Université de Montréal

Fondements et épistémologie de l'arithmétique dans les *Grundlagen* de Frege

par

Virginie Maris

Département de philosophie

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître en philosophie (M.A.)

Avril, 2002

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :
Fondements et épistémologie de l'arithmétique
dans les *Grundlagen* de Frege

présenté par :
Virginie Maris

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

M. Jean-Pierre Marquis, prés.-rapp.

M. François Lepage, dir. recherche

M. Yvon Gauthier, membre

Mémoire accepté le : 30 août 2002

SOMMAIRE

Nous tentons ici de réhabiliter le projet logiciste frégéen, presque complètement abandonné et discrédité suite à la découverte du paradoxe de Russell, et aux différentes anomalies repérées dans la théorie des ensembles, notamment le paradoxe de Cantor. Après la présentation des *Grundlagen* de Frege et de la façon dont le paradoxe de Russel fait sombrer dans l'inconsistance le système frégéen, nous montrons comment cet obstacle peut être surmonté en remplaçant la loi V qui donne prise au paradoxe par la définition contextuelle de l'opérateur de cardinalité (*le nombre de x tels que x est un F est égal au nombre de y tel que y est un G si et seulement si les F et les G sont en correspondance biunivoque*), que l'on nomme *Principe de Hume*. Nous voyons qu'une telle modification est possible sans trahir fondamentalement les intentions de Frege dans les *Grundlagen*, où la notion d'extension de concept n'a pas l'importance qu'elle prendra plus tard dans les *Grundgesetze*. Cela achèvera la partie fondationnelle du travail, en permettant de dériver les axiomes de Peano (donc l'ensemble de l'arithmétique) dans le système ainsi défini, que l'on appelle arithmétique frégéenne, ainsi que le *Théorème de Frege*, preuve que la suite naturelle des nombres est infinie. Cette preuve est en effet un enjeu majeur du logicisme puisqu'elle permet de pallier à la nécessité pour l'arithmétique de poser un nombre infini d'hypothèses d'existence, une pour chaque nombre, et confèrerait ainsi toute sa légitimité au projet logiciste, sur le principe d'une économie d'hypothèses. Cependant, nous voyons que cette preuve ne devient tout à fait concluante que si les nombres sont considérés comme des objets, ce qui nous amène a interroger le statut épistémologique de la connaissance que nous pouvons avoir des nombres tels qu'ils sont construits dans FA. Nous analysons pour ce faire différentes conceptions du nombre et des lois arithmétiques ainsi que les difficultés qu'elles présentent respectivement, et montrons comment ces difficultés peuvent être surmontées en mettant en parallèle l'entreprise de Frege et les développements de la géométrie projective qui lui sont contemporains. Ceci permet de montrer que même si le logicisme n'a pas atteint la forme achevée que l'on peut en attendre, l'entreprise qui consiste à dériver les lois arithmétiques de lois plus simples et évidentes, bien qu'elles n'aient plus le caractère purement logique que voulait leur conférer Frege, n'est ni vaine ni désuète, et que le platonisme naïf et facilement critiquable que la tradition a attribué à Frege a certainement voilé l'ampleur et la pertinence de son projet.

Mots-clef : Philosophie – Logique – Frege – Arithmétique – *Grundlagen*

SUMMARY

We propose a rehabilitation attempt of the Fregean logicist project, almost fully abandoned and discredited following the discovery of the Russell's paradox, and to the different anomalies found in the set theory, like the Cantor's paradox. After having presented Frege's *Grundlagen* and the collapse of this system through Russell's paradox, we see how this obstacle can be overcome, by replacing the rule V which introduces the paradoxical notion of extension by the contextual definition of the cardinality operator (the number of x such as x is a F is equal to the number of y such as y is G if and only if there is one-to-one correspondence between F and G) which is called Hume's principle. We show that such a modification is possible without fundamentally betraying Frege's intention in the *Grunlagen* where the notion of concept extension has not yet the importance it will take in the *Grundsegetze*. This achieves the fondational part of this work, allowing to derive the Peano's axioms (thus the whole arithmetic) in the so defined system, named Fregean Arithmetic (FA), together with Frege's theorem, proof that the natural sequence of numbers is infinite. Indeed, this proof is a critical issue of the logicism because it allows to overcome the need for arithmetic to state an infinite number of existence hypotheses, one for each number and will give all its legitimacy to the logicist project on the principle of hypotheses saving. However, we see that this proof become fully conclusive only if the numbers are considered as objects, what will make us question the epistemological status of the numbers as defined in FA. We analyse different conceptions of the number and of the arithmetic rules, together with their respective difficulties. We see how these difficulties can be overcome when the Fregean project is placed in its contemporary developments of projective geometry. This show that even if logicism has not reached a full achieved state, the project to derive the arithmetic rules from simpler and more obvious laws, even if they are no longer absolutly logic as Frege would have wished, is neither vain nor obsolete. It seems that the naïve and easily criticable platonism attributed to Frege by the tradition has certainly hidden the extent and the relevance of his project.

Key-words : Philosophy – Logic – Frege – Arithmetic- *Grundlagen*

Je remercie chaleureusement mon directeur, M. François Lepage, pour son aide, son amitié, et sa patience… infinie!

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1

I) Le projet logiciste de Frege 4
A) Introduction 4
1) le versant épistémologique 5
a) La connaissance arithmétique n'est pas a posteriori 6
b) La connaissance arithmétique n'est pas synthétique a priori. 7
c) La connaissance arithmétique est analytique 9
2) Le versant fondationnel 10
B) Définition frégéenne du nombre 11
1) La notion de définition contextuelle 11
2) Le problème Jules César 12
3) Caractérisation générale des nombres naturels 12
4) Quelques définitions particulières 15
5) Les cardinaux infinis 16
C) Échec du projet logiciste 18
1) La loi V 18
2) Le paradoxe de Russell 18
D) Une réhabilitation possible du projet frégéen 19

II) Arithmétique Frégéenne 21
A) Le principe de Hume (*HP*) 21
B) L2 + HP = FA 21
C) Caractérisation de *FA* 23
D) Consistance de *FA* 24
E) Les axiomes de Peano dans *FA* 25

III) Le théorème de Frege 27
A) Problèmes courants liés à l'infini 27
B) Le théorème de Frege 29
C) Analyse du théorème de Frege 31
D) Conclusion 32

IV) Épistémologie de *FA* 34
A) Introduction 34
B) Le réductionisme 35
C) Le statut épistémologique de *FA* 35
1) Le nombre cardinal est-il un objet? 36
2) Quel type de connaissance avons-nous de *HP* 39
3) Le contexte historique des *Grundlagen* 41

CONCLUSION 47

NOTES 51

BIBLIOGRAPHIE : 54

ANNEXE : description de *FA* 57

INTRODUCTION

En 1874, le jeune mathématicien Gottlob Frege publie sa *Begriffsschrift*, ouvrage qui, bien qu'il fut presque ignoré de ses confrères lors de sa publication, allait s'avérer tout à fait déterminant pour l'histoire de la logique. En effet, pour la première fois un système axiomatisé complet était proposé pour la logique des propositions et surtout un nouvel outil logique, qui allait immensément accroître le champ d'application des langages formels, venait d'être découvert : les quantificateurs. Ils permettaient la création de ce que l'on connaît aujourd'hui sous le nom de logique des prédicats des premier et second ordres.

Fort de ce nouveau système, Frege envisage d'expliciter complètement les liens logiques qui unissent différentes vérités, notamment celles qui constituent les différentes étapes d'une preuve, et surtout les preuves mathématiques. Il considère en effet que ces dernières sont beaucoup trop approximatives et ambigües, endossant un grand nombre de présuppositions qui ne sont pas explicitées. Son but dès la *Begriffsschrit* - et qu'il poursuivra tout au long de sa vie - est de fonder les mathématiques, en commençant par l'arithmétique, dont il pouvait soupçonner à cette époque, d'après les travaux de Cauchy et Weierstrass, qu'elle fût suffisante à dériver l'ensemble des mathématiques, sur les lois plus élémentaires et auto-évidentes de la logique. Cela permettrait de réfuter la classification kantienne des vérités mathématiques comme connaissances synthétiques a priori. En effet, pour Frege, cette classification n'est pas exhaustive, puisqu'elle ne permet de traiter que des expressions de la forme 'sujet-prédicat', considérant comme analytiques les propositions qui sont telles que le prédicat est déjà contenu dans le sujet. Or les nouveaux outils logiques frégéens permettent un élargissement considérable du champ d'application de la logique, et de nombreuses formules peuvent dès lors être traitées et construites formellement, sans appel à l'intuition. C'est d'après Frege le cas des vérités de l'arithmétique, qu'il va s'attacher à dériver logiquement. C'est encore ce projet que l'on retrouve dix ans plus tard dans les *Grundlagen der Arithmetik*, qui présente dans une version prosaïque la dérivation de ce que nous verrons comme étant l'équivalent des axiomes de Peano, qui constituent une axiomatisation de l'arithmétique, à partir des lois logiques de sa *Begriffsschrift*. Ce développement sera repris dans le formalisme pour le moins complexe et contre-intuitif du premier ouvrage dans les deux volumes des *Grundgesetze der Aritmetik*, qui présentent cependant quelques différences d'avec la version des *Grundlagen*. L'une d'entre elles est l'importance que prend alors la notion d'extension de concept (ou parcours de vérité) que l'auteur introduit dans l'un des six axiomes de son système, la loi V.

Or cette loi suppose qu'à tout concept correspond une extension, et cette supposition sera dévastatrice pour l'ensemble du programme frégéen. En effet, comme lui fait courtoisement remarqué Russell dans sa courte lettre de juin 1902, l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes ne peut avoir d'extension, car il est contradictoire : s'il se contient alors il ne se contient pas, et s'il ne se contient pas alors il se contient. Il n'en fallu pas plus pour faire sombrer le logicien dans la dépression et son projet dans l'oubli.

Et pourtant, il y a dans les *Grundlagen* un résultat qui, moyennant une certaine réinterprétation, s'avère fondamental : toute l'arithmétique est dérivable d'un seul axiome ajouté à la logique du second ordre. Le paradoxe de Russell ayant concentré les attentions sur la faiblesse du système frégéen, l'inconsistance de la loi V, ni Frege lui-même ni nombre de ses commentateurs n'ont aperçu, juste au seuil de cette inconsistance, un énoncé qui, lui, était consistant, et qui pris en tant qu'axiome permettait de dériver tous les théorèmes de l'arithmétique. Cet énoncé, le principe de Hume, peut s'énoncer de la façon suivante : « *Le nombre de F est égal au nombre de G si et seulement s'il existe entre les F et les G une relation d'équinuméricité* ».

Parsons[1] remarqua le premier ce principe en 1964, puis dans les années 80 et 90 différents auteurs[2] s'attelèrent à la reconstitution du développement des *Grundlagen*, construisant un nouveau système formel composé de la logique du second ordre auquel s'ajoute comme axiome le principe de Hume, et que l'on appelle selon l'expression que lui a donnée Boolos[3], l'*arithmétique frégéenne*. Ce système a depuis été prouvé consistant, et il permet de dériver ce qu'on appelle le *Théorème de Frege*, preuve que la suite des nombres naturels est infinie.

C'est cette arithmétique frégéenne qui sera présentée et analysée dans ce texte afin de déterminer si elle surmonte effectivement les problèmes rencontrés par la version originale des *Grundlagen*. Nous tenterons le cas échéant à réévaluer le projet logiciste, pour savoir s'il est effectivement dépassé, inutile ou voué à l'échec ou si l'on peut encore lui attribuer une valeur propre et un intérêt dans l'élaboration d'une théorie de la connaissance des entités mathématiques.

Dans une première partie sera exposé de façon précise le projet et le contenu des *Grundlagen*. Nous verrons d'abord comment Frege réfute les tentatives de ses prédécesseurs de définir adéquatement le nombre, pour présenter ensuite sa propre définition, en analysant tour à tour la définition contextuelle, le *problème Jules César*, la caractérisation générale des nombres naturels puis quelques définitions particulières et le problème des cardinaux infinis. Cette partie se conclura par la présentation du paradoxe de Russell et la façon dont on peut envisager de le surmonter.

Certaines propositions de réhabilitation du système des *Grundlagen* seront présentées dans une seconde partie qui introduira le principe de Hume puis l'*arithmétique frégéenne* issue de la substitution par celui-ci de la loi V qui donnait prise au paradoxe. Après une caractérisation formelle et la preuve de consistance de ce système, nous verrons comment les axiomes de Peano, qui permettent de dériver toute l'arithmétique, en sont des théorèmes.

La question particulière du nombre infini d'entiers naturels fera l'objet d'une partie indépendante parce que nous verrons qu'elle recèle un enjeu fondamental pour le logicisme, celui de savoir si oui ou non l'arithmétique frégéenne est capable de prouver que la suite des nombres naturels est infinie sans présupposer de cette infinité. Pour ce faire seront tout d'abord exposés certains des problèmes courants liés à l'infini, puis le *Théorème de Frege*, qui prétend démontrer qu'il y a un nombre infini d'entiers naturels sera exposé et analysé.

Cette analyse nous amènera a poser la question de la nature du nombre, ce que nous ferons dans une quatrième et dernière partie, en se demandant quel peut être le statut épistémologique de l'arithmétique frégéenne. Il nous faudra alors répondre à deux questions : « le nombre cardinal est-il un objet? » et « Quelle type de connaissances avons-nous du principe de Hume ? » En analysant les réponses de différents auteurs à ces questions, nous verrons qu'il demeure des difficultés qui cependant peuvent être surmontées si l'on replace le projet des *Grundlagen* dans le cadre historique de leur auteur, et plus particulièrement en mettant en parallèle la définition contextuelle du nombre avec celle des points à l'infini en géométrie projective. Cette réévaluation des intentions épistémologiques de Frege devrait permettre de réhabiliter le projet logiciste en le détachant du platonisme naïf qui lui est trop souvent associé.

I) Le projet logiciste de Frege

A) Introduction

Dans son introduction aux *Grundlagen der Arithmetik*, Frege fait état de l'ignorance des mathématiciens quant à la définition des entiers naturels et se propose d'y remédier, car au-delà de l'apparente simplicité de ces concepts, il va relever plusieurs problèmes encore non résolus à leur endroit. Voilà qui semble suffisant pour justifier son enquête.

Si les mathématiciens ont négligé cette question, plusieurs philosophes s'y sont attelés, et la divergence de leurs opinions semble manifester de la délicatesse du sujet. C'est donc dans une entreprise essentiellement philosophique que se lance Frege dans ses *Grundlagen*, s'excusant presque par avance auprès des mathématiciens de ce « [qu'] une recherche fondamentale sur le concept de nombre ne peut manquer d'être marquée de philosophie »[4].

L'ouvrage commence par l'exposition critique *des opinions de quelques auteurs sur la nature des propositions arithmétiques* (première partie), *sur le concept de nombre cardinal* (seconde partie) et *sur l'unité et sur l'un* (troisième partie) afin d'une part de défricher ce terrain épineux, d'autre part de proposer une épistémologie, souvent implicite, des connaissances de l'arithmétique. Dans la quatrième partie est élaborée une définition du concept de nombre cardinal, qui constituera la partie fondationnelle, permettant de dériver toute l'arithmétique des lois logiques.

Il annonce d'ailleurs dès l'introduction que c'est dans ces lois que seront à chercher les fondements de l'arithmétique. Or ceci présuppose que la connaissance de ces lois-ci soit plus sûre, plus évidente, que celle des lois de l'arithmétique, sans quoi la tâche de réduction des secondes aux premières ne permettrait pas d'obtenir une connaissance plus fiable des vérités arithmétiques.

Il énonce les trois principes qui ont guidé sa recherche, et qui s'avèreront fondamentaux pour l'ensemble de son œuvre :

> « Il faut nettement séparer le psychologique et du logique, le subjectif de l'objectif.

> On doit rechercher ce que les mots veulent dire non pas isolément mais pris dans leur contexte.
> Il faut ne jamais perdre de vue la différence entre concept et objet. »[5]

On verra que le premier principe permet de réfuter les tentatives de définitions génétiques ou psychologiques du nombre et d'écarter la possibilité d'une connaissance a posteriori du nombre. Le second fournit le cadre de ce que nous présenterons plus loin comme la *définition contextuelle*, et le troisième permet, entre autre, de lever la difficulté due au fait que les unités soient à la fois discernables et identiques. Le premier et le troisième relève de l'épistémologie alors que le second va permettre le fondement logique de l'arithmétique, en définissant logiquement le nombre.

1) le versant épistémologique

La tâche critique occupe la plus grande partie des *Grundlagen* (trois chapitres sur quatre) et au-delà de son intérêt historique, elle participe déjà de l'élaboration d'une théorie du nombre chez Frege. On peut, en effet, distinguer deux buts conjoints de cette critique : premièrement elle légitime l'entreprise frégéenne de redéfinition du concept de nombre cardinal, montrant que le problème de la nature du nombre est loin d'être réglé, qu'il a reçu plusieurs réponses contradictoires et que toutes présentent certaines failles. L'évidence apparente de ce concept est donc trompeuse et Frege estime qu'il est nécessaire de l'éclaircir tout à fait. Deuxièmement, cette critique constitue une épistémologie par réfutation des thèses insatisfaisantes ou incomplètes des autres auteurs.

