UNIVERSITE DE MONTREAL

ETUDE DE LA VALEUR DE SHAPLEY ET SON APPLICATION AU CALCUL DU POUVOIR DES PROVINCES CANADIENNES DANS LE VOTE D'UN PROJET DE LOI AU PARLEMENT

par
Stéphanie LLUIS

DEPARTEMENT DES SCIENCES ECONOMIQUES
FACULTE DES ARTS ET SCIENCES

TRAVAIL PRESENTE A LA FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE MAITRISE ES SCIENCE (M.Sc.)

DECEMBRE 1993

PLAN

INTRODUCTION

PARTIE I ETUDE DE LA VALEUR DE SHAPLEY

A-Présentation des jeux simples sous forme de coalitions

1) La valeur assurée
2) Les jeux simples
3) Les jeux de vote pondéré

B-Définition et justification de la valeur de Shapley

1) Définition pour les jeux simples
2) Fondements axiomatiques

C-Comparaison avec une autre mesure du pouvoir: l'indice de Banzhaf

1) Définition de l'indice de Banzhaf
2) Différences avec la valeur de Shapley

PARTIE II APPLICATION : CALCUL DES INDICES DE POUVOIR DES PROVINCES CANADIENNES

A- Exposé des principes législatifs de représentation des provinces au Parlement

1) Le cadre constitutionnel actuel
2) Les modifications proposées à Charlottetown

B- Modélisation des jeux et calculs des indices de pouvoir

1) Modélisation
2) Programmation du calcul

C-Analyse des résultats

1) Premières remarques
2) Comparaison de la répartition du pouvoir avec d'autres facteurs
3) Validité de la valeur de Shapley

CONCLUSION

INTRODUCTION

La loi constitutionnelle de 1867, autrefois appelée Acte de l'Amérique du Nord, fut sujette à de nombreuses modifications, révisions, amendements, traduisant les changements dans la structure géographique et sociale du pays: l'ajout de Terre Neuve comme province en 1949 par exemple, le problème des autochtones, et du bilinguisme sont d'autres exemples encore à l'ordre du jour. C'est seulement en 1982 que le Canada s'est vu accorder le droit de modifier de lui-même sa Constitution, sans l'intermédiaire de l'accord du Parlement Britannique.

En 1992, le problème d'une plus juste représentation des provinces au Parlement fut soulevé dans le cadre du consensus sur la Constitution qui eut lieu à Charlottetown, et d'où fut établi le texte définitif traduisant une volonté de réforme de la Constitution. Soumis à la population en Octobre 1992 lors d'un référundum, les changements furent rejetés. Pour la plupart des individus interrogés hors du Québec et ayant voté non à ce projet, ces accords auraient donné trop de pouvoir au Québec[1]; c'est ce jugement a priori qui a éveillé notre curiosité car ces accords proposaient au contraire une répartition plus égalitaire du pouvoir entre les provinces.

Notre étude cherche ainsi à mesurer le pouvoir de chacune des provinces dans la décision de vote d'un projet de loi au Parlement, en s'appuyant sur le système actuel de représentation parlementaire des provinces tel qu'il est établi par la loi constitutionnelle de 1867, et en le comparant à celui proposé à Charlottetown. Pour ce faire, nous allons nous servir des travaux de Shapley et notamment la mesure qu'il a élaborée dans les années 1950, appelée valeur de Shapley, pour établir une répartition du pouvoir entre des joueurs dans des jeux dits simples, sous forme de coalitions.

Présentons donc dans une première partie les principales notions de théorie des jeux coopératifs sur lesquelles est définie la valeur de Shapley, puis ses caractéristiques et ses particularités notamment par rapport à une autre mesure de pouvoir: l'indice de Banzhaf. Nous pourrons alors, dans une deuxième partie, étendre l'application de cette valeur au cas de procédures de vote plus complexes (avec un double quota notamment), telles celles que l'on retrouve au niveau des institutions politiques canadiennes; nous tenterons de modéliser la

---

[1] Macleans Novembre 1992, no 44.

procédure de vote telle qu'elle est établie dans la Constitution du Canada, étant donné le mode actuel de représentation des provinces, ainsi que celle basée sur le système proposé à Charlottetown; nous calculerons la valeur de Shapley des deux jeux caractérisant ces systèmes, pour lesquels les joueurs sont les dix provinces et les deux territoires du Canada, afin d'en déduire leurs parts de pouvoir respectives, présentées sous forme d'indices.

Notre analyse des résultats, portant en premier lieu sur la comparaison de ces deux indices en terme de représentation des provinces au Parlement, sera approfondie par une étude de la répartition de ce pouvoir en fonction de facteurs indirectement liés à cette représentation parlementaire: la population de chaque province ainsi que son poids économique.

I- ETUDE DE LA VALEUR DE SHAPLEY

A-Présentation des jeux simples sous forme de coalitions

De manière générale, et en se basant sur les ouvrages de R.J. Aumann, H. Moulin et M. Shubik concernant la théorie de la valeur dans les jeux coopératifs, notre approche s'appuie sur les jeux sous forme de coalitions; nous considérons un ensemble N de n joueurs qui peuvent se grouper au sein de coalitions (sous-ensembles de N variant de $\emptyset$ à N tout entier), où leur stratégie est décidée en commun afin d'améliorer le gain de tous les joueurs coalisés. Plutôt que d'étudier les différentes stratégies caractérisées par les différentes possibilités de coopérations des joueurs, notre analyse s'intéressera au résultat de la coopération, c.à.d au gain résultant de la formation de ces coalitions; ceci nous amène à introduire la notion de "valeur assurée" qui correspond à ce gain, et sur laquelle repose la définition de notre mesure du pouvoir.

1) La valeur assurée

La "valeur assurée" associée à un jeu coopératif est définie au moyen d'une fonction caractéristique qui est à la base de tout jeu sous forme de coalitions; cette dernière résume l'ensemble des possibilités coopératives des joueurs. Définie sur l'ensemble de toutes les coalitions S envisageables entre les n joueurs (soit les sous-ensembles S inclus dans N), elle associe à chaque coalition S un nombre V(S) qui correspond à sa valeur; c'est le gain assuré par la coopération des joueurs dans S; il reflète ce que cela vaut pour chacun d'eux de coopérer.

Plus formellement, on définit un jeu sous forme de coalition (ou sous forme caractéristique) par la donnée de:

1) Un ensemble N de n joueurs,

2) Une fonction

$$V: 2^N \Rightarrow \text{IR}$$

$$S \mapsto V(S) \text{ , telle que } V(\emptyset) = 0$$

où S est une coalition, et 2^N : $\{ S : S \subseteq N \}$ est l'ensemble de ces coalitions

V(S) est appelée valeur de la coalition S.

2) Les jeux simples

Notre étude s'applique au cas de jeux simples, ou jeux de contrôle, caractérisés par le fait qu'une coalition est soit gagnante, soit perdante. Dans cette optique, et en supposant que le jeu est normalisé de façon que la valeur de la coalition formée de tous les joueurs soit ramenée à l'unité, la fonction caractéristique se modélise de la façon suivante:

$$V(S) = \begin{cases} 1 \text{ si } S \text{ est gagnante,} \\ 0 \text{ si } S \text{ est perdante.} \end{cases}$$

(les hypothèses du jeu précisant en quoi S est gagnante ou perdante).

Illustrons ces définitions par un exemple concret de jeu simple sous forme de coalitions: Considérons le cas d'un marché d'un bien parfaitement divisible, où se confrontent un acheteur (soit le joueur 1), et deux vendeurs (soient les joueurs 2 et 3).
Ainsi, pour $N = \{ 1, 2, 3 \}$, il y a 2^3, c.a.d 8 coalitions possibles qui sont:

$$\{ 1, 2, 3 \} , \{ 1, 2 \} , \{ 2, 3 \} , \{ 1, 3 \} , \{ 1 \} , \{ 2 \} , \{ 3 \} , \{ \varnothing \}$$

La coalition est gagnante lorsque le bien peut s'échanger, c.à.d lorsqu'elle contient au moins un vendeur (2 ou 3) et l'acheteur 1; on obtient donc les informations:

$$V(\{ 1, 2, 3 \}) = V(\{ 1, 2 \}) = V(\{ 1, 3 \}) = 1$$
$$V(\{ 2, 3 \}) = V(\{ 1 \}) = V(\{ 2 \}) = V(\{ 3 \}) = 0$$

On constate par cet exemple que parmi les huit coalitions envisagées, certaines sont plus efficaces, dans le sens où, étant donné les règles du jeu, elles sont susceptibles d'atteindre le résultat (ainsi dans notre exemple, seules les coalitions $\{ 1, 2, 3 \}$, $\{ 1, 2 \}$ et $\{ 1, 3 \}$ permettent l'échange du bien). En ce sens, elles ont un pouvoir de décision dans le jeu. Des informations plus précises sur ce sujet sont données par B. Peleg (1979) qui s'est intéressé au principe de formation des coalitions au sein de comités, cherchant l'ensemble des coalitions déterminantes de villes lors des élections municipales de 1965, 1973, et 1979 en Israël.

Qu'en est-il à présent de chacun des joueurs ? Comment rendre compte, marquer la participation d'un joueur à la victoire ou à la perte d'une coalition ? En d'autres termes, on se demande comment mesurer son pouvoir au sein des diverses coalitions auxquelles il participe, et par là même, son pouvoir sur le résultat lui-même.

