Université de Montréal

Superintégrabilité classique et quantique avec intégrale d'ordre trois

par
Frédérick Tremblay

Département de Physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en Physique

Décembre, 2005

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Superintégrabilité classique et quantique avec intégrale d'ordre trois

présenté par:

Frédérick Tremblay

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Manu Paranjape,	président-rapporteur
Pavel Winternitz,	directeur de recherche
Véronique Hussin,	membre du jury

Mémoire accepté le: 05/04/06

RÉSUMÉ

Ce mémoire se présente comme étant une poursuite de l'étude de la superintégrabilité classique et quantique dans un espace euclidien en deux dimensions avec une intégrale d'ordre trois. La classification de tous les Hamiltoniens séparables en coordonnées cartésiennes qui admettent une constante du mouvement d'ordre trois en les impulsions ayant déjà été complétée, nous proposons une poursuite de ces recherches dans le cas où le système se sépare en coordonnées polaires. Premièrement, nous dérivons les équations qui déterminent complètement le potentiel en ces coordonnées et tentons ensuite de les solutionner selon les différentes simplifications que nous pouvons accomplir sur l'intégrale par l'action du groupe eulidien $E(2)$. Finalement, nous présentons les équations qui caractérisent entièrement l'intégrabilité euclidienne cubique en coordonnées paraboliques.

Mots-clés : intégrabilité, superintégrabilité, symétries, commutation, Hamiltonien, séparation de variables, transformations euclidiennes.

ABSTRACT

This thesis is a contribution to the study of classical and quantum superintegrability in a two-dimensional Euclidean space involving a third order integral of motion. A classification of Hamiltonian systems separable in cartesian coordinates that allow a third order invariant in the momenta has already been performed. We propose an extension of this work and investigate Hamiltonians that admit separation of variables in polar coordinates and allow the existence of a third order constant of motion. We determine the equations that characterize the potential in these coordinates and then attempt to solve them while simplifying the integral through the action of Euclidean group E(2). Futhermore, the equations which describe the classical and quantum cubic Euclidean integrability are established in parabolic coordinates.

Keywords : integrability, superintegrability, symmetries, commutation, Hamiltonian, separation of variables, euclidean transformations.

TABLE DES MATIÈRES

Une dernière fois, par contre cette fois-ci,
un tout petit peu pour Mélissa...

«A quoi travaillez-vous ?» demanda-t-on à Monsieur K. Monsieur K. répondit :« J'ai beaucoup de mal, je prépare ma prochaine erreur.»

Bertolt Brecht *-Histoire d'almanach*

REMERCIEMENTS

D'un point vue académique, lors des deux dernières années, l'opportunité de tenter d'accomplir à tous les jours ce que j'ose croire le plus apprécier s'est offerte à moi. C'est pour cette raison que d'emblée, j'offre mes premiers remerciements à mon directeur Pavel Winternitz pour m'avoir introduit à l'univers de la physique-mathématique, pour le soutien financier, pour l'encadrement, pour ses connaissances et son intuition qui surprennent par leur nombre en toutes occasions, pour les leçons d'humilité, pour les "il faut faire les calculs"...

D'un point de vue plus personnel, les deux dernières années se sont présentées sous une dureté excessivement éreintante. Il va de soi qu'en second lieu, je remercie tous ceux qui ont ricané avec et de moi :

Benoit Palmieri, c'est comme ça mon vieux. Je ne peux pas l'expliquer. Steven Sanche pour m'avoir sauvé la vie régulièrement... Ma famille et tout spécialement ma soeur qui avait le coeur qui battait au même rythme que le mien et qui m'a réconforté un peu à tous les jours en me démontrant qu'elle était un peu plus folle que moi. Marie-Hélène Nicol, je te l'avais prédit que tu allais te rendre plus loin que moi ! Et tout ceux qui de près ou de loin ont réussi à me faire sourire : Carolyne Stafford, Olivier Bonneau, Maxime Lauzon, Valérie Dubois, Charles Bariteau, Francis Loranger, Dany Majard, Francis Valiquette, tous les étudiants de mes démonstrations, le personnel du C.R.M. et un peu moins sourire : Sébastien Sélim !

Finalement, la dédicace, la dédiée, la déliée de la source, le délit... Mélissa Beaudet. Peut-être que sous des souvenirs castrés, adviendra mon sort. Le poids de toi et moi se pèse maintenant sous des mots que je ne comprends plus et que je ne sais plus parler. Tout de même, Merci, doucement je reconstruis l'espace et parfois, je me rappelle un peu , un BI^2.

INTRODUCTION

L'étude des systèmes intégrables est depuis longtemps une branche très importante de la physique-mathématique. D'un point de vue physique, l'essence même de ces considérations repose justement dans la recherche de quantités conservées pour des systèmes mécaniques. En fait, les propriétés géométriques et dynamiques d'un problème physique quelconque trouvent directement leur signification dans le formalisme mathématique de leur contexte respectif.

En mécanique classique, la caractérisation des systèmes intégrables hamiltoniens nous est fournie par le théorème de Liouville. Celui-ci s'est sensiblement établi comme étant un des premiers résultats mathématiques importants de la mécanique analytique telle qu'on la connaît de nos jours. Par la suite, nombre de grands mathématiciens et physiciens se sont impliqués dans l'élaboration d'un formalisme satisfaisant qui permettait d'établir les fondements de la mécanique classique et l'apparition de la théorie du chaos. Ainsi, en proposant une généralisation du théorême de Liouville, on définissait le comportement spécialement intéressant des systèmes intégrables. Bref, tous ces travaux n'ont fait qu'accroître la nécessité d'une étude détaillée de l'intégrabilité des systèmes mécaniques. Cette dernière est motivée par le fait que ceux-ci sont d'une rareté substantielle en physique et en mathématique et qu'une telle recherche peut être profitable dans l'étude des systémes chaotiques ou non-intégrables.

Avec l'avènement et le développement de la mécanique quantique dans les années 1920, il s'ensuivit qu'une tâche semblable devait être accomplie selon ce nouveau contexte. En ce qui concerne l'étude des systèmes intégrables, la transition semblait vouloir s'imposer naturellement. Le passage du formalisme mathématique de la mécanique classique à celui de la mécanique quantique a ainsi permis de poser la définition de l'intégrabilité quantique en terme d'opérateurs et de relations de commutation.

Toutefois, il n'existe toujours pas d'équivalent quantique du fameux théorème de Liouville, les notions d'indépendance entre les intégrales du mouvement quantiques restent contestées et contestables[16,19], l'élaboration d'une théorie des systèmes chaotiques quantiques reste toujours incomplète[45] et d'autres aspects de la version de l'intégrabilité quantique demeurent conjecturés.

Malgré tout, plusieurs recherches et classifications des sytèmes intégrables classiques et quantiques ont été complétées à ce jour. De l'approche hamiltonienne, on recherche les systèmes qui admettent, majoritairement, des intégrales du mouvement polynomiales en les quantités de mouvement. De cette façon, une classification de tous les systèmes intégrables classiques et quantiques possédant une intégrale d'ordre deux en les impulsions fut complétée dans un espace euclidien de dimension deux et trois[13,32,46]. On a pu répertorier les cas dans lequels il était possible d'intégrer un système hamiltonien avec deux et trois degrés de liberté. Il advient que l'existence d'une intégrale d'ordre deux en les impulsions entraîne la séparation des variables dans l'équation d'Hamilton-Jacobi en mécanique classique et respectivement l'équation de Schrödinger en mécanique quantique dans un des systèmes de coordonnées suivants : cartésiens, polaires, paraboliques et elliptiques.

Par la suite, des travaux semblables ont permis de dénombrer les sytèmes hamiltoniens qui admettent plus de quantités conservées que de degrés de liberté. Aucune différence ne fut constatée entre les cas classique et quantique. Ainsi furent, d'une certaine façon, établies les bases de la théorie des sytèmes dit "superintégrables" (plus qu'intégrables). Par la suite, plusieurs études s'en sont suivies concernant ce type de systèmes dans différentes situations[11,22–27,30,31,37–39,44].

Cependant dans les années 80-90, Hietarinta démontrait que l'existence d'une intégrale d'ordre trois ou quatre, dans un espace euclidien à deux dimensions, en mécanique quantique, faisait apparaître des différences importantes entre l'intégrabilité quantique et classique[17–19] : la correspondance entre l'intégrabilité classique et quantique n'est tout simplement pas bijective.

En fait, plus récemment, les classifications des hamiltoniens à deux degrés de liberté dans un espace euclidien à deux dimensions qui possèdent une constante du mouvement d'ordre trois en plus d'admettre, en premier lieu, une intégrale d'ordre un [14] et par la suite la séparabilité du hamiltonien en coordonnées cartésiennes furent complètées[15]. Ces travaux ont permis de confirmer les résultats mis à jour par Hietarinta. En plus, il s'est avéré que toutes les équations différentielles qui déterminaient le potentiel, possédaient la propriété de Painlevé et dans quelques cas, le potentiel présentait une partie purement quantique sous forme de transcendants de Painlevé ou de fonctions elliptiques. De cette façon, l'étude des sytèmes superintégrables se veut d'un intérêt considérable dû à la possibilité de mettre en évidence un lien direct entre les équations régissant l'intégrabilité d'un système mécanique, la propriété de Painlevé et d'autres particularités de la théories des équations différentielles non-linéaires.

Ainsi, ce mémoire se veut une continuité des travaux entamés dans [14, 15] pour le cas où le hamiltonien est séparable en coordonnées polaires.

Tout d'abord, dans le chapitre 1, nous introduisons les éléments théoriques et définitions de base de l'intégrabilité et superintégrabilité classique et quantique. Dans le chapitre 2, nous présentons les résultats ayant été établis dans le passé concernant l'existence d'une intégrale d'ordre un, deux et trois dans un espace euclidien à deux dimensions. Puis, dans le chapitre 3, nous établissons les conditons qui déterminent complètement un invariant d'ordre trois en coordonnées polaires en plus des différentes réductions admissibles sur ce type d'invariant. Le quatrième chapitre est entièrement consacré aux démarches et résultats obtenus dans le cas où le hamiltonien admet la séparation de variables en coordonnées polaires. Finalement, dans le chapitre 5, nous proposons le système d'équations à satisfaire dans l'étude de l'intégrabilité cubique en coordonnées paraboliques en plus de commenter brièvement le contexte elliptique.

CHAPITRE 1

DÉFINITIONS ET THÉORIE

Ce chapitre est consacré à la présentation des éléments et fondements théoriques des systèmes intégrables et superintégrables en mécanique classique et quantique de façon complètement générale pour un système à n degrés de liberté. Il est à noter ici et tout au long de ce mémoire, que l'approche mathématique adoptée sera en terme du formalisme hamiltonien dans un espace euclidien.

1.1 Mécanique classique

Nous allons d'abord présenter les éléments théoriques nécessaires à la présentation du contexte de l'intégrabilité classique.

1.1.1 Théorie

Considérons ici un Hamiltonien à n degrés de liberté de la forme suivante :

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k^2}{2m} + V(\mathbf{q}), \tag{1.1.1}$$

pour $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n), \mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ et $V(\mathbf{q})$ le potentiel du système. Dans ce cas, le hamiltonien est associé à un système conservatif, car celui-ci ne dépend pas explicitement du temps. Ainsi, l'énergie du système, étant représentée par H, est conservée.

Les équations du mouvement associées à ce système sont les équations de Hamilton :

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \tag{1.1.2}$$

Les solutions de ces équations sont représentées dans un espace de phases, engendré par les coordonnées $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ et impulsions $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ généralisées, à

2n dimensions.

Une quantité physique est dite conservée, si elle reste constante selon une variation du temps. Par exemple, nous avons que (1.1.1) est conservé, donc,

$$\frac{dH}{dt} = 0 \tag{1.1.3}$$

Nous nommons ce type de quantité *intégrale ou constante du mouvement* selon les habitudes linguistiques de la physique.

De plus, définissons pour deux fonctions différentiables $f(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ et $g(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$:

$$[f, g]_{cp} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \tag{1.1.4}$$

comme étant *le crochet de Poisson*. Ainsi, nous pouvons réexprimer la dérivée par rapport au temps d'une fonction $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ en termes de (1.1.1) et de (1.1.4) :

$$\frac{df}{dt} = [f, H]_{cp} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{1.1.5}$$

Directement, nous remarquons que pour $f = H$,

$$\frac{dH}{dt} = [H, H]_{cp} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Et dans le cas de (1.1.1), $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ce qui justifie le fait que H, l'énergie du système, est une intégrale du mouvement. Fait intéressant à remarquer :

$$[q_i, p_j]_{cp} = \delta_{ij}$$

Finalement, en guise de dernier rappel en ce qui a trait à la théorie classique, nous allons brièvement énoncer le concept de transformation canonique. En ce qui nous concerne, le fait important à rappeler concernant ce type de transformations est qu'en considérant un changement de coordonnées inversible dans l'espace de phases :

$$(\mathbf{q},\mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q},\mathbf{P})$$

avec,

$$[q_i, p_j]_{cp} = [Q_i, P_j]_{cp} = \delta_{ij}$$

Les équations du mouvement (1.1.2) demeurent valides dans les nouvelles variables $(\mathbf{Q},\mathbf{P})$ tel que :

$$\frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i, \qquad \frac{\partial K}{\partial Q_i} = -\dot{P}_i$$

avec le Hamiltonien : $K(\mathbf{Q},\mathbf{P}) = H(\mathbf{q},\mathbf{p})$.

1.1.2 Intégrabilité et superintégrabilité

Nous allons maintenant définir la notion d'intégrabilité en mécanique classique.

Definition 1.1.2.1. *Un système représenté par un Hamiltonien de la forme (1.1.1) est dit intégrable (ou Liouville-intégrable), s'il existe n fonctions bien définies $X_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$, incluant H, dans l'espace de phases M :*

$$\frac{dX_i}{dt} = [X_i, H]_{cp} = 0 \tag{1.1.6}$$

$$[X_i, X_j]_{cp} = 0 \tag{1.1.7}$$

$$rang\frac{\partial(X_1, ..., X_n)}{\partial(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)} = n \tag{1.1.8}$$

(1.1.6) nous affirme que $X(\mathbf{q},\mathbf{p})$ est bel et bien une intégrale du mouvement, (1.1.7) nous indique que toutes les intégrales sont en *involution* et (1.1.8) fait intervenir le théorème des fonctions implicites en imposant l'indépendance fonctionnelle entre les $X_i(\mathbf{q},\mathbf{p})$.

Comme nous avons mentionné dans l'**Introduction**, ces systèmes possèdent des propriétés très intéressantes. En fait, le caractère dynamique imposé par l'intégrabilité d'un système se détaille dans les énoncés du théorème de Liouville et des résultats qui en découlent [1,2,36].

Théorème (Liouville). *Soit $X_1, \ldots, X_n$, n fonctions bien définies qui respectent (1.1.6) à (1.1.8) $\forall i, j = 1, \ldots, n$ dans un espace de phase M à 2n dimensions. Alors :*

1. *$M_a = \{(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \in M : X_i = c_i\}$ est une variété invariante sous le flot induit par le Hamiltonien $H = X_1$;*
2. *les équations (1.1.2) peuvent être solutionnées par quadrature ;*
3. *Si M_a est compacte et connexe, alors celle-ci est difféomorphe à un tore de dimension n.*

Ainsi, comme nous pouvons le constater, le précédent théorème exhibe les conséquences physiques de l'intégrabilité d'un système hamiltonien. Les systèmes intégrables possèdent des comportements très réguliers souvent caractérisés par une périodicité quasi-parfaite. De plus, les trajectoires de ces systèmes ne s'étalent pas complètement dans tout l'espace de configuration, contrairement à celles des systèmes chaotiques, mais ne sont confinées qu'à une partie de celui-ci.

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, l'étude de ces systèmes s'avère d'une pertinence considérable à la caractérisation de la dynamique des systèmes chaotiques. Étant une propriété rare, l'intégrabilité propose de fortes restrictions et contraintes à la physique de tels systèmes ; de petites perturbations faites sur un système intégrable risquent fort probablement de lui faire perdre cette propriété. Il s'avère qu'en physique, la théorie des perturbations nous aide essentiellement à mieux interpréter le sens physique d'un problème considéré : en perturbant un système physique, on modifie le comportement de celui-ci et la perspective de modéliser un sens physique plus réel s'avère plus abordable. De cette façon, l'étude de l'intégrabilité physique se justifie par sa rareté et par la perspective qu'elle peut proposer dans l'interprétation des principales différences intervenant entre l'intégrabilité et le chaos et dans la définition de la frontière qui sépare ces deux contextes.

Régulièrement, il advient dans l'étude de l'intégrabilité, que l'on détecte des systèmes qui possèdent plus d'intégrales du mouvement que de degrés de liberté. Ces systèmes sont forcément soumis à des contraintes encore plus strictes et présentent des comportements encore plus réguliers que ceux définis un peu plus haut.

On définit cette particularité :

Definition 1.1.2.2. *Un système représenté par un Hamiltonien de la forme (1.1.1) est dit superintégrable , s'il est intégrable et s'il possède en plus k autres intégrales $Y_j(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$:*

$$\frac{dY_i}{dt} = [Y_i, H]_{cp} = 0 \tag{1.1.9}$$

$$rang\frac{\partial(X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_k)}{\partial(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)} = n + k \tag{1.1.10}$$

On dit qu'un système est maximalement superintégrable si $k = n + 1$ et minimalement superintégrable si $k = 1$.

Nous constatons que nous ne pourrions pas avoir plus de 2n-1 intégrales du mouvement indépendantes bien définies dans un espace de phases à 2n dimensions. Par le théorème des fonctions implicites, il en résulterait que chacune des 2n coordonnées canoniques $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ seraient exprimables localement en termes des 2n constantes du mouvement. En conséquence, l'espace de phase serait confiné à un ensemble de points fixes.

Les systèmes superintégrables ont des propriétés encore plus rares que les systèmes intégrables. Dans l'espace des phases associé à un système maximalement superintégrable, la présence de l'ensemble des Y_j, contraint les trajectoires à être complètement déterminées et périodiques. Par exemple, mentionnons que l'oscillateur harmonique $V(\mathbf{r}) = \omega r^2$ et le potentiel de Coulomb $V(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r}$ sont les systèmes maximalement superintégrables les plus connus en n dimensions. De plus, mentionnons afin de mieux préciser le caractère de ces deux systèmes, qu'il a été démontré[6] que ces potentiels sont les seuls potentiels à symétrie sphérique pour lesquels toutes les trajectoires finies sont fermées.

1.2 Mécanique quantique

Nous allons maintenant présenter les principaux aspects théoriques quantiques qui vont nous permettre par la suite d'adapter les concepts d'intégrabilité et de superintégrabilité à la mécanique quantique. Il est à remarquer qu'il n'existe pas de résultats comparable au théorème de Liouville en mécanique quantique qui caractérise les systèmes intégrables et superintégrables. Il s'en suit par contre qu'il existe beaucoup de conjectures qui ont été proposées. Les différents calculs ayant été complétés en mécanique quantique postulent par eux-mêmes des propriétés particulièrement rares et intéressantes que semblent posséder ces systèmes, mais aucun résultat théorique n'a été démontré de façon générale.