Dès l'introduction, Frege se sert des distinctions kantiennes entre connaissances synthétiques et analytiques d'une part, a priori et a posteriori d'autre part, en leur donnant un sens – même s'il s'en défend – qu'elles n'avaient pas chez Kant, en tout cas pas de façon explicite. Pour Kant, une vérité est dite analytique lorsque le prédicat est contenu dans le sujet, elle est dite synthétique si elle dépend de l'intuition. Elle est alors qualifiée de *a priori* s'il s'agit de l'intuition pure (de l'espace et du temps), et *a posteriori* s'il s'agit de l'intuition sensible. Frege quand à lui va dévier le sens de ces qualifications, en ne les faisant plus porter sur le contenu des connaissances, mais sur leur justification, c'est-à-dire, dans le cas des vérités mathématiques, leur preuve :

> "Son objet[6] est de trouver la preuve, et de la poursuivre régressivement, jusqu'aux vérités premières. Si l'on ne rencontre sur ce chemin que des lois logiques générales et des définitions, on a une vérité analytique – étant entendu qu'on inclut dans ce compte les propositions qui assurent le bon usage des définitions. En revanche, s'il n'est pas possible de produire une preuve sans utiliser des propositions qui ne sont pas de logique générale, mais concernent un domaine particulier, la proposition est synthétique."[7]

Bien qu'il signale[8] qu'il ne désire pas modifier le sens classique de ces termes, il opère un glissement de ce qui détermine la proposition de son contenu vers sa preuve. Ce qui est significatif dans un jugement, c'est la façon dont nous pouvons le justifier, la preuve que nous pouvons fournir pour établir sa vérité. Si cette preuve doit nécessairement faire appel à une intuition, la connaissance de la proposition sera dite synthétique, si elle ne fait appel qu'à la raison, sans aucun recours à l'intuition, elle sera dite analytique. On distingue au sein des jugements synthétiques ceux dont la preuve à recours à des intuitions sensibles, et qui sont a posteriori, de ceux dont la preuve s'appuie sur des intuitions pures, qui sont a priori.

C'est à travers ces distinctions et la défense de l'appartenance des formules arithmétiques à l'une ou l'autre de ces catégories que sera résumée la critique de Frege.

a) La connaissance arithmétique n'est pas a posteriori

Il y a plusieurs façons de penser que les jugements arithmétiques peuvent être a posteriori. À ceux qui voudraient qu'à chaque nombre, chaque opération correspondent une intuition sensible particulière, Frege demande à quoi pourrait bien correspondre zéro, ou les très grands nombres.

Le nombre ne peut pas non plus être envisagé comme une propriété des choses au même titre que la couleur ou la dureté. Il est en effet possible d'attribuer différents nombres à un même objet, un jeu de cartes peut par exemple recevoir le nombre un, quatre ou 52 selon qu'il est examiné en tant que jeu, ensemble de couleurs ou paquet de cartes. Ce n'est pas à l'objet en lui-même qu'est attribué un nombre, mais plutôt à un concept (*jeu*, *couleur*, *carte*), qui désigne, selon des conventions langagières, l'objet (on lui attribue l'unité) ou un ensemble de ses parties (on lui attribue un nombre naturel supérieur à un). Mill résout partiellement le problème en proposant que le nombre soit la propriété d'un type particuliers d'objets, les agrégats. Il désignerait leur agencement, la façon dont ils peuvent être séparés.

Mais le fait que le nombre puisse s'appliquer à des objets sensibles n'implique pas qu'il soit une de leur propriété. Il peut de toute façon s'appliquer également à des objets qui ne le sont pas, comme le nombre de solutions d'une équation (une fois rédigée on pourrait encore le faire correspondre aux signes écrits qui dénotent ces solutions, mais on peut calculer mentalement cette réponse). Pour Frege, de tels objets existent, objectivement, indépendamment de toute représentation, et de surcroît de représentation sensible.

De même que le nombre ne peut être adéquatement défini comme abstrait d'une intuition sensible, les lois arithmétiques ne peuvent pas, pour Frege, être le produit d'une induction sur des perceptions particulières, comme l'entassement dans le cas de l'addition. Tout d'abord l'induction empirique ne permet que le probable, et les lois arithmétiques sont certaines et nécessaires. Mais surtout l'induction, pour être fiable, doit se faire sur des individus semblables. Or les nombres ne le sont pas, ils ont des propriétés différentes selon qu'ils sont pairs, premiers, parfaits, etc.

Donc les nombres ne sont pas des propriétés d'objets sensibles, ni même de tas ou d'agrégats, que l'on pourrait abstraire et combiner en idées complexes, pas plus que les lois de l'arithmétique ne sont des lois de la nature, que l'on découvrirait par induction.

b) La connaissance arithmétique n'est pas synthétique a priori.

Kant fait reposer notre connaissance du nombre sur l'intuition pure de l'espace. Il s'agit d'une intuition visuelle du nombre, celui-ci représentant des points, des doigts. Là encore les grands nombres ne semblent pas propices à de telles intuitions. Et si l'on envisage que ce sont les petits nombres qui sont connaissables par intuition pure et que les grands le sont par démonstration, à partir des premiers et des lois générales (par l'adjonction de l'unité, comme chez Mill), il reste à établir la limite au-delà laquelle une telle démonstration est nécessaire. Cet argument n'est pas suffisant pour rejeter une telle partition entre nombre(s) intuitioné(s) et nombres démontrés, mais la question de la limite, et de ce qui peut la justifier, demeure importante. On ne peut fixer arbitrairement la borne des nombres intuitionnés sans justification. Elle pourrait être placée à dix, parce que l'on a dix doigts, mais on retrouve les critiques proposées à ceux qui envisagent les vérités arithmétiques comme des connaissances a posteriori. On peut se demander de plus ce qu'il resterait de pur dans cette intuition qui ne peut embrasser plus de deux mains. Frege n'interroge pas vraiment la justification de cette limite, mais nous met implicitement sur la voie lorsqu'il constate que « si les formules numériques étaient démontrables à partir de 10 par exemple, il serait juste de demander : pourquoi pas à partir de 5, de 2 ou de 1? ». Nous pourrions continuer avec lui jusqu'à zéro, et c'est d'ailleurs ce qu'il va faire en construisant la suite des nombres naturels à partir de l'ensemble vide.

L'intuition géométrique des nombres pose également le problème de la discernabilité des nombres. Alors que les points, les droites ou les plans pris séparément sont identiques les uns aux autres, et ne se distinguent que dans leur rapport, les nombres, comme on l'a vu dans l'objection contre l'induction des lois arithmétiques, sont distincts[9].

Pour ce qui est des lois arithmétiques, il montre qu'elles ont une nécessité supérieure à celle des axiomes géométriques. Même si l'on ne peut avoir une représentation visuelle qui ne respecte pas ces derniers, il est possible de les penser faux, et c'est d'ailleurs ce qui est à l'œuvre dans les géométries projectives ou non-euclidiennes, alors qu'il semble à Frege qu'il serait tout à fait impossible de penser les lois des nombres autrement que vraies, elles sont intrinsèquement liées à la pensée et absolument nécessaires. Cela leur confère une supériorité sur les lois de la géométrie et prouve qu'elles ne peuvent en être dérivées. Nous verrons plus loin que ce rejet de la géométrie comme fondement de l'arithmétique n'est pas définitif, mais dans les *Fondements* il est catégorique.

L'accusation générale faite à ceux qui tentent de fonder la connaissance des nombres et des lois arithmétiques sur des intuitions, qu'elles soient sensibles ou pures, est de confondre la définition d'une proposition et la description du processus de prise de conscience de cette proposition, tel qu'il se déroule de façon particulière en chaque individu. En vertu du premier principe énoncé dans l'introduction (« il faut nettement séparer le psychologique du logique, le subjectif de l'objectif »[10]), Frege exclut toute définition génétique du nombre. Il considère que les vérités mathématiques sont immuablement vraies, indépendamment de la croyance ou de la connaissance que nous pouvons en avoir. Leur genèse ne nous révèle en rien leur statut en tant que connaissance. Puisque la vérité d'une proposition s'assure par le moyen de preuves, c'est la nature de la preuve qui doit être déterminante, pas le processus psychologique d'acquisition de la croyance en cette proposition, qui d'ailleurs précède souvent sa véritable connaissance. Cette attaque du psychologisme suppose nécessairement l'existence, à l'extérieur de toute conscience, d'objets que sont les nombres, que l'on peut intuitionner à travers diverses expériences (sensibles ou de pensée) mais qui peuvent également être prouvés avec toute la rigueur et la nécessité que l'on doit attendre d'une connaissance véritable et c'est cette preuve seulement qui les détermine en tant que connaissance.

Or s'il est possible de définir les nombres, et les lois, d'une façon absolument nécessaire, objective, qui ne s'appuie sur aucune intuition, la connaissance ainsi acquise sera plus sûre que celle que l'on croyait avoir auparavant. Ne devant plus rien au monde extérieur, absolument indépendantes de l'intuition, les propositions arithmétiques seraient alors analytiques.

c) La connaissance arithmétique est analytique

Leibniz avait déjà tenté de déployer toute l'arithmétique (et même toutes les vérités) de la seule pensée, en ne fondant la suite des nombres naturels que sur les définitions et l'axiome de substitution (quand on substitue des égaux, l'égalité demeure). On peut ainsi définir tout nombre pour autant que l'on ait au préalable défini son précédent, en ajoutant à celui-ci une unité. Il reprend au paragraphe 6 la démonstration de « $2 + 2 = 4$ »[11], ne se servant que des définitions ($2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$) mais remarque sa faiblesse. Elle suppose en effet la commutativité de l'addition, qui ne peut être dérivée de l'axiome de substitution. De plus, il montre que l'addition n'est pas définie, ou qu'elle l'est circulairement puisque qu'on la retrouve dans les deux termes de l'égalité.

Bien que ni l'axiome de substitution de Leibniz[12] ni le principe d'identité de Jevons[13] ne suffisent à fonder l'analycité de l'arithmétique, Frege ne renonce pas à cette entreprise, qui lui semble devoir s'enraciner dans les lois de la logique. Il raffine et réhabilite tout à la fois l'analyse en montrant comment, en permettant des chaînes inférentielles fiables, elle ne se cantonne pas nécessairement à une pensée pure et stérile, mais permet un accès privilégié au réel en confrontant l'expérience aux hypothèses, et peut de plus fournir ses propres objets s'il advient que l'on remonte la chaîne hypothético-déductive jusqu'à un socle absolument inébranlable, une vérité première évidente, dont on ne puisse absolument pas douter et qui ne soit pas elle-même déductible de propositions plus simples et plus évidentes. Ces propositions élémentaires et lois absolument premières étant les définitions et les règles de déduction classique (modus ponens, contraposition, syllogisme hypothétique) comme chez Kant, auxquelles s'ajoutent les axiomes de la logique créée par Frege dans la *Begriffsschrift*.

Mais quand bien même l'arithmétique serait exprimable dans le langage de l'*idéographie*[14], il faut encore s'assurer que ses règles et ses objets soient effectivement plus simples et plus évidents que ne le sont ceux de l'arithmétique. L'axiome de succession n'est–il pas aussi évident que le principe du tiers exclu? Il faut présupposer d'une primauté de l'accès à la connaissance par la logique. Frege n'aborde pas cette question, il la repousse même explicitement lorsqu'il rejette catégoriquement toute tentative d'explication psychologique, puisqu'en dernière instance, comme Kitcher le signale[15], il doit bien s'agir d'un mode d'accès à ces lois qui doit d'une façon ou d'une autre être supérieur à celui des lois des nombres.

2) Le versant fondationnel

Il semble cependant que l'entreprise frégéenne puisse être justifiée autrement que par des présupposés épistémologiques, même si Frege lui-même fait de multiples allusions à cette supériorité de la logique. Il pourrait s'agir d'un simple principe de parcimonie. Si Frege réussit à exprimer toute l'arithmétique dans le langage de la logique, et qu'il faut dès lors décider de la primauté de l'un des deux systèmes sur l'autre du point de vue épistémologique, il serait normal de choisir celui qui a les plus faibles hypothèses de départ.

Dans le cas de l'arithmétique, il s'agirait des définitions, des axiomes de Peano et des nombres. Mais les mathématiciens usent à loisir de la notion d'infini. S'ils veulent conférer à leurs démonstrations la justesse et la rigueur qu'on est en droit d'en attendre, il leur faut soit démontrer la légitimité de cette notion (ce qu'ils n'ont pas fait) ; soit l'abandonner (ce qu'ils ne se sont pas tous décidés à faire) ; soit enfin présupposer d'une infinité de nombres, ce qui alourdit considérablement les hypothèses, puisque l'on ajoute aux définitions et aux axiomes un nombre indéfini d'hypothèses d'existence.

La logique également doit partir de définitions, d'axiomes et d'objets. Si une infinité d'objets n'est pas nécessaire à la logique pour prouver que la suite des nombres naturels est infinie, on fait une économie considérable de présuppositions, et cette économie suffit à légitimer le projet logiciste, sans avoir à s'interroger plus avant sur les processus psychologiques en jeu dans les jugements logiques.

Il s'agit donc dans un premier temps de relier les axiomes de l'arithmétique aux vérités supposées plus primitives et plus certaines de la logique de la *Begriffsschrift*, mais également de légitimer la primauté de celle-ci sur le langage arithmétique, ce à quoi pourrait suffire la preuve de l'infinité de la suite des nombres naturels sur la base d'un nombre fini d'hypothèses.

B) Définition frégéenne du nombre

1) La notion de définition contextuelle

Le définition contextuelle est le principe de définition adopté par Frege. Le principe de Hume en est un excellent exemple. Dans le paragraphe 62, Frege explique que selon lui, « les mots n'ont de signification qu'au sein d'une proposition ; il s'agira donc de définir le sens d'une proposition où figure un terme numérique »[16]. Ce principe avait déjà été présenté comme étant l'un des trois « principes fondamentaux » dans l'introduction : « On doit rechercher ce que les mots veulent dire non pas isolément mais pris dans leur contexte »[17].

La définition de l'opérateur de cardinalité ne doit pas échapper à ce principe et c'est donc sa fonction dans les énoncés numériques qui doit être spécifiée. Il faut noter avec Demopoulos[18] que la différence entre « définition contextuelle de l'opérateur de cardinalité » et « définition contextuelle du nombre cardinal » n'est pas fondamentale, puisque d'après le principe du contexte, la seconde doit être tirée de la première. De toute façon, Dummett[19] montre que le principe du contexte ne joue pas un rôle aussi important dans les *Grundlagen* que dans les *Grundgesetze*. En effet, c'est seulement dans les seconds que Frege fait vraiment usage de la définition contextuelle, alors que le principe du contexte sert plutôt dans les premiers « de guide quant aux conditions que doit satisfaire une définition correcte de l'opérateur de cardinalité »[20].

2) Le problème Jules César

Ce principe va cependant s'avérer problématique, car dès lors que c'est le contexte qui fixe le sens, il faut pour définir l'opérateur de cardinalité établir un critère d'identité entre deux nombres. La formulation d'un tel critère revient chez Frege à énoncer les conditions nécessaires et suffisantes à la justification d'un tel énoncé : « Le nombre qui appartient au concept *F* est le même que celui qui appartient au concept *G* »[21]. Or même si un tel critère d'identité peut être formulé, il ne pourra jamais traiter que des énoncés de la forme « *le nombre qui appartient au concept*…est le même que *le nombre qui appartient au concept*… » sans pouvoir définir par exemple « si le nombre *Jules César* appartient à un concept »[22]. Cette définition donne donc des propriétés essentielles des nombres, mais elle ne peut ni les décrire de façon univoque, ni déterminer si un objet particulier est un nombre ou non.

Ce problème est connu sous le nom que lui a donné Frege, le « Problème Jules César ». C'est face à cette difficulté que Frege introduit la notion d'extension de concept, mais il contourne le problème plus qu'il ne le résout. En effet, comme le souligne Demopoulos[23], il existe un étrange parallélisme entre le problème Jules César posé pour la définition des nombres dans les *Grundlagen* et le même problème posé cette fois pour la définition des parcours de vérité ou des extensions de concepts dans les *Grundgesetze*. Mais Frege ne peut plus contourner la difficulté et doit simplement accepter l'indétermination :

> "…We have only a means of always recognising a value range if it is designated by a name like 'εΦ(ε)', by which it is already recognisable as a range value. But we can not decide, so far, whether an object is a value range that is not given to us as such …"[24].

Ceci montre que l'introduction de la notion de parcours de vérité et par suite celle d'extension ne réussit pas à lever la difficulté posée par le problème Jules César, puisque cette définition est elle-même confrontée au problème.

3) Caractérisation générale des nombres naturels

La caractérisation générale des nombres naturels est établie à partir d'une analogie avec la caractérisation des directions de droites. Il s'agit en fait de répartir le contenu particulier d'une relation d'équivalence pour formuler une relation d'identité : dans le cas des directions de droites, le contenu particulier (le parallélisme) de la relation d'équivalence relative « *a et b sont parallèles* » est réparti sur les membres de l'équivalence (*a* et *b*) afin d'obtenir une relation d'identité « *la direction de a est identique à la direction de b* ». On obtient la définition suivante : « *la droite a est parallèle à la droite b* veut dire la même chose que *la direction de la droite a est identique à la direction de la droite b* »[25]. Dans le cas des nombres naturels, le contenu particulier (l'équinuméricité, entendue comme l'existence d'une correspondance biunivoque entre les éléments de *F* et ceux de *G*) de la relation d'équivalence relative « *F et G sont équinumériques* » est réparti sur les membres de l'équivalence (*F* et *G*) afin d'obtenir une relation d'identité « *le nombre appartenant à F est identique au nombre appartenant à G* ». On obtient la définition suivante : *F et G sont équinumériques* veut dire la même chose que *le nombre appartenant à F est identique au nombre appartenant à G.*

L'analogie pourrait s'arrêter ici car Frege s'accorde avec Kant pour dire que les vérités de la géométrie sont de nature synthétique a priori. Il aurait donc pu se satisfaire de la définition qui vient d'être présentée pour les droites parallèles, bien qu'elle contienne des termes étrangers à la logique (parallélisme, droite, direction...). Par contre, la définition générale du nombre cardinal, elle, se doit de ne faire appel qu'à des termes logiques pour satisfaire le versant épistémologique du programme logiciste. Il faut donc expliciter par une proposition logique la signification du terme *nombre*.