Voici donc en terme de pouvoir, de manière plus appropriée qu'en terme de gain ou valeur du jeu, le problème de partage ou redistribution étudié par ces auteurs dans le cadre de la théorie de la valeur dans les jeux sous forme de coalitions. La solution de ce problème se trouve dans la valeur de Shapley. Cette dernière est, un concept de "solution" applicable aux jeux sous forme de coalitions; c'est en 1954 que Shapley et Shubik ont étudié son application à la catégorie des jeux simples (tels que décrits plus haut) dans leur article intitulé "A method for evaluating the distribution of power in a committee system", la présentant comme une mesure de pouvoir à priori dans un vote; elle fait depuis, à ce sujet, l'objet de nombreuses études quant à ses propriétés et son application aux jeux de vote, entre autres celles de A.E. Roth (1977), S. Muto (1983), et plus récemment H. Haller (1991). Voyons donc plus précisemment en quoi consiste les jeux de vote.

3) Les jeux de vote pondéré

Définition

Soit un ensemble N de n joueurs.

Un jeu de vote pondéré à la majorité, avec des poids $w_i \geq 0$ associés aux joueurs i (i = 1, .. ,n), et un quota q est défini par:

$$V(S) = \begin{cases} 1 & si \sum\limits_{i \in S} w_i \geq q, \\ 0 & si \sum\limits_{i \in S} w_i < q. \end{cases}$$

Exemple:

Supposons que trois partis: 1, 2 et 3 auxquels sont associés les poids respectifs de 2/3, 1/6 et 1/6, cherchent à soumettre un projet de loi dont l'adoption requiert la majorité (q=1/2).

Alors, pour la coalition $S = \{ 1, 2, 3 \}$, $V(S) = 1$ car $\sum w_i = 2/3+1/6 + 1/6 = 1 >1/2$.

pour $S = \{ 1, 2 \}$, $V(S) = 1$ car $\sum w_i =2/3 + 1/6 = 5/6 >1/2$.

$S = \{ 1, 3 \}$, $V(S) = 1$ car $\sum w_i =2/3 + 1/6 = 5/6 >1/2$.

$S = \{ 1 \}$, $V(S) = 1$ car $\sum w_i = 2/3 > 1/2$.

$S = \{ 2, 3 \}$, $V(S) = 0$ car $\sum w_i = 1/6 + 1/6 = 1/3 \langle 1/2$.

$S = \{ 2\}$, $S = \{ 3 \}$, $V(S) = 0$ car $1/6 \langle 1/2$.

et, par définition de V, $V(\emptyset) = 0$.

On constate que la présence du joueur 1 est nécessaire à rendre toute coalition gagnante; ce qui n'est pas le cas pour 2 et 3. Ainsi, le pouvoir d'un joueur est déterminé par sa capacité à rendre gagnante une coalition en acceptant de coopérer à celle-ci.

La valeur de Shapley pour un joueur se base sur cette idée; elle compte le nombre d'occasions qu'a un joueur d'être le "pivot" dans le processus de décision collective, c.a.d de modifier le résultat selon son absence ou sa présence dans la coalition.

Elle évalue les contributions marginales du joueur i, notées $V(S\cup\{i\}) - V(S)$, prises sur toutes les coalitions possibles $S \subseteq N\backslash i$ (dont l'ensemble vide), dans tous les ordres possibles d'arrivée des joueurs dans ces coalitions.

Si i est pivot pour une coalition donnée $S \subseteq N\backslash i$, alors $V(S\cup\{i\}) - V(S) = 1 - 0 =1$.

B-<u>Définition et caractérisition de la valeur de Shapley</u>

1) Définition pour les jeux simples

La formule de la valeur de Shapley peut être écrite de différentes façons équivalentes; considérons celle qui nous semble la plus explicite:

Soient $N = \{ 1, 2, .. ,n \}$, l'ensemble des joueurs,

V, un jeu simple sous forme de coalitions,

La valeur de Shapley est une fonction ΦV qui à tout jeu simple V associe un vecteur:

$$(\Phi V)_i = (\Phi_1(V), .., \Phi_n(V))$$

qui détermine la distribution du pouvoir de la coalition N entre les joueurs; ses coordonnées correspondent à ce qu'on appelle les indices de pouvoir respectifs des joueurs 1,..,n; elles sont définies par la formule:

$$\Phi_i(V) = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{c(s)}\sum_{\substack{S\subseteq N\setminus i\\ |S|=s}}[V(S\cup\{i\}) - V(S)]$$

où s est le nombre d'éléments de S, et c(s) est le nombre de coalitions de cardinalité s ne contenant pas le joueur i c.à.d:

$$c(s) = \binom{n-1}{s} = \frac{(n-1)!}{s!(n-s-1)!}$$

Pour bien comprendre la formule, reprenons l'exemple précédent généralisé à n joueurs du vote pour le dépôt d'un projet de loi. Imaginons que le processus de formation des coalitions en faveur d'un certain projet de loi s'effectue dans un ordre aléatoire, tous les ordres considérés étant équiprobables. Ainsi, si l'on s'attache au joueur i et que l'on regarde sa contribution marginale $V(S\cup\{i\}) - V(S)$ à la coalition S formée de tous les joueurs qui ont voté avant lui , elle sera égale à 1 si S est perdante et $S\cup\{i\}$ est gagnante c.a.d si i est pivot, et 0 dans tous les autres cas; la ième composante de la valeur de Shapley, $\Phi_i(V)$, sera donc d'autant plus élevée qu'il y a de façons de trouver des coalitions S de ce type, et qu'il y a de façons de permuter les membres de S.

Il y a en effet s!(n-s-1)! façons possibles d'ordonner une coalition de taille s dans un ensemble de n-1 éléments (sans i), c.a.d s! façons pour les s premiers éléments dans S et (n-s-1)! pour les derniers qui sont dans N\S\{i }:

$$\underset{s!}{1\underline{\qquad\qquad\qquad}}s\underset{(n-s-1)!}{\underline{\qquad\qquad\qquad}}n-1,\ i$$

En rapportant ceci au nombre total d'ordonnancements possibles des coalitions sur N tout entier, on obtient que:

$$\Phi_i(V) = \sum_{s=1}^{n}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\sum_{\substack{S\subseteq N\setminus i\\ |S|=s}}[V(S\cup\{i\}) - V(S)]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{c(s)} \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus i \\ |S|=s}} [V(S \cup \{i\}) - V(S)]$$

où $\frac{s!(n-s-1)!}{n!}$ s'interprète comme le poids de la coalition S de taille s, sur l'ensemble des coalitions et leurs permutations.

La valeur de Shapley prend donc en compte tous les ordres possibles dans lesquels un vote peut prendre place; on voit de plus qu'elle se présente comme une moyenne des contributions marginales du joueur i, prises sur toutes les coalitions possibles des joueurs qui participent avant lui, et pondérées par le poids de ces coalitions sur l'ensemble des coalitions et leurs permutations.

On peut aussi interpréter la valeur de Shapley comme une mesure de la probabilité qu'a un joueur d'être pivot étant donné l'ensemble des coalitions, sachant que tous les ordres possibles de ces coalitions sont équiprobables, (on a $V(N) = \sum \Phi_i(V) = 1$ dans le cas de jeux simples). Voyons plus précisemment les fondements mathématiques de cette valeur dans le cas général des jeux sous forme de coalitions.

2) Fondements axiomatiques

Dans l'optique de présenter une approche plus formelle et rigoureuse de la valeur de Shapley, énonçons dans un premier temps les principales définitions utilisées dans le cadre de la théorie de la valeur, qui caractérisent les jeux sous forme de coalitions, puis le théorème fondamental qui caractérise la valeur de Shapley.

Définition 1

i et j , éléments de N sont substituts dans le jeu V si
quelle que soit la coalition S ne contenant ni i ni j,
$V(S \cup \{i\}) = V(S \cup \{j\})$.

Définition 2

Un élément i de N est appelé un joueur nul dans le jeu V si

$V(S \cup \{i\}) = V(S)$, $\forall$ $S \subset N$.

Définition 3

E^N est l'espace euclidien dont la dimension est la cardinalité de N, et dont les coordonnées sont indéxées par les membres de N eux-mêmes

H. Moulin et R.J. Aumann se sont particulièrement intéressés aux fondements mathématiques de la valeur de Shapley; leurs études analysent en détail ses propriétés (avec démonstrations et exemples); ces propriétés sont les suivantes:

Soit $N = \{ 1, 2,..,n \}$ et G^N l'ensemble de tous les jeux sous forme de coalitions dont l'ensemble des joueurs est N. Soient les propriétés de:

a-Symétrie: $\forall$ $V \in G^N$, si i et j sont substituts dans V, alors $\Phi_i(V) = \Phi_j(V)$.

b-Efficacité: $\sum \Phi_i(V) = V(N)$, $\forall$ $V \in G^N$.

c-Additivité: $\Phi_i(V+W) = \Phi_i(V) + \Phi_i(W)$, $\forall$ $V, W \in G^N$.

d-Condition du joueur nul: $\forall$ $V \in G^N$, si i est un joueur nul dans V, alors $\Phi_i(V) = 0$.

<u>Théorème</u> Il existe une et une seule fonction qui satisfait les propriétés a, b, c, d; c'est la valeur de Shapley.

