Banque Laurentienne du Canada
Université de Montréal - Faculté des Arts et des Sciences

La Valeur exposée au Risque à long terme, appliquée au Risque de Marché

Rapport de Stage pour l'obtention du Grade de Maître es Sciences (M.Sc.)
en Finance Mathématique et Computationnelle.

Présenté par :

Bertille Antoine

Sous la responsabilité de
Philippe Zaugg

&

Sous la direction de
Nour Meddahi

Septembre 2002, Montréal

Avant-propos

Le présent stage a été effectué du 15 Mai 2002 au 15 Septembre 2002 dans le département ″Intégration des risques et Gestion du risque opérationnel″ de la Banque Laurentienne du Canada à Montréal, sous la responsabilité de Philippe Zaugg, Ph.D., Directeur, Méthodologie du risque, Intégration des risques et Gestion du risque opérationnel, Banque Laurentienne et sous la direction de Nour Meddahi, Ph.D., Professeur adjoint, Université de Montréal, Chercheur, CIREQ-CRDE et CIRANO.

Je tiens à remercier vivement les personnes suivantes, sans lesquelles ce projet n'aurait pu voir le jour :

- Philippe Zaugg pour son accompagnement constant, ses conseils avisés et ses encouragements permanents,
- René Garcia qui a rendu ce stage possible,
- L'ensemble du personnel du département ″Intégration des risques et Gestion du risque opérationnel″ de la Banque Laurentienne et plus particulièrement Alicia Zemanek pour son accueil et son dynamisme, Gaëtane Roy pour sa disponibilité et sa gentillesse ainsi que Adèle Laroche, Christian Rhéaume et Samir Ben Takaya pour leur sympathie,
- Les professeurs des départements de Sciences Économiques, de Mathématiques et de Statistique et d'Informatique et de Recherche Opérationnelle de l'Université de Montréal pour leur enseignement et plus particulièrement Nour Meddahi pour ses conseils théoriques et Éric Renault sans qui mon aventure canadienne n'aurait pas existée,
- Enfin, tous ceux qui liront ce document et voudront bien me faire part de leurs commentaires et suggestions.

Sommaire

Introduction

Ces dernières années, le domaine de la gestion des risques a connu de profondes mutations. En effet, après les nombreux scandales financiers du début des années 90, principalement dus à de mauvaises supervision et gestion des risques financiers - citons Orange County, Barings et Metallgesellschaft pour les plus connus - de nouvelles méthodes d'évaluation des risques financiers ont pris naissance.

La Valeur exposée au Risque, plus communément appelée VaR (Value-at-Risk) est une des méthodes de mesure de risque financier les plus populaires ; et peut-être faudrait-il dire "La Méthode"... Elle utilise des techniques statistiques standard, habituellement appliquées dans d'autres domaines et mesure, formellement, la pire perte attendue sur un horizon donné pour des conditions normales de marché et pour un niveau de confiance donné. En d'autres mots, la VaR résume en un seul nombre l'exposition au risque de marché de la Banque et ce en unités monétaires, disons en dollars. Contrairement aux mesures de risque traditionnelles, la VaR offre donc une vision agrégée et compréhensible du risque financier. Ces avantages importants expliquent en partie son succès.

Depuis le début de l'introduction de la méthodologie de la VaR, son utilisation a beaucoup évolué, devenant de plus en plus active :

- Une utilisation passive, la collecte d'informations :

La première application de la VaR était de mesurer le risque agrégé. Ainsi, elle pouvait être utilisée pour informer les cadres supérieurs des risques encourus lors de certaines opérations d'échange ou d'investissement. De plus, c'était aussi une manière compréhensible de communiquer les risques financiers d'une corporation à ses actionnaires.

- Une utilisation défensive, le contrôle du risque :

L'étape suivante a été d'utiliser la VaR pour déterminer des limites dans les positions des arbitragistes et des lignes d'affaire. L'avantage de la VaR est qu'elle permet de créer un dénominateur commun grâce auquel les activités risquées dans les différents marchés peuvent être comparées directement.

- Une utilisation active, la gestion du risque :

Actuellement, la VaR est de plus en plus utilisée pour répartir le capital de l'institution entre les différentes lignes d'affaire, entre les différents produits et parfois même au sein de l'institution toute entière. Ce processus d'allocation commence par un ajustement des revenus au risque : les méthodes de performance ajustée au risque visent à éviter la prise de risques superflus et permettent de guider l'institution en vue de l'obtention d'un meilleur profil rendement/risque.
La méthodologie de VaR peut également assister les gestionnaires de portefeuille dans leurs prises de décisions en offrant une vision compréhensible et immédiate de l'impact d'une décision particulière sur le risque global du portefeuille.

La VaR a donc été majoritairement adoptée par des institutions dans le monde entier, comme les institutions financières, les régulateurs, les corporations non-financières et les gestionnaires de capital.

Nous nous intéressons ici au risque de marché et, plus précisément, au calcul du Capital Économique. Ce capital permet de se couvrir contre le risque de marché et est prédit sur un horizon d'un an. Dans le cadre du risque de marché, cet horizon constitue une période relativement longue (peut-être même trop longue) compte-tenu de la dynamique et de la réactivité du portefeuille de marché. Il s'agit donc de trouver un moyen d'incorporer cette dynamique dans le calcul du capital.

Cette question constitue un problème important auquel fait face la majorité, si ce ne sont toutes les institutions financières. Actuellement, aucune méthode n'a fait la preuve de sa supériorité tant au niveau de sa performance que de son exactitude. Cela tient au fait qu'il est quelque peu maladroit de vouloir relier le calcul d'un capital protectif à horizon d'un an pour le risque de marché alors que toutes les méthodes de mesure et de contrôle de ce risque, notamment par le biais du calcul de la VaR de marché, sont développées à très court terme, typiquement un jour. Notons également que la validation de ces méthodes sur des données réelles est très difficile.

Nous comparons ici plusieurs méthodes d'évaluation du Capital. Économique dans le cadre très simplifié d'une simulation Monte-Carlo de portefeuilles composés de quelques actifs linéaires. Nous considérons plusieurs règles d'allocation parmi ces actifs afin d'introduire une dynamique dans ces portefeuilles et de tenter de mesurer ses effets.

Le présent rapport est divisé en quatre parties principales. Dans la première, nous présentons la construction de la distribution de perte de la Banque, composante essentielle dans la détermination du Capital Économique de cette dernière. Ensuite, la deuxième partie est consacrée à une définition détaillée de la VaR ainsi qu'au choix des paramètres qui s'y rattachent. La troisième partie présente quant à elle les principales méthodes utilisées pour le calcul de la VaR. Enfin, la dernière partie constitue une mise en pratique de ce qui a été développé précédemment et vise à comparer le Capital Économique obtenu selon diverses méthodes et hypothèses.

I- Cadre général et Calcul du Capital Économique

De manière générale, une Banque, tout comme une entreprise, possède un certain montant de capital pour absorber d'éventuelles pertes importantes et assurer la continuité de son activité. Le niveau de ce capital dépend de l'amplitude des fluctuations des revenus et des dépenses de l'institution, ainsi que du niveau de protection désiré.

Pour une Banque, il existe trois types de capital distincts :

- Le **Capital au livre**, mesuré à partir des rapports comptables, correspond principalement à la différence entre l'Actif et le Passif.

- Le **Capital Réglementaire** se compose d'une partie de crédit et d'une partie de marché. Ce capital, imposé de manière générale par les autorités réglementaires, est un indicateur grossier et peu sensible au risque. Par exemple, pour un prêt commercial, le Capital Réglementaire représente indifféremment *8%* du solde, quelle que soit la qualité de la contrepartie.

- Le **Capital Économique**, estimé à partir d'une description détaillée des activités de la Banque, est assez sensible au risque. Chaque activité qui génère du revenu est, généralement, exposée à un risque. Le principe est donc de développer les activités dans lesquelles les revenus par unité de Capital Économique consommée sont les plus élevés. Ce concept est appelé RAROC, *Risk-Adjusted Return On Capital.*

Le calcul du Capital Économique nous occupe plus directement ici et l'on cherchera par la suite à le mettre en relation avec le Capital Réglementaire.

1/ Quelques notions préliminaires

Le Capital Économique est relié à la perte maximale que la Banque est susceptible de tolérer avec une certaine probabilité d'occurrence. Nous commençons tout d'abord par définir quelques notions préliminaires, qui seront utiles pour la détermination de ce Capital Économique. Le lecteur pourra se reporter à la figure 1.

Le **degré de solvabilité** représente la probabilité d'occurrence précédente et s'exprime par la cotation de la dette externe de la Banque. Par exemple, la cote A-, qui est actuellement attribuée à la Banque Laurentienne du Canada (BLC), correspond à une probabilité de défaut de *0.09%* : on s'attend donc à ce que la BLC fasse défaut, c'est-à-dire soit en faillite, environ une fois tous les mille ans.

La **distribution de perte** attribue à chaque perte une probabilité de réalisation. L'horizon standard utilisé est d'un an.

L'**Expected Loss** est la moyenne de la perte annuelle.

L'**Unexpected Loss** mesure les fluctuations de la perte annuelle autour de sa moyenne (soit la volatilité).

La **perte maximale tolérable** est la perte maximale que la Banque peut supporter avec une probabilité égale au degré de solvabilité.

Le **Capital Économique** sert de protection contre les fluctuations de pertes extrêmes. Il s'agit donc de la différence entre la perte maximale tolérable et l'Expected Loss.

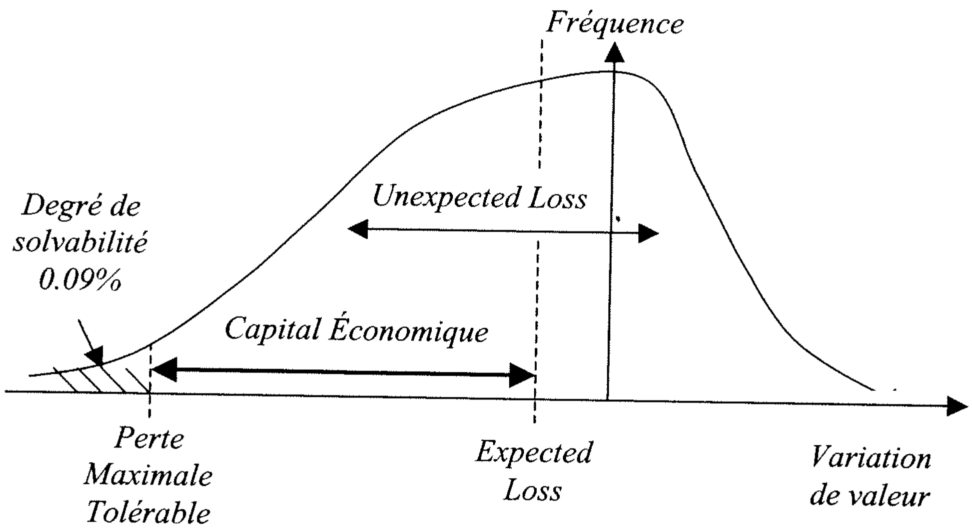


Figure 1: *Distribution de perte de la Banque.*

2/ Construction de la distribution de perte

Pour pouvoir déterminer le Capital Économique, il faut commencer par évaluer la distribution de perte totale de la Banque sur un horizon d'un an. En pratique, cette opération est assez complexe dans la mesure où il existe plusieurs types de risque qu'il s'agit de pouvoir intégrer.

a/ Identification et définition des différents types de risque

On distingue principalement trois types de risque auxquels la Banque doit faire face.

- Le risque de crédit

Le risque de crédit est le risque d'une perte économique provenant du défaut d'une contrepartie à honorer ses obligations contractuelles. Son effet est mesuré par le coût de remplacement des flux de capitaux si la contrepartie adverse fait défaut.

Le risque de crédit prend en compte la possibilité de non-paiement soit dans une obligation future ou soit pendant une transaction. Il est donc présent dans toutes les activités de prêt et inclut également le risque de contrepartie.

- Le risque de marché

Le risque de marché est le risque de fluctuations dans les valeurs du portefeuille dues aux mouvements dans le niveau ou la volatilité des prix du marché. Il peut être attribué à différentes variables de risque ; parmi les plus importantes, figurent les devises, *fixed-income*, actions et *commodities*. De plus, pour une Banque dont l'activité comprend des dépôts et des prêts, le risque de taux d'intérêt, ou appariement, est important.

Par ailleurs, le risque de liquidité est habituellement perçu comme une composante du risque de marché. Le manque de liquidité peut causer le défaut d'une institution, même si elle est techniquement solvable. Cependant, ce dernier est moins propice aux analyses formelles que le risque de marché traditionnel.

Le risque de marché est également présent dans toutes les transactions financières ainsi que dans les activités de gestion, telle la gestion de fonds mutuels, ainsi que dans les activités de courtage.

- Le risque opérationnel

Contrairement aux risques de crédit et de marché, il n'y a pas, actuellement, de définition universelle du risque opérationnel. Cependant, il est toujours reconnu que ce dernier ne doit pas inclure les facteurs de risques qui sous-tendent les risques de crédit et de marché.

Entre deux définitions extrêmes, l'une trop peu contraignante « tout ce qui n'est pas risque de crédit ou de marché » et l'autre trop restrictive « ce qui provient des opérations », une définition intermédiaire semble être de plus en plus reconnue : « risque de perte directe ou indirecte provenant de l'inadéquation ou du défaut de processus internes, de personnes et de systèmes ou encore d'évènements externes ».[1]

b/ Construction de la distribution de perte globale de la Banque

Pour chaque type de risque précédemment défini, il convient d'établir un modèle permettant d'évaluer la distribution de perte du dit risque. On obtient alors trois distributions de risque distinctes qu'il s'agit ensuite d'agréger en tenant compte de l'existence de corrélations entre ces distributions.

Il existe différentes méthodes pour effectuer cette agrégation et estimer les corrélations : par exemple, le logiciel actuellement implanté réalise une agrégation numérique par l'intermédiaire d'un copule gaussien, en estimant directement les corrélations existant entre les différents risques.

Le Capital Économique diversifié peut alors être déterminé à partir de cette distribution agrégée. Comme il existe un modèle (et donc une distribution) par type de risque, on peut déterminer un Capital Économique pour chacun des trois risques, indépendamment des autres. La somme de ces capitaux fournit alors le Capital Économique non diversifié de la Banque. Ce dernier est généralement trop conservateur car il ne tient pas compte des corrélations existant entre les différents risques et ignore ainsi le bénéfice dû à la diversification : il sera donc supérieur au Capital Économique diversifié.