Notons que c'est seulement cette exigence logiciste qui empêche Frege de prendre cette définition comme axiome et qui l'oblige à introduire la si désastreuse notion d'extension de concept. Le nombre appartenant à *F* va alors être défini (toujours en analogie avec la direction de droite a), comme étant l'extension du concept « équinumérique au concept *F* » (la direction de la droite *a* étant l'extension du concept « parallèle à la droite *a* »). C'est ici qu'est introduite pour la première fois la notion d'extension de concept, mais Frege demeure très évasif à son sujet. Il note tout d'abord en bas de page que l'« on pourrait dire tout simplement *concept* à la place de *extension de concept*. Mais on s'exposerait à une double objection : [...] [Il] pense qu'on peut lever ces deux objections, mais ceci nous entraînerait trop loin. »[26], puis il restreint la compréhension que l'on peut se faire des extensions à ce que l'on peut en apprendre des énoncés dans lesquels elle figure, comme le suggère la méthode de la définition contextuelle, à savoir : « i.

leur identité. ii. qu'une extension est plus vaste qu'une autre »[27]. Il semble que si Frege avait clairement envisagé l'extension d'un concept comme l'ensemble des éléments subsumés par ce concept, il aurait été plus explicite à ce sujet. De plus, le fait qu'il signale que l'on pourrait simplement dire concept semble contredire une telle conception de l'extension. En effet, cette remarque ne s'applique pas spécifiquement au concept « équinumérique au concept *F* », or dans le cas d'un concept comme « être rouge », il semble absurde qu'il ait pu penser que l'on puisse indifféremment désigner ce concept ou l'ensemble des objets rouges.

Ensuite[28] la démonstration est faite que la relation d'équinuméricité (appelée Φ) est une relation logique, qui correspond à une correspondance biunivoque entre les objets qui tombent sous l'un et l'autre des deux concepts engagés dans la relation. Le résultat de cette démonstration peut être exprimé par la proposition suivante : *F* et *G* sont équinumériques si et seulement si il y a une correspondance biunivoque entre les objets qui tombent sous *F* et les objets qui tombent sous *G*, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\exists\Phi[\forall x\,(Fx \supset \exists y\,(Gy \wedge x\Phi y)) \wedge \forall y\,(Gy \supset \exists x\,(Fx \wedge x\Phi y)) \wedge \forall a \forall b \forall d\,(((d\Phi a \wedge d\Phi b) \supset (a = b)) \wedge ((a\Phi d \wedge b\Phi d) \supset (a = b)))].$$

Le caractère purement logique de cette relation est discuté, notamment par Quine[29], pour qui les expressions qui quantifient non plus seulement sur des variables individuelles mais aussi sur des concepts ou des relations (ici Φ) ne sont plus purement logiques. Nous considérerons ici « purement logique » comme signifiant au moins aussi logique que l'est la logique du second ordre, sans questionner davantage la logicité de celle-ci, puisque de toute façon ce problème ne s'avérera pas crucial dans le développement subséquent.

Après la présentation de la relation d'équinuméricité le problème Jules César est vaguement éludé, pouvant être résolu de la façon suivante (à l'apparence pour le moins imprédicative !) : *n est un nombre cardinal* si et seulement s'*il existe un concept tel que n est le nombre cardinal qui lui appartient.*

4) Quelques définitions particulières

Les résultats les plus intéressants sont les définitions particulières de « 0 », de « successeur immédiat dans la suite naturelle des nombres », et de « 1 ».

§74[30], 0 est défini comme étant le nombre cardinal qui, selon la définition générale donnée plus haut, appartient au concept $F = \{x : x \neq x\}$. Etant donné qu'aucun objet n'est différent de lui-même, 0 est l'extension du concept « équinumérique à un concept sous lequel aucun objet ne tombe ».

Le §75 montre que si 0 est le nombre qui appartient à *F*, aucun objet ne tombe sous F :

$\neg\exists x\,(x \in \{y : y \neq y\})$.

Dans le §76 la notion de successeur immédiat dans la suite naturelle des nombres est définie de la façon suivante :

> Posons que la proposition «il existe un concept *F* et un objet *x* qui tombe sous ce concept tels que le nombre cardinal qui appartient à ce concept est *n* et que le nombre cardinal qui appartient au concept 'qui tombe sous *F* mais n'est pas identique à *x*' est *m* » veut dire la même chose que « *n* suit immédiatement *n* dans la suite naturelle des nombres » [31]

Soit la relation η telle que $(n\eta F)$ signifie « *n* est le nombre appartenant à *F* », et le prédicat binaire *S* tel que (nSm) signifie *n* est le successeur immédiat de *m* dans la suite naturelle des nombres, on peut traduire la définition ci-dessus de la façon suivante : $nSm \equiv \exists x\exists F\,(\,Fx \wedge n\eta F) \wedge m\eta\{y : Fy \wedge (y \neq x\,)\}$.

Suit au §77 la définition de « 1 »[32], à partir de celles de « 0 » et « successeur » : Le nombre cardinal qui appartient au concept « identique à 0 mais non identique à 0 » est 0. Donc le nombre cardinal qui appartient au concept « identique à 0 » suit immédiatement 0 dans la suite naturelle des nombres. C'est-à-dire :

$nS0 \equiv \exists x\,(x = 0) \wedge n\eta\{x : x = 0\})$

On pose comme définition que ce nombre est « 1 » : $1 =_{\text{def}} n$ pour $nS0$.

De ces trois définitions se déduisent facilement les six propositions [33] du §78:

1) « Si *a* suit immédiatement 0 dans la suite naturelle des nombres, *a* = 1 » $[(aS0) \supset (a = 1)]$

2) « Si 1 est un nombre cardinal qui appartient à un concept, il y a un objet qui tombe sous ce concept. » $[\forall F\,((1\eta F) \supset \exists x\,Fx)]$

3) « Si 1 est le nombre cardinal qui appartient à *F*, et si *x* tombe sous *F* et *y* tombe sous *F*, alors *x* = *y*. » $[\forall F\forall x\forall y\,((\,1\eta F \wedge Fx \wedge Fy) \supset (x = y))]$

4) « Si un objet tombe sous un concept F et si de ce que x tombe sous le concept F et de ce que y tombe sous le concept F on peut conclure que $x = y$, alors le nombre cardinal qui appartient au concept F est 1. »

$[\forall F \exists z(((Fz \wedge \forall x \forall y\ (Fx \wedge Fy)) \supset (x = y)) \supset 1\eta F)]$

5) « La relation de m à n posée par la proposition : « n suit immédiatement m dans la suite naturelle des nombres» est une relation biunivoque. »

$[\ \forall n \forall m \forall p\ (((\ pSn \wedge pSm) \supset (n = m)) \wedge ((nSp \wedge mSp) \supset (n = m)))]$

6) « Tout nombre, à l'exclusion de 0, suit immédiatement un autre nombre dans la suite naturelle des nombres » $[\forall n \exists m\ ((n \neq 0) \supset nSm) \wedge \neg \exists n\ (0Sn)]$.

Frege propose dans les paragraphes 79 à 83[34] de montrer que tout nombre naturel à un successeur dans la suite naturelle des nombres $[\forall x \exists y \exists F\ (x\eta F \supset ySx)]$. Il s'agit d'une démonstration par induction : 0 a un successeur immédiat qui est un nombre naturel, et le successeur de tout nombre naturel est lui-même un nombre naturel et possède un successeur. Ce qu'il montre c'est que la suite des nombres naturels n'a pas de borne supérieure, et que tous les nombres naturels sont finis. Pour ce faire il définit la φ-suite, suite des nombres naturels, puis les relations $xP^{\varphi}y$ (« x précède y dans la φ-suite ») et $xS^{\varphi}y$ (« x suit y dans la φ-suite »). Le nombre qui appartient au concept « appartenant à la suite des nombres naturels qui se termine par n » est le nombre qui appartient au concept $\{x : (xP^{\varphi}n) \vee (x = n)\}$, ou plus simplement $\{x : x \leq n\}$.

On peut alors définir le nombre $(n + 1)$ qui, d'après la proposition précédente, existe à la condition que n soit un nombre naturel fini : $[(n + 1)Sn \equiv n\eta F \wedge (n + 1)\eta\{x : x \leq n\}]$.

Il montre enfin qu'aucun objet appartenant à la suite des nombres naturels ne peut se succéder à lui-même dans la φ-suite $[\neg\exists x\ (xS^{\varphi}x)]$, ce qui clôt la preuve que tout nombre naturel (c'est-à-dire fini) a un et un seul successeur dans la suite des nombres naturels qui est lui aussi un nombre naturel (fini).

5) Les cardinaux infinis

On a vu que le projet de réduction de l'arithmétique à la logique présupposait une primauté de celle-ci, qui est explicite chez Frege sans pour autant qu'il ne se donne la peine de la justifier. Il semble qu'une telle justification soit possible en présupposant très peu de la conception exacte que Frege se fait des connaissances logiques, par simple application du principe de parcimonie pour choisir entre la théorie arithmétique et la théorie logique. Si les calculs engageant l'infinité de la suite des nombres naturels veulent être conservés et justifiés, la théorie arithmétique se doit de présupposer l'existence d'une infinité de nombres. Si Frege parvient à prouver que cette suite peut être dérivée d'un nombre finis d'axiomes logiques, la primauté de cette dernière sera assurée.

Dans la dernière section du quatrième chapitre des *Grundlagen* il consacre quelques pages au cas des cardinaux infinis. Après avoir élogieusement signalé les travaux de Cantor, il définit le cardinal infini ∞_1 comme étant le nombre appartenant au concept « nombre cardinal fini ». Autrement dit, ∞_1 est l'extension du concept « équinumérique au concept *nombre cardinal fini*». Pour lui, le fait que l'on ne puisse se représenter un tel nombre ne doit pas invalider sa détermination. Nous avons d'ailleurs vu qu'il reste très évasif sur ce qu'est l'extension d'un concept, donc également sur ce que sont exactement les nombres. Nous ne pouvons en effet les appréhender qu'à travers les énoncés contextuels dans lesquels ils apparaissent, ce qui ne permet pas de se les représenter. En ce sens, l'usage du nombre ∞_1 n'est pas moins légitime que celui des entiers naturels, à partir du moment où celui-ci est introduit par une définition contextuelle adéquate. Celle-ci pourrait s'énoncer de la façon suivante : « le nombre qui appartient au concept F est ∞_1 si et seulement si[35] il existe une relation qui met en correspondance biunivoque les objets qui tombent sous le concept F et les nombres finis. D'où l'on extrait la définition de ∞_1 : $\infty_1 =_{def}$ nombre cardinal qui appartient au concept « nombre cardinal fini ». Selon Gauthier, une telle définition est imprédicative :

> « Le définition est imprédicative puisqu'on peut la traduire : le nombre qui appartient à l'ensemble (ou la classe) de tous les nombres finis est un nombre infini. Et si l'on traduit littéralement : le nombre qui appartient à l'ensemble des nombres finis est l'ensemble (« Umfang ») des nombres qui est égal à l'ensemble des nombres finis. »[36]

Ce reproche est légitime dans la mesure ou l'on envisage, comme le fait Gauthier en interprétant « concept "nombre cardinal fini" » comme équivalent à « ensemble de tous les nombres finis », qu'un concept est rigoureusement équivalent à l'ensemble des objets qu'il subsume, et en présupposant que c'est effectivement un tel ensemble que Frege désigne par l'expression « extension ».

C'est donc cette notion qui est problématique et proscrit une définition satisfaisante du premier cardinal infini.

C) Échec du projet logiciste

1) La loi V

De cette imprédicativité (plus particulièrement du « caractère englobant, *totifiant* de la notion d'*Umfang* chez Frege »[37]) va émerger le paradoxe de Russell qui fît s'effondrer le programme frégéen. La loi V, qui est la source du paradoxe, permet dans les *Grundgesetze* de passer de l'identité des parcours de valeur à l'égalité des fonctions, et s'énonce de la façon suivante[38] :

$(\varepsilon F(\varepsilon) = \alpha G(\alpha)) \equiv \forall a\ (Fa = Ga)$

De gauche à droite, cet axiome ne pose pas de problème $[(\varepsilon F(\varepsilon) = \alpha G(\alpha)) \supset \forall a\ (Fa = Ga)]$.

Par contre, de droite à gauche, $[\forall a\ (Fa = Ga) \supset (\varepsilon F(\varepsilon) = \alpha G(\alpha))]$, il est incorrect car certaines propriétés (ex : ne pas se contenir soi-même) donnent des concepts auxquels aucun parcours de vérité ne peut être associé sans qu'il n'en résulte une contradiction :

Soit $X\ \{x : x \notin x\}$, si $X \in X$, alors $X \notin X$ et si $X \notin X$, alors $X \in X$.

2) Le paradoxe de Russell

C'est Russell qui le premier fit remarquer le paradoxe éponyme à Frege dans sa lettre du 16 juin 1902. Suite à la lecture des *Grundgezetze* et après lui avoir élogieusement signalé l'accord dans lequel ils se trouvent quant à la nécessité d'évacuer le psychologisme de la logique et la pertinence du langage de la *Begriffsschrift* pour fonder les mathématiques, il lui fait part d'une difficulté qu'il a cependant rencontré :

> « You state that a function, too, can act as indeterminate element. This I formerly believed, but now this view seems doubtful to me because of the following contradiction, Let *w* be the predicate : to be a predicate that cannot be predicated of itself. Can *w* be predicated of itself? From each answer its opposite follows. Therefore we must conclude that *w* is not a predicate. Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable collection does not form a totality. »[39]

Cette lettre courtoise aura suffit à faire s'effondrer l'édifice frégéen, dont la construction fut entreprise une vingtaine d'année plus tôt dans la *Begriffsschrift* et scrupuleusement poursuivie jusqu'au second volume des *Grundgesetze*. Qu'il s'agisse d'un château de cartes aux fondations incertaines n'enlève rien à la formidable cohérence du système et l'on pourrait tenter d'en reprendre les plans pour le bâtir à nouveau sur un socle plus sûre.

C'est ce que tentent Russell et Whitehead dans leur *Principia mathematica*[40], en introduisant pour contourner le paradoxe la théorie des types, qui permet de hiérarchiser les classes afin qu'elles ne puissent se contenir elles-mêmes. Cependant, nous avons vu que la légitimité du réductionisme pouvait être tirée de la capacité des lois logiques à générer l'infinité des nombres naturels, sans présupposer d'avance l'existence de ceux-ci. Or Russell est obligé de réintroduire en logique l'axiome d'infinité, qui, en plus de n'être pas purement logique comme le réclamerait le projet logiciste, ne permet pas l'économie d'hypothèses qu'offrait le système frégéen. Nous voyons là encore comment la thèse logiciste est intimement liée au problème de l'infini, et que c'est sur ce point particulièrement qu'elle doit tenter de s'établir.

D) Une réhabilitation possible du projet frégéen

Les trois seules monographies de Frege furent consacrées à établir la thèse logiciste : la *Begriffsschrift* [41] présente un nouveau système qui équivaut, comme le montre Boolos[42], à la logique du second ordre, accompagnée de quelques démonstrations et définitions, comme la présentation des correspondances biunivoques et des concepts inductifs qui prendront une place déterminante dans les ouvrages suivants. Dans les *Grundlagen*, après une critique systématique de ses prédécesseurs et contemporains[43], Frege présente dans le quatrième chapitre la démonstration *en prose* de théorèmes équivalents à ce qui deviendra l'axiomatique de Peano[44]. Il y introduit pour la première fois la notion d'extension de concept, afin de rendre compte du nombre en terme logique. Enfin, dans les *Grundgesetze*[45], il présente la version formelle de ces démonstrations, plus d'autres à propos des nombres réels. Les étapes du développement sont calquées sur celui des *Grundlagen*, mais il y a une certaine évolution dans la pensée de Frege. L'une d'entre elles est l'importance prise dans les seconds par la notion d'extension de concept, où ce qui est équivalent, de parcours de vérité. Elle y est introduite par la loi V[46] et devient absolument nécessaire à la thèse logiciste, alors que dans les *Grundlagen*, nous avons vu que Frege note que l'« on pourrait dire tout simplement *concept* à la place de *extension de concept* »[47].