Notre but dans cette sous-partie est d'insister sur la puissance mathématique de la valeur de Shapley en tant qu'unique fonction sastisfaisant de telles propriétés sur l'ensemble des jeux sous formes de coalitions, et par la même, de justifier notre intérêt particulier pour cette mesure par rapport à d'autres mesures de pouvoir.

Une autre mesure de pouvoir a été en effet proposée par J.F. Banzhaf en 1965, appelée indice de Banzhaf; bien que ne possédant pas d'aussi bonnes propriétés que la valeur de Shapley, la littérature la compare souvent à celle-ci car elle est néanmoins tout aussi valide lors de l'étude des jeux simples de vote; c'est pourquoi nous souhaitons énnoncer sa définition et ses principales caractéristiques.

C-Comparaison avec une autre mesure: l'indice de Banzhaf

Comme nous l'avons précisé plus haut, l'indice de Banzhaf est une mesure de pouvoir définie seulement dans la classe des jeux simples, et souvent utilisée dans les problèmes de vote; l' élément clé dans la construction de cet indice est l'ensemble des couples $(S \cup \{i\}, S)$ associé au joueur i, tel que $S \cup \{i\}$ soit une coalition gagnante ($V(S \cup \{i\}) = 1$) et S ne le soit pas ($V(S) = 0$). De la même façon que pour la valeur de Shapley, l'idée est de regarder la contribution marginale du joueur i par rapport à la coalition S.

1) Définition de l'indice de Banzhaf

Posons η_i (V), le nombre de couples $(S \cup \{i\}, S)$, qui ont les caractéristiques décrites plus haut, sur l'ensemble des coalitions possibles associées au jeu simple V où le nombre de joueurs est n; on obtient alors la définition de l'indice de Banzhaf absolu (ou non normalisé):

$$\beta_i(V) = \frac{\eta_i(V)}{2^{n-1}}$$

Il est cependant plus habituel de travailler avec l' indice normalisé:

$$\beta_i(V) = \frac{\beta_i(V)}{\sum_{i \in N} \beta_i(V)}$$

2) Différences avec la valeur de Shapley

On est, à ce stade ci, tenté de comparer cette formule à celle de Shapley; bien qu'il n'est pas question de savoir quelle est la meilleure puisqu'elles sont toutes les deux aussi valables dans le cadre des jeux simples, voyons leurs points de différence.

On note d'une part que η_i (V) peut être défini de la façon suivante:

$$\eta_i(V) = \sum_{\substack{S \subseteq N \setminus i \\ |S| = s}} [V(S \cup \{i\}) - V(S)]$$

Ceci nous permet de voir que le seul élément qui différencie les deux formules est le poids que chacune associe à la coalition S qu'elle considère; l'indice de Banzhaf ne fait que pondérer η_i (V) par le nombre total de coalitions $S \subseteq N$ (l'ensemble des n joueurs), soit 2^{n-1}, alors que la valeur de Shapley considère, comme on l'a vu, tous les ordres possibles dans lesquels toutes ces coalitions peuvent se former, soit:

$$n * c(s) = n * \binom{n-1}{s} = n * \frac{(n-1)!}{s!(n-s-1)!}$$

Cela a pour conséquence que la valeur de Shapley donne un poids plus élevé aux grandes coalitions car pour s grand, S génère plus de permutations, alors que l'indice de Banzhaf accorde le même poids à toutes les coalitions.

Ces différences ne devraient normalement pas avoir de grandes conséquences sur les résultats, et nous nous attendons à trouver des valeurs de ces deux indices sensiblement égales lors de notre application; nous calculerons donc l'indice de Banzhaf dans le but de confirmer les résultats trouvés avec la valeur de Shapley;

De plus, outre sa solidité mathématique, la valeur de Shapley nous semble être une mesure plus exacte dans le sens où le fait de considérer tous les ordres de formation des coalitions, lui permet de traiter de façon plus neutre la manière dont un vote peut prendre place.

II-APPLICATION : CALCUL DES INDICES DE POUVOIR DES PROVINCES CANADIENNES

De nombreuses études relatives au calcul de la valeur de Shapley ont été effectuées dans le but d'analyser les systèmes de vote sur les plans politique et institutionnel de différents pays. En Belgique par exemple, E. Buyst, L. Lauwers et P. Uytterhoeven se sont intéressés à la distribution du pouvoir au sein des partis politiques belges dans leur article "A game-theoretical approach to the results of Parliamentery elections in Belgium between the wars"; le cas des Etats-Unis est notamment étudié par J.W. Friedman (1986) et plus récemment A. Taylor et W. Zwicker (1991), traitant le cas de la répartition du pouvoir entre le Sénat, la Chambre et le Président lors de la décision de passage d'un projet de loi; P.D. Straffin (1977) a de même étudié la distribution du pouvoir entre les villes représentées au gouvernement du comté de Rock County dans le Wisconsin. Au Canada, l'application de la valeur de Shapley pour rendre compte du mécanisme d'amendement de la Constitution canadienne (exigeant le consentement de 2/3 des provinces et devant totaliser elles-mêmes au moins la majorité de la population du Canada) et établir le pouvoir résultant des provinces canadiennes fut entreprise par Miller (1973). Pour notre part, nous allons de même chercher à établir le pouvoir des provinces canadiennes, mais dans le cadre du système de vote d'un projet de loi au Parlement.

Ainsi, puisqu'il nous faut définir des jeux sur le vote d'un projet de loi au Parlement, voyons donc d'abord les principes sur lesquels se base l'établissement du pouvoir législatif canadien, puis ce qui a été proposé à Charlottetown en ce qui concerne la représentation des provinces; nous serons ensuite en mesure d'établir deux modèles de jeu de vote autour de ces informations et d'en déduire la valeur de Shapley de ces jeux.

A- <u>Exposé des principes législatifs de représentation des provinces au Parlement</u>

1) Le cadre constitutionnel actuel

Notons que, comme tout texte constitutionnel qui se doit de ne permettre aucune confusion possible, la loi constitutionnelle de 1867 élabore, par les différents articles qu'elle énonce, une description très détaillée de toute les articulations du système législatif canadien. Nous nous sommes permis de ne considérer que les articles qui nous semblaient les plus pertinents dans le cadre de l'élaboration de notre jeu; nous ne nous sommes donc intéressés qu'aux articles concernant la représentation des provinces dans la composition du Sénat et de la Chambre des Communes, incluant s'il y a eu lieu, les modifications ou révisions effectuées depuis.

* Le Parlement

Le pouvoir législatif au Canada appartient à un Parlement fédéral; il est exercé de façon bicamérale, c.a.d au moyen de deux Chambres. Le Parlement du Canada est donc composé de la Reine (puisqu'il s'agit d'une monarchie constitutionnelle), mais aussi du Sénat et de la Chambre des Communes.

* La composition du Sénat et de la Chambre des Communes

Le Sénat ne représente pas exactement les provinces du Canada, mais plutôt ses grandes régions. Il compte ainsi actuellement 104 sénateurs, répartis comme suit:

Ontario :		24
Québec :		24
Les 4 Provinces de l'Ouest :		24
Alberta :	6	
Manitoba :	6	
Saskatchewan :	6	
Colombie Britannique :	6	

Les trois Provinces Maritimes :		24
Nouvelle Ecosse :	10	
Nouveau Brunswick :	10	
Ile du Prince Edouard :	4	
Terre-Neuve :		6
Territoires du Nord Ouest :		1
Yukon :		1

La composition de la Chambre des Communes a varié considérablement depuis 1867, l'article 51 (réactualisé) explique comment le nombre de sièges de députés par province est actuellement déterminé , à partir d'un calcul basé sur la taille de sa population.

Elle comprend actuellement 295 députés, répartis comme suit:

Ontario :	99
Québec :	75
Alberta :	26
Manitoba :	14
Saskatchewan :	14
Colombie Britannique :	32
Nouvelle Ecosse :	11
Nouveau Brunswick :	10
Ile du Prince Edouard :	4
Terre-Neuve :	7
Territoires du Nord Ouest :	2
Yukon :	1

* Le processus de vote d'un projet de loi

Le vote d'un projet de loi au Parlement est, comme on l'a vu, basé sur une structure bicamérale; les articles 35 et 49 affirment que tout projet exige à la fois la majorité des voix lors du vote au Sénat, et la majorité des voix à la Chambre des Communes.

La plupart des projets de loi peuvent être présentés indifféremment à la Chambre ou au Sénat (sauf ceux comportant une dépense d'argent qui, selon l'article 53, doivent d'abord être discutés à la Chambre.

Une fois la mesure votée par les deux Chambres, elle est présentée au Gouverneur Général pour la Sanction Royale.

2) Les modifications proposées à Charlottetown

Pour ce qui est de la partie concernant les institutions canadiennes, il y était notamment proposé que le Sénat comprenne 62 sénateurs au lieu des 104 actuels, répartis de manière égale entre les dix provinces à raison de 6 par province, et qu'il soit assigné 1 sénateur pour le Yukon, et 1 pour les territoires du Nord Ouest.
De même, la Chambre des Communes devrait rajuster son nombre de députés "de façon à mieux refléter le principe de la représentation proportionnelle à la population" (cf le texte définitif du consensus). Le nombre de sièges aurait dû notamment passer de 295 à 337, afin que l'Ontario et le Québec reçoivent 18 sièges supplémentaires, la Colombie Britannique 4, et l'Alberta 2.