1.2.1 Transition classique/quantique : observable et opérateur

Un des principaux postulats de la théorie quantique stipule que toute quantité physique (observable) est représentée par un opérateur de façon qu'une mesure expérimentale de cet opérateur est donnée par une des valeurs propres associées à celui-ci.[35]. Pour chaque observable $\hat{A}$, nous avons une équation aux valeurs propres :

$$\hat{A}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle$$

où a représente les valeurs propres et $|\Psi\rangle$ les fonctions ou vecteurs propres de $\hat{A}$. Ainsi, en mécanique quantique, on associe à la position l'opérateur :

$$\mathbf{x} \mapsto \hat{\mathbf{x}},$$

à l'impulsion :

$$\mathbf{p} \mapsto \hat{\mathbf{p}} = -\mathbf{i}\hbar\nabla,$$

à la composante en z du moment angulaire :

$$L \mapsto \hat{\mathbf{L}}_3 = -\mathbf{i}\hbar(\mathbf{y}\partial_\mathbf{x} - \mathbf{x}\partial_\mathbf{y})$$

et à l'énergie, l'opérateur Hamiltonien :

$$H \mapsto \hat{\mathbf{H}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{q}) \tag{1.2.1}$$

On remarque que chacun des opérateurs, présentés ci-dessus, ont la particularité d'être hermitiens ($\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}^\dagger$). La principale caractéristique de ces opérateurs, qui est d'un intérêt fondamental en physique, est que l'hermiticité entraîne que les valeurs propres associées à l'opérateur considéré sont réelles.

L'équation aux valeurs propres associée à $\hat{\mathbf{H}}$ est

$$\hat{\mathbf{H}}|\Psi\rangle = \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{q})\right)|\Psi\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{q})\right)|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \tag{1.2.2}$$

pour $|\Psi\rangle = |\Psi(\mathbf{q})\rangle$ avec $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)$. La dynamique de tout système physique non-relativiste et stationnaire est décrite par la dernière équation qui est connue sous le nom de l'équation de Schrödinger indépendante du temps. Dans ce contexte, la fonction propre $|\Psi\rangle$ ne dépend pas explicitement du temps. En fait, le développement temporel de $|\Psi\rangle$ se représente par

$$\hat{\mathbf{H}}|\Psi\rangle = \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{q})\right)|\Psi\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{q})\right)|\Psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle \tag{1.2.3}$$

Dans la limite classique, (1.2.3) se réduit à l'équation dite d'Hamilton-Jacobi qui découle du formalisme hamiltonien présenté dans la première section.

La caractérisation des quantités physiques quantiques en terme d'opérateurs hermitiens met en évidence d'importantes différences entre les contextes classique et quantique, soit le fait que les observables ne commutent plus nécessairement entre elles. L'interprétation de la théorie quantique repose, en bonne partie, sur les relations de commutation entre les opérateurs considérés.

Une quantité conservée $\hat{\mathbf{X}}$ est maintenant définie comme étant un opérateur qui commute avec l'opérateur Hamiltonien :

$$[\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{X}}] = \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$$

Cette propriété de la commutation entre deux opérateurs provient d'un résultat d'algèbre linéaire qui est d'une importance capitale en mécanique quantique : *Soient* $\hat{\mathbf{A}}$ *et* $\hat{\mathbf{B}}$ *deux opérateurs hermitiens qui commutent. Ceux-ci possèdent le même ensemble de vecteurs ou de fonctions propres.* En fait, l'importance physique de cette propriété est que pour deux quantités physiques représentées par deux opérateurs hermitiens qui commutent, celles-ci peuvent être définies simultanément selon le même ensemble de fonctions propres.

Bref, la correspondance entre le crochet de Poisson et le commutateur est :

$$[\,,]_{cp} \mapsto \frac{i}{\hbar}[\,,] + o(\hbar)$$

Ainsi, en négligeant les termes d'ordres supérieurs à 1 de $\hbar$, étant donné sa valeur numérique, on obtient :

$$[q_i, p_j]_{cp} = \delta_{ij} = \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathbf{q}}_\mathbf{i}, \hat{\mathbf{p}}_\mathbf{j}]$$

De cette façon, les relations entre les variables canoniques sont préservées par le passage du contexte classique au contexte quantique.

1.2.2 Intégrabilité et Superintégrabilité

Nous sommes maintenant en mesure de définir les versions d'intégrabilité et de superintégrabilité quantique. En fait, celles-ci sont semblables à celles du cas classique en considérant qu'un système dynamique quantique est décrit par l'équation (1.2.2), que le crochet de Poisson devient le commutateur et les intégrales ne sont plus des fonctions bien définies dans un espace de phase à 2n dimensions, mais des opérateurs hermitiens agissant sur un espace de fonctions, qui commutent avec un Hamiltonien de la forme (1.2.1).

Comme en mécanique classique, les systèmes qui possèdent une de ces propriétés s'avèrent d'un intérêt particulièrement considérable. De fait, les systèmes superintégrables connus en mécanique quantique sont exactement solubles : leur spectre d'énergie est dégénéré et peut être obtenu de façon algébrique[40, 43].

Par contre, il est à noter que la notion d'indépendance entre les intégrales n'est pas aussi bien définie que dans le cas classique, où il fallait seulement s'assurer que l'expression (1.1.8) soit vérifiée. En raisonnant par analogie avec la mécanique classique, le seul fait de demander l'indépendance fonctionnelle entre chacune des intégrales du mouvement n'est pas aussi satisfaisant dans le cas quantique. En fait de façon générale, pour des opérateurs pas nécessairement différentiels, l'indépendance fonctionnelle et les propriétés de commutation entre eux sont deux notions qui ne s'impliquent pas l'une de l'autre[19] [1]. De plus, les problèmes provenant de la notion d'indépendance entre des opérateurs qui commutent ont été longuement discutés par plusieurs auteurs[16, 17, 19, 45]. Dans ce mémoire, pour deux opérateurs différentiels qui commutent, nous nous assurerons qu'il n'existe pas de relation algébrique qui les relie l'un à l'autre.

[1] Dans la référence 19, l'auteur cite un théorème, ayant été démontré par von Neumann, justifiant l'affirmation que nous venons de faire.

CHAPITRE 2

INTÉGRABILITÉ AVEC CONSTANTE DU MOUVEMENT POLYNOMIALES

La classification des systèmes intégrables s'établit majoritairement par la recherche des sytèmes classiques et quantiques qui possèdent des constantes du mouvement qui sont dites polynomiales en les impulsions :

$$X = \sum_{i,j=0}^{n} \{P_{ij}(x,y), p_x^i p_y^j\} \tag{2.0.1}$$

pour un Hamiltonien classique de la forme (1.1.1) ou quantique de la forme (1.2.1) dans un espace euclidien bidimensionnel. La justification de cette quête spécifique pour la forme de l'intégrale du mouvement s'explique par le fait que c'est le type d'intégrales le plus répandu et rencontré en physique. La possibilité de rechercher des systèmes intégrables qui possèdent des constantes du mouvement non-polynomiales demeure faisable[20], mais la perspective d'un résultat non-trivial s'avère beaucoup moins probable que dans le cas d'une recherche d'intégrales polynomiales.

Ici, $\{A, B\} = AB + BA$ est un anticommutateur . Cette opération nous permet de séparer les termes d'ordre pair et impair lors de la commutation entre le Hamiltonien et l'intégrale du mouvement et nous assure que celle-ci possède la propriété d'hermiticité.

Dans ce qui suit, en premier lieu, nous allons expliquer comment nous pouvons simplifier (2.0.1) après l'avoir commuté avec le Hamiltonien. Ensuite, nous allons exposer brièvement les résultats concernant la classification des systèmes possédant des intégrales polynomiales d'ordre un, deux et trois pour un Hamiltonien de la forme :

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + V(x,y) \tag{2.0.2}$$

La section concernant les intégrales d'ordre trois se présente comme étant un point de départ au contexte principal de ce mémoire.

2.1 Simplification d'une intégrale polynomiale

Une quantité physique de la forme (2.0.1), après commutation avec un Hamiltonien de la forme (2.0.2) classique ou quantique, s'explicite, comme nous allons le voir, en terme de polynômes de $L_3 = xp_y - yp_x$, p_x et p_y. Dans le cas d'un Hamiltonien intégrable admettant une constante du mouvement polynomiale, nous pouvons utiliser les transformations :

$$x \mapsto x\cos\alpha + y\sin\alpha + a, \qquad y \mapsto -x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \tag{2.1.1}$$

afin de simplifer l'intégrale. Ces transformations n'affectent en aucun cas l'intégrabilité du Hamiltonien. La raison est qu'en agissant sur l'intégrale avec (2.1.1), on transforme de la même façon le Hamiltonien de sorte qu'il maintienne toujours une forme (2.0.2). Les relations de commutation sont par le fait même préservées.

Comme nous allons voir, sous certaines conditions, les transformations (2.1.1) simplifient beaucoup l'allure des intégrales en faisant disparaître les termes redondants. De plus, il serait raisonnable de penser à utiliser le Hamiltonien afin de simplifier l'intégrale, considérant que celle-ci commute avec H et que H lui-même est une constante du mouvement. Par contre, dans le présent mémoire, nous ne considérerons pas ce type de simplifications, car ceci créerait une dépendance de l'intégrale par rapport à l'énergie. D'un point de vue quantique, ce fait nous pose un problème, considérant que nous désirons obtenir des constantes du mouvement qui possèdent la même forme pour tous les niveaux d'énergie.

2.2 Intégrale d'ordre un

Une intégrale polynomiale d'ordre un, pour $n = 1$ dans (2.0.1), qui commute avec (2.0.2) doit satisfaire :

$$X = aL_3 + bp_x + cp_y \tag{2.2.1}$$

avec une équation de compatibilité pour le potentiel $V(x,y)$:

$$\big(a(y\partial_x - x\partial_y) + b\partial_x + c\partial_y\big)V = 0 \tag{2.2.2}$$

Nous pouvons simplifier (2.2.2) à l'aide des transformations (2.1.1) et obtenir que les seuls potentiels à admettre une intégrale de la forme (2.2.1) :

$$V(x,y) = \begin{cases} V(r) & \text{avec } X = L_3 \\ V(x) & \text{avec } X = p_y \end{cases}$$

pour $a \neq 0$, dans le premier cas et $a = 0$ et $b^2 + c^2 \neq 0$ dans le deuxième. Ces résultats coïncident dans les cas classiques et quantiques et n'ont rien de vraiment exceptionnel mis à part qu'ils confirment des résultats déjà connus : l'existence d'une intégrale polynomiale d'ordre un est due à la présence de symétries géométriques dans le système.

2.3 Intégrale d'ordre deux

Un Hamiltonien (2.0.2) qui admet une intégrale d'ordre deux a la particularité d'admettre la séparabilité du potentiel dans un des quatre systèmes de coordonnées suivant : cartésiens, polaires, paraboliques et elliptiques. La commutation de l'intégrale et du Hamiltonien , réduit (2.0.1), pour $n = 2$, à :

$$X = aL_3^2 + b\{L_3, p_x\} + c\{L_3, p_y\} + d(p_x^2 - p_y^2) + 2ep_xp_y + \phi(x,y) \tag{2.3.1}$$

pour un potentiel $V(x,y)$ qui satisfait :

$$(-axy - bx + cy + e)(V_{xx} - V_{yy}) \\ + (a(x^2 - y^2) - 2by - 2cx - 2d)V_{xy} - 3(ay + b)V_x + 3(ax - c)V_y = 0 \quad (2.3.2)$$

Ainsi, en agissant avec (2.1.1) sur (2.3.1) et (2.3.2), on obtient les 4 possibilités suivantes d'intégrabilité quadratique :

1. $X_c = -\frac{1}{2}(p_x^2 - p_y^2) + f(x) - g(y), \qquad V(x,y) = f(x) + g(y)$

2. $X_{po} = L_3^2 + 2S(\theta), \qquad V(r,\theta) = R(r) + \frac{S(\theta)}{r^2}$
   $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

3. $X_{pa} = \{L_3, P_2\} + \frac{g(\eta)\xi^2 - f(\xi)\eta^2}{\xi^2+\eta^2}, \qquad V(\xi,\eta) = \frac{f(\xi)+g(\eta)}{\xi^2+\eta^2}$
   $x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2),\ y = \xi\eta$

4. $X_{po} = L_3^2 + \frac{l^2}{2}(p_x^2 - p_y^2) - l^2\left(\frac{\cosh^2\rho f(\sigma) + \cos 2\sigma g(\rho)}{\cos^2\sigma - \cosh^2\rho}\right), \qquad V(\sigma,\rho) = \frac{f(\sigma)+g(\rho)}{\cos^2\sigma - \cosh^2\rho}$
   $x = l\cosh\rho\cos\sigma,\ y = l\sinh\rho\sin\sigma,\ l > 0$

Les quatre cas précédents caractérisent les formes de (2.3.1) et du potentiel en coordonnées : 1. cartésiennes, 2. polaires, 3. paraboliques et 4. elliptiques. Une fois de plus, ces quatres possibilités d'intégrabilité sont identiques dans les cas classiques et quantiques[13, 32, 41, 46].

2.4 Intégrale d'ordre trois

Comparativement au cas précédent, l'étude de l'existence d'une intégrale d'ordre trois n'est pas aussi détaillée. Les conditions d'existence d'une telle intégrale ont la particularité, comparativement aux cas précédents, d'être différentes dans les cas classique et quantique.

Les relations de commutation permettent de ramener (2.3.1) à la forme

$$X = \sum_{i+j+k=3} A_{ijk}\{L_3^i, p_x^j p_y^k\} + \{g_1(x,y), p_x\} + \{g_2(x,y), p_y\} \tag{2.4.1}$$

avec quatre équations déterminantes reliant les fonctions $g_i(x,y)$, leur dérivée première et les dérivées du potentiel :

$$\begin{aligned} g_1 V_x + g_2 Vy = \frac{\hbar^2}{4}\Big(&f_1 V_{xxx} + f_2 V_{xxy} + f_3 V_{xyy} + f_4 V_{yyy} \\ &+ 8A_{300}(xV_y - yV_x) + (A_{210}V_x + A_{201}V_y)\Big) \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

$$(g_1)_x = 3f_1 V_x + f_2 V_y \tag{2.4.3}$$

$$(g_2)_y = f_3 V_x + 3f_4 V_y \tag{2.4.4}$$

$$(g_1)_y + (g_2)_x = 2(f_2 V_x + f_3 V_y) \tag{2.4.5}$$

$$f_1(y) = -A_{300}y^3 + A_{210}y^2 - A_{120}y + A_{030}, \tag{2.4.6}$$

$$f_2(x,y) = 3A_{300}xy^2 - 2A_{210}xy + A_{201}y^2 + A_{120}x - A_{111}y + A_{021}, \tag{2.4.7}$$

$$f_3(x,y) = -3A_{300}x^2y + A_{210}x^2 - 2A_{201}xy + A_{111}x - A_{102}y + A_{012}, \tag{2.4.8}$$

$$f_4(x) = A_{300}x^3 + A_{201}x^2 + A_{102}x + A_{003} \tag{2.4.9}$$

Nous constatons dans la première relation (2.4.2) la présence d'un terme purement quantique. Dans la limite classique ($\hbar \mapsto 0$), l'équation résultante diffère de son analogue quantique. Cette équation met en valeur une première différence entre l'intégrabilité classique et quantique pour une constante du mouvement d'ordre trois, ce qui confirme les résultats obtenus dans le passé[17–19].

Les conditions d'existence d'une intégrale d'ordre trois furent exposées une première fois récemment [14,15]. De plus, dans ces mêmes travaux, il a été démontré que pour une intégrale polynomiale d'ordre n en les impulsions, en mécaniques classique et quantique, les termes d'ordre pair et impair doivent commuter indépendemment avec le Hamiltonien. De cette façon, une intégrale d'ordre pair (respectivement impair) est constituée seulement de termes pairs (respectivement impairs). De plus, dans ces ouvrages, on a complété la classification des systèmes superintégrables qui admettent dans un premier temps une intégrale de la forme (2.2.1) et dans un deuxième temps une intégrale de la forme 1. de la section 2.3 en plus d'admettre l'existence d'une intégrale d'ordre trois de la forme (2.4.1). Ces travaux ont permis de mettre en évidence les différences qui interviennent entre l'intégrabilité et la superintégrabilité classique et quantique dans le cas de l'existence d'une intégrale d'ordre supérieur à deux.

Il est à noter que les versions classiques de (2.4.2) à (2.4.5) furent obtenues de manière complètement indépendante et sous une optique différente, soit celle de la théorie des invariants classiques en terme de Tenseurs de Killing[33,34].

CHAPITRE 3

HAMILTONIENS SÉPARABLES EN COORDONNÉES POLAIRES AVEC INTÉGRALE D'ORDRE TROIS

Ce chapitre est entièrement consacré à la classification des systèmes superintégrables qui admettent une intégrale d'ordre trois (2.4.1) et la séparation de variables en coordonnées polaires, soit la présence d'une intégrale d'ordre deux de la forme 2. de la section 2.3.

Ici, nous avons que le Hamiltonien quantique se réécrit en coordonnées polaires : pour :

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

et :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

une transformation canonique tel que :

$$H = \frac{-\hbar^2}{2}\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\right) + V(r,\theta) \tag{3.0.1}$$

qui se réduit dans la limite classique :

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r,\theta) \tag{3.0.2}$$

avec

$$p_r = \cos\theta p_x + \sin\theta p_y \qquad et \qquad p_\theta = r(-\sin\theta p_x + \cos\theta p_y)$$

3.1 Conditions d'existence d'une intégrale d'ordre trois en coordonnées polaires

Afin d'obtenir les équations déterminantes d'une intégrale d'ordre trois pour un Hamiltonien de la forme (3.0.1), nous pouvons procéder de deux façons : soit que l'on transforme en coordonnées polaires les équations déterminantes (2.4.2) à (2.4.5) ou que nous transformons l'intégrale d'ordre trois en coordonnées polaires (2.4.1) et que l'on recalcule les relations de commutation avec le Hamiltonien (3.0.1). La dernière optique risque d'être excessivement laborieuse dû au fait qu'en transformant l'intégrale d'ordre trois en coordonnées polaires, nous faisons apparaître des termes d'ordre deux et d'ordre un en p_r et p_θ ce qui implique que les relations de commutation s'allongent de beaucoup. Ces deux approches doivent mener au même résultat.