Or c'est cette loi V justement qui introduisit dans le système frégéen l'ennemi juré du logicien, l'inconsistance. En effet, comme nous l'avons vu dans la lettre de Russell mentionnée plus haut, le concept « objet ne tombant sous aucun concept dont il est l'extension » est paradoxal : si l'extension de ce concept tombe sous ce concept alors elle ne tombe pas sous ce concept, et si l'extension de ce concept ne tombe pas sous ce concept, alors elle tombe sous ce concept. Il n'en fallût pas plus pour que le quatrième chapitre des *Grundlagen* passe au registre des théories-cadavres, que seuls quelques philosophes légistes continuent à ausculter. Pourtant, Parsons devait remarquer en 1964 que dans ce chapitre, la notion d'extension de concept n'intervenait que très peu, en réalité, elle servait surtout à détourner ce qu'on a vu comme étant le *problème Jules César*. Il s'agit de compléter la définition contextuelle de l'opérateur de cardinalité[48] par une définition explicite du *nombre qui appartient à F* comme étant l'*extension du concept* « *équinumérique à F* ». C'est seulement vingt ans plus tard, dans *Frege's Conception of Numbers as Objects*, que Wright[49] montra que le paradoxe de Russell ne pouvait être reformulé contre $N^{=}$ (qu'on appelle *FA* pour *Fregean Arithmetic*), qui correspond à la logique du second ordre plus la définition contextuelle de l'opérateur de cardinalité (qu'on appelle *HP* pour *Hume Principle*). Il a depuis été montré que ce système est très certainement consistant[50] et qu'il permet de dériver tous les résultats des *Grundlagen*[51], c'est-à-dire l'équivalent des cinq axiomes de Peano.

Ce système va donc être exposé et nous pourrons questionner sa capacité à générer l'infinité de la suite des nombres naturels. Si une telle démonstration est possible, on aura prouvé l'intérêt de réduire l'arithmétique à l'arithmétique frégéenne. Il restera tout de même a s'interroger sur le statut épistémologique des axiomes de cette dernière, et tout particulièrement à propos du principe de Hume, qui, en tant qu'axiome, se distingue du projet initial de Frege.

II) Arithmétique Frégéenne

A) Le principe de Hume (*HP*)

Depuis les années 80, plusieurs auteurs reconsidèrent le problème de la consistance du système des *Grundlagen*. On parle du principe de Hume non pas qu'il l'ait lui-même énoncé, mais parce que Frege, dans le paragraphe 63, le propose comme définition contextuelle de l'opérateur de cardinalité en citant un texte de Hume[52] :

> « We are possest of a precise standard by which we can judge of equality and proportion of numbers...When two numbers are so combin'd, as that the one has always an unite answering to every unite of the other, we pronounce them equal... »

Autrement dit, soit $\#F$ = « le nombre de x tel que x est un F »

et $F{\approx}G$ = « les F sont équinumériques aux G »

Le principe peut s'écrire de la façon suivante : $(\#F = \#G) \equiv (F{\approx}G)$, le nombre de F est égal au nombre de G si et seulement si les F et les G sont équinumériques, l'équinuméricité étant l'existence d'une correspondance biunivoque entre les F et les G.

B) $L2 + HP = FA$

C'est Wright[53] qui le premier suggéra que le système formé de la logique du second ordre à laquelle on ajouterait le principe de Hume (qu'il désigne alors par $N^{=}$) puisse être un système consistant, dans lequel toutes les démonstrations des *Grundlagen* pouvaient être reformulées. Mais cette démonstration, comme celle de Hale[54], est faite dans le cadre d'un platonisme arithmétique qui lui n'est pas rigoureusement justifié. Dummett se réfère au même principe quand il parle de « the original equivalence »[55] mais c'est le nom que lui donne pour la première fois Boolos qui est le plus souvent repris et que j'ai utilisé : « Le principe de Hume ». C'est aussi à la démonstration de Boolos[56], et sur ses travaux ultérieurs, seul et en collaboration avec Heck[57], que je me référerai.

Le terme « extension » apparaît pour la première fois dans le texte des *Grundlagen* à la fin du paragraphe 68 dans la définition du nombre cardinal : « Je définis donc : Le nombre qui appartient au concept F est l'extension du concept *équinumérique au concept F* »[58]. Tout de suite après, au début du paragraphe 69, Frege prétend expliciter un peu cette notion en se contentant de poser « les énoncés premiers que l'on peut formuler concernant les extensions de concept : i. leur identité. ii. qu'une extension est plus vaste qu'une autre »[59]. C'est là qu'il note que l'« on pourrait dire tout simplement *concept* à la place de *extension de concept* »[60].

Il pose ensuite le résultat suivant : « l'extension du concept *équinumérique au concept F* est identique à l'extension du concept *équinumérique au concept G* » si et seulement si « le nombre qui appartient au concept F est identique au nombre qui appartient au concept G ». Autrement dit, si « $\approx$ » est la relation d'équinuméricité : Soit $\phi_F = \{Y : Y \approx F\}$ et $\phi_G = \{Y : Y \approx G\}$ et les notations précédemment acceptées (je vais utiliser pour désigner les extensions de concepts la notation présentée dans les *Grundgesetze* pour représenter les parcours de vérité, car ces deux notions sont équivalentes) :

$(\varepsilon\ \phi_F(\varepsilon) = \alpha\ \phi_G(\alpha)) \equiv ((n\eta F \wedge m\eta G) \supset (n = m))$.

L'occurrence suivante du terme extension se trouve dans le paragraphe 73, où Frege montre que « l'extension du concept *équinumérique au concept F* est la même que l'extension du concept *équinumérique au concept G* si [et seulement si][61] le concept F est équinumérique au concept G. »[62] Il faut noter que cette expression est la reformulation, (« pour être fidèle à [sa] définition »[63]) de la phrase précédente : « le nombre cardinal qui appartient au concept F est identique à celui qui appartient au concept G si [et seulement si] le concept F est équinumérique au concept G »[64]. À croire que cette terminologie n'est pas plus naturelle pour lui qu'elle ne l'est pour nous, puisqu'il se force à la réintroduire en paraphrasant la première phrase selon sa définition ($n\eta F =_{\text{def}} \varepsilon F(\varepsilon)$). On peut formuler ce théorème de la façon suivante :

$[(F \approx G) \equiv ((\varepsilon\ \phi_F(\varepsilon) = \alpha\ \phi_G(\alpha))]$ ou $[(F \approx G) \equiv ((n\eta F \wedge m\eta G) \supset (n = m))]$

Or cette démonstration consiste justement à prouver le principe de Hume. En effet, on peut remplacer la relation $n\eta F$ par $(\#F)$, ce qui est légitime puisque l'on vérifie facilement que :

pour $n = 0$, $F = \{x : x \neq x\}$ or le nombre d'objet différent de lui-même est bien 0.

pour $n = 1$, $F = \{x : x = 0\}$ or le nombre d'objet identique à 0 est bien 1 (0 lui-même) pour $n = m + 1$, $F = \{x : x \leq m\}$ or le nombre d'objets inférieurs ou égaux à m est bien $m + 1$ $(0, 1, 2\ldots, m)$.

D'où l'on tire : $(\#F = \#G) \equiv (F \approx G)$, le principe de Hume.

Or après ce paragraphe, il n'emploie plus jamais le terme *extension* mais toujours *le nombre qui appartient au concept…* . Nous allons à présent voir comment en ajoutant à la logique du deuxième ordre l'opérateur « le nombre de F » [$\#F$] et le principe de Hume [$(\#F = \#G) \equiv (F \approx G)$], Boolos retrouve les résultats de Frege, mais cette fois dans un système consistant.

C) Caractérisation de *FA*[65]

Dans *Reading the Begriffsschrift*[66], Boolos a montré qu'exceptées les différences de notations, le système de la *Begriffsschrift*[67] et la logique du second ordre sont équivalents. Il montre ensuite, dans *The Consistency of Frege's Fondations of Arithmetic*[68], que le système obtenu en ajoutant à celui de la *Begriffsschift* un opérateur et un axiome tous deux non-logiques, est consistant. Il l'appelle « Fregean Arithmetic »[69] qu'il note *FA*. Il y a plusieurs voies qui permettent cette démonstration. Déjà Wright[70] avait vu que les paradoxes habituels ne pouvaient pas toucher *FA* (qu'il note $N^{=}$), et Burgess[71] avait montré que les nombres cardinaux fournissaient le domaine d'un modèle pour *FA*. Boolos détaille cette preuve[72] dont je m'inspirerai ici, mais il faut avant cela caractériser *FA*.

Il y a dans *FA* trois sortes de variables :

- les variables du premier ordre qui sont notées : $a, b, c, \ldots$
- les variables unaires du second ordre dénotent des concepts et sont notées : $F, G, H, \ldots$
- les variables binaires du second ordre dénotent des relations et sont notées $(\phi, \varphi, \psi, \ldots)$

Le seul symbole non-logique est η, qui associe un objet à un concept : η.

Les formules atomiques de *FA* sont donc de l'une des trois formes suivantes : Fx, $x\phi y$, $n\eta F$.

Les axiomes et les règles de *FA* sont les mêmes que ceux de la logique du second ordre, plus un axiome non-logique qui est le principe de Hume : $(\#F = \#G) \equiv (F \approx G)$, où $\#$ et $\approx$ sont définis comme suit :

* $(\#F = n) \equiv n\eta F$

* $(F{\approx}G) \equiv \exists\Phi[\forall x\ (Fx \supset \exists y\ (Gx \wedge x\Phi y)) \wedge \forall y\ (Gy \supset \exists x\ (Fx \wedge x\Phi y)) \wedge$

$\forall a\forall b\forall d\ (((d\Phi a \wedge d\Phi b) \supset (a = b)) \wedge\ ((a\Phi d \wedge b\Phi d) \supset (a = b)))]$.

D) Consistance de *FA*

La seule différence entre la logique du second ordre et *FA* est la présence du principe de Hume en tant qu'axiome. Si l'on accepte que la première soit consistante et que l'on trouve dans celle-ci un modèle μ pour le principe de Hume, on aura montré que *FA* est consistante. Or un modèle de ce genre peut être défini . Soit :

* $U = \{0, 1, 2, \ldots, \aleph_0\}$: le domaine des variables du premier ordre (les objets),
* $\Im$ l'ensemble puissance de U : le domaine des variables unaires de second ordre (les concepts),
* $\{< x, y > : x \in U \wedge y \in U\}$ l'ensemble des paires ordonnées de U : le domaine des variables binaires de second ordre (les relations).

Il faut définir une fonction f par laquelle la fonction η puisse être interprétée dans μ. Or U a la propriété particulière de contenir les cardinalités de tous ses sous-ensembles. On peut donc définir une fonction f :

$f\colon \Im \rightarrow U$

$X \mapsto card(X)$

On obtient dans μ :

$\#F = \#G$ si et seulement si $card(F) = card(G)$.

$(F{\approx}G)$ si et seulement s'il existe une correspondance biunivoque entre les F et les G.

Or il existe une correspondance biunivoque entre les F et les G si et seulement si $card(F) = card(G)$.

D'où l'on déduit que dans μ, $\#F = \#G$ si et seulement si $(F{\approx}G)$, c'est-à-dire le principe de Hume. Mais comme l'auteur le remarque on pourrait soupçonner une certaine circularité dans la définition du principe de Hume dans μ, puisqu'on y fait appel aux nombres (la cardinalité de F et de G), qui sont justement l'enjeu de l'introduction du principe que l'on veut tester. Pour lui cela ne pose pas de problème puisqu'il s'agit de montrer la consistance de *FA*, non son caractère fondationnel.

Nous venons de voir que la notion d'extension de concept qui rend le système des *Grundgesetze* inconsistant est tout juste esquissée, presque accessoire dans le développement du quatrième chapitre des *Grundlagen*. En fait elle n'est mentionnée que pour donner une équivalence logique au principe de Hume qui, pris en tant qu'axiome, permettrait d'obtenir un système consistant, *FA*. La dernière étape est de montrer comment les résultats des *Grundlagen* peuvent être obtenus dans *FA*, en suivant la même procédure que Frege (« *in the manner indicated by Frege* »)[73].

E) Les axiomes de Peano dans *FA*

C'est en 1889 que Peano produit son axiomatisation de l'arithmétique, connue sous le nom de « postulats de Peano » ou « axiomes de Peano », ces axiomes, au nombre de cinq, peuvent être formulés de la façon suivante, où P est un prédicat binaire qui exprime la relation de prédécesseur dans la suite des nombres naturels, N est un prédicat unaire qui signifie « être un nombre naturel » et F est une propriété quelconque :

P1 : 0 est un nombre naturel [$N0$]

P2 : Si m est un nombre naturel, il existe un autre nombre naturel n tel que m est le prédécesseur de n. [$Nm \supset \exists n(Nn \wedge mPn)$]

P3 : 0 n'a pas de prédécesseur dans la suite des nombres naturels [$Nn \supset \neg nP0$]

P4 : Si m est le prédécesseur de n, que m' est le prédécesseur de n' et que $n = n'$ alors $m = m'$. [$(Nm \wedge Nm' \wedge mPn \wedge m'Pn' \wedge n = n') \supset m = m'$]

P5 : Si F est une propriété qui peut être ou ne pas être possédée par un nombre naturel donné, et si i) 0 possède la propriété F, et que ii) pour tout nombre naturel m qui possède la propriété F son successeur n la possède aussi, alors tous les nombres naturels ont la propriété F. [$(F0 \wedge \forall m \forall n(Fm \wedge mPn \supset Fn)) \supset Fn$]. On reconnaît le postulat d'induction mathématique.

Dans *Frege's Theorem and the Peano Postulates*[74], Boolos que l'on peut transcrire le développement des *Grundlagen* dans le langage de *FA*, en remplaçant la relation « n est le nombre qui appartient à F» ($n\eta F$) par un prédicat unaire et une égalité « n est égal au nombre de F » ($\#F = n$).

Ces résultats étant déjà exposés et commentés dans la première partie, je vais me contenter de les inventorier une fois transcrits dans FA, les commentaires ne concernant pas les extensions pouvant être attribués à la seconde version en remplaçant simplement « le nombre appartenant à » par « le nombre de ».

§73 : Soit le concept N « être un nombre naturel », $Nx \equiv \exists F\ (\#F = x)$.

§74 : $0 =_{def} \#\{x : x \neq x\}$, qui équivaut au premier axiome de Peano.

§75 : Aucun objet ne tombe sous F si $\#F = 0$ et inversement :

$\forall F \forall G\ ([\forall x \neg \mathrm{F}x \supset ((\forall x \neg Gx \equiv (F \approx G) \wedge \#F = 0)] \wedge [(\#F = 0) \supset \forall x \neg \mathrm{F}x])$

§76 : Le successeur de n dans la suite naturelle des nombres :

$nSm =_{def} [\exists F \exists x \exists G\ (\mathrm{F}x \wedge (\#F = n) \wedge \forall y(\mathrm{G}y \equiv \mathrm{F}y \wedge y \neq x) \wedge \#G = m)]$

§77 : $1 =_{def} \#\{x : x = 0\}$

§78 : les six propositions[75]

1) $aS0 \supset a = 1$
2) $\#F = 1 \supset \exists xFx$
3) $\#F = 1 \supset (Fx \wedge Fy \supset x = y)$
4) $\exists xFx \wedge \forall x \forall y\ (\mathrm{F}x \wedge \mathrm{F}y \supset x = y) \supset \#F = 1$
5) $\forall a \forall b \forall c \forall d\ (aSc \wedge bSd \supset (a = b \equiv c = d))$. On reconnaît le quatrième axiome de Peano, mais dans une version plus forte, puisque non seulement deux prédécesseurs d'un même nombre sont égaux (c'est ce qu'indique le biconditionnel de droite à gauche), mais également que deux successeurs d'un même nombre sont égaux (quand l'implication est lue de gauche à droite).
6) $\forall n(Nn \wedge n \neq 0 \supset \exists m\ (Nm \wedge nSm))$

§79 : Le successeur absolu (S^*) dans la suite naturelle des nombres :

$\forall F\ (\forall a\ (xS^*a \supset Fa) \wedge \forall d \forall a\ (Fd \wedge dS^*a \supset Fa) \supset Fy)$

§80 : quelques définitions

Prédécesseur immédiat (P) : $mPn \equiv nSm$

Prédécesseur absolu (P^*) : $mP^*n \equiv nS^*m$

inférieur à ($<$) : $m < n \equiv mP^*n$

inférieur ou égal ($\leq$) : $m \leq n \equiv (m < n \vee m = n)$

nombre fini (Fin) : $0 \leq n$.

Maintenant que le successeur est défini, il faut montrer que chaque nombre naturel n a un successeur (second axiome de Peano) qui est le nombre de

$\{x : x \leq n\}$, cette démonstration se fait par induction, la définition du concept inductif correspondant au cinquième axiome de Peano:

a) $\#\{x : x \leq 0\}S0$

b) $(aSd \wedge \#\{x : x \leq d\}Sd) \supset \#\{x : x \leq a\}Sa$.

Pour montrer a) il faut que 0 n'ait ni prédécesseur immédiat ni prédécesseur absolu, ce qui équivaut au troisième axiome de Peano.

On montre ainsi que tout élément de la suite naturelle des nombres a un successeur, donc qu'elle n'est pas finie, et que tout élément de la suite naturelle des nombres est fini (adieu ω!). Les cinq axiomes de Peano sont des théorèmes de *FA*.

Voilà ce qui complète la description de *FA* et de ses ressources en ce qui concerne les fondements de l'arithmétique. Mais dès que l'on parle de suite naturelle des nombres, d'induction, de successeur immédiat, et que de surcroît c'est en termes ensemblistes que l'on s'y réfère, le questionnement sur l'existence et la définition de l'infini devient fuyant et risqué : les menaces les plus pesantes sont d'une part de faire appel à l'ensemble de tous les ensembles qui est paradoxale, d'autre part de ne pouvoir définir ce dont on parle sans faire appel à cela justement qu'on prétend définir. Voyons dans quelles mesures le système qui vient d'être décrit peut éviter ces écueils.