[1] Récemment, un ensemble de définitions du risque opérationnel a été adopté par la British Bankers' Association et par Basel II.

c/ Allocation de capital

Lorsque le Capital Économique diversifié est déterminé, ce dernier est réalloué dans les différentes activités de la Banque, puis dans les sous-activités, de sorte que les relations suivantes soient satisfaites :

$$EC_{div} = \sum_i EC_{div}(r_i) \quad \textit{avec } r_i \textit{ qui représente le risque de type i}$$

$$\textit{et} \quad EC_{div}(r_i) \leq EC_{non\ div}\ (r_i)$$

Nous avons précédemment défini les risques de crédit, de marché et opérationnel. Dans chaque cas, la distribution des profits et pertes fournit des informations essentielles. Ainsi, d'une part, l'Expected Loss est une mesure des réserves nécessaires pour se prémunir contre des pertes futures et, d'autre part, l'Unexpected Loss est une mesure de la volatilité des pertes autour de l'Expected Loss, qui intervient dans la mesure du montant de Capital Économique requis pour supporter le risque financier de la Banque. Ce capital, également appelé capital de risque (Risk Capital) correspond typiquement à une mesure de la valeur exposée au risque, ou VaR.

À partir de ces informations, les institutions sont à même de prendre des décisions concernant leurs lignes d'affaire. Chaque activité doit fournir un profit suffisant pour compenser les risques encourus. Ainsi, l'évaluation doit tenir compte non seulement des pertes attendues, mais aussi de la rémunération du capital de risque. Ce principe est l'essence de la mesure du Risk Adjusted Return On Capital (RAROC), son principal objectif étant d'établir des références pour évaluer le rendement des lignes d'affaire.

3/ Calcul du Capital Réglementaire

La détermination et la publication du Capital Réglementaire sont nécessaires pour une Banque. Et, même si cette dernière dispose d'une certaine flexibilité, le calcul de ce capital est soumis à certaines exigences standards imposées par le BIS, *Bank for International Settlements* : les principales sont rappelées dans la suite.

De manière littérale, le Capital Réglementaire s'obtient en déterminant le maximum entre 1) la VaR de la veille calculée sur un horizon de dix jours avec un niveau de confiance de *99%* et 2) la moyenne des 60 dernières VaR calculées selon les mêmes critères et multipliée par un facteur de protection noté k.[2]

Soit, de manière plus formelle :

$$RC_t = Max\left[\frac{k}{60}\sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}(10\,jours, 0.99)\,,\, VaR_{t-1}(10\,jours, 0.99)\right]$$

Le facteur multiplicatif k a une valeur minimale de trois. Cependant, des pénalités peuvent être imposées si les modèles d'évaluation du risque sont jugés inadaptés ou inefficaces par le BIS : dans ce cas, le facteur peut atteindre la valeur quatre.

[2] Voir Partie II, Théorie générale de la VaR.

La VaR doit être calculée sur un horizon de dix jours au niveau de confiance de *99%*. Cependant, pour obtenir cette valeur, la Banque est autorisée à appliquer la règle d'échelle consistant à multiplier la VaR journalière par la racine carrée de la période désirée. Ainsi, dans le cas présent, nous avons :

$$VaR_t(10\,jours, 0.99) = \sqrt{10}\ VaR_t(1\,jour, 0.99)$$

Les données historiques utilisées pour le calcul de la VaR doivent être d'une durée minimale d'une année. Et, de plus, ces ensembles de données doivent être mis à jour au moins une fois tous les trois mois et de manière systématique si des changements notables interviennent dans les prix du marché.

Enfin, le choix du modèle permettant de calculer la VaR est laissé à l'appréciation des institutions financières : les modèles de Variance/Covariance, de simulation historique et de simulation Monte-Carlo étant toutefois les plus utilisés[3].

[3] Voir Partie III, Méthodes de calcul de la VaR.

II- Théorie générale de la VaR

1/ Définition et calcul de la VaR

La valeur exposée au risque, plus communément appelée Value-at-Risk (VaR dans la suite), est la perte maximale attendue, ou encore la pire perte attendue, sur un horizon de temps fixé noté Δt, étant donné un niveau de confiance noté c. Le principal avantage de cette mesure est qu'elle permet de résumer en un seul nombre le risque encouru par une institution soumise aux risques des marchés financiers; cette propriété explique en partie son succès.

Deux hypothèses sont nécessaires pour pouvoir effectuer un calcul de VaR. On suppose tout d'abord que le portefeuille (ou plus généralement les positions) est gelé pendant toute la durée Δt fixée; il s'agit donc ici de supposer que le profil de risque de la compagnie ne change pas durant cet intervalle de temps. Ensuite, on suppose également qu'à la fin de l'horizon, le portefeuille sera encore évalué à la valeur du marché, soit *marked-to-market.*

Commençons par un exemple simple de calcul d'une VaR paramétrique. On distingue cinq étapes principales successives : il faut tout d'abord connaître la valeur *marked-to-market* du portefeuille courant (par exemple 100 millions de dollars); ensuite, il faut déterminer les facteurs de risque pertinents et mesurer leur variabilité (par exemple le taux de change USD/DM avec une variabilité de *15%* par an); puis il faut choisir, d'une part, l'horizon de temps (par exemple 1 jour sur les 250 ouvrables que compte une année) et, d'autre part, le niveau de confiance (par exemple *99%*); enfin, la VaR peut être calculée et reportée, en utilisant toutes les données précédentes.

Dans notre exemple, en supposant que la distribution des revenus est une loi normale de moyenne nulle, le quantile correspondant à un niveau de confiance c de *99%* est égal à 2.33, ce qui nous donne une VaR de 2.2 millions de dollars :

$$VaR(1jour, 0.99) = 100 * 0.15 * \sqrt{1/250} * 2.33 = 2.21$$

Une VaR égale à 2.2 millions de dollars signifie qu'en moyenne, la perte journalière réalisée dépassera la valeur seuil de 2.2 une fois sur cent, soit entre deux et trois fois par année.

Même si la distribution de probabilité d'un portefeuille bien diversifié se rapproche d'une distribution gaussienne, il est possible que celle-ci ne soit pas vraiment adaptée (présence de queues de distribution épaisses notamment), du fait par exemple de la présence de produits dérivés, qui peuvent entraîner des divergences significatives par rapport à une distribution normale.

En général, pour des distributions de probabilité plus complexes, on considère W_0, la valeur initiale du portefeuille et R son taux de rendement sur la période de longueur Δt. À la fin de la période, la valeur du portefeuille sera égale à $W_0(1+R)$. W^* est défini comme la valeur la plus basse du portefeuille au niveau de confiance c. W^* est donc le niveau de perte tel que la probabilité de dépasser ce niveau soit $(1-c)$: on reconnaît ici la définition de W^* en tant que quantile de la distribution de probabilité de la valeur future du portefeuille, notée *f(.)*, au niveau *(1-c)*.

$$1-c = P(w \leq W^*) = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)\,dw$$

La VaR de ce portefeuille est alors définie comme la perte en valeur, relativement à la moyenne, soit :

$$VaR(\Delta t, c) = EW - W^* \quad \textit{avec E l'opérateur d'espérance.}$$

Avec cette définition, on s'attend donc à ce que la VaR soit positive lorsque la moyenne est supérieure au quantile W^*, ce qui est généralement le cas.

Notons qu'il existe une autre convention pour définir la VaR : $VaR(\Delta t, c) = W_0 - W^*$. S'il est fréquent de supposer sur de petits horizons que $EW = W_0$, la différence devient cruciale à long terme.

2/ La VaR, une mesure de risque cohérente?

De manière générale, une mesure de risque est censée résumer la distribution complète des rendements d'un portefeuille en un seul nombre : les mesures de risque les plus communes sont par exemple la volatilité ou la VaR. Artzner et al. (1999) évoquent quatre propriétés qu'une mesure de risque est supposée vérifier dans le contexte de l'allocation de capital.

Dans la suite, la mesure de risque est notée ρ et la valeur du portefeuille i W_i.

- **Monotonie** : Si un portefeuille a des valeurs systématiquement (c'est-à-dire dans chaque état de la nature, ou du marché) plus faibles qu'un autre, alors son risque doit être plus élevé; soit de manière plus formelle,

$$W_i \leq W_j \Rightarrow \rho(W_i) \geq \rho(W_j)$$

- **Invariance par translation** : L'addition d'un montant supplémentaire K de capital ou *cash* (mesuré en dollars) doit permettre la réduction du niveau de risque par K ; soit,

$$\rho(W_i + K) = \rho(W_i) - K$$

- **Homogénéité** : L'accroissement de la taille d'un portefeuille par un facteur b a simplement pour effet de multiplier le risque par ce même facteur b; soit,

$$\rho(bW_i) = b\rho(W_i)$$

- **Sous-additivité** : La mise en commun de plusieurs portefeuilles ne peut en aucun cas augmenter le risque; soit,

$$\rho\left(\sum_i W_i\right) \leq \sum_i \rho(W_i)$$

Il est possible de montrer que la VaR satisfait toutes les propriétés, exceptée la dernière. Nous nous contenterons ici de donner un contre-exemple de la propriété de sous-additivité.

Considérons un arbitragiste qui investit dans une obligation corporative dont la valeur faciale est de \$100,000 avec un coupon de \$500 dont la probabilité de défaut est égale à *0.5%*. L'investisseur peut faire face à deux situations entre la date de son investissement et la prochaine période : 1) avec une probabilité de *0.5%*, l'obligation fait défaut et la perte est de \$100,000 ; 2) avec une probabilité de *99.5%*, l'obligation ne fait pas défaut et l'investisseur reçoit le coupon. La valeur du portefeuille W_t évolue donc comme suit :

$$+\$100{,}000 \; \begin{array}{l} \xrightarrow{0.995} +\$100{,}500 \\ \xrightarrow[0.005]{} \$0 \end{array}$$

Comme la probabilité d'absence de défaut de l'obligation est supérieure à *99%*, le quantile calculé sur une période au niveau de confiance *99%* est égal à \$100,500 ; la VaR s'obtient donc en ajustant ce quantile avec la moyenne :

$$VaR(1\,jour, 0.99) = 0.995 * 100{,}500 - 100{,}500 = -\$502.5$$

Supposons que l'investisseur possède trois positions identiques, les VaR s'additionnent à -\$1507.5 :

$$VaR(W_x) + VaR(W_y) + VaR(W_z) = 3 * (-502.5) = -\$1{,}507.5$$

Mais ceci ne correspond pas à la VaR d'un portefeuille composé de ces trois positions : en supposant que les défauts sont deux à deux indépendants, le tableau suivant présente les valeurs possibles du portefeuille ainsi que leur probabilité :

État	**Probabilité**	**W**
Pas de défaut	0.985074575	\$301,500
1 défaut	0.014850375	\$201,000
2 défauts	$7.4625.10^{-5}$	\$100,500
3 défauts	$0.0125.10^{-5}$	\$0

Dans ce cas, la VaR du portefeuille global des trois positions est :

$$VaR(W_x + W_y + W_z) = 299{,}992.5 - 201{,}000 = \$98{,}992.5$$

Ainsi, on obtient finalement :

$$VaR(W_x) + VaR(W_y) + VaR(W_z) \leq VaR(W_x + W_y + W_z)$$

Cet exemple va donc à l'encontre du bénéfice de diversification dans la mesure où le risque est plus élevé avec le portefeuille agrégé. En admettant que cet exemple est un peu "arrangé" (notamment avec une distribution discrète et une moyenne inférieure au quantile), il montre néanmoins le danger de l'utilisation des quantiles de VaR traditionnels.

Notons toutefois qu'avec un portefeuille distribué selon une loi normale, la VaR satisfait la propriété de sous-additivité : cela tient au fait que la VaR est proportionnelle à la volatilité et que la volatilité du portefeuille est inférieure à la somme des volatilités :

$$\sigma\left(\sum_i W_i\right) \leq \sum_i \sigma(W_i)$$

Plus généralement, cette propriété tient avec des distributions elliptiques, c'est-à-dire celles pour lesquelles les lignes de niveau de même densité sont des ellipsoïdes.

Il existe une autre mesure de risque très proche de la VaR appelée **Shortfall Measure**, qui satisfait les quatre propriétés précédentes. Il s'agit en fait de la perte attendue moyenne, conditionnellement à un dépassement de la VaR, soit:

$$SM(W) = E[W] - E[W \mid W \leq W^*] \quad \textit{avec } E(.) \textit{ l'opérateur d'espérance}$$

Appliquons cette mesure de risque à notre exemple précédent.

$$SM(W) = 99{,}997.5 - E[W \mid W \leq 100{,}500] = \$99{,}997.5$$
$$\textit{et} \quad SM(W_x) + SM(W_y) + SM(W_z) = 3 * 99{,}997.5 = \$299{,}992.5$$

Pour le portefeuille global contenant les trois positions, on a :

$$SM(W_x + W_y + W_z) = E[Z] - E[Z \mid Z \leq -98{,}989.4] = 299{,}992.5 - 7.5 = \$299{,}985$$

Ainsi,

$$SM(W_x + W_y + W_z) \leq SM(W_x) + SM(W_y) + SM(W_z)$$

On remarque donc que cette mesure de risque satisfait bien la propriété de sous-additivité.

Ces deux mesures, la VaR et la SM, rendent transparentes la mesure du risque, une composante du processus de décision trop souvent ignorée, du fait de son caractère peu intuitif. Néanmoins, le grand avantage de la VaR est qu'elle est relativement aisée à calculer par rapport à la SM qui nécessite un nombre d'évènements suffisant dans la queue gauche de la distribution pour être efficace.

3/ Choix des facteurs quantitatifs

Dans la partie I, nous avons appris qu'il y avait deux facteurs à choisir avant de pouvoir calculer la VaR : l'horizon de temps, noté Δt et le niveau de confiance, noté c. En réalité, le choix de ces facteurs dépend essentiellement de l'utilisation de la VaR.

Considérons tout d'abord la VaR comme une mesure de référence. Autrement dit, la VaR est calculée simplement dans le but de comparer les niveaux de risque des différents marchés sur lesquels la compagnie est positionnée. Dans ce cas, les choix sont arbitraires et sont uniquement dictés par la logique et la cohérence.

