

2m11.2861.3

Université de Montréal

Un modèle bi-niveau pour la gestion du revenu en transport aérien

par

Jean-Philippe Côté

Département d'informatique et de recherche opérationnelle

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en informatique

Avril 2001

© Jean-Philippe Côté, 2001



QA

3

154

2001

N. 009

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Un modèle bi-niveau pour la gestion du revenu en transport aérien

présenté par

Jean-Philippe Côté

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Pierre L'Écuyer, président du jury
Patrice Marcotte, directeur de recherche
Gilles Savard, codirecteur de recherche
Michael Florian, membre du jury

Mémoire accepté le

Mes capacités se bornent à l'examen des choses.

Arthur de Gobineau, *Lettres à la princesse Toqué*

And the actual retail price is...

Bob Barker, *The Price is Right (CBS)*

Sommaire

La Gestion du Revenu est une méthodologie de plus en plus répandue dans l'industrie du transport aérien. Les grandes compagnies aériennes font appel à la Gestion du Revenu afin d'optimiser l'utilisation de la capacité de leurs appareils, dans le but de maximiser les revenus et de diminuer les pertes encourues lorsque des unités de capacité demeurent invendues. La Gestion du Revenu regroupe plusieurs problèmes distincts mais interdépendants qui sont traditionnellement traités séparément. Ce mémoire s'intéresse particulièrement à deux de ces problèmes, soit l'allocation de la capacité à différents segments de la clientèle et la tarification des unités de capacité. Une série de nouveaux modèles basés sur le paradigme de la programmation mathématique bi-niveau et permettant de résoudre ces deux problèmes simultanément sont présentés. On décrit aussi un logiciel développé dans le cadre de ce mémoire et pouvant résoudre différents problèmes de Gestion du Revenu et de tarification. Des résultats numériques obtenus en utilisant un jeu de données provenant de l'industrie sont présentés.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Sommaire | v |
| Remerciements | xi |
| 1 Introduction | 1 |
| 2 La Gestion du Revenu | 5 |
| 2.1 Historique | 5 |
| 2.2 Conditions nécessaires à l'application de la G.d.R. | 7 |
| 2.3 Méthodes de résolution | 9 |
| 2.4 Revue bibliographique | 10 |
| 2.5 G.d.R. en Transport Aérien | 13 |
| 2.6 Problématique | 14 |
| 3 La programmation bi-niveau | 16 |
| 3.1 Revue bibliographique | 16 |
| 3.2 Principes de base | 18 |
| 4 Définitions, concepts et structure de données | 24 |
| 4.1 Définitions | 24 |
| 4.2 Structure de données sous-jacente | 25 |
| 4.3 Hypothèses | 29 |
| 4.3.1 Connaissance des vols | 29 |
| 4.3.2 Segmentation de la clientèle | 30 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.3.3 | Disponibilité des prix de la compétition | 31 |
| 4.3.4 | Capacité des vols de la compétition | 31 |
| 5 | Présentation des modèles | 33 |
| 5.1 | 1 groupe d'usagers, 1 classe tarifaire, 1 critère (111) | 33 |
| 5.1.1 | Hypothèses | 34 |
| 5.1.2 | Formulation explicite | 34 |
| 5.1.3 | Formulation compacte (matricielle) et transformations | 35 |
| 5.1.4 | Interprétation économique des variables duales | 39 |
| 5.1.5 | Formulation mixte | 40 |
| 5.2 | N groupes d'usagers, 1 classe tarifaire, 2 critères ($N12$) | 42 |
| 5.2.1 | Hypothèses | 42 |
| 5.2.2 | Formulation explicite | 42 |
| 5.2.3 | Formulation compacte (matricielle) et transformations | 44 |
| 5.2.4 | Formulation mixte | 48 |
| 5.3 | N groupes d'usagers, N classes tarifaires, trois critères ($NN3$) | 49 |
| 5.3.1 | Formulation compacte (matricielle) et transformations | 51 |
| 5.3.2 | Formulation mixte | 55 |
| 6 | Aspects informatiques | 57 |
| 6.1 | Exigences | 57 |
| 6.2 | Architecture | 59 |
| 6.3 | AirTOLLER : TOLLER pour le transport aérien | 63 |
| 6.3.1 | Particularités de AirTOLLER | 63 |
| 6.3.2 | Modèle de données aériennes | 64 |
| 7 | Tests et résultats numériques | 68 |
| 7.1 | Analyse du temps de résolution | 68 |
| 7.2 | Analyse de sensibilité aux paramètres | 70 |
| 7.3 | Analyse détaillée des résultats | 77 |

| | |
|---|-----------|
| <i>TABLE DES MATIÈRES</i> | viii |
| 8 Travaux futurs | 86 |
| 8.1 Décomposition du réseau spatio-temporel | 86 |
| 8.2 Modélisation des aller-retours | 89 |
| 8.3 Modélisation des restrictions temporelles | 90 |
| 9 Conclusion | 92 |
| Bibliographie | 95 |

Liste des tableaux

| | | |
|------|--|----|
| 7.1 | Comparaison du temps de résolution des différents modèles. | 69 |
| 7.2 | Comparaison du temps de résolution de différentes instances. | 70 |
| 7.3 | Valeur des paramètres pour l'instance 1. | 72 |
| 7.4 | Résultats de l'instance 1. | 72 |
| 7.5 | Valeur des paramètres pour l'instance 2. | 74 |
| 7.6 | Résultats de l'instance 2. | 74 |
| 7.7 | Valeur des paramètres pour l'instance 3. | 75 |
| 7.8 | Résultats de l'instance 3. | 75 |
| 7.9 | Valeur des paramètres pour l'instance 4. | 76 |
| 7.10 | Résultats de l'instance 4. | 76 |
| 7.11 | Valeur des paramètres. | 77 |
| 7.12 | Résultats obtenus sur le marché AAA-ZZZ. | 79 |
| 7.13 | Résultats obtenus sur le marché AAA-WWW. | 80 |
| 7.14 | Résultats obtenus sur le marché AAA-VVV. | 82 |
| 7.15 | Résultats obtenus sur le marché AAA-YYY. | 83 |
| 7.16 | Résultats obtenus sur le marché AAA-XXX. | 84 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Un arc de segment $a \in A$ reliant les nœuds (τ^1, χ^1) et (τ^2, χ^2) | 26 |
| 4.2 | Un arc d'escale $e \in E$ reliant les nœuds (τ^2, χ^2) et (τ^2, χ^3) | 27 |
| 4.3 | Un vol composé des segments a_1 et a_2 entrecoupés par l'escale e | 28 |
| 6.1 | Schéma architectural du logiciel TOLLER. | 61 |
| 6.2 | Diagramme ER du modèle de données aériennes. | 66 |
| 8.1 | Un réseau non connexe et décomposable en sous-réseaux | 87 |
| 8.2 | Un vol aller-retour avec un arc de séjour | 89 |
| 8.3 | Un vol aller-retour avec un arc de vente | 91 |

Remerciements

Je désire remercier mon directeur Patrice Marcotte et mon co-directeur Gilles Savard pour leur intérêt, leur patience et leur engagement dans cet ambitieux projet ainsi que pour la confiance qu'ils m'ont témoignée au cours de la réalisation de ces travaux. Je suis également reconnaissant envers la société Air Canada pour l'appui accordé à ce projet de recherche. Les données et informations qu'ils nous ont fournies ont été très utiles et nous ont permis de développer un modèle réaliste. Je tiens à remercier plus particulièrement Gillian Mann, analyste chez Air Canada, pour son intérêt et sa disponibilité.

Chapitre 1

Introduction

Née entre les deux guerres et réservée alors à une riche élite, l'aviation civile a connu une croissance exponentielle à partir de 1945. Cette année-là, environ 9 millions de voyages par avion furent effectués, alors que ce nombre dépassait 1,5 milliard en 1999. Plusieurs facteurs expliquent cette croissance. Le plus important est sans contredit le développement technologique ininterrompu depuis la deuxième guerre mondiale ayant permis la production d'avions de plus en plus gros, confortables, économiques et possédant un plus grand rayon d'action. L'apparition de marchés lointains, l'émergence de nouveaux pays sur la scène économique, la mondialisation de l'économie, le développement dans certains pays riches d'une classe sociale certes vieillissante mais aisée, de plus en plus tournée vers les loisirs et en particulier vers le tourisme sont d'autres facteurs ayant eu une influence certaine. La déréglementation de cette industrie à partir des années 70 a grandement stimulé la concurrence et engendré une baisse des prix, entraînant ainsi une augmentation de l'achalandage. On estime d'ailleurs que le passager d'un vol régulier aura payé son billet 70% moins cher qu'il y a 20 ans, après actualisation des devises.

Toutes ces réalités font en sorte qu'aujourd'hui l'industrie du transport aérien, bien que relativement jeune, est l'un des secteurs les plus importants de l'économie mondiale. À titre d'exemple, en 1998, cette industrie employait plus de 28 millions de personnes réparties dans pratiquement tous les pays de la planète et a engendré une activité économique dont la valeur est estimée à 1360 milliards de dollars US, soit environ 4% de la

valeur totale générée par l'ensemble des secteurs d'activité économique à l'échelle mondiale. Si on ajoute à cela les chiffres de l'industrie du tourisme, dont l'aviation est sans contredit le moteur principal, on obtient environ 200 millions d'emplois à l'échelle de la planète et une activité économique dont la valeur est estimée à 3500 milliards de dollars US, soit environ 12% de la valeur totale. L'industrie du transport aérien revêt donc une importance capitale dans l'économie globalisée du 21^e siècle.

Dans cet univers déréglementé et hautement concurrentiel, les grands transporteurs aériens, dont plusieurs jouissaient il y a encore quelques décennies de monopoles nationaux, doivent faire preuve d'imagination et de dynamisme afin de rentabiliser au maximum leurs investissements très élevés. L'industrie du transport aérien possède en effet une caractéristique qui la différencie des autres industries de service : les coûts fixes encourus pour offrir le service (concrètement un siège sur un vol) sont considérables, tandis que les coûts variables encourus lorsque ce service est vendu sont négligeables. Le ciblage et la différenciation des produits, l'apparition de programmes de fidélisation ou encore des ventes spectaculaires sur certaines catégories de sièges ne sont que les aspects visibles des tactiques utilisées par les grandes compagnies aériennes afin de faire face aux nouveaux défis de l'industrie. En réalité, plusieurs d'entre elles utilisent une stratégie connue sous le nom de 'Gestion du Revenu' (G.d.R. dans la suite), traduction libre de l'expression américaine *Yield Management*, qui est rapidement devenue un *buzzword* dans cette industrie. Comme nous le verrons, ce terme général désigne un ensemble de méthodes scientifiques utilisées pour résoudre un certain nombre problèmes distincts mais apparentés et interdépendants, chacun représentant une possibilité d'optimisation du revenu.

Le présent mémoire s'intéresse plus longuement à deux de ces problèmes, soit l'allocation de la capacité à différents groupes d'utilisateurs ainsi que la tarification des unités de capacité, et propose une nouvelle approche permettant de les résoudre de façon simultanée. À notre connaissance, très peu de travaux abordant directement et conjointement ces deux aspects du problème de G.d.R. ont été effectués à ce jour. L'approche que nous proposons ici possède donc un caractère novateur. Cette nouvelle stratégie de résolution est basée sur la théorie de la programmation mathématique bi-niveau, une branche

de la recherche opérationnelle ayant fait l'objet d'un intérêt grandissant au cours des dernières années. Précisons que les travaux présentés ici s'inscrivent dans le cadre d'un projet de recherche important sous la gouverne du rcm_2 et soutenu par la société Air Canada. Cette dernière fournit entre autres des données réelles utilisées afin de tester et de valider les modèles mathématiques étudiés. Une des tâches entourant la rédaction de ce mémoire était d'ailleurs le développement d'une infrastructure logicielle capable de traiter efficacement des quantités appréciables de données (de l'ordre de plusieurs centaines de méga-octets). Ce travail de modélisation informatique et de programmation fait donc partie intégrante de ce mémoire de maîtrise et sera présenté au même titre que le modèle mathématique.

Ce mémoire est organisé comme suit. Le chapitre 2 présente la G.d.R. de façon détaillée. On y retrouve un bref historique de cette technique ainsi qu'une revue bibliographique sélective résumant quelques parutions générales de même que certains articles plus spécifiques et reliés de plus près aux problèmes auxquels nous nous attarderons. On y énumère aussi les conditions nécessaires à l'application de la G.d.R. et on présente les problèmes qui lui sont reliés. Le chapitre 3 introduit la programmation mathématique bi-niveau, sur laquelle sera basé le modèle développé dans les chapitres subséquents. On y retrouve encore une fois une revue bibliographique sélective présentant quelques articles généraux sur ce sujet de même que d'autres articles plus spécialisés traitant d'applications de la programmation mathématique bi-niveau à des problèmes apparentés à ceux de la G.d.R. On en introduit aussi les principes généraux et on présente la notation utilisée lors du développement du modèle. Le chapitre 4 introduit certains concepts essentiels à la compréhension du modèle. On y décrit notamment la structure de données sous-jacente à notre modèle de façon formelle. On y présente aussi les hypothèses posées lors du développement du modèle, lesquelles sont directement reflétées dans les différentes formulations que nous proposons. Le chapitre 5 présente le modèle mathématique, en partant d'un cas simpliste pour aboutir à un cas plus réaliste, en ajoutant à chaque étape de nouveaux éléments venant l'enrichir.

Le chapitre 6 traite des aspects informatiques reliés à l'application du modèle développé au chapitre 5 sur des données réelles. On y présente les exigences que le programme

que nous avons développé doit satisfaire, ainsi que son architecture et son fonctionnement général. Le chapitre 7 présente les résultats obtenus avec ce programme. Précisons toutefois qu'afin de respecter une entente de confidentialité avec la société Air Canada, les résultats présentés dans ce document furent obtenus à l'aide de données tarifaires fictives. Finalement, le chapitre 8 suggère de nouvelles avenues non explorées par le présent mémoire mais pouvant faire l'objet de travaux futurs.

Chapitre 2

La Gestion du Revenu

Ce chapitre présente la Gestion du Revenu dans une optique propre au transport aérien et passe en revue quelques articles généraux publiés à ce sujet, ainsi que certains articles plus spécialisés se rapportant aux problèmes auxquels nous nous intéressons ici. Elle illustre aussi la problématique abordée dans ce mémoire et présente les solutions proposées.

2.1 Historique

La Gestion du Revenu peut être décrite comme un ensemble de méthodes et de technologies utilisées afin de gérer de façon profitable la capacité dans certaines industries bien ciblées. De façon informelle, nous pouvons dire que la G.d.R. est utilisée afin “d’allouer la bonne unité de capacité au bon consommateur et au bon prix afin de maximiser le revenu”.

L’étude scientifique de la G.d.R. remonte aux années 60. La très grande majorité des travaux se concentraient alors sur la surréservation ¹. Les travaux de Rothstein [Rot71] sont d’ailleurs souvent cités comme exemple des premiers développements dans ce domaine.

Au début des années 70, certaines compagnies aériennes commencèrent à différencier

¹La *surréservation* en transport aérien est la pratique qui consiste à accepter plus de réservations que la capacité le permet, en sachant qu’une certaine partie de ces réservations seront annulées ou encore que les passagers ne se présenteront pas, dans le but de diminuer le nombre de sièges vides au décollage.

leurs produits et à offrir des billets à prix réduit, auxquels étaient cependant associées des restrictions. Un des pionniers dans ce domaine fut BOAC (British Overseas Airways Corporation, aujourd'hui British Airways), qui dès 1971 offrait des tarifs *earlybirds* sur les billets réservés au moins 21 jours à l'avance. Cette innovation permettait à la compagnie de tirer des revenus de certains sièges qui autrement seraient demeurés vides au décollage. Elle posait cependant le problème du calcul de la quantité de sièges qui devaient être protégés pour les passagers les plus payants achetant leurs billets plus tard. Littlewood, alors à l'emploi de BOAC, proposa un ensemble de règles permettant un contrôle plus strict des inventaires de sièges en présence de deux classes tarifaires [Lit72]. Ces règles utilisaient l'information statistique historique sur les habitudes de réservation des passagers de BOAC, qui était disponible grâce au développement et à la mise en place de systèmes de réservation informatisés à peu près à la même époque. Les transporteurs américains emboîtèrent le pas et se mirent eux aussi à offrir des tarifs réduits pour certaines classes de billets. La première compagnie majeure à le faire fut American Airlines, qui proposa à partir de 1977 des tarifs *super savers* sur certaines catégories de billets.

Le développement de la G.d.R. fut grandement stimulé par la déréglementation du transport aérien aux États-Unis vers la fin des années 70. Cette période vit l'émergence de nouveaux petits transporteurs aériens écoulant leurs billets à prix moindre que les transporteurs traditionnels, en offrant toutefois des services et des avantages plus limités que ceux-ci. Afin de faire face à ces nouveaux compétiteurs, les grandes compagnies aériennes durent adopter de nouvelles stratégies. Celles qui ne l'avaient pas encore fait commencèrent à différencier leurs produits et à offrir certains sièges à rabais. Le problème auquel devaient alors faire face ces grandes compagnies était encore une fois le calcul de la quantité de sièges devant être offerts à rabais, en s'assurant de conserver une rentabilité élevée sur les sièges les plus payants. La solution préconisée par plusieurs fut d'appliquer de façon plus systématique les techniques de G.d.R.

Remarquons que les développements mentionnés ci-haut concernent exclusivement le contrôle d'inventaire et l'allocation de sièges à différentes classes tarifaires. Dans chaque cas, on suppose que le prix est connu. Toutefois, depuis le début des années 80, de

nombreuses recherches s'intéressant à la tarification optimale dans le domaine aérien ont été effectuées. Comme nous le verrons dans les sections subséquentes, la tarification est aujourd'hui considérée comme un aspect à part entière du problème de G.d.R., au même titre que la surréservation ou l'allocation de sièges.