B- Modélisation des jeux et calcul de la valeur de Shapley

1) Modélisation

Comme nous l'avons vu dans la première partie, c'est la fonction caractéristique qui définit le jeu sous forme de coalitions dont nous avons besoin dans les deux cas; nos individus joueurs sont les 10 provinces et les deux territoires, numérotés comme suit:
1 : Ontario, 2 : Québec, 3 : Alberta, 4: Manitoba, 5 : Saskatchewan, 6 : Colombie Britannique,
7 : Nouvelle Ecosse, 8 : Nouveau Brunswick, 9 : Ile du Prince Edouard, 10 : Terre-Neuve
11 : Territoires du Nord Ouest, 12 : Yukon.
L'ensemble des joueurs pour les deux jeux est donc: N={ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }.

La procédure de vote de projets de loi repose sur une structure bicamérale, où chaque province possède deux pondérations correspondant à son pourcentage de sénateurs et de députés (nous travaillons en pourcentage afin que la somme des pondérations sur l'ensemble des provinces soit égale à un).

Toute coalition $S \subseteq N$ correspond à l'ensemble des provinces qui coopèrent, par l'intermediaire de leur sénateurs et députés, dans la prise de décision collective qui correspond à la proposition d'un projet de loi.

Nos jeux sont donc simples et leurs fonctions caractéristiques V^{const} et V^{char}, permettant de traduire ce type de vote, sont les suivantes:

soient S_i , S'_i: le pourcentage de sénateurs de la province i actuellement, pour Charlottetown.

D_i , D'_i : le pourcentage de députés de la provinces i actuellement, pour Charlottetown.

S : une coalition générée par l'ensemble des provinces N = { 1, .., 12}

$$V^{const}(S) = \begin{cases} 1 & si \ \sum_{i \in S} D_i > 0.5 \ \ et \ \sum_{i \in S} S_i > 0.5, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

et

$$V^{char}(S) = \begin{cases} 1 & si \ \sum_{i \in S} D_i/ > 0.5 \ \ et \ \sum_{i \in S} S_i/ > 0.5, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Restant dans le cadre des jeux simples, une coalition est gagnante si V(S) = 1; ce qui signifie ici que le projet de loi est adopté si l'ensemble des provinces de la coalition S considérée atteint la majorité stricte en terme du total des pourcentages de sénateurs impliqués dans cette coalition d'une part, et du total des pourcentages de députés d'autre part.

* Remarques sur la modélisation

Dans les articles 35 et 48 de la Constitution, il est prévu que le vote n'ait lieu que si au moins 15 sénateurs sont présents au Sénat et au moins 20 députés à la Chambre.
Ceci implique que la présence de l'ensemble des sénateurs et députés ne serait pas nécessaire lors de la prise de décision du vote; la représentation des provinces aux deux Chambres peut donc varier, bien que celles-ci ont intérêt à être toutes représentées. En admettant tout de même cette possibilité, on serait alors tenté de considérer dans le jeu des majorités relatives aux deux Chambres, c.a.d. par rapport au nombre de présents lors du vote.

Le problème ne se pose en fait pas par définition même de la fonction caractéristique d'un jeu sous forme de coalition. En effet, nous n'avons pas précisé la forme fonctionnelle de V dans la première partie, Roger B. Myerson l'étudie dans son livre " Game Theorie, Analysis of Conflict"; il précise qu'elle représente l'utilité maximale que les joueurs retirent de leur coopération dans la coalition S.

Etant donné les coopérations entre joueurs fixées, leurs opinions établies, la constitution de S implique que N\S a fait le pire pour S. La notion de maximum d'utilité sous entend nécéssairement que tous les joueurs dans S cherchent à être présents pour gagner, et tous ceux contre S (dans N\S) souhaitent le faire perdre donc cherchent à être présents.
Ainsi V présuppose que tous les joueurs participent, nous le considérons de même dans notre jeu.

Notons d'autre part que la Reine ne figure pas parmi les joueurs car son rôle n'est pas déterminant dans la décision de passage d'un projet de loi, ne faisant qu'approuver officiellement, par l'intermédiaire du Gouverneur général, la décision déjà prise par les deux Chambres.

2)- Programmation du calcul

* Justification de la programmation et de l'utilisation du Pascal

Le calcul de la valeur de Shapley peut devenir très fastidieux dès que le nombre de joueurs dépasse 5 ou 6, obligeant à détailler les 120 puis 720 permutations de joueurs ! De plus, l'extension du modèle de vote simple (comme la règle majoritaire habituelle) à des systèmes de vote à double quota demande une distinction particulière des calculs sous-jacents à la formule (la définition de la fonction caractéristique reposant alors sur plusieurs hypothèses), qui manuellement, prendrait un temps considérable. Il était donc nécessaire et bienvenu de programmer ce calcul.

L'utilisation du langage Pascal (version 5.0) nous a paru pertinente car c'est un langage clair, facilement maniable, qui nous a permis de détailler et de suivre pas à pas les étapes du calcul. Le programme "calcul" (présenté en annexe I) que nous avons élaboré nous permet de calculer la valeur de Shapley de jeux de vote à structure bicamérale avec double majorité tels ceux que nous étudions; c'est par l'intermédiaire des données d'entrée qui sont les pondérations caractéristiques de chacun des jeux, que nous pourrons spécifier les valeurs de Shapley $\Phi(V^{cons})$ et $\Phi(V^{char})$ associées.

Les résultats du programme correspondent aux indices de pouvoir de chacune des provinces, I1 pour celui correspondant au système actuel et I2 pour celui proposé à Charlottetown; ils sont donnés dans le tableau 1 en annexe II.

C) Analyse des résultats

1) Premières remarques

Commentons dans un premier temps les résultats obtenus dans le cas du système actuel de représentation. Inégalement répartis entre les provinces, ces résultats permettent de faire néanmoins différents regroupements par niveaux à peu près équivalents d'indice de pouvoir.

On constate sans surprise que les provinces d'Ontario et de Québec se démarquent largement des autres avec les indices respectifs de 31.25 % et 23.21 %; elles détiennent à elles deux plus de la moitié du pouvoir dans la décision de vote. Domine ensuite, mais de façon beaucoup moins forte relativement aux deux précédentes, la province de la Colombie Britannique qui récupère 8.79 % du pouvoir. A un niveau un peu plus bas, aux alentours de 6 %, on retrouve l' Alberta, la Nouvelle Ecosse et le Nouveau Brunswick ; le Manitoba et le Saskatchewan se retrouvent ex-aequo avec 4.88 %; Terre-Neuve puis l'Ile du Prince Edouard obtiennent respectivement 3.72 % et 2.21 %; enfin, les Territoires et le Yukon récupèrent 0.95 % et 0.78 %.

On remarque ainsi que les écarts d'indice entre provinces sont relativement forts; la présence de l'Ontario est nettement plus déterminante dans la décision finale que le Yukon.

La répartition du nombre de sénateurs et de députés proposée Charlottetown va permettre de réduire ces écarts. Les résultats montrent en effet que le pouvoir est plus également réparti entre les provinces; cette fois, l'Ontario et le Québec ne sont plus majoritairement responsables dans la décision de vote; ils perdent de leur poids, permettant aux autres provinces d'en obtenir plus.

Pour expliquer ce fait, notons que le nombre de députés a été augmenté de 295 à 337, celui des sénateurs réduit de 104 à 62, touchant seulement les provinces qui se démarquent le plus, ainsi l'Ontario, le Québec, la Colombie Britannique et l'Alberta. Leurs indices de pouvoir étaient les quatre plus élevés dans le cas du système actuel, ils le restent avec Charlottetown mais ont été affectés différemment (les indices de la Colombie Britannique et de l'Alberta ont eux, été augmentés). En terme de pourcentage, le tableau II indique une variation positive du pourcentage de députés et négative pour celui des sénateurs pour le Québec et l'Ontario,et inversement pour les autres provinces. On en déduit la remarque suivante: la baisse du pourcentage de députés accompagnée de la hausse de celui des sénateurs ont permis aux provinces peu avantagées dans le système actuel de réhausser leurs indices de pouvoir; au contraire, la hausse du pourcentage de députés et la baisse de celui des sénateurs ont engendré pour les provinces du Québec et de l'Ontario une réduction de leurs indices. On note de plus que l'augmentation des indices de pouvoir avec Charlottetown résulte d'une variation beaucoup plus forte du pourcentage de sénateurs (en valeur absolue) que celle des députés; afin de mieux rendre compte de ce lien entre les variations de pouvoir et celles des membres représentatifs des provinces, nous avons établit deux graphiques dans le tableau 2 en annexe. Ceci nous permet d'autre part de remarquer une des caractéristiques de la valeur de Shapley selon laquelle le pouvoir d'une province n'est pas proportionnel à son poids (en terme de sénateurs et de députés).

Afin de visualiser la comparaison entre les deux indices et de vérifier nos remarques sur la répartition plus égale du pouvoir entre les provinces engendrée par le système de Charlottetown, nous nous sommes basés sur l'étude de courbes de Lorenz; nous avons pour cela considéré chaque province comme un individu sur un ensemble de douze individus, les caractérisant ainsi comme 1/12 des individus (voir la colonne 2 des pourcentages représentatifs de chaque provinces du tableau 3). Les indices de pouvoir (I1 calculé par rapport au système actuel et I2, dans le cas de Charlottetown), sont rangés et cumulés en ordre croissant; de cette facon, l'abcisse du graphique caractérisant les provinces correspond donc de gauche à droite aux provinces les moins puissantes aux plus puissantes. La courbe relative à l'indice 2 est plus proche de la distribution parfaitement égalitaire (la première diagonale); ceci permet de confirmer la répartition plus égalitaire entre provinces proposé par les accords.