Ainsi, les relations (2.4.2) à (2.4.5) deviennent :

$$\begin{aligned} G_1 V_r + G_2 V_\theta = \frac{\hbar^2}{4}\Big(& F_1 V_{rrr} + F_2 V_{rr\theta} + F_3 V_{r\theta\theta} + F_4 V_{\theta\theta\theta} \\ & + rF_3 V_{rr} + \big(3rF_4 - \frac{2}{r}F_2\big)V_{r\theta} - \frac{2}{r}F_3 V_{\theta\theta} \\ & + (-F_3 + 2A_{210}\cos\theta + 2A_{201}\sin\theta)V_r \\ & + \big(-2F_4 + \frac{2}{r^2}F_2 + 8A_{300} - \frac{2A_{210}\sin\theta + 2A_{201}\cos\theta}{r}\big)V_\theta\Big) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

$$(G_1)_r = 3F_1 V_r + F_2 V_\theta \tag{3.1.2}$$

$$\frac{(G_2)_\theta}{r^2} = F_3 V_r + 3F_4 V_\theta - \frac{G_1}{r^3} \tag{3.1.3}$$

$$(G_2)_r = 2(F_2 V_r + F_3 V_\theta) - \frac{(G_1)_\theta}{r^2} \tag{3.1.4}$$

pour :

$$
\begin{aligned}
F_1(\theta) &= f_1 \cos^3\theta + f_2 \sin\theta\cos^2\theta + f_3 \sin^2\theta\cos\theta + f_4 \sin^3\theta, \\
F_2(r,\theta) &= \frac{1}{r}\Big(-3f_1 \sin\theta\cos^2\theta + f_2(-2\sin^2\theta\cos\theta + \cos^3\theta) \\
&\qquad + f_3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta) + 3f_4 \sin^2\theta\cos\theta\Big), \\
F_3(r,\theta) &= \frac{1}{r^2}\Big(3f_1 \sin^2\theta\cos\theta + f_2(-2\sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta) \\
&\qquad + f_3(-2\sin^2\theta\cos\theta + \cos^3\theta) + 3f_4 \sin\theta\cos^2\theta\Big), \\
F_4(r,\theta) &= \frac{1}{r^3}\Big(-f_1 \sin^3\theta + f_2 \sin^2\theta\cos\theta - f_3 \sin\theta\cos^2\theta + f_4\cos^3\theta\Big)
\end{aligned}
$$

Ainsi en expliçitant, nous obtenons les formes simplifiées :

$$
F_1(\theta) = A_0\cos 3\theta + A_1 \sin 3\theta + A_2\cos\theta + A_3\sin\theta, \tag{3.1.5}
$$

$$
\begin{aligned}
F_2(r,\theta) &= \frac{1}{r}(-3A_0\sin 3\theta + 3A_1\cos 3\theta - A_2\sin\theta + A_3\cos\theta) \\
&\quad + B_0\cos 2\theta + B_1\sin 2\theta + B_2,
\end{aligned} \tag{3.1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
F_3(r,\theta) &= \frac{1}{r^2}(-3A_0\cos 3\theta - 3A_1\sin 3\theta + A_2\cos\theta + A_3\sin\theta) \\
&\quad + \frac{1}{r}(-2B_0\sin 2\theta + 2B_1\cos 2\theta) \\
&\quad + C_0\cos\theta + C_1\sin\theta,
\end{aligned} \tag{3.1.7}
$$

$$
\begin{aligned}
F_4(r,\theta) &= \frac{1}{r^3}(A_0\sin 3\theta - A_1\cos 3\theta - A_2\sin\theta + A_3\cos\theta) \\
&\quad + \frac{1}{r^2}(-B_0\cos 2\theta - B_1\sin 2\theta + B_2) \\
&\quad + \frac{1}{r}(-C_0\sin\theta + C_1\cos\theta) + D_0,
\end{aligned} \tag{3.1.8}
$$

avec les relations suivantes entre les A_i, B_i, C_i et D_0 et les A_{ijk} de l'intégrale :

$$A_0 = \frac{A_{030} - A_{012}}{4}, \qquad A_1 = \frac{A_{021} - A_{003}}{4},$$
$$A_2 = \frac{3A_{030} + A_{012}}{4}, \qquad A_3 = \frac{3A_{003} + A_{021}}{4},$$
$$B_0 = \frac{A_{120} - A_{102}}{2}, \qquad B_1 = \frac{A_{111}}{2}, \qquad B_2 = \frac{A_{120} + A_{102}}{2},$$
$$C_0 = A_{210}, \qquad C_1 = A_{201} \qquad et \qquad D_0 = A_{300}$$

Dans le cas classique, les relations (3.1.2) à (3.1.4) demeurent les mêmes et (3.1.1) prend une forme simplifiée avec $\hbar \mapsto 0$.

Les fonctions $G_1 = G_1(r, \theta)$ et $G_2 = G_2(r, \theta)$ ont été définies :

$$G_1(r, \theta) = g_1 \cos\theta + g_2 \sin\theta \qquad G_2(r, \theta) = \frac{-g_1 \sin\theta + g_2 \cos\theta}{r}$$

de telle sorte que nous pouvons réécrire les termes d'ordre un de l'intégrale d'ordre trois en mécanique quantique :

$$\{g_1, p_x\} + \{g_2, p_y\} = \{G_1, p_r\} + \{G_2, L_3\} + \frac{G_1}{r},$$

avec

$$p_r = -i\hbar\partial_r, \qquad L_3 = p_\theta = -i\hbar\partial_\theta$$

et en mécanique classique

$$g_1 p_x + g_2 p_y = G_1 p_r + G_2 L_3$$

De plus, nous pouvons, comme dans le cas cartésien[15], obtenir une équation de compatibilité pour les équations (3.1.2) à (3.1.4) :

$$
\begin{aligned}
0 = {} & r^4F_3V_{rrr} + \left(3r^4F_4 - 2r^2F_2\right)V_{rr\theta} + \left(3F_1 - 2r^2F_3\right)V_{r\theta\theta} + F_2V_{\theta\theta\theta} \\
& + \left(2r^4F_{3r} + 6r^3F_3 - 2r^2F_{2\theta} - 3rF_1\right)V_{rr} + \left(2F_{2\theta} - 4rF_3 - 2r^2F_{3r}\right)V_{\theta\theta} \\
& + \left(6r^4F_{4r} + 18r^3F_4 - 2r^2(F_{2r} + F_{3\theta}) - 5rF_2 + 6F_{1\theta}\right)V_{r\theta} \\
& + \left(r^4F_{3rr} + 6r^3F_{3r} + r^2(6F_3 - F_{2r\theta}) - 4rF_{2\theta} + 3F_{1\theta\theta}\right)V_r \\
& + \left(3r^4F_{4rr} + 18r^3F_{4r} + r^2(18F_4 - 2F_{3r\theta}) - r(F_{2r} + 4F_{3\theta}) + F_{2\theta\theta}\right)V_\theta
\end{aligned}
\tag{3.1.9}
$$

Nous pourrions de la même façon qu'en[14] obtenir des relations non-linéaires reliant complètement (3.1.1) à (3.1.4) pour le potentiel, mais nous nous abstenons de les présenter dans cette section, car ces relations nous aideront en aucun cas.

Nous allons constater assez rapidement que le principal défi de la classification entreprise repose dans la solution des équations différentielles qui régissent les comportements angulaires des potentiels. En fait, la partie radiale s'avèrera rapidement compilée. De fait, (3.1.9) nous offre l'opportunité d'obtenir toutes les parties radiales associées aux différentes classes d'intégrales. Ce fait sera illustré dans ce qui suit.

Mentionnons que les dérivées selon la variable angulaire sont représentées par un " $\dot{}$ " et les dérivées selon la variable radiale par un " $'$ ".

3.2 Équations déterminantes de la partie radiale $R(r)$ du potentiel

L'existence d'une intégrale d'ordre deux de la forme 2. de la section 2.3. entraîne que

$$V(r, \theta) = R(r) + \frac{1}{r^2}S(\theta) \tag{3.2.1}$$

Ainsi, si nous remplaçons cette dernière expression pour le potentiel dans (3.1.9), cette équation se réexprime :

$$a_3R''' + a_2R'' + a_1R' + b_3\dddot{S} + b_2\ddot{S} + b_1\dot{S} + b_0S = 0 \tag{3.2.2}$$

avec $a_i = a_i(r,\theta)$ et $b_i = b_i(r,\theta)$ en terme de combinaisons de (3.1.5)-(3.1.8) et de leurs dérivées. En fait, les $b_i = b_i(r,\theta)$ sont linéaires en r : $b_i = b_{i0}(\theta) + b_{i1}(\theta)r$. En dérivant deux fois selon r (3.2.2), nous obtenons une équation du cinquième ordre pour $R(r)$:

$$a_3R^{(5)} + (2a_{3r} + a_2)R^{(4)} + (a_{3rr} + 2a_{2r} + a_1)R''' + (a_{2rr} + 2a_{1r})R'' + a_{1rr}R' = 0 \tag{3.2.3}$$

Dans cette dernière expression, les coefficients devant les dérivées de $R(r)$ s'expriment en terme de combinaisons de (3.1.5)-(3.1.8) qui sont elles-mêmes exprimables en terme de fontions trigonométriques et de puissance de r. Donc, en séparant (3.2.3) en terme de fonctions trigonométriques linéairement indépendantes, nous obtenons six équations différentielles qui doivent s'annuler indépendemment l'une de l'autre :

$$\cos 3\theta : \quad A_0(r^4R^{(5)} + 7r^3R^{(4)} - r^2R''' - 18rR'' + 18R') = 0 \tag{3.2.4}$$

$$\sin 3\theta : \quad A_1(r^4R^{(5)} + 7r^3R^{(4)} - r^2R''' - 18rR'' + 18R') = 0 \tag{3.2.5}$$

$$\cos 2\theta : \quad B_0(r^4R^{(5)} + 14r^3R^{(4)} + 48r^2R''' + 24rR'' - 24R') = 0 \tag{3.2.6}$$

$$\sin 2\theta : \quad B_1(r^4R^{(5)} + 14r^3R^{(4)} + 48r^2R''' + 24rR'' - 24R') = 0 \tag{3.2.7}$$

$$\begin{aligned} \cos\theta : \quad & \left(C_0r^6 + A_2r^4\right)R^{(5)} + \left(20C_0r^5 + 11A_2r^3\right)R^{(4)} \\ & + \left(120C_0r^4 + 27A_2r^2\right)R''' + \left(240C_0r^3 + 6A_2r\right)R'' \\ & + \left(120C_0r^2 - 6A_2r\right)R' = 0 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta : \quad & \left(C_1r^6 + A_3r^4\right)R^{(5)} + \left(20C_1r^5 + 11A_3r^3\right)R^{(4)} \\ & + \left(120C_1r^4 + 27A_3r^2\right)R''' + \left(240C_1r^3 + 6A_3r\right)R'' \\ & + \left(120C_1r^2 - 6A_3r\right)R' = 0 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Nous pouvons de cette façon résoudre directement ces équations pour $R(r)$ pour ensuite obtenir des équations pour $S(\theta)$ qui satisfont (3.1.2) à (3.1.4). Avec les expressions de $G_1(r,\theta)$ et de $G_2(r,\theta)$ qui découlent de celles-ci, il nous reste qu'à vérifier sous quelles conditions (3.1.1) est satisfaite.

De plus, nous pouvons intégrer (3.1.2) en explicitant la dépendance radiale dans les expressions (3.1.6) à (3.1.8) :

$$\begin{aligned}
F_2(r,\theta) &= \frac{1}{r}F_{21}(\theta) + F_{22}(\theta) \\
F_3(r,\theta) &= \frac{1}{r^2}F_{31}(\theta) + \frac{1}{r}F_{32}(\theta) + F_{33}(\theta) \\
F_4(r,\theta) &= \frac{1}{r^3}F_{41}(\theta) + \frac{1}{r^2}F_{42}(\theta) + \frac{1}{r}F_{43}(\theta) + D_0
\end{aligned}$$

et nous obtenons une expression pour $G_1(r,\theta)$:

$$G_1(r,\theta) = 3F_1\Big(R + \frac{1}{r^2}S\Big) + \Big(-\frac{1}{2r^2}F_{21} - \frac{1}{r}F_{22}\Big)\dot{S} + \beta(\theta) \tag{3.2.10}$$

De cette façon, pour $(G_2)_{\theta r} = (G_2)_{r\theta}$ avec (3.2.10) , il en découle :

$$\begin{gathered}
F_{33}(r^6R'' + 2r^5R') + r^5F_{32}R'' + r^4(F_{32} - 2\dot{F}_{22})R' \\
+r^4F_{31}R'' - r^3(3F_1 + 2\dot{F}_{21})R' + 3r^2(F_1 + \ddot{F}_1)R \\
= \\
r^2\Big(2F_{33}\ddot{S} + (3F_{43} + 2\dot{F}_{33})\dot{S} - 2F_{33}S - \ddot{\beta} - \beta\Big) \\
+r\Big(F_{22}\dddot{S} + 2(F_{32} + \dot{F}_{22})\ddot{S} + (-2F_{22} + 6F_{42} + 2\dot{F}_{32} + \ddot{F}_{22})\dot{S} - 4(F_{32} + \dot{F}_{22})S\Big) \\
+\Big(\frac{F_{21}}{2}\dddot{S} + (\dot{F}_{21} + 2F_{31} - 3F_1)\ddot{S} + (-\frac{5}{2}F_{21} + 9F_{41} - 6\dot{F}_1 + 2\dot{F}_{31} + \frac{\ddot{F}_{21}}{2})\dot{S} \\
-(9F_1 + 6F_{31} + 4\dot{F}_{21} + 3\ddot{F}_1)S\Big)
\end{gathered} \tag{3.2.11}$$

qui est une deuxième condition de compatibilité pour (3.1.2) à (3.1.4).

Dans (3.2.11), les dérivées selon θ et r sont séparées. De plus, nous pouvons encore aisément résoudre pour $R(r)$ en dérivant 3 fois selon r et en réexprimant l'expression résultante en terme des fonctions trigonométriques linéairement indépendantes. De cette façon, nous obtenons un ensemble d'équations différentielles pour $R(r)$ qui doivent s'annuler indépendemment l'une de l'autre et qui se résolvent directement selon les différents types d'intégrales d'ordre trois.

Ainsi, les parties radiales s'obtiennent de façon directe. Les deux équations de compatibilité obtenues démontrent cette assertion. Par la suite, il suffit d'obtenir les parties angulaires correspondantes du potentiel. En fait, les équations angulaires résultantes de (3.1.9) et (3.2.11) seront en majeure partie moins facilement résolubles. Pour ce faire, l'utilisation de la forme explicite de (3.2.10), associée aux différents cas, s'avérera d'une aide considérable. Celle-ci permettra d'intégrer (3.1.1), (3.1.3) et (3.1.4) afin d'obtenir un système surdéterminé, parfois déterminé, d'équations différentielles, principalement non-linéaires et de formes non-standards, qui nous vont nous permettre d'obtenir $S(\theta)$.

Bref, dans les démarches qui suivront, nous allons distinguer quatre types d'intégrales du troisième ordre qui vont spécifier la classification. Ces distinctions correspondent aux choix les plus simples de représentants des différents orbites du groupe euclidien $E(2)$[42]. Par la suite, nous allons tenter de classifier les différents cas.

3.3 Types d'intégrales d'ordre trois

Une intégrale d'ordre trois, exprimée sous sa forme générale (2.4.1), peut être considérablement simplifée, sous différentes conditions.

En fait, (2.4.1) possède dix termes d'ordre trois. Comme nous avons mentionné précédemment, la forme du Hamiltonien demeure invariante sous l'action du groupe de transformations du plan euclidien $E(2)$, c'est-à-dire sous l'effet de (2.1.1). Ainsi, en agissant avec (2.1.1) sur (2.4.1), nous pouvons éliminer les termes redondants tout en maintenant les propriétés d'intégrabilité et de superintégrablité.

L'action de (2.1.1) transforment L_3, p_x et p_y de la façon suivante :

$$L_3 \mapsto L_3 - (a \sin\alpha + b \cos\alpha) p_x + (a \cos\alpha - b \sin\alpha) p_y$$

pour :

$$p_x \mapsto \cos\alpha p_x + \sin\alpha p_y, \qquad p_y \mapsto -\sin\alpha p_x + \cos\alpha p_y$$

Ainsi, selon la valeur des constantes A_{ijk}, nous pouvons simplifier (2.4.1).

3.3.1 Type 1 : $A_{300} = 1$

Dans ce cas-ci, avec des translations en x et y nous pouvons toujours simplifier l'intégrale à la forme :

$$\begin{aligned} X = 2L_3^3 + A_{120}\{L_3, p_x^2\} + A_{111}\{L_3, p_x p_y\} + A_{102}\{L_3, p_y^2\} \\ +2(A_{030} p_x^3 + A_{021} p_x^2 p_y + A_{012} p_x p_y^2 + A_{003} p_y^3) \end{aligned}$$

Ensuite avec une rotation, nous en déduisons deux possibilités :

1) $B_1^2 + B_2^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} X = 2L_3^3 + B_2\{L_3, p_x^2 + p_y^2\} + B_0\{L_3, p_x^2 - p_y^2\} \\ + 2(A_{030} p_x^3 + A_{021} p_x^2 p_y + A_{012} p_x p_y^2 + A_{003} p_y^3) \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

et

2) $B_1^2 + B_2^2 = 0$

$$X = 2L_3^3 + B_2\{L_3, p_x^2 + p_y^2\} + 2(A_{030}p_x^3 + A_{021}p_x^2 p_y + A_{012}p_x p_y^2 + A_{003}p_y^3) \qquad (3.3.2)$$

Les constantes $B_0 = \frac{A_{120} - A_{102}}{2}$ et $B_2 = \frac{A_{120} + A_{102}}{2}$.

3.3.2 Type 2 : $A_{300} = 0, A_{210}^2 + A_{201}^2 = 1$

Ici, nous pouvons réécrire les termes d'ordre trois de l'intégrale :

$$X = \{L_3^2, p_x\} + A_{102}\{L_3, p_y^2\} + 2\left(A_{030}p_x^3 + A_{021}p_x^2 p_y + A_{012}p_x p_y^2 + A_{003}p_y^3\right) \qquad (3.3.3)$$

3.3.3 Type 3 : $A_{300} = A_{210}^2 + A_{201}^2 = 0$

Les termes d'ordre trois se réduisent à :

$$B_2\{L_3, p_x^2 + p_y^2\} + B_0\{L_3, p_x^2 - p_y^2\} + 2\left(A_{030}p_x^3 + A_{021}p_x^2 p_y + A_{012}p_x p_y^2 + A_{003}p_y^3\right)$$

pour $B_0^2 + B_2^2 \neq 0$.

Nous distinguons trois cas :

1) $B_0 = B_2$

$$\{L_3, p_x^2\} + 2A_{012}p_x p_y^2 + 2A_{003}p_y^3 \qquad (3.3.4)$$

ou 2) $B_2 = -B_0$

$$\{L_3, p_y^2\} + 2A_{030}p_x^3 + 2A_{021}p_x^2 p_y \qquad (3.3.5)$$

ou 3) $B_2 \neq \pm B_0$

$$B_2\{L_3, p_x^2 + p_y^2\} + B_0\{L_3, p_x^2 - p_y^2\} + 2A_{030}p_x^3 + 2A_{021}p_x^2 p_y \qquad (3.3.6)$$

pour $B_0^2 + B_2^2 = 0$, il en découle :

$$B_2\{L_3, p_x^2 + p_y^2\} + 2A_{030}p_x^3 + 2A_{021}p_x^2p_y \tag{3.3.7}$$

B_0 et B_2 sont définies de la même façon que pour le type 1.