Bien qu'elle tire son origine d'un problème propre au transport aérien, la G.d.R. fut aussi appliquée à d'autres secteurs d'activité, comme par exemple l'industrie hôtelière et le transport de marchandises (qu'il soit routier, ferroviaire ou encore maritime). Ces industries, bien que différentes du transport aérien, partagent certaines caractéristiques justifiant l'application d'une stratégie de G.d.R.

Cet intérêt toujours croissant des milieux industriels combiné aux développements technologiques des dernières décennies, qui permettent l'utilisation de modèles mathématiques de plus en plus sophistiqués et exigeants du point de vue informatique, font en sorte que la G.d.R. est aujourd'hui un sujet de recherche dynamique auquel s'intéressent de nombreux chercheurs provenant de domaines très variés. À titre d'exemple, la revue *Transportation Science* [Vol. 33, No 2, 1999] et le *Journal of the Operational Research Society* [Vol. 50, No 11, 1999] publiaient récemment des numéros spéciaux consacrés entièrement ou en partie à la G.d.R.

2.2 Conditions nécessaires à l'application de la G.d.R.

Comme mentionné ci-dessus, la G.d.R. est utilisée dans plusieurs industries très différentes à première vue mais qui partagent certaines caractéristiques justifiant son application. Selon Kimes [Kim90], ces caractéristiques sont :

1. Capacité fixe

La G.d.R. s'adresse avant tout aux industries ayant une capacité (ou un inventaire) fixe, ou ne pouvant être modifié qu'à fort coût, de façon planifiée. Par exemple, reconfigurer la cabine d'un avion afin d'y ajouter de nouveaux sièges pour accommoder une demande plus grande que prévue sur un vol particulier est irréalisable en pratique.

2. Inventaire périssable

Si une unité de capacité n'est pas vendue à une date fixe, alors elle est perdue et n'engendre pas de revenus.

3. Produits vendus à l'avance

Les produits, qui sont en fait des unités de capacité, sont vendus, ou à tout le moins réservés, avant la date de leur consommation.

4. Coût fixe élevé

Le coût encouru pour offrir une unité de capacité est élevé, que cette unité soit vendue ou non.

5. Coût variable bas

Le coût supplémentaire encouru par la vente d'une unité de capacité autrement inutilisée est faible par rapport au coût total. Par exemple, il est très dispendieux de faire décoller un avion, qu'il soit rempli ou non. Cependant, la vente d'un siège additionnel amène des coûts supplémentaires négligeables, lesquels se limitent à la manutention de quelques bagages, à un repas et à une petite quantité de carburant (environ 2 litres de kérosène supplémentaires par passager par 100 kilomètres pour un avion moderne doté de moteurs turbofans).

6. Demande variable dans le temps

La demande est stochastique.

Selon [Kim90] et [WB92], en plus de posséder ces caractéristiques essentielles, les entreprises qui désirent appliquer une stratégie de G.d.R. doivent disposer d'informations sur :

1. La segmentation du marché

Les entreprises doivent être en mesure d'identifier les différentes catégories de consommateurs et classer ces derniers selon leur propension à payer plus pour un meilleur service. Cette segmentation est obtenue à l'aide de restrictions ou 'barrières' souvent artificielles (voir [Bot96]), qui empêchent les consommateurs disposant de ressources financières plus appréciables et ayant une propension à payer plus grande d'acheter des produits à rabais. Un exemple de ces restrictions en transport

aérien est l'obligation (pour certaines classes de billets) que s'écoule au moins un samedi entre le vol d'aller et le vol de retour.

2. La demande historique et les modes de réservation

Les entreprises doivent avoir à leur disposition des données statistiques sur la demande et les habitudes de réservation pour les différentes catégories de consommateurs afin de pouvoir estimer la demande future.

3. Les prix en vigueur

Les entreprises doivent continuellement et en temps réel connaître les prix offerts par leurs concurrents.

2.3 Méthodes de résolution

Traditionnellement ([Kim90]), quatre types de méthodes sont utilisées pour résoudre des problèmes de G.d.R. :

1. Méthodes basées sur la programmation mathématique.
2. Méthodes basées sur les théories économiques.
3. Méthodes basées sur l'analyse de courbes de seuil et de modèles de revenus marginaux.
4. Méthodes utilisant des systèmes experts et faisant appel à la théorie de l'intelligence artificielle. ².

Jusqu'au début des années 90, il semble que les deuxième et troisième approches aient été les plus populaires, notamment à cause de la puissance informatique et du temps de solution considérables requis par les approches basées sur la programmation mathématique et l'intelligence artificielles ([Kim90]). Cependant, les récentes innovations dans ces domaines, tant sur le plan théorique que technique, ainsi que l'augmentation de la puissance des ordinateurs, font en sorte que ces méthodes sont maintenant largement utilisées.

²Un *système expert* est un programme informatique qui tente d'imiter le raisonnement logique d'un humain expert dans le domaine. Ces systèmes, basés sur l'évaluation de prédicats logiques, sont typiquement implantés à l'aide de langages spécialisés tels que PROLOG.

Il est important de remarquer que les problèmes de G.d.R. doivent être résolus de façon continue et répétée. Donc, toute solution doit être obtenue relativement rapidement, efficacement et à un coût raisonnable. Ainsi, l'optimalité d'une solution, bien que souhaitable, n'est pas absolument nécessaire, en autant qu'une solution de qualité acceptable puisse être obtenue rapidement ([Kim90], [SLD92]).

2.4 Revue bibliographique

Relativement peu d'articles généraux sur la G.d.R. en transport aérien ont été publiés dans des revues scientifiques. Dans un article récent, McGill et Van Ryzin [MVR99] présentent la G.d.R. et ses principaux aspects et font en parallèle une revue bibliographique assez poussée citant un bon nombre d'articles scientifiques marquants publiés depuis les années 50. Kimes [Kim90] présente la G.d.R. de façon concise, en énumère les caractéristiques principales et en vulgarise les concepts fondamentaux. Smith, Leimkuhler et Darrow [SLD92] présentent une étude de cas intéressante en exposant les méthodes de G.d.R. développées par le transporteur aérien American Airlines pour son propre compte. Leur article contient cependant beaucoup d'exemples et une terminologie propre à cette compagnie et s'embourbe souvent dans des détails techniques, y perdant ainsi en généralité et en clarté. L'article de Weatherford et Bodily [WB92] aborde quant à lui le problème de G.d.R. de façon scientifique et présente une taxinomie basée sur la difficulté algorithmique des sous-problèmes s'y rattachant. Botimer [Bot96] aborde les implications commerciales et sociales de l'utilisation de la recherche opérationnelle dans la résolution de problèmes de G.d.R. Finalement, le livre édité par Yeoman et Ingold [IA97] expose succinctement plusieurs aspects de la G.d.R. (économiques, commerciaux, légaux, etc.) et présente une multitude d'études de cas, la plupart se rapportant à l'industrie hôtelière et touristique.

Comme ce mémoire s'intéresse à deux aspects précis du problème de G.d.R., soit l'allocation de la capacité et la tarification, nous allons aussi passer en revue quelques articles plus spécialisés traitant spécifiquement de ces deux aspects, qui ont été jusqu'à maintenant abordés presque exclusivement de façon séparée. Ces articles récents reflètent

les derniers travaux accomplis dans le domaine.

L'allocation de la capacité peut être abordée selon différents angles. Un grand nombre d'articles s'intéressent au cas simple où les vols sont à segment unique. C'est notamment ce que font Lautenbacher et Stidham [LS99] en considérant des vols à segment unique sur un seul marché où la demande est stochastique et plusieurs classes tarifaires sont offertes. Ces auteurs établissent une distinction entre le cas 'statique', où les réservations s'effectuent dans une seule classe tarifaire jusqu'à ce que cette classe soit complète et qu'une autre soit ouverte, et le cas 'dynamique', où les réservations sont effectuées de façon aléatoire dans les différentes classes tarifaires, toutes les classes étant accessibles. Dans les deux cas, la question est de déterminer à tout moment si une réservation dans une classe particulière devrait être acceptée ou rejetée, de façon à maximiser le revenu global sur l'ensemble des classes tarifaires pour la durée de la période pendant laquelle les réservations sont acceptées. Chaque problème est modélisé à l'aide d'un processus de décision markovien, lequel engendre une équation récursive résolue par des techniques de programmation dynamique. Les auteurs démontrent aussi que les approches 'statique' et 'dynamique' ne sont en fait que des cas spéciaux d'un modèle markovien unifié.

Le problème de l'allocation de la capacité sur des vols à segment unique reflète cependant de moins en moins la réalité du transport aérien. En effet, depuis les années 80, la plupart des grandes compagnies ont adopté un système de *Hub and Spoke*, c'est-à-dire un réseau dans lequel la majorité des vols transitent par un seul et même aéroport central (le *hub*), d'où les passagers empruntent d'autres vols vers leur destination finale. Un modèle réaliste d'allocation de la capacité se doit donc de prendre en considération les itinéraires composés de plusieurs segments entrecoupés d'escales. Wang, Koppelman et Daskin [WKD93] considèrent ce problème multi-segment mais se restreignent à une seule classe tarifaire. Ils proposent un programme mathématique non linéaire à variables entières s'appuyant sur une structure de réseau et indiquent qu'en pratique ce programme est résolu par des méthodes heuristiques, en raison de sa trop grande complexité.

Des travaux subséquents ont aussi utilisé des modèles de programmation mathématique afin de traiter l'allocation de la capacité sur des itinéraires multi-segments et en présence de plusieurs classes tarifaires. Toutefois, comme le mentionnent McGill et Van

Ryzin [MVR99], ces méthodes basées sur la programmation mathématique produisent des schémas d'allocation ne tenant pas compte de l'emboîtement (*nesting*) des classes tarifaires et la protection des classes à bas revenus, qui sont pourtant des réalités incontournables dans l'industrie. C'est pourquoi ces auteurs affirment que ce genre de méthodes se basant sur la programmation mathématique est utilisé comme sous-routine dans des méthodes plus élaborées appelées *Bid-price Methods*. Ces techniques utilisent l'information provenant du programme mathématique, notamment la valeur des variables duales associées aux contraintes de flot, afin de calculer le *bid-price* d'un itinéraire et déterminer si une nouvelle réservation devrait être acceptée sur cet itinéraire. McGill et Van Ryzin ne citent que deux documents décrivant ce genre de méthodes (l'un se trouve dans le compte-rendu de la conférence AGIFORS de 1988 et le second est un mémoire de maîtrise paru au MIT en 1992).

L'autre aspect du problème de G.d.R. qui nous intéresse, soit la tarification, a aussi été largement étudié au cours des dernières années. Encore une fois, nous suggérons McGill et Van Ryzin [MVR99] pour une revue bibliographique sérieuse sur le sujet. Il faut cependant préciser que la majorité des articles s'intéressant à la tarification l'abordent sous un angle propre aux sciences économiques, en analysant les effets des politiques de tarification sur l'ensemble de l'industrie aérienne. Un nombre plus restreint d'articles s'intéressent à la tarification d'un point de vue stratégique ou décisionnel, en utilisant des méthodes propres à la recherche opérationnelle. Parmi ces articles, on peut citer Gallego et Van Ryzin [GG97] et You [You99]. Dans les deux cas, les auteurs utilisent un processus stochastique afin de modéliser la tarification de vols multi-segments comportant plusieurs classes tarifaires et proposent des approches de programmation dynamique pour résoudre les équations de récurrence engendrées par leurs modèles. Ces auteurs affirment aussi que leurs modèles peuvent implicitement résoudre le problème d'allocation de la capacité, puisqu'il existe des relations de dualité entre les modèles d'allocation et de tarification. Ceux-ci argumentent qu'exiger un prix très élevé pour un billet dans une classe tarifaire donnée équivaut en pratique à fermer cette classe tarifaire (donc à en déterminer la capacité finale) et à déplacer la demande vers d'autres classes tarifaires.

Finalement, il semble y avoir eu très peu de recherche sur des approches permettant

de traiter simultanément et directement ces deux aspects (et non pas implicitement comme dans le cas des modèles de tarification mentionnés ci-haut). McGill et Van Ryzin [MVR99] affirment avoir pris connaissance de quelques documents de travail et de thèses consacrés à ce sujet, mais aucun de ceux-ci n'a été publié à grande échelle.

2.5 G.d.R. en Transport Aérien

Afin de caractériser le problème de G.d.R. en transport aérien, Weatherford et Bodily [WB92] adoptent un point de vue inspiré de la programmation mathématique et décrivent ce problème comme étant la combinaison d'un certain nombre d'objectifs posés par une compagnie, lesquels sont associés à certains groupes de contraintes, le tout formant un programme à optimiser. Les objectifs possibles sont :

1. **Maximisation du profit**

2. **Maximisation des revenus**

Dans les cas où les coûts sont plus ou moins fixes, la maximisation des revenus est équivalente à la maximisation du profit.

3. **Maximisation de l'utilisation de la capacité**

4. **Maximisation du revenu moyen par usager**

Un des objectifs dans l'industrie est la maximisation du RASM, le *Revenue per Available Seat Mile*.

5. **Minimisation de la perte de sympathie des clients envers la compagnie**

6. **Maximisation du profit par client**

Bien que théoriquement souhaitable, cet objectif est irréalisable en pratique, puisqu'il est impossible de cibler le comportement de chaque client et de créer sur mesure un produit tarifaire lui étant parfaitement adapté.

Les contraintes possibles sont :

1. **Contraintes opérationnelles**

La capacité des appareils, de même que les horaires et les routes doivent être respectés.

2. Contraintes de marketing

Le niveau de service offert aux clients doit être maintenu au-delà d'un minimum acceptable.

3. Contraintes stratégiques

Les aspirations de l'entreprise, par exemple devenir le meneur en termes de prix sur un certain marché, peuvent imposer des contraintes supplémentaires.

4. Contraintes découlant des actions de compétiteurs

Les prix, horaires et routes des compétiteurs peuvent aussi imposer des contraintes supplémentaires.

5. Contraintes législatives

Bien qu'elle ait bénéficié d'une déréglementation partielle au cours des dernières années, l'industrie du transport aérien demeure assujettie aux lois et règlements en vigueur dans les différents pays, ce qui peut engendrer des contraintes supplémentaires.

Selon Smith, Leimkuhler et Darrow [SLD92], cette approche 'unifiée' abordant simultanément tous les aspects de la G.d.R. est inapplicable en pratique, car elle engendre des problèmes d'optimisation dont la taille dépasse largement les capacités technologiques actuelles. L'expérience pratique acquise chez American Airlines par ces auteurs démontre qu'il est nécessaire de décomposer le problème de G.d.R. en transport aérien en sous-problèmes pouvant être traités séquentiellement. Kimes [Kim90] adopte aussi cette approche et propose la décomposition suivante :

1. Identification de la demande
2. Détermination de la politique de surréservation
3. Gestion et allocation de la capacité
4. Tarification.

2.6 Problématique

À la fin de son article, Kimes [Kim90] suggère une série de nouvelles avenues qui, selon elle, devraient être explorées par les chercheurs s'intéressant à la G.d.R. On y

retrouve entre autres :

1. Le développement de méthodes de résolution pour les problèmes multi-phases

Un exemple de problème multi-phase, dans le contexte du transport aérien, est le traitement de vols se composant de plusieurs segments. Kimes prétend que ce genre de problème doit être considéré afin qu'une stratégie de G.d.R. s'avère vraiment efficace.

2. L'incorporation de la tarification dans la gestion de la capacité

La plupart des approches de gestion de la capacité supposent que les prix sont connus, c'est-à-dire que le problème de tarification a déjà été résolu. Kimes prétend qu'une approche intégrant ces deux sous-problèmes est "extrêmement souhaitable" (*extremely desirable*) puisque ces deux aspects du problème de G.d.R. sont étroitement liés.

Le présent mémoire propose une nouvelle approche permettant de traiter ces deux aspects. En effet, un nouveau modèle mathématique basé sur la théorie de la programmation mathématique bi-niveau et utilisant une structure sous-jacente de réseau spatio-temporel est présenté. Ce modèle combine les sous-problèmes de gestion de la capacité et de tarification et permet notamment le traitement de vols composés de plusieurs segments.

La programmation mathématique bi-niveau a déjà été appliquée à des problèmes de tarification sur des réseaux de transport sans capacité explicite. Notre modèle se base sur les mêmes principes, en intégrant toutefois l'aspect capacité, lequel est incontournable dans une stratégie de G.d.R. en transport aérien. La prochaine section présente la programmation mathématique bi-niveau ; elle contient entre autres une revue bibliographique traitant des applications de cette technique aux problèmes de tarification.

Notre nouvelle approche s'inscrit dans un contexte 'traditionnel' de G.d.R. En effet, elle suppose la présence des conditions de base nécessaires à l'application d'une stratégie de G.d.R. ainsi que la disponibilité de certaines informations essentielles. Ces hypothèses seront décrites en détail dans les chapitres subséquents.

Chapitre 3

La programmation bi-niveau

Ce chapitre présente la programmation mathématique bi-niveau, la technique sur laquelle notre nouveau modèle est basé. On y passe notamment en revue des articles généraux parus à ce sujet, de même que certains articles traitant de l'application de cette technique à des problèmes de tarification.

3.1 Revue bibliographique

La première formulation du problème de programmation bi-niveau fut celle proposée par Bracken et McGill en 1973 [BM73]. Ce sont toutefois Candler et Norton [CN77] qui ont suggéré en 1977 l'appellation bi-niveau pour désigner cette classe de problèmes. Depuis le début des années 80, ce problème s'est vu accorder une attention plus particulière. De nombreux chercheurs, motivés par les relations entre la programmation bi-niveau et les équilibres de Stackelberg, se sont mis à étudier ce problème afin d'en découvrir les propriétés théoriques et proposer des méthodes de résolution. La base de données bibliographique (en format `BIBTeX`) de Vicente et Calamai, continuellement remise à jour, constitue une excellente source d'information sur les nombreux articles importants publiés à ce jour sur les différents aspects de la programmation bi-niveau. Pour une présentation plus concise de la programmation bi-niveau, on suggère quelques-uns des courts articles à ce sujet devant bientôt paraître dans *The Encyclopedia of Optimization* : le premier, par Vicente [Vic], traite d'aspects généraux tandis que les trois autres,

par Marcotte et Savard, discutent respectivement des formulations [MSc], applications [MSb] et algorithmes [MSa] de résolution de la programmation bi-niveau.