La VaR peut ensuite être utilisée comme la mesure d'une perte potentielle. Dans ce cas, l'horizon peut être défini comme la période de liquidation : souvent, les banques de commerce utilisent une VaR journalière, du fait de la liquidité et de l'évolution rapide de leurs portefeuilles. En revanche, les banques d'investissement ont en général des portefeuilles moins liquides (composés de fonds de pension par exemple) et qui s'ajustent moins systématiquement au risque; l'horizon privilégié sera alors plutôt le mois. Le niveau de confiance est quant à lui relativement arbitraire. Il faut bien comprendre que la VaR est une mesure probabiliste qui donne, non pas un niveau de perte absolu mais plutôt un niveau de perte qui est susceptible d'être dépassé *(1-c)* fois sur cent. Par ailleurs, il est bien évident qu'un plus grand niveau de confiance conduit à une VaR plus élevée.

Enfin, la VaR peut être utilisée pour justifier des décisions relatives à l'allocation de capital. Dans une telle situation, le choix du niveau de confiance doit refléter le degré d'aversion pour le risque de l'institution, de même que le coût d'une perte éventuellement supérieure à la VaR. Ainsi, une grande aversion pour le risque, ou encore des coûts élevés, indique qu'un large montant de capital doit être mis en réserve pour couvrir les pertes possibles, entraînant alors un niveau de confiance élevé. En même temps, le choix d'un horizon de temps doit correspondre au temps nécessaire à la correction de situations dans lesquelles les pertes s'enchaînent; corrections qui peuvent alors prendre la forme d'une réduction du profil de risque de la compagnie, ou encore d'un provisionnement supplémentaire de capital. Ainsi, l'horizon est fréquemment d'un an, ce qui correspond à l'horizon de prévision du budget de l'institution.

III- Méthodes de Calcul de la VaR

Il existe essentiellement trois méthodes qui permettent de dériver la distribution des changements de valeur du portefeuille à horizon de temps désiré, encore appelée distribution de perte *forward* : l'approche analytique de Variance/Covariance, la simulation historique et la simulation Monte-Carlo. Ces trois méthodes possèdent les deux mêmes étapes préliminaires, la sélection des facteurs de risque puis le choix d'une méthode de modélisation de leurs changements.

- Sélection des facteurs de risque

Les changements de valeur du portefeuille proviennent des changements dans les facteurs de risque. Le choix des facteurs pertinents dépend d'une part de la composition du portefeuille et d'autre part du niveau de précision désiré.
Dans le cas d'instruments financiers simples, il est aisé de déterminer les facteurs de risque, mais cela devient vite complexe en présence d'instruments plus élaborés. L'exemple suivant compare les facteurs de risque d'un contrat forward USD/Euro et d'une option monétaire de type Call USD/Euro.

Contrat forward USD/Euro	**USD/Euro Call Option**
• Taux forward USD/Euro	• Taux de change USD/Euro • Taux d'intérêt du USD • Taux d'intérêt de l'Euro • Volatilité entre USD et Euro

- Choix d'une méthode de modélisation des changements des facteurs de risque

L'approche analytique suppose que les facteurs de risque suivent une distribution normale multivariée.
La simulation historique ne fait quant à elle aucune hypothèse sur les distributions qui sont obtenues à partir des données historiques : il est cependant préférable de disposer de trois années d'historique au moins pour obtenir des résultats cohérents.
Enfin, avec une simulation Monte-Carlo, n'importe quelle distribution analytique multivariée peut être choisie, pour peu que les paramètres de la distribution (moyenne, variance...) puissent être estimés.

1/ Méthode analytique de Variance/Covariance pour les portefeuilles linéaires

a/ Principe de la méthode

Cette méthode suppose que les rendements des facteurs de risque suivent une distribution normale; il est donc suffisant d'estimer leurs moyenne et matrice de Variance/Covariance sur l'horizon désiré. Cette hypothèse est particulièrement utile dans la mesure où un portefeuille composé uniquement d'actifs conjointement distribués selon une loi normale est lui-même normalement distribué. La mesure de la VaR sera donc aisée.

On considère la définition suivante du rendement du portefeuille, à partir des valeurs de ce dernier[4] :

$$R_{P,t+1} = \frac{W_{P,t+1} - W_{P,t}}{W_{P,t}}$$

Ainsi, le rendement du portefeuille peut aussi s'écrire à partir des rendements des actifs qui le composent :

$$R_{P,t+1} = \sum_{i=1}^{N} \varpi_{i,t} r_{i,t+1} = \varpi_t' R_{t+1}$$

où les proportions ϖ sont indexés par rapport au temps pour souligner la dynamique du portefeuille et l'indice i caractérise l'actif i.

Comme le rendement du portefeuille est une combinaison linéaire de variables normales, il s'agit également d'une variable normale. Sa variance s'exprime comme :

$$\sigma^2(R_{P,t+1}) = \varpi_t' \Sigma_{t+1} \varpi_t$$

où Σ est la matrice de Variance/Covariance des rendements des actifs estimée sur l'horizon d'intérêt de la VaR.

Généralement, la VaR doit être estimée sur des portefeuilles dynamiques complexes, c'est-à-dire des portefeuilles composés d'un grand nombre de positions qui ne sont pas toutes linéaires dans les facteurs de risque. La méthode Delta-Normale effectue donc les simplifications suivantes :

- Spécifier une liste restreinte des facteurs de risque.
- Projeter l'exposition linéaire du portefeuille sur les facteurs de risque.
- Agréger ces expositions pour tous les instruments financiers.
- Estimer la matrice de Variance/Covariance des facteurs de risque.
- Calculer le risque total du portefeuille.

Cette projection produit un ensemble d'expositions $x_{i,t}$ agrégées pour tous les instruments financiers, sur chacun des facteurs de risque et mesurées en unités de valeur (disons en dollars). La VaR du portefeuille en dollars s'exprime alors comme :

$$\begin{aligned}\$VaR_t &= -\alpha\,\sigma\,W_{P,t} \\ &= -\alpha\sqrt{\varpi_t' \Sigma_{t+1} \varpi_t}\, W_{P,t} \\ &= -\alpha\sqrt{X_t' \Sigma_{t+1} X_t}\end{aligned}$$

[4] Voir section IV-2/ b/ pour des développements plus détaillés.

avec α qui représente le quantile de la distribution normale au niveau *(1-c)*.

L'hypothèse implicite ici est que $EW_{t+1} = W_t$.

Pour cette classe de modèles, deux méthodes peuvent être utilisées pour mesurer la matrice de Variance/Covariance Σ. Elle peut être estimée uniquement à partir des données historiques ou, alternativement, à partir de mesures implicites du risque[5] ; une combinaison des deux techniques précédentes peut également être utilisée.

b/ Avantages

La méthode Delta-Normale est particulièrement facile à implémenter dans la mesure où elle ne nécessite qu'une simple multiplication matricielle. De plus, comme cette méthode remplace les positions par leurs expositions linéaires respectives, le calcul est donc très rapide même avec un portefeuille composé de nombreux actifs.

c/ Inconvénients

La méthode Delta-Normale peut être sujette à de nombreuses critiques. Tout d'abord, la plupart des rendements des actifs financiers possèdent des queues de distribution épaisses, ce qui rend caduque l'hypothèse de normalité. Par ailleurs, comme la VaR cherche à prédire le comportement du rendement du portefeuille dans la queue gauche de la distribution, l'hypothèse de normalité aura tendance à sous-estimer le risque réel.

Un autre problème survient lorsque le risque d'instruments non-linéaires par définition, comme les options et les hypothèques, est mesuré uniquement à partir de leurs composantes linéaires. Ainsi, les asymétries des distributions des options, par exemple, ne peuvent pas être capturées par cette méthode.

Notons toutefois que cette méthode peut être améliorée en ajoutant des termes supplémentaires dans le développement en série de Taylor. Par exemple, dans le cas d'une option sur un sous-jacent noté *S*, le développement de Taylor de la valeur de l'option au deuxième ordre sera :

$$\begin{aligned} dW &= \frac{\partial W}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} dS^2 \\ &= \Delta dS + \frac{1}{2} \Gamma dS^2 \end{aligned}$$

Et on retrouve ici les notations bien connues des dérivées d'ordre 1 et 2, Delta et Gamma.

[5] Des mesures implicites du risque peuvent être obtenues à partir des options: ces mesures sont généralement plus efficaces que celles calculées à partir des données historiques mais elles ne sont pas valides pour tous les types d'actifs.

2/ Simulation historique

a/ Principe de la méthode

Le principe de la méthode de simulation historique est simple : les changements dans les facteurs, observés sur l'horizon choisi, sont collectés pendant une période de temps fixée (en pratique de un à quatre ans) ; ensuite, le portefeuille est réévalué en fonction de ces changements. Cela signifie donc que les poids courants sont appliqués sur les rendements des 250 derniers jours (une année), par exemple.

$$R_{P,k} = \sum_{i=1}^{N} \varpi_{i,k} r_{i,k} \qquad k = 1,\cdots,T$$

Ce nouveau rendement, obtenu par calcul, ne représente pas un vrai rendement mais plutôt la construction d'une distribution du rendement du portefeuille sur l'horizon désiré à partir des données historiques et de la position courante.
Plus généralement, une réévaluation complète du portefeuille nécessite un ensemble complet de prix, telles les courbes *yields* et pas seulement les rendements. Les prix futurs hypothétiques pour le scénario k sont obtenus en appliquant les changements historiques des prix à leur niveau courant :

$$s^{*}_{i,k} = s_{i,0} + \Delta s_{i,k} \qquad i = 1,\ldots,N$$

La nouvelle valeur du portefeuille $W^{*}_{P,k}$ est alors calculée à partir de l'ensemble complet des prix hypothétiques, en ajoutant éventuellement des composantes non-linéaires $W^{*}_{P,k} = W(s^{*}_{i,k})$. Ceci permet ensuite de calculer le rendement hypothétique correspondant pour la simulation k :

$$R^{*}_{P,k} = \frac{W^{*}_{P,k} - W_{P,0}}{W_{P,0}}$$

La VaR est ensuite obtenue à partir de la distribution entière des rendements hypothétiques, dans laquelle chaque scénario historique possède le même poids.

Le principe de la méthode de simulation historique peut donc être résumé en trois étapes essentielles :

- Sélectionner un échantillon de facteurs de risque sur l'horizon désiré et sur une période de temps donnée (en général trois ans).
- Appliquer ces changements et réévaluer le portefeuille courant autant de fois que de jours dans l'échantillon.
- Construire l'histogramme des valeurs du portefeuille et identifier la VaR.

b/ Avantages

Cette méthode est relativement facile à implémenter si les données historiques ont été collectées chaque jour. Par ailleurs, cette méthode ne nécessite pas l'estimation de la matrice de Variance/Covariance, qu'il peut être coûteux d'obtenir dans le cas de portefeuilles composés d'un grand nombre d'actifs ; seules les séries temporelles des rendements de chacun des actifs sont requises. Par ailleurs, en se basant sur de véritables prix, cette méthode permet l'utilisation de distribution non normales et de relations non-linéaires ; de plus, elle capture naturellement les risques de types Gamma et Véga[6] ainsi que les corrélations.

Enfin, cette méthode intuitive, qui n'est pas sujette au risque de modélisation des facteurs, est probablement la plus utilisée pour calculer la VaR.

c/ Inconvénients

L'inconvénient le plus important est certainement le fait de supposer que le nombre de données historiques de prix est suffisant : par exemple pour obtenir mille simulations indépendantes des changements de valeur du portefeuille à un jour, quatre années de données sont nécessaires.

Par ailleurs, il n'y a qu'une seule trajectoire qui soit utilisée : l'hypothèse étant que le passé est une bonne représentation du futur immédiat. Cependant, si la fenêtre de données omet des évènements importants, les queues de distribution ne seront pas très représentatives, de même si la fenêtre contient des évènements extrêmes qui ne réapparaîtront pas dans le futur. La méthode de simulation historique simple présentée précédemment ne permet pas de réagir à des situations temporairement inhabituelles (par exemple des volatilités temporairement élevées) : la méthode sera lente à incorporer les ruptures structurelles, prises en compte plus facilement avec une méthode analytique.[7]

Une autre critique provient du fait que toutes les données de l'échantillon possèdent le même poids pour le calcul du risque. Des méthodes alternatives proposent de faire varier les poids en fonction des observations.[8]

Enfin, cette méthode de réévaluation complète devient rapidement insurmontable en présence de portefeuilles à structure complexe contenant de nombreux actifs. Des méthodes de simplifications consistent à regrouper des actifs ou encore à remplacer les actifs par leur équivalent Delta. Toutefois, un nombre trop important de simplifications peut annihiler le bénéfice d'une réévaluation systématique complète du portefeuille.

---

[6] Le risque Véga est le risque provenant des changements dans la volatilité.
[7] Voir Hull and White (1998) pour une méthode simple permettant des variations temporelles dans le risque.
[8] Voir Boudoukh et al. (1998) pour une méthode dans laquelle les poids déclinent avec l'âge des observations.

3/ Simulation Monte-Carlo

a/ Principe de la méthode

Le principe de cette méthode est assez semblable à celui de la simulation historique : après avoir spécifié un processus stochastique pour modéliser chacune des variables financières ainsi que les paramètres de ce processus (paramètres qui peuvent, par exemple, être déduits des données historiques), des trajectoires de prix fictives sont simulées pour toutes les variables d'intérêt et, à chaque horizon de temps considéré, le portefeuille est entièrement réévalué aux prix du marché.

Chacune de ces pseudo-réalisations est ensuite utilisée pour compiler une distribution complète des rendements du portefeuille à partir de laquelle la VaR sera extraite.

Le principe de la simulation Monte-Carlo se résume donc en trois étapes essentielles :

- Spécifier tous les facteurs pertinents ainsi que leur dynamique et leurs paramètres (volatilité, corrélations...).[9]
- Construire les trajectoires des prix, avec la formule discrète de la loi du processus choisi pour les prix.
- Calculer la valeur du portefeuille pour chacun des scénarios.

La simulation Monte-Carlo est donc similaire à la simulation historique, excepté que les changements hypothétiques des prix pour un actif i, ΔS_i, sont créés à partir des réalisations d'un processus stochastique spécifié et non pas à partir de données historiques. La figure 2 illustre la proximité de ces deux méthodes.

b/ Avantages

La méthode de simulation Monte-Carlo est une méthode performante et surtout très adaptative pour calculer des VaR.

Elle peut tenir compte d'expositions au risque diverses, en introduisant par exemple des relations non-linéaires dans le prix du risque, en incluant la volatilité du risque et même un modèle de risque. Elle est suffisamment flexible pour pouvoir incorporer une variation temporelle de la volatilité, des queues de distribution épaisses, des discontinuités ainsi que des scénarios extrêmes.