3.3.4 Type 4 : $A_{300} = A_{210} = A_{120} = A_{111} = A_{102} = 0$

Dans ce cas, les translations laissent invariants les termes d'ordre trois. Ainsi, seule une rotation peut simplifer l'intégrale. À partir de cette transformation, nous constatons qu'il est équivalent de considérer les quatres possibilités de combinaisons de trois termes de :

$$X = 2(A_{030}p_x^3 + A_{021}p_x^2p_y + A_{012}p_xp_y^2 + A_{003}p_y^3)$$

En somme, le principal intérêt de ces simplifications est qu'elles nous permettent de réduire l'expression des intégrales en éliminant la présence de certains termes qui n'ont aucune incidence sur les solutions des équations qui déterminent le potentiel.

CHAPITRE 4

SOLUTIONS POUR LE POTENTIEL

Nous en sommes maintenant à la présentation des solutions pour un potentiel de la forme (3.2.1) qui respecte les relations (3.1.1) à (3.1.4). Nous présenterons en premier lieu, selon chaque cas, les solutions quantiques et nous en déduirons l'analogue classique par la suite.

4.1 Solutions pour une intégrale de Type 1

Nous diviserons les résultats pour cette forme d'intégrale en quatre catégories.

4.1.1 $A_{300} = 1, A_{120} = A_{102} = A_{030} = A_{021} = A_{012} = A_{003} = 0$

En observant (3.1.9) et (3.2.11), nous constatons que A_{300} n'apparaît pas dans ces expressions. Celles-ci sont donc satisfaites trivialement. Regardons ce qu'il advient des équations déterminantes (3.1.1) à (3.1.4).

De (3.2.10), nous obtenons,

$$G_1 = \beta(\theta) = \dot{\gamma}(\theta)$$

De (3.1.3) :

$$\frac{1}{r^2}(G_2)_\theta = \frac{3}{r^2}\dot{S} - \frac{1}{r^3}\dot{\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad G_2 = 3S - \frac{1}{r}\gamma + f(r)$$

et en remplaçant ces résultats dans (3.1.4), nous obtenons :

$$\gamma(\theta) = \gamma_0 \cos\theta + \gamma_1 \sin\theta + a \qquad \text{et} \qquad f(r) = \frac{a}{r} + b$$

et

$$G_1(\theta) = -\gamma_0 \sin\theta + \gamma_1 \cos\theta,$$
$$G_2(r,\theta) = 3S - \frac{\gamma_0 \cos\theta + \gamma_1 \sin\theta}{r} + b$$

Les deux dernières expressions réduisent (3.1.1) à :

$$\begin{aligned}(-\gamma_0 \sin\theta + \gamma_1 \cos\theta) r^3 R' =& r(\frac{\hbar^2}{4}\dddot{S} - 3S\dot{S} - b\dot{S}) \\ &+ \big((\gamma_0 \cos\theta + \gamma_1 \sin\theta)\dot{S} + 2(-\gamma_0 \sin\theta + \gamma_1 \cos\theta)S\big)\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

De cette relation, nous différencions 2 cas :

4.1.1.1 $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$

Dans ce cas, (4.1.1) devient :

$$\frac{\hbar^2}{4}\dddot{S} - 3S\dot{S} - b\dot{S} = 0$$

que nous pouvons intégrer deux fois de telle sorte que l'équation résultante pour la partie angulaire du potentiel est sous une forme connue :

$$\hbar^2 \dot{S}^2 = 4S^3 + 4bS^2 + 4cS + 4d = 4(S - s_1)(S - s_2)(S - s_3) \tag{4.1.2}$$

pour b, c et d des constantes d'intégration.

Cette équation peut être solutionnée en terme de fonctions elliptiques. En fait, (4.1.2) peut être ramenée à une équation de la forme :

$$\hbar^2 \dot{S}^2 = 4S^3 - \tilde{c}S - \tilde{d} = 4(S - e_1)(S - e_2)(S - e_3) \tag{4.1.3}$$

en transformant $S(\theta) \mapsto S(\theta) + \Lambda$ pour $\Lambda = -\frac{b}{3}$. (4.1.3) admet comme solution générale la fonction dite de Weierstrass :

$$S(\theta) = \hbar^2 \wp(\theta)$$

Cette solution peut être exprimée de différentes façons selon la nature des racines e_i. Celles-ci nous proposent deux possibilités : soient les e_i sont toutes réelles ou soient deux racines sont complexes conjuguées l'une de l'autre tandis que la troisième racine est réelle. Pour $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}$, nous obtenons pour $S(\theta)$:

$$S_a(\theta) = (\hbar\omega)^2 k^2 sn^2(\omega\theta, k)$$
$$S_b(\theta) = \frac{(\hbar\omega)^2}{sn^2(\omega\theta, k)}$$

Tandis que pour deux racines conjuguées l'une de l'autre $e_i = \bar{e}_j$ pour $i \neq j$, nous obtenons :

$$S_c(\theta) = \frac{(\hbar\omega)^2}{2(cn(\omega\theta, k) + 1)}$$

La partie angulaire $S(\theta)$ s'exprime donc aussi en terme de fonctions elliptiques dite de Jacobi pour $0 < k^2 < 1$.

Nous pouvons relier les solutions précédentes à $\wp(\theta)$[9] :

$$\hbar^2 \wp(\theta) = h^2 \begin{cases} e_3 + S_a(\theta) \\ e_3 + S_b(\theta) \end{cases}$$

et

$$\mathrm{cn}(\omega\theta, k) = \sqrt{\frac{\wp(\theta) - e_1}{\wp(\theta) - e_3}}$$

avec $e_1 - e_3 = \omega^2$ et $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$.

De plus, nous pouvons déduire des cas spéciaux intéressants de la partie angulaire singulière $S_b(\theta)$, tel que pour $k = 0$ et $k = 1$:

$$S_{b1}(\theta) = \frac{(\hbar\omega)^2}{\sin^2(\omega\theta)}$$
$$S_{b2}(\theta) = \frac{(\hbar\omega)^2}{\sinh^2(\omega\theta)}$$

De plus, pour S_a avec $k = 0$ ou $k = 1$, nous avons :

$$S_{a1}(\theta) = \frac{(\hbar\omega)^2}{\cosh^2(\omega\theta)}$$

Finalement, pour $e_1 = e_2 = e_3$, nous obtenons une solution du type $\frac{\hbar^2}{\theta^2}$. Cette solution ne présente pas de comportement périodique et ne s'exprime pas en terme de fonctions trigonométriques ou elliptiques tels que le commandent majoritairement les systèmes physiques en coordonnées polaires. Ainsi, selon le domaine de définition de la variable angulaire θ, cette solution ne semble pas possèder d'intérêt physique particulier. Cette possibilité est donc exclue.

Les solutions précédentes sont associées à une partie radiale complètement arbitraire. De façon générale, nous avons :

$$V_{Q1}(r, \theta) = R(r) + \frac{h^2\wp(\theta)}{r^2}$$

et le Hamiltonien correspondant possède des intégrales d'ordre trois et deux respectivement de la forme :

$$Y = 2L_3^3 + \{L_3, 3\hbar^2\wp(\theta) + b\}$$
$$X = L_3^2 + 2\hbar^2\wp(\theta)$$

On vérifie bien qu'elles commutent entre elles. En fait, en coordonnées polaires $L_3 = -i\hbar\partial_\theta$ et Y et X s'explicitent :

$$Y_{Q1} = 2i\hbar^3\partial_\theta^3 - 3i\hbar\left\{\partial_\theta, \hbar^2\wp(\theta) + \frac{b}{3}\right\}$$
$$X_{Q1} = -\hbar^2\partial_\theta^2 + 2\hbar^2\wp(\theta)$$

L'intégrale d'ordre deux s'apparente à un opérateur unidimensionnel de Lamé[18, 19] pour $\theta \longrightarrow x$ et nous savons que cet opérateur commute avec un opérateur d'ordre trois de la même forme que Y_{Q1} avec $\theta \mapsto x$ à un signe et une constante près. Nous montrons que Y_{Q1} et X_{Q1} sont reliés algébriquement de façon non-triviale :

$$X_{Q1}^3 - \frac{Y_{Q1}^2}{4} + 2bX_{Q1}^2 + (c + b^2)X_{Q1} = \frac{2d - bc}{2}$$

où b, c et d sont les constantes de (4.1.2). Il est a noter dans les calculs précédents que la constante b n'a aucune incidence sur ceux-ci. Nous pouvons soit la poser égale à zéro ou l'absorber dans la partie angulaire $S(\theta)$. Il en résulte de cette façon une relation de dépendance simplifiée entre les intégrales.

Bien que ces deux constantes du mouvement, qui commutent, s'avèrent reliées algébriquement de façon "relativement" non-triviale, il a été montré dans le cas unidimensionnel [18] que l'étude de ce type de systèmes offre la possibilité de retirer des informations significatives telle la résolution de l'équation de Schrödinger par quadratures.

Par contre, dans notre cas, l'étude que nous tentons de réaliser en est une dans un espace euclidien à deux dimensions. La présence d'une partie radiale complétement arbitraire dans les solutions précédentes pour le potentiel, nous pousse à nous questionner sérieusement sur la pertinence physique que peut posséder ce type de systèmes. D'un point de vue mathématique, ces systèmes semblent digne d'intérêt dû à la présence de fonctions spéciales. Par contre, le fait que les intégrales commutent et qu'elles soient reliées algébriquement de façon non-triviale va à l'encontre de la définition même de la superintégrabilité que nous avons énoncé antérieurement et de la notion d'indépendance entre les intégrales. Comme nous allons le voir un peu plus bas, dans la limite classique, ces systèmes se réduisent à un potentiel $V(r,\theta) = R(r)$ et les intégrales d'ordre deux et trois peuvent être obtenues trivialement de L_3 qui est une constante du mouvement d'ordre un pour les potentiels purement radiaux.

Finalement, ces solutions pour le potentiel se présentent fréquemment dans les calculs d'intégrabilité et de superintégrabilité avec des intégrales d'ordre supérieur ou égal à trois. En fait, en plus des ouvrages cités un peu plus haut, l'équation (4.1.2) se retrouve dans les calculs des cas de superintégrabilité cubique avec intégrales d'ordre un[14] et deux[15] en coordonnées cartésiennes en mécanique quantique, qui à la différence de la situation précédente, semblent être des "vrais" cas de superintégrabilité.

En mécanique classique, G_1 et G_2 gardent les mêmes formes tandis que (4.1.1) se réduit à

$$3S\dot{S} + b\dot{S} = (3S + b)\dot{S} = 0$$

De cette façon, S est constant.

Ainsi, l'analogue classique de V_{Q1} est donné par une fonction arbitraire $R(r)$ avec des intégrales d'ordre deux et trois qui s'obtiennent directement de L_3 :

$$X_1 = L_3$$
$$X_2 = L_3^2 = X_1^2$$
$$Y = 2L_3^3 + bL_3 = 2X_1^3 + 2bX_1$$

4.1.1.2 γ_0 et γ_1 non-nuls simultanément

Dans ce cas, en dérivant deux fois (4.1.1) selon r , nous pouvons résoudre pour $R(r)$:

$$R(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$$

pour obtenir deux équations qui déterminent la partie angulaire $S(\theta)$:

$$\frac{\hbar^2}{4}\dddot{S} - 3S\dot{S} - d\dot{S} = a(\gamma_0 \sin\theta - \gamma_1 \cos\theta) \tag{4.1.4}$$

$$(\gamma_0 \cos\theta + \gamma_1 \sin\theta)\dot{S} + 2(-\gamma_0 \sin\theta + \gamma_1 \cos\theta)S = 2b(\gamma_0 \sin\theta - \gamma_1 \cos\theta) \tag{4.1.5}$$

(4.1.5) se résout directement :

$$S(\theta) = -b + \frac{\alpha}{(\gamma_0 \cos\theta + \gamma_1 \sin\theta)^2}$$

En remplaçant dans (4.1.4), nous obtenons $a = 0$ et la relation de compatibilité :

$$6\alpha + (\gamma_0^2 + \gamma_1^2)(-3b + d - 5\hbar^2) + (-3b + d + \hbar^2)\Big((\gamma_0^2 - \gamma_1^2)\cos 2\theta + 2\gamma_0^2\gamma_1^2 \sin 2\theta\Big) = 0$$

pour γ_0 et γ_1 qui ne s'annulent pas simultanément. Ainsi, la seule solution non-triviale pour $V(r,\theta)$ est :

$$V(r,\theta) = \frac{\hbar^2(\gamma_0^2 + \gamma_1^2)}{r^2(\gamma_0 \cos\theta + \gamma_1 \sin\theta)^2}$$

que l'on peut simplifier par une rotation qui n'affecte pas la forme dominante de l'intégrale :

$$1.\ V_{Q2}(r,\theta) = \frac{\hbar^2}{r^2\cos^2\theta} \qquad \text{ou} \qquad 2.\ V_{Q3}(r,\theta) = \frac{\hbar^2}{r^2\sin^2\theta}$$

avec des intégrales de la forme

$$Y_{Q2} = 2L_3^3 + \{L_3, 3S_2 + b\} - 2\gamma_0 p_y$$

$$Y_{Q3} = 2L_3^3 + \{L_3, 3S_3 + b\} + 2\gamma_1 p_x$$

pour $S_2 = \frac{\hbar^2}{\cos^2\theta}$, $S_3 = \frac{\hbar^2}{\sin^2\theta}$, γ_0, γ_1 arbitraires et $b = 0$. Nous remarquons que p_y et p_x sont des intégrales du premier ordre de V_{Q2} et V_{Q3} et donc, sans perte de généralités, γ_0 et γ_1 peuvent être posés égaux à zéro étant donné que p_y et p_x commutent indépendemment des autres termes dans Y_{Q2} et Y_{Q3}. De plus, les intégrales du troisièmes ordre Y_{Q2} et Y_{Q3} sont reliées à leur intégrale d'ordre deux associée de la même façon que Y_{Q1}.

Dans la limite classique, ces potentiels se reduisent au potentiel libre $V = 0$.

4.1.2 Combinaisons de $A_{300} = 1$, A_{120} et A_{102}

Pour l'instant, nous considérons encore $A_{030} = A_{021} = A_{012} = A_{003} = 0$. De plus, nous allons diviser en deux les résultats selon (3.3.1) et (3.3.2).

4.1.2.1 $B_1^2 + B_2^2 \neq 0$

Dans ce cas, en dérivant trois fois selon r l'équation (3.2.11) et en solutionnant l'équation résultante pour $R(r)$, nous obtenons :

$$R(r) = \frac{c}{r^3} + \frac{b}{r^2} + \frac{a}{r} + dr^2$$

en réexprimant le potentiel :

$$V(r,\theta) = \frac{c}{r^3} + \frac{a}{r} + dr^2 + \frac{T(\theta)}{r^2}$$

pour $T(\theta) = S(\theta) + b$.

Exceptionnellement, (3.1.3) s'intègre directement :

$$G_2(r,\theta) = B_0 \cos 2\theta\, rR' + (-2B_0 \cos 2\theta + 4B_2)\frac{T}{r^2} - \frac{\gamma}{r} + 3T + f(r)$$

pour

$$G_1(r,t) = -(B_0 \cos 2\theta + B_2)\frac{\dot{T}}{r} + \dot{\gamma}$$

De (3.1.4), il en découle :

$$f(r) = 2B_2 dr^2 + \frac{f_1}{2r^2} + \frac{f_2}{r} + f_3$$

et

$$\ddot{\gamma} + \gamma = -3aB_0 \cos 2\theta + f_2, \tag{4.1.6}$$

$$(B_0 \cos 2\theta + B_2)\,\ddot{T} - 6B_0 \sin 2\theta \dot{T} + (-8B_0 \cos 2\theta + 4B_2)T = -f_1 \tag{4.1.7}$$

avec $c = 0$.

De (3.1.1) :

$$\begin{aligned} \hbar^2\big((B_0 \cos 2\theta - B_2)\,\ddddot{T} - 8B_0 \sin 2\theta \dddot{T} + (-20B_0 \cos 2\theta - 4B_2)\dot{T} + 16B_0 \sin 2\theta\, T \\ = -2f_1\dot{T} - 24B_2 T\dot{T}, \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

$$\hbar^2 D_0 \dddot{T} + 4a\dot{\gamma} - 12D_0 T\dot{T} - 4f_3\dot{T} = 0, \tag{4.1.9}$$

$$3a\hbar^2 B_0 \sin 2\theta + 6aB_2\dot{T} + 2f_2\dot{T} - 2\gamma\dot{T} - 4T\dot{\gamma} = 0 \tag{4.1.10}$$

et

$$d\dot{\gamma} = 0 \tag{4.1.11}$$

Ce système d'équations détermine complètement la partie angulaire du potentiel. (4.1.11) simplifie (4.1.6) à (4.1.10) selon les deux optiques : $d = 0$ ou $\dot{\gamma} = 0$. De plus, nous pouvons réécrire (4.1.8) afin d'utiliser (4.1.7) pour la simplifier à :

$$\hbar^2 B_2(\dddot{T} + 4\dot{T}) = f_1\dot{T} + 12B_2T\dot{T} \tag{4.1.12}$$

• $B_2 = 0,\ B_0 = A_{120} = -A_{102}$

De cette façon, (4.1.12) se réduit à

$$f_1\dot{T} = 0$$

Pour $\dot{T} = 0$, nous obtenons de (4.1.7) et (4.1.8) que $f_1 = T = 0$. De (4.1.10), il en découle que $a = 0$. Or, nous pouvons conclure que le seul résultat non-trivial est pour $d \neq 0$ et $\dot{\gamma} = 0$:

$$V_{Q4}(r, \theta) = dr^2$$

avec une intégrale d'ordre trois de la forme :

$$Y_{Q4} = 2L_3^3 + A_{120}\{L_3, p_x^2 - p_y^2 + 2d(x^2 - y^2) + f_3\}$$

Ici, A_{120} et f_3 sont arbitraires. Ainsi, les termes associés au différentes constantes commutent indépendemment, tout comme L_3^3, avec le Hamiltonien. De plus, le terme associé à A_{120} s'obtient de l'intégrale d'ordre deux connue pour le potentiel harmonique [41]. De cette façon, l'intégrale d'ordre trois s'obtient directement des intégrales d'ordre inférieur.