La programmation bi-niveau, en tant que cas spécial de programmation multi-niveau, est appropriée pour formuler un grand nombre de problèmes pratiques impliquant un processus de décision hiérarchique. Parmi les domaines d'application déjà étudiés, on retrouve :

1. **La gestion**

Coordination de firmes multi-divisionnelles ; localisation optimale de centres de production ; allocation de crédit.

2. **La planification**

Planification optimale de politiques énergétiques ou agricoles.

3. **Le design**

Problèmes de design optimal.

4. **Le transport**

Conception de réseaux ; estimation de la demande et de l'utilisation ; tarification optimale.

Le présent mémoire s'intéresse précisément à ce dernier champs d'application, c'est-à-dire la tarification optimale de services de transport. Deux articles à ce sujet, écrits par Labbé, Marcotte et Savard, retiennent notre attention. Le premier [LMS] présente un modèle générique de taxation basé sur la programmation bi-niveau, en explore les propriétés et présente certaines méthodes de résolution heuristiques, les méthodes exactes ne pouvant résoudre que de petites instances de ce problème. Le second [LMS98], tout en reprenant la présentation générique du problème, s'intéresse plus longuement à une application de taxation optimale de réseau autoroutier. On y présente un modèle détaillé dont on démontre la NP-complétude et on y décrit des méthodes de résolution, lesquelles sont accompagnées de résultats numériques.

3.2 Principes de base

La programmation mathématique bi-niveau est la classe de problèmes d'optimisation mathématique dans lesquels un sous-ensemble des variables de décision doit lui-même faire partie des solutions optimales d'un autre problème d'optimisation, qui est paramétrisé par les variables du premier problème. Cette technique est appropriée pour modéliser les problèmes dans lesquels une partie des variables de décision n'est pas contrôlée par l'agent principal, appelé meneur, mais plutôt par un second agent, appelé suiveur, qui optimise son propre objectif selon ce sous-ensemble de variables. Les variables que le suiveur ne contrôle pas lui apparaissant alors comme des constantes, de sorte que sa stratégie optimale dépend des décisions préalablement prises par le meneur.

Soient x et y les vecteurs de variables de décision contrôlées respectivement par le meneur et le suiveur. En supposant que l'objectif du meneur soit $F(x, y)$ et celui du suiveur $f(x, y)$, un problème bi-niveau peut s'exprimer comme

$$\begin{aligned} \min_{x, y} \quad & F(x, y) \\ \text{s.l.c.} \quad & (x, y) \in X \\ & y \in \arg \min_{y' \in Y(x)} f(x, y'), \end{aligned}$$

où X est l'ensemble des solutions réalisables du problème de premier niveau (problème du meneur) et $Y(x)$ celui du problème de deuxième niveau (problème du suiveur), lequel dépend des décisions prises au premier niveau.

Comme ce mémoire traite uniquement de programmes à deux niveaux, nous abuseons légèrement de la notation afin d'alléger la présentation des modèles subséquents. Cette façon de présenter un programme bi-niveau est connue sous le nom de 'forme verticale'. Ainsi, selon cette convention notationnelle, le modèle ci-dessus s'exprime comme

$$\begin{aligned} \min_x \quad & F(x, y) \\ & (x, y) \in X \\ \min_y \quad & f(x, y) \\ & y \in Y(x). \end{aligned}$$

Lorsque le problème de deuxième niveau est convexe, celui-ci peut être remplacé dans la formulation globale par ses conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker, qui sont

alors nécessaires et suffisantes. Cependant, le problème global peut avoir un domaine réalisable non connexe ou même vide en présence de contraintes de premier niveau.

Pour la totalité des modèles bi-niveau présentés dans ce mémoire, l'objectif du premier niveau sera bilinéaire ¹ tandis que les contraintes de premier niveau ainsi que le problème de deuxième niveau seront linéaires. On parlera donc de problèmes (bi-niveau) bilinéaires-linéaires. Comme le deuxième niveau est linéaire (donc convexe), nous appliquerons la technique décrite ci-dessus et remplacerons ce problème par ses conditions d'optimalité de KKT. De plus, certaines manipulations algébriques nous permettront de transformer l'objectif bilinéaire en une fonction linéaire. Rendu à ce point, seules les contraintes de complémentarité découlant des conditions d'optimalité de KKT ne seront pas linéaires. Celles-ci seront alors remplacées par de nouvelles contraintes utilisant des variables binaires. Les problèmes résultants seront donc des programmes mathématiques linéaires mixtes, c'est-à-dire avec certaines variables continues et d'autres entières (binaires).

Nous pouvons illustrer cette démarche en présentant les modèles de tarification de réseau sans capacité explicite de Labbé, Marcotte et Savard (voir [LMS] et [LMS98]). Ces travaux serviront d'ailleurs de point de départ à notre approche. Nous supposons ici que nous sommes en présence d'un réseau orienté dont les arcs possèdent un coût fixe leur étant propre. Par exemple, dans un réseau autoroutier, le coût fixe d'un arc peut être sa longueur ou encore le temps requis pour le traverser (nous pouvons multiplier ces quantités par un certain facteur, s'exprimant par exemple en dollars par minute, afin d'obtenir des unités monétaires pour le coût fixe d'un arc). De plus, nous supposons que certains arcs sont taxables, c'est-à-dire que le meneur peut leur attribuer un coût supplémentaire. Toujours dans notre exemple de réseau autoroutier, cette taxe correspond à un péage que l'autorité responsable impose sur certaines sections du réseau. Le meneur (premier niveau) cherche à maximiser ses revenus, tandis que les usagers du réseau (second niveau) désirent se rendre à destination en minimisant leurs coûts, peu importe que ceux-ci soient fixes ou imposés par le meneur. Ainsi, en supposant que le

¹Une fonction bilinéaire est un cas spécial de fonction quadratique de la forme $x^T Q y + b y + c x$, c'est-à-dire une fonction linéaire en x pour y fixé et vice-versa.

flot sur les arcs taxables et non taxables est représenté respectivement par les vecteurs x_1 et x_2 , que le coût fixe des arcs taxables et non taxables est représenté respectivement par les vecteurs de constantes c_1 et c_2 et finalement que la taxe sur les arcs taxables est représentée par le vecteur T , nous pouvons écrire ce modèle comme

$$\begin{aligned} & \max_T \quad Tx_1 \\ & \min_{x_1, x_2} \quad (c_1 + T)x_1 + c_2x_2 \\ & \text{s.l.c.} \quad A_1x_1 + A_2x_2 = b \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Les contraintes d'égalité de ce modèle assurent la satisfaction de la demande et la conservation du flot sur le réseau. Puisque les arcs possèdent une capacité illimitée dans ce modèle, pour un couple origine-destination donné, tous les usagers emprunteront le chemin ayant le coût total le moins élevé.

En remplaçant le problème de deuxième niveau par ses conditions d'optimalité de KKT, nous obtenons le programme à un seul niveau suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{T, x_1, x_2, \lambda} \quad Tx_1 \\ & \text{s.l.c.} \quad A_1x_1 + A_2x_2 = b \\ & \quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ & \quad \quad \quad \lambda A_1 \leq c_1 + T \\ & \quad \quad \quad \lambda A_2 \leq c_2 \\ & \quad \quad \quad (c_1 + T - \lambda A_1)x_1 = 0 \\ & \quad \quad \quad (c_2 - \lambda A_2)x_2 = 0, \end{aligned}$$

où λ est un vecteur de variables duales associées aux contraintes de conservation de flot.

En se basant sur les contraintes de complémentarité et en effectuant quelques mani-

pulations algébriques élémentaires, nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned}Tx_1 &= (\lambda A_1 - c_1)x_1 \\ &= \lambda(b - A_2x_2) - c_1x_1 \\ &= \lambda b - (c_1x_1 + c_2x_2).\end{aligned}$$

Comme le meneur désire maximiser ses revenus, il est dans son intérêt de mettre des taxes aussi élevées que possibles. En se basant sur la première contrainte de complémentarité, nous pouvons déduire que $T_i = (\lambda A_1 - c_1)_i$ lorsque $(x_1)_i > 0$, et lorsque $(x_1)_i = 0$, c'est-à-dire lorsque le flot est nul sur un arc taxable donné, le meneur peut imposer une taxe arbitrairement grande, et en particulier la taxe $(\lambda A_1 - c_1)_i$. Bref, nous pouvons conclure que

$$T = \lambda A_1 - c_1.$$

Toutes ces observations nous permettent de simplifier le modèle et de le récrire comme

$$\begin{aligned}\max_{T, x_1, x_2, \lambda} & \lambda b - (c_1x_1 + c_2x_2) \\ \text{s.l.c.} & A_1x_1 + A_2x_2 = b \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & \lambda A_1 = c_1 + T \\ & \lambda A_2 \leq c_2 \\ & (c_2 - \lambda A_2)x_2 = 0.\end{aligned}$$

Si ce n'était de la contrainte de complémentarité restante, le dernier modèle serait linéaire. Le présence de cette contrainte constitue la principale difficulté algorithmique des modèles de tarification étudiés. Cependant, il est possible de transformer ce dernier modèle en un programme linéaire mixte, c'est-à-dire comportant des variables continues et des variables entières. En effet, soit $\{\lambda^l\}_{l \in L}$ l'ensemble des points extrêmes du polyèdre dual et $\{x_1^j, x_2^j\}_{j \in J}$ l'ensemble des points extrêmes du polyèdre primal. Nous pouvons alors remplacer la contrainte de complémentarité $(c_2 - \lambda A_2)x_2 = 0$ par l'ensemble de

contraintes

$$\begin{aligned} My &\geq c_2 - \lambda A_2 \\ Nz &\geq x_2 \\ y_i + z_i &\leq 1 && \forall i \\ y_i, z_i &\in \{0, 1\} && \forall i, \end{aligned}$$

où

$$M \geq \max_i \max_{l \in L} \{(c_1 - \lambda^l A_2)_i\}$$

et

$$N \geq \max_i \max_{j \in J} \{x_{2i}^j\}.$$

Remarquons que les coefficients M et N sont choisis afin que les inégalités ci-dessus soient toujours respectées, peu importe le point extrême (primal ou dual) considéré. Le modèle final est alors

$$\begin{aligned} \max_{T, x_1, x_2, \lambda, y, z} & \quad \lambda b - (c_1 x_1 + c_2 x_2) \\ \text{s.l.c.} & \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ & \quad \lambda A_1 = c_1 + T \\ & \quad \lambda A_2 \leq c_2 \\ & \quad My \geq c_2 - \lambda A_2 \\ & \quad Nz \geq x_2 \\ & \quad y_i + z_i \leq 1 && \forall i \\ & \quad y_i, z_i \in \{0, 1\} && \forall i. \end{aligned}$$

Dans nos modèles, nous utiliserons cette même démarche afin de convertir les contraintes de complémentarité en contraintes linéaires faisant appel à des variables binaires. Notons cependant qu'en pratique, une telle démarche n'utiliserait pas deux mais bien un seul vecteur de variables binaires, c'est-à-dire que les nouvelles contraintes prendraient la

forme

$$\begin{aligned}My &\geq c_2 - \lambda A_2 \\ N(1 - y) &\geq x_2 \\ y_i &\in \{0, 1\} \quad \forall i.\end{aligned}$$

Cette formulation alternative, bien qu'équivalente du point de vue mathématique, permet possiblement de réduire le nombre d'opérations de branchement requises par un algorithme d'énumération implicite de type *Branch and Bound*, en plus de diminuer le nombre de variables binaires et de contraintes.

Chapitre 4

Définitions, concepts et structure de données

Ce chapitre jette les bases conceptuelles et présente les principes généraux sur lesquels s'appuient les modèles bi-niveau exposés au prochain chapitre. Nous définissons ici quelques concepts importants, certains propres à la programmation bi-niveau et d'autres se rattachant à la G.d.R. en transport aérien, et présentons la structure de données sous-jacente à nos modèles mathématiques.

4.1 Définitions

Nous définissons d'abord un certain nombre de concepts importants et fréquemment utilisés lors de la présentation des modèles :

- Meneur** Organisme utilisant la stratégie décrite dans le présent document.
- Compétition** Ensemble des compétiteurs du meneur.
- Segment** Déplacement ininterrompu effectué par un avion entre le décollage et l'atterrissage.
- Vol** Trajet parcouru par un passager de son origine à sa destination finale. Un vol se compose d'un ou de plusieurs segments, possiblement entrecoupés d'escales.¹
- Marché** Couple origine-destination (ville-ville) auquel est associée une demande en passagers et pour lequel les transporteurs offrent des vols.
- Groupe d'utilisateurs** Fraction de la clientèle partageant la même propension à payer pour certains services et avantages ainsi qu'une même valeur monétaire du temps.
- Classe tarifaire** Ensemble de sièges vendus au même prix, auxquels sont associés les mêmes avantages et services et ayant les mêmes restrictions.
- Prix apparent** Coût du billet tel qu'il apparaît aux yeux du passager. Le prix apparent dépend d'un ensemble de critères, le premier étant la valeur nominale (prix) du billet. D'autres critères composant le prix apparent d'un billet sont par exemple la durée du vol et la qualité de service lui étant associée.

4.2 Structure de données sous-jacente

Le modèle que nous allons développer s'appuie implicitement sur une structure de données particulière. Celle-ci n'apparaît pas directement dans la formulation, mais son

¹Dans ce contexte, il ne s'agit donc pas d'un vol physique, c'est-à-dire le déplacement effectué par un avion entre le décollage et l'atterrissage. Au premier abord, il peut sembler ambigu de conférer ce sens au mot vol. Ce terme concis est toutefois utilisé fréquemment dans les publications scientifiques s'intéressant au domaine aérien afin de désigner le trajet complet effectué par un passager. Un vol correspond ainsi à un itinéraire.

importance pour la compréhension du modèle justifie qu'on s'y attarde. Sa présentation permet aussi de formaliser certains concepts définis ci-haut.

Cette structure de données est en fait un réseau spatio-temporel, que l'on peut représenter dans la plan en agrégeant les trois dimensions de l'espace sur un axe, que nous appellerons axe τ (du grec $\tau\acute{o}\pi\omicron\varsigma$, 'lieu', 'endroit'), alors que l'autre axe, que nous appellerons axe χ (du grec $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$, 'temps') symbolise le temps. Ainsi, un point (τ, χ) dans ce système de coordonnées représente un lieu physique à un instant donné.

Dans le cas qui nous intéresse, les abscisses τ représentent des villes. Un arc a reliant les nœuds (τ^1, χ^1) et (τ^2, χ^2) représente donc un segment quittant la ville τ^1 à l'heure χ^1 et arrivant à la ville τ^2 à l'heure χ^2 (voir figure 4.1), tandis qu'un arc e reliant les nœuds (τ^2, χ^2) et (τ^2, χ^3) représente une escale dans la ville τ^2 qui dure de χ^2 à χ^3 (voir figure 4.2).

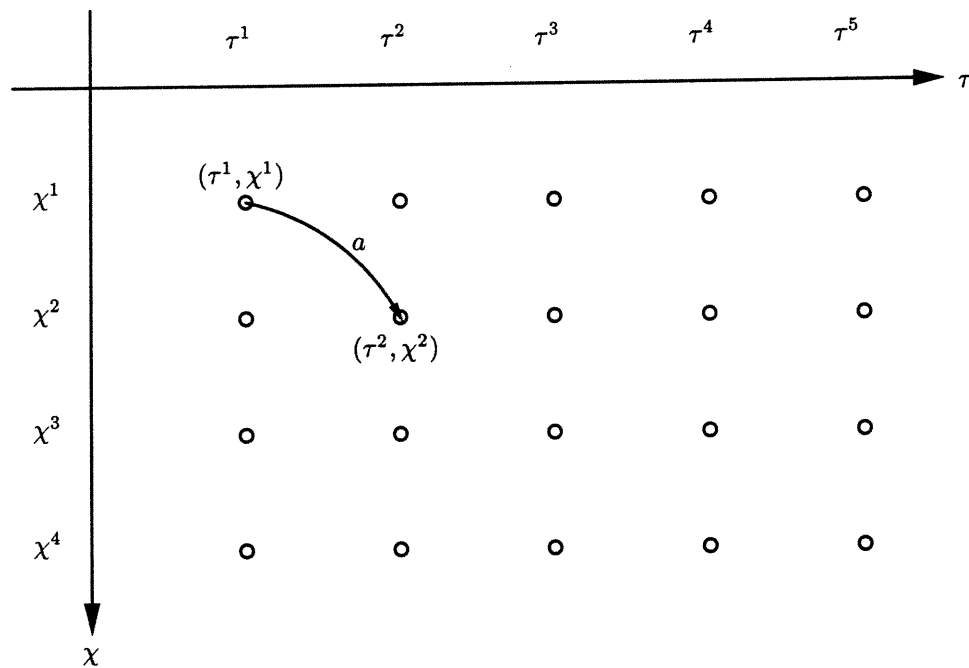


FIG. 4.1 – Un arc de segment $a \in A$ reliant les nœuds (τ^1, χ^1) et (τ^2, χ^2) .