Dans l'optique d'approfondir notre analyse de la répartition du pouvoir et la comparaison entre les deux systèmes de représentation des provinces, nous avons chercher à introduire d'autres facteurs susceptibles d'être indirectement liés à celle-ci tels la population des provinces ainsi que leur poids économique.

2) Comparaison de la répartition du pouvoir avec d'autres facteurs

Constatant cette relation entre les variations en pourcentage des membres représentatifs d'une province et son indice de pouvoir, et sachant que le nombre de députés d'une province est déterminé de façon proportionnelle à sa population (le nombre de sénateurs étant, lui, fixé selon le jugement du Gouverneur général, articles 51 et 24 de la loi constitutionnelle de 1867), nous nous sommes intéressés à l'étude du lien entre la répartition du pouvoir et la population.

En nous basant sur les pourcentages de population par province obtenus à partir du recensement de 1991 (Statistique Canada no 93-301), nous avons calculé les indices I1 et I2 per capita (colonnes 3 et 6 du tableau 4 en annexe II); nous avons cumulé la population par province à partir du cumul croissant des indices de pouvoir associés; les deux classements de ces derniers n'ayant pas les mêmes correspondances en terme de province, il nous a fallut considérer deux classements de population (donc deux cumuls différents) qui entrainent les deux graphiques associés au système actuel et à celui de Charlottetown.

De manière générale, les deux courbes traduisent une forte inégalité dans la distribution puisqu'elles sont très éloignées de la première diagonale; ceci est du au système général du vote pondéré; ce dernier récuse le principe "un homme, un vote" pour lequel les habitants des provinces peu peuplées sont alors fortement désavavantagés. Ces résultats confirment d'ailleurs

les précédents: une répartition égalitaire entre les provinces engendrent le fait que les petites provinces ont un "sur pouvoir" par rapport aux grandes.
Ainsi, la répartition du pouvoir est plus égalitaire entre les provinces, et l'est encore plus avec Charlottetown; il en découle une forte inégalité de répartition vue à l'échelle de l'individu, et ceci encore une fois plus importante dans le cas de Charlottetown.

A partir de ces remarques, nous nous sommes demandés si ce "sur pouvoir" des petites provinces engendré par le système de vote pondéré et accentué avec la représentation proposée à Charlottetown, ne se devait pas d'être contrebalancé par l'influence économique de chaque province; le poids économique plus important des grandes provinces permettant de réavantager ces dernières. Le graphique associé au tableau 5, construit à partir du P.I.B. par province (représentatif des industries productrices de biens, Statistique Canada no 15-203), ne permet pas hélas de rendre véritablement compte de ce phénomène; chaque point relie le pouvoir d'une province à son poids économique, celles-ci étant classées par ordre croissant de P.I.B.; on peut peut-être constater une légère tendance du pouvoir économique à croître avec le poids économique; de même, la comparaison entre les deux systèmes ne semble pas apporter d'éléments nouveaux à notre analyse.

3) Validité de la valeur de Shapley

Nous avons souhaité, à ce stade-ci de notre étude, confirmer nos résultats et par là-même notre modèle constitué des deux jeux; bien que ceux-ci semblent satisfaisants, ils sont entièrement dépendants de la mesure de pouvoir que nous avons utilisée; or, comme nous l'avons précisé dans la première partie, dans le cas des jeux simples l'indice de Banzhaf est une mesure de pouvoir alternative et aussi valable que celle de Shapley; comparer nos calculs à ceux effectués avec ce dernier permettrait de vérifier la validité de notre modèle et la cohérence des deux mesures.

Les résultats présentés en annexe dans le tableau 6 dans le cas du système actuel montrent très nettement que les deux mesures engendrent une répartition du pouvoir dans le même ordre de grandeur, les indices étant à peu près équivalents. On remarque à ce sujet que les indices de Banzhaf sont légèrement supérieurs pour les deux grandes provinces du Québec et de l'Ontario, inférieurs pour les autres; en tenant compte du fait que les indices sont des pourcentages arrondis à un chiffre après la virgule et qu'en ce sens ces différences sont minimes, ceci est sûrement du aux différences de poids que les deux formules associent à chaque coalitions pertinentes qu'elle considère, comme nous l'avions précisé dans la première partie.

Quoiqu'il en soit, l'indice de Banzhaf nous renseigne de la même façon par les courbes de Lorenz (tableau 7 en annexe II) sur la répartition du pouvoir, plus égalitaire dans le cas du système proposé par les accords de Charlottetown.

CONCLUSION

Au cours de cette étude, nous avons pu mettre en évidence le pouvoir des provinces canadiennes lors du vote d'un projet de loi au Parlement; en comparant le système actuel de représentation des provinces à celui proposé dans les accords de Charlottetown, nous avons pu confirmer les exigences de ces derniers d'une représentation plus égalitaire des provinces, étant donné la répartition du pouvoir entre les provinces plus égalitaire dans ce cas-ci. Nous avons pu du même coup confirmer que le Québec n'aurait pas eu plus de pouvoir avec Charlottetown.

Dans l'optique d'évaluer le lien entre les résultats obtenus et la réalité des faits, il est tout de même important de bien saisir la portée de la valeur de Shapley quant à l'interprétation des résultats qu'elle établit. Comme le précise lui même Shapley dans son article, la valeur de Shapley est une mesure de pouvoir a priori dans un vote; elle permet en effet de donner un ordre de grandeur à la répartition du pouvoir des joueurs lors de la décision de vote mais ne peut expliquer véritablement les origines ni l'exploitation de ce pouvoir. Ce mot est d'ailleurs à employer avec prudence car il possède plusieurs conotations, notamment en sciences politiques; en ce sens, le pouvoir qu'attribue la valeur de Shapley à un joueur n'est pas un tout, il permet de rendre compte de la capacité que peut avoir un joueur à contrôler la décision finale du vote; c'est un pouvoir de décision qui doit être considéré en prenant en compte d'autres aspects tels que des critères sociaux, politiques etc... A ce sujet, nous nous sommes informés sur les résultats du vote par province des accords de Charlottetown; ces derniers ont été refusés par plus de la majorité des provinces; les résultats du tableau 8 montrent que seules les provinces de l'île du Prince Edouard, Terre-Neuve, le Nouveau Brunswick et les territoires du Nord-Ouest étaient en faveur de ces derniers; nous nous sommes alors intéressés au lien possible entre le gain en pouvoir apporté par ces accords à chacune des provinces et le résultat de leur vote au référendum. Le graqhique du tableau 9 de l'annexe tente de visualiser ce lien et montre qu'il est loin d'être évident; la province de l'Alberta par exemple, a voté contre les accords alors qu'ils lui procuraient le gain en pouvoir le plus élevé (2.6); ces accords contenaient évidemment des points autres que les aspects institutionnels que nous avons étudiés.

Il est clair que le modèle associé à cette valeur est un modèle mathématique qui simplifie la réalité, ne tenant pas compte des aspects sociaux, idéologiques et stratégiques du vote; nous avons pu cependant grâce à elle confirmer le désir d'une représentation des provinces plus égalitaire au Parlement souhaité à Charlottetown; en ce sens, elle constitue une mesure juste de pouvoir, possédant de fortes propriétés mathématiques et bien que valide dans le cadre théorique particulier des jeux coopératifs, elle permet de faire des applications pratiques et concrètes dans le cas de l'étude des jeux de vote pondéré et du mécanisme de répartition du pouvoir des joueurs étant donné la procédure de vote à laquelle ils participent.

REFERENCES

Mesures de pouvoir dans les jeux de vote

*AUMANN, R.J. (1989), "Lectures on Game theory", Westview Press, p 26-37.

*BANZHAF, J. (1965), "Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis",*Rutgers Law Review, Vol.19*,p317-343.

*HALLER, H. (1991), "Collusion properties of values", Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg.

*MOULIN, H.(1981), "Théorie des jeux pour l'économie et la politique",Collection Methodes, p 192-209.

*MUTO, S. (1983), "Power indices in a discretely proportional representative system with a large number of voters", *Mathematical Social Sciences*, p 93-98.

*ROTH, A. E. (1977), "The Shapley value as a Von Neumann-Morgenstern utility", *Econométrica, vol.45,* p 657-674.

*SHAPLEY, L.S et SHUBIK, M. (1954), "A method for evaluating the distribution of power in a committee system ", *Amer. Polit. Sci. Rev. ,vol.* 48, p 787-792.

Applications

*BUYST, E., LAUWERS, L. et UYTTERHOEVEN, P. (1989), "A game theoritical approach to the results of parliamentary elections in Belgium between the wars", *Social Science History, vol. 13*, p 237-254.

*FRIEDMAN, J. W,(1986), "Game theory with applications to economics" Oxford University Press, 1986.

*MILLER, D.R. (1973), "A Shapley value analysis of the proposed Canadian constitutional amendment scheme", Canadian Journal of Political sciences, vol 6, p 140-143.

*PELEG, B. (1980), "A theory of coalition formation in committees", Journal of Mathematical Economics, vol 7, p 115-134.

*SHUBIK, M.(1982), "Game Theory In The Social Sciences", M.I.T Press, p 179-216.