III) Le théorème de Frege

A) Problèmes courants liés à l'infini

Certains auteurs[76] prétendent démontrer dans *FA* l'infinité de la suite naturelle des nombres sans faire appel à un axiome de l'infini, ce que Frege, comme nous l'avons vu, avait déjà fait mais dans un système inconsistant : je me propose de vérifier si les définitions proposées peuvent donner prise aux reproches classiques adressés à ce genre de tentatives, à savoir d'une part s'il y est question d'une sorte d'infini actuel, et plus précisément s'il y a référence à l'ensemble de tous les ensembles, d'autre part si l'une des définitions engagées dans la démonstration peut être préjudiciable d'imprédicativité au sens ou l'entendait Poincaré en écrivant : « Ainsi, les définitions qui doivent être regardées comme non prédicatives sont celles qui contiennent un cercle vicieux. »[77].

La problématique particulière de l'infini nous conduira à considérer la preuve du Théorème de Frege. Il en existe plusieurs et je vais pour ma part m'inspirer très largement de celle de Bell[78] . Quelques difficultés liées la notion d'infini seront tout d'abord exposées, telles qu'elles se sont présentées à Frege et à Cantor et après avoir exposé la preuve du théorème de Frege elle sera analysée afin de déterminer si oui ou non elle surmonte les difficultés présentées.

Les systèmes de Russell et Zermolo-Fraenkel, s'ils ont l'avantage de ne pas avoir été prouvés inconsistants, ont ce désavantage dans la perspective qui est celle du logicisme de faire appel à un axiome non logique, celui de l'infini pour Russell ou du choix pour Zermolo-Frankel. Il leur faut en effet présupposer qu'il existe une infinité d'objets du premier ordre pour fonder les cardinaux transfinis. Frege lui n'a pour *seule* exigence ontologique que l'existence d'un ensemble vide.

Comme le note Dummett[79], il suffit qu'il y ait 0 objets pour que le nombre 0 existe. Et si le nombre 0 existe, il y a au moins un objet, et alors le nombre 1 existe…C'est en fait une anticipation de la définition des ordinaux finis de von Neumann [$\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, …]. Mais la véritable exigence ontologique, c'est que 0 lui-même soit un objet, or ceci est très discutable et sera discuté dans la prochaine section. Une telle affirmation peut servir de fer de lance au platonisme arithmétique de Wright, ou au contraire être minimisée, comme le fait Dummett en expliquant que c'est uniquement pour asseoir sa démonstration de l'infinité de la suite naturelle des nombres que Frege à recours à cette objectualisation des nombres. En attendant de détailler quelques argumentations sur le sujet, nous pouvons définir un objet comme étant dénoté par une expression qui puisse être l'un des deux membres d'une relation d'identité dans un langage formel sans que cela n'engage l'existence d'un monde supralunaire où flotteraient quelque forme pure de l'arithmétique !

Avec sa codiagonalisation[80], Cantor a montré que l'ensemble puissance d'un ensemble est plus grand que ce dernier, mais il a du même coup révélé le paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles, ou selon les termes de Cantor de cette pluralité inconsistante, qui est aussi en cause dans le paradoxe de Russell. Un tel ensemble ne peut en effet pas être envisagé comme un ensemble, car son ensemble puissance devrait alors être plus grand que lui, mais par définition il contient son ensemble puissance puisqu'il contient tous les ensembles, donc cet ensemble n'existe pas.

Un autre problème posé à Frege, notamment par Dummett[81], est celui d'établir si oui ou non le nombre de tous les objets ($\#\{x : x = x\}$) est égal au nombre de tous les nombre ($\#\{x : \exists F\, x\eta F\}$) ?

Nous allons voir si ces difficultés se retrouvent dans *FA* en analysant une preuve non inductive de l'infinité de la suite naturelle des nombres.

B) Le théorème de Frege

Dans *Was sind und was sollen die Zahlen*, Dedekind donne une preuve, pour le moins informelle, de l'existence d'un ensemble infini (l'ensemble de ce qui peut être pensé), parce qu'en correspondance biunivoque avec l'un de ses sous-ensembles propres (l'ensemble des pensées *x peut être un objet de ma pensée*) :

> "The world of my thoughts, i.e., the totality *S* of all things that can be objects of my thought, is infinite. For if *s* denotes an element of *S*, then the thought *s*', that *s* can be an object of my thought, is infinite. For if *s* denotes an element of *S*, then the thought *s*', that *s* can be an object of my thought, is itself an element of *S*. If *s*' is regarded as the image $\varphi(s)$ of the element *s*, then the mapping φ on *S* determined thereby has the property that its image *S*' is a part of *S* (e.g., my own ego [*mein eigenes Ich*]), wich are different from every such thought *s*' and are therefore not contained in *S*'. Finally, it is clear that if *a*, *b* are different elements of *S*, then their images *a*', *b*' are also different, so that mapping φ is distinct (similar). Consequently, *S* is infinite, q.e.d."[82]

Si cette démonstration n'est pas très rigoureuse, elle a le mérite de donner une intuition précise de ce à quoi doivent ressembler des ensembles pour être qualifiés par Dedekind d'infinis. De tels ensembles pouvant être mis en bijection avec l'un de leurs sous-ensembles propres sont qualifiés de Dedekind-infinis. Je vais montrer, dans une reformulation de la preuve de Bell[83], que de l'arithmétique frégéenne présentée ci-dessus on peut déduire l'existence d'un ensemble Dedekind-infini de nombres naturels en ne faisant appel ni à un axiome de l'infini (Russell-Whitehead), ni à un axiome du choix (Zermelo-Fraenkel), mais seulement au principe de Hume.

Bell défini un langage d'objets, de concepts du premier et second ordres et de relations du premier et second ordres. Il y ajoute deux éléments particuliers : un terme *e* tel que $e(X)$ est l'extension de *X* et un prédicat *E* tel que $E(X)$ signifie « *X* possède une extension ». Le paradoxe de Russell a montré que $\neg\forall X E(X)$, d'où l'intérêt d'introduire un tel prédicat pour éviter de présupposer que tout concept possède une extension. Boolos[84] a montré que les concepts numériques possèdent toujours une extension.

Il ajoute aux axiomes de la logique du second ordre deux axiomes :

1) $\forall X \forall Y(\mathrm{E}(X) \wedge E(Y) \supset (e(X) = e(Y) \leftrightarrow X \equiv Y))$

2) $\forall X \forall Y(\mathrm{E}(X) \wedge X \equiv Y \supset \mathrm{E}(Y))$

Le premier axiome est l'axiome d'extension, qui stipule que si deux concepts ont la même extension alors ils sont extensionnellement équivalent (ce que signifie « $\equiv$ »). J'ai utiliser le symbole « $\leftrightarrow$ » pour exprimer le biconditionnel sans ambiguïté. Le second indique que si deux concepts sont extensionnellement équivalent et que l'un d'entre eux possède une extension, l'autre en possède une également.

Il peut dès lors définir la relation d'équinuméricité ($\approx$) et introduire le concept de second ordre : $\|X\| =_{def} \{Y : Y \approx X\}$, où $\|X\|$ est un concept numérique. Puisqu'on accorde que tout concept numérique possède une extension, on définit : $|X| =_{def} e(\|X\|)$, où $|X|$ est le nombre cardinal de X.

Le principe de Hume est alors facilement dérivé : $\forall X \forall Y\,(X \approx Y \leftrightarrow |X| = |Y|)$.

Selon ces notations, un ensemble X sera Dedekind-infini s'il peut être mis en bijection avec l'un de ses sous-ensembles propres, c'est à dire si : $\exists Y(Y \subset X \wedge X \approx Y)$. Si X est Dedekind-infini, $|X|$ est appelé *nombre infini.*

Bell va ensuite se servir du lemme de Zermelo-Bourbaki[85] que l'on peut exprimer de la façon suivante :

Soit E est un ensemble et $\Im$ l'ensemble puissance de E et une transformation p telle que $p : \Im \rightarrow E$

$$X \mapsto p(X) \notin X$$

Bourbaki montre qu'il existe alors un sous-ensemble M de E et un bon ordre ($\leq$) de M tel que, si $S_x = \{y : y < x\}$:

(i) $\forall x[x \in M \supset (\{y : y < x\} \in \Im \wedge p(\{y : y < x\}) = x)]$

(ii) $M \notin \Im$

Ce lemme va être appliqué à sous-ensemble E de l'ensemble $U = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ afin de montrer qu'il contient un ensemble M Dedekind-infini, c'est-à-dire que l'une de ses parties peut être mise en bijection avec l'un des sous-ensembles propres de cette partie: $\exists X \exists Y\,(Y \subset X \subset U \wedge X \approx Y)$.

Cela permet de prouver qu'étant donné un ensemble E inclus dans U et une transformation $\#$, tels que : $\forall(X \subseteq E)\forall(Y \subseteq E)(n(X) = n(Y) \leftrightarrow X \approx Y)$, il existe un sous-ensemble de E infini et bien ordonné.

Si l'on reprend le lemme de Zermelo-Bourbaki en choisissant $\mathfrak{Z} = \{X : n(X) \notin X\}$, où les X sont des sous-ensemble de E, et en prenant pour n la fonction $n : \wp E \to E$, telle que $n : \{X : n(X) \notin X\} \to E$

$$X \mapsto n(X) \notin X$$

il existe un ensemble M appartenant à E et une fonction bien ordonnée ($\leq$) de M tels que :

(i') $\forall x\, [x \in M \supset (\# \{y : y \neq x\} = x)]$

(ii') $M \notin \{X : n(X) \notin X\}$

Soit $nM = m$, d'après (ii') et la définition de n, on obtient : $m \in M$.

Or si $m \in M$, d'après (i') on obtient (*) : $\#\{y : y < m\} = m = \#M$.

En appliquant le principe de Hume $[\#F = \#G \equiv F \approx G]$ à (*) on obtient : $\{y : y < m\} \approx M$.

Or on a bien $\{y : y < m\} \subset U$ et $M \subset U$, donc on a démontré que $\exists X \exists Y\, (Y \subset X \subset U \wedge X \approx Y)$, où $X = M$ et $Y = \{y : y < m\}$. Si l'ensemble U contient un ensemble Dedekind-infini, on peut admettre sans problème que U est *au moins* Dedekind-infini lui-même.

C) Analyse du théorème de Frege

Voyons si ces résultats nous permettent de caractériser adéquatement l'infini. Le premier écueil que doit éviter une telle définition est de faire appel à la notion d'extension qui est inconsistante, or il a été montré dans la seconde partie qu'il n'y était pas fait référence dans *FA*. On peut cependant noter que ce n'est pas la notion d'extension en elle-même qui est problématique, mais plutôt l'assertion selon laquelle à tout concept correspond une extension. En fait, il suffirait de limiter la loi V au cas où les extensions des concepts concernés existent :

$[\forall a(Fa = Ga) \supset (\exists \varepsilon \exists \alpha(\varepsilon F(\varepsilon) \wedge \alpha G(\alpha)) \supset \varepsilon F(\varepsilon) = \alpha G(\alpha))] \wedge [(\varepsilon F(\varepsilon) = \alpha G(\alpha)) \supset \forall a(\mathrm{F}a = \mathrm{G}a)]$

Mais les notions introduites dans *FA* répondent mieux aux besoin des démonstrations et cette reformulation ne sauve pas le logicisme car il faudrait encore introduire des notions non-logiques pour déterminer les conditions d'existence des extensions.

Le second écueil est celui du paradoxe de Cantor, et il faut vérifier si la démonstration présentée fait appel, de façon directe ou indirecte, à l'ensemble de tous les ensembles. En fait ce serait le cas s'il y avait une quantification universelle sur un concept de second ordre, mais il n'y en a pas. Le quantificateur existentiel quant à lui n'implique pas l'ensemble de tous les ensembles. On pourrait coder chaque expression bien formée de *FA* par un théorème d'énumération qui associerait les valeurs 10, 100, 1000…aux différents symboles de *FA* (*a*, #, *F*,…), et passer en revue les expressions correspondantes au nombre que l'on scruterait dans l'ordre croissant. Bien sûr une telle procédure est idéale, mais elle suffit à montrer que l'ensemble sur lequel on quantifie existenciellement est scrutable, ce qui évite la référence à l'ensemble de tous les ensembles.

Le troisième écueil n'est pas un paradoxe mais l'imprédicativité des définitions. Nous avons vu que Poincaré accusait Frege (et les autres…) de ne formuler que des définitions imprédicatives, circulaires, dès lors qu'il s'agissait de parler de l'infini. Pour déterminer si un tel reproche peut être fait à la présentation ci-dessus nous allons la confrontée à la définition par Kleene de l'imprédicativité :

> « Quand un ensemble M et un objet particulier m sont ainsi définis que, d'un côté m est un élément de M, et que, d'autre part, la définition de m dépend de M, on dit que la procédure [la définition de m comme celle de M] est imprédicative. »[86]

En fait il n'y a pas de cas d'imprédicativité dans les différentes étapes de la démonstration, mais celle-ci ne définit pas l'infini, elle ne fait que prouver son existence. La seule définition explicite d'un nombre infini qu'elle nous permette de dériver est d'après (∗) :

M est Dedekind-infini et le nombre d'éléments de M est m tel que : $m = \#\{y : y < m\}$. Or cette définition est tout à fait imprédicative.

D) Conclusion

Nous avons vu que dans les *Grundlagen*, la notion d'extension de concept ne sert qu'à définir en termes logiques le concept « nombre de…», et n'est plus jamais mentionnée une fois cette définition établie. En éliminant les extensions et en acceptant le principe de Hume comme seul axiome non-logique, on définit un système appelé *FA* qui est consistant, pour autant que la logique du second ordre le soit. On peut dès lors calquer les démonstrations informelles de Frege dans *FA*, et obtenir les mêmes résultats que lui, à savoir la preuve de l'existence d »un ensemble Dedekind-infini. Plusieurs problèmes classiques sont surmontés dans *FA*, le problème Jules César (*le nombre Jules César appartient au concept F si et seulement si il y a exactement Jules César x qui tombent sous F*), le paradoxe de Russell et celui de Cantor. Le pseudo-problème du nombre de $\{x : x = x\}$ n'en est en fait pas un car $\{x : x = x\}$ serait l'ensemble de tous les ensembles et on a vu avec Cantor qu'il n'existe pas. Le problème du statut ontologique des nombres peut être détourné puisque rien dans la preuve ne nous force à trancher sur le fait que les nombres doivent (ou peuvent) ou non être des objets, puisque l'on pose antérieurement à la dérivation l'ensemble U. Malheureusement le dernier test n'est pas satisfaisant. Même si la preuve ne s'appuie sur aucune définition imprédicative, la seule définition explicite qu'elle permette de construire d'un nombre cardinal infini l'est. Et la tentative initiale qui était de formuler un énoncé d'identité qui puisse définir adéquatement un nombre infini échoue. Si bien que même une fois que toutes les précautions ont été prises, la définition nous échappe. Finalement, ce qu'on reproche à l'infini c'est de n'être pas fini, de ne pas se laisser envelopper dans une définition figée qui permettrait par exemple de le remplacer toujours et partout, alors qu'il n'est jamais ni nulle part.

On pourrait s'arrêter sur cette aporie, ou conclure que l'infini n'est qu'une *fiction utile*, peut-être même une fiction inutile ou dangereuse parce qu'elle induit en erreur. Mais si l'on reprend Frege exactement là d'où nous sommes partis, c'est-à-dire de la définition contextuelle de l'opérateur de cardinalité, ne pourrait-on pas entrevoir une issue à notre problème ? Il ne s'agit pas d'étendre le principe de Hume aux ensembles infinis, car cela n'aurait aucun sens. Que voudrait dire en effet une proposition de la forme : le nombre de nombres pairs est égal au nombre de nombres premiers.

Par contre, pourquoi ne pas s'inspirer de cette définition pour définir *un opérateur de cardinalité infinie,* ou plutôt deux, qui seraient en fait des fonctions de vérité qui à chaque ensemble associerait soit V, soit F, selon qu'il remplirait ou non la '*condition Jules César*' ci-dessous.

Le nombre infini de F est égal au nombre infini de G si et seulement si les F et les G sont en correspondance biunivoque. Se posera alors la question de savoir si Jules César est un nombre infini, à laquelle on pourrait répondre que Jules César est un nombre infini si et seulement si il est le nombre d'un concept dont les membres peuvent être mis en correspondance biunivoque avec $\mathbb{N}$ pour le premier opérateur ($\#_{\aleph_0}$) ou avec l'ensemble puissance de $\mathbb{N}$ pour le second opérateur ($\#_{2^{\aleph_0}}$). La circularité n'est qu'apparente car la relation « être en correspondance biunivoque » n'est pas à définir, et l'infinité de la suite des entiers naturels a été démontrée dans *FA*. On pourrait alors dire que le concept F est infini dénombrable si et seulement si $\#_{\aleph_0}(F) = V$ et qu'il est infini non dénombrable si et seulement si $\#_{2^{\aleph_0}}(F) = V$. Cependant cette définition n'est pas vraiment intéressante car elle ne permet pas de rendre compte des relations entre $\#_{\aleph_0}$ et $\#_{2^{\aleph_0}}$.