Si on ajoute l'ensemble de tous les arcs de segment A et l'ensemble de tous les arcs d'escale E pour un ensemble de villes V à l'intérieur d'une fenêtre de temps donnée, on obtient un graphe (ou réseau) $\mathcal{G} = (V, A \cup E)$, lequel est orienté et acyclique (cette

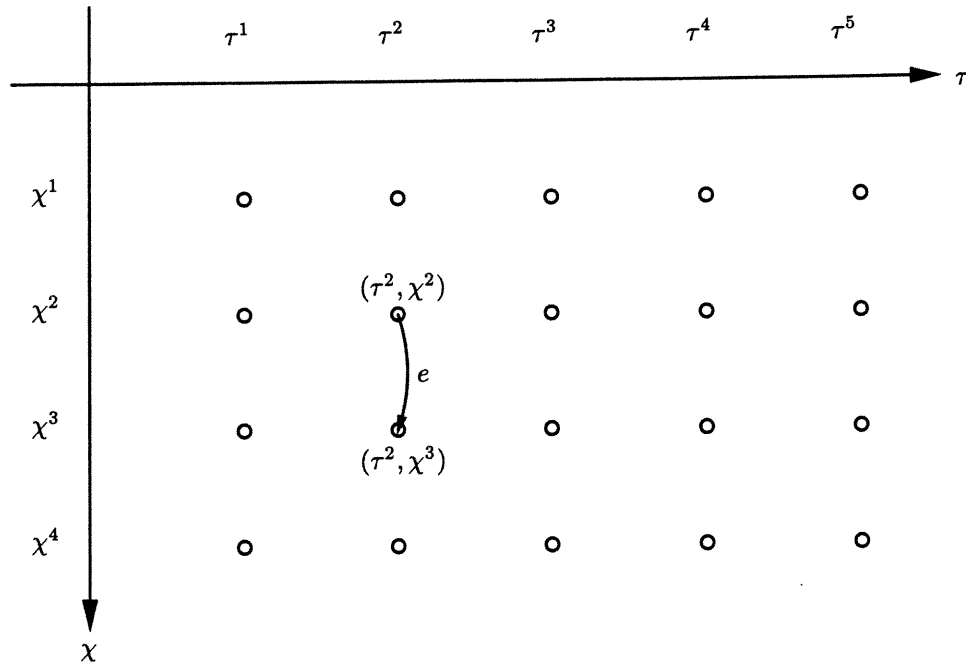


FIG. 4.2 – Un arc d’escale $e \in E$ reliant les nœuds (τ^2, χ^2) et (τ^2, χ^3) .

dernière propriété découle du fait qu’il est impossible de revenir en arrière sur l’axe χ , du moins avec les connaissances scientifiques en vigueur lors de la rédaction de ce mémoire). On peut définir un vol comme un chemin dans ce réseau se composant d’arcs de segment et d’arcs d’escale. De façon formelle, un vol f avec n segments et $n - 1$ escales est une séquence de nœuds (villes dans le temps)

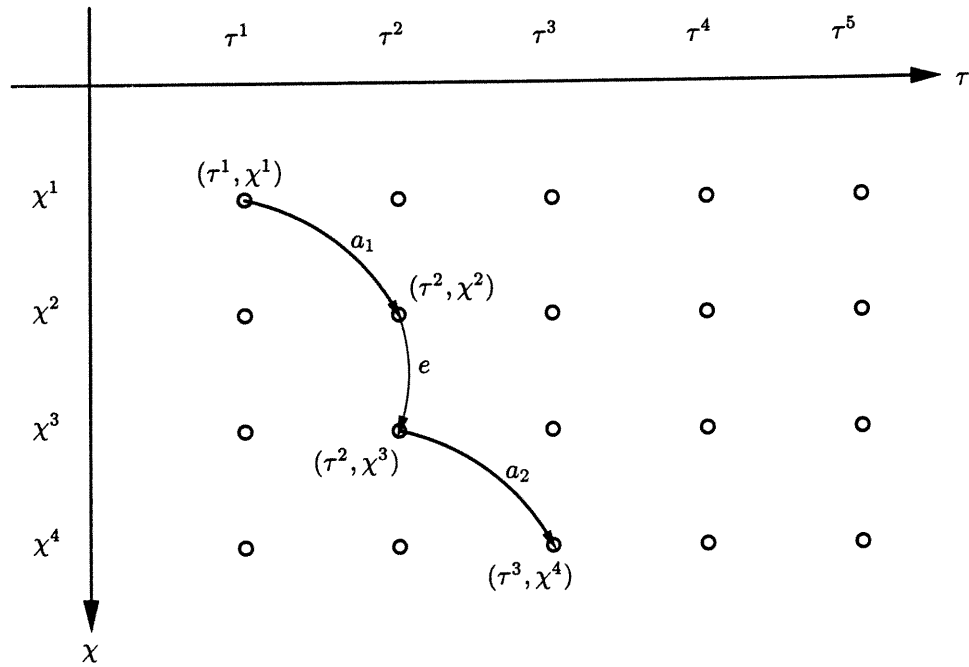
$$f = \langle (\tau^{i_0}, \chi^{j_0}), (\tau^{i_1}, \chi^{j_1}), (\tau^{i_1}, \chi^{j_2}), \dots, (\tau^{i_k}, \chi^{j_{2k-1}}), (\tau^{i_k}, \chi^{j_{2k}}), \dots, (\tau^{i_n}, \chi^{j_{2n-1}}) \rangle$$

reliées entre eux alternativement par des arcs de segment $a \in A$ et des arcs d’escale $e \in E$.

Chaque vol f est emprunté par un nombre v_f de passagers. De plus, à chaque vol f est associée une durée D_f , qui est en fait la somme de la durée de tous les segments et escales composant ce vol, c’est-à-dire

$$D_f = \sum_{k=1}^{2n-1} (\chi^{j_k} - \chi^{j_{k-1}}) = \chi^{j_{2n-1}} - \chi^{j_0},$$

où n représente encore une fois le nombre de segments composant le vol. On désignera par F l’ensemble de tous les vols présents sur le réseau \mathcal{G} et par $F(k)$ l’ensemble des


 FIG. 4.3 – Un vol composé des segments a_1 et a_2 entrecoupés par l'escale e .

vols couvrant le marché $k \in K$, K étant l'ensemble de tous les marchés. Si deux vols $f_1 = \langle (\tau_1^{i_o}, \chi_1^{j_o}), \dots, (\tau_1^{i_d}, \chi_1^{j_d}) \rangle$ et $f_2 = \langle (\tau_2^{i_o}, \chi_2^{j_o}), \dots, (\tau_2^{i_d}, \chi_2^{j_d}) \rangle$ couvrent le même marché, alors $\tau_1^{i_o} = \tau_2^{i_o}$ et $\tau_1^{i_d} = \tau_2^{i_d}$, c'est-à-dire que les composantes spatiales de leur origine et destination sont respectivement les mêmes ; les fenêtres temporelles couvertes par ces vols peuvent cependant être différentes.

Remarquons que, de façon concrète, un arc de segment $a \in A$ est assuré par un avion. Bien entendu, tous les avions, aussi gros soient-ils, ont une capacité limitée, dont nous devons tenir compte. Nous dénoterons la capacité du segment $a \in A$ par u_a . Ainsi, la somme du nombre de passagers sur tous les vols empruntant le segment a devra respecter cette capacité, c'est-à-dire

$$\sum_{f|a \in A(f)} v_f \leq u_a, \forall a \in A,$$

où $A(f)$ représente l'ensemble des segments composant le vol f .

4.3 Hypothèses

Avant de présenter les modèles mathématiques comme tels, nous devons poser certaines hypothèses. La plupart de ces hypothèses concernent la disponibilité d'informations critiques et sont typiques d'une stratégie de G.d.R. Certaines autres, particulières à notre approche, seront reflétées explicitement dans nos formulations.

4.3.1 Connaissance des vols

Les formulations que nous allons présenter supposent que l'ensemble F est connu. Si ce n'est pas le cas, une étape préliminaire s'impose afin d'obtenir l'ensemble des vols, à partir d'un horaire énumérant tous les segments pour une période de temps donnée. La procédure suivante décrit la démarche à suivre.

Procédure CALCVOLS

Étant donné l'ensemble des segments A effectués à l'intérieur d'une fenêtre de temps donnée $]x^0, x^t[$, ainsi que l'ensemble des marchés K ,

Début

1. Créer l'ensemble F et l'initialiser $F \leftarrow \emptyset$.
2. Construire l'ensemble des arcs d'escaliers E : pour chaque arc de segment $a = ((\tau^{i_1}, \chi^{j_1}), (\tau^{i_2}, \chi^{j_2})) \in A$, créer un nouvel arc d'escalier $e = ((\tau^{i_2}, \chi^{j_2}), (\tau^{i_2}, \bar{\chi}))$, pour chaque $\bar{\chi} \geq \chi^{j_2}$ tel que $\bar{\chi} - \chi^{j_2} \leq \Delta_e^{\max}$, où Δ_e^{\max} représente la durée maximale d'une escalier.
3. Construire le réseau $\mathcal{G} = (V, A \cup E)$, où V est l'union de l'ensemble des villes-origines et villes-destinations présentes dans K à l'intérieur de la fenêtre de temps $]x^0, x^t[$.
4. Pour chaque $k = (\tau^{o(k)}, \tau^{d(k)}) \in K$, c'est-à-dire pour chaque couple origine-destination :
 - (a) Créer l'ensemble $F(k)$ et l'initialiser $F(k) \leftarrow \emptyset$.
 - (b) Créer les nœuds temporaires $(\tau^{o(k)}, x^0)$ et $(\tau^{d(k)}, x^t)$, que nous appellerons respectivement super-origine et super-destination du marché k , dans le réseau \mathcal{G} .

- (c) Relier la super-origine $(\tau^{o(k)}, \chi^0)$ à tous les nœuds $(\tau^{o(k)}, \chi')$ où $\chi' \in]\chi^0, \chi^t[$ par un arc artificiel et temporaire dans \mathcal{G} .
- (d) Relier tous les nœuds $(\tau^{o(k)}, \chi'')$ à la super-destination $(\tau^{d(k)}, \chi^t)$ où $\chi'' \in]\chi^0, \chi^t[$ par un arc artificiel et temporaire dans \mathcal{G} .
- (e) Appliquer un algorithme de plus courts chemins entre la super-origine et la super-destination afin d'obtenir le 1^{er}, 2^e, ..., n^e plus court chemin dans \mathcal{G} entre ces nœuds.
- (f) Pour chaque chemin f obtenu à l'étape précédente, enlever le premier et le dernier arc de ce chemin (car ils sont artificiels). Enlever aussi l'avant-dernier arc s'il s'agit d'un arc d'escale. Faire $F(k) \leftarrow F(k) \cup f$.
- (g) Effacer tous les arcs et nœuds temporaires ajoutés à \mathcal{G} lors des étapes précédentes.
- (h) Faire $F \leftarrow F \cup F(k)$.

5. Retourner F , l'ensemble des vols.

Fin.

Cette procédure vient en quelque sorte compléter la définition formelle d'un vol, c'est-à-dire un chemin ou itinéraire dans un réseau spatio-temporel.

4.3.2 Segmentation de la clientèle

La capacité de segmenter la clientèle en différents groupes d'utilisateurs et la connaissance du comportement des utilisateurs de ces groupes sont des conditions nécessaires à l'application de toute stratégie de G.d.R., comme nous l'avons d'ailleurs vu au chapitre 2. Notre approche ne fait pas exception à cette règle et prend pour acquis la disponibilité de ces informations. En particulier, nous supposons que la clientèle est divisée en un ensemble fini de groupes d'utilisateurs Γ , et que les utilisateurs de chaque groupe $\gamma \in \Gamma$ partagent une même valeur monétaire du temps α_γ ainsi qu'une même appréciation monétaire β_γ de la qualité de service d'une classe tarifaire, c'est-à-dire des avantages, privilèges et restrictions associés à cette classe.

4.3.3 Disponibilité des prix de la compétition

Nos formulations utilisent explicitement les prix des vols de la compétition. Il est donc indispensable que cette information soit connue. Cette hypothèse n'est pas restrictive, puisqu'il s'agit encore une fois de l'une des conditions nécessaires à l'application d'une stratégie de G.d.R. que nous avons énumérées précédemment. En pratique, les grandes compagnies aériennes souscrivent à un service informatique leur permettant d'avoir accès aux prix proposés par leurs concurrents et de publier elles-mêmes leurs tarifs, à chaque fois que ceux-ci sont modifiés. Cette information est continuellement mise à jour, de sorte qu'il est tout à fait légitime et réaliste de supposer que nous pouvons constamment disposer des prix des vols de la compétition.

4.3.4 Capacité des vols de la compétition

Nous savons que les arcs de segment correspondent en fait à des avions effectuant un trajet simple (avec un seul décollage et un seul atterrissage). Les vols empruntant un segment particulier doivent donc respecter la capacité physique de l'appareil assurant ce segment. Cette règle sera observée pour les vols du meneurs, dont la capacité sera explicitement contrainte dans le modèle.

Cependant, nous supposerons que les vols de la compétition ont une capacité illimitée. Cette hypothèse peut être justifiée en utilisant un simple argument économique. En effet, sachant que le transport aérien est une industrie très concurrentielle, nous supposons que l'organisme utilisant notre stratégie n'occupe pas de façon générale une position dominante sur les marchés qu'il couvre et qu'il doit faire face à une multitude d'autres joueurs prêts à offrir de nouveaux vols pour satisfaire la demande et saisir de nouvelles opportunités de revenus. Si la demande est généralement satisfaite, alors nous pouvons supposer que la capacité de la compétition est illimitée.

Le principal avantage de cette hypothèse simplificatrice est qu'elle diminue considérablement la taille des problèmes, nous permettant ainsi d'obtenir plus rapidement une solution optimale. Cependant, elle possède aussi ses inconvénients. En effet, sur certains marchés, nous pouvons nous retrouver en présence d'une situation de monopole ou d'oligopole où l'offre n'arrive pas à satisfaire la demande. Les passagers entrent alors en

compétition pour obtenir les billets disponibles, ce qui favorise les transporteurs et leur permet d'ajuster conséquemment leurs prix.

Un autre inconvénient lié à cette hypothèse sur la capacité de vols de la compétition est que, comme les résultats numériques tendent à le prouver, la quasi totalité de la demande sur un marché donné se retrouvera sur le vol le moins cher de la compétition. Le meneur ajustera alors ses propres prix par rapport à ce vol et arrachera à la compétition assez de passagers pour remplir ses propres appareils. En réalité, seule une fraction de la clientèle aurait accès à ce vol au plus bas prix, les autres passagers devant se répartir sur les vols plus chers. On peut facilement imaginer un cas où le meneur, constatant qu'il n'est pas avantageux de concurrencer directement le vol le moins cher, laisse à la compétition les passagers les moins payants et ajuste ses propres prix par rapport à d'autres vols plus chers de la compétition. Si la demande est suffisante, certains passagers n'auront d'autre choix que de se diriger vers ces vols aux coûts plus élevés, augmentant ainsi les revenus du meneur.

Chapitre 5

Présentation des modèles

Ce chapitre présente le développement du modèle de programmation mathématique bi-niveau que nous proposons comme solution aux problèmes d'allocation de la capacité et de tarification en transport aérien. La présentation se fera selon l'ordre croissant de complexité des cas. Chaque cas sera identifié par un triplet de la forme (UTC) , où U représente le nombre de groupes d'usagers, T le nombre de classes tarifaires et C le nombre de critères entrant dans la composition du prix apparent. Ainsi, le premier modèle correspond au cas (111).

Dans chaque section, nous posons certaines hypothèses particulières au cas qui y est considéré. Bien entendu, les hypothèses générales énumérées au chapitre précédent tiennent pour tous les modèles présentés ici.

5.1 1 groupe d'usagers, 1 classe tarifaire, 1 critère (111)

Le modèle présenté dans cette section traite du cas simpliste où tous les passagers partagent la même propension à payer pour certains services et avantages, où il n'y a qu'une seule classe tarifaire et où le prix apparent du billet perçu par les passagers est en fait la valeur nominale du billet.

5.1.1 Hypothèses

Nous supposons dans ce cas-ci que la clientèle n'est pas segmentée, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un seul groupe d'utilisateurs. De plus, comme tous les utilisateurs partagent la même propension à payer, il n'y a qu'un seul produit, c'est-à-dire une seule classe tarifaire. Finalement la perception qu'ont les utilisateurs du prix du billet se limite au prix payé par ceux-ci, lequel correspond à la valeur nominale du billet.

5.1.2 Formulation explicite

Nous présentons d'abord la notation utilisée dans le modèle bi-niveau. Plusieurs éléments de cette notation ont déjà été introduits dans les chapitres précédents, mais leur signification est ici résumée.

K : Ensemble des marchés (couples origine-destination).

d_k : Demande (nombre de passagers) pour le marché $k \in K$.

$F^1(k)$: Ensemble des vols offerts par le meneur sur le marché $k \in K$.

$F^2(k)$: Ensemble des vols offerts par la compétition sur le marché $k \in K$.

$F^1 = \bigcup_{k \in K} F^1(k)$: Ensemble de tous les vols offerts par le meneur.

$F^2 = \bigcup_{k \in K} F^2(k)$: Ensemble de tous les vols offerts par la compétition.

$F(k) = F^1(k) \cup F^2(k)$: Ensemble des vols offerts sur le marché $k \in K$.

$F = F^1 \cup F^2$: Ensemble de tous les vols offerts.

v_f : Nombre de passagers sur le vol $f \in F$.

$A(f)$: Ensemble des segments composant le vol $f \in F$.

A^1 : Ensemble des segments assurés par le meneur.

A^2 : Ensemble des segments assurés par la compétition.

$A = A^1 \cup A^2$: Ensemble de tous les segments ($A = \bigcup_{f \in F} A(f)$).

T_f^1 : Tarif (proposé par le meneur) sur le vol $f \in F^1$.

T_f^2 : Tarif (proposé par la compétition) sur le vol $f \in F^2$.

u_a : Capacité maximale du segment $a \in A^1$.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter le modèle.

• **Objectif du 1^{er} niveau** (Point de vue du meneur)

Maximiser les revenus (c'est-à-dire le produit du coût des billets par le nombre de passagers) sur l'ensemble des vols offerts par le meneur.

• **Objectif du 2^e niveau** (Point de vue des passagers)

Minimiser la somme des prix apparents des billets sur l'ensemble des vols. Puisque nous ne considérons qu'un seul critère, le prix apparent est en fait le prix du billet.

• **Contraintes**

- ① La capacité de chaque segment de vol du meneur (c'est-à-dire la capacité de chaque appareil) doit être respectée.
- ② La demande sur chaque marché doit être satisfaite, que ce soit par le meneur ou la compétition.
- ③ Le nombre de passagers sur chaque vol doit être non négatif.