*STRAFFIN, P.D.(1977), "The power of voting blocks: an example", *Mathematics Magazine, vol 50*, p 22-25.

*TAYLOR, A. et ZWICKER, W. (1991), "Weighted voting, multicameral representation, and power", Union College, New York.

SOURCES

*CHARLOTTETOWN, (Août 1992), Texte définitif du rapport du consensus sur la Constitution, *les Publications Fédérales*, p 4-10.

*MACLEAN'S, Novembre 1992, vol. 105, no 44, p 12-31.

*STASTIQUE CANADA, (1984-1992), "Produit intérieur brut provincial par industrie", no 15-203.

* STATISTIQUE CANADA, (1991), "Aperçu national, chiffres de population et des logements", Recensement 1991, no 93-301.

*WOEHRLING, J. et MORIN, J.Yvan (1992), "La constitution du Canada et du Québec, du régime français à nos jours", Themis.

ANNEXE I

PROGRAMME DE CALCUL DE LA VALEUR DE SHAPLEY

```
rogram calcul (output);

 const
  n = 12;
 type
  interval = 1..n;
  ensemble = set of interval;
  table = array[interval] of real;
 var
  f, h: text;
  i: interval;
  province : ensemble;
  depute, senateur, decision: table;

 function comb (i, j: integer): real;
 begin
  if i > j div 2 then
   comb := comb(j - i, j)
  else if i >= j then
   comb := 1
  else
   comb := comb(i, j - 1) * j / (j - i)
 end;

 procedure cherche (province : ensemble; pivot, k: interval);
  var
   i: interval;

  procedure traite (var province : ensemble; pivot : interval);
   var
    dep, sen: real;
    card, i: interval;
  begin
   dep := 0;
   sen := 0;
   card := 0;
   for i := 1 to n do
    if i in province then
     begin
      card := card + 1;
      dep := dep + depute[i];
      sen := sen + senateur[i];
     end;
   if ((dep < 0.51) or (sen < 0.51)) and (dep + depute[pivot] >= 0.51) and (sen + senateur[pivot] >= 0.51) then
    decision[pivot] := decision[pivot] + 1 / n / comb(card, n - 1)
  end;

 begin
  if k <= n then
   begin
    cherche(province, pivot, k + 1);
    if k in province then
     begin
      province := province - [k];
      cherche(province, pivot, k + 1)
     end
   end
  else
   traite(province, pivot)
```

```
    end;

begin
  open(f, 'national.data');
  open(h, 'resultat.data');
  for i := 1 to n do
    begin
      province := province + [i];
      decision[i] := 0;
      read(f, depute[i], senateur[i])
    end;
  for i := 1 to n do
    begin
      writeln(i);
      cherche(province - [i], i, 1)
    end;
  for i := 1 to n do
    writeln(h, i : 3, ':', 100 * decision[i] : 8 : 4, '%')
end.
```

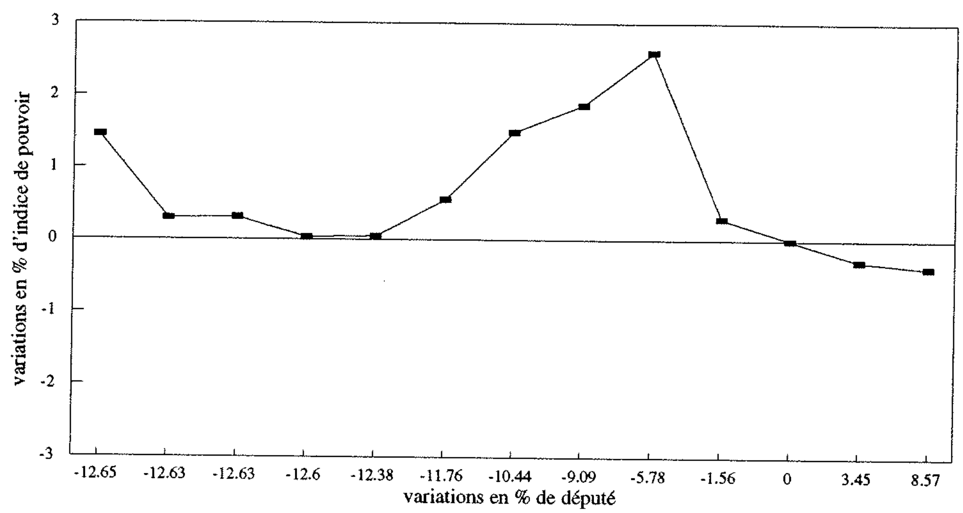
ANNEXE II

Tableau 1: INDICES DE POUVOIR DES PROVINCES CANADIENNES ET VARIATIONS

PROVINCES	ACTUELLEMENT	CHARLOTTETOWN		VARIATIONS	
	Indice de pouvoir I1	Indice de pouvoir I2	Indice de pouvoir	% de députés	% de sénateurs
ONTARIO	33.1	22.3	-0.29	3.45	-58.1
QUEBEC	23.2	14.4	-0.38	8.57	-58.1
ALBERTA	7	9.2	2.6	-5.78	67.6
MANITOBA	4.9	7	0.31	-12.63	67.6
SASKATCHEWAN	4.9	7	0.3	-12.63	67.6
COLOMBIE BRITANNIQUE	8.8	11.4	0.3	-1.56	67.6
NOUVELLE ECOSSE	6.2	6.4	0.032	-12.6	0.62
NOUVEAU BRUNSWICK	6.1	6.3	0.05	-12.38	0.62
PRINCE EDOUARD	2.2	5.4	0.56	-11.76	151
TERRE-NEUVE	3.7	5.8	1.45	-12.65	67.6
TERRITOIRES DU N.O	1	2.5	1.5	-10.44	71.9
YUKON	0.8	2.3	1.87	-9.09	71.9
TOTAL	100	100	8.3	-89.5	517.84

Tableau 2: INDICES DE POUVOIR DES PROVINCES CANADIENNES ET VARIATIONS

LIEN ENTRE LES VARIATIONS EN INDICE DE POUVOIR ET EN % [E DEPUTES



LIEN ENTRE LES VARIATIONS EN INDICE DE POUVOIR ET EN % DE SENATEURS

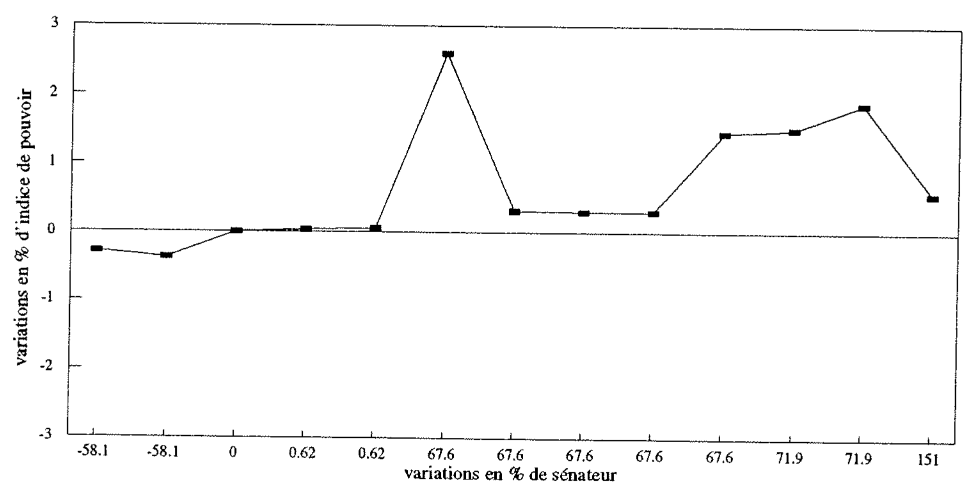


Tableau 3: REPARTITION DU POUVOIR SUR CHACUNE DES PROVINCES

Valeur de Shapley

PROVINCES	% province	% Indice 1	% Indice 2	% cumulé province	% cumulé Indice 1	% cumulé Indice 2
	0	0	0	0	0	0
YUKON	8.33	0.8	2.3	8.33	0.8	2.3
TERRITOIRES DU N.O	8.33	1	2.5	16.66	1.8	4.8
PRINCE EDOUARD	8.33	2.2	5.4	24.99	4	10.2
TERRE-NEUVE	8.33	3.7	5.8	33.32	7.7	16
NOUVEAU BRUNSWICK	8.33	4.9	6.3	41.65	12.6	22.3
NOUVELLE ECOSSE	8.33	4.9	6.4	49.98	17.5	28.7
SASKATCHEWAN	8.33	6	7	58.31	23.5	35.7
MANITOBA	8.33	6.2	7	66.64	29.7	42.7
ALBERTA	8.34	7	9.2	74.98	36.7	51.9
COLOMBIE BRITANNIQUE	8.34	8.8	11.4	83.32	45.5	63.3
QUEBEC	8.34	23.2	14.4	91.66	68.7	77.7
ONTARIO	8.34	31.3	22.3	100	100	100
TOTAL	100	100	100			

