de plus, que la forme fonctionnelle tirée de nos simulations soit exacte et qu'on obtient cette convergence si et seulement si

$$k \leq a(p - \frac{1}{2}) + b(\mu - \frac{1}{2}) \quad (17)$$

L'État peut organiser une campagne de publicité qui augmente μ (mais ne change pas σ) et mettre en place une consigne, qui diminue k. Nous sommes du point de vue du gouvernement, une consigne est donc une perte d'argent. Quelle est la stratégie la moins coûteuse pour assurer que les comportements convergent vers 100% d'effort moyen?

Nommons c, la valeur de la consigne payée par le gouvernement à chaque effort consenti. La condition devient :

$$k - c \leq a(p - \frac{1}{2}) + b(\mu - \frac{1}{2})$$

Puisque les coûts de la consigne et la publicité sont des fonctions croissantes de c et de μ, nous chercherons à être juste au seuil pour dépenser juste le minimum. On peut donc se limiter à la condition

$$k - c = a(p - \frac{1}{2}) + b(\mu - \frac{1}{2})$$

Pour atteindre une consigne de c par effort produit, il faut payer en moyenne $p \times c$\$ par habitant. Donc, si on dépense x_1\$ en consigne, on obtient $c(x_1) = \frac{x_1}{p}$

Pour la publicité, la fonction μ dépend du montant x_2 qui y est investie. On postule de plus que $\mu'(x_2) > 0$ et $\mu''(x_2) < 0$

Le problème devient donc

$$\min_{x_1,x_2} x_1 + x_2 \tag{18}$$

sous contrainte $k - \frac{x_1}{p} = a(p - \frac{1}{2}) + b(\mu(x_2) - \frac{1}{2})$

Grâce à la contrainte, on peut substituer à x_1 sa valeur en fonction de x_2. L'équation (18) est équivalente à

$$\min_{x_2} p(k - a\left(p - \frac{1}{2}\right) - b\left(\mu(x_2) - \frac{1}{2}\right)) + x_2$$

Qu'on peut réécrire

$$\min_{x_2} p(k - ap + \frac{a+b}{2}) + x_2 - pb\mu(x_2)$$

Par condition de 1^e ordre, si la solution est intérieure, ce minimal est atteint pour

$$\mu'(x_2) = \frac{1}{pb}$$

On note que, dans le cas d'une solution intérieure, comme $\mu'(x_2)$ est décroissante, plus p est élevé et plus on dépensera en publicité.

Si $\mu'(0) < \frac{1}{pb}$ alors, la condition de premier ordre ne peut pas être satisfaite, la solution du problème d'optimisation est une « solution coin ». Tout l'argent doit être investi en consigne et

$$x_1 = p(k - a\left(p - \frac{1}{2}\right) + b\left(\mu_0 - \frac{1}{2}\right))$$

Où μ_0 est le niveau moyen de conviction avant la mise en place de la politique

À l'inverse, si $\lim_{x_2 \to \infty} \mu'(x_2) > \frac{1}{pb}$ alors le coût minimum est atteint pour l'autre solution coin : ne mettre en place aucune consigne. Tout l'argent doit être dépensé en publicité et x_2 doit satisfaire

$$\mu(x_2) = \frac{1}{b}(k - a\left(p - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2})$$

3.2. Analyse du bien-être

Nous savons sous quelles conditions les comportements peuvent converger vers l'adoption unanime d'habitudes environnementales. Mais il y a un point que l'exemple précédent à omis de considérer. Cette convergence est-elle désirable? En effet, pour qu'on soit réellement en présence de la tragédie des biens communs, il faut que le bien-être des individus soit plus élevé quand tout le monde participe que quand personne ne fait d'effort.

Précisions d'abord comment la qualité de l'environnement affecte l'utilité des individus. Jusque-là, nous nous sommes contentés d'appeler « u » l'utilité associée à la qualité de l'environnement et nous ne nous en sommes pas soucié, car cette variable n'affecte pas les décisions individuelles.