Ce qui empêche de fournir une définition satisfaisante d'un ensemble infini, c'est qu'en fait, lorsque *HP* est utilisé avec la logique du second ordre, et qu'il peut donc s'appliquer non seulement à des objets mais aussi à des concepts, il est l'équivalent du postulat d'induction des axiomes de Peano, qui correspond finalement à l'axiome de l'infini de Zermelo-Frankel, et ne peut définir un ensemble Dedekind-infini qu'en posant son existence. De façon discrète s'est introduite l'hypothèse de l'ensemble infini qu'il fallait éviter. *FA* ne permet donc pas l'économie d'hypothèses qui aurait permis d'asseoir sa primauté sur l'arithmétique tant que les nombres ne sont pas définis comme étant des objets. C'est donc vers le type de connaissance que l'on a de *FA* qu'il faut se retourner pour chercher l'intérêt d'une réduction de l'arithmétique à *FA*, en montrant que la connaissance de celle-ci est plus fiable, plus évidente que celle que nous pouvons avoir des vérités de l'arithmétique.

IV) Épistémologie de *FA*

A) Introduction

Il faut déterminer ce qu'est la connaissance des nombres, et, si elle s'appuie sur d'autres connaissances, lesquelles. Dans son souci de systématisation, Kant ne négligea pas ce point ; il élabora une épistémologie des mathématiques qui fit école jusqu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ en fondant la connaissance mathématique sur l'intuition pure de l'espace. D'autres approches ont été proposées, comme le formalisme de Hankel ou l'empirisme de Mill pour lequel la connaissance des nombres serait issue des sensations. L'une des voies qui s'ouvrent à qui veut traiter d'un tel problème est celle du réductionnisme. En effet, s'il est possible de réduire les vérités de l'arithmétique à d'autres vérités plus fondamentales, alors la question de la connaissance des premières pourrait être réduite à celle de la connaissance des secondes. Que cette voie simplifie ou résolve le problème épistémologique des nombres n'est cependant pas assuré, puisque les mêmes questions se poseront à propos de la connaissance des entités fondamentales que celles que l'on voulait résoudre à propos des nombres.

B) Le réductionisme

Frege fut l'un des premiers à explorer cette direction, en tentant de fonder l'arithmétique sur des vérités logiques. Déjà avant lui, Leibniz[87] avait envisagé que les mathématiques puissent ne rien devoir à l'intuition, mais il n'était parvenu qu'à des résultats particuliers (comme 2+2=4) qui de surcroît n'étaient pas rigoureux puisqu'ils présupposaient de l'associativité de l'addition sans en rendre explicitement compte. Le programme de Frege est de toute autre envergure puisque c'est l'ensemble de l'arithmétique qu'il se propose de démontrer dans un système qu'il considère comme purement logique. On a vu que ce système, bien qu'inconsistant en tant que tel, pouvait en remplaçant la loi V par le principe de Hume donner un système consistant que l'on a appelé *FA*.

La question du statut épistémologique de *FA* prend alors une place privilégiée dans le questionnement épistémologique sur l'arithmétique. Puisque *FA* résulte de l'ajout du principe de Hume à la logique du second ordre, le type de connaissance de *HP* détermine si oui ou non la connaissance de *FA* (et par extension de l'ensemble des mathématiques) peut être considérée comme analogue à la connaissance de la logique du second ordre, celle-ci restant encore à examiner. Alors que certains auteurs tentent de l'affirmer[88], d'autres s'efforcent de montrer que cet axiome n'a pas le même statut épistémologique que la logique du second ordre[89], bien que tous paraissent s'accorder sur le fait qu'il soit impossible de présenter un argument décisif qui rende contradictoire la thèse adverse.

C) Le statut épistémologique de *FA*

Pour analyser cette connaissance particulière des nombres, il faudra répondre à deux questions : Le nombre cardinal est-il un objet ? Et quel type de connaissance pouvons-nous avoir du Principe de Hume ? Dans les deux cas les réponses de Frege et de Wright seront analysées ainsi que leurs critiques.

Cela devrait permettre d'esquisser une réponse à la question de départ : « Qu'est-ce que connaître un nombre ? ». Il s'agit donc d'analyser la connaissance que l'on peut avoir des propositions de *FA* pour en déduire celle que l'on a des nombres. Cette tâche présuppose que les deux systèmes (*FA* et arithmétique) n'aient pas simplement un domaine de formules équivalentes, mais qu'il y ait bien une priorité épistémologique de *FA* sur l'arithmétique, la connaissance du second étant subordonnée à celle du premier. Qu'il s'agisse de *FA* ou d'autres systèmes (plus ou moins) logiques, c'est finalement la grande thèse du logicisme, et il semble qu'elle fût battue en brèche, accusée de tous les paradoxes, de toutes les imprédicativités[90]...

Nous avons vu que la définition d'un ensemble infini contenu dans la suite des nombres naturels ne peut fonctionner qu'en supposant que les nombres sont des objets, sans quoi elle devient imprédicative..

1) Le nombre cardinal est-il un objet?

On a vu que 1 est défini comme le nombre du concept sous lequel tombe un objet qui est *identique à 0*, cela signifie que 0 lui-même est un objet. S'agit-il d'une singularité grammaticale, ou d'une singularité sémantique, et y a-t-il une relation entre ces deux singularités ? Il est nécessaire de s'attarder dans un premier temps sur la façon dont Frege envisage les nombres comme étant des objets, puis sur ce que cela signifie exactement dans *FA*.

Pour fournir une définition explicite du nombre qui appartient à *F*, Frege propose qu'il soit considéré comme l'extension du concept équinumérique à *F*, où l'extension représente un objet logique, qu'il faut distinguer de l'objet matériel représentant le rassemblement des ensembles équinumériques. Mais puisque cette notion est inconsistante et qu'il s'agit de questionner le système résultant de son élimination, mieux vaut se tourner vers ce que dit Frege à ce propos avant l'introduction de la notion problématique. On a vu que dans le second chapitre des *Grundlagen* il montre surtout ce que n'est pas le nombre.

Le nombre n'est pas une "propriété abstraites des choses du monde extérieur"[91]. Il conclue d'ailleurs le chapitre[92] par une citation de Berkeley qu'il semble endosser :

> "Il faut remarquer que le nombre n'est rien de fixe ni d'établi existant *realiter* dans les choses mêmes. C'est une production de l'esprit qui considère soit une idée prise en elle-même, soit une combinaison d'idée auxquelles il donne un nom, et pour ce faire, les regarde comme une unité. Selon que l'esprit combine ses idées de manière variable, le nombre varie également, qui n'est qu'une collection d'idée."[93]

Cependant, bien qu'il s'agisse d'idée, l'antipsychologisme de Frege montre que celui-ci ne peut envisager ces idées ou ces collections d'idées comme étant des représentations subjectives.

La dernière possibilité qu'il rejette est celle selon laquelle le nombre cardinal serait un ensemble, car cette expression lui semble mal définie et qu'elle désigne le nombre cardinal plus qu'elle ne le décrit.

S'il ne s'agit ni d'un concept, ni d'une représentation, ni d'un ensemble, quel candidat reste-t-il pour décrire l'entité qu'est le nombre ? La réponse à cette question va être cruciale pour le développement du quatrième chapitre des *Grundlagen*, puisqu'il faut que les nombres soient des objets afin de pouvoir tomber sous les concepts dont ils sont les nombres. Mais la seule argumentation en ce sens qui ne fasse pas appel aux extensions procède par analogie avec les directions de droites. Cette argumentation est reprise par Wright[94] qui veut maintenir la thèse logiciste telle que formulée par Frege à partir de *FA*. Pour ce faire, il se doit comme son prédécesseur de prendre le nombre comme objet, fait qu'il doit justifié.

Au paragraphe 66[95], dans le cadre de l'analogie entre nombre et direction de droite, Frege écrit que : « Dans la proposition : "la direction de *a* est identique à la direction de *b*", la direction de *a* est présentée comme un objet… », sur quoi il ajoute en note : « C'est ce qu'indique l'article défini… ». Faut-il en déduire que la singularité grammaticale soit pour lui une singularité sémantique, à savoir que toute expression singulière dénote quelque chose qui est un objet. Il s'agirait d'un platonisme naïf que Wright autant que Frege s'attache à réfuter. En fait, comme il le souligne[96] : « Les termes singuliers sont censés dénoter des objets et ne le font vraiment que lorsqu'ils figurent dans un énoncé vrai ». On frôle un problème épistémologique de taille, à savoir ce qu'*est* un énoncé vrai. Field[97] accorde à Wright que les termes numériques sont censés dénoter des objets, mais il met en doute qu'ils puissent le faire vraiment, car c'est de la possibilité même des *énoncés vrais* dont il doute. Wright lui répond méthodiquement mais avoue qu'il ne peut que réfuter les accusations du rejectionnisme, sans prouver que celui-ci est fautif.

On peut contourner ce problème si on limite le langage à un système axiomatique (tel que *FA*) et que l'on considère qu'un énoncé est vrai si c'est un théorème du langage. Or s'il est possible de caractériser syntaxiquement un terme singulier[98] dans un tel système, en prenant par exemple pour critère le fait qu'il puisse être le membre d'une relation d'équivalence, il ne s'agit pas d'un engagement ontologique démesuré que de considérer que ce terme réfère à quelque chose s'il apparaît dans un énoncé vrai. Il réfère en effet à un objet logique, qui peut être engagé dans une relation ou tomber sous certains concepts, ce qui semble suffisant pour être dit existant. Mais cela ressemble fort au preuve d'existence que Frege incriminait si vivement. Le critère d'existence d'un objet ainsi défini est d'apparaître dans un énoncé vrai, c'est-à-dire de faire partie d'un modèle pour ce système, et il risque d'y avoir dans *FA* beaucoup plus d'objets que Frege n'en eût désiré. En fait il s'avère que l'un des principaux inconvénients de *FA* sur le plan épistémologique est d'être beaucoup plus puissant que l'arithmétique.

Nous voulions savoir ce qu'est *connaître* un nombre. Si un nombre est un objet, alors connaître un nombre c'est connaître un objet. Nous pouvons esquisser une solution en proposant que connaître un nombre c'est le *percevoir*, l'*intuitionner* en tant qu'objet. Mais c'est justement la particularité du logicisme que de vouloir prouver que la connaissance des nombres ne doit rien à l'intuition, qu'elle soit sensible ou pure, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une connaissance analytique, dans le sens particulier que donne Frege à ce mot.

En donnant aux expressions « analytique » et « synthétique » un sens qu'elles n'avaient pas chez Kant, laissant de côté le contenu des connaissances au profit de leur justification, les vérités de l'arithmétique, synthétiques pour Kant, deviennent analytiques pour Frege. Kitcher[99] montrent qu'il s'agit plus une amélioration de la classification kantienne que d'une réfutation de celle-ci. Frege reproche à cette classification de ne pas être exhaustive, ne concernant que les classes de jugements affirmatifs universels de type *sujet-prédicat*, ce qui correspond effectivement aux outils logiques possédés par Kant. L'intention frégéenne aurait été, d'après Kitcher, d'élargir la classe des jugement analytiques afin de la compléter en ajoutant à l'analyse conceptuelle et aux lois de déduction classiques les outils logiques qu'il avait lui-même développé dans la *Begriffsschrift* comme outils d'analyse. Friedman[100] suggère même que Kant eût volontiers accepté de placer l'arithmétique dans les vérités analytiques s'il avait eu à sa disposition la logique frégéenne. Mais grand bien lui fasse de ne pas posséder un tel système, puisque celui-ci est inconsistant.

Par contre, *FA* est très certainement consistant, et les vérités de l'arithmétique en sont des théorèmes. Or ce système est constitué de la logique du second ordre (qui selon la définition de Frege est analytique) et du principe de Hume. Ainsi, si celui-ci est lui-même analytique, les vérités de l'arithmétique seront considérées comme analytiques, alors que s'il est d'une autre sorte, les vérités de l'arithmétique seront de cette autre sorte. Il est important de faire le point sur la façon dont ce principe est introduit, et plus particulièrement sur l'analogie de Frege que reprend Wright abondamment entre les nombres et les directions de droites.

2) Quel type de connaissance avons-nous de *HP*

Comme on l'a vu précédemment, la caractérisation générale des nombres naturels est établie sur la base d'une analogie avec la caractérisation des directions de droite. Il s'agit en fait de répartir le contenu particulier d'une relation d'équivalence pour formuler une relation d'identité : dans le cas des directions de droites, on obtient la définition suivante : « *la droite a est parallèle à la droite b* veut dire la même chose que *la direction de la droite a est identique à la direction de la droite b* »[101]. Dans le cas des nombres naturels, on obtient la définition suivante : *F et G sont équinumériques* veut dire la même chose que *le nombre appartenant à F est identique au nombre appartenant à G.* Ensuite[102] la démonstration est faite que la relation d'équinuméricité (appelée Φ) est une relation purement logique : *F* et *G* sont équinumériques si et seulement si il y a une correspondance biunivoque entre les objets qui tombent sous F et les objets qui tombent sous G, c'est-à-dire si et seulement si : $\exists\Phi[\forall x\, (Fx \supset \exists y\, (Gy \wedge x\Phi y)) \wedge \forall y\, (Gy \supset \exists x\, (Fx \wedge x\Phi y)) \wedge \forall a\forall b\forall d\, (((d\Phi a \wedge d\Phi b) \supset (a = b)) \wedge ((a\Phi d \wedge b\Phi d) \supset (a = b)))]$.

La question est de savoir si l'équivalence $[\#F = \#G \equiv F{\approx}G]$ est logique, ou si elle fait appel à l'intuition. En fait, de droite à gauche il n'y a pas de problème parce que la correspondance biunivoque est logique. Donc s'il existe deux concepts F et G qui sont en correspondance biunivoque, le nombre de F est égal au nombre de G. Par contre, l'autre sens suppose qu'à tout concept on puisse attribuer un nombre[103]. Or c'est ce sens $[\#F = \#G \supset F \approx G]$ qui permet de prouver qu'il existe une infinité d'objets, les nombres. Savoir si cette implication peut être considérée comme logique est donc de toute importance. Pour Wright, c'est le cas[104]. L'existence des nombres est déduite de la conjonction du principe de Hume avec la vérité d'énoncés appropriés qui puissent figurer dans le membre de droite. Il ne s'agit pour lui que d'une *reconceptualisation* de l'équivalence[105] de laquelle on tire la relation d'identité du membre de gauche. En fait, pour Wright, le nombre est déjà dénoté en tant que référent dans le membre de droite. Mais il faudrait plutôt dire que le concept de direction est déjà dénoté dans « la droite *a* est parallèle à la droite *b* », car c'est cela seulement qu'il démontre, et il le fait d'ailleurs avec rigueur[106]. Ceci étant fait, les résultats sont transposés aux nombres selon l'analogie proposée par Frege. Mais cette transposition s'avère problématique, et elle doit être considérée comme heuristique seulement, pas démonstrative[107]. Boolos[108] va montrer que la proposition de Wright est imprédicative, mais il faut retenir qu'il ne s'agit pas seulement d'une définition mais aussi d'une démonstration. Ce dernier introduit à la fois la définition du nombre (dans le membre de gauche) et son existence (dans le membre de droite). Dans le cas des directions de droites, l'objet « direction de *a* » ne peut en aucun cas faire partie du membre de droite. On n'imagine pas en effet que la direction puisse être un *morceau* de droite. Par contre, dans le cas des nombres, un tel cas peut tout à fait se produire, et c'est même en partie pour qu'il se produise que les nombres ont été considérés comme des objets : les concepts équinumériques du membre de gauche peuvent subsumer des nombres, alors que c'est de lui que doit être *expliqué* le concept de nombre. Autrement dit, la preuve d'existence des nombres que nous propose Wright présuppose l'existence des nombres, ce qui ne peut être considéré comme analytique. En fait il semble que la logique seule soit tout à fait incapable de rendre compte de l'existence de ne serait-ce qu'un objet. On semble finalement se trouver face à un dilemme chez Wright : Si l'on accepte que le nombre soit un objet, le principe ne peut être analytique ; et si l'on accepte que le principe soit analytique, les nombres ne peuvent être des objets.

3) Le contexte historique des *Grundlagen*

L'objection de Boolos quant à la fausse analogie entre nombres et directions de droites semble évidente à première vue, les premiers pouvant être des arguments dans la relation « être équinumérique à » alors que les secondes ne pourraient l'être dans la relation « être parallèle à ». En fait, lorsque l'on replace l'entreprise frégéenne dans le contexte mathématique de son époque, et tout particulièrement lorsque l'on met celle-ci en parallèle avec les développements de la géométrie projective, la notion de nombre comme objet et le type de connaissance que l'on peut avoir du principe de Hume peuvent être envisagés sous un angle nouveau.