Ensuite, pour $\dot{T} \neq 0$ et $f_2 = 0$, (4.1.7) et (4.1.8) admettent comme solution :

$$T(\theta) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sin 2\theta}{\cos^2 2\theta} \tag{4.1.13}$$

Pour $\dot{\gamma} = 0$ dans (4.1.10), $a = 0$ et il ne reste plus qu'à vérifier (4.1.9). Ainsi, en remplaçant (4.1.13) dans celle-ci, les seuls potentiels non-triviaux qui vérifient cette équation sont :

$$V_{Q5} = dr^2 + \frac{4\hbar^2}{r^2 \cos^2 2\theta}$$

et

$$V_{Q6} = dr^2 + \frac{2\hbar^2(1 \pm \sin 2\theta)}{r^2 \cos^2 2\theta}$$

et les intégrales associées sont :

$$\begin{aligned} Y_{Q5} = 2\left(L_3^3 + \left\{L_3, \frac{6\hbar^2}{\cos^2 2\theta} - 2\hbar^2\right\}\right) + A_{120}\Bigg(\left\{L_3, p_x^2 - p_y^2 + 2dr^2\cos 2\theta - \frac{8\hbar^2}{r^2\cos 2\theta}\right\} \\ -16\hbar^2 y\left\{p_x, \frac{x^2}{x^2-y^2}\right\} - 16\hbar^2 x\left\{p_y, \frac{y^2}{x^2-y^2}\right\}\Bigg) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y_{Q6} = 2\left(L_3^3 + \left\{L_3, \frac{3(\cos\theta + \sin\theta)}{(\cos\theta - \sin\theta)^3} - \frac{\hbar^2}{2}\right\}\right) + A_{120}\Bigg(\left\{L_3, p_x^2 - p_y^2 + 2dr^2\cos 2\theta - \frac{4\hbar^2(1 \pm \sin 2\theta)}{r^2\cos 2\theta}\right\} \\ \mp 4\hbar^2\left\{\frac{x(x \pm y)^2}{(x^2+y^2)(x \mp y)^2}, p_x\right\} \mp 4\hbar^2\left\{\frac{y(x \pm y)^2}{(x^2+y^2)(x \mp y)^2}, p_y\right\}\Bigg) \end{aligned}$$

Une fois de plus, nous remarquons que les termes associés à A_{120} commutent indépendemment des termes reliés à L_3^3. De cette façon, nous pouvons en déduire deux intégrales deux intégrales d'ordre trois.

Maintenant, considérons le cas pour lequel $d = 0$ de telle sorte que (4.1.11) soit satisfaite $\forall\gamma$. Ainsi, de (4.1.6), nous obtenons :

$$\gamma(\theta) = \gamma_0 \cos\theta + \gamma_1 \sin\theta + aB_0 \cos 2\theta + f_2 \qquad (4.1.14)$$

qui nous permet de réduire (4.1.10) à une équation différentielle linéaire du premier ordre pour $T(\theta)$:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\left(\gamma_0 \cos\theta + \gamma_1 \sin\theta + aB_0 \cos 2\theta\right)^2 T\right) = -3aB_0\hbar^2 \sin 2\theta \qquad (4.1.15)$$

Or, pour $\gamma_0 = \gamma_1 = a = 0$, cette équation est satisfaite trivialement et ainsi nous obtenons les potentiels V_{Q5} et V_{Q6} tronqués de leur partie radiale :

$$V_{Q7} = \frac{4\hbar^2}{r^2 \cos^2 2\theta}$$

et

$$V_{Q8} = \frac{2\hbar^2(1 \pm \sin 2\theta)}{r^2 \cos^2 2\theta}$$

Par contre, pour γ_0, γ_1 et $a = 0$ non-nuls simultanément, en remplaçant (4.1.6) dans (4.1.15), il advient que la seule solution possible est le potentiel trivial $V = 0$.

Dans la limite classique, les potentiels précédents se réduisent à l'oscillateur harmonique :

$$V_{C1} = dr^2$$

pour une intégrale d'ordre trois

$$Y_{C1} = L_3^3 + A_{120}L_3\left(p_x^2 - p_y^2 + 2dr^2\cos 2\theta\right)$$

et cette intégrale d'ordre trois s'obtient de façon triviale par combinaison de L_3 et des intégrales du deuxième ordre déjà connues pour le potentiel harmonique.

• $B_2 \neq 0$

En utilisant (4.1.9), nous pouvons réduire (4.1.12) à :

$$B_2(4\hbar^2 + 4f_3)\dot{T} - 4aB_2\dot{\gamma} = f_1\dot{T} \tag{4.1.16}$$

De cette dernière relation, nous obtenons pour $\dot{\gamma} = 0$ que $T = 0$ et ainsi le seul potentiel qui en découle est une fois de plus le potentiel de l'oscillateur harmonique $V(r) = dr^2$ avec une intégrale d'ordre trois de la forme :

$$Y = 2L_3^3 + \{L_3, A_{120}(p_x^2 + 2dx^2) + A_{102}(p_y^2 + 2dy^2) + f_3\}$$

Dans ce cas-ci, une fois de plus, les termes associés à A_{120}, A_{102} et f_3 commutent indépendemment du terme en L_3^3. Nous obtenons ainsi trois intégrales d'ordre trois et l'intégrale connue d'ordre un L_3. Par contre, par le même argument que précedemment, les trois intégrales d'ordre trois s'obtiennent de façon algébrique des intégrales d'ordre deux connues[41] pour ce potentiel et de L_3. De cette façon, le critère d'indépendance fonctionnelle exigé dans la définition de superintégrabilité énoncée dans le chapître 1 n'est pas vérifiée.

Par contre, pour $d = 0$, les démarches sont un peu moins directes. Bref, nous pouvons intégrer (4.1.16) pour obtenir :

$$(4\hbar^2 B_2 + 4\frac{f_3}{D_0}B_2 - f_1)T = a\gamma + \gamma_2 \tag{4.1.17}$$

pour γ_2=constante. Or, par (4.1.6), nous connaissons la forme de γ. Ainsi,

$$T(\theta) = T_0(\gamma_0 \cos\theta + \gamma_1 \sin\theta + aB_0 \cos 2\theta) + f_2 + \tilde{\gamma}_2 \tag{4.1.18}$$

pour $4\hbar^2 B_2 + 4\frac{f_3}{D_0}B_2 - f_1 \neq 0$. S'il s'avère le contraire, le potentiel qui en résulte est nul.

Or, il advient que pour $\dot{\gamma} \neq 0$, (4.1.10) s'explicite sous la forme (4.1.15) de telle sorte que

$$T = \frac{\frac{3a}{2}B_0\hbar^2 \cos 2\theta + T_1}{(\gamma_0 \cos\theta + \gamma_1 \sin\theta + aB_0 \cos 2\theta)^2} \tag{4.1.19}$$

et il en ressort que le potentiel trivial est le seul admissible.

Dans le cas classique, nous obtenons aussi seulement le potentiel de l'oscillateur harmonique.

4.1.2.2 $B_0 = 0$

Dans ce cas-ci, les équations (3.1.9) et (3.2.11) sont satisfaites trivialement pour la partie radiale . De (3.1.2) à (3.1.4), nous retrouvons (4.1.6) et (4.1.7), de telle sorte que nous pouvons en déduire une relation pour $f(r)$ en terme de $R(r)$:

$$f(r) = 2B_2R' + \frac{f_1}{2r^2} + \frac{f_2}{r} + f_3$$

Ainsi, de (3.1.1), nous obtenons que le seul résultat non-trivial qui satisfait les équations déterminantes est une fois de plus un potentiel complètement arbitraire $R(r)$, sans comportement angulaire, possèdant une intégrale d'ordre trois et une d'ordre deux qui s'obtiennent de façon élémentaire de L_3 et du hamiltonien H :

$$Y = A_{300}L_3^3 + A_{120}\{L_3, H\}$$
$$X = L_3^2$$

Dans la limite classique, nous obtenons le même résultat.

4.1.3 Combinaisons de A_{300}, A_{030}, A_{021}, A_{012} et A_{003}

Le comportement radial est obtenu de (3.2.11) en considérant seulement les fonctions F_{31}, F_1 et F_{21} :

pour A_0 et A_1

$$R(r) = dr^2 + er^4$$

et A_2, A_3

$$R(r) = dr^2$$

Dans la section précédente, l'intégration des équations déteminantes (3.1.1) à (3.1.4) a été explicitée à partir des expressions obtenues pour G_1 et G_2 de (3.1.2) et (3.1.3). Il aurait été possible d'accomplir la même tâche à l'aide de (3.1.2) et (3.1.4) à la différence que les équations résultantes déterminant le comportement angulaire du potentiel se présentaient sous une forme moins abordable et se résolvaient moins directement que ceux utilisées dans la section précédente. De plus, comme nous l'avons mentionné, il était exceptionnel à ce cas d'intégrer ces équations de ce point de vue. Nous le constatons plutôt rapidement lorsque nous essayons d'accomplir les démarches dans ce cas-ci. Or, pour les cas qui suivrons, l'expression pour G_2 proviendra de (3.1.4).

Ainsi, avec l'expression de $R(r)$, les équations qui déterminent le comportement angulaire de ce type d'intégrale sont :

$$\dot{\xi} = 3D_0\dot{S}, \tag{4.1.20}$$

$$\ddot{\beta} + \beta = 0, \tag{4.1.21}$$

$$\dot{\beta}\dot{S} - 2\beta S = 0, \tag{4.1.22}$$

$$\hbar^2 D_0 \dddot{S} = 4\xi\dot{S}, \tag{4.1.23}$$

$$\begin{aligned}
&(3A_0 \sin 3\theta - 3A_1 \cos 3\theta + A_2 \sin\theta - A_3 \cos\theta)\dddot{S} \\
&+(36A_0 \cos 3\theta + 36A_1 \sin 3\theta + 4A_2 \cos\theta + 4A_3 \sin\theta)\ddot{S} \\
&+(-132A_0 \sin 3\theta + 132A_1 \cos 3\theta + 4A_2 \sin\theta - 4A_3 \cos\theta)\dot{S} \\
&+(-144A_0 \cos 3\theta - 144A_1 \sin 3\theta + 16A_2 \cos\theta + 16A_3 \sin\theta)S = 0
\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

et

$$\begin{aligned}
&\hbar^2\Big((-3A_0 \sin 3\theta + 3A_1 \cos 3\theta + 3A_2 \sin\theta - 3A_3 \cos\theta)\dddot{S} \\
&+ (-36A_0 \cos 3\theta - 36A_1 \sin 3\theta + 12A_2 \cos\theta + 12A_3 \sin\theta)\ddot{S} \\
&+ (132A_0 \sin 3\theta - 132A_1 \cos 3\theta + 12A_2 \sin\theta - 12A_3 \cos\theta)\dot{S} \\
&+ (144A_0 \cos 3\theta + 144A_1 \sin 3\theta + 48A_2 \cos\theta + 48A_3 \sin\theta)S\Big) \\
&= 72(A_0 \cos 3\theta + A_1 \sin 3\theta + A_2 \cos\theta + A_3 \sin\theta)S^2 \\
&+ 40(3A_0 \sin 3\theta - 3A_1 \cos 3\theta + A_2 \sin\theta - A_3 \cos\theta)S\dot{S} \\
&+ 6(-9A_0 \cos 3\theta - 9A_1 \sin 3\theta - A_2 \cos\theta - A_3 \sin\theta)\dot{S}^2 \\
&+ 2(-3A_0 \sin 3\theta + 3A_1 \cos 3\theta - A_2 \sin\theta + A_3 \cos\theta)\dot{S}\ddot{S}
\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

pour d, e qui s'annulent et avec

$$G_1(r,\theta) = 3F_1\frac{S}{r^2} - \frac{F_{21}}{r^2}\dot{S} + \beta$$

et

$$G_2(r,\theta) = \frac{1}{6r^3}\Big(\big(8F_{21} + 6\dot{F}_1\big)S + \big(6F_1 - 4F_{31} - \dot{F}_{21}\big)\dot{S} - F_{21}\ddot{S}\Big) + \frac{\dot{\beta}}{r} + \xi(\theta)$$

Afin de s'assurer de couvrir tous les cas possibles, nous nous devons de considérer toutes les combinaisons envisageables de A_0, A_1, A_2 et A_3 entre elles en plus de celles entre A_{030}, A_{021}, A_{012} et A_{003}, ce qui fait un nombre considérable d'alternatives, malgré le fait que certaines d'entre elles soient équivalentes. En revanche, par la section **3.3.4**, nous savons que nous pouvons toujours éliminer un terme de la forme de l'intégrale par une rotation afin de réduire le nombre de termes d'ordre trois pertinents à un maximum de trois.

Or, (4.1.20) à (4.1.25) se traitent difficilement par leur forme. En fait, les seules solutions non-triviales que nous avons pu récolter, malgré l'utilisation de logiciel de calculs symboliques et de transformations précises, sont pour les cas où seulement une constante A_i est non-nulle dans (4.1.20) à (4.1.25). Dans ces cas-ci, les équations se résolvaient directement. En revanche, malgré le fait que nous ayons été dans l'incapacité de le démontrer, il serait surprenant que des solutions existent dans les cas où plus d'un A_i soient non-nuls dû à la forme très contraignante des équations.

Ainsi, de (4.1.21), nous obtenons

$$\beta(\theta) = \beta_0 \cos\theta + \beta_1 \sin\theta$$

tel que pour β_0 et β_1 non-nuls simultanément, nous obtenons de (4.1.22) :

$$S(\theta) = \frac{\alpha}{\dot{\beta}} = \frac{\alpha}{(-\beta_0 \sin\theta + \beta_1 \cos\theta)^2} \tag{4.1.26}$$

De plus, nous pouvons en déduire de (4.1.24) et (4.1.25) les solutions suivantes :

pour A_0 non-nul :

$$S_0(\theta) = \frac{\alpha_0}{\sin^2 3\theta},$$

pour A_1 non-nul :

$$S_1(\theta) = \frac{\alpha_1}{\cos^2 3\theta},$$

pour A_2 non-nul :

$$S_2(\theta) = \frac{\alpha_2}{\sin^2 \theta},$$

et pour A_3 non-nul :

$$S_3(\theta) = \frac{\alpha_3}{\cos^2 \theta}.$$

En remplaçant ces résultats dans (4.1.23) à l'aide de (4.1.20) : $\xi(\theta) = 3D_0 S + \xi_0$, nous obtenons : $\alpha_0 = \alpha_1 = 9\hbar^2$ pour $\xi_0 = -9\hbar^2$ et $\alpha_2 = \alpha_3 = 9\hbar^2$ pour $\xi_0 = -\hbar^2$. Toutes ces possibilités s'annulent pour $\xi_0 = 0$. De plus, en comparant ces solutions avec (4.1.26) pour β_0 et β_1 non-nuls simultanément, seulement S_2 et S_3 sont admissibles.

Donc, il en découle les quatre potentiels purement quantiques

$$V_{Q8}(r,\theta) = \frac{9\hbar^2}{r^2 \sin^2 3\theta}, \qquad V_{Q9}(r,\theta) = \frac{9\hbar^2}{r^2 \cos^2 3\theta},$$

$$V_{Q10}(r,\theta) = \frac{\hbar^2}{r^2 \sin^2 \theta} \qquad \text{et } V_{Q11}(r,\theta) = \frac{\hbar^2}{r^2 \cos^2 \theta}$$

associés aux intégrales :

$$
\begin{aligned}
Y_{Q8} =& 2L_3^3 + 9\hbar^2\left\{L_3, 3\csc^2 3\theta - 1\right\} + 2A_{030}\left((p_x^3 - 3p_xp_y^2) + \left\{L_3, \frac{18\hbar^2}{r^3\sin 3\theta}\right\}\right. \\
& \left.\left\{\frac{135\hbar^2 x(x^3-3xy^2)}{(y^3-3x^2y)^2}, p_x\right\} + \left\{\frac{135\hbar^2 y(x^3-3xy^2)}{(y^3-3x^2y)^2}, p_y\right\}\right) \\
Y_{Q9} =& 2L_3^3 + 9\hbar^2\left\{L_3, 3\sec^2 3\theta - 1\right\} + 2A_{003}\left((p_y^3 - 3p_x^2p_y) + \left\{L_3, \frac{-18\hbar^2}{r^3\cos 3\theta}\right\}\right. \\
& \left.\left\{\frac{135\hbar^2 x(y^3-3x^2y)}{(x^3-3xy^2)^2}, p_x\right\} + \left\{\frac{135\hbar^2 y(y^3-3x^2y)}{(x^3-3xy^2)^2}, p_y\right\}\right) \\
Y_{Q10} =& 2L_3^3 + \left\{L_3, 3\hbar^2\csc^2\theta\right\} + 2A_{030}\left((p_x^3 + p_xp_y^2) + \left\{L_3, \frac{-2\hbar^2}{r^3\sin\theta}\right\}\right. \\
& \left.+\left\{\hbar^2\frac{x^2}{y^2r^2}, p_x\right\} + \left\{\hbar^2\frac{x}{yr^2}, p_y\right\}\right) \\
Y_{Q11} =& 2L_3^3 + \left\{L_3, 3\hbar^2\sec^2\theta\right\} + 2A_{003}\left((p_y^3 + p_x^2p_y) + \left\{L_3, \frac{2\hbar^2}{r^3\cos\theta}\right\}\right. \\
& \left.+\left\{\hbar^2\frac{y}{xr^2}, p_x\right\} + \left\{\hbar^2\frac{y^2}{x^2r^2}, p_y\right\}\right)
\end{aligned}
$$

Pour les quatre potentiels, nous obtenons deux intégrales d'ordre trois par le même argument que précédemment dans chaque cas, soit que, par exemple pour Y_{Q8}, les termes associés à A_{030} commutent indépendemment de ceux associés à L_3^3.

Dans la limite classique, (4.1.23) se réduit à $\xi S = 0$. Ainsi, de (4.1.20), nous obtenons que $S = 0$. De cette façon, nous pouvons en conclure qu'il n'existe aucun potentiel superintégrable classique pour cette forme d'intégrale.

4.1.4 Combinaisons possibles de toutes les constantes

Afin de joindre aux équations de la section **3.4.1.3** celles de la section **3.4.1.2**, nous nous devons intégrer (3.1.1) à (3.1.4) selon la même optique que le cas précédent.

Ainsi, le comportement radial commun aux deux sections est un potentiel harmonique :

$$R(r) = dr^2$$

De cette façon, en explicitant les équations déterminantes (3.1.1) à (3.1.4), nous retrouvons (4.1.6), (4.1.7) et (4.1.20) à (4.1.25) pour $a = d = 0$ en plus de :

$$\begin{aligned}\hbar^2\Big((B_0 \cos 2\theta - B_2)\dddot{S} - 8B_0 \sin 2\theta \ddot{S} + (-20B_0 \cos 2\theta - 4B_2)\dot{S} + 16B_0 \sin 2\theta\, S\Big) \\ = -16(B_0 \cos 2\theta + B_2)S\dot{S} - 12B_0 \sin 2\theta \dot{S}^2 + 2(B_0 \cos 2\theta + B_2)\dot{S}\ddot{S}\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

Or, nous connaissons toutes les solutions non-triviales qui satisfont à (4.1.6) à (4.1.11), soient V_{Q5} et V_{Q6} pour $d = 0$ et $\dot{\gamma} = 0$. En remplaçant ces solutions dans (4.1.20) à (4.1.25) selon toutes les combinaisons possibles des A_{0jk}, il advient que ces solutions se reduisent au potentiel libre dans les cas classiques et quantiques.