On obtient ainsi le modèle de programmation mathématique bi-niveau

$$\begin{aligned}
 & \max_{T_1, v} \sum_{f \in F^1} T_f^1 v_f^1 \\
 & \min_v \sum_{f \in F^1} T_f^1 v_f^1 + \sum_{f \in F^2} T_f^2 v_f^2 \\
 \text{s.l.c.} \quad & \sum_{f|a \in A(f)} v_f^1 \leq u_a \quad \forall a \in A^1 \quad \text{①} \\
 & \sum_{f \in F^1(k)} v_f^1 + \sum_{f \in F^2(k)} v_f^2 = d_k \quad \forall k \in K \quad \text{②} \\
 & v_f^i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}, \forall f \in F^i. \quad \text{③}
 \end{aligned}$$

5.1.3 Formulation compacte (matricielle) et transformations

En adoptant la notation vectorielle et matricielle, nous obtenons une formulation plus compacte qui facilitera la transformation du programme à deux niveaux en un

programme linéaire mixte, c'est-à-dire dont certaines variables sont entières et d'autres sont réelles.

En adoptant les notations

$T^1 \in \mathbb{R}^{1 \times |F^1|}$: Vecteur-ligne du coût des vols du meneur.

$T^2 \in \mathbb{R}^{1 \times |F^2|}$: Vecteur-ligne du coût des vols de la compétition.

$v^1 \in \mathbb{R}^{|F^1|}$: Vecteur-colonne du nombre de passagers sur les vols du meneur.

$v^2 \in \mathbb{R}^{|F^2|}$: Vecteur-colonne du nombre de passagers sur les vols de la compétition.

$u \in \mathbb{R}^{|A^1|}$: Vecteur-colonne de la capacité des segments du meneur.

$d \in \mathbb{R}^{|K|}$: Vecteur-colonne de la demande sur les marchés.

$G \in \{0, 1\}^{|A^1| \times |F^1|}$: $[G]_{af} = \begin{cases} 1 & \text{si le vol } f \text{ utilise le segment } a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$H^1 \in \{0, 1\}^{|K| \times |F^1|}$: $[H^1]_{kf} = \begin{cases} 1 & \text{si le vol } f \text{ (meneur) couvre le marché } k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$H^2 \in \{0, 1\}^{|K| \times |F^2|}$: $[H^2]_{kf} = \begin{cases} 1 & \text{si le vol } f \text{ (compétition) couvre le marché } k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$\xi \in \mathbb{R}^{1 \times |A^1|}$: Vecteur-ligne de variables duales associées aux contraintes de capacité.

$\eta \in \mathbb{R}^{1 \times |K|}$: Vecteur-ligne de variables duales associées aux contraintes de demande.

nous sommes en mesure de récrire le modèle sous la forme

$$\begin{aligned} & \max_{T^1, v^1} T^1 v^1 \\ & \min_{v^2} T^1 v^1 + T^2 v^2 \\ & \text{s.l.c.} \quad Gv^1 \leq u \quad (\xi) \end{aligned}$$

$$H^1 v^1 + H^2 v^2 = d \quad (\eta)$$

$$v^1, v^2 \geq 0,$$

où les symboles entre parenthèses dénotent les vecteurs duaux associés aux contraintes (lignes) correspondantes. Le dual du problème de second niveau prend la forme

$$\begin{aligned} \max_{\eta, \xi} \quad & \xi u + \eta d \\ \text{s.l.c.} \quad & \eta H^1 + \xi G \leq T^1 \quad (v^1) \\ & \eta H^2 \leq T^2 \quad (v^2) \\ & \xi \leq 0 \\ & \eta \quad \text{libre.} \end{aligned}$$

Les conditions d'optimalité primales-duales du 2^e niveau sont donc

$$\left. \begin{aligned} Gv^1 &\leq u \\ H^1 v^1 + H^2 v^2 &= d \\ v^1, v^2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{Faisabilité primale}$$

$$\left. \begin{aligned} \eta H^1 + \xi G &\leq T^1 \\ \eta H^2 &\leq T^2 \\ \xi &\leq 0 \end{aligned} \right\} \text{Faisabilité duale}$$

$$\left. \begin{aligned} -\xi (u - Gv^1) &= 0 \\ \eta (d - H^1 v^1 - H^2 v^2) &= 0 \\ (T^1 - \eta H^1 - \xi G) v^1 &= 0 \\ (T^2 - \eta H^2) v^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Complémentarité.}$$

En remplaçant le problème de 2^e niveau par ses conditions d'optimalité, nous pouvons récrire le programme original comme

$$\max_{T^1, v, \xi, \eta} T^1 v^1 \quad (5.1)$$

$$\text{s.l.c.} \quad Gv^1 \leq u \quad (5.2)$$

$$H^1 v^1 + H^2 v^2 = d \quad (5.3)$$

$$v^1, v^2 \geq 0 \quad (5.4)$$

$$\eta H^1 + \xi G \leq T^1 \quad (5.5)$$

$$\eta H^2 \leq T^2 \quad (5.6)$$

$$\xi \leq 0 \quad (5.7)$$

$$\xi(u - Gv^1) = 0 \quad (5.8)$$

$$\eta(d - H^1 v^1 - H^2 v^2) = 0 \quad (5.9)$$

$$(T^1 - \eta H^1 - \xi G) v^1 = 0 \quad (5.10)$$

$$(T^2 - \eta H^2) v^2 = 0. \quad (5.11)$$

Remarquons que la contrainte (5.9) est trivialement satisfaite en vertu de (5.3). De plus, notons qu'il est dans l'intérêt du meneur que les prix soient aussi élevés que possible. On peut donc poser

$$T^1 = \eta H^1 + \xi G. \quad (5.12)$$

En effet, si $v_f^1 \neq 0$, alors (par (5.10)) on a $T_f^1 = (\eta H^1 + \xi G)_f$, et si $v_f^1 = 0$, alors T_f^1 peut prendre une valeur arbitrairement élevée, et en particulier la valeur $(\eta H^1 + \xi G)_f$, sans que cela n'ait d'impact sur l'objectif du meneur. Il s'ensuit que nous pouvons récrire (5.1) comme

$$\begin{aligned} T^1 v^1 &= (\eta H^1 + \xi G) v^1 && \text{par (5.12)} \\ &= (\eta H^1 v^1) + (\xi G v^1) \\ &= (\eta d - \eta H^2 v^2) + \xi u && \text{par (5.9) et (5.8)} \\ &= \eta d - T^2 v^2 + \xi u && \text{par (5.11)}. \end{aligned}$$

La fonction objectif du problème dual de 2^e niveau, lequel est présenté ci-haut, est $\xi u + \eta d$. Par le théorème de dualité forte, nous savons qu'à l'optimum, la valeur de cette fonction

est égale à la valeur de la fonction objectif du problème primal de 2^e niveau, laquelle est $T^1v^1 + T^2v^2$. Nous pouvons ainsi déduire que, à l'optimum, $T^1v^1 = \xi u + \eta d - T^2v^2$, ce qui confirme le résultat obtenu ci-dessus par manipulation algébrique. Remarquons cependant que cet argument ne justifie pas nécessairement l'équation (5.12).

Suite à ces manipulations, le programme complet devient :

$$\max_{T^1, v, \xi, \eta} \quad \eta d + \xi u - T^2v^2 \quad (5.13)$$

$$\text{s.l.c.} \quad Gv^1 \leq u \quad (5.14)$$

$$H^1v^1 + H^2v^2 = d \quad (5.15)$$

$$\eta H^1 + \xi G = T^1 \quad (5.16)$$

$$\eta H^2 \leq T^2 \quad (5.17)$$

$$v^1, v^2 \geq 0 \quad (5.18)$$

$$T^1 \geq 0 \quad (5.19)$$

$$\xi \leq 0 \quad (5.20)$$

$$-\xi(u - Gv^1) = 0 \quad (5.21)$$

$$(T^2 - \eta H^2)v^2 = 0. \quad (5.22)$$

5.1.4 Interprétation économique des variables duales

Le vecteur dual $\xi \in \mathbb{R}^{1 \times |A|}$ est associé aux contraintes de capacité sur les segments. Le scalaire $-\xi_a$ (où $a \in A^1$) représente le revenu marginal obtenu par le meneur si la capacité sur le segment a augmente d'une unité, c'est-à-dire le prix maximal que le meneur devrait consentir à payer afin d'augmenter la capacité sur le segment a d'une unité tout en demeurant rentable sur ce segment.

Le vecteur de variables duales $\eta \in \mathbb{R}^{1 \times |K|}$ est associé aux contraintes de demande sur les marchés. Le scalaire η_k (où $k \in K$) représente donc le revenu supplémentaire obtenu par le meneur si la demande sur le marché k augmente d'une unité.

5.1.5 Formulation mixte

Si ce n'était des contraintes de complémentarité (5.21) et (5.22), le dernier modèle proposé serait linéaire. Il est possible de substituer à ces contraintes des contraintes linéaires où interviennent des variables binaires. Le modèle résultant de ces transformations est un programme mathématique linéaire à un seul niveau et mixte, c'est-à-dire impliquant des variables continues et entières.

Dénotons par $\{T_i^1, v_i^1, v_i^2\}_{i \in I}$ l'ensemble des points extrêmes du polyèdre primal et par $\{\xi_j, \eta_j\}_{j \in J}$ l'ensemble des points extrêmes du polyèdre dual, et soit

- $x^1 \in \{0, 1\}^{|A^1|}$: Vecteur-colonne de variables binaires.
- $x^2 \in \{0, 1\}^{|A^1|}$: Vecteur-colonne de variables binaires.
- $M_x \in \mathbb{R}^{|A^1| \times |A^1|}$: Matrice diagonale, $[M_x]_{aa} = u_a \geq \max_{i \in I} \{(u - Gv^{1i})_a\}$.
- $N_x \in \mathbb{R}^{|A^1| \times |A^1|}$: Matrice diagonale, $[N_x]_{aa} = \max_{f|a \in A(f)} T_f \geq \max_{j \in J} \{-\xi_a^j\}$.
- $e_x \in \{1\}^{|A^1|}$: Vecteur-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.
- $y^1 \in \{0, 1\}^{|F^2|}$: Vecteur-colonne de variables binaires.
- $y^2 \in \{0, 1\}^{|F^2|}$: Vecteur-colonne de variables binaires.
- $M_y \in \mathbb{R}^{|F^2| \times |F^2|}$: Matrice diagonale, $[M_y]_{ff} = T^2 \geq \max_{j \in J} \{(T^2 - \eta^j H^2)_f\}$.
- $N_y \in \mathbb{R}^{|F^2| \times |F^2|}$: Matrice diagonale, $[N_y]_{ff} = d_{k|f \in F(k)} \geq \max_{i \in I} \{v_f^{2i}\}$.
- $e_y \in \{1\}^{|F^2|}$: Vecteur-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

La contrainte de complémentarité (5.21), c'est-à-dire $-\xi(u - Gv^1) = 0$ peut être remplacée par l'ensemble de contraintes suivant :

$$\begin{aligned} u - Gv^1 &\leq M_x x^1 \\ -\xi &\leq N_x x^2 \\ x^1 + x^2 &\leq e_x \\ x^1, x^2 &\in \{0, 1\}^{|A^1|}. \end{aligned}$$

De la même façon, la contrainte de complémentarité (5.22), c'est-à-dire $(T^2 - \eta H^2)v^2 = 0$ peut être remplacée par l'ensemble de contraintes :

$$\begin{aligned}
 T^2 - \eta H^2 &\leq M_y y^1 \\
 v^2 &\leq N_y y^2 \\
 y^1 + y^2 &\leq e_y \\
 y^1, y^2 &\in \{0, 1\}^{|F^2|}.
 \end{aligned}$$

On obtient alors le programme mathématique suivant, qui sera implanté informatiquement et résolu à l'aide de CPLEX :

$$\begin{aligned}
 \max_{T_1, v, \xi, \eta, x, y} \quad & \eta d + \xi u - T^2 v^2 & (5.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.l.c.} \quad & G v^1 \leq u & (5.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & H^1 v^1 + H^2 v^2 = d & (5.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \eta H^1 + \xi G = T^1 & (5.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \eta H^2 \leq T^2 & (5.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & u - G v^1 \leq M_x x^1 & (5.28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\xi \leq N_x x^2 & (5.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T^2 - \eta H^2 \leq M_y y^1 & (5.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & v^2 \leq N_y y^2 & (5.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x^1 + x^2 \leq e_x & (5.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y^1 + y^2 \leq e_y & (5.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & v^1, v^2 \geq 0 & (5.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T^1 \geq 0 & (5.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \xi \leq 0 & (5.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x^1, x^2 \in \{0, 1\}^{|A|} & (5.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y^1, y^2 \in \{0, 1\}^{|F^2|} & (5.38)
 \end{aligned}$$

5.2 N groupes d'usagers, 1 classe tarifaire, 2 critères ($N12$)

Dans cette section, nous enrichissons le modèle présenté à la section précédente afin de traiter un nombre arbitraire de groupes d'usagers. De plus, un deuxième critère entre dans la composition du prix apparent du billet, de sorte que ce prix ne correspond plus à la valeur nominale du billet (le prix payé).

5.2.1 Hypothèses

Nous supposons que la clientèle est segmentée en plusieurs groupes d'usagers à l'intérieur desquels les clients partagent la même propension à payer pour certains services et avantages.

Aussi, nous ajoutons une composante temporelle dans la perception du prix apparent d'un billet. À chaque groupe d'usagers est associée une valeur monétaire du temps. Les passagers 'pressés' (par exemple les gens d'affaires) accordent généralement une plus grande valeur au temps que les passagers 'non pressés' (par exemple les touristes). Nous supposons que cette valeur du temps propre à chaque groupe d'usagers est connue et quantifiable; en pratique, celle-ci devrait s'exprimer en dollars par unité de temps. Avec ce nouveau critère, le prix apparent d'un billet, c'est-à-dire le coût total perçu par l'acheteur de ce billet, est la somme de la valeur nominale du billet et du produit de la durée du vol par la valeur d'une unité de temps.

5.2.2 Formulation explicite

Afin d'exprimer de façon mathématique les modifications au modèle de base découlant des observations et hypothèses énoncées ci-haut, la notation supplémentaire suivante doit être introduite. Ainsi, soit

- Γ : Ensemble des groupes d'usagers.
- α_γ : Valeur monétaire du temps pour un usager du groupe $\gamma \in \Gamma$.
- $v_{f,\gamma}$: Nombre de passagers du groupe $\gamma \in \Gamma$ sur le vol $f \in F$.
- $d_{k,\gamma}$: Demande sur le marché $k \in K$ en usagers du groupe $\gamma \in \Gamma$.
- $\pi_{f,\gamma}$: Prix apparent du vol $f \in F$ tel que perçu par un usager du groupe $\gamma \in \Gamma$.
- D_f : Durée du vol $f \in F$.

Le prix apparent du vol $f \in F$ tel que perçu par un usager du groupe $\gamma \in \Gamma$ est donc

$$\pi_{f,\gamma} = T_f + \alpha_\gamma D_f.$$

Les composantes de ce nouveau modèle deviennent :

- **Objectif du 1^{er} niveau** (Point de vue du meneur)

L'objectif du meneur (1^{er} niveau) demeure le même, c'est-à-dire maximiser les revenus sur l'ensemble de ses vols, en tenant maintenant compte des groupes d'usagers.

- **Objectif du 2^e niveau** (Point de vue des passagers)

L'objectif des passagers (2^e niveau) est toutefois différent, à cause de l'ajout du critère temps dans la composition du prix apparent. Maintenant, les passagers désirent minimiser le prix apparent qu'ils doivent payer, et ce sur l'ensemble des vols.

- **Contraintes**

- ① La contrainte de capacité sur les arcs (i.e. appareils) est toujours présente.
- ② La demande en usagers des différents groupes sur chaque marché doit être satisfaite.
- ③ Le nombre de passagers de chaque groupe sur chaque vol doit être non négatif.

Le programme complet est alors

$$\begin{aligned}
 & \max_{T_1, v} \quad \sum_{f \in F^1} \sum_{\gamma \in \Gamma} T_f^1 v_{f,\gamma}^1 \\
 & \min_v \quad \sum_{f \in F^1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi_{f,\gamma}^1 v_{f,\gamma}^1 + \sum_{f \in F^2} \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi_{f,\gamma}^2 v_{f,\gamma}^2 \\
 & \text{s.l.c.} \quad \sum_{f|a \in A(f)} \sum_{\gamma \in \Gamma} v_{f,\gamma}^1 \leq u_a \quad \forall a \in A^1 \quad \text{①}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{f \in F^1(k)} v_{f,\gamma}^1 + \sum_{f \in F^2(k)} v_{f,\gamma}^2 = d_{k,\gamma} \quad \forall k \in K, \forall \gamma \in \Gamma \quad \textcircled{2}$$

$$v_{f,\gamma}^i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}, \forall f \in F^i, \forall \gamma \in \Gamma. \quad \textcircled{3}$$

5.2.3 Formulation compacte (matricielle) et transformations

Afin de récrire le modèle présenté ci-dessus de façon plus compacte, la notation matricielle introduite à la section précédente doit être légèrement modifiée. Ainsi, soit :

$\pi_\gamma^1 \in \mathbb{R}^{1 \times |F^1|}$: Vecteur-ligne du coût apparent des vols du meneur pour un usager du groupe $\gamma \in \Gamma$

$\pi_\gamma^2 \in \mathbb{R}^{1 \times |F^2|}$: Vecteur-ligne du coût apparent des vols de la compétition pour un usager du groupe $\gamma \in \Gamma$

$v_\gamma^1 \in \mathbb{R}^{|F^1|}$: Vecteur-colonne du nombre de passagers du groupe $\gamma \in \Gamma$ sur les vols du meneur

$v_\gamma^2 \in \mathbb{R}^{|F^2|}$: Vecteur-colonne du nombre de passagers du groupe $\gamma \in \Gamma$ sur les vols de la compétition

$d_\gamma \in \mathbb{R}^{|K|}$: Vecteur-colonne de la demande sur les marchés en usagers du groupe $\gamma \in \Gamma$

$\eta_\gamma \in \mathbb{R}^{1 \times |K|}$: Vecteur-ligne de variables duales associées aux contraintes de demande en usagers du groupe $\gamma \in \Gamma$.