Pour tous les agents, à l'instant t, la jouissance de l'environnement, u_t, est proportionnelle au stock d'effort accumulé par toute la population. Ce stock s'use au fil du temps, à une vitesse r.

$$u_t = v \times \sum_{i=t_0}^{t} p_i \, e^{-r(t-i)} \quad (19)$$

Avec

$p_t \in [0; 1]$, l'effort moyen de l'ensemble de la population au moment t

v, une constante

Ignorons d'abord la désutilité associée aux convictions et aux normes sociales, pour nous concentrer uniquement sur ce que l'effort coûte et rapporte en termes de bien-être moyen.

Soit B_t le bien-être moyen à un moment t. Ainsi,

$$B_t = v \times S_t - k \times p_t$$

avec

$$St = \sum_{i=t_0}^{t} \mathrm{p}_i \, e^{-r(t-i)}$$

St est le stock d'effort environnemental au moment t. Il s'agit de la somme des efforts passés pondérée par l'usure, telle que mentionnée dans l'équation (19).

Considérons maintenant la valeur actuelle du bien-être moyen présent et futur

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \omega^t \times B_{t+1}$$

Avec

$\omega \in [0; 1]$ le taux d'actualisation de l'utilité, qui correspond au niveau de patience

Alors on peut prouver (comme on le fait en annexe) que

$$V = S_1 \frac{v}{1-\omega e^{-r}} - kp_1 + \left(\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k\right) \sum_{t=1}^{\infty} \omega^t \, p_{t+1} \qquad (20)$$

Avec P_1=S_1=0, on obtient

$$V = \left(\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k\right) \sum_{t=1}^{\infty} \omega^t \, p_{t+1}$$

Cela implique qu'il est souhaitable que les gens fassent un effort si et seulement si

$$k < \frac{v}{1-\omega e^{-r}} \qquad (21)$$

Nous avons une situation de tragédie des biens communs si k est trop grand pour que les comportements convergent naturellement vers 1, mais assez pour que l'effort ait un effet global positif. Ce qui revient à dire, par (21) et (17)

$$\frac{v}{1-\omega e^{-r}} > k > a \times \left(p_0 - \frac{1}{2}\right) + b \times \left(\mu_0 - \frac{1}{2}\right) \tag{22}$$

Dans ce cas, si le gouvernement rémunère l'effort, en mettant en place un système de consigne, par exemple, on peut déjouer la tragédie des biens communs. Cette rémunération est un transfert, elle n'affecte pas le bien-être total, cependant elle se soustrait au coût k de l'effort payé par un individu, au point de rendre l'effort préférable.

Soyons tout de même vigilants lorsqu'on parle de consigne. Une lecture rapide du présent mémoire pourrait mener à la conclusion suivante : établissons une très forte consigne pendant quelques périodes, de sorte que tout le monde recycle. Puis lorsque les convictions et la pression sont est assez fortes pour maintenir les habitudes à elles-seules, abolissons la consigne. Cela reviendrait à négliger un autre effet de la consigne, qui n'est pas pris en compte dans notre étude. Elle diminue de facto le prix des biens et devrait donc augmenter la quantité qui en est consommée. À la limite, si la consigne de l'emballage dépasse le prix du bien qu'elle contient, les consommateurs voudrons acheter une quantité infinie du produit. Or la production de ce produit nécessite de l'énergie et des ressources. De sortes que la surconsommation causée par la consigne pourrait exercer une pression plus forte sur l'environnement que le poids qu'elle soulage grâce au recyclage.

Pour l'instant, nous nous sommes concentrés sur le coût et le bénéfice environnemental de l'effort. Que se passe-t-il si on prend en compte la pression sociale? Pour simplifier, nous supposerons que n, le nombre de proche de chaque individu, est tellement grand qu'on peut considérer que l'effort moyen dans son voisinage est exactement p. Alors V devient

$$\tilde{V} = V - \sum_{t=0}^{\infty} \omega^t \; E\left(\alpha\left(x_{i,t+1} - p_{t+1}\right)^2\right)$$

Qu'on peut réécrire

$$\tilde{V} = V - \sum_{t=0}^{\infty} \omega^t \, \alpha p_{t+1}(1 - p_{t+1}) \tag{23}$$

En substituant l'équation (20) dans (23), on obtient

$$\tilde{V} \ = \ S_1 \frac{v}{1-\omega e^{-r}} - p_1(k + \alpha + \alpha p_1) + \sum_{t=1}^{\infty} \omega^t \, p_{t+1}(\left(\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k\right) - \alpha(1 - p_{t+1})$$

Avec P_1=S_1=0, cela devient

$$\tilde{V} \ = \ \sum_{t=1}^{\infty} \omega^t \, p_{t+1} \left(\left(\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k\right) - \alpha(1 - p_{t+1})\right)$$

Si p_t converge vers 1, alors

$p_{t+1}\left(\left(\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k\right) - \alpha(1 - p_{t+1})\right)$ converge vers $\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k$

Notons que, par (22), si nous sommes en situation de tragédie des biens communs, alors $\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k \ > 0$ et donc il existe un T tel que pour tout t > T le bien-être moyen au moment t sera positif.