4.2 Solutions pour une intégrale de Type 2

Une fois de plus, les résultats se diviseront en 4 sous-sections.

4.2.1 $A_{210} = 1, A_{102} = A_{030} = A_{021} = A_{012} = A_{003} = 0$

De plus, nous explicitons les cas classique et quantique séparément afin de mettre en valeur une situation qui différencie nettement les deux contextes.

4.2.1.1 Solutions quantiques

En suivant les mêmes procédures que la section précédente, nous obtenons de (3.2.11) :

$$R(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + \frac{d}{r^4}$$

Comme dans le cas précédent, nous absorbons le terme en $\frac{1}{r^2}$ dans le partie angulaire du potentiel $T(\theta) = b + S(\theta)$:

$$V(r,\theta) = \frac{a}{r} + \frac{c}{r^3} + \frac{d}{r^4} + \frac{T(\theta)}{r^2}$$

Ainsi, les équations déterminantes (3.1.1) à (3.1.4) se réduisent à :

$$\dot{\xi} = -a\cos\theta \tag{4.2.1}$$

$$a\hbar^2\cos\theta = 4\xi\dot{T} - 4a\beta \tag{4.2.2}$$

$$-2\cos\theta\ddot{T} + 5\sin\theta\dot{T} + 2\cos\theta T + \ddot{\beta} + \beta = 0 \tag{4.2.3}$$

$$\hbar^2\Big(-\sin\theta\dddot{T} - 4\cos\theta\ddot{T} + 6\sin\theta\dot{T} + 4\cos\theta T\Big) = 4\dot{T}\dot{\beta} - 8T\beta - 8\cos\theta\dot{T}^2 \tag{4.2.4}$$

pour :

$$G_1 = \beta(\theta) = \dot{\gamma}$$

et

$$G_2 = \frac{-2\cos\theta}{r}\dot{T} + \frac{\dot{\beta}}{r} + \xi(\theta)$$

Les solutions possibles pour la partie angulaire du potentiel $T(\theta)$ se formulent selon les expressions possibles de $\xi(\theta)$. Ainsi, de (4.2.1), nous avons

$$\xi(\theta) = -a\sin\theta + \xi_0$$

En fait, les seules solutions non-triviales se présentent lorsque 1) $a \neq 0$, $\xi_0 = 0$ et 2) $\xi = 0$.

$\boxed{1)\ \xi = -a \sin\theta,\ a \neq 0}$

De cette façon, nous en déduisons de (4.2.2) une relation entre β et T :

$$\beta = -\sin\theta \dot{T} - \frac{\hbar^2}{4}\cos\theta$$

De cette expression, en explicitant (4.2.3), nous pouvons réexprimer (4.2.4) telle que :

$$\left(\sin\theta \ddot{T} + 3\cos\theta \dot{T} - 2\sin\theta T\right)\dot{T} = 0 \qquad (4.2.5)$$

Il en découle, pour $\dot{T} = T = 0$, le potentiel de Colomb

$$V_{Q12} = \frac{a}{r}$$

avec une intégrale d'ordre trois

$$Y_{Q12} = \{L_3^2, p_x\} + \left\{L_3, -\frac{ay}{r}\right\} - \frac{\hbar^2 p_x}{2}$$

Dans ce cas-ci, l'intégrale d'ordre deux découle directement de L_3, dû à l'absence de partie angulaire.

Pour $\dot{T} \neq 0$, (4.2.3) s'intègre directement et il en résulte :

$$T(\theta) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

et nous en déduisons le potentiel :

$$V_{Q13} = \frac{a}{r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

associé à l'intégrale d'ordre trois

$$Y_{Q13} = \{L_3^2, p_x\} + \left\{L_3, -\frac{ay}{r}\right\} + \left\{\frac{\alpha_2 x}{r} + \frac{2r(\alpha_1 r + \alpha_2 x)}{y^2}, p_x\right\} + \left\{\frac{\alpha_2 x}{r}, p_y\right\}$$

Ce potentiel possède déjà deux intégrales d'ordre deux [41]. L'intégrale d'ordre trois devrait découler de une de ces intégrales.

$\boxed{2)\ \xi = 0}$

Cette imposition simplifie grandement le système d'équations déterminantes (4.2.1) à (4.2.4). De fait, (4.2.1) et (4.2.2) s'annulent trivialement et nous nous retrouvons maintenant à considérer deux équations, (4.2.3) et (4.2.4), pour deux inconnues $T(\theta)$ et $\beta(\theta)$. Habituellement, nous avons à considérer un système d'équations différentielles surdéterminé, mais cette fois-ci, le système est simplement déterminé. Ainsi, il existe nécessairement une solution non-triviale pour $T(\theta)$ et $\beta(\theta)$.

De fait, de (4.2.4), nous pouvons en retirer une expression pour $\dot{\beta}$, pour $\dot{T} \neq 0$. Dans le cas de $\dot{T} = 0$, le potentiel libre est solution.

De cette façon, à l'aide de (4.2.3), nous obtenons une expression pour β :

$$\begin{aligned}\beta(\theta) = \frac{1}{4(4T^2 + 3\dot{T}^2 - 2T\ddot{T})}\Bigg\{\hbar^2\Big(&\sin\theta\dot{T}T^{(4)} + (2\sin\theta T + 5\cos\theta\dot{T} - \sin\theta\ddot{T})T^{(3)}\\ &-4\cos\theta\ddot{T}^2 + (12\cos\theta T - 4\sin\theta\dot{T})\ddot{T} - 10\cos\theta\dot{T}^2 - 8\sin\theta T\dot{T} - 8\cos\theta T^2\Big)\\ &-12\Big(\sin\theta\dot{T} + 2\cos\theta T\Big)\dot{T}^2\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

en supposant $4T^2 + 3\dot{T}^2 - 2T\ddot{T} \neq 0$. Autrement, il en découle :

$$T(\theta) = \frac{\alpha_1}{\cos^2(\theta + \alpha_2)} \qquad \alpha_1, \alpha_2 \text{ arbitraires}$$

et ainsi les deux potentiels :

$$V_{Q14} = \frac{\hbar^2}{r^2 \cos^2 \theta}$$

et

$$V_{Q15} = \frac{\alpha}{r^2 \sin^2 \theta}$$

associés à une intégrale d'ordre trois de la forme :

$$Y_{Q14} = \{L_3^2, p_x\} + \left\{\frac{\hbar^2(x^2 + 6y^2)}{2x^2}, p_x\right\} + \left\{\beta_0 - \frac{2\hbar^2 y}{x}, p_y\right\}$$

et

$$Y_{Q15} = \{L_3^2, p_x\} + \left\{\frac{2\alpha x^2}{y^2} + \beta_0, p_x\right\}$$

pour β_0 complètement arbitraire. De cette façon, nous pouvons, sans perte de généralités, annuler β_0 étant donné que cette constante est associée à une constante du mouvement du premier ordre pour V_{Q14} et V_{Q15}.

En somme, à partir de (4.2.6) pour $4T^2 + 3\dot{T}^2 - 2T\ddot{T} \neq 0$, nous pouvons obtenir, de (4.2.3) ou (4.2.4), une équation différentielle non-linéaire du cinquième ordre déterminant complètement $T(\theta)$:

$$
\begin{aligned}
&\hbar^2 \sin\theta\Big(- 2T\ddot{T} + 3\dot{T}^2 + 4T^2\Big)T^{(5)} + \hbar^2\Big(24 \cos\theta T^2 - 8 \sin\theta T\dot{T} + 18 \cos\theta \dot{T}^2 \\
&-12 \cos\theta T\ddot{T} - 4 \sin\theta \dot{T}\ddot{T} + 2 \sin\theta T\dddot{T}\Big)T^{(4)} + \hbar^2\Big(10 \cos\theta T - 3 \sin\theta \dot{T}\Big)\dddot{T}^2 \\
&+\Big(- 24 \sin\theta T\dot{T}^2 - 48 \cos\theta T^2\dot{T} + \hbar^2\Big(- 48 \sin\theta T^2 - 48 \cos\theta T\dot{T} - 12 \sin\theta \dot{T}^2 \\
&-32 \cos\theta \dot{T}\ddot{T} + 4 \sin\theta \ddot{T}^2\Big)\Big)\dddot{T} + 16\hbar^2 \cos\theta \ddot{T}^3 + \Big(64 \cos\theta T^2 + 72 \sin\theta T\dot{T} \\
&+\hbar^2\Big(- 16 \cos\theta T + 16 \sin\theta \dot{T}\Big)\Big)\ddot{T}^2 + \Big(- 160 \cos\theta T^3 - 240 \sin\theta T^2\dot{T} + 120 \cos\theta T\dot{T}^2 \\
&-60 \sin\theta \dot{T}^3 + \hbar^2\Big(40 \cos\theta \dot{T}^2 - 32 \cos\theta T^2 + 96 \sin\theta T\dot{T}\Big)\Big)\ddot{T} - 180 \cos\theta \dot{T}^4 \\
&+240 \sin\theta T\dot{T}^3 + 32\hbar^2 \cos\theta T\dot{T}^2 + 192 \sin\theta T^3\dot{T} + 64 \cos\theta T^4 - 48\hbar^2 \sin\theta \dot{T}^3 \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.2.7}
$$

À notre grand dépit, les avenues qui se présentent à nous dans l'optique d'étudier les solutions et les propriétés de cette équation semblent limitées.

De fait, une analyse des symétries de (4.2.7) nous confirme que celle-ci n'en possède aucune et la recherche d'une première intégrale fut laborieuse et nous a amené à une impasse. Ainsi, l'ordre de l'équation ne peut être réduit. De plus, en nous référant à l'étude ayant été accomplie dans le cas cartésien, dans lequel toutes les équations différentielles, qui caractérisaient le potentiel, possédaient la propriété de Painlevé[15], il va de soi que nous tentons d'accomplir les mêmes démarches.

Peu de travaux ont été mis à terme concernant les équations qui possèdent la propriété de Painlevé pour des ordres supérieurs ou égaux à 4. Sur ce, en comparaison avec la classification cartésienne, nous n'avons pu identifier (4.2.7) à aucune équation ayant été dérivée dans ce genre de travaux [7, 8].

L'analyse de Painlevé habituelle sur ce type d'équation se présente comme étant excessivement laborieuse d'un point de vue algébrique, en rationnalisant (4.2.7). Or, il existe des algorithmes ayant été développés à l'aide de logiciel de calculs symboliques, tel *Mathématica*[3,4], qui nous permettent d'accomplir ces démarches. À notre grande déception, ceux-ci se sont avérés incompatibles à (4.2.7). De plus, nous n'avons pas été en mesure d'acquérir le même type d'algorithmes pour d'autre type de langages de calculs symboliques tels *Maple* ou *MACSYMA*.

Par la suite, nos tentatives de résolutions de (4.2.7) et d'études plus détaillées se sont toutes révélées infructueuses, considérant que les seules solutions ayant été recueillies sont V_{Q14} et V_{Q15}.

En résumé, cette situation s'avère contrariante par le fait que celle-ci se présente comme étant un exemple hautement pertinent dans l'identification des différences qui existent entre les cas classique et quantique dans l'étude de la superintégrabilité avec des intégrales du mouvement d'ordres supérieurs ou égaux à trois comme l'avait démontré l'étude ayant été achevée en coordonnées cartésiennes[14,15]. Enfin, (4.2.7) possède nécessairement une solution générale unique et non-triviale considérant que celle-ci ait été dérivée d'un système complètement déterminé d'équations différentielles pour $T(\theta)$ et $\beta(\theta)$.

4.2.1.2 Contexte classique

Afin d'illustrer les différences entre les cas classique et quantique, regardons ce qu'il advient, dans la limite classique $\hbar \mapsto 0$, des équations déterminantes (4.2.1) à (4.2.4).

Cette action laisse invariantes (4.2.1) et (4.2.3) et réduit (4.2.2) et (4.2.4) à

$$\xi \dot{T} - a\beta = 0 \tag{4.2.8}$$

$$\dot{T}\dot{\beta} - 2T\beta - 2\cos\theta\dot{T}^2 = 0 \tag{4.2.9}$$

Une fois de plus, les seules solutions non-triviales qui s'ensuivent sont celles issues des conditions imposées sur ξ provenant des équations quantiques, soient 1) $a \neq 0$, $\xi_0 = 0$ et 2) $\xi = 0$.

$\boxed{1)\ \xi = -a\sin\theta,\ a \neq 0}$

Dans ce cas-ci, nous retrouvons, sans grande surprise, V_{Q12} et V_{Q13} étant donné que ces potentiels ne possédaient pas de terme purement quantique. De cette façon, les potentiels classiques qui en découlent sont identiques à ceux-ci :

$$V_{C2} = \frac{a}{r}$$
$$V_{C3} = \frac{a}{r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

munis d'intégrales d'ordre trois de la forme :

$$Y_{C2} = L_3^2 p_x - \frac{ay}{r}L_3$$

et

$$Y_{C3} = L_3^2 p_x - \frac{ay}{r}L_3 + \alpha_2\frac{(xp_x + yp_y)}{r} + \frac{(2\alpha_1 r + \alpha_2 x)}{y^2}$$

Comme dans le cas quantique, Y_{C2} s'obtient de façon triviale de L_3 et de l'intégrale d'ordre deux pour ce potentiel[41]. Nous pouvons faire le même commentaire ayant été fait dans le cas quantique concernant V_{Q13} pour V_{C3}

$\boxed{2)\ \xi = 0}$

Dans ce cas, dans la limite classique $\hbar \mapsto 0$, (4.2.7) se simplifie à :

$$\begin{aligned}&\left(6\sin\theta T\dot{T}^2 + 12\cos\theta T^2\dot{T}\right)\dddot{T} - \left(16\cos\theta T^2 + 18\sin\theta T\dot{T}\right)\ddot{T}^2\\&+\left(40\cos\theta T^3 + 60\sin\theta T^2\dot{T} - 30\cos\theta T\dot{T}^2 + 15\sin\theta\dot{T}^3\right)\ddot{T}\\&-16\cos\theta T^4 - 48\sin\theta T^3\dot{T} - 60\sin\theta T\dot{T}^3 + 45\cos\theta\dot{T}^4 = 0\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

qui détermine complètement la partie angulaire du potentiel associée à :

$$\beta(\theta) = -\frac{(3\sin\theta\dot{T} + 6\cos\theta T)\dot{T}^2}{4T^2 + 3\dot{T}^2 - 2T\ddot{T}} \tag{4.2.11}$$

sous les restrictions $T, \dot{T}, (4T^2 + 3\dot{T}^2 - 2T\ddot{T})$ et $(\sin\theta\dot{T}^2 + 2\cos\theta T) \neq 0$. Autrement, nous obtenons le potentiel libre et V_{Q15} associé cette fois-ci à une intégrale classique d'ordre trois de la forme :

$$Y_{C4} = L_3^2 p_x + \left(\frac{2\alpha x^2}{y^2} + \beta_0\right) p_x$$

Une analyse des symétries de (4.2.10), nous confirme que celle-ci demeure uniquement invariante sous les dilatations de la variable dépendante $T(\theta)$. Ainsi, en exécutant la transformation $T(\theta) \mapsto e^{W(\theta)}$ et en posant par la suite $\dot{W}(\theta) = U(\theta)$, nous réduisons l'ordre de (4.2.10) de tel sorte à obtenir :

$$\begin{aligned}\left(6\sin\theta U^2 + 12\cos\theta U\right)\ddot{U} - \left(16\cos\theta + 18\sin\theta U\right)\dot{U}^2 \\ +\left(40\cos\theta + 60\sin\theta U - 26\cos\theta U^2 - 3\sin\theta U^3\right)\dot{U} \\ -16\cos\theta - 48\sin\theta U + 40\cos\theta U^2 + 11\cos\theta U^4 + 3\sin\theta U^5 = 0\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Nos efforts ont une fois de plus été contrés dans la recherche d'une première intégrale. Par contre, il était parfaitement raisonnable de s'interroger et d'espérer la perspective que (4.2.12) ait la propriété de Painlevé. Sachant que la classification des équations différentielles d'ordre deux qui possède cette caractéristique s'avère complète[9,21], il s'agit de suivre les procédures habituelles afin d'espérer que (4.2.12) se transforme en une équation de cette classification.

Premièrement, dans le but d'accomplir ces démarches, rendons l'équation rationnelle

(4.2.12) en posant $\tan\theta = z$, $T(\theta) \mapsto U(z)$:

$$\left(6zU^2 + 12U\right)U'' = \left(16 + 18zU\right)U'^2 + \left(\frac{3zU^3 - 12(z^2 - 13)U^2 - 84zU - 40}{1 + z^2}\right)U' + \frac{16 + 48zU - 40U^2 - 11U^4 - 3zU^5}{(1 + z^2)^2} \tag{4.2.13}$$

Ainsi, la propriété de Painlevé, si présente, pour une équation différentielle d'ordre deux de la forme :

$$U'' = L(z, U)U'^2 + M(z, U)U' + N(z, U)$$

demeure inchangée sous les transformations rationnelles en termes des singularités de $L(z, U)$ et transforment $L(z, U)$ selon 8 possibilités[21].

Dans le cas de (4.2.13), la solution correspondante à celle-ci est singulière en $U_1 = 0$ et $U_2 = -\frac{2}{z}$. Donc, en transformant (4.2.13) selon $U \mapsto Y = \frac{zU+2}{zU}$, en présentant seulement le terme devant Y'^2, il en résulte :

$$Y'' = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{Y} - \frac{3}{Y - 1}\right)Y'^2 + \text{termes d'ordres inférieurs} \tag{4.2.14}$$

Cette forme ne correspond à aucune de celles présentées dans la référence [21] et ne peut être réduite à une de celles-ci. Ainsi, (4.2.10) ne posséde vraisemblablement pas la propriété de Painlevé.

Par contre, il advient que (4.2.10) admet comme solutions particulières $T = \frac{\alpha_1}{\sin^2\theta}$ et $\frac{\alpha_1}{\cos^2\theta}$ indépendemment l'une de l'autre. Or, ces solutions se sont avérées les seules qu'il nous a été possible de déduire de (4.2.10). Comme pour l'analogue quantique, (4.2.7), les efforts fournis et nos espoirs d'obtention d'une solution générale se sont révélés non concluant et inefficaces.

Une fois de plus, il doit nécessairement exister une solution générale à cette équation compte tenu du fait que (4.2.10) ait été obenue, comme dans le cas quantique, d'un système de deux équations différentielles couplées pour deux inconnues.