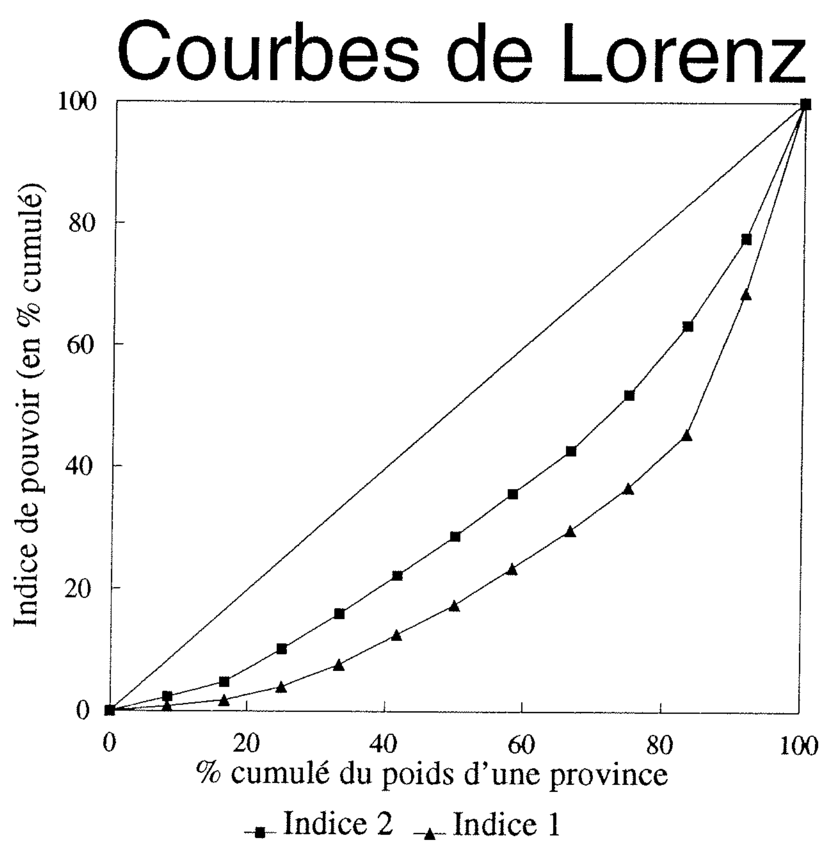
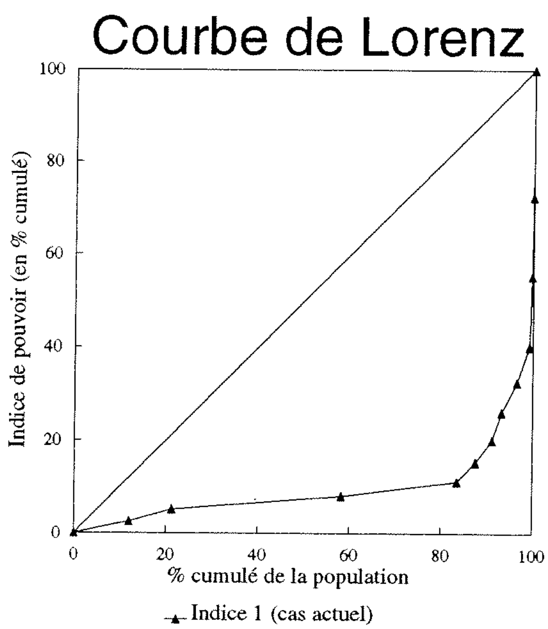


Tableau 4:REPARTITION DU POUVOIR SUR LA POPULATION DU CANADA

prov	% ordre 1 population	% par ind Indice 1	prov	% ordre 2 population	% par ind Indice 2	% cumulé population	% cumule population	% cumulé Ind 1/tête	% cumulé Ind 2/tête
	0	0			0	0	0	0	0
cb	12	2.51	q	25.3	0.93	12	25.3	2.51	0.93
a	9.3	2.6	o	36.9	1	21.3	62.2	5.11	1.93
o	36.9	2.9	cb	12	1.6	58.2	74.2	8.01	3.53
q	25.3	3.13	a	9.3	1.63	83.5	83.5	11.14	5.16
m	4	4.2	m	4	2.91	87.5	87.5	15.34	8.07
sas	3.6	4.69	ne	3.3	3.21	91.1	90.8	20.03	11.28
tn	2.1	6.05	sas	3.6	3.22	93.2	94.4	26.08	14.5
ne	3.3	6.43	nb	2.7	3.87	96.5	97.1	32.51	18.37
nb	2.7	7.63	tn	2.1	4.6	99.2	99.2	40.14	22.97
pe	0.5	15.14	pe	0.5	17.97	99.7	99.7	55.28	40.94
tno	0.2	17.2	tno	0.2	20.8	99.9	99.9	72.48	61.74
y	0.1	27.52	y	0.1	38.26	100	100	100	100
TOTAL	100	100	TOTAL	100	100				



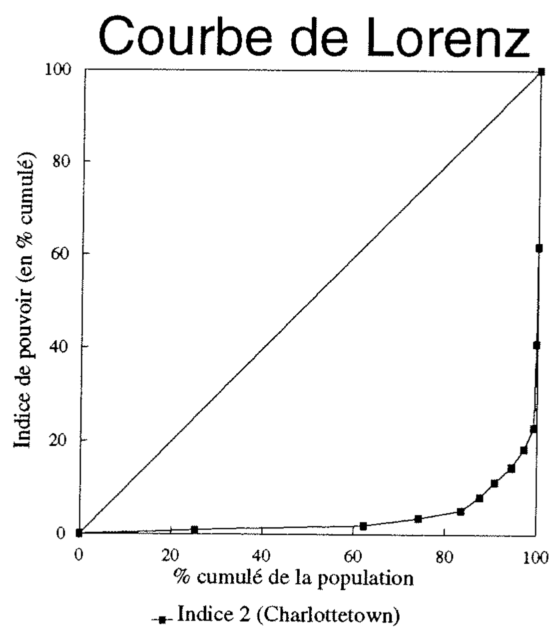


Tableau 5: RELATION ENTRE LE POUVOIR DES PROVINCES ET LEUR POIDS ECONOMIQUE

PROVINCES	% PIB	% Indice 1	% Indice 2
	0	0	0
YUKON	0.2	0.8	2.3
PRINCE EDOUARD	0.26	6	6.3
TERRITOIRES DU N.O	0.34	1	2.5
TERRE-NEUVE	1.2	6.2	6.4
NOUVEAU BRUNSWICK	1.98	2.2	5.4
NOUVELLE ECOSSE	2.2	3.7	5.8
MANITOBA	3.15	4.9	7
SASKATCHEWAN	4.19	7	9.2
COLOMBIE BRITANNIQUE	10.39	8.8	11.4
ALBERTA	14.97	4.9	7
QUEBEC	22.15	23.2	14.4
ONTARIO	38.97	31.3	22.3
TOTAL	100	100	100

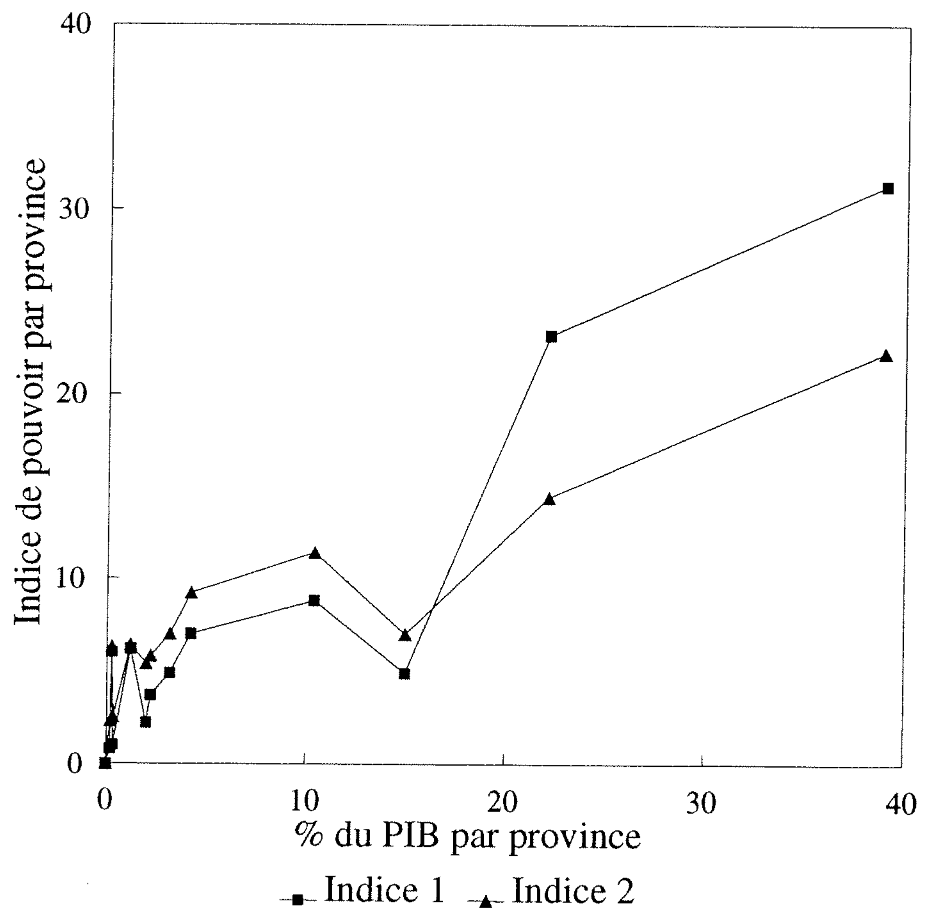


Tableau 6: COMPARAISON DES INDICES DE SHAPLEY ET BANZHAF PAR RAPPORT AU SYSTE

Numéros	Provinces	Indice de Shapley	Indice de Banzhaf
1	O	31.3	29.1
2	Q	23.2	21.2
3	A	7	7.4
4	M	4.9	5.1
5	S	4.9	5.1
6	C.B	8.8	8.8
7	N.E	6.2	7.2
8	N.B	6	7
9	P.E	2.2	2.7
10	T.N	3.7	4.2
11	T.N.O	1	1.2
12	Y	0.8	1