$D^i \in \mathbb{R}^{|F^i|}$: Vecteur-ligne représentant la durée des vols ($i \in \{1, 2\}$).

Les vecteurs ξ et u conservent la même signification, tout comme les matrices G , H^1 et H^2 . Notons aussi que

$$\pi_\gamma^i = T^i + \alpha_\gamma D^i, \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

où $i \in \{1, 2\}$. Nous pouvons alors récrire le modèle de la façon suivante :

$$\max_{T^1, v} \sum_{\gamma \in \Gamma} T^1 v_\gamma^1$$

$$\min_v \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi_\gamma^1 v_\gamma^1 + \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi_\gamma^2 v_\gamma^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.l.c} \quad & \sum_{\gamma \in \Gamma} Gv_{\gamma}^1 \leq u \quad (\xi) \\
 & H^1 v_{\gamma}^1 + H^2 v_{\gamma}^2 = d_{\gamma} \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (\eta_{\gamma}) \\
 & v_{\gamma}^1, v_{\gamma}^2 \geq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma.
 \end{aligned}$$

Le dual du problème de 2^e niveau est :

$$\begin{aligned}
 \max_{\xi, \eta} \quad & \xi u + \sum_{\gamma \in \Gamma} \eta_{\gamma} d \\
 \text{s.l.c.} \quad & \eta_{\gamma} H^1 + \xi G \leq \pi_{\gamma}^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (v^1) \\
 & \eta_{\gamma} H^2 \leq \pi_{\gamma}^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (v^2) \\
 & \xi \leq 0 \\
 & \eta_{\gamma} \text{ libre, } \forall \gamma \in \Gamma.
 \end{aligned}$$

Les conditions d'optimalité du 2^e niveau sont donc :

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{\gamma \in \Gamma} Gv_{\gamma}^1 & \leq u \\
 H^1 v_{\gamma}^1 + H^2 v_{\gamma}^2 & = d_{\gamma} \quad \forall \gamma \in \Gamma \\
 v_{\gamma}^1, v_{\gamma}^2 & \geq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma
 \end{aligned} \right\} \text{Faisabilité primale}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \eta_{\gamma} H^1 + \xi G & \leq \pi_{\gamma}^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma \\
 \eta_{\gamma} H^2 & \leq \pi_{\gamma}^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma \\
 \xi & \leq 0
 \end{aligned} \right\} \text{Faisabilité duale}$$

$$\left. \begin{aligned}
 -\xi (u - \sum_{\gamma \in \Gamma} Gv_{\gamma}^1) & = 0 \\
 \eta_{\gamma} (d_{\gamma} - H^1 v_{\gamma}^1 - H^2 v_{\gamma}^2) & = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \\
 (\pi_{\gamma}^1 - \eta_{\gamma} H^1 - \xi G) v_{\gamma}^1 & = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \\
 (\pi_{\gamma}^2 - \eta_{\gamma} H^2) v_{\gamma}^2 & = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma
 \end{aligned} \right\} \text{Complémentarité.}$$

Si nous remplaçons le problème de 2^e niveau par ses conditions d'optimalité, nous obtenons le programme

$$\max_{T^1, v, \xi, \eta} \sum_{\gamma \in \Gamma} T^1 v_\gamma^1 \quad (5.39)$$

$$\text{s.l.c.} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} G v_\gamma^1 \leq u \quad (5.40)$$

$$H^1 v_\gamma^1 + H^2 v_\gamma^2 = d_\gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.41)$$

$$\eta_\gamma H^1 + \xi G \leq \pi_\gamma^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.42)$$

$$\eta_\gamma H^2 \leq \pi_\gamma^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.43)$$

$$v_\gamma^1, v_\gamma^2 \geq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.44)$$

$$\xi \leq 0 \quad (5.45)$$

$$-\xi \left(u - \sum_{\gamma \in \Gamma} G v_\gamma^1 \right) = 0 \quad (5.46)$$

$$\eta_\gamma (d_\gamma - H^1 v_\gamma^1 - H^2 v_\gamma^2) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.47)$$

$$(\pi_\gamma^1 - \eta_\gamma H^1 - \xi G) v_\gamma^1 = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.48)$$

$$(\pi_\gamma^2 - \eta_\gamma H^2) v_\gamma^2 = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (5.49)$$

Notons que la fonction objectif (5.39) du dernier modèle présenté n'est pas linéaire. Cependant, nous pouvons effectuer quelques manipulations algébriques afin de la remplacer par une fonction linéaire équivalente. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} T^1 v_\gamma^1 &= \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_\gamma H^1 + \xi G - \alpha_\gamma D) v_\gamma^1 && \text{(par (5.48))} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_\gamma H^1 v_\gamma^1) + \xi G \sum_{\gamma \in \Gamma} v_\gamma^1 - D \sum_{\gamma \in \Gamma} (\alpha_\gamma v_\gamma^1) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_\gamma d_\gamma - \eta_\gamma H^2 v_\gamma^2) + \xi u - D \sum_{\gamma \in \Gamma} (\alpha_\gamma v_\gamma^1) && \text{(par (5.47) et (5.46))} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_\gamma d_\gamma - \pi_\gamma^2 v_\gamma^2) + \xi u - D \sum_{\gamma \in \Gamma} (\alpha_\gamma v_\gamma^1) && \text{(par (5.49)).} \end{aligned}$$

Remarquons de plus que l'objectif du problème primal du 2^e niveau est

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} (\pi_\gamma^1 v_\gamma^1 + \pi_\gamma^2 v_\gamma^2) = \sum_{\gamma \in \Gamma} (T^1 v_\gamma^1 + \alpha_\gamma D v_\gamma^1 + \pi_\gamma^2 v_\gamma^2)$$

et que celui du problème dual du 2^e niveau est

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \eta_{\gamma} d_{\gamma} + \xi u.$$

Encore une fois, par le théorème de la dualité forte, nous savons qu'à l'optimum, ces deux fonctions ont la même valeur. Nous pouvons ainsi déduire que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} T^1 v_{\gamma}^1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_{\gamma} d_{\gamma} - \pi_{\gamma}^2 v_{\gamma}^2) + \xi u - D \sum_{\gamma \in \Gamma} (\alpha_{\gamma} v_{\gamma}^1),$$

ce qui confirme le résultat précédent. Notons aussi que dans ce cas-ci, en raison de la présence des groupes d'usagers, nous ne pouvons pas poser une hypothèse analogue à celle nous ayant permis d'obtenir l'équation (5.12). En effet, le prix T_f d'un vol $f \in F^1$ doit être le même pour tous les passagers, peu importe le groupe auquel ceux-ci appartiennent. Or ce vol f peut paraître avantageux pour les passagers d'un groupe donné et trop dispendieux pour les passagers d'un autre groupe. Il ne s'agit donc plus d'une situation 'binaire' comme dans le cas du modèle (111). Ainsi, nous ne sommes pas en mesure de retirer la contrainte de complémentarité (5.48) du modèle.

En utilisant cette nouvelle expression pour l'objectif et en éliminant les contraintes triviales, nous obtenons le modèle complet, soit

$$\max_{T_1, v, \xi, \eta} \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_{\gamma} d_{\gamma} - \pi_{\gamma}^2 v_{\gamma}^2 - \alpha_{\gamma} D) + \xi u \quad (5.50)$$

$$\text{s.l.c.} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} G v_{\gamma}^1 \leq u \quad (5.51)$$

$$H^1 v_{\gamma}^1 + H^2 v_{\gamma}^2 = d_{\gamma} \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.52)$$

$$\eta_{\gamma} H^1 + \xi G \leq \pi_{\gamma}^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.53)$$

$$\eta_{\gamma} H^2 \leq \pi_{\gamma}^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.54)$$

$$-\xi (u - \sum_{\gamma \in \Gamma} G v_{\gamma}^1) = 0 \quad (5.55)$$

$$(\pi_{\gamma}^1 - \eta_{\gamma} H^1 - \xi G) v_{\gamma}^1 = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.56)$$

$$(\pi_{\gamma}^2 - \eta_{\gamma} H^2) v_{\gamma}^2 = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.57)$$

$$\xi \leq 0 \quad (5.58)$$

$$v_{\gamma}^1, v_{\gamma}^2 \geq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.59)$$

5.2.4 Formulation mixte

Si ce n'était des contraintes de complémentarité (5.55), (5.56) et (5.57), le dernier modèle présenté serait linéaire. En utilisant la même approche qu'à la section précédente, ces contraintes peuvent être remplacées par de nouvelles contraintes linéaires utilisant des variables binaires. Le modèle résultant est donc un programme linéaire à variables mixtes continues et entières.

Ainsi, à la contrainte (5.55) seront associés les vecteurs x^1 et $x^2 \in \{0, 1\}^{|A|}$, à la contrainte (5.56) les vecteurs y_γ^1 et $y_\gamma^2 \in \{0, 1\}^{|F^1|}$, et à la contrainte (5.57) les vecteurs z_γ^1 et $z_\gamma^2 \in \{0, 1\}^{|F^2|}$. Le programme résultant est

$$T_1, v, \xi, \eta, x, y, z \quad \max \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_\gamma d_\gamma - \pi_\gamma^2 v_\gamma^2 - \alpha_\gamma D) + \xi u \quad (5.60)$$

$$\text{s.l.c.} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} G v_\gamma^1 \leq u \quad (5.61)$$

$$H^1 v_\gamma^1 + H^2 v_\gamma^2 = d_\gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.62)$$

$$\eta_\gamma H^1 + \xi G \leq \pi_\gamma^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.63)$$

$$\eta_\gamma H^2 \leq \pi_\gamma^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.64)$$

$$u - \sum_{\gamma \in \Gamma} G v_\gamma^1 \leq M_x x^1 \quad (5.65)$$

$$-\xi \leq N_x x^2 \quad (5.66)$$

$$x^1 + x^2 \leq 1 \quad (5.67)$$

$$\pi_\gamma^1 - \eta_\gamma H^1 - \xi G \leq M_{y,\gamma} y_\gamma^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.68)$$

$$v_\gamma^1 \leq N_{y,\gamma} y_\gamma^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.69)$$

$$y_\gamma^1 + y_\gamma^2 \leq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.70)$$

$$\pi_\gamma^2 - \eta_\gamma H^2 \leq M_{z,\gamma} z_\gamma^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.71)$$

$$v_\gamma^2 \leq N_{z,\gamma} z_\gamma^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.72)$$

$$z_\gamma^1 + z_\gamma^2 \leq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.73)$$

$$\xi \leq 0 \quad (5.74)$$

$$v_\gamma^1, v_\gamma^2 \geq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.75)$$

$$x^1, x^2 \in \{0, 1\}^{|A|} \quad (5.76)$$

$$y_\gamma^1, y_\gamma^2 \in \{0, 1\}^{|F^1|} \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.77)$$

$$z_\gamma^1, z_\gamma^2 \in \{0, 1\}^{|F^2|} \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (5.78)$$

Les coefficients des matrices M et N sont calculés de la même façon que dans le cas du modèle (111), en tenant cependant compte des groupes d'utilisateurs.

5.3 N groupes d'utilisateurs, N classes tarifaires, trois critères ($NN3$)

Dans cette section, nous poursuivons le développement du modèle présenté aux sections précédentes en y ajoutant de nouveaux éléments, le but visé étant de le rendre plus conforme à la réalité.

Jusqu'à maintenant, nous supposons que tous les passagers d'un vol, bien qu'appartenant possiblement à des groupes différents, payaient le même prix pour leur billet. En d'autres mots, nous supposons qu'à un vol correspondait un seul produit tarifaire, qui pouvait cependant être perçu différemment par les utilisateurs. En pratique, un vol comporte plusieurs classes tarifaires, chacune étant définie par un ensemble d'avantages, de services et de restrictions qui lui sont propres. Notons qu'une classe tarifaire ne correspond aucunement à une classe physique (cabine) d'un avion. En fait, la cabine associée à une classe tarifaire n'est qu'une des nombreuses caractéristiques définissant cette classe tarifaire, parmi lesquelles on retrouve aussi les restrictions temporelles sur l'achat du billet, les formalités de remboursement, l'accès à certains services à bord, des points supplémentaires d'un programme de fidélisation, etc.

Bien entendu, ces avantages, services et restrictions sont perçus différemment par les utilisateurs de groupes distincts. Nous allons poser l'hypothèse que les caractéristiques définissant une classe tarifaire sont quantifiables et peuvent s'exprimer de façon numérique. Les classes auxquelles sont liés un meilleur service et des avantages plus considérables ou encore des restrictions moindres auront ainsi une valeur numérique plus élevée que les classes possédant un service moins complet ou des conditions plus restrictives. Nous appellerons cette valeur la 'qualité de service' de la classe tarifaire. Nous supposons

aussi que les usagers de différents groupes accordent une valeur monétaire précise à la qualité de service et que cette valeur est aussi quantifiable, c'est-à-dire qu'elle puisse s'exprimer en dollars par 'unité de qualité de service'. Cette valorisation monétaire de la qualité de service constitue ainsi le troisième critère entrant dans la composition du prix apparent d'un billet.

Encore une fois, nous devons introduire de nouveaux éléments de notation. Ainsi, soit :

- Φ : Ensemble des classes tarifaires.
- Q_φ : Qualité de service associée à la classe tarifaire $\varphi \in \Phi$.
- β_γ : Valeur monétaire de la qualité de service pour un passager du groupe $\gamma \in \Gamma$
- $T_{f,\varphi}$: Prix du vol $f \in F$ en classe $\varphi \in \Phi$.
- $v_{f,\gamma,\varphi}$: Nombre de passagers du groupe $\gamma \in \Gamma$ en classe $\varphi \in \Phi$ sur le vol $f \in F$.
- $\pi_{f,\gamma,\varphi}$: Prix apparent du vol $f \in F$ pour un passager du groupe $\gamma \in \Gamma$ en classe $\varphi \in \Phi$.

Nous pouvons donc exprimer le prix apparent du vol $f \in F$ pour un passager du groupe $\gamma \in \Gamma$ en classe $\varphi \in \Phi$ comme

$$\pi_{f,\gamma,\varphi} = T_{f,\varphi} + \alpha_\gamma D_f + \beta_\gamma / Q_\varphi.$$

Cette expression met en évidence les trois critères entrant maintenant dans la composition du prix apparent. Nous pouvons aussi constater que, en raison de la formulation du dernier critère, c'est-à-dire celui ayant trait à la qualité de service associée à la classe tarifaire, pour une classe tarifaire φ^1 possédant un indice de qualité plus élevé que celui d'une autre classe φ^2 (c'est-à-dire $Q_{\varphi^1} > Q_{\varphi^2}$), le prix apparent sera plus bas, et ce peu importe la valeur que les usagers accordent à la qualité de service (en supposant bien sûr que cette dernière valeur soit positive). Ainsi, une qualité de service plus grande a pour effet de diminuer le prix apparent. Nous pouvons maintenant écrire le modèle incorporant ces nouveaux éléments :

• **Objectif du 1^{er} niveau** (Point de vue du meneur)

L'objectif du meneur (1^{er} niveau) demeure toujours le même, c'est-à-dire maximiser les revenus sur l'ensemble de ses vols, en tenant maintenant compte des groupes d'usagers

et des classes tarifaires.

• **Objectif du 2^e niveau** (Point de vue des passagers)

L'objectif des passagers (2^e niveau) tient maintenant compte de la qualité de service dans la composition du prix apparent.

• **Contraintes**

- ① La contrainte de capacité sur les arcs (c'est-à-dire appareils) est toujours présente, mais celle-ci doit maintenant tenir compte des différentes classes tarifaires présentes sur un arc.
- ② La demande en usagers des différents groupes sur chaque marché doit être satisfaite.
- ③ Le nombre de passagers sur un vol donné doit être non négatif, et ce peu importe le groupe auquel appartiennent ces passagers ou la classe tarifaire qu'ils utilisent.

Le modèle complet est donc :

$$\begin{aligned}
 & \max_{T_1, v} \sum_{f \in F^1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} T_{f,\varphi}^1 v_{f,\gamma,\varphi}^1 \\
 & \min_v \sum_{f \in F^1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} \pi_{f,\gamma,\varphi}^1 v_{f,\gamma,\varphi}^1 + \sum_{f \in F^2} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} \pi_{f,\gamma,\varphi}^2 v_{f,\gamma,\varphi}^2 \\
 & \text{s.l.c} \quad \sum_{f|a \in A(f)} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} v_{f,\gamma,\varphi}^1 \leq u_a \quad \forall a \in A^1 \quad \text{①} \\
 & \quad \sum_{f \in F^1(k)} \sum_{\varphi \in \Phi} v_{f,\gamma,\varphi}^1 + \sum_{f \in F^2(k)} \sum_{\varphi \in \Phi} v_{f,\gamma,\varphi}^2 = d_{k,\gamma} \quad \forall k \in K, \forall \gamma \in \Gamma \quad \text{②} \\
 & \quad v_{f,\gamma,\varphi}^i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}, \forall f \in F, \\
 & \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi. \quad \text{③}
 \end{aligned}$$

5.3.1 Formulation compacte (matricielle) et transformations

À cause de l'ajout de classes tarifaires au modèle, la notation matricielle introduite précédemment doit être encore légèrement modifiée afin d'exprimer le nouveau modèle de façon compacte. Ainsi, soit

$\pi_{\gamma,\varphi}^1 \in \mathbb{R}^{1 \times |F^1|}$: Vecteur-ligne du coût apparent des vols du meneur pour un usager du groupe $\gamma \in \Gamma$ en classe $\varphi \in \Phi$.

$\pi_{\gamma,\varphi}^2 \in \mathbb{R}^{1 \times |F^2|}$: Vecteur-ligne du coût apparent des vols de la compétition pour un usager du groupe $\gamma \in \Gamma$ en classe $\varphi \in \Phi$.

$v_{\gamma,\varphi}^1 \in \mathbb{R}^{|F^1|}$: Vecteur-colonne du nombre de passagers du groupe $\gamma \in \Gamma$ en classe $\varphi \in \Phi$ sur les vols du meneur.