4.2.2 $A_{210} = 1, A_{102} \neq 0,\ A_{030} = A_{021} = A_{012} = A_{003} = 0$

Ici, les termes d'ordre trois de l'intégrale sont :

$$X = \{L_3^2, p_x\} + A_{102}\{L_3, p_y^2\}$$

Ainsi, B_0 et B_2 sont non nuls. En intégrant (3.1.1) à (3.1.4), nous retrouvons (4.1.7), (4.1.27), (4.2.1), (4.2.2) en plus de (4.2.3) et (4.2.4) couplées à des termes en B_0 et B_2 :

$$(-2\cos\theta\ddot{T} + 5\sin\theta\dot{T} + 2\cos\theta T + \ddot{\beta} + \beta) - 12aB_0\sin 2\theta = 0$$

et

$$\begin{aligned}\hbar^2\Big(- \sin\theta\dddot{T} - 4\cos\theta\ddot{T} + 6\sin\theta\dot{T} + 4\cos\theta T\Big) =& 4\dot{T}\dot{\beta} - 8T\beta - 8\cos\theta\dot{T}^2 \\ &+ 12a(B_0\cos 2\theta + B_2)\dot{T}\end{aligned}$$

Il advient que la seule solution que nous avons réussi à établir pour ce système d'équation est le potentiel nul. Nous avons été dans l'incapacité de fonder l'unicité de ce résultat. Par contre, comme nous allons le voir dans la prochaine section et par la section **4.1.2**, tout tend à croire que le potentiel libre est la seul admissible. Pour B_0 et B_2 non-nuls, l'oscillateur harmonique est l'unique système qui se propose comme solution des équations déterminantes de l'intégrale d'ordre trois. Et comme nous l'avons démontré, une constante du mouvement munie de termes d'ordre trois associés à A_{210} n'admet pas de comportement radial de cette forme.

Nous pouvons supposer les mêmes commentaires pour une intégrale constituée des termes d'ordres trois :

$$X = \{L_3^2, p_x\} + A_{102}\{L_3, p_y^2\} + 2\Big(A_{030}p_x^3 + A_{021}p_x^2p_y + A_{012}p_xp_y^2 + A_{003}p_y^3\Big)$$

4.2.3 $A_{210} = 1, A_{102} = 0,\ A_{030},\ A_{021},\ A_{012}$ et A_{003} non nulles simultanément

En comparant la partie radiale du terme en $A_{210} = 1$ et celle des termes en A_{030}, A_{021}, A_{012} et A_{003}, il en résulte que le comportement radial commun est nul.

Par la suite, en intégrant (3.1.1) à (3.1.4), les équations qui en résultent sont (4.1.20) et (4.1.23) à (4.1.25) pour $D_0 = 0$ et (4.2.1), (4.2.3) et (4.2.4) complètement découplées l'une de l'autre.

En se référant aux résultats obtenus pour une intégrale possédant des termes proportionnels à A_{030}, A_{021}, A_{012} et à A_{003}, soient S_0 à S_3, il s'ensuit qu'uniquement S_2 et S_3 sont solutions des équations associées au terme en A_{210} pour

$$G_1(r, \theta) = 3F_1\frac{S}{r^2} - \frac{F_{21}}{r^2}\dot{S} + \beta$$

et

$$G_2(r, \theta) = \frac{1}{6r^3}\Big(\big(8F_{21} + 6\dot{F}_1\big)S + \big(6F_1 - 4F_{31} - \dot{F}_{21}\big)\dot{S} - F_{21}\ddot{S}\Big) + \frac{-2F_{33}\dot{S} + \dot{\beta}}{r} + \xi(\theta)$$

En considérant les résultats obtenus : V_{Q14} et V_{Q15}, nous en déduisons pour A_2 le potentiel

$$V_{A_2}(r, \theta) = \frac{\alpha}{r^2 \sin^2\theta}$$

et pour A_3 :

$$V_{A_3}(r, \theta) = \frac{\hbar^2}{r^2 \cos^2\theta}$$

avec une intégrale d'ordre trois de la forme :

$$Y_{A_2} = \{L_3, p_x\} + \left\{\frac{2\alpha x^2}{y^2}, p_x\right\} + A_{030}\left(2(p_x^3 + p_x p_y^2) + \left\{\frac{\alpha(2y^2+x^2)}{y^2(x^2+y^2)}, p_x\right\} + \left\{\frac{-\alpha x}{y(x^2+y^2)}, p_y\right\}\right)$$

et

$$Y_{A_3} = \{L_3, p_x\} + \left\{\frac{2\hbar^2(x^2+y^2)}{2x^2}, p_x\right\} + \left\{\beta_0 - \frac{2\hbar^2 y}{x}, p_y\right\} + A_{030}\left(2(p_y^3 + p_x^2 p_y) + \left\{\frac{-\hbar^2 y}{x(x^2+y^2)}, p_x\right\} + \left\{\frac{-\hbar^2(2x^2+y^2)}{x^2(x^2+y^2)}, p_y\right\}\right)$$

Étant donné que nous sommes dans l'impossibilité de résoudre complètement les équations déterminantes pour les cas **4.1.3** et **4.2.1**, ces potentiels sont les seuls que nous avons été susceptible d'extirper des équations.

Dans la limite classique, nous obenons le même résultat sans les anticommutateurs dans l'intégrale.

4.3 Solutions pour une intégrale de Type 3

Dans cette section, nous étudions les solutions pour une intégrale qui s'explicite selon (3.3.4) à (3.3.7).

Comme nous l'avons indiqué dans la section **4.1.2**, les termes d'ordre trois associés à A_{120} et A_{102} s'identifient à uneârtie radiale de la forme :

$$R(r) = \frac{a}{r} + dr^2$$

4.3.1 $A_{030} = A_{021} = A_{012} = A_{003} = 0$

Ainsi, en nous réferrant à la même section, nous avons que les équations qui régissent le comportement angulaire sont respectivement (4.1.6) à (4.1.11) avec $D_0 = 0$.

Dans les cas d'une constante du mouvement de la forme (3.3.4) et (3.3.5), la seule possibilité que nous avons obtenue pour la partie angulaire est $T(\theta) = 0$. Par conséquent, le potentiel qui en découle est une de fois de plus celui de l'oscillateur harmonique $V(r) = dr^2$ associé aux intégrales :

$$Y_1 = \{L_3, p_x^2 + 2dx^2 + f_3\}$$
$$Y_2 = \{L_3, p_y^2 + 2dy^2 + f_3\}$$
$$Y_3 = \{L_3, H\}$$

En ce qui à trait à (3.3.7), pour $B_2 \neq 0$, comparativement à la sous-section **4.1.1.2**, dans laquelle nous avions l'opportunité d'utiliser (4.1.9) afin de réduire l'ordre de (4.1.12), nous en sommes confinés à traiter (4.1.12) sous sa forme primaire. Celle-ci se résout en terme de fonctions elliptiques. Par contre, cette solution doit de plus vérifier (4.1.7) ce que nous n'avons pas été en mesure d'accomplir malgré l'utilisation d'une routine d'un logiciel de calculs symboliques.

Malgré tout, nous pouvons associer au potentiel harmonique :

$$Y = \{L_3, A_{120}(p_x^2 + 2dx^2) + A_{102}(p_y + 2dy^2) + f_3\}$$

Dans le cas de $B_2 = 0$, il en ressort une solution de la forme (4.1.13) :

$$V_{Q16}(r, \theta) = dr^2 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \sin 2\theta}{r^2 \cos^2 2\theta}$$

pour $d = 0$ ou non. L'intégrale d'ordre trois est :

$$Y = \{L_3, p_x^2 - p_y^2 + 2d(x^2 - y^2) - 2\frac{(\alpha_1(x^2 + y^2) + 2\alpha_2 xy)}{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}) + f_3\}$$
$$+\left\{\frac{x}{r}G_1, p_x\right\} + \left\{\frac{y}{r}G_1, p_y\right\}$$

pour

$$G_1 = -\frac{2\Big(\alpha_2((x^2-y^2)^2+8x^2y^2)+4\alpha_1 xy(x^2+y^2)\Big)}{r(x^2-y^2)^2}$$

Ces potentiels survivent dans la limite classique pour des intégrales qui se simplifient par la disparition des anticommutateurs

4.3.2 A_{030}, A_{021}, A_{012} et A_{003} non nulles simultanément

En considérant les différentes combinaisons possibles de $A_{030}, A_{021}, A_{012}$ et A_{003} selon les formes (3.3.4) à (3.3.7) et les résultats précédents, il en résulte qu'aucun potentiel n'est éligible autre que le potentiel libre.

4.4 Solutions pour une intégrale du type 4

Comme nous l'avons mentionné à quelques reprises dans les sections précédentes, les seules solutions que nous avons été apte à extirper des équations caractérisant ce type d'intégrale, (4.1.20) à (4.1.25), pour $D_0 = 0$, sont S_0 à S_3 de la sous-section **4.1.3** pour $R(r) = 0$.

En revanche, l'incidence de l'absence de D_0 dans les équations déterminantes annule le comportement purement quantique des potentiels.

Ainsi, nous sommes contraints aux potentiels :

$$V_{Q17}(r,\theta) = \frac{\alpha_0}{r^2\sin^2 3\theta}, \qquad V_{Q18}(r,\theta) = \frac{\alpha_1}{r^2\cos^2 3\theta},$$
$$V_{Q19}(r,\theta) = \frac{\alpha_2}{r^2\sin^2\theta} \qquad \text{et } V_{Q20}(r,\theta) = \frac{\alpha_3}{r^2\cos^2\theta}$$

assortis d'intégrale d'ordre trois s'explicitant sous les formes :

$$
\begin{aligned}
Y_{Q17} &= 2(p_x^3 - 3p_x p_y^2) + \left\{L_3, \frac{2\alpha_0}{y(3x^2-y^2)}\right\} - \left\{\frac{15\alpha_0 x^2(x^2-3y^2)}{y^2r^2(y^2-3x^2)^2}, p_x\right\} \\
&\quad - \left\{\frac{15\alpha_0 x(x^2-3y^2)}{yr^2(y^2-3x^2)^2}, p_y\right\}, \\
Y_{Q18} &= 2(p_y^3 - 3p_x^2 p_y) + \left\{L_3, \frac{-2\alpha_1}{x(x^2-3y^2)}\right\} + \left\{\frac{15\alpha_1 y(y^2-3x^2)}{xr^2(x^2-3y^2)^2}, p_x\right\} \\
&\quad + \left\{\frac{15\alpha_1 y^2(y^2+3x^2)}{x^2r^2(x^2-3y^2)^2}, p_y\right\}, \\
Y_{Q19} &= 2(p_x^3 + p_x p_y^2) + \left\{L_3, -\frac{2\alpha_2}{yr^2}\right\} + \left\{\frac{\alpha_2 x^2}{y^2r^2}, p_x\right\} + \left\{\frac{\alpha_2 x}{yr^2}, p_y\right\}, \\
Y_{Q20} &= 2(p_y^3 + p_x^2 p_y) + \left\{L_3, \frac{2\alpha_3}{xr^2}\right\} + \left\{\frac{\alpha_3 y}{xr^2}, p_x\right\} + \left\{\frac{\alpha_3 y^2}{x^2r^2}, p_y\right\}
\end{aligned}
$$

Dans la limite classique, les mêmes potentiels sont admissibles pour des constantes du mouvement de la même forme.

4.5 Sommaire des solutions

Dans cette section, nous proposons un sommaire des solutions obtenues dans ce mémoire, bien que la classification entreprise demeure imcomplète. L'inventaire de tous les potentiels obtenus non-triviaux et des intégrales d'ordre trois associées sera présenté. Bien que plusieurs des potentiels trouvés sont associés à des intégrales d'ordre trois qui sont reliées à des intégrales d'ordre deux dà connues pour ceux-ci, nous préesntons tous les résultats obtenus dans ce mémoire.

4.5.1 Potentiels quantiques

1. $V = ar^2$

   $Y_1 = L_3^3$

   $Y_2 = \{L_3, p_x^2 + 2ax^2\}$

   $Y_3 = \{L_3, p_y^2 + 2ay^2\}$

2. $V = \frac{a}{r}$

$$Y = \{L_3^2, p_x\} + \left\{L_3, -\frac{ay}{r}\right\} - \frac{\hbar^2 p_x}{2}$$

3. $V = R(r) + \frac{\hbar^2 \wp(\theta)}{r^2}$

$$Y = 2L_3^3 + \{L_3, 3h^2 \wp(\theta)\}$$

4. $V = \frac{\alpha}{r^2 \cos^2\theta}$

$$Y = p_y^3 + p_x^2 p_y + \left\{L_3, \frac{2\alpha}{xr^2}\right\} + \left\{\frac{\alpha y}{xr^2}, p_x\right\} + \left\{\frac{\alpha y^2}{x^2 r^2}, p_y\right\}$$

5. $V = \frac{\hbar^2}{r^2 \cos^2\theta}$

$$Y_1 = L_3^3 + \{L_3, \frac{3\hbar^2}{\cos^2\theta}\}$$

$$Y_2 = p_y^3 + p_x^2 p_y + \left\{L_3, \frac{2\hbar^2}{r^3 \cos\theta}\right\} + \left\{\hbar^2 \frac{y}{xr^2}, p_x\right\} + \left\{\hbar^2 \frac{y^2}{x^2 r^2}, p_y\right\}$$

$$Y_3 = \{L_3^2, p_x\} + \left\{\frac{\hbar^2(x^2+6y^2)}{2x^2}, p_x\right\} - \left\{\frac{2\hbar^2 y}{x}, p_y\right\}$$

6. $V = \frac{\alpha}{r^2 \sin^2\theta}$

$$Y_1 = \{L_3^2, p_x\} + \{\frac{2\alpha x^2}{y^2}, p_x\}$$

$$Y_2 = p_x^3 + p_x p_y^2 + \left\{\frac{\alpha(2y^2+x^2)}{y^2(x^2+y^2)}, p_x\right\} + \left\{\frac{-\alpha x}{y(x^2+y^2)}, p_y\right\}$$

$$= p_x^3 + p_x p_y^2 + \left\{L_3, -\frac{2\alpha}{yr^2}\right\} + \left\{\frac{\alpha x^2}{y^2 r^2}, p_x\right\} + \left\{\frac{\alpha_2 x}{yr^2}, p_y\right\}$$

7. $V = \frac{\hbar^2}{r^2 \sin^2\theta}$

$$Y_1 = L_3^3 + \{L_3, \frac{3\hbar^2}{\sin^2\theta}\}$$

$$Y_2 = p_x^3 + p_x p_y^2 + \left\{L_3, \frac{-2\hbar^2}{r^3 \sin\theta}\right\} + \hbar^2\left\{\frac{x^2}{y^2 r^2}, p_x\right\} + \hbar^2\left\{\frac{x}{yr^2}, p_y\right\}$$

8. $V = ar^2 + \frac{4\hbar^2}{r^2 \cos^2 2\theta}$

$$Y_1 = L_3^3 + \left\{L_3, \frac{6\hbar^2}{\cos^2 2\theta} - 2\hbar^2\right\}$$

$$Y_2 = \left\{L_3, p_x^2 - p_y^2 + 2dr^2 \cos 2\theta - \frac{8\hbar^2}{r^2 \cos 2\theta}\right\} - 16\hbar^2 y\left\{p_x, \frac{x^2}{x^2-y^2}\right\} - 16\hbar^2 x\left\{p_y, \frac{y^2}{x^2-y^2}\right\}$$

9. $V = ar^2 + \frac{2\hbar^2(1\pm\sin 2\theta)}{r^2 \cos^2 2\theta}$

$$Y_1 = L_3^3 + \left\{L_3, \frac{3(\cos\theta+\sin\theta)}{(\cos\theta-\sin\theta)^3} - \frac{\hbar^2}{2}\right\}$$

$$Y_2 = \left\{L_3, p_x^2 - p_y^2 + 2dr^2 \cos 2\theta - \frac{4\hbar^2(1\pm\sin 2\theta)}{r^2 \cos 2\theta}\right\} \mp 4\hbar^2\left\{\frac{x(x\pm y)^2}{(x^2+y^2)(x\mp y)^2}, p_x\right\} \mp 4\hbar^2\left\{\frac{y(x\pm y)^2}{(x^2+y^2)(x\mp y)^2}, p_y\right\}$$

10. $V = \frac{\alpha}{r^2 \sin^2 3\theta}$

$$Y = p_x^3 - 3p_x p_y^2 + \left\{L_3, \frac{2\alpha_0}{y(3x^2-y^2)}\right\} - \left\{\frac{15\alpha x^2(x^2-3y^2)}{y^2 r^2 (y^2-3x^2)^2}, p_x\right\} - \left\{\frac{15\alpha x(x^2-3y^2)}{yr^2(y^2-3x^2)^2}, p_y\right\}$$

11. $V = \frac{9\hbar^2}{r^2 \sin^2 3\theta}$

$$Y_1 = L_3^3 + 9\hbar^2\left\{L_3, 3\csc^2 3\theta - 1\right\}$$

$$Y_2 = p_x^3 - 3p_x p_y^2 + \left\{L_3, \frac{18\hbar^2}{r^3 \sin 3\theta}\right\} + \left\{\frac{135\hbar^2 x^2(x^2-3y^2)}{y^2r^2(y^2-3x^2)^2}, p_x\right\} + \left\{\frac{135\hbar^2 x(x^2-3y^2)}{yr^2(y^2-3x^2)^2}, p_y\right\}$$

12. $V = \frac{\alpha}{r^2 \cos^2 3\theta}$

$$Y = p_y^3 - 3p_x^2 p_y + \left\{L_3, \frac{-2\alpha_1}{x(x^2-3y^2)}\right\} + \left\{\frac{15\alpha y(y^2-3x^2)}{xr^2(x^2-3y^2)^2}, p_x\right\} + \left\{\frac{15\alpha y^2(y^2+3x^2)}{x^2r^2(x^2-3y^2)^2}, p_y\right\}$$

13. $V = \frac{9\hbar^2}{r^2 \cos^2 3\theta}$

$$Y_1 = L_3^3 + 9\hbar^2\left\{L_3, 3\sec^2 3\theta - 1\right\}$$

$$Y_2 = p_y^3 - 3p_x^2 p_y + \left\{L_3, \frac{-18\hbar^2}{r^3 \cos 3\theta}\right\} + \left\{\frac{135\hbar^2 y(y^2-3x^2)}{xr^2(x^2-3y^2)^2}, p_x\right\} + \left\{\frac{135\hbar^2 y^2(y^2-3x^2)}{x^2r^2(x^2-3y^2)^2}, p_y\right\}$$

14. $V = \frac{a}{r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$

$$Y = \{L_3^2, p_x\} + \left\{L_3, -\frac{ay}{r}\right\} + \left\{\frac{\alpha_2 x}{r} + \frac{2r(\alpha_1 r+\alpha_2 x)}{y^2}, p_x\right\} + \left\{\frac{\alpha_2 x}{r}, p_y\right\}$$

15. $V = ar^2 + \frac{\alpha_1+\alpha_2\sin 2\theta}{r^2\cos^2 2\theta}$

$$Y = \{L_3, p_x^2 - p_y^2 + 2d(x^2-y^2) - 2\frac{(\alpha_1(x^2+y^2)+2\alpha_2 xy)}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}) + f_3\} + \left\{\frac{x}{r}G_1, p_x\right\} + \left\{\frac{y}{r}G_1, p_y\right\}$$

pour $G_1 = -\frac{2\left(\alpha_2\left((x^2-y^2)^2+8x^2y^2\right)+4\alpha_1 xy(x^2+y^2)\right)}{r(x^2-y^2)^2}$

Les Potentiels classiques s'obtiennent directement des potentiels quantiques énumérés dans la limite $\hbar \mapsto 0$ et en omettant le s anticommutateurs dans les intégrales.