Tappenden montre dans son article l'importance que Frege accorde aux définitions *fécondes*[109]. On distingue en effet deux types de définitions : celles qui dressent une liste de caractères et qui définissent un concept qui est en fait la conjonction (ou la disjonction) des concepts correspondant aux différents caractères de la liste (il s'agit des propositions analytiques chez Kant, obtenues grâce à des définitions et un système booléen) et celles qui sont qualifiées par Frege de fécondes, qui permettent la formation de nouvelles connaissances (il s'agit des propositions qui en plus des définitions et du système booléen font intervenir les quantificateurs introduits par Frege dans la *Begriffsschrift*). Ces dernières, contrairement à ce qu'implique la classification kantienne des vérités en analytiques ou synthétiques, peuvent être analytiques. Ce type d'énoncés se retrouveraient dans la logique mais également dans les mathématiques :

> « Les déterminations de concepts fécondent tracent des limites qui n'étaient pas encore données. On ne peut savoir d'avance ce qu'on en pourra déduire ; on ne se contente plus de retirer de la boîte ce qu'on y avait placé. De telles connaissances accroissent notre connaissance et il faudrait, si on veut être fidèle à Kant, les tenir pour synthétiques. On peut cependant les montrer d'une manière purement logique : elles sont donc analytiques. Elles sont bien en effet contenues dans les définitions, mais elles le sont comme une plante l'est dans la graine, non pas comme une poutre l'est dans la maison. ».[110]

Or c'est bien là l'enjeu de notre questionnement que de savoir si une telle fécondité est possible, à savoir si la logique est ou non capable de générer des objets qui n'existaient pas auparavant, et ce sans appel à une intuition kantienne.

On voit que les objectifs de Frege et des mathématiciens convergent, il s'agit de trouver de tels concepts (et donc de telles définitions) qui puissent être fructueux. Mais alors que les mathématiciens arrêtent leur déductions lorsqu'ils atteignent le but fonctionnel de leur recherche, Frege veut continuer la chaîne tant que cela est possible, et envisage de rencontrer le long de celle-ci d'autres de ces définitions fructueuses, plus élémentaires et qui permettraient de nouvelles connaissances, peut-être inaccessibles par une autre voie.

> « Je pense, moi aussi, qu'une définition doit être confirmée par sa fécondité, par le pouvoir de mener à bien une démonstration. Mais il faut bien voir que la rigueur de la preuve demeure une illusion, même si la chaîne des inférences est ininterrompue, quand la définition reçoit sa justification après coup, par le seul fait qu'on n'a rencontré aucune contradiction. [...] C'est pourquoi j'ai cru devoir revenir aux fondements logiques généraux, plus peut-être que les mathématiciens ne l'eussent, pour la plupart, jugé nécessaire. »[111].

Tappenden dresse un ensemble de critères communs entre les principes fructueux des mathématiciens, et ceux que veut établir Frege dans la logique. La géométrie projective analytique rempli ces conditions : le principe de dualité par exemple, A) était déjà utile et utilisée avant d'être prouvée par l'analyse, B) est une définition analytique qui limite plus clairement le principe de dualité, qui était trop large dans son acceptation synthétique (Poncelet), C) permet un accroissement des connaissances géométriques, D) est prouvé par décomposition puis recomposition de propositions, qui forment de nouveaux liens absents des propositions de départ, mais tels que ce qui se déduisait d'elles prises séparément demeure valide après la reconstruction.

Les mathématiques ne servent pas qu'à donner des réponses, elles servent aussi à comprendre des problèmes. Ainsi, on ne doit pas se satisfaire de leur potentiel à résoudre des problèmes particuliers mais s'interroger tant que cela est possible sur la connaissance qu'elles nous fournissent et les liens qui peuvent exister entre les différentes vérités qu'on en déduit. Mais cette interrogation doit se faire à l'intérieur même des mathématiques, avec leur propres langage et outils, ils fournissent donc eux-mêmes le cadre conceptuel de leur analyse, et ce cadre peut varier au fur et à mesure que de nouvelles vérités sont découvertes. Les mathématiques ont en effet la particularité d'être auto-réflexives, on peut déterminer grâce à elles si un cadre donné est adéquat pour la résolution d'un problème lui-même mathématique.

Wilson[112] a étudié ce phénomène de recadrage qui survient parfois dans l'histoire des mathématiques et se demande s'il est possible de déterminer le cadre propre (« proper setting ») d'un problème donné.

On a vu plusieurs fois dans l'histoire des mathématiques des théories être replacées dans des cadres plus larges, nouvellement découverts, et jugés meilleurs que ceux qu'ils remplaçaient. C'est le cas par exemple de la géométrie euclidienne après qu'elle fût replacée dans le cadre plus large de la géométrie projective. Les mathématiciens semblent facilement enclins à envisager un cadre propre à toute théorie, qui serait encore dissimulé mais qu'ils auraient pour tâche de découvrir. Wilson appelle cette tendance un essentialisme caché (« hidden essentialism »), le cadre optimal étant caché, en germe, dans la théorie et demandant à être découvert. Les philosophes n'ont cependant aucun moyen de définir si un cadre est meilleur ou pire qu'un autre. Il semble que pour eux tout cadre formel consistant soit équivalent.

Est-il possible que ce nouveau cadre, dans le cas de la géométrie, la géométrie projective, ait émergé de la géométrie euclidienne elle-même, qu'il ait put se développer en son sein, sans besoin d'apport extérieur? Si c'est le cas, il se pourrait bien que *FA* soit de ce genre, qu'elle soit une plante fructueuse née de la graine logique classique, qui a germé tout d'abord en donnant la logique du second ordre, tige solide d'où émergent des feuilles que l'on n'aurait soupçonnées auparavant, comme le principe de Hume, et qui finalement embrasse et recouvre des domaines qu'on lui croyait étrangers, comme l'arithmétique.

Wilson tente de démontrer que le logicisme de Frege, et en particulier sa définition contextuelle, sont nés parallèlement à ces nouveaux développements de la géométrie, et que c'est dans cette perspective seulement que l'on peut vraiment comprendre l'entreprise frégéenne. Voyons comment il procède.

Face au succès de la géométrie analytique on pourrait être incité à croire qu'il y a une sorte d'universalité de l'algèbre, celui-ci permettant d'exprimer des choses qui auraient, à première vue, semblé lui être tout à fait étrangères, telles que la géométrie. Pour Poncelet[113], une telle supériorité de l'arithmétique n'est pas impliquée par cette capacité qu'il a à exprimer des relations géométriques. Que l'analyse complexe puisse exprimer les propriétés de la géométrie projective synthétique ne prouve pas qu'elle lui soit première, mais simplement qu'elle lui est isomorphe. De toute façon, beaucoup de théorèmes de l'analyse complexe n'ont aucune correspondance en géométrie. La géométrie projective est pour lui le développement naturel de la géométrie euclidienne, elle en est le fruit et ses objets sont de même nature, qu'ils soient ou non saisissables par intuition visuelle. En effet, lors d'une transformation un point au départ visible peut devenir imaginaire, or d'après la loi de persistance, ce point demeure de même nature, qu'il soit ou non visible. Mais il est difficile de se faire une idée de ce que peuvent être ces objets étranges, qui sont et ne sont pas tout à la fois.

Von Staud[114] propose une autre conception des points imaginaires de la géométrie projective qui pourrait nous apprendre beaucoup sur la façon dont Frege peut envisager les nombres qu'il a défini dans les *Grundlagen*. On pourrait (comme dans le cas du principe de Hume ou des droites parallèles) répartir le contenu de la relation (x recouvre x' par la règle $xx' = -n$) par un *concept-objet*[115] (*the* involution on L defined by $xx' = -n$). Cependant cette proposition ne marche pas tout à fait, et elle demande des améliorations qui rendent l'abstraction du concept-objet à partir de la relation beaucoup moins évidente. De la relation « x est parallèle à L » est abstrait un concept-objet qui est un point à l'infini. Mais cette méthode va générer trop de points à l'infini, puisqu'à chaque droite, y compris toutes celles qui sont parallèles à L, va correspondre un concept-objet. Ce problème est résolu par Frege en utilisant le concept-objet « extension du concept *parallèle à L* » pour représenter la relation « x est parallèle à L » alors que von Staud ne l'aborde pas vraiment et suppose qu'il y a un concept-objet, qui correspond en fait à « la direction de L », et qui est un point à l'infini.

La géométrie projective apparaît alors comme une excroissance logique de la géométrie classique. Pour prouver qu'elle n'est qu'une réorganisation non-créative de la géométrie euclidienne, tous les objets et les règles de la géométrie projective doivent être redéfinis afin de correspondre, selon les nouvelles définitions, aux objets et aux règles de la géométrie euclidienne, n'être qu'une extension de ceux-ci dans un cadre plus large. Les points à l'infini ne sont plus comme chez Poncelet réels mais invisibles, ils sont simplement abstraits. Et la partition même des objets en concrets ou abstraits devient artificielle, puisque la valeur épistémologique des uns ou des autres va dépendre du cadre dans lequel on se place.

Frege s'accorde avec Poncelet sur le fait que la géométrie ne doive rien à l'arithmétique, et que la puissance de la seconde pour décrire la première ne soit qu'une question d'isomorphie. Il considère que la géométrie se fonde sur l'intuition, comme le soutient Kant. Mais même si les *faits* de la géométrie doivent correspondre à une intuition, il se peut que parfois la logique puisse en extirper quelque objet qui ne soit pas, lui, intuitionnable, comme les points complexes invisibles.

Dans une équation de droite $Aa + Bb + Cc = 0$, le triplet (A, B, C) peut représenter une fonction (lorsqu'il est insaturé) ou une droite, donc un objet (lorsque a, b, c sont fixés). C'est cette ambivalence de l'équation qui va permettre la règle de dualité. La droite n'est plus envisagée en elle-même, mais ses coordonnées sont mis en rapport avec les autres points de l'espace.

Cette nouvelle façon de définir les objets non plus en eux-mêmes, mais d'après le rôle qu'ils jouent dans leur environnement, les relations qu'ils entretiennent avec d'autres objets se retrouve simultanément dans d'autres branches des mathématiques et c'est une tendance que l'on reconnaît également chez Frege, notamment par l'importance qu'il accorde à la définition contextuelle.

Mais s'il est possible de montrer qu'il y a une isomorphie entre la géométrie projective et les nombres complexes par exemple, il doit y avoir une structure préexistante commune aux deux systèmes. Il y a donc différents systèmes de relations auxquels ont peut appliquer les nombres parce qu'ils sont isomorphes (en fait ils conservent l'addition), et il s'agit de déterminer de quelle structure particulière doit être doté un champ de relations pour que les nombres puissent s'y appliquer.

Le projet de définition du nombre chez Frege peut donc être mis en parallèle avec celui de von Staud en géométrie, les nombres étant les concepts-objets logiquement induit de l'étude comparative de différentes familles de relations.

> « On this reading, Frege's « context principle » can be seen as serving two purposes : (1) to support the claim that conversion of a thought to one involving a concept-object does not change the underlying thought, despite the different picture of the thought that reorganization may convey; (2) to emphasize that concept-objects should be regarded as possessing the same *objective* status as any other mathematical object. »[116]

Mais ceci ne suffit pas à asseoir le logicisme de Frege. En effet, chez von Staud, les propriétés particulières des concepts-objets (les points à l'infini) dépendent des objets en relation à partir desquels ils ont été extraits (les droites parallèles). Si l'on veut savoir si trois points à l'infini A, B et C sont identiques, il suffit de comparer une seule droite caractéristique de chaque point, par exemple celle qui passe par l'origine, avec la droite caractéristique des deux autres, et il n'est pas nécessaire de s'intéresser à toutes les droites parallèles à chacune des droites caractéristiques.

De la même façon Frege aurait construit pour chaque nombre un représentant caractéristique. Pour Frege, 3 ne représente pas une abstraction faite sur l'ensemble de tous les triplets, encore moins cet ensemble lui-même. Il n'est pas non plus le seul objet possible qui puisse remplir la fonction qui lui est attribuée en arithmétique, mais il est le nombre qui appartient à toute les triades comme un point à l'infini est le point qui appartient à toutes les droites parallèles. Il n'est nul besoin d'envisager l'ensemble de ces triades en tant que tel, pas plus qu'il n'est besoin d'envisager l'ensemble de toutes les droites parallèles dans la définition d'un point à l'infini, pour le définir. Un seul concept caractéristique est suffisant, qui est le concept $\{x : x \leq 2\}$. De la même façon, pour définir le premier cardinal infini, nul n'est besoin d'un ensemble de tous les ensembles, qui donnerait prise au paradoxe de Cantor, mais seulement du concept caractéristique auquel il est associé, qui est $\{x : x \in \angle\}$. Or il a été prouvé que tous les membres de la suite naturelle sont des nombres finis, donc nous voilà bel et bien débarrassés de cet infini actuel, décidément bien trop encombrant !

Un autre avantage de cette perspective « géométrique » de la définition contextuelle de Frege est de répondre à l'objection faite à Wright par Boolos quant à l'inadéquation de l'analogie entre nombre et direction de droite, même si Wright lui-même ne semble pas envisager que son analogie ne puisse être validée que si le cadre donné à la définition contextuelle de la direction d'une droite est celui de la géométrie projective. En effet, dans ce cadre, et contrairement à celui de la géométrie euclidienne, certaines lignes (les lignes à l'infini) sont effectivement composées de directions (qu'on prend alors pour synonymes de « points à l'infini »).

Les nombres pourraient donc être considérés comme des objets-concepts, objets abstraits obtenus par extraction à partir d'une relation particulière, dans notre cas l'équinuméricité, de la même façon que le sont les points à l'infini de la relation de parallélisme, sans nous engager à considérer un infini en acte, ni un ensemble de tous les ensembles, et en évitant la circularité qui rendrait sa définition stérile. Une telle approche de la conception des nombres chez Frege associée à la réhabilitation du système proposé dans les *Grundlagen* par la substitution du principe du Hume à la loi V achève donc de montrer la pertinence du projet logiciste, même si elle nous oblige à reconsidérer celui-ci en le laissant s'éloigner sensiblement du platonisme naïf qu'on lui a souvent prêté.

CONCLUSION

Nous avons vu que l'inconsistance du système frégéen dévoilée par le paradoxe de Russel prenait prise sur la notion d'extension de concept, introduite dans les *Grundsegetze* par la loi V, et surtout au fait qu'à chaque concept soit associée une telle extension. Or nous savons que cette notion n'est pas fondamentale dans les *Grundlagen*, Frege suggérant lui-même que l'on puisse dire tout simplement *concept* à la place *d'extension de concept*. En fait, nous avons montré que c'est essentiellement pour surmonter le *Problème Jules César* que Frege fait appel à cette notion, et jamais il n'aborde directement ce qu'elle signifie. Or le même problème posé dans la définition du nombre des *Grundlagen* se retrouve dans les *Grundgesetze* à propos de l'extension. C'est donc à la résolution de ce problème que se heurte le plus durement le projet frégéen. Il semble nous mettre face à une évidence qu'a refusée Frege : notre connaissance du nombre dépasse le cadre formel que l'on peut en fournir. En effet, quand bien même on accorderait un statut analytique au principe de Hume, la saisie préanalytique du nombre semble plus forte que le principe, par exemple puisqu'elle résout immédiatement le problème Jules César en affirmant tout simplement que Jules César n'est pas un nombre. La bipartition traditionnelle analytique/synthétique ne serait peut-être pas le cadre adéquat à une analyse du nombre.

En effet, lorsque Frege introduit la notion d'analycité, c'est pour prouver l'indépendance de l'arithmétique vis-à-vis de la géométrie et de la cinématique. Mais après cela, il évite toute considération épistémologique quant aux lois logiques sur lesquelles il veut déployer l'arithmétique. Il veut montrer que la connaissance mathématique repose uniquement sur la connaissance logique, mais celle-ci n'est pas abordée. Quel type de connaissance pouvons-nous avoir des lois fondamentales de la logique ? Il lui donne un nom, 'analytique', qu'il introduit par une définition en bonne et due forme, mais ne dit rien de ce qu'elle est. Au contraire, il relègue cette question aux psychologues et signale que « nous n'avons pas besoin de nous troubler à ce propos dans l'étude de la logique ». Mais alors pourquoi a-t-il fallut *nous troubler à ce propos* dans le cas des mathématiques ? Comme le signale Kitcher[1], Frege *doit* croire que la connaissance logique est privilégiée par rapport aux autres, sans quoi son réductionnisme n'aurait aucun sens. Pour Kitcher, il n'est pas sous la responsabilité de Frege de rendre compte de cette connaissance, mais il est tentant d'avancer un peu dans les voies qui ont été ouvertes. En fait, l'introduction de l'ensemble de la logique dans la catégorie des vérités analytiques tire son intérêt de la réfutation de la théorie kantienne. Mais il ne semble pas qu'elle soit appropriée à un compte-rendu positif de ce qu'est la connaissance du nombre. En effet, en amalgamant les propositions logiques (analycité chez Frege) et les définitions (analycité chez Kant), on perd la spécificité indéniable des premières sur les secondes, dont la connaissance est certainement d'un autre genre que la simple compréhension des mots qui permet de dire que ce qui est en or est jaune par exemple.

En fait, la mystérieuse applicabilité des mathématiques à des champs si divers que la géométrie, la physique quantique, la microbiologie, etc. porte à croire qu'il existe un cadre commun, minimal, à la perception de ces phénomènes (pour la physique ou la biologie) ou à la construction de ces entités (pour la géométrie ou les mathématiques). Or l'entreprise qui consiste à expliciter ce cadre est digne d'efforts indépendamment de la question de son éventuelle analycité. De plus, nul n'est besoin pour le mathématicien de commencer chaque démonstration par la définition de zéro, puis de 1, etc., mais rejeter ce projet sur la seule base de son inefficacité ou de l'absence d'intérêt qu'il aurait pour de nouvelles démonstrations semble contredire la tâche commune des scientifiques, produire une connaissance toujours plus adéquate et plus sûre du monde qui nous entoure, ou tout du moins de la perception que nous pouvons nous en faire. Plus les hypothèses de départ seront auto-évidentes et peu nombreuses, plus les connaissances qui en découleront seront fiables. En ce sens, l'arithmétique frégéenne présente bien les avantages que l'on peut attendre d'un projet fondationnel. En effet, elle réduit « infiniment » le nombre d'hypothèses nécessaires à des démonstrations impliquant l'infini. Cependant, nous avons vu qu'une telle réduction n'est valide

---

[1] Kitcher, 1979, p. 241.

que lorsque les nombres sont considérés comme des objets, nous ne pouvons donc pas nous dispenser d'une interrogation épistémologique à leur endroit.