Par ailleurs, cette méthode fournit (comme la simulation historique) la distribution complète des changements de valeur du portefeuille et pas seulement un quantile ; ainsi, cette dernière peut être utile pour déterminer la perte attendue pour un niveau donné de VaR, soit la Shortfall Measure[10].

---

[9] Ce sont souvent des mouvements browniens géométriques qui sont postulés : ceux-ci correspondent assez bien au comportement des actions mais ce sont en général de mauvaises estimations de l'évolution des taux d'intérêt pour lesquels des processus de retour à la moyenne sont plus adaptés.

[10] Voir II-2/ pour une définition complète de la Shortfall Measure.

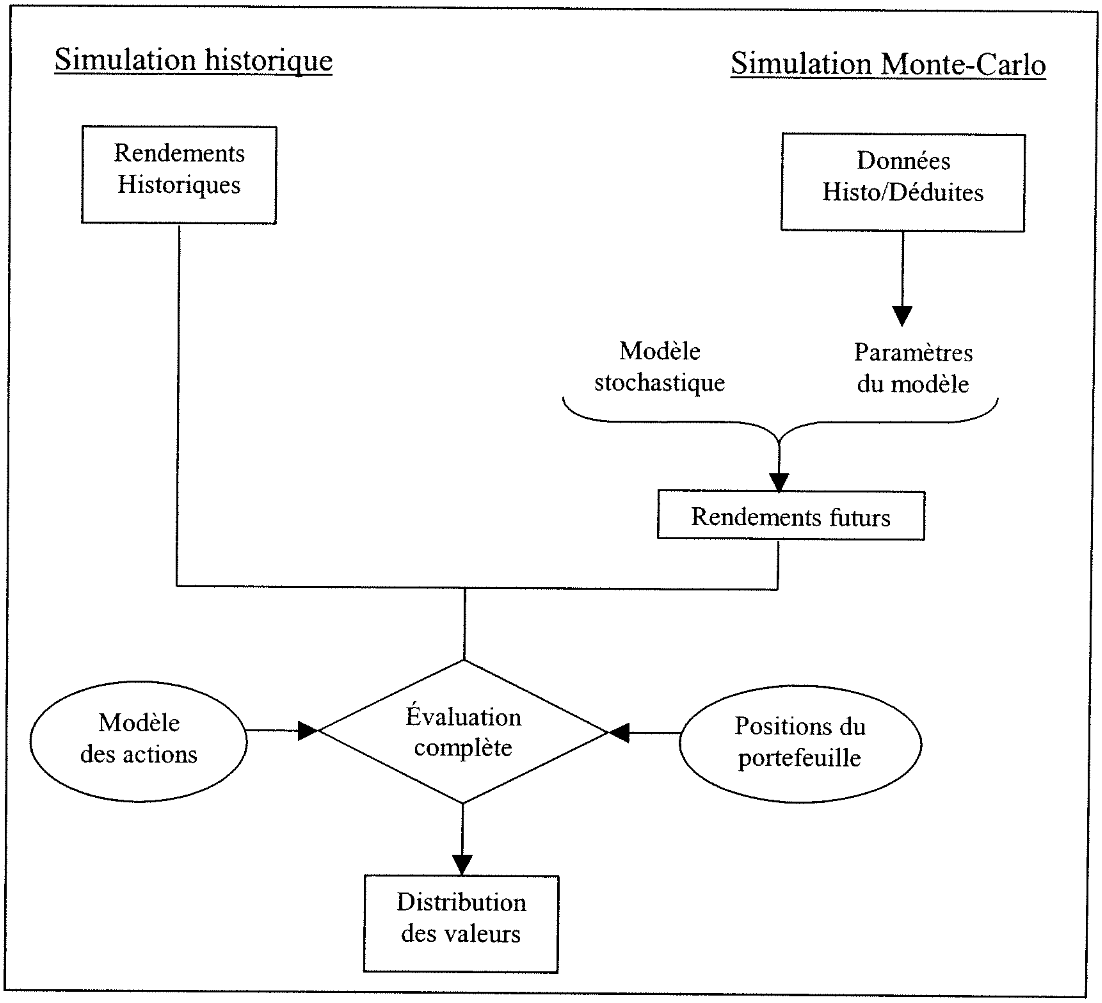


Figure 2: *Comparaison des méthodes de simulations historique et Monte-Carlo.*

c/ Inconvénients

Le plus grand désavantage de cette méthode est qu'elle est relativement coûteuse en temps de calcul, en infrastructures informatiques et en développement intellectuel.

Par ailleurs cette méthode est également sujette au risque de modélisation en ce qui concerne les facteurs de risque ainsi que les méthodes d'évaluations des produits financiers.

Enfin, du fait du nombre limité d'échantillons, cette méthode est sensible à la variation échantillonnale : tandis que la méthode de Variance/Covariance fournit une mesure exacte de la VaR dans le cas d'un portefeuille composé de facteurs de risque conjointement normaux et linéaires, la simulation Monte-Carlo ne donne qu'une approximation.

4/ Récapitulatif des avantages et inconvénients des trois méthodes

Méthode	Avantages	Inconvénients
Variance/ Covariance	▪ Peu de temps de calcul requis ▪ Le TCL valide la méthode en présence de rendements nombreux et indépendants (même avec des rendements non gaussiens) ▪ Pas de modèle de prix nécessaire	▪ Hypothèse de la normalité des rendements et de la log-normalité des facteurs ▪ Estimation nécessaire de la volatilité et des corrélations entre facteurs ▪ Pas d'analyse de sensibilité possible ni de calcul d'intervalles de confiance
Historique	▪ Pas d'hypothèses sur la loi des facteurs de risque ▪ Pas d'estimation de la volatilité ni des corrélations ▪ Queues de distribution épaisses et évènements extrêmes contenus dans les données ▪ Agrégation légitimée sur différents marchés ▪ Calcul d'intervalles de confiance permis	▪ Dépendance vis-à-vis de l'échantillon particulier utilisé ▪ Inadaptable à un changement structurel de l'économie (comme l'introduction de l'Euro) ▪ Un nombre insuffisant de données entraîne un biais et une imprécision dans le calcul de la VaR ▪ Pas d'analyse de sensibilité possible ▪ Faible efficacité avec des portefeuilles contenant des produits dérivés complexes
Monte-Carlo	▪ Possibilité d'introduction de n'importe quelle distribution de facteurs ▪ Modélisation possible de n'importe quel portefeuille complexe ▪ Calcul d'intervalles de confiance et analyses de sensibilités possibles	▪ Données aberrantes non introduites dans les données ▪ Coût important en ressources informatiques

IV- Simulation

À travers l'étude suivante, nous cherchons à déterminer le Capital Économique associé au risque de marché sur un horizon d'un an. Comme nous l'avons déjà souligné précédemment, le choix d'un tel horizon est quelque peu problématique pour le risque de marché du fait de la dynamique du portefeuille de marché.

Pour pouvoir appréhender cette réactivité, nous avons choisi de considérer trois portefeuilles qui évoluent selon trois lignes de conduite bien distinctes : tout d'abord, le portefeuille "Performance" dont le principe de réallocation dynamique ne prend en compte que la composante rendement du portefeuille ; ensuite, le portefeuille "Moyenne-Variance" qui obéit, à chaque réallocation, aux principes du modèle Moyenne-Variance, c'est-à-dire que, pour un rendement fixé du portefeuille, ce modèle minimise la variance de ce dernier ; enfin, nous considérons également un portefeuille "Statique" qui est gelé sur toute la durée de l'expérience et qui sert ainsi de référence. Pour ces trois portefeuilles, nous estimons leur distribution de rendement en simulant leur évolution sur un horizon d'un an.

Par ailleurs, nous souhaitons également pouvoir comparer les résultats obtenus par le logiciel actuellement implanté à la Banque, ou modèle ASP, qui utilise simplement les positions courantes du portefeuille ainsi qu'un historique de l'évolution des actifs le composant pour prédire le Capital Économique à un an.

Finalement, pour chacun des portefeuilles, nous calculons également la contrainte quotidienne imposée par le Capital Réglementaire.

1/ Principe de la simulation

L'étude est réalisée au temps $t = 0$: le passé et, plus généralement, les données disponibles au moment de l'étude seront indicés par t tel que $t < 0$ et $t \geq T_h$, où T_h représente la plus ancienne donnée historique connue ; le futur et, plus généralement, les données anticipées au moment de l'étude seront indicés par t tel que $t > 0$ et $t \leq T$ où T représente l'horizon maximal de prévision désiré.

La richesse initiale disponible P_0 est immédiatement et totalement investie dans un portefeuille composé de N actifs, selon un modèle d'allocation Moyenne-Variance.[11] En effet, pour chacun de ces actifs, l'historique de l'évolution de leurs valeurs respectives est disponible sur la période allant de T_h à 0. Ces données permettent d'estimer, d'une part, les paramètres empiriques nécessaires à la mise en œuvre du modèle Moyenne-Variance et, d'autre part, ceux nécessaires à la prévision du Capital Économique selon le modèle ASP.[12]

L'évolution future des actifs sur la période allant de 0 à T est prévue à partir d'une simulation Monte-Carlo avec M répétitions. Ceci permet d'obtenir les changements

[11] Voir section IV-2/b/ pour un développement théorique du modèle Moyenne-Variance.

[12] Voir section IV-3/ pour une présentation du modèle ASP.

journaliers du portefeuille et, ainsi, de déterminer les VaR journalières successives. Par ailleurs, cette méthode permet également d'obtenir la distribution annuelle des changements de valeur du portefeuille, qui sera utilisée pour calculer le Capital Économique à un an.

Il faut bien comprendre que notre analyse s'effectue ici sur deux horizons bien différents :

- D'une part, sur un horizon d'un jour, nous déterminons la VaR du portefeuille au niveau de confiance *1%* ; cette VaR journalière est calculée à l'aide d'une méthode historique utilisant les données simulées sur l'année précédente.
- D'autre part, le Capital Économique est calculé à un an, c'est-à-dire sur toute la durée de la simulation, jusqu'à T ; il est déterminé à partir de la distribution à un an des changements de valeur du portefeuille. Ainsi, chaque réalisation m de la simulation Monte-Carlo fournit un point de la distribution annuelle. Il suffit ensuite de sélectionner le quantile correspondant au degré de solvabilité de la Banque, ici *0.09%*. Pour simplifier, nous considérerons dans la suite le quantile à *0.1%*.

2/ Réalisation pratique de la simulation

a/ Simulation de l'évolution des actifs

- Simulation d'un actif log-normal

Nous commençons ici par rappeler le procédé à mettre en œuvre pour simuler un actif log-normal.

Pour tout t ∈ [0 , T],

$$ds = s(\mu\, dt + \sigma\, dB) \qquad \textit{avec B un mouvement brownien}$$

$$d[\log s] = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\, dt + \sigma\, dB$$

La discrétisation de l'équation précédente donne :

$$\log s_{t+1} = \log s_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_{t+1}$$

$$avec \begin{cases} \varepsilon_{t+1} \textit{ qui représente } 1 \textit{ aléas normal centré réduit} \\ et\ \Delta t = 1/T \end{cases}$$

Ainsi,

$$s_{t+1} = s_t \exp\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_{t+1}\right]$$

- Simulation de N actifs log-normaux corrélés

Nous rappelons ici le principe de la factorisation de Cholesky qui permet d'obtenir des actifs corrélés.

Nous souhaitons générer N actifs log-normaux satisfaisant une structure de corrélations préalablement définie. La section précédente a montré comment un actif log-normal pouvait être généré à partir d'une variable aléatoire normale standard. Nous allons montrer qu'il suffit en fait de générer N aléas normaux standard satisfaisant la structure de corrélations puis d'appliquer ce qui a été fait précédemment pour en déduire les variables log-normales correspondantes.

Notons E le vecteur des N aléas conjoint. On souhaite que $\sigma^2(\mathrm{E}) = R$ avec R une matrice symétrique réelle définie positive connue. Cette matrice peut être factorisée selon la méthode de Cholesky, de sorte que $R = T\,T'$ avec T une matrice triangulaire inférieure.

Le vecteur E est obtenu en deux étapes :

1) Génération de N variables aléatoires normales standard indépendantes dont le vecteur conjoint sera noté H. On obtient alors $\sigma^2(\mathrm{H}) = I$ où I est la matrice identité.
2) Construction de la variable transformée $\mathrm{E} = T\,\mathrm{H}$

On peut vérifier que E satisfait bien la structure de corrélation exigée.

$$\begin{aligned}\sigma^2(\mathrm{E}) &= E[\mathrm{E}\,\mathrm{E}'] = E[T\,H\,H'\,T'] = T\,E[H\,H']T' = T\,\sigma^2(H)T' \\ &= T\,I\,T' = T\,T' \\ &= R\end{aligned}$$

b/ Mise à jour dynamique du portefeuille

- Cadre général

Soit $W_{P,t}$ la valeur d'un portefeuille composé de N actifs dont les valeurs respectives au temps t sont notées $s_{i,t}$, pour i de 1 à N.

$$W_{P,t} = \Lambda_t' S_t$$

$$avec \begin{cases} \Lambda \; le \; vecteur \; des \; poids \; des \; actifs \\ et \; S \; le \; vecteur \; des \; valeurs \; des \; actifs \end{cases}$$

Après une période, les prix ont pour valeur S_{t+1} et, avant la réallocation des poids des actifs, le portefeuille est évalué à :

$$\widetilde{W}_{P,t+1} = \Lambda_t' S_{t+1}$$

Après la réallocation, cette valeur devient :

$$W_{P,t+1} = \Lambda'_{t+1} S_{t+1}$$

Par hypothèse, la réallocation s'effectue sans injection de fonds supplémentaires, ainsi :

$$W_{P,t+1} = \widetilde{W}_{P,t+1}$$

Le rendement sur la période ainsi écoulée s'exprime alors comme :

$$\begin{aligned}
R_{P,t+1} &= \frac{W_{P,t+1} - W_{P,t}}{W_{P,t}} = \frac{\widetilde{W}_{P,t+1} - W_{P,t}}{W_{P,t}} \\
&= \frac{\Lambda'_t \left[S_{t+1} - S_t\right]}{\Lambda'_t S_t} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_{i,t} s_{i,t}}{\Lambda'_t S_t} \left[\frac{s_{i,t+1} - s_{i,t}}{s_{i,t}}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{N} \varpi_{i,t} r_{i,t+1} \\
&= \varpi'_t R_{t+1}
\end{aligned}$$

$$avec \begin{cases} \varpi_{i,t} = \dfrac{\lambda_{i,t} s_{i,t}}{\Lambda'_t S_t} \; la\ proportion\ de\ l'actif\ i\ au\ temps\ t \\ et \quad r_{i,t+1} = \dfrac{s_{i,t+1} - s_{i,t}}{s_{i,t}} \; le\ rendement\ de\ l'actif\ i\ sur\ la\ période\ t/t+1 \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous présentons les différentes politiques d'allocation dynamique du portefeuille ou, en d'autres termes, comment déterminer ϖ_{t+1}.