Mais, si durant les premières périodes, $\left(\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k\right) - \alpha(1 - p_{t+1})$ est négatif, et si on est suffisamment impatients (ω petit) alors quelque chose de surprenant peut se produire. Le coût de l'effort est alors inférieur à son bénéfice, mais la pression sociale qu'engendre la propagation des comportements écologiques est tellement forte qu'elle contrebalance entièrement ses effets positifs.

Avant d'élaborer une politique qui vise à modifier les comportements, il faut donc se poser la question suivante : les bénéfices de cette initiative sont-ils assez grands pour justifier les tensions sociales qui vont émerger lors de l'adoption progressive du nouveau comportement?

Conclusion

Ce mémoire partait d'une question d'apparence anodine : pourquoi les gens recyclent-ils? Ce comportement pourrait s'expliquer dans une stratégie à long terme de coopération associée à une punition en cas d'infraction. Mais de nombreuses expériences indiquent que la plupart des gens ne calculent pas de stratégies à long terme. Les décisions sont généralement guidée par l'heuristique et les normes de comportement qui apparaissent avec la répétition des interactions (Ostrom 1999). Il nous a donc semblé pertinent de considérer des individus myopes ayant certaines préférences individuelles et étant influencés par le comportement moyen de leurs entourages.

Les modèles locaux classiques (Kandori *et al.* 1993; Young 1993) expliquent l'heuristique par des joueurs myopes qui tentent de se coordonner en apprenant des observations passées, avec possibilité d'oubli et d'erreur stratégique. Pour ces auteurs, à force d'échanges bilatéraux, les individus apprennent qu'un effort réciproque est dans leur intérêt. Dans notre mémoire la logique est différente. Les gens aiment simplement faire comme leur entourage, même si la décision est nuisible à tous. C'est pour cela que notre modèle permet de faire ressortir le problème du coût des tensions sociales, contrairement aux approches locales.

Les modèles globaux (Granovetter 1978; Schelling 1978) sont plus proches de celui qu'on retrouve dans ce mémoire. Ils supposent que l'utilité de chaque individu est influencée par le niveau d'effort global. Ces modèles postulent aussi que le coût de l'effort est différent pour chacun, ce qui pourrait être attribué à l'effet des convictions. La principale nouveauté de ce mémoire consiste à inclure la possibilité que les convictions évoluent. Nous innovons aussi en supposant que l'individu n'interagit qu'avec une partie de la population. Ainsi, tout le monde ne subit pas la même influence. En ce sens, notre modèle constitue une généralisation des modèles globaux. On constate que les résultats sont similaires : il existe un seuil au-dessus duquel les comportements convergent vers la coopération unanime, et ce seuil constitue un équilibre instable.

En incluant à la fois des normes individuelles et collectives dans notre modèle, nous avons pu traiter de questions politiques de façon innovante et ouvrir la voie à de futures recherches. Les règles de formation du réseau social pourraient notamment être modifiées de multiples façons. Dans ce mémoire, les liens sociaux étaient choisis de façon indépendante et équiprobable à chaque tour de jeu. Il serait intéressant de voir quels résultats seraient obtenus dans des conditions plus réalistes où certains liens sociaux sont plus probables que d'autres.

Par ailleurs, nous avons supposé que la personne qui recycle par intérêt économique exerçait la même pression sociale sur ses proches que celle qui le faisait par conviction. Or cela n'est pas nécessairement le cas. En suivant l'intuition de Searle (2010), on pourrait créer un modèle où seules les actions qu'on effectue pour se conformer à une norme renforcent la pression sur nos proches.