CHAPITRE 5

INTÉGRABILITÉ CUBIQUE EN COORDONNÉES PARABOLIQUES ET PERSPECTIVES ELLIPTIQUES

Nous présentons maintenant les équations qui déterminent complètement l'existence d'une intégrale d'ordre trois pour un Hamiltonien bidimensionnel en coordonnées paraboliques dans le plan Euclidien.

5.1 Quantités physiques en coordonnées paraboliques

Le changement habituel en coordonnées paraboliques est :

$$x = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}, \qquad y = \xi\eta \tag{5.1.1}$$

qui transforme le Hamiltonien :

$$H = \frac{p_\xi^2 + p_\xi^2}{2(\xi^2 + \eta^2)} + V(\xi, \eta)$$

les impulsions :

$$p_x = \frac{\xi p_\xi - \eta p_\eta}{(\xi^2 + \eta^2)}, \qquad p_y = \frac{\eta p_\xi + \xi p_\eta}{(\xi^2 + \eta^2)}$$

et la composante en z du moment angulaire :

$$p_x = \frac{\xi p_\eta - \eta p_\xi}{2}.$$

Ces expressions sont nécessairement valables en mécanique quantique par l'identification de $p_\xi = -i\hbar\partial_\xi$ et $p_\eta = -i\hbar\partial_\eta$.

5.2 Conditions d'existence d'une intégrale d'ordre trois en coordonnées paraboliques

Les équations d'existence d'une constante du mouvement de la forme (2.4.1) s'obtiennent en transformant (2.4.2) à (2.4.5) à l'aide de (5.1.1).

Ainsi, en combinant les expressions transformées, de façon semblable au cas polaire, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
D_1 V_r + D_2 V_\theta = \frac{\hbar^2}{4}\Bigg\{ & \frac{d_1 V_{\xi\xi\xi} + d_2 V_{\xi\xi\eta} + d_3 V_{\xi\eta\eta} + d_4 V_{\eta\eta\eta}}{(\xi^2+\eta^2)} + \left(\frac{-3\xi d_1 - 2\eta d_2 + \xi d_3}{(\xi^2+\eta^2)^2}\right) V_{\xi\xi} \\
& + \left(\frac{(3\eta d_1 - 3\xi d_2 - 3\eta d_3 + 3\xi d_4) V_{\xi\eta} + (\eta d_2 - 2\xi d_3 - 3\eta d_4) V_{\eta\eta}}{(\xi^2+\eta^2)^2}\right) \\
& + \left(\frac{3(d_1 - d_3)(\xi^2 - \eta^2) + 6(d_2 - d_4)\xi\eta}{(\xi^2+\eta^2)^3} + \frac{2(A_{210}\xi + A_{201}\eta)}{\xi^2+\eta^2} - 4A_{300}\eta\right) V_\xi \\
& + \left(\frac{6(-d_1 + d_3)\xi\eta + 3(d_2 - d_4)(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2+\eta^2)^3} + \frac{2(A_{210}\xi + A_{201}\eta)}{\xi^2+\eta^2} + 4A_{300}\xi\right) V_\eta \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.2.1}
$$

$$(D_1)_\xi = 3d_1 V_\xi + d_2 V_\eta - \left(\frac{uD_1 + vD_2}{\xi^2+\eta^2}\right) \tag{5.2.2}$$

$$(D_2)_\eta = d_3 V_\xi + 3d_4 V_\eta - \left(\frac{uD_1 + vD_2}{\xi^2+\eta^2}\right) \tag{5.2.3}$$

$$(D_1)_\eta + (D_2)_\xi = 2(d_2 V_\xi + d_3 V_\eta) \tag{5.2.4}$$

Les fonctions $d_i = d_i(\xi, \eta)$ sont reliées aux fonctions (2.4.6) à (2.4.9) de la façon :

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\xi^3 f_1 + \xi^2\eta f_2 + \xi\eta^2 f_3 + \eta^3 f_4}{(\xi^2+\eta^2)^2} \\
d_2 &= \frac{-3\xi^2\eta f_1 + (\xi^3 - 2\xi\eta^2) f_2 + (2\xi^2\eta + \eta^3) f_3 + 3\xi\eta^2 f_4}{(\xi^2+\eta^2)^2} \\
d_3 &= \frac{3\xi\eta^2 f_1 + (\eta^3 - 2\xi^2\eta) f_2 + (\xi^3 - 2\xi\eta^2) f_3 + 3\xi^2\eta f_4}{(\xi^2+\eta^2)^2} \\
d_4 &= \frac{-\eta^3 f_1 + \xi\eta^2 f_2 - \xi^2\eta f_3 + \xi^3 f_4}{(\xi^2+\eta^2)^2}
\end{aligned}
$$

et les fonctions $D_1 = D_1(\xi,\eta)$ et $D_2 = D_2(\xi,\eta)$ sont définies en termes de g_1 et g_2 :

$$D_1 = \frac{\xi g_1 + \eta g_2}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad \text{et} \qquad D_2 = \frac{-\eta g_1 + \xi g_2}{\xi^2 + \eta^2}$$

Nous n'explicitons pas les expressions pour d_1, d_2, d_3 et d_4 en terme de u et v car celles-ci ne s'expriment pas sous des formes simplifiées comme dans les cas cartésien et polaire.

Les équations (5.2.1) à (5.2.4) caractérisent l'existence de l'intégrale dans le contexte de la mécanique quantique. Tout comme dans les cas cartésien et polaire, une intégrale classique du troisième ordre se spécifie dans la limite $\hbar \mapsto 0$.

Comme nous pouvons le constater, l'équation qui distingue les cas classique et quantique, soient (3.1.1) en coordonnées polaires et (5.2.1) en coordonnées paraboliques, se présentent sous une forme autrement moins abordable que celle du cas cartésien (3.1.1).

Le principal intérêt de la transposition de (2.4.2) à (2.4.5) dans le contexte parabolique est d'envisager une étude de la superintégrabilité pour des Hamiltoniens qui admettent respectivement une intégrale d'ordre trois, régit par (5.2.1) à (5.2.4) et une intégrale d'ordre deux de la forme 3. de la section **2.3**. Dans cette perspective, contrairement à la situation polaire, nous envisageons l'analyse de (5.2.1) à (5.2.4) plus accessible, simplement par le fait que les variables paraboliques ξ et η se présentent sous la même forme dans les équations. De cette façon, une approche semblable à celle de l'étude en coordonnées cartésiennes[14,15] est envisageable et possiblement plus directe que l'avenue emprunté dans l'étude polaire qui s'énonçait cas par cas.

5.3 Coordonnées elliptiques

Avant de conclure, nous proposons quelques commentaires sur l'existence d'une intégrale cubique en coordonnnées elliptiques.

Nous ommettons la présentation des équations qui singularisent un tel contexte, car le temps nous a contraint à nous concentrer principalement sur les résultats précédemment présentés dans ce mémoire.

Par contre, une possible étude des propriétés d'intégrabilité et de superintégrabailité en ces coordonnées, soient $x = l\cosh\rho\cos\sigma$ et $y = l\sinh\rho\sin\sigma$ pour $l > 0$, doit s'accomplir pour un Hamiltonien bidimensionnel de la forme

$$H = \frac{p_\rho^2 + p_\sigma^2}{2l^2(\cosh^2\rho - \cos^2\sigma)} + V(\rho,\sigma)$$

pour

$$p_x = \frac{\sinh\rho\cos\sigma p_\rho - \cosh\rho\sin\sigma p_\sigma}{l(\cosh^2\rho - \cos^2\sigma)}$$

et

$$p_y = \frac{\cosh\rho\sin\sigma p_\rho + \sinh\rho\cos\sigma p_\sigma}{l(\cosh^2\rho - \cos^2\sigma)}$$

Les expressions quantiques s'obtiennent en considérant $p_\rho = -i\hbar\partial_\rho$ et $p_\sigma = -i\hbar\partial_\sigma$.

Nous prenons le temps de commenter quelque peu cette avenue, car dans un avenir rapproché, après avoir complèté la classification des Hamiltoniens qui admettent la séparation de variables en coordonnées polaires et paraboliques, des démarches semblables se devront d'être accomplies dans le cas 4. de la section (**2.3**).

De fait, les similitudes probables des équations déterminantes de ce contexte et de celui traité dans ce mémoire risquent d'être marquantes. La présence, une fois de plus, de fonctions trigonométriques et en plus de fonctions hyperboliques risquent de freiner régulièrement le traitement des équations qui régissent le potentiel.

Évidemment, il serait important de conclure d'abord la classification entreprise en coordonnées polaires et ensuite mettre à terme une recherche semblable en coordonnées paraboliques afin de s'en prendre finalement au cas elliptique.

CONCLUSION

Ce mémoire se voulait une continuation de l'étude de la superintégrabilité cubique classique et quantique dans un espace euclidien bidimensionnel.

De fait, nous avons établi les équations déterminantes d'un invariant polynomial d'ordre trois en les impulsions en coordonnées polaires et paraboliques en plus de commenter brièvement la perspective de ces équations en coordonnées elliptiques.

Par la suite, en imposant l'existence d'un deuxième invariant, cette fois-ci d'ordre deux, entraînant la séparation de variables du potentiel dans le Hamiltonien en coordonnées polaires, nous nous avons tenté de répertorier tous les systèmes hamiltoniens qui se caractérisent selon ces spécificités. Toutes les démarches accomplies se justifiaient, à la base, par les différentes simplifications admissibles sur la forme générale d'une intégrale d'ordre trois sous l'action du groupe Euclidien.

Les équations qui déterminaient le comportement radial du potentiel étaient rapidement intégrées. Quant aux comportements angulaires, ceux-ci s'obtenaient de façon autrement moins directe. Les équations qui régissaient cette partie du potentiel se présentaient sous des formes difficiles à intégrer par les méthodes connues et par l'utilisation de logiciels de calculs symboliques. En quelques occasions, nous avons été dans l'incapacité de résoudre les équations résultantes.

Néanmoins, les potentiels obtenus dans notre étude se présentaient sensiblement sous des formes connnues. Nous avons pu en quelques cas, démontrer les différences entre la superintégrabilité cubique classique et quantique ; nous avons obtenu plusieurs solutions purement quantique, exprimées en termes de fonctions connnues qui se réduisaient au potentiel libre dans la limite classique.

Enfin, en comparaison avec l'étude achevée dans le cas où le Hamiltonien admet la séparation de variables en coordonnées cartésiennes, le traitement de chacun des cas possibles s'effectuait de façon hautement moins systématique. En fait, la tentative de compilation des systèmes hamiltoniens qui vérifiaient les prémisses de nos recherches, s'apparentait à une méthode de cas par cas, ce qui nous compliquait drôlement la tâche par le nombre considérable de cas à analyser et à ne pas négliger.

Finalement, la classification des systèmes hamiltoniens séparables en coordonnées polaires possédant une intégrale d'ordre trois en deux dimensions demeure incomplète. Naturellement, il serait intéressant et important de mettre un terme à cette recherche afin de pouvoir s'attaquer par la suite à l'étude de la superintégrabilité cubique avec séparation de variables en coordonnées paraboliques et elliptiques.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, plusieurs cas demeurent non résolus. En plus des situations laissées sans solutions dans ce mémoire, il est a noté que tout au long des démarches précédentes, nous nous sommes référés aux différentes simplifications que nous pouvions accomplir sur la forme générale de l'intégrale d'ordre trois afin de simplifier les équations déterminantes. Ce que nous avons omis de considérer est l'effet que peut avoir ces simplifications sur l'intégrale d'ordre deux. De fait, l'intégrale d'ordre deux est de la forme $L_3^2 + S(\theta)$ et demeure uniquement invrariante sous les rotations dans le plan. Les translations modifient l'allure de cet invariant. Ainsi, il s'ensuit que plusieurs autres cas demeurent non traités et le problème de classification demeure hautement ouvert.

Ce problème comme beaucoup d'autres dans le domaine de l'intégrabilité et la superintégrabilité classique et quantique demeure non résolu. De plus, un bon nombre de fondements théoriques concernant l'intégrabilité quantique restent à être établis de façon rigoureuse. Beaucoup d'aspects sont conjecturés et supposés : la notion d'indépendance entre les intégrales quantiques, la solvabilité des systèmes superintégrables quantiques, le liens avec les symétries généralisées, la présence de la propriété de Painlevé pour les équations qui déterminent les potentiels quantiques, pour n'en citer que quelques uns.

Finalement, la pertinence des recherches dans le domaine de l'intégrabilité et la superintégrabilité classique et quantique pour des ordres supérieurs à deux, a été démontré dans quelques travaux par les différences qui semblent vouloir s'établir entre les contextes classiques et quantiques. Des efforts considérables se doivent d'être investis dans les démarches qui pourraient mener à la résolution de ces problèmes et le développement de nouvelles méthodes de calculs qui pourraient clarifier notre façon d'aborder les problèmes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. Arnold, Dynamical systems III, Springer Verlag, Berlin, 1985 .

[2] V. I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, Springer-Verlag, New York, 1978 .

[3] D. Baldwin, W. Hereman, Symbolic softaware for the painlevé test of non-linear ordinary and partial differential equations, J. Nonl. Math. Phys., en impression (2005).

[4] D. Baldwin and W. Hereman, PainleveTest.m : A Mathematica package for the Painleve test of systems of ODEs and PDEs (2001).

[5] Gerd Baumann, Symmetry Analysis of Differential Equation with Mathematica, Springer-Verlag, New York, 2000.

[6] J. Bertrand, Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, C.R. Acad. Sci. **77**, 849-853 (1873) .

[7] C. Crosgrove, Higher-order Painlevé Equations in the Polynomial Class I. Bureau Symbol P2, Stud. Appl. Math. 104, 1-65 (2000).

[8] C. Crosgrove, Higher-order Painlevé Equations in the Polynomial Class II. Bureau Symbol P1, en préparation, http ://www2.appmath.com :8080/site/Library/papers/Painleve/2000-6.pdf.

[9] H. T. Davis, Introduction to nonlinear differential and integral equations, Dover, New York, 1962 .

[10] J. Drach, Sur l'intégration logique des équations de la dynamique à deux variables : Forces conservatives. Intégrales cubiques. Mouvements dans le plan., C.R. Acad. Sci. **200**, 22-26 (1935) .

[11] N. W. Evans, Superintegrability in classical mechanics, Phys. Rev. **41**, 5666-5676 (1990)

[12] N. W. Evans, On hamiltonian systems in two degrees of freedom with invariants quartic in the momenta of form $p_1^2 p_2^2 ...$, J. Math. Phys. **31**, 600-604 (1988)

[13] I. Fris, V. Mandrosov, Ya. A. Smorodinsky, M. Uhlir et P. Winternitz, On higher symmetries in quantum mechanics, Phys. Lett. **16**, 354-356 (1965) .

[14] S. Gravel, P. Winternitz, Superintegrable systems with third-order integrals in classical and quantum mechanics, J. Math. Phys. **43**, 5902-5912 (2002) .

[15] S. Gravel, Hamiltonians separable in cartesian coordinates and third-order integrals of motion, J. Math. Phys. **45**, 1003-1019 (2004) .

[16] S. Gravel, Superintegrability, isochronicity and quantum harmonic behavior, math-ph/0310004 (2003).

[17] J. Hietarinta, B. Grammaticos, On the $\hbar^2$ correction terms in quantum integrability, J. Phys. A : Math. Gen. **22**, 1315-1322 (1989) .

[18] J. Hietarinta, Solvability in quantum mechanics and classically superflous invariants, J. Phys. A : Math. Gen. **22**, L143-L147 (1989) .

[19] J. Hietarinta, Pure quantum integrability, Phys. Lett. A **246**, 97-104 (1998) .

[20] J. Hietarinta, New integrable Hamiltonians with transcendental invariants, Phys. Rev. Lett **52**, 1057-1060 (1984) .

[21] E. L. Ince, Ordinary differential equations, Dover, New York, 1956 .

[22] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. et G. S. Pogosyan, Completeness of multiseparable superintegrability in $E_{2,\mathbb{C}}$, J. Phys. A : Math. Gen. **33**, 4105-4120 (2000) .

[23] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. et G. S. Pogosyan, Completeness of multiseparable superintegrability on the complex 2-sphere, J. Phys. A : Math. Gen. **33**, 6791-6806 (2000) .

[24] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. et G. S. Pogosyan, Completeness of multiseparable superintegrability in two-dimensionnal constant-curvature spaces, J. Phys. A : Math. Gen. **34**, 4705-4720 (2001) .

[25] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. et G. S. Pogosyan, Superintegrability and associated polynomial solutions : Euclidean space and the sphere in two dimensions, J. Math. Phys. **37**, 6439-6467 (1996) .

[26] E. G. Kalnins, W. Miller Jr. et G. S. Pogosyan, Superintegrability on the two-dimensionnal hyperboloïd, J. Math. Phys. **38**, 5416-5433 (1997) .

[27] E. G. Kalnins, W. Miller Jr., G. S. Pogosyan et Ye. M. Hakobyan, Superintegrability on the two-dimensionnal hyperboloïd II, J. Math. Phys. **40**, 2291-2306 (1999) .

[28] E. G. Kalnins, J. M. Kress et W. Miller Jr., Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. I. Two-dimensional classical structure theory, J. Math. Phys. **46**, 053509-1-053509-28 (2005) .

[29] E. G. Kalnins, J. M. Kress et W. Miller Jr., Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. II. The classical two-dimensionnal Stäckel transform, J. Math. Phys. **46**, 053510-1-053510-15 (2005) .

[30] E. G. Kalnins, J. M. Kress et P. Winternitz, Superintegrability in a two-dimensional space of nonconstant curvature, J. Math. Phys. **43**, 970-983 (2002).

[31] E. G. Kalnins, G. C. Williams et W. Miller Jr., Superintegrability in three-dimensional Euclidean space, J. Math. Phys. **40**, 708-725 (1999) .

[32] A. A. Makarov, Ya. A. Smorodinsky, Kh. Valiev et P. Winternitz, A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries, Nuovo cimento **A52**, 1061-1084 (1967) .

[33] R. McLenaghan, R. Smirnov et D. The, An invariant classification of cubic integrals of motion, nlin.SI/0305048 (2003) .

[34] R. McLenaghan, R. Smirnov et D. The, Towards a classification of cubic integrals of motion, dans P. Tempesta, P. Winternitz, J. Harnad, W. Miller, Jr., et M. Rodriguez, editors, Superintegrability in Classical and Quantum Systems, CRM Proceedings and Lecture Notes . **37**, AMS, Providence, R.I., 2004.