- Mise à jour de type "Performance"

Le premier principe de réallocation ne considère que l'aspect rendement du portefeuille. En effet, pour chaque période, les actifs sont classés en fonction de leur rendement respectif et les valeurs exposées dans chacun des actifs sont modifiées en fonction de ce classement.

Plus précisément, la position dans l'actif le plus rentable (pour cette période) est augmentée de *5%* de la valeur présente totale du portefeuille. Inversement, la position dans l'actif le moins rentable est diminuée de *5%* de la valeur présente totale du portefeuille.

Dans ce type d'allocation, les positions courtes, ou *short*, sont interdites, et ce, principalement pour des raisons de cohérence de la définition de la notion de rendement. En effet, l'investissement dans une position courte nécessite des conditions particulières de protection et le rendement n'est plus défini par rapport à l'exposition mais plutôt par rapport à l'exposition augmentée du capital de protection requis.

- Mise à jour de type "Moyenne-Variance"

Le modèle précédent, entièrement fondé sur un critère de performance, ne tient absolument pas compte du facteur essentiel qu'est le risque. Le principe du modèle Moyenne-Variance, en revanche, est de minimiser le risque pour un rendement cible fixé.

En supposant que le rendement du portefeuille défini précédemment s'exprime comme $R_{P,t} = \varpi_t^{'} R_t$, le problème revient alors à extraire le vecteur de poids ϖ_t, tel que le risque du portefeuille soit minimal pour un rendement donné, c'est-à-dire :

$$Trouver\ \varpi_{MV,t}\ tel\ que : \begin{cases} \varpi_{MV,t} = \underset{\varpi_t}{ArgMin}\left[\rho\left(R_{P,t}\right)\right] \\ \varpi_{MV,t}^{'}\mu_t = \bar{\mu}_{P,t} \\ \varpi_{MV,t}^{'}\iota = 1 \end{cases}$$

$$avec \begin{cases} \rho\ la\ mesure\ de\ risque\ (ici\ la\ variance), \\ \mu_t\ le\ vecteur\ des\ rendements\ des\ actifs, \\ \bar{\mu}_{P,t}\ le\ rendement\ cible\ fixé \\ et\ \iota\ le\ vecteur\ unitaire \end{cases}$$

La fonction Lagrangienne du problème de minimisation sous contraintes précédent s'écrit :

$$L(\varpi_t,\alpha_1,\alpha_2) = \rho(R_{P,t}) + \alpha_1\left(\bar{\mu}_{P,t} - \varpi_t^{'}\mu_t\right) + \alpha_2\left(1 - \varpi_t^{'}\iota\right)$$

La mesure de risque est ici la variance, ainsi :

$$\rho(R_{P,t}) = \sigma^2(R_{P,t}) = \varpi_t^{'}\Sigma_t\varpi_t$$

$$avec\ \Sigma_t\ la\ matrice\ de\ Variance / Covariance\ des\ rendements\ des\ actifs$$

La fonction Lagrangienne s'écrit alors :

$$L(\varpi_t,\alpha_1,\alpha_2) = \varpi_t^{'}\Sigma_t\varpi_t + \alpha_1\left(\bar{\mu}_{P,t} - \varpi_t^{'}\mu_t\right) + \alpha_2\left(1 - \varpi_t^{'}\iota\right)$$

Les conditions du premier ordre s'obtiennent en dérivant la fonction *L(.)* par rapport à ϖ, α_1 et α_2 et en égalant les expressions ainsi obtenues à zéro :

$$\begin{cases} (1)\ \left.\dfrac{\partial L(\varpi_t,\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \varpi_t}\right|_{\varpi_{MV,t}} = 2\varpi_{MV,t}\Sigma_t - \alpha_1\mu_t - \alpha_2\iota = 0 \\ (2)\ \left.\dfrac{\partial L(\varpi_t,\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_1}\right|_{\varpi_{MV,t}} = \bar{\mu}_{P,t} - \varpi_{MV,t}^{'}\mu_t = 0 \\ (3)\ \left.\dfrac{\partial L(\varpi_t,\alpha_1,\alpha_2)}{\partial \alpha_2}\right|_{\varpi_{MV,t}} = 1 - \varpi_{MV,t}^{'}\iota = 0 \end{cases}$$

La solution du problème précédent s'écrit alors sous la forme[13] :

$$\varpi_{MV,t} = g + h\overline{\mu}_{P,t}$$

$$avec \quad g = \frac{1}{D}\left[b\left(\Sigma_t^{-1}\iota\right) - a\left(\Sigma_t^{-1}\mu_t\right)\right]$$

$$h = \frac{1}{D}\left[c\left(\Sigma_t^{-1}\mu_t\right) - a\left(\Sigma_t^{-1}\iota\right)\right]$$

$$a = \iota'\Sigma_t^{-1}\mu_t \quad b = \mu_t'\Sigma_t^{-1}\mu_t \quad c = \iota'\Sigma_t^{-1}\iota \quad d = bc - a^2$$

Pour effectuer les calculs précédents, nous avons besoin des estimateurs de la moyenne $\hat{\mu}_t$ et de la matrice de Variance/Covariance $\hat{\Sigma}_t$ des rendements des actifs, ainsi que de la détermination du rendement cible $\overline{\mu}_{P,t}$:

$$\hat{\mu}_t = \frac{1}{T_{MV}+1}\sum_{\tau=t-T_{MV}}^{t} R_\tau$$

$$\hat{\Sigma}_t = \frac{1}{T_{MV}+1}\sum_{\tau=t-T_{MV}}^{t} (R_\tau - \hat{\mu}_t)(R_\tau - \hat{\mu}_t)'$$

$$\overline{\mu}_{P,t} = Min(R_t) + \alpha\left[Max(R_t) - Min(R_t)\right] \text{ avec } \alpha \text{ une proportion fixée, ici } 0.5.$$

3/ Modèle ASP

Le logiciel implanté actuellement modélise la distribution des changements de valeur du portefeuille à partir de la composition initiale de celui-ci et définit le Capital Économique comme un certain quantile de cette distribution.

Le calcul du risque de marché par le biais du modèle ASP nécessite comme intrant un portefeuille d'investissement, segmenté en différentes sous-positions ou actifs. Chacun de ces actifs est caractérisé par sa **valeur au marché**, c'est-à-dire la valeur monétaire exposée au risque, par un **indice de marché** utilisé comme référence et dont la dynamique est proche de celle de l'actif, par son **bêta**, qui mesure la proximité entre l'actif et l'indice et par son **erreur de *tracking*** ou erreur résultant de l'imparfaite adéquation entre l'indice et l'actif.

La volatilité de chaque actif est assimilée à celle de son indice de référence ; ces dernières sont extrapolées à un horizon d'un an à partir des rendements hebdomadaires. Une fois que toutes les données précédentes sont connues, le risque systématique, qui est dû aux mouvements propres de l'indice, et le risque idiosyncratique, qui est dû à l'imparfaite adéquation entre les mouvements de l'actif et ceux de l'indice, sont calculés :

[13] Le lecteur intéressé pourra se reporter au Chapitre 5 de Campbell, Lo and MacKinlay.

- Le risque systématique est l'agrégation de chacune des valeurs au marché des actifs, pondérée par son bêta et multipliée par son indice de volatilité ; la matrice de Variance/Covariance des indices est estimée à partir des données historiques.

$$\textit{Risque Systématique} = \sqrt{\sum_{i,j} \beta_i MV_i \sigma_i^{indice} \rho_{i,j} \beta_j MV_j \sigma_j^{indice}}$$

- Le risque idiosyncratique est l'agrégation de chacune des valeurs au marché du portefeuille, multipliée par son erreur de *tracking* ; les erreurs sont supposées indépendantes entre les différentes positions.

$$\textit{Risque Idiosyncratique} = \sqrt{\sum_i MV_i^2 E_i^2}$$

Ensuite, le risque total, ou volatilité du portefeuille global, est simplement obtenu en sommant les deux précédents.

$$\textit{Risque Total} = \sqrt{(\textit{Risque Systématique})^2 + (\textit{Risque Idiosyncratique})^2}$$

Enfin, la distribution complète des changements de valeur du portefeuille est obtenue en supposant une distribution normale centrée de volatilité égale au risque total calculé précédemment. Le Capital Économique est alors le quantile au niveau de confiance *1-c*, égal à la probabilité de défaut de la Banque soit *0.1%* :

$$EC = -\Phi^{-1}[1-c, 0, \textit{RisqueTotal}]$$

avec Φ *la fonction de distribution cumulative normale*

4/ Résultats

a/ Simulation sur une année

Nous présentons ici les résultats obtenus pour la simulation d'une année particulière pour les trois portefeuilles, Statique, Performance et Moyenne-Variance. Le premier jour de l'année, les trois portefeuilles sont identiques et les résultats qui suivent montrent comment leurs évolutions vont se distinguer au cours de l'année.

Le premier jour de l'année, les trois portefeuilles ont la même valeur initiale qui est répartie dans trois actifs :

Valeur initiale des portefeuilles, $P_0 = 100$,

et proportions initiales dans les actifs, $\varpi_0 = \begin{pmatrix} 0.3934 \\ 0.2106 \\ 0.3960 \end{pmatrix}$

Les trois actifs, pour lesquels nous disposons d'un historique de cinq années, sont définis par le vecteur de rendement annuel et la matrice de Variance/Covariance annuelle suivants. Nous fournissons également leurs valeurs initiales :

$$Valeurs\ initiales,\ S_0 = \begin{pmatrix} 104.01 \\ 40.04 \\ 19.01 \end{pmatrix},$$

$$rendements\ annuels,\ \mu = \begin{pmatrix} 0.12 \\ 0.07 \\ 0.01 \end{pmatrix},$$

$$et\ matrice\ de\ Variance/Covariance,\ \Sigma = \begin{bmatrix} 0.09 & 0.06 & 0.03 \\ 0.06 & 0.05 & 0.04 \\ 0.03 & 0.04 & 0.06 \end{bmatrix}$$

Les résultats sont présentés sous la forme de deux graphiques et d'un tableau. Le premier graphique (graphique 1, disponible en annexe) illustre l'évolution des valeurs des actifs et des portefeuilles sur toute la durée de la simulation ainsi que celle des proportions des deux portefeuilles dynamiques, Performance et Moyenne-Variance. Par ailleurs, le second graphique (graphique 2, disponible en annexe) présente l'évolution des deux mesures de risque, la VaR et le Capital Réglementaire, pour chaque portefeuille. Enfin, le tableau 1 suivant fournit un résumé des principaux résultats : d'une part, les proportions et les valeurs finales des trois portefeuilles et, d'autre part, la VaR et le Capital Réglementaire moyens qui leur sont associés.

Modèle	**Statique**	**Performance**	**MV**
Proportions à T	$\begin{pmatrix} 0.3934 \\ 0.2106 \\ 0.3960 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8495 \\ 0 \\ 0.1505 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4160 \\ 0.2178 \\ 0.3661 \end{pmatrix}$
Valeur Portefeuille à T	148.3190	163.1006	141.1976
Taux moyen de dépassement en %	0.8032	1.2048	0.8032
VaR moyenne	3.7980	4.2604	3.5846
RC moyen	36.1185	40.6741	33.8491

Tableau 1 : *Résultats observés lors d'une année.*

En observant l'évolution des valeurs des portefeuilles, on remarque que le portefeuille Performance est généralement celui qui a la valeur la plus élevée, suivi par le portefeuille Statique puis le portefeuille Moyenne-Variance. Leurs valeurs finales respectives confirment ceci.

Concernant les proportions, soulignons tout d'abord que l'allocation Performance n'autorise que des positions longues contrairement à l'allocation Moyenne-Variance, comme le montrent les graphiques 1-3 et 1-4. Par ailleurs, on remarque également que l'allocation Performance tend à se concentrer dans l'actif 1 qui est le plus rentable, tandis que l'allocation Moyenne-Variance évite cet actif qui est également le plus risqué.

Ces premières considérations se retrouvent dans les mesures de risque. En effet, la VaR du portefeuille Moyenne-Variance est la plus faible, signe que ce portefeuille est le moins risqué, à la différence du portefeuille Performance qui, en contre-partie de maximiser son rendement, augmente également son risque. De plus, le Capital Réglementaire, intimement lié à la VaR par sa définition[14], obéit lui aussi à cet ordre. (Voir graphique 2).

Enfin, le tableau 1 fournit également le taux moyen de dépassement de la VaR, soit combien de fois la VaR journalière a été dépassée ; en sachant que cette dernière est calculée au niveau de confiance *99%*, le taux de dépassement devrait être proche de *1%*. Ici, on observe entre *0.8* et *1.2%,* ce qui est tout à fait satisfaisant : en effet, comme nous comptons le nombre de dépassements annuel, nous ne pouvons obtenir que des nombres entiers et *0.8%* correspond exactement à deux dépassements sur les 250 jours de l'année et *1.2%* exactement à trois dépassements.

Précisons que les résultats publiés ici correspondent à une année unique : toutes les années ne se ressemblent pas dans l'évolution des actifs et on peut observer des comportements différents au niveau des portefeuilles. Ainsi, si l'actif 1 tend à perdre de la valeur, le portefeuille Performance se concentrera dans l'actif 2, diminuant ainsi son risque, tandis que le portefeuille Statique conservera la même allocation dans l'actif le plus risqué.

b/ Simulation générale sur 1000 années

Nous présentons ici les résultats obtenus pour la simulation générale, qui répète mille fois ce qui a été fait dans la partie a/ précédente. Précisons que l'historique des actifs reste le même, ainsi que la composition initiale des portefeuilles.

Dans cette simulation, il existe trois niveaux différents :

1) Nous construisons les distributions des changements de valeur des trois portefeuilles à un an. Rappelons à ce propos que chaque réalisation d'une année fournit un point de chacune des distributions annuelles.