Que ce soit pour développer la définition contextuelle du nombre ou pour expliquer, selon les suggestions de Wilson, ce que peut être le nombre, nous avons abondamment utilisé des analogies avec la géométrie. Ceci est d'autant plus étonnant que nous venons de dire que le but premier de Frege était de prouver l'indépendance des connaissances arithmétiques vis-à-vis d'elle. Si les nombres peuvent être considérés comme des concept-objets abstraits, construits sur un processus similaire à celui de la construction des points à l'infini en géométrie projective, ne pourrions-nous pas encore nous servir de l'analogie pour envisager un mode de connaissance similaire, bien qu'indépendant, à celui de la géométrie. Il semble en effet que le principe de Hume ne puisse être réduit à l'analycité, parce que la notion de nombre demeure primitive et ne peut être dérivée de considérations purement logiques, mais également parce que l'analycité de la relation d'équinuméricité est elle aussi discutable, bien qu'il ne fût pas nécessaire de développer dans le cadre de cette recherche les enjeux de ce problème. Il nous faut de toute façon renoncer à l'analycité qu'avait en vue Frege dans ses *Grundlagen*. On peut cependant envisager une base synthétique a priori de la connaissance qui ne serait pas issue de l'intuition pure de l'espace ou du temps, mais d'une d'intuition pure logique, qui nous permette par exemple de juger sans preuve ni doute que Jules César n'est pas un nombre. Cette intuition fournirait un cadre commun à toutes les activités humaines, qu'il s'agisse du langage, des expériences sensibles ou abstraites, sorte de noyau dur de la rationalité, qui conditionnerait complètement notre rapport au réel, et l'enquête qui prendrait pour but l'explicitation de ce cadre et la dérivation du plus grand nombre de connaissances possibles de ses lois élémentaires a un double intérêt : d'un point de vue épistémologique elle permettrait de découvrir comment sont reliées les différentes vérités les unes aux autres lorsque c'est le cas, et de dévoiler si une entreprise d'unification des connaissances est viable, d'un point de vue fonctionnel, elle pourrait peut-être fournir, grâce à l'explicitation des chaînes inférentielles, de nouveaux outils, comme les concepts-objets que sont les nombres, utiles pour de nouvelles démonstrations. Nous endosserons ici l'antipsychologisme de Frege en arrêtant là notre réflexion, mais les modalités d'une telle intuition logique restent à définir : faut-il aller la chercher dans un agencement précis du monde (ce dont je doute fortement), dans la structure du langage, dans des configurations neuronales particulières, ou dans quelque autre particularité de notre perception du réel ? Cette recherche est une vaste entreprise pour laquelle les sciences cognitives fournissent aujourd'hui un nouveau cadre qui évolue et se complexifie à une vitesse vertigineuse, montrant notamment que la frontière entre logique et psychologie, si chère à Frege, est des plus lâche et tend certainement à disparaître définitivement.

NOTES

---

1 Parson, 1964
2 Wright, 1983 et Boolos, 1987
3 Boolos, 1987
4 Frege, 1884, p. 118
5 Frege, 1884, p. 122
6 L'objet de la question des distinctions *a priori/a posteriori* et analytique/synthétique.
7 Frege, 1884, p. 127
8 Frege, 1884, p. 127 : « Il est bien clair que je ne cherche pas à modifier le sens de ces expressions; je vise précisément ce que d'autres auteurs, Kant en particulier, on voulu dire par là »
9 Cela pose le problème de la conciliation entre identité et discernabilité des unités. Pour que l'on puisse énoncer des lois générales, il faut des unités identiques, mais pour obtenir la pluralité, il faut qu'elles soient discernables. Frege montre que ce problème se résout facilement dès que l'on prend soin de différencier *le* « 1 » de l'arithmétique, qui, comme l'indique le pronom défini est le nom propre d'une objet, de d'*une* unité dans la langue commune, qui est un concept.
10 Frege, 1884, p. 122
11 $2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4$
12 Leibniz, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*
13 Jevons, *The principles of science, a treatise on logic and scientific method*
14 traduction française de *Begriffsschrift*
15 Kitcher, 199, p. 241
16 Frege, 1884, p. 188
17 Frege, 1884, p. 122
18 Demopoulos, 1995, p. 6
19 Dummett, 1991, p.63
20 Dummett, 1998, p. 64
21 Frege, 1884, p. 188
22 Frege, 1884, p. 183
23 Demopoulos, 1995, p. 10
24 Frege, 1893, p. 46 (ed. 1964)
25 Frege, 1884, p. 190
26 Frege, 1884, p. 194
27 Frege, 1884, p. 194
28 Frege, 1884, §§ 71-72, pp. 197-198
29 Quine, 1955
30 Frege, 1884, §§ 74-75, pp. 200-202
31 Frege, 1884, p. 202
32 Frege, 1884, §77, pp. 202-203
33 Frege, 1884, § 78, p. 204
34 Frege, 1884, pp. 204-208
35 Le biconditionnel vient ici représenter l'expression « ne veut rien dire d'autre ». En interprétant ainsi cette expression, on doit supposer que Frege ne s'intéresse qu'au premier cardinal infini ($\aleph_0$) et pas $2^{\aleph_0}$.
36 Gauthier, 1991, p.82
37 Gauthier, 1991, p.82
38 $\varepsilon F(\varepsilon)$ et $\alpha G(\alpha)$ désignent les parcours de valeur de F et de G.
39 Lettre du 16 juin 1902, de Russell à Frege, reprise dans Van Heijenoort, 1967, p.124
40 Russell, 1910
41 Frege, 1879
42 Boolos, 1985
43 Frege, 1984, chapitres 1 à 3
44 La paternité de ces axiomes est partagée avec Dedekind, qui les découvrit indépendamment une année avant Peano, en 1888
45 Frege, 1893

[46] $(\varepsilon F(\varepsilon) = \alpha G(\alpha)) \equiv \forall a \; (Fa = Ga)$, où $\varepsilon F(\varepsilon)$ et $\alpha G(\alpha)$ désignent les parcours de vérité (ou extensions) de F et de G.

[47] Frege, 1984, note 1, p. 194

[48] Définition contextuelle qu'on appellera d'après l'expression de Boolos « Principe de Hume » : le nombre qui appartient à F est identique au nombre qui appartient à G si et seulement si les F et les G sont en correspondance biunivoque

[49] Wright, 1983

[50] Consistance relative à celle de l'analyse, voir plus bas (Boolos, 1987)

[51] Boolos et Heck, 1997

[52] Hume, *Treatise* (I, III, I, par. 5)

[53] Wright, 1983, pp. 153-159

[54] Hale, 1987

[55] Dummett, 1991

[56] Boolos, 1987

[57] Boolos et Heck, 1997

[58] Frege, 1884, p. 194

[59] Frege, 1884, p. 194

[60] Frege, 1884, p. 194

[61] Ces mots n'apparaissent pas dans le texte mais la note de bas de page nous permet de les ajouter : « Et de la même manière la proposition converse. Si le nombre qui appartient au concept F est le même que le nombre appartenant au concept G, alors le concept F est équinumérique au concept G. » (Frege, 1884, p. 199.)

[62] Frege, 1884, p. 199

[63] Frege, 1884, p. 199

[64] Frege, 1884, p. 198

[65] Une caractérisation plus concise et formelle de *FA* est donnée en annexe à la fin du texte

[66] Boolos, 1985

[67] Frege, 1979

[68] Boolos, 1987

[69] Boolos, 1987, p. 184

[70] Wright, 1983

[71] Burgess, 1984

[72] Burgess, 1987, pp. 187-189

[73] Boolos, 1987, p. 191

[74] Boolos, 1995, pp. 294-300

[75] Boolos, 1987, p.192.

[76] Wright, 1983. Burgess 1984. Heck 1993. Boolos 87

[77] Poincaré, 1908, §VII

[78] Bell, 1993, pp. 21-28

[79] Dummett, 1991, p. 133

[80] généralement désignée comme la diagonalisation de Cantor

[81] Dummett, 1991, pp. 226-227

[82] Dedekind, 1888, théorème 66, cité dans Boolos 1990, p 202

[83] Bell, 1993, pp. 21-26

[84] Boolos, 1990

[85] Bourbaki, 1963 (lemme 3, §2, Ch. 3)

[86] Kleene, 1952, p. 42

[87] Nouveaux Essais IV, §10

[88] Wright, 1983. Hodes, 1984

[89] Boolos 1997

[90] Poincaré, 1908, §VII

[91] Frege, 1884, §§ 21-26, pp. 147-152

[92] Frege, 1884, p. 152

[93] cité par Frege dans Frege, 1884, p.152

[94] Wright, 1983

[95] Frege, 1884, p. 192

[96] Wright, 1998, p. 86

[97] Field, 1984, p. 639

[98] Wright considère que c'est chose faite dans (Dummett, 1973, chap. 4)
[99] Kitcher, 1979
[100] Friedman, 1990
[101] Frege, 1884, p. 190
[102] Frege, 1884, §§ 71-72, pp. 197-198
[103] Il y a un certain parallélisme entre le principe de Hume et la loi V. Déjà le problème Jules César leur était posé dans les mêmes termes et il était résolu de la même façon, en donnant à l'énoncé problématique le statut d'axiome. Maintenant c'est dans le même sens que l'équivalence pose problème, et pour les mêmes raisons, elle présuppose que chaque concept possède un nombre (ou une extension).
[104] Wright, 1998, p.99
[105] Où le contenu particulier de la relation à droite du biconditionnel est distribué sur ses membres à gauche du biconditionnel.
[106] Wright 1998, pp. 87-89
[107] Demopoulos, 1998
[108] Boolos, 1997
[109] Tappenden, 1995, p. 428
[110] Frege, 1884, p. 212
[111] Frege, 1884, pp. 121-122
[112] Wilson, 1992
[113] Dans son *Traité des propriétés projectives des figures*
[114] Dans *Die Geometrie der Lage*, en 1847
[115] Wilson, 1992, p.161
[116] Wilson, 1992, p. 169

BIBLIOGRAPHIE :

- Bell, J. L. (1993) appendice de « Frege's theory of concepts and objects and the interpretation of second-order logic », *Philosophia mathematica* (series III), 1 (1993), pp. 149-153.
- Boolos, G. (1985) « Reading the Begriffsschrift », *Mind*, 94, pp. 331-334.
- Boolos, G. (1987) « The Consistency of Frege's *Foundations of Arithmetic* », repris dans (Boolos 1998, pp. 183-202).
- Boolos, G. (1990) « The Standard of equality of numbers », repris dans (Boolos 1998, pp. 202-220).
- Boolos, G. (1995) « Frege's Theorem and the Peano Postulates », repris dans (Boolos 1998, pp. 291-300).
- Boolos, G. (1996) « On the proof of Frege's theorem », repris dans (Boolos 1998, pp. 275-291).
- Boolos, G. (1997) « Is Hume's Principle Analytic », repris dans (Boolos 1998, pp. 301-314)
- Boolos, G. et Heck, R. G. (1997) « *Die Grundlagen der Arithmetik*, §§82-83 », repris dans (Boolos 1998, pp. 315-339).
- Boolos, G. (1998) *Logic, Logic, and Logic...*, édité par R. C. Jeffrey, Harvard University Press, Cambridge, 1998.
- Bourbaki, N. (1963) *Théorie des ensembles*, seconde édition, Hermann, Paris, 1963.
- Burgess, J. P. (1984) « Review of Crispin Wright's *Frege's conception of numbers as Objects* », *Philosophical Review*, 93, pp. 497-513.
- Dedekind, R. (1888) *Was sind und was sollen die Zahlen?*, traduit en anglais , « The Nature and Meaning of Numbers », dans *Essays of the Theory of Numbers*, Chicago, 1901.
- Demopoulos, W. (1995) *Frege's Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge, 1995.
- Demopoulos, W. (1998) « The philosophical Basis of Our Knowledge of Number », *Noûs*, Vol. 32, No. 4 (1998), pp. 481-503.
- Dummett, M. (1973) *Frege : Philosophy of Language*, Londres : Duckworth, 2$^{\text{ième}}$ édition, 1981.

- Dummett, M. (1991) *Frege : Philosophy of Mathematics*, Harvard University Press, Cambridge, 1991.
- Dummett, M. (1991) « Le principe du contexte : au cœur de la philosophie de Frege », dans *Frege, logique et philosophie*, Harmattan, Paris, 1998, pp. 63-84.
- Engel, P. (1998) « L'antipsychologisme est-il irrésistible? », *Frege, logique et philosophie*, Harmattan, Canada, 1998, pp. 211-226.
- Field, H. H. (1984) « Critical Notice of *Frege's Conception of Number as Objects* », *Canadian Journal of Philosophy* 14, 1984, pp. 637-662.
- Frege, G. (1873) « On a Geometrical Representation of Imaginary Forms in the Plane » dans *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*, Brian McGuiness (ed), Basil Blackwell, Oxford.
- Frege, G. (1879) *Begriffsschrift, eine des arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle : Louis Nebert.
- Frege, G. (1884) *Les fondements de l'arithmétique, recherche logico-mathématique sur le concept de nombre*, traduit et noté par C. Imbert, ed. Seuil, Paris 1969.
- Frege, G. (1893) *The Basic Laws of Arithmetic*, édité, traduit et introduit par Furth M., University of California Press, Berkeley, 1964.
- Friedman, M. (1990) « Kant on concepts and intuitions in the mathematical sciences », *Synthese* 84, 1990, pp. 213-257.
- Gauthier, Y. (1991) *De la logique interne*, J. Vrin, Paris, 1991.
- Hale, B. (1987) *Abstract Objects*, Blackwell, Oxford, 1987.
- Heck Jnr, R. G. (1995) « The development of Arithmetic in Frege's *Grundgesetze des Arithmetik* » dans (Demopoulos, 1995, pp. 295-333).
- Kitcher, P. (1979) « Frege's epistemology », *The Philosophical Review*, Avril 1979, pp. 235-262.
- Parsons, C. (1964) « Frege's Theory of Number », repris dans (Demopoulos, 1995, pp. 182-208).
- Quine, W. V. O. (1955) *Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge, 1955.
- Tappenden, J. (1995) « Extending Knowledge and "Fruitful Concepts": Fregean Themes in the Foundations of Mathematics », *Noûs*, Vol. 29, No. 4. (Dec., 1995), pp. 427-467.

- William, M. (1992) « Frege : The Royal Road to Geometry », *Noûs*, Vol. 26, No. 2 (1992), pp. 149-180.
- Wright, C. (1983) *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Scots Philosophical Mongraph Number Two, Aberdeen, 1983.
- Wright, C. (1990) « Field and Fregean Platonism », dans A. D. Irvine *dir.*, *Physicalism in Mathematics*, Dordrecht, 1990, pp. 73-93, traduit en français dans *Frege, logique et philosophie*, Harmattan, Canada, 1998, pp. 85-109.

ANNEXE : description de *FA*

- Les variables de *FA* sont de trois sortes :
- les variables du premier ordre qui sont les objets (a, b, c, ...)
- les variables unaires du second ordre qui sont les concepts (F, G, H, ...)
- les variables binaires du second ordre qui sont les relations (ϕ, φ, ψ, ...)

Le seul symbole non-logique est η, qui associe un objet à un concept : $n\eta$F.

- Les formules atomiques de *FA* sont donc de l'une des trois formes suivantes : Fx, $x\phi y$, $n\eta$F.
- Les axiomes de *FA* sont les mêmes que ceux de la logique du second ordre :

Loi I : $p \supset (q \supset p)$, l'axiome de simplification.

Loi II : $(\forall x\ f(x)) \supset f(x)$, l'axiome de spécification universelle pour le second niveau.

Loi III : $(y = x) \supset (f(y) = f(x))$, l'axiome de substitution des identiques.

Loi IV : $\neg(p \equiv \neg q) \supset (p \equiv q)$, une formulation particulière du tiers exclu.

L'axiome d'extension n'est pas présent [Loi V : $(\varepsilon f(\varepsilon) = \alpha g(\alpha)) \equiv \forall x\ (f(x) = g(x))$]

Loi VI : $y = (\iota x)(i = x)$, l'opérateur de description.

Auxquels on ajoute un axiome non-logique qui est le principe de Hume : $(\#F = \#G) \equiv (F \approx G)$, où # et $\approx$ sont définis comme suit :

* $(\#F = n) \equiv n\eta F$

* $(F \approx G) \equiv \exists\Phi[\forall x\ (Fx \supset \exists y\ (Gx \wedge x\Phi y)) \wedge \forall y\ (Gy \supset \exists x\ (Fx \wedge x\Phi y)) \wedge \forall a\forall b\forall d\ (((d\Phi a \wedge d\Phi b) \supset (a = b)) \wedge ((a\Phi d \wedge b\Phi d) \supset (a = b)))]$.

- Les règles de déduction dans *FA* sont celles de la logique du second ordre :

Le modus ponens, le raisonnement par contraposition, le syllogisme hypothétique et la concentration des antécédents.