Enfin, ce mémoire souligne l'importance des effets négatifs de la pression sociale sur le bien-être. Il invite les théoriciens du choix social à intégrer cet aspect dans leurs modèles afin de rendre compte des coûts réels qu'engendrent les décisions politiques.

Bibliographie

Anderies, J.M., Janssen, M.A., Bousquet, F., Cardenas, J.C., Castillo, D., Lopez, M.C., Tobias, R., Vollan, B., Wutich, A., 2011. The challenge of understanding decisions in experimental studies of common pool resource governance. Ecological Economics 70, 1571-1579

Bamberg, S., Hunecke, M., Blobaum, A., 2007. Social context, personal norms and the use of public transportation: Two field studies. Journal of Environmental Psychology 27, 190-203

Bramoullé, Y., Kranton, R., 2007. Public goods in networks. Journal of Economic Theory 135, 478-494

Brekke, K.A., Kipperberg, G., Nyborg, K., 2010. Social Interaction in Responsibility Ascription: The Case of Household Recycling. Land Economics 86, 766-784

Brekke, K.A., Kverndokk, S., Nyborg, K., 2003. An economic model of moral motivation. Journal of Public Economics 87, 1967-1983

Brock, W.A., Durlauf, S.N., 2001. Discrete choice with social interactions. Review of Economic Studies 68, 235-260

Bulte, E., Horan, R.D., 2010. Identities in the Commons: The Dynamics of Norms and Social Capital. B E Journal of Economic Analysis & Policy 10

Davis, J.L., Rusbult, C.E., 2001. Attitude alignment in close relationships. Journal of Personality and Social Psychology 81, 65-84

Ellison, G., 1993. Learning, Local Interaction, and Coordination. Econometrica 61, 1047-1071

Faysse, N., 2005. Coping with the tragedy of the commons: Game structure and design of rules. Journal of Economic Surveys 19, 239-261

Gowdy, J.M., 2008. Behavioral economics and climate change policy. Journal of Economic Behavior & Organization 68, 632-644

Granovetter, M., 1978. Threshold Models of Collective Behavior. American Journal of Sociology 83, 1420-1443

Hardin, G., 1968. The Tragedy of the Commons. Science 162, 1243-1248

Jackson, M.O., Yariv, L., 2011. Diffusion, Strategic Interaction, and Social Structure. In: Benhabib J, Bisin A & Jackson MO (eds.) Handbook of Social Economics. North Holland Press.

Kandori, M., Mailath, G.J., Rob, R., 1993. Learning, Mutation, and Long-Run Equilibria in Games. Econometrica 61, 29-56

Kearns, M.J., Littman, M.L., Singh, S.P., 2001. Graphical Models for Game Theory. In: Proceedings of the 17th Conference in Uncertainty in Artificial Intelligence, pp. 253-260. Morgan Kaufmann Publishers Inc.

Morris, S., 2000. Contagion. Review of Economic Studies 67, 57-78

Ostrom, E., 1999. Coping with tragedies of the commons. Annual Review of Political Science 2, 493-535

Ostrom, E., 2006. Institutions and the environment. Land Economics 82, 316-319

Recyc-Québec, 2009. Bilan de la gestion des matières résiduelles au Québec 2008. Recyc-Québec, Québec

Sandholm, W.H., 2010. Population games and evolutionary dynamics. MIT Press, Cambridge, Mass.

Schelling, T., 1978. Micromotives and Macrobehavior. W. W. Norton.

Searle, J.R., 2010. Making the social world : the structure of human civilization. Oxford University Press, Oxford ; New York.

Stern, N., 2008. The Economics of Climate Change. The American Economic Review 98, 1-37

Young, H.P., 1993. The Evolution of Conventions. Econometrica 61, 57-84

Annexe

Équivalence entre global-local et local

$U_i\ (1, \bar{x}_{Vi}) = -\alpha(1 - \bar{x}_{Vi}\ )^2 - \beta(1 - c_i)^2 + u - k$

$U_i\ (0, \bar{x}_{Vi}) = -\alpha(\bar{x}_{Vi}\ )^2 - \beta(c_i)^2 + u$

Donc

$U_i(1, \bar{x}_{Vi}) - U_i(0, \bar{x}_{Vi}) = -\alpha(1 - 2\bar{x}_{Vi}) - \beta(1 - 2c_i) - \mathrm{k}$