2) À partir des VaR journalières, nous calculons le Capital Réglementaire associé à chacun des trois modèles.

3) Enfin, nous calculons les paramètres nécessaires à la mise en œuvre du modèle ASP, qui, in fine, modélise une distribution annuelle des changements de valeur du portefeuille. Celle-ci est unique dans la mesure où elle n'utilise que l'historique des actifs et les positions initiales du portefeuille et ne repose donc ni sur les mille simulations, ni sur le type de portefeuille.

Pour commencer, le graphique 3 montre l'évolution des valeurs des trois portefeuilles et du Capital Réglementaire moyen qui lui est associé. On s'aperçoit ainsi que ce que l'on avait observé pour une année se généralise ici : en effet, le modèle Performance est celui pour lequel on observe la valeur de portefeuille la plus élevée, suivi ensuite par les modèles Statique puis Moyenne-Variance. En ce qui concerne le Capital Réglementaire, l'ordre précédent reste valable.

[14] Voir I-3/ pour une définition complète du Capital Réglementaire.

Ensuite, le tableau 2 résume la majeure partie des résultats obtenus. Ainsi, pour chacune des distributions annuelles modélisées, il présente la moyenne, la volatilité ainsi que les premiers quantiles de la queue gauche de la distribution, en dollars. Par ailleurs, il fournit également le Capital Réglementaire moyen associé à chaque modèle.

Commençons par étudier les distributions annuelles obtenues pour les trois allocations. On peut remarquer que le modèle Performance possède un rendement et une volatilité relativement plus élevés que les autres modèles. On retrouve donc ici ce qui avait été mis en avant sur les distributions journalières, à savoir que le modèle Performance est relativement plus rentable, mais aussi plus risqué, par rapport au modèle Moyenne-Variance qui parvient à minimiser son risque au prix d'un rendement moindre.

	Modèle	Statique	Performance	MV	ASP
Distribution annuelle	Rendement	6.7453	7.3225	6.0920	0
	Volatilité	25.8432	28.1447	25.0409	21.5737
	Plus mauvais quantiles de 1/1000 à 20/1000	-47.0849	-45.7712	-45.9263	-66.6680
		-43.2958	-45.0114	-44.2087	-62.0924
		-43.2219	-42.7878	-43.9688	-59.2795
		-42.7978	-42.7414	-43.8803	-57.2153
		-42.7821	-41.8100	-43.7174	-55.5703
		-41.5254	-40.5760	-42.3260	-54.1960
		-41.2621	-40.8946	-42.0551	-53.0125
		-40.5408	-40.8658	-40.5039	-51.9694
		-40.0814	-40.8622	-40.3978	-51.0350
		-39.3454	-40.5485	-39.3978	-50.1878
		-38.9068	-40.4703	-38.5738	-49.4116
		-38.2240	-39.4306	-37.8293	-48.6946
		-37.6020	-39.4169	-37.7022	-48.0275
		-37.0607	-39.1367	-37.6152	-47.4036
		-36.7767	-39.0846	-37.1336	-46.8169
		-36.7603	-38.7484	-37.0618	-46.2628
		-36.4878	-38.2016	-36.9605	-45.7377
		-36.3919	-38.0001	-36.5614	-45.2386
		-36.2823	-37.9668	-35.4263	-44.7622
		-36.2163	-37.9546	-35.2604	-44.3069
	RC	30.4135	32.5808	29.8710	

Tableau 2 : *Résultats observés lors d'une simulation complète.*

Notons que pour le portefeuille Statique (composé d'actifs de rendements log-normaux et indépendants), il est possible de calculer le rendement annuel ainsi que sa volatilité. La comparaison des valeurs obtenues avec la simulation avec les valeurs théoriques est tout à fait satisfaisante :

$$\mu_{théorique} = 6.9407 \quad \textit{soit 2.8\% d'erreur relative pour la simulation}$$

$$\sigma_{théorique} = 24.8208 \quad \textit{soit 4.1\% d'erreur relative pour la simulation}$$

À partir des quantiles des distributions modélisées, nous pouvons estimer ce que serait le Capital Économique réel de chaque portefeuille.

Nous présentons ensuite les résultats obtenus par le modèle ASP. Tout d'abord, on compare la matrice de Variance/Covariance empirique estimée à partir des données historiques des actifs avec la matrice théorique utilisée dans la simulation de leur évolution. Le modèle ASP utilise l'estimation des paramètres sur cinq jours : nous utiliserons donc la règle d'échelle consistant à multiplier par 50 l'estimateur obtenu pour une période de cinq jours afin de le convertir en estimateur annuel. Les erreurs relatives observées entre les volatilités empiriques et théoriques sont comprises entre *4%* et *9%*.

$$\textit{Matrice de Variance / Covariance annuelle des actifs, } \hat{\Sigma}_{annuel} = \begin{bmatrix} 0.075 & 0.050 & 0.025 \\ 0.050 & 0.045 & 0.040 \\ 0.025 & 0.040 & 0.065 \end{bmatrix}$$

$$\textit{et volatilité annuelle du portefeuille, } \hat{\sigma}_{total} = 21.5737, \textit{ avec pour tout } i \ \beta_i = 1 \textit{ et } E_i = 0$$

Pour le calcul de la volatilité totale annuelle du portefeuille, nous supposons que les bêtas sont tous égaux à un et que les erreurs de *tracking* sont nulles. Cette volatilité est directement comparable aux volatilités des distributions annuelles obtenues précédemment. Les erreurs relatives entre la volatilité ASP et celles des autres modèles sont comprises entre *16%* pour le modèle Moyenne-Variance et *30%* pour le modèle Performance, en passant par *20%* le modèle Statique.

Par ailleurs, les quantiles ASP présentés dans le tableau 2 sont calculés en supposant une distribution annuelle normale de moyenne nulle et de volatilité égale au risque total. À partir de ces quantiles, nous pouvons estimer ce que serait le Capital ASP.

c/ Comparaisons et interprétations des résultats obtenus

La section précédente a présenté les résultats obtenus lors d'une simulation particulière d'un ensemble de mille répétitions. Il est à noter que de nombreuses autres simulations ont été réalisées et la même conclusion est apparue pour chacune d'elles, à savoir que, indépendamment de l'allocation initiale, le Capital Réglementaire est toujours inférieur au Capital Économique, lui-même inférieur au Capital ASP.

Dans une situation réelle, c'est-à-dire en fonction de l'information disponible en $t = 0$, nous sommes capables de calculer le Capital ASP ainsi que le Capital Réglementaire, mais pas le Capital Économique. Il est donc important de pouvoir harmoniser les résultats obtenus et c'est ce que nous cherchons à faire dans ce qui suit.

Nous présentons quelques arguments pour tenter d'expliquer ces résultats. Nous utiliserons principalement le modèle d'un portefeuille Statique, dont les distributions des rendements quotidiens sont normales et indépendantes. Ces arguments se généralisent à des rendements log-normaux (plus proches de nos simulations) mais cela complique inutilement l'exposition recherchée, qualitative par nature.

1- Pourquoi le Capital ASP est-il plus grand que le Capital Économique ?

Le principe du modèle ASP est de déterminer le capital par le quantile à *0.1%* de la distribution des changements annuels de valeur du portefeuille, construite à partir des positions actuelles du portefeuille et de l'estimation de sa volatilité sur une courte période, ajustée sur l'horizon désiré.

Plus formellement, nous avons :

$$\begin{aligned} EC_{ASP} &= VaR_{ASP}(T\,,99.9\%) \\ &= -\Phi^{-1}[0.001\,,0\,,\sigma_T] \\ &= -\Phi^{-1}\left[0.001\,,0\,\,,\sqrt{T}\sigma_1\right] \\ &= -\sqrt{T}\,\Phi^{-1}[0.001\,,0\,,\sigma_1] \\ &= \sqrt{T}\,VaR_{ASP}(1\,,99.9\%) \end{aligned}$$

Cette approche surestime vraisemblablement le capital dans la mesure où la tendance, ou *drift*, est ignorée. En général, dans le cas d'une distribution des rendements journaliers connue et en supposant que ces rendements journaliers sont indépendants, la distribution à un an l'est elle aussi et les VaR pour les deux horizons peuvent être calculées simultanément. Nous allons montrer que : $VaR(T,c) \leq \sqrt{T}\,VaR(1,c)$, et ce d'autant plus que le ratio de la tendance sur la volatilité est grand (en le supposant positif).

Soit W la valeur du portefeuille tel que sa distribution journalière soit une normale de moyenne μ et de volatilité σ. La distribution sur un horizon T s'écrit alors :

$$W(T) \sim W_0 + N\left(T\mu, \sqrt{T}\sigma\right) \quad \textit{avec } W_0 \textit{ la valeur initiale du portefeuille}$$

Calculons le ratio de la VaR sur un horizon T et de la VaR sur un horizon 1, en choisissant le même niveau de confiance c[15] :

$$\frac{VaR(T)}{VaR(1)} = \frac{-T\mu - \sqrt{T}\sigma\,\Phi^{-1}[1-c\,,0\,,1]}{-\mu - \sigma\,\Phi^{-1}[1-c\,,0\,,1]} = \frac{Tx + \sqrt{T}\Phi^{-1}[1-c\,,0\,,1]}{x + \Phi^{-1}[1-c\,,0\,,1]} \quad avec\ x = \frac{\mu}{\sigma}$$

Le graphique 4 montre la dynamique de la fonction précédente pour différentes valeurs de x. Si à court terme, la règle d'échelle appliquée sur la moyenne et la volatilité donne des résultats très satisfaisants, la différence devient cruciale à long terme. Notons que, quelques soient le ratio x et l'horizon T, la relation suivante reste vraie $VaR(T) \leq \sqrt{T}\,VaR(1)$. Par ailleurs, lorsque la distribution est log-normale, cette différence est encore plus marquée.

Dans la pratique, le but de la gestion de ce portefeuille est bien de créer un rendement donc il est vraisemblable de supposer un rendement quotidien moyen supérieur à zéro.

L'étude précédente fournit donc un argument permettant d'expliquer pourquoi le Capital ASP a tendance à dominer le Capital Économique.

---

[15] Rappelons que la définition de la VaR utilisée ici est la suivante : $VaR(t,c) = W_0 - W^*_{1-c}$

2- Pourquoi le Capital Réglementaire est-il plus petit que le Capital Économique ?

Nous cherchons ici à déterminer les conditions dans lesquelles il y aurait égalité entre le Capital Réglementaire et une VaR calculée comme le quantile de la distribution des changements de valeur du portefeuille, sur un horizon d'un an. En supposant qu'il est possible de déterminer la distribution des changements de valeur du portefeuille à dix jours (à partir de l'hypothèse d'un portefeuille statique), il est alors possible de calculer une VaR sur un horizon de dix jours au niveau de confiance *99%*. Comme le portefeuille est statique, le Capital Réglementaire s'exprime alors comme trois fois cette VaR.

Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de faire des hypothèses sur les distributions de changement de valeur du portefeuille. Supposons alors que cette distribution soit normale sur dix jours, de moyenne négligeable et de volatilité σ_{10} et que la distribution sur un an soit normale de moyenne μ_T et de volatilité σ_T. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
RC = VaR(T,c) \quad & \Leftrightarrow \quad -3\,W_0\Phi^{-1}[0.01\,,0\,,\sigma_{10}] = -W_0\Phi^{-1}[1-c\,,\mu_T\,,\sigma_T] \\
& \Leftrightarrow \quad 3\sigma_{10}\Phi^{-1}[0.01\,,0\,,1] = \mu_T + \sigma_Y\Phi^{-1}[1-c\,,0\,,1] \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\mu_T}{\sigma_T} = \frac{3\Phi^{-1}[0.01\,,0\,,1]}{\frac{\sigma_T}{\sigma_{10}}} - \Phi^{-1}[1-c\,,0\,,1] \quad (**)
\end{aligned}
$$

Cette interprétation établit donc une relation entre $\frac{\mu_T}{\sigma_T}$, $\frac{\sigma_T}{\sigma_{10}}$ et le quantile *(1-c)*. Tout au long de ce qui suit, le lecteur pourra se référer au graphique 5 pour mieux visualiser les différents résultats.

Considérons le cas dans lequel les moyennes des rendements à dix jours et un an sont nulles et la volatilité suit la loi d'échelle : $\sigma_T = \sqrt{\frac{T}{10}}\sigma_{10} = 5\sigma_{10}$. Sous ces conditions, la relation (**) implique que le Capital Réglementaire correspond au quantile à *8.14%*.

Les résultats obtenus à la section précédente permettent de déterminer, pour nos données, les quantiles auxquels correspond le Capital Réglementaire. Pour le modèle ASP, le Capital Réglementaire correspond au quantile à *8%* (proche de la valeur théorique de *8.14%*) ; pour les modèles d'allocation, le Capital Réglementaire s'interprète cette fois comme un quantile à *5%*, *5.3%* et *4.8%* respectivement pour les modèles Statique, Performance et Moyenne-Variance.

Considérons ensuite le cas où nous désirons interpréter le Capital Réglementaire comme le quantile à *1-c = 0.1%* de la distribution annuelle ; cela implique une relation entre $\frac{\mu_T}{\sigma_T}$ et $\frac{\sigma_T}{\sigma_{10}}$.

Si le drift annuel est nul, la solution impose que $\sigma_T \approx 2.26\sigma_{10}$, ce qui est bien inférieur à la loi d'échelle usuelle qui dicte $\sigma_T = 5\sigma_{10}$

Si le drift annuel est non nul, mais raisonnable, c'est-à-dire que $\frac{\mu_T}{\sigma_T} \approx \frac{1}{4}$ (comme dans nos simulations), le ratio de volatilité devient $\sigma_T \approx 2.46\sigma_{10}$.

Dans les simulations, ce ratio est plutôt de l'ordre de 4.5 à 5, proche de la loi d'échelle, ce qui signifie que le Capital Réglementaire est inférieur au quantile à *0.1%*, c'est-à-dire au Capital Économique.

Selon cette interprétation du Capital Réglementaire en tant que quantile, il existe une contrainte implicite reliant la volatilité à dix jours (à partir de laquelle le Capital Réglementaire est calculé) et la volatilité annuelle, relation qui tend à réduire la volatilité annuelle par rapport à la loi d'échelle. Faut-il interpréter cela comme le fait que Bâle admet une hypothèse implicite selon laquelle la gestion du portefeuille tend justement à réduire la volatilité annuelle ? Nos exemples simplistes n'étant pas gérés de façon très réalistes, nous ne pouvons pas vraiment conclure sur ce point.