$v_{\gamma,\varphi}^2 \in \mathbb{R}^{|F^2|}$: Vecteur-colonne du nombre de passagers du groupe $\gamma \in \Gamma$ en classe $\varphi \in \Phi$ sur les vols de la compétition.

Les vecteurs ξ , u , d_γ et η_γ conservent la même signification (et dimension), tout comme les matrices G , H^1 et H^2 . Nous sommes donc en mesure de récrire le modèle comme :

$$\begin{aligned} & \max_{T_1, v} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} T_\varphi^1 v_{\gamma,\varphi}^1 \\ & \min_v \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} \pi_{\gamma,\varphi}^1 v_{\gamma,\varphi}^1 + \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} \pi_{\gamma,\varphi}^2 v_{\gamma,\varphi}^2 \\ & \text{s.l.c} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} G v_{\gamma,\varphi}^1 \leq u_a \quad \forall a \in A^1 \quad (\xi) \\ & \quad \sum_{\varphi \in \Phi} v_{\gamma,\varphi}^1 + \sum_{\varphi \in \Phi} v_{\gamma,\varphi}^2 = d_{k,\gamma} \quad \forall k \in K, \forall \gamma \in \Gamma \quad (\eta_\gamma) \\ & \quad v_{\gamma,\varphi}^i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}, \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi, \end{aligned}$$

où

$$\pi_{\gamma,\varphi}^i = T_\varphi^i + \alpha_\gamma D^i + \beta_\gamma / Q_\varphi, \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

Afin que les dimensions des vecteurs concordent, nous devons maintenant considérer le paramètre Q_φ comme un vecteur-ligne dans $\mathbb{R}^{|F^i|}$ dont tous les coefficients représentent la valeur de la qualité de service associée à la classe $\varphi \in \Phi$. Ainsi, le dual du problème de 2^e niveau est

$$\begin{aligned} & \max_{\xi, \eta} \quad \xi u + \sum_{\gamma \in \Gamma} \eta_\gamma d \\ & \text{s.l.c.} \quad \eta_\gamma H^1 + \xi G \leq \pi_{\gamma,\varphi}^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (v_{\gamma,\varphi}^1) \\ & \quad \eta_\gamma H^2 \leq \pi_{\gamma,\varphi}^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (v_{\gamma,\varphi}^2) \end{aligned}$$

$$\xi \leq 0$$

$$\eta_\gamma \text{ libre } \forall \gamma \in \Gamma.$$

Les conditions d'optimalité du 2^e niveau sont donc :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} G v_{\gamma, \varphi}^1 &\leq u \\ \sum_{\varphi \in \Phi} H^1 v_{\gamma, \varphi}^1 + \sum_{\varphi \in \Phi} H^2 v_{\gamma, \varphi}^2 &= d_\gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma \\ v_{\gamma, \varphi}^i &\geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}, \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \end{aligned} \right\} \text{Faisabilité primale}$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_\gamma H^1 + \xi G &\leq \pi_{\gamma, \varphi}^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \\ \eta_\gamma H^2 &\leq \pi_{\gamma, \varphi}^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \\ \xi &\leq 0 \end{aligned} \right\} \text{Faisabilité duale}$$

$$\left. \begin{aligned} -\xi (u - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} G v_{\gamma, \varphi}^1) &= 0 \\ \eta_\gamma (d_\gamma - \sum_{\varphi \in \Phi} H^1 v_{\gamma, \varphi}^1 - \sum_{\varphi \in \Phi} H^2 v_{\gamma, \varphi}^2) &= 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \\ (\pi_{\gamma, \varphi}^1 - \eta_\gamma H^1 - \xi G) v_{\gamma, \varphi}^1 &= 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \\ (\pi_{\gamma, \varphi}^2 - \eta_\gamma H^2) v_{\gamma, \varphi}^2 &= 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \end{aligned} \right\} \text{Complémentarité}$$

En substituant au problème de 2^e niveau ses conditions d'optimalité, nous obtenons :

$$\max_{T_1, v, \eta, \xi} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} T_\varphi^1 v_{\gamma, \varphi}^1 \quad (5.79)$$

$$\text{s.l.c} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} G v_{\gamma, \varphi}^1 \leq u \quad (5.80)$$

$$\sum_{\varphi \in \Phi} H^1 v_{\gamma, \varphi}^1 + \sum_{\varphi \in \Phi} H^2 v_{\gamma, \varphi}^2 = d_\gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.81)$$

$$v_{\gamma, \varphi}^i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad (5.82)$$

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi$$

$$\eta_\gamma H^1 + \xi G \leq \pi_{\gamma, \varphi}^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.83)$$

$$\eta_\gamma H^2 \leq \pi_{\gamma, \varphi}^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.84)$$

$$\xi \leq 0 \quad (5.85)$$

$$-\xi (u - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} G v_{\gamma, \varphi}^1) = 0 \quad (5.86)$$

$$\eta_{\gamma} (d_{\gamma} - \sum_{\varphi \in \Phi} H^1 v_{\gamma, \varphi}^1 - \sum_{\varphi \in \Phi} H^2 v_{\gamma, \varphi}^2) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.87)$$

$$(\pi_{\gamma, \varphi}^1 - \eta_{\gamma} H^1 - \xi G) v_{\gamma, \varphi}^1 = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.88)$$

$$(\pi_{\gamma, \varphi}^2 - \eta_{\gamma} H^2) v_{\gamma, \varphi}^2 = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.89)$$

Nous nous retrouvons ici avec le même problème qu'aux sections précédentes, c'est-à-dire que l'objectif (5.79) du dernier programme présenté n'est pas linéaire. Cependant, en effectuant quelques manipulations algébriques, nous pouvons obtenir un objectif linéaire équivalent. En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} T_{\varphi}^1 v_{\gamma, \varphi}^1 &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} (\eta_{\gamma} H^1 + \xi G - (\alpha_{\gamma} D + \beta_{\gamma} / Q_{\varphi})) v_{\gamma, \varphi}^1 \quad \text{par (5.88)} \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} (\eta_{\gamma} H^1 v_{\gamma, \varphi}^1) + \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} (\xi G v_{\gamma, \varphi}^1) \\ &\quad - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} (\alpha_{\gamma} D + \beta_{\gamma} / Q_{\varphi}) v_{\gamma, \varphi}^1 \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_{\gamma} d_{\gamma} - \sum_{\varphi \in \Phi} \eta_{\gamma} H^2 v_{\gamma, \varphi}^2) + \xi u \\ &\quad - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} (\alpha_{\gamma} D + \beta_{\gamma} / Q_{\varphi}) v_{\gamma, \varphi}^1 \quad (\text{par (5.87) et (5.86)}) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_{\gamma} d_{\gamma} - \sum_{\varphi \in \Phi} \pi_{\gamma, \varphi}^2 v_{\gamma, \varphi}^2) + \xi u \\ &\quad - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} (\alpha_{\gamma} D + \beta_{\gamma} / Q_{\varphi}) v_{\gamma, \varphi}^1 \quad (\text{par (5.89)}) \end{aligned}$$

Encore une fois, remarquons que l'objectif du problème primal de 2^e niveau est

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} (\pi_{\gamma, \varphi}^1 v_{\gamma, \varphi}^1 + \pi_{\gamma, \varphi}^2 v_{\gamma, \varphi}^2) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} (T_{\varphi}^1 v_{\gamma, \varphi}^1 + (\alpha_{\gamma} D + \beta_{\gamma} / Q_{\varphi}) v_{\gamma, \varphi}^1 + \pi_{\gamma, \varphi}^2 v_{\gamma, \varphi}^2),$$

et que celui du problème dual de 2^e niveau est

$$\xi u + \sum_{\gamma \in \Gamma} \eta_{\gamma} d_{\gamma}.$$

En se basant sur le théorème de la dualité forte, nous pouvons déduire que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} T_{\varphi}^1 v_{\gamma, \varphi}^1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_{\gamma} d_{\gamma} - \sum_{\varphi \in \Phi} \pi_{\gamma, \varphi}^2 v_{\gamma, \varphi}^2) + \xi u - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} (\alpha_{\gamma} D + \beta_{\gamma} / Q_{\varphi}) v_{\gamma, \varphi}^1,$$

ce qui confirme le dernier résultat. En utilisant cette nouvelle fonction objectif linéaire et en éliminant les contraintes triviales, nous obtenons le modèle complet suivant :

$$\max_{T_1, v, \eta, \xi} \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_\gamma d_\gamma - \sum_{\varphi \in \Phi} \pi_{\gamma, \varphi}^2 v_{\gamma, \varphi}^2) + \xi u - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} (\alpha_\gamma D + \beta_\gamma / Q_\varphi) v_{\gamma, \varphi}^1 \quad (5.90)$$

$$\text{s.l.c.} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} G v_{\gamma, \varphi}^1 \leq u \quad (5.91)$$

$$\sum_{\varphi \in \Phi} H^1 v_{\gamma, \varphi}^1 + \sum_{\varphi \in \Phi} H^2 v_{\gamma, \varphi}^2 = d_\gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.92)$$

$$\eta_\gamma H^1 + \xi G \leq \pi_{\gamma, \varphi}^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.93)$$

$$\eta_\gamma H^2 \leq \pi_{\gamma, \varphi}^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.94)$$

$$-\xi (u - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} G v_{\gamma, \varphi}^1) = 0 \quad (5.95)$$

$$(\pi_{\gamma, \varphi}^1 - \eta_\gamma H^1 - \xi G) v_{\gamma, \varphi}^1 = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.96)$$

$$(\pi_{\gamma, \varphi}^2 - \eta_\gamma H^2) v_{\gamma, \varphi}^2 = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.97)$$

$$v_{\gamma, \varphi}^i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}, \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.98)$$

$$\xi \leq 0 \quad (5.99)$$

5.3.2 Formulation mixte

Les contraintes de complémentarité non linéaires du dernier modèle peuvent être remplacées par de nouvelles contraintes combinées à l'ajout de variables binaires. Le modèle résultant de ces transformations est donc un programme linéaire mixte à variables entières et continues.

Ainsi, à la contrainte (5.95) seront associés les vecteurs x^1 et $x^2 \in \{0, 1\}^{|A^1|}$; aux contraintes (5.96) les vecteurs $y_{\gamma, \varphi}^1$ et $y_{\gamma, \varphi}^2 \in \{0, 1\}^{|F^1|}$; et aux contraintes (5.97) les vecteurs $z_{\gamma, \varphi}^1$ et $z_{\gamma, \varphi}^2 \in \{0, 1\}^{|F^2|}$. Le modèle complet est alors :

$$\max_{T_1, v, \xi, \eta, x, y, z} Z(T_1, v, \xi, \eta) \quad (5.100)$$

$$\text{s.l.c.} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} G v_{\gamma, \varphi}^1 \leq u \quad (5.101)$$

$$\sum_{\varphi \in \Phi} H^1 v_{\gamma, \varphi}^1 + \sum_{\varphi \in \Phi} H^2 v_{\gamma, \varphi}^2 = d_\gamma \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad (5.102)$$

$$\eta_\gamma H^1 + \xi G \leq \pi_{\gamma,\varphi}^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.103)$$

$$\eta_\gamma H^2 \leq \pi_{\gamma,\varphi}^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.104)$$

$$u - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} G v_{\gamma,\varphi}^1 \leq M_x x^1 \quad (5.105)$$

$$-\xi \leq N_x x^2 \quad (5.106)$$

$$x^1 + x^2 \leq 1 \quad (5.107)$$

$$\pi_{\gamma,\varphi}^1 - \eta_\gamma H^1 - \xi G \leq M_{y,\gamma,\varphi} y_{\gamma,\varphi}^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.108)$$

$$v_{\gamma,\varphi}^1 \leq N_{y,\gamma,\varphi} y_{\gamma,\varphi}^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.109)$$

$$y_{\gamma,\varphi}^1 + y_{\gamma,\varphi}^2 \leq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.110)$$

$$\pi_{\gamma,\varphi}^2 - \eta_\gamma H^2 \leq M_{z,\gamma,\varphi} z_{\gamma,\varphi}^1 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.111)$$

$$v_{\gamma,\varphi}^2 \leq N_{z,\gamma,\varphi} z_{\gamma,\varphi}^2 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.112)$$

$$z_{\gamma,\varphi}^1 + z_{\gamma,\varphi}^2 \leq 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.113)$$

$$\xi \leq 0 \quad (5.114)$$

$$v_{\gamma,\varphi}^i \geq 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.115)$$

$$x^i \in \{0, 1\}^{|A^1|} \quad (5.116)$$

$$y_{\gamma,\varphi}^i \in \{0, 1\}^{|F^1|} \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi \quad (5.117)$$

$$z_{\gamma,\varphi}^i \in \{0, 1\}^{|F^2|} \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall \varphi \in \Phi, \quad (5.118)$$

où $i \in \{1, 2\}$ et

$$Z(T_1, v, \xi, \eta) = \sum_{\gamma \in \Gamma} (\eta_\gamma d_\gamma - \sum_{\varphi \in \Phi} \pi_{\gamma,\varphi}^2 v_{\gamma,\varphi}^2) + \xi u - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\varphi \in \Phi} (\alpha_\gamma D + \beta_\gamma / Q_\varphi) v_{\gamma,\varphi}^1.$$

Encore une fois, le contenu des matrices M et N est obtenu en utilisant un raisonnement analogue à celui décrit aux sections précédentes, en tenant cependant compte des nouveaux éléments ajoutés au modèle dans la présente section.

Chapitre 6

Aspects informatiques

Ce chapitre présente TOLLER, le programme informatique développé dans le cadre des travaux entourant ce mémoire afin de tester divers modèles mathématiques bi-niveau avec des données réelles. Ce nom provient du *Toll Setting Problem*, le problème de tarification de réseaux autoroutiers, une des premières applications du programme. On y décrit les exigences que le programme doit remplir, ainsi que son architecture et son fonctionnement général. Une section est aussi consacrée à la description plus spécifique de AirTOLLER, la version de TOLLER développée afin de tester les modèles auxquels s'intéresse ce mémoire, c'est-à-dire ceux ayant trait au problème de G.d.R. en transport aérien. Ce chapitre peut en quelque sorte servir de guide d'utilisateur à quiconque désire utiliser ou contribuer au développement de TOLLER.

6.1 Exigences

Tel que mentionné dans l'introduction, un des objectifs du projet associé à ce mémoire, outre le développement d'un modèle bi-niveau pour résoudre le problème de G.d.R. en transport aérien, est la mise en place d'une infrastructure logicielle permettant l'implantation, l'évaluation et la validation de ce modèle avec des données réelles. La réalisation de ce projet s'inscrit dans un contexte de recherche académique plus large, où d'autres intervenants rattachés au DIRO, au GERAD ou encore au CRT s'intéressent à l'utilisation de modèles bi-niveau pour résoudre des problèmes de G.d.R. et de tari-

fication dans des domaines différents du transport aérien. Il est donc souhaitable que cette infrastructure logicielle puisse aussi être utilisée par ces autres intervenants sans demander des modifications trop importantes. Le programme informatique résultant doit donc être

- **portable** : le programme doit fonctionner dans différents environnements informatiques,
- **clair** : le code doit être clair, concis, précis, utilisant des constructions reconnues et en évitant les idiomes obscurs ; l'implantation et surtout les interfaces doivent être bien documentées,
- **modulaire** : il doit y avoir une démarcation claire entre les différentes unités fonctionnelles (modules), de sorte que le programme puisse être facilement modifié pour accommoder une nouvelle application,
- **stable** : le programme doit fonctionner correctement et de ne pas être affligé de bogues importants.

La première de ces exigences, la portabilité, est satisfaite en utilisant le langage de programmation standardisé C++. Il s'agit d'un des langages de programmation les plus utilisés dans le monde, après VisualBasic et C et avant Java, et le demeurera vraisemblablement pendant les années à venir. Une multitude d'outils (compilateurs, débogueurs, etc.) commerciaux ou gratuits sont disponibles pour ce langage, sur toutes les plateformes majeures. TOLLER fut principalement développé dans l'environnement informatique du CRT, sous le système d'exploitation Unix et avec les outils de programmation gratuits de la Fondation GNU. Cependant, aucun appel système (*system call*) particulier à cet environnement ne fut utilisé, si bien que TOLLER devrait facilement pouvoir être compilé sous un autre système d'exploitation.

Un autre avantage du langage C++ est que celui-ci supporte le paradigme de programmation orientée-objet (POO). La POO est un des sujets les plus étudiés en génie logiciel et un nombre incalculable de parutions lui ont été consacrées. On suggérera ici le livre de Booch [Boo94], lequel constitue une référence classique dans le domaine. Cette propriété du langage C++ fut d'ailleurs grandement exploitée lors de la conception et de l'implantation de TOLLER. L'utilisation de la POO a facilité la mise en place d'une

architecture logicielle simple et modulaire, laquelle sera décrite plus en détails dans la prochaine section. De nombreuses classes de base ont été développées, de sorte qu'un utilisateur éventuel de TOLLER pourrait créer de nouvelles classes descendant de celles-ci et les adapter aux besoins de son domaine d'application.

Tout au cours du développement, une attention particulière fut portée à ce que le code de TOLLER soit clair et facilement compréhensible. Dans la mesure du possible, seulement des constructions du langage C++ bien reconnues dans la communauté de programmeurs utilisant ce langage furent utilisés. En particulier, aucun idiome¹ non conventionnel ne fut appliqué. Aussi, les interfaces ont été documentées à l'aide d'un outil spécial capable de générer une documentation graphique sous format HTML. Cette documentation 'navigable' accompagne le code source.

Finalement, en ce qui a trait à la stabilité du programme, les tests menés jusqu'à maintenant laissent croire que le programme est fiable et n'est pas affligé de bogues majeurs. Toutefois, il faut se rappeler que TOLLER fut développé avec des outils du domaine public dans un contexte académique et par une seule personne. Ce programme ne possède donc pas les qualités normalement associées aux logiciels industriels. Ce n'était d'ailleurs pas le but de l'exercice de développer un tel logiciel. TOLLER devrait être perçu comme un prototype servant à tester la validité des modèles mathématiques dans un contexte académique.

6.2 Architecture

Tel que mentionné ci-dessus, la structure de TOLLER se doit d'être claire et modulaire afin qu'il soit possible d'adapter facilement et rapidement le logiciel à d'autres applications. L'architecture que nous décrivons dans cette section remplit cette exigence.