$\Leftrightarrow U_i(1, \bar{x}_{Vi}) - U_i(0, \bar{x}_{Vi}) = 2\alpha\bar{x}_{Vi} - (\alpha + \beta(1 - 2c_i) + \mathrm{k})$

Posons $X = \alpha + \beta(1 - 2c_i) + \mathrm{k}$

$U_i\ (1, \bar{x}_{Vi}) - U_i\ (0, \bar{x}_{Vi}) = 2\alpha\bar{x}_{Vi} - \mathrm{X}$

On obtient le même résultat dans un jeu local symétrique comme ceux étudiés par Morris (2000), où la matrice de gain est :

	0	1
0	-X,-X	0,0
1	0,0	$2\alpha + X, 2\alpha + X$

En effet, quand ce jeu est joué individuellement avec chaque joueur de son entourage, on obtient une utilité moyenne :

$U_i\ (1, \bar{x}_{Vi}) = (2\alpha + X) \times (\bar{x}_{Vi})$

$U_i\ (0, \bar{x}_{Vi}) = -\mathrm{X} \times (1 - \bar{x}_{Vi})$

$U_i\ (1, \bar{x}_{Vi}) - U_i\ (0, \bar{x}_{Vi}) = 2\alpha\bar{x}_{Vi} - \mathrm{X}$

Autrement dit, dans notre situation globale-locale comme dans la situation locale traditionnelle, les individus prennent exactement les mêmes décisions dans les mêmes circonstances.

Justification de l'évolution 3.2

$$h(p_t) = n\frac{\frac{k+\alpha}{2\,\alpha}-p_t}{\sqrt{(1-p_t)p_t}}$$

Donc en supposant que $-\alpha < k < \alpha$, on a

$\lim_{p_t\to 0} h(p_t) = \infty$ et $\lim_{p_t\to 1} h(p_t) = -\infty$

$$h'(p_t) = \frac{n}{\left((1-p_t)p_t\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-(1-p_t)p_t - \frac{1}{2}\left(\frac{k+\alpha}{2\,\alpha} - p_t\right)(1-2p_t)\right)$$

Donc

$$h'(p_t) = \frac{n}{\left((1-p_t)p_t\right)^{\frac{3}{2}}}\left(p_t\left(\frac{k+\alpha}{2\,\alpha} - \frac{1}{2}\right) - \frac{k+\alpha}{4\,\alpha}\right)$$

$$h'(p_t) = \frac{n}{\left((1-p_t)p_t\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{k+\alpha}{2\,\alpha} - \frac{1}{2}\right)\left(p_t - \frac{k+\alpha}{2k}\right)$$

$\alpha > k$ donc $\frac{k+\alpha}{2k} > 1$

Ainsi $\forall p_t \in [0;1], h'(p_t) < 0$

Définissons la fonction H par

$$H(p_t) = \int_{h(p_t)}^{\infty} \varphi(t)dt$$

On remarque que

$H(0) = \int_{\lim_{x\to 0} h(x)}^{\infty} \varphi(t)dt = 0$

$H(1) = \int_{\lim_{x\to 1} h(x)}^{\infty} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1$

φ est une fonction positive sur]-∞;+∞[et h est une fonction décroissante sur [0;1] donc H est croissante sur [0;1].

D'autre part

$H'(p_t) = -h'(p_t)\varphi(h(p_t))$

$H''(p_t) = -h''(p_t)\varphi\big(h(p_t)\big) - h'(p_t)^2\varphi'(h(p_t))$

Notons que $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$donc

$H''(p_t) = \varphi\big(h(p_t)\big)(h(p_t) \times h'(p_t)^2 - h''(p_t))$

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) > 0$, $H''(p_t)$ a le même signe que $\widetilde{H}''(p_t)$ avec

$\widetilde{H}''(p_t) = h(p_t) \times h'(p_t)^2 - h''(p_t)$

Pour simplifier les notations, définissons $\theta = \frac{k+\alpha}{2\,\alpha}$,

Puisque -α<k<α, $0 < \theta < 1$

Numériquement, on trouve que $\forall \theta \in]0;1[, \exists P \in [0;1] \setminus p_t \leq P \iff \widetilde{H}''(p_t) \geq 0$