Par ailleurs, une autre difficulté évidente dans la possibilité de comparer le Capital Économique et le Capital Réglementaire est que le Capital Économique dépend de la Banque considérée, de par l'utilisation du niveau de confiance correspondant au degré de solvabilité de celle-ci et pas le Capital Réglementaire. Peut-être faudrait-il alors considérer le Capital Réglementaire comme celui d'une Banque générique.

3- Pourquoi le Capital ASP est-il plus grand que le Capital Réglementaire ?

Si nous cherchons à comparer directement le Capital ASP au Capital Réglementaire, alors ce dernier correspond au quantile à *8%* de la distribution modélisée par ASP ; cette probabilité serait donc presque cent fois supérieure au niveau de confiance correspondant au degré de solvabilité de la Banque, à savoir *0.1%*. Il semble donc caduque de vouloir interpréter le Capital Réglementaire de cette manière.

Une démarche plus analytique peut montrer par quelques calculs simples que la définition même du Capital Réglementaire ne permet pas de l'interpréter comme le quantile d'une distribution à un an. En effet, en supposant que la distribution journalière est une normale centrée, il existe alors des relations exactes entre les VaR calculées sur des horizons distincts avec des niveaux de confiance différents.

Lorsque la distribution est une normale centrée, la VaR s'exprime simplement comme :

$$VaR(t,c) = -\alpha_{1-c}\sigma_t = \alpha_c\sigma_t$$

La figure 3 montre alors comment convertir simplement une VaR journalière standard en un quantile annuel. De plus, dans la mesure où les institutions financières sont autorisées à calculer leur Capital Réglementaire à partir de leurs VaR journalières[16], le même

[16] Voir I-3/ pour les critères de calcul du Capital Réglementaire.

principe s'applique pour extrapoler une VaR journalière standard en Capital Réglementaire.

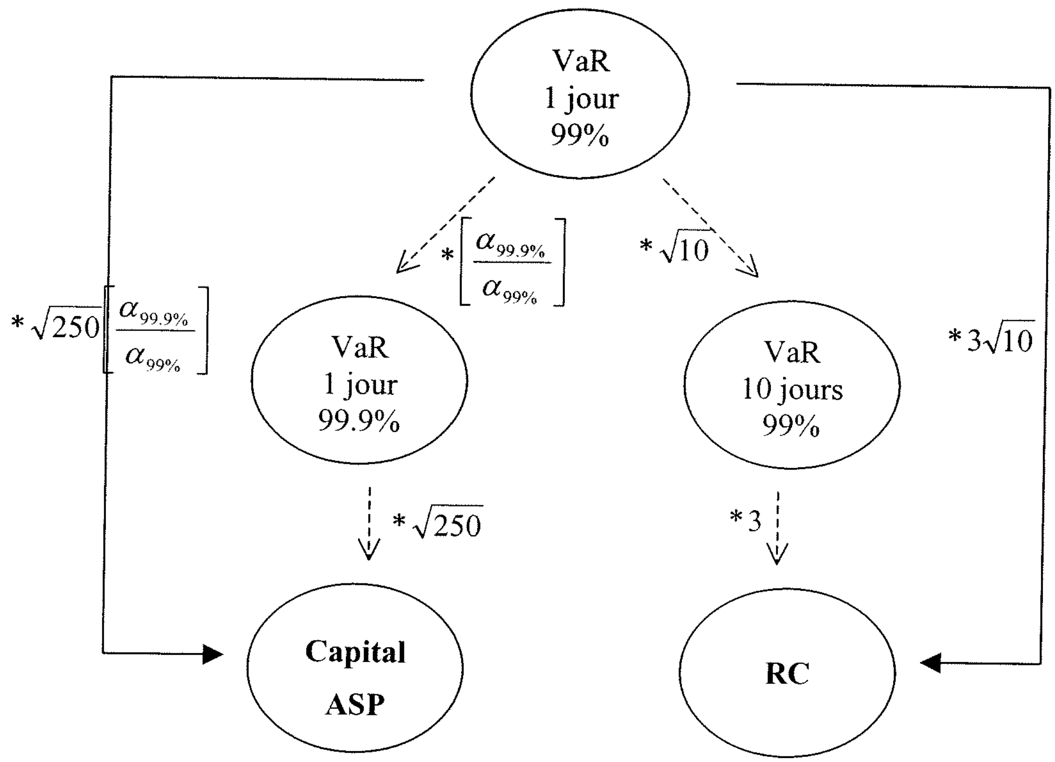


Figure 3 : *De la VaR un jour à 99% au Capital ASP et au Capital Réglementaire.*

De manière plus numérique, le Capital ASP et le Capital Réglementaire sont comparables si les deux facteurs multiplicatifs obtenus sont du même ordre de grandeur. Nous calculons donc leur rapport pour évaluer le fondement de cette hypothèse.

$$Ratio = \frac{\sqrt{250}\,\frac{\alpha_{99.9\%}}{\alpha_{99\%}}}{3\sqrt{10}} \approx 2.2 \quad >> 1$$

En calculant le rapport du Capital ASP sur le Capital Réglementaire obtenu pour notre simulation, nous obtenons $\frac{66.7}{30.4} \approx 2.2$, ce qui est tout à fait satisfaisant.

Ainsi, dans le cas d'une distribution normale centrée, il est logique d'observer un Capital Réglementaire environ deux fois plus faible que le Capital ASP. Ceci fournit donc un argument supplémentaire contre l'interprétation hâtive du Capital Réglementaire en tant que quantile d'une distribution annuelle.

Conclusion

Les problèmes essentiels du calcul du Capital Économique pour le risque de marché sont des problèmes d'horizon et de dynamique : d'une part, le choix d'un horizon d'un an pour le calcul du capital de la Banque est cohérent avec le rôle qui lui est destiné, à savoir l'allocation de capital aux différentes lignes d'affaire de la compagnie ; d'autre part, du fait de la réactivité du portefeuille de marché, le risque qui lui est associé ne peut pas être naturellement appréhendé sur un horizon aussi long. Le propos de notre étude était donc de prendre la mesure de la difficulté d'une harmonisation de ces caractéristiques bien distinctes.

Pour ce faire, nous avons choisi d'étudier plusieurs portefeuilles, définis par différentes dynamiques introduites dans l'allocation périodique de ces portefeuilles. Néanmoins, ces dynamiques basiques, déterminées par une vision à court terme, n'ont pas permis de définir de véritables stratégies sur le long terme, qui auraient pu influencer de manière significative la distribution à un an ; elles ne nous ont donc pas permis de conclure à ce niveau. En revanche, l'étude montre tout de même que l'estimation fournie par le modèle ASP semble la plus conservatrice : ainsi, elle peut toujours être utilisée comme référence sur-protectrice.

Jusqu'à présent, aucune méthode de calcul du Capital Économique n'a fait la preuve de sa réelle supériorité, que ce soit au niveau de son efficacité ou de sa légitimité théorique. On peut donc se demander si le problème n'est pas mal posé dans sa forme actuelle.

En effet, dans la mesure où nous avons montré que les définitions respectives des deux mesures de risque que sont le Capital Économique, estimé dans notre situation à partir du modèle ASP et le Capital Réglementaire imposé par le BIS - Bank for International Settlements -, il ne s'agirait plus de chercher nécessairement à aligner ces deux mesures. Il s'agirait peut-être d'abord de cerner les motivations qui sous-tendent leur calcul respectif : plus particulièrement, en ce qui concerne le Capital Réglementaire, la signification précise du facteur multiplicatif trois semble cruciale.

Actuellement, les solutions les plus élémentaires semblent avoir l'approbation générale : en effet, selon un sondage récemment réalisé parmi des banques majoritairement nord-américaines, la plupart d'entre elles utilisent une combinaison d'un simple multiple de VaR et d'analyses des pertes potentielles sous certains scénarios extrêmes pour attribuer du capital à chacune de leurs activités de marché. Cette méthode d'allocation laisse donc une place importante à des considérations qualitatives. Par ailleurs, en ce qui concerne la comparaison du Capital Économique du risque de marché avec son Capital Réglementaire, il n'y a aucune tendance générale : pour la moitié des répondants, le Capital Économique est supérieur au Capital Réglementaire.

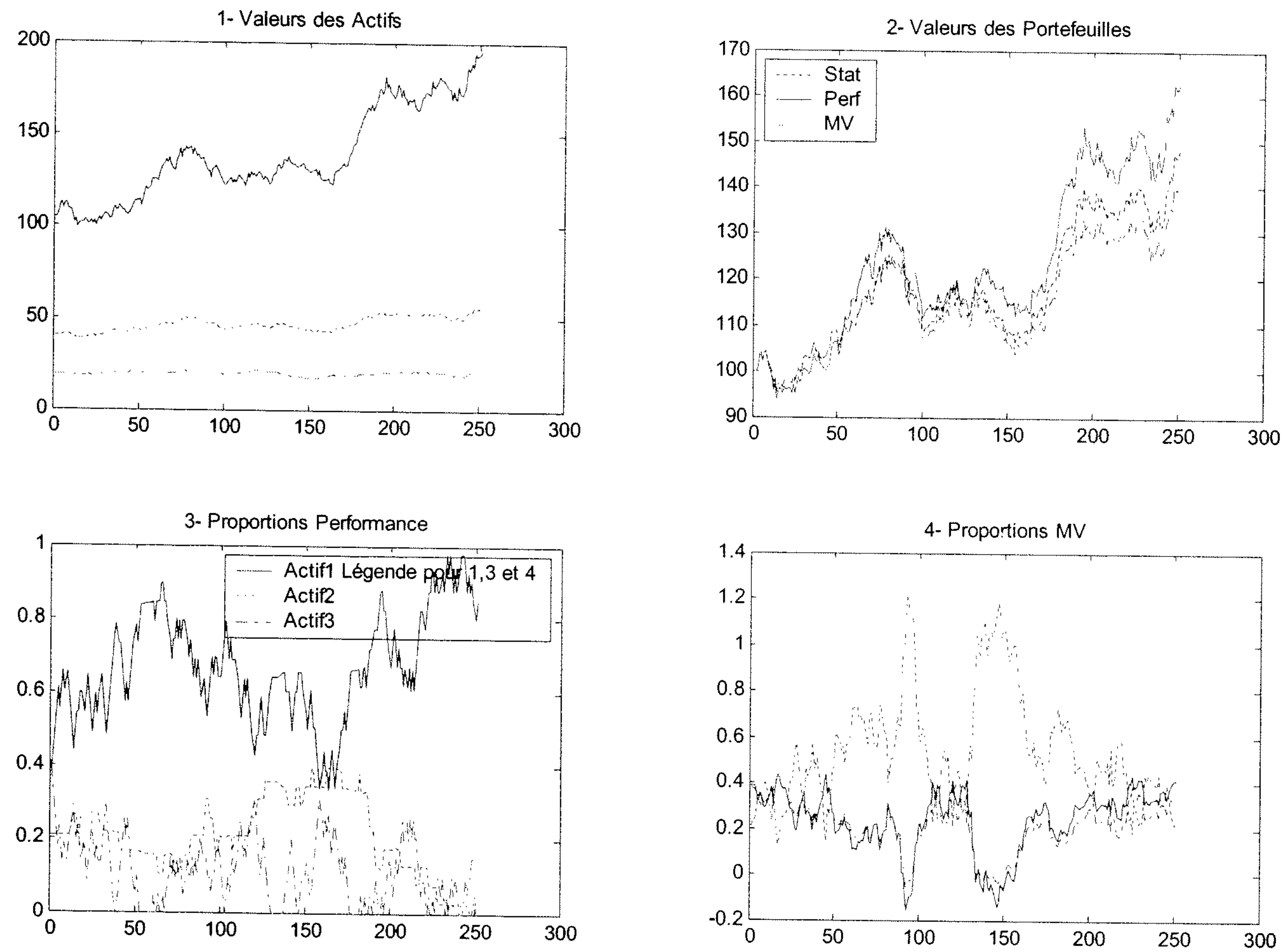
Parallèlement à ces méthodes rudimentaires utilisées "faute de mieux", de nouvelles pistes de recherche semblent également émerger et en voici une par exemple. Les pertes observées par une Banque résultent de l'impossibilité (pour diverses raisons comme le manque de liquidité) de corriger les positions actuelles suffisamment rapidement pour répondre à l'évolution du marché. On pourrait alors tenter de définir le Capital

Économique en considérant les pertes associées et le temps nécessaire à la réduction des positions du portefeuille jusqu'à un portefeuille minimal de référence et, ce, étant données des conditions adverses du marché.