¹Un *idiome*, dans le contexte d'un langage de programmation, est une façon concise d'organiser le code d'un programme, souvent en utilisant des constructions et des propriétés plus obscures du langage, afin de résoudre un problème récurrent. Tous les langages de programmation possèdent des idiomes reconnus et utilisés par de nombreux programmeurs. Cependant, chaque organisation ou même chaque programmeur individuel développe à la longue ses propres idiomes, lesquels sont souvent difficiles à comprendre pour d'autres programmeurs, nuisant ainsi à la clarté du code.

TOLLER se compose en effet de modules compilés indépendamment sous forme de bibliothèques (souvent appelées 'logithèques'). Chaque module remplit une fonction bien définie et interagit avec les autres modules en échangeant des objets avec ceux-ci. Il est donc possible d'ajouter de nouveaux modules, en autant que ceux-ci respectent l'interface des modules avec lesquels ils désirent interagir. Cette flexibilité permet d'adapter le programme à d'autres applications apparentées. En plus de l'application décrite dans le présent mémoire, c'est-à-dire la G.d.R. en transport aérien, TOLLER a aussi été utilisé pour résoudre des problèmes de tarification sur des réseaux autoroutiers sans capacité, en se basant sur les modèles et les algorithmes décrits dans [LMS98] et [LMS].

La figure 6.1 présente de façon schématique l'architecture de TOLLER. À l'extérieur du programme, on retrouve les données, représentées par le traditionnel cylindre, lesquelles peuvent prendre différentes formes selon l'application. On y aperçoit également les fichiers `toller.conf`, qui contient des informations sur la configuration des différents paramètres du programme, que l'on peut ainsi ajuster sans avoir à modifier le code source et à recompiler le programme, ainsi que le fichier `toller.sol`, qui contient les résultats du programme. Ces résultats sont formatés afin d'être facilement lisibles. Les noms des deux précédents fichiers ne sont que les noms par défaut utilisés par TOLLER et peuvent être configurés pour prendre d'autres valeurs.

Le programme lui-même, représenté par la grande boîte rectangulaire, se compose de sept modules logiques principaux. Parmi ceux-ci, deux modules spéciaux sont représentés par des rectangles horizontaux. Il s'agit du module MAIN, qui est responsable de l'initialisation du programme et de la communication entre les modules, ainsi que du module GEN, qui contient la fonctionnalité générique associée à aucun module particulier, comme le traitement d'erreurs ou la lecture de fichiers de configuration. Ces deux modules essentiellement utilitaires sont de peu d'intérêt et ne seront pas décrits plus en détails. Les autres modules sont :

– **CPLEX**

Le module CPLEX est ce qu'on appelle dans le jargon informatique une composante de tierce-partie (*third-party software*), c'est-à-dire une bibliothèque commerciale précompilée qu'on intègre au reste du programme. Le code source de ce module est

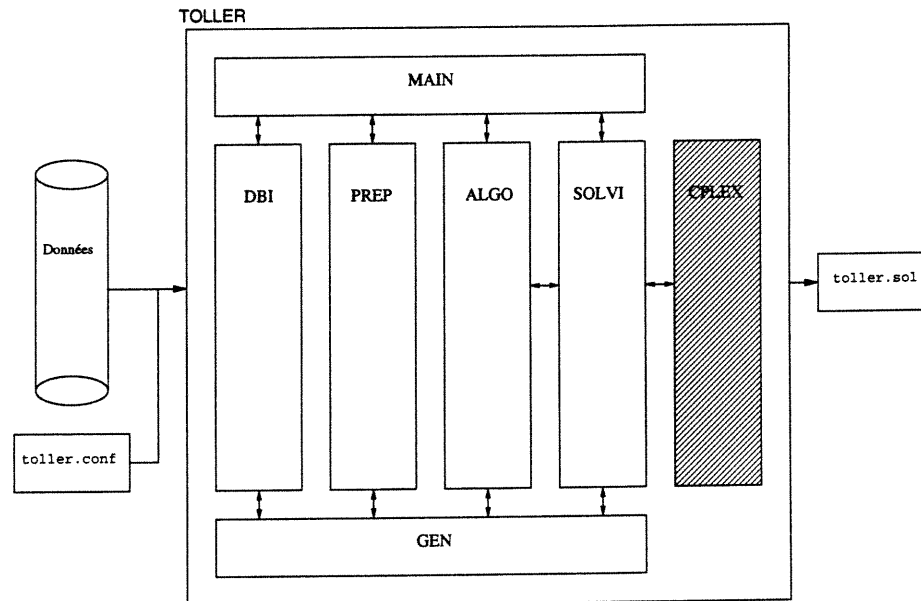


FIG. 6.1 – Schéma architectural du logiciel TOLLER.

bien entendu secret et inaccessible, d'où la couleur ombragée utilisée pour le représenter. Les autres modules communiquent avec CPLEX au moyen d'une interface prédéfinie. CPLEX contient une série d'algorithmes pouvant résoudre divers types de problèmes d'optimisation mathématique (programmes linéaires, quadratiques, mixtes, à variables entières, etc.), implantés de façon très efficace. Comme son nom le suggère, CPLEX (et son interface) est implanté en langage C.

– SOLVI

Le module SOLVI (pour *SOLVer Interface*) est une interface orientée-objet avec le module CPLEX. L'interface de CPLEX, bien que complète, est peu intuitive, relativement rigide et oblige le programmeur à utiliser plusieurs constructions de bas niveau (pointeurs, tableaux alloués dynamiquement, etc.), ce qui est en général peu agréable et augmente la possibilité de bogues très difficiles à identifier. Une interface de plus haut niveau facilite donc l'utilisation du module CPLEX et permet aux autres modules d'en faire abstraction, de sorte que si le besoin d'utiliser une autre librairie d'optimisation mathématique se présentait, seule l'implantation module SOLVI devrait être modifiée. L'élément central de ce module est la

classe `MathProg`. Il s'agit d'une classe abstraite ne pouvant pas être instanciée. La classe `MixedIntProg` hérite de l'interface de `MathProg` et implante les fonctions propres à la résolution de programmes mathématiques mixtes (continus-entiers). De plus, chaque instance de la classe `MathProg` (et des classes descendant de celle-ci) contient de références à des objets de type `Variable`, `Objective` et `Constraint`. On construit donc un programme mixte en créant un objet de type `MixedIntProg` et en y ajoutant des objets de type `Variable`, `Objective` et `Constraint` ayant les valeurs désirées. Les fonctions ou structures de données de CPLEX ne sont jamais manipulées directement.

– **ALGO**

Le module `ALGO` possède la fonctionnalité permettant d'implanter les modèles mathématiques étudiés ou encore des algorithmes de résolution pour ceux-ci. On y retrouve notamment la classe abstraite `Formulator`, dont les classes descendantes implantent une formulation précise et retournent un objet de type `MathProg` 'formulé', c'est-à-dire prêt à être résolu. L'information utilisée pour formuler le problème provient du module `DBI` et a été traitée par le module `PREP`.

– **PREP**

Le module `PREP` contient les fonctions de pré-traitement (*PREProcessing*) permettant de nettoyer et formater l'information provenant du module `DBI` ou encore d'obtenir de nouvelles données à partir de celles existantes. Un exemple de ceci est le calcul de plus courts chemins à partir de données d'un réseau autoroutier dans le cas du *Toll Setting Problem*. La nature des opérations effectuées par le module `PREP` de même que les algorithmes utilisés dépendent de l'application. Dans le cas du problème de G.d.R. décrit précédemment, le module `PREP` n'est pas utilisé, car toute l'information nécessaire était disponible dans la base de données.

– **DBI**

Le module `DBI` contient l'interface avec la base de données (*DataBase Interface*). L'expression 'base de données' est ici prise au sens large, puisque les données utilisées par `TOLLER` peuvent prendre plusieurs formes. Jusqu'à maintenant, il s'agissait de fichiers textes, mais comme dans le cas du module `SOLVI`, une inter-

face de haut niveau permet de faire abstraction de la véritable représentation des données et de leur format, de sorte qu'utiliser un nouveau jeu de données ayant une représentation ou un format différent n'affecterait pas les autres modules.

Ces modules constituent à notre avis une architecture de base pouvant être facilement adaptée, modifiée ou élargie afin de traiter un grand nombre de problèmes de G.d.R. et de tarification. Pour cette raison, il est peut-être plus approprié de décrire TOLLER comme un cadre pour la résolution de problèmes de G.d.R. que comme un simple programme destiné à une application bien précise.

6.3 AirTOLLER : TOLLER pour le transport aérien

Nous décrivons ici AirTOLLER, la version de TOLLER développée afin d'implanter, de tester et de valider les modèles introduits au chapitre précédent. C'est avec cette version que furent obtenus les résultats subséquents. AirTOLLER respecte l'architecture générale de TOLLER présentée ci-haut et en utilise plusieurs classes de base. Cependant, de nouvelles classes spécifiques à cette application ont été ajoutées et sont décrites ci-dessous. De plus, un modèle de données spécifique a été développé, afin de pouvoir manipuler de façon efficace les grandes quantités d'informations reliées aux problèmes de G.d.R. en transport aérien. Ce modèle fait lui aussi l'objet d'une section.

6.3.1 Particularités de AirTOLLER

Les modèles présentés au chapitre 5 s'appuient sur une formulation dans laquelle l'unité de base est le vol, et non le segment. Or, comme nous l'avons déjà expliqué, un vol est en fait un chemin dans un réseau spatio-temporel. Donc, afin d'appliquer ces formulations, nous devons au préalable explorer le réseau (composé d'arcs de segment et d'arcs d'escale) et en calculer les plus courts chemins sur les marchés (couples origine-destination) qui nous intéressent. Cette étape devrait normalement être assurée par le module PREP, lequel est responsable du pré-traitement des données. Cependant, les données nous ayant été fournies par Air Canada contenaient déjà une liste de tous les vols possibles à l'intérieur d'une fenêtre de temps donnée, éliminant ainsi le besoin

d'une étape de pré-traitement. Le module PREP ne fait donc pas partie de AirTOLLER. D'ailleurs, nous considérons le vol comme un type de donnée élémentaire apparaissant (comme nous le verrons bientôt) dans notre modèle de données au même titre que le segment, et non pas comme une information secondaire 'calculée' à partir de données de base.

Les formulations propres au problème de G.d.R. en transport aérien sont implantées dans le module ALGO, à l'aide de la classe abstraite `Formulator`. De cette classe sont dérivées trois nouvelles classes appelées `FormulAir111`, `FormulAirN12` et `FormulAirNN3`, chacune permettant de créer un objet `MixedIntProg` avec la formulation appropriée. Cet objet est ensuite 'résolu' à l'aide du module SOLVI, lequel fait lui-même appel à CPLEX.

6.3.2 Modèle de données aériennes

Les modèles présentés au chapitre précédent furent testés avec des données réelles fournies par la société Air Canada, qui ne dispose toutefois pas d'un système d'information central contenant toutes les données nécessaires à leur application. En effet, nous avons eu à composer avec des données provenant de différents systèmes informatiques, souvent utilisés par des employés de départements différents. Concrètement, les données prenaient la forme d'une dizaine de fichiers textes, chacun possédant son propre format. Certains de ces fichiers avaient aussi une taille considérable, de l'ordre de la centaine de méga-octets. Ces fichiers forment un ensemble de données certes complet, mais disparate et peu approprié à l'utilisation que nous voulions en faire. Il est donc rapidement devenu évident qu'il fallait développer une nouvelle structure de données afin de modéliser, comprendre et extraire l'information désirée à partir des fichiers textes provenant d'Air Canada.

La solution retenue fut de concevoir un modèle de données relationnel permettant de décrire de façon claire et concise les informations sur le réseau aérien et d'en extraire les données dont nous avons besoin. C'est sur ce genre de modèle que sont d'ailleurs basés la plupart des systèmes de bases de données modernes. Selon ce modèle, la partie du monde réel nous intéressant (souvent appelée *Universe of Discourse*, ou UoD) est représentée par un ensemble d'entités, chacune ayant une existence physique qui lui est

propre. Ces entités sont décrites et caractérisées par leurs **attributs**. Certains de ces attributs, appelés **clés**, permettent d'identifier de façon unique l'entité. Deux entités du même type auront le même ensemble d'attributs, mais ceux-ci pourront possiblement prendre des **valeurs** distinctes. Ceci doit être le cas des attributs-clés. Quant aux autres attributs, ils peuvent prendre les mêmes valeurs pour deux entités différentes. On peut donc décrire un type d'entités E_j comme l'ensemble de toutes les entités partageant les mêmes attributs mais prenant une ou des valeurs distinctes.

De plus, les entités présentes dans l'UoD ne sont pas complètement indépendantes. En effet, certains types d'entités sont associés par ce que l'on appelle des **relations**. Mathématiquement, un type de relation R entre n types d'entités E_1, E_2, \dots, E_n induit un ensemble de relations $\{r_i\}_{i \in I}$ où chaque r_i associe n entités individuelles (e_1, e_2, \dots, e_n) , e_j étant de type E_j pour $1 \leq j \leq n$. Ainsi, chaque relation r_i est un sous-ensemble du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.

Notons que cette présentation du modèle de données relationnel ne mentionne que les éléments principaux nécessaires à la compréhension de ce qui suit. Pour une présentation plus rigoureuse et détaillée, nous suggérons le livre de Elmasri et Navathe [eS00], lequel constitue une excellente référence sur ce sujet.

Dans le cas qui nous intéresse, nous avons identifié huit types d'entités, lesquels sont : Ville, Aéroport, Marché, Segment, Vol, Avion, Groupe (d'Usagers) et Classe (Tarifaire). Les attributs de ces entités et les relations entre celles-ci peuvent être représentées graphiquement par ce que l'on appelle un diagramme ER (pour *Entity-Relationship*). Le diagramme ER de notre modèle de données aériennes est présenté à la figure 6.2. Dans ce type de schéma, les entités sont représentées par des rectangles, leurs attributs par des ellipses, et les relations entre les entités par des losanges à côté desquels on indique la cardinalité de la relation. Par exemple, si nous observons la relation entre les entités Vol et Classe illustrée à la figure 6.2, nous voyons qu'un Vol possède au moins une classe d'usagers (cardinalité 1 :N) mais qu'une Classe peut se retrouver sur aucun vol (cardinalité 0 :N). Notons aussi qu'un rectangle double représente une entité dite faible, c'est-à-dire ne possédant pas de clé unique permettant de l'identifier mais dont la clé provient d'une entité à laquelle elle est associée. Par exemple, l'entité Marché ne pos-

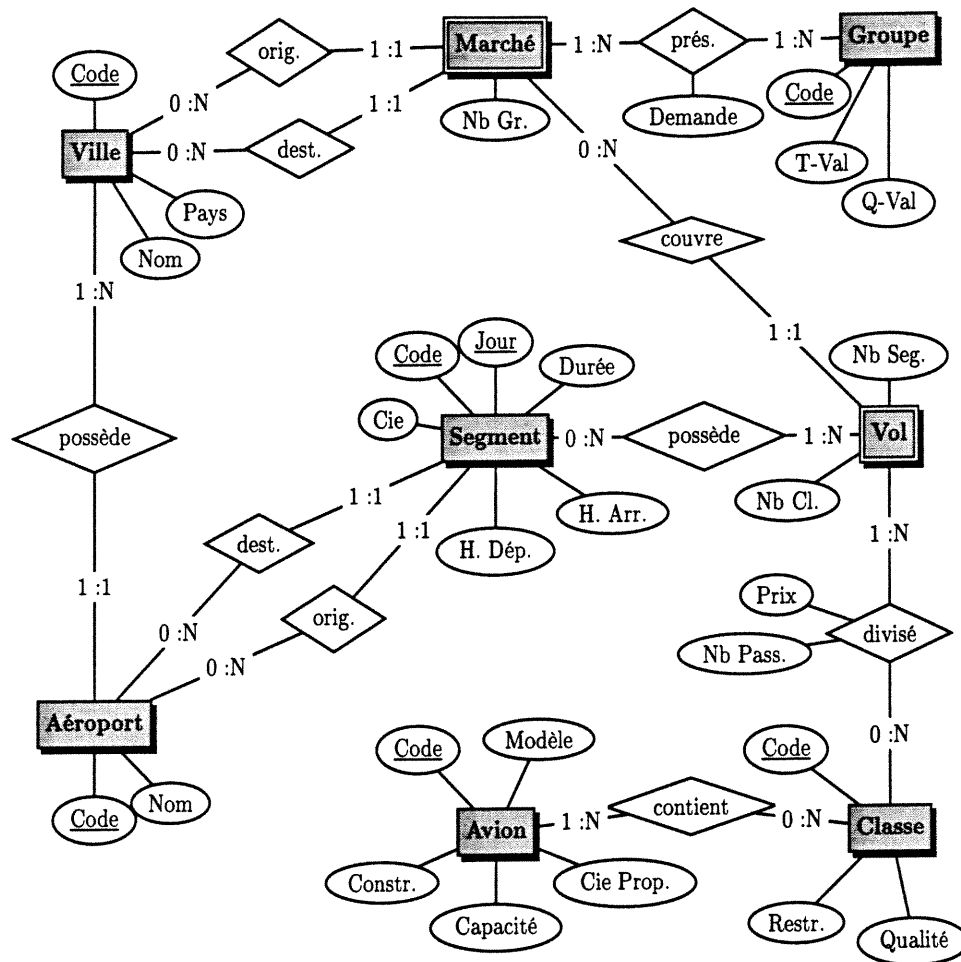


FIG. 6.2 – Diagramme ER du modèle de données aériennes.

sède pas de clé unique, mais est identifiée par la concaténation des clés des entités Ville (origine et destination) auxquelles le marché est associé. Les attributs-clés d'une entité forte sont quant à eux soulignés, afin de les différencier des autres attributs.

À chacune des entités représentées à la figure 6.2 correspond une classe (implantée en C++) dans le module DBI de TOLLER. Ces classes s'appellent respectivement `City`, `Airport`, `Market`, `Leg`