Preuve de l'équation pour calculer MC numériquement

$MC = \int_{h(MC)}^{\infty} \varphi(t)dt$, en dérivant on obtient

1=$-h'(MC)\varphi(h(MC))$

Donc

$\frac{\partial h}{\partial MC}(MC) \times \varphi\big(h(MC)\big) = -1$

Preuve de $V = \left(\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k\right)\sum_{t=1}^{\infty} \omega^t p_{t+1} - kp_1 + S_1 \frac{v}{1-\omega e^{-r}}$

$V = \sum_{t=0}^{\infty} \omega^t \times B_{t+1}$

$\Leftrightarrow V = B_1 + \sum_{t=1}^{\infty} \omega^t \times B_{t+1}$

Or

$B_t = v \times S_t - k \times p_t$,et

$St = \sum_{i=t_0}^{t} \mathrm{p}_i \, e^{-r(t-i)}$

Donc

$B_{t+1} = v \times S_{t+1} - k \times p_{t+1}$

$\Leftrightarrow B_{t+1} = v \times \sum_{i=t_0}^{t+1} \mathrm{p}_i \, e^{-r(t+1-i)} - k \times p_{t+1}$

$\Leftrightarrow B_{t+1} = e^{-r} v \times \sum_{i=t_0}^{t} \mathrm{p}_i \, e^{-r(t-i)} + v p_{t+1} - k \times p_{t+1}$

$\Leftrightarrow B_{t+1} = e^{-r} B_t + \mathrm{k} e^{-r} p_t + (v - k) p_{t+1}$

Ainsi

$V = B_1 + \sum_{t=1}^{\infty} \omega^t \ (e^{-r} B_t + \mathrm{k} e^{-r} p_t + \left(v - k\right) p_{t+1})$

$\Leftrightarrow V = B_1 + \omega e^{-r} \sum_{t=1}^{\infty} \omega^{t-1} B_t + \sum_{t=1}^{\infty} \omega^t \left(\mathrm{k} e^{-r} p_t + \left(v - k\right) p_{t+1}\right)$

$\Leftrightarrow V = B_1 + \omega e^{-r} V + \mathrm{k} e^{-r} \sum_{t=1}^{\infty} \omega^t p_t + \frac{v - k}{\omega} \sum_{t=1}^{\infty} \omega^{t+1} p_{t+1}$

$\Leftrightarrow (1 - \omega e^{-r}) V = B_1 + \mathrm{k} e^{-r} \sum_{t=1}^{\infty} \omega^t p_t + \frac{v - k}{\omega} \sum_{t=2}^{\infty} \omega^t p_t$

$\Leftrightarrow (1 - \omega e^{-r}) V = B_1 + \mathrm{k} e^{-r} \omega \, p_1 + (\frac{v - k}{\omega} + \mathrm{k} e^{-r}) \sum_{t=2}^{\infty} \omega^t p_t$

Or

$B_1 = v \times S_1 - k \times p_1$

Donc

$$(1-\omega e^{-r})V = \mathrm{k}\, p_1(e^{-r}\omega - 1) + v \times S_1 + (\frac{v-k}{\omega} + \mathrm{k}e^{-r}) \sum_{t=2}^{\infty} \omega^t\, p_t$$

$$\Leftrightarrow V = -\mathrm{k}\, p_1 + \frac{v}{1-\omega e^{-r}} \times S_1 + \frac{\frac{v-k}{\omega}+\mathrm{k}e^{-r}}{1-\omega e^{-r}} \sum_{t=2}^{\infty} \omega^t\, p_t$$

Notons que

$$\frac{\frac{v-k}{\omega}+\mathrm{k}e^{-r}}{1-\omega e^{-r}} = \frac{1}{\omega}\frac{v-k+\omega \mathrm{k}e^{-r}}{1-\omega e^{-r}} = \frac{1}{\omega}(\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k)$$

Donc

$$V = -\mathrm{k}\, p_1 + \frac{v}{1-\omega e^{-r}} \times S_1 + \frac{1}{\omega}(\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k) \sum_{t=2}^{\infty} \omega^t\, p_t$$

$$\Leftrightarrow V = \left(\frac{v}{1-\omega e^{-r}} - k\right) \sum_{t=1}^{\infty} \omega^t\, p_{t+1} - kp_1 + S_1 \frac{v}{1-\omega e^{-r}}$$