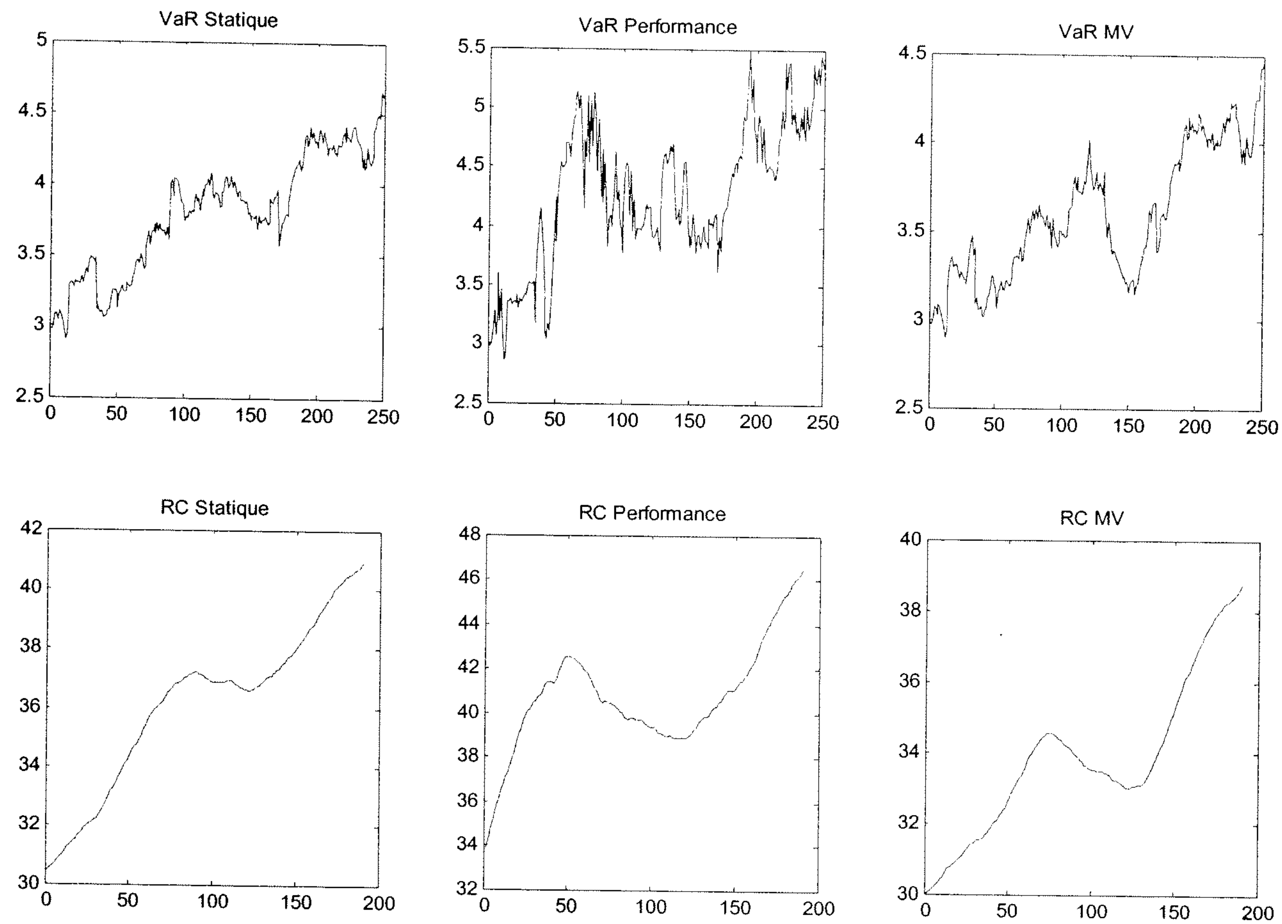
Le capital de la Banque étant une ressource limitée, son utilisation doit être optimale et demande alors une gestion efficace des risques de l'institution. Le concept d'ajustement du rendement au risque ou RAROC, *Risk-Adjusted Return On Capital*, tente d'uniformiser la mesure du risque à travers toutes les activités de la Banque, en établissant des références pour évaluer le rendement des différentes lignes d'affaire. Et, si l'évaluation de chaque type de risque - risque de crédit, de marché et opérationnel - pris séparément est cohérente, la mesure se heurte inévitablement à des difficultés lors de l'intégration de ces capitaux non diversifiés, difficultés qui proviennent du caractère intrinsèque de chacun des risques.

La recherche d'une mesure globale de risque, facilitant l'évaluation des performances au sein des institutions et entre les institutions, qui répondait à un besoin du grand public d'une clarification et d'une simplification des processus de gestion de capital, semble donc montrer les limites de sa portée. Peut-être faudrait-il alors considérer un peu différemment la notion même d'évènement risqué, en se concentrant d'avantage sur les évènements adverses (c'est-à-dire dommageables pour l'institution mais pas catastrophiques), dans la mesure où ce sont eux qui, dans la réalité, consomment petit à petit le capital.

Annexes

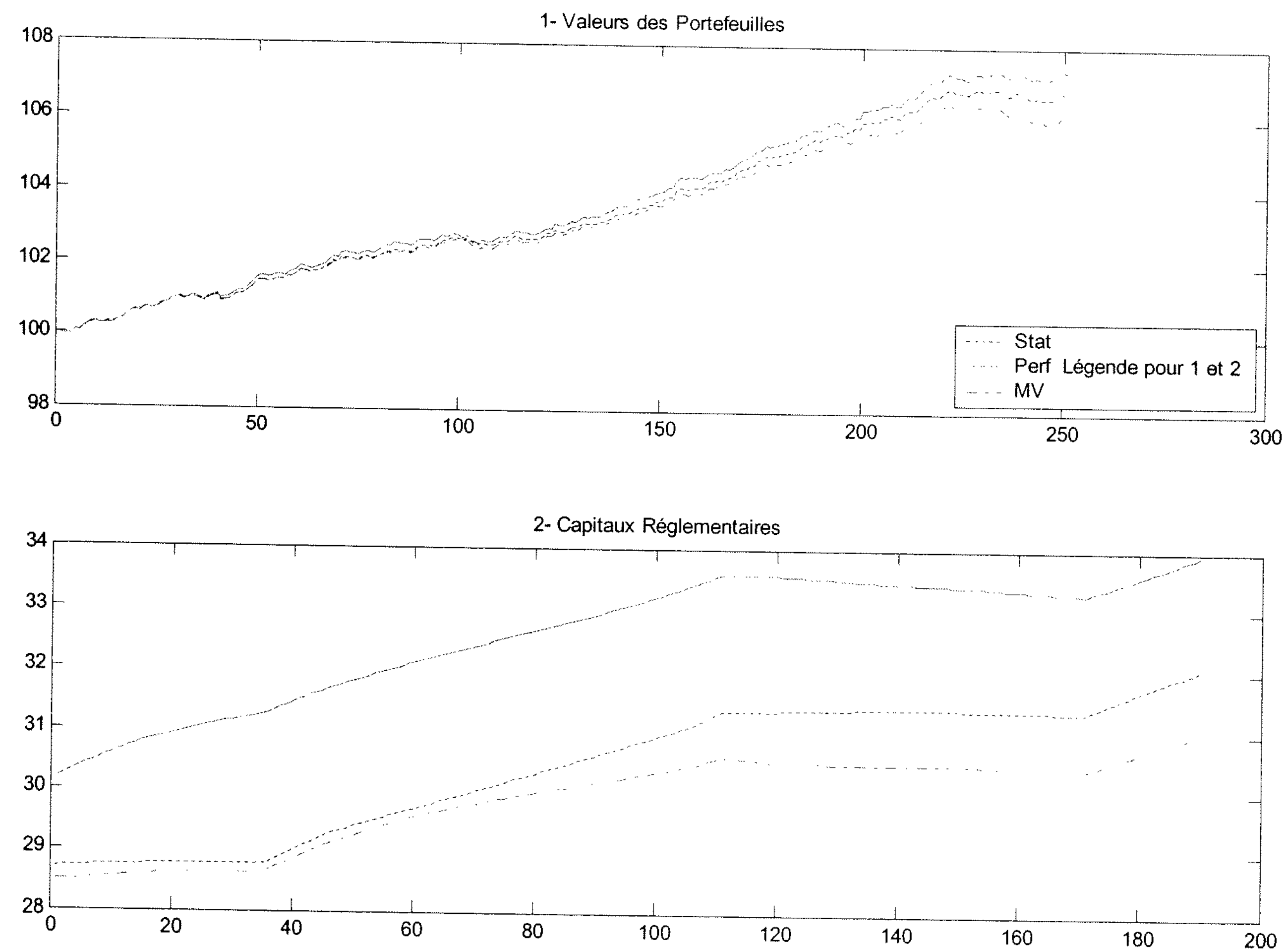


Graphique 1 : *Mise en évidence de la dynamique des portefeuilles sur une année.*

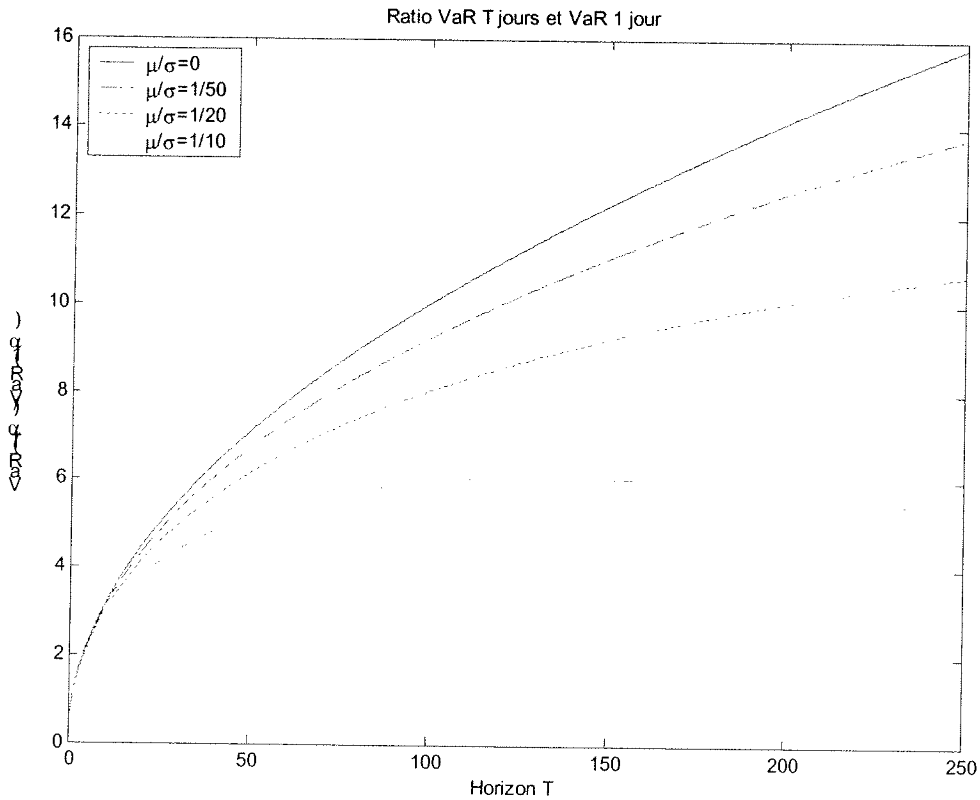


Graphique 2 : *Mesure du risque des différents portefeuilles.*[17]

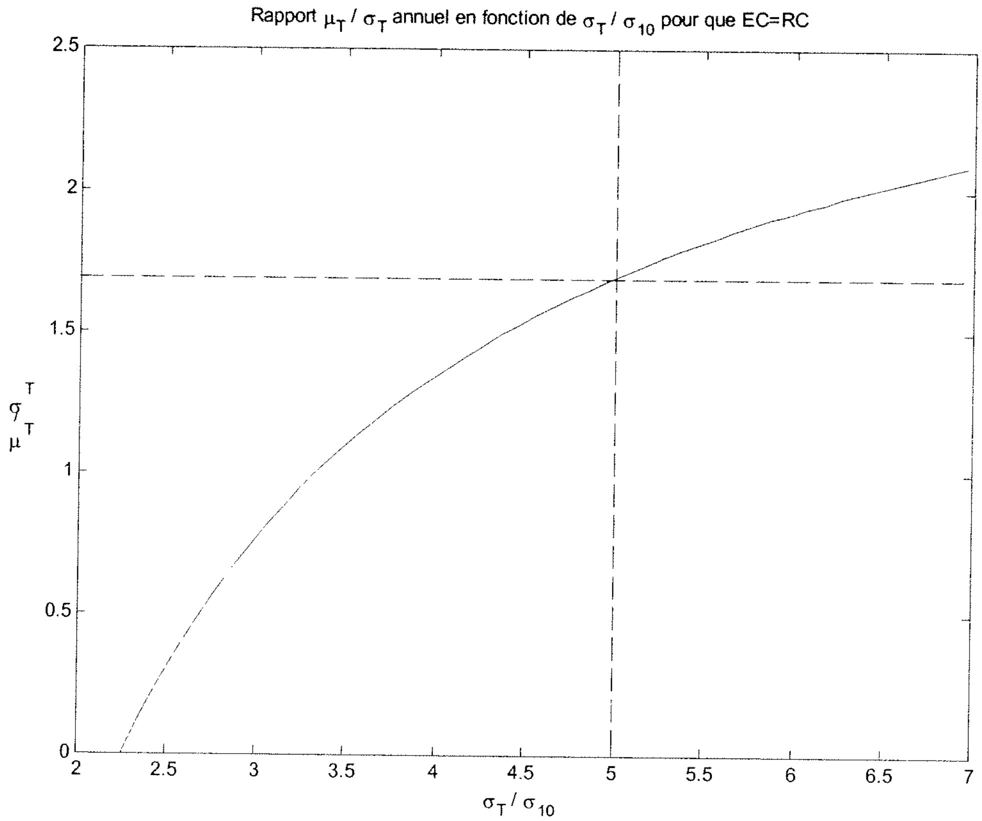
[17] Comme le calcul du Capital Réglementaire nécessite une moyenne sur les 60 derniers jours, il n'est calculé qu'à partir du 61ème jour, noté 0 sur le graphique.



<u>Graphique 3</u> : *Valeurs et Capitaux Réglementaires associés aux trois allocations et moyennés sur les 1000 réalisations de la simulation.*



<u>Graphique 4</u> : *Ratio de VaR en fonction de l'horizon pour différents ratios moyenne/volatilité.*



<u>Graphique 5</u> : *Ratio moyenne/volatilité annuel en fonction du ratio des volatilités annuelle et à 10 jours.*

Bibliographie

Arzner Ph., Delbaen F., J.M. Eber et D. Heath, 1999, ''Coherent measures of risk'', *Mathematical finance* 9 (July).

Basle Committee on Banking Supervision, 1996a, *Supervisory framework for the use of ''Backtesting'' in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements,* BIS, Basle, Suisse.

Basle Committee on Banking Supervision, 1996b, *Amendment to the Basle Capital Accord to incorporate market risk,* BIS, Basle, Suisse.

Butler J.S. et B. Schachter, 1998, ''Estimating Value-at-Risk with a precision measure by combining kernel estimation with historical simulation'', *Rewiew of Derivatives Research* 1

Campbell J.Y., A.W. Lo and A.C. MacKinlay, *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997.

Christoffersen P., J. Hahn et A. Inoue, 2001, ''Testing and comparing Value-at-Risk measures'', *Journal of empirical finance.*

Crouhy M., D. Galai et R. Mark, *Risk management,* McGraw-Hill, New-York.

Danielsson J., 2002, ''Why risk models can't be trusted'', *Erisk.com.*

Davé R. et G. Stahl, ''On the accuracy of VaR estimates based on the Variance-Covariance approach''

Hull J. et A. White, 1998, ''Incorporating volatility updating into historical simulation method for value at risk'', *Journal of risk* 1 (Fall)

Jackson P., D. Maude et W. Perraudin, 1997, ''Bank capital and Value-at-Risk'', *Journal of derivatives* 4 (Spring).

Jorion P. (second edition), *Value at risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk,* Chicago: Irwin, 1996b.

Kaufmann R. and P. Patie (intermediate report) ''Strategic long-term financial risks''

Lopez J., 1996, ''Regulatory evaluation of Value-at-Risk models''

Viala P., È. Briys, *Éléments de théorie financière*, Nathan, 1995