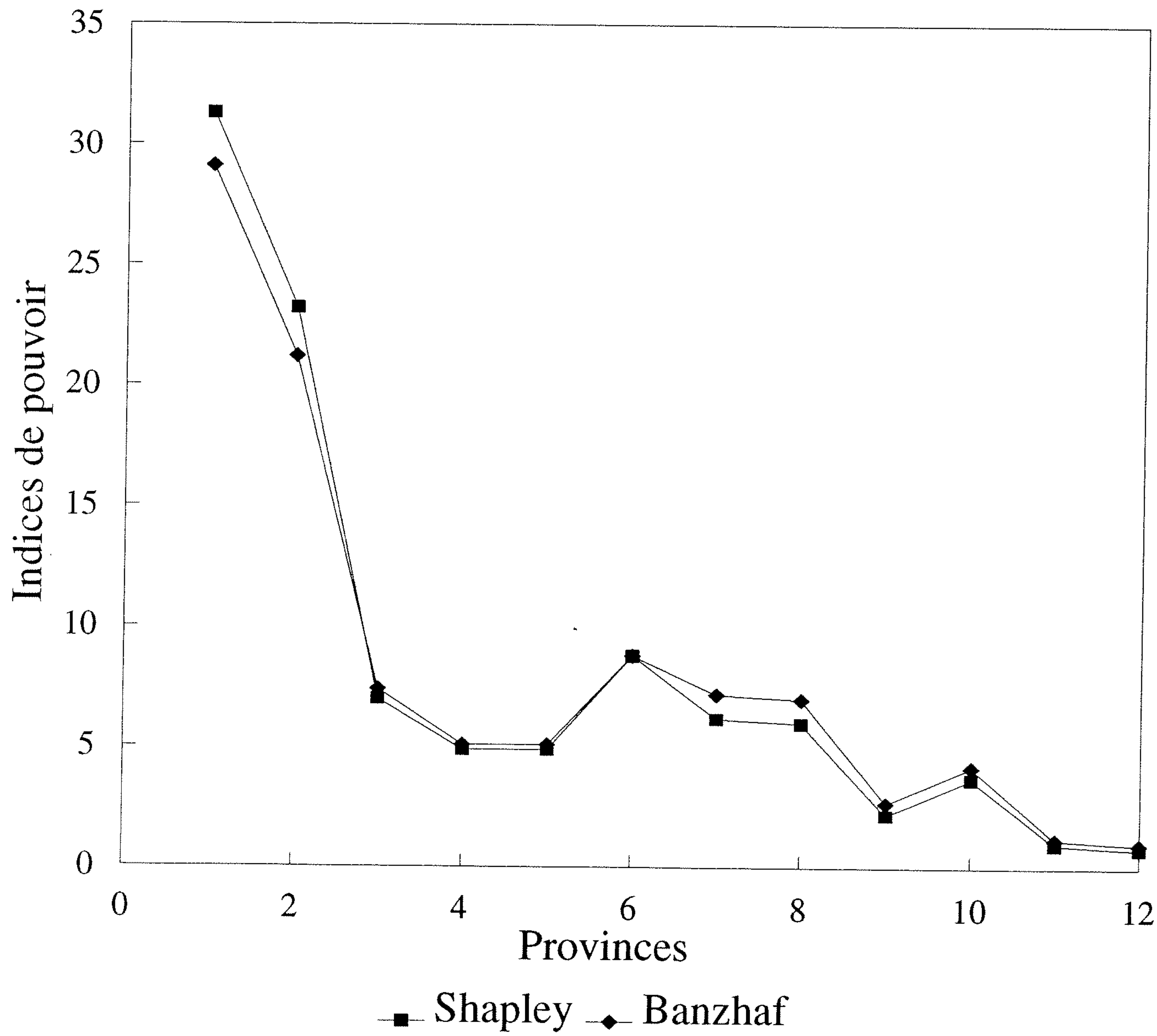


Tableau 7 : REPARTITION DU POUVOIR SUR CHACUNE DES PROVINCES

Indice de Banzhaf

PROVINCES	% population	% Indice 1	% Indice 2	% cumulé population	% cumulé Indice 1	% cumulé Indice 2
	0	0	0	0	0	0
YUKON	8.33	1	2.8	8.33	1	2.8
TERRITOIRES DU N.O	8.33	1.2	2.9	16.66	2.2	5.7
PRINCE EDOUARD	8.33	4.2	6.7	24.99	6.4	12.4
TERRE-NEUVE	8.33	2.7	6.3	33.32	9.1	18.7
NOUVEAU BRUNSWICK	8.33	7	7.2	41.65	16.1	25.9
NOUVELLE ECOSSE	8.33	7.2	7.3	49.98	23.3	33.2
SASKATCHEWAN	8.33	5.1	7.5	58.31	28.4	40.7
MANITOBA	8.33	5.1	7.5	66.64	33.5	48.2
ALBERTA	8.34	7.4	9.7	74.98	40.9	57.9
COLOMBIE BRITANNIQUE	8.34	8.8	11.3	83.32	49.7	69.2
QUEBEC	8.34	21.2	12.1	91.66	70.9	81.3
ONTARIO	8.34	29.1	18.7	100	100	100
TOTAL	100	100	100			

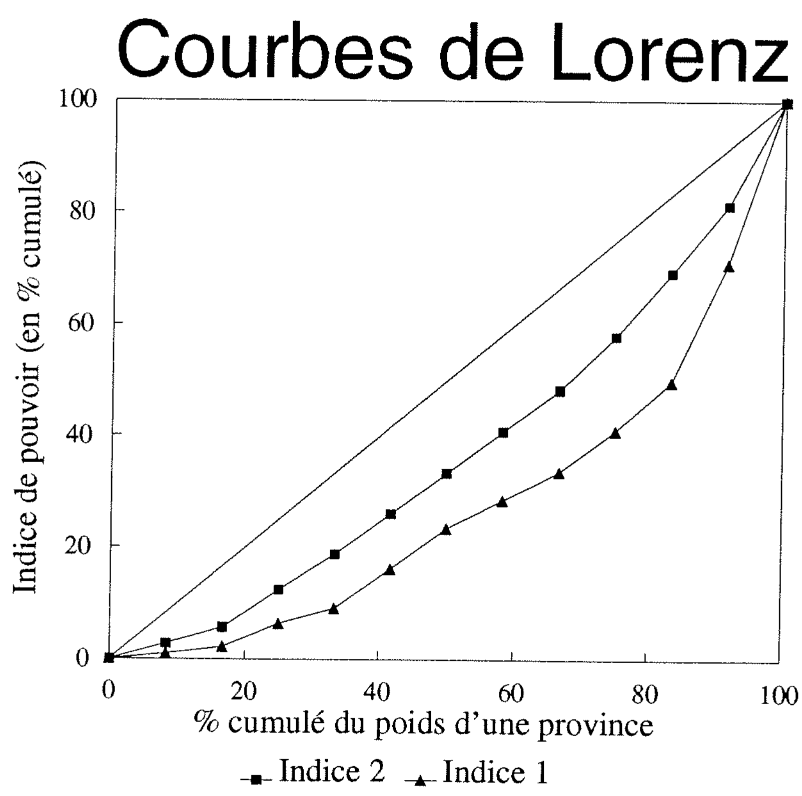


Tableau 8: RESULTATS PAR PROVINCES DU REFERUNDUM DE CHARLOTTETOWN

PROVINCES	OUI	NON
ONTARIO	49.8	49.6
QUEBEC	42.4	55.4
ALBERTA	39.6	60.2
MANITOBA	37.9	61.7
SASKATCHEWAN	45.5	55.1
COLOMBIE BRITANNIQUE	31.9	67.8
NOUVELLE ECOSSE	48.5	51.1
NOUVEAU BRUNSWICK	61.3	38
PRINCE EDOUARD	73.6	25.9
TERRE-NEUVE	62.9	36.5
TERRITOIRES DU N.O	60.2	39
YUKON	43.4	56.1
CANADA	44.8	54.2

Tableau 9: LIEN ENTRE LES VARIATIONS D'INDICE DE POUVOIDES PROVINCES ET LEUR VOTE AU REFERUNDUM

PROVINCES EN FAVEUR DE CHARLOTTETOWN	VARIATIONS DE POUVOIR	% DE OUI
COLOMBIE BRITANNIQUE	0.3	31.9
MANITOBA	0.31	37.9
ALBERTA	2.6	39.6
QUEBEC	-0.38	42.4
YUKON	1.87	43.4
SASKATCHEWAN	0.3	45.5
NOUVELLE ECOSSE	0.032	48.5
ONTARIO	-0.29	49.8
TERRITOIRES DU N.O	1.5	60.2
NOUVEAU BRUNSWICK	0.05	61.3
TERRE-NEUVE	1.45	62.9
PRINCE EDOUARD	0.56	73.6
TOTAL	8.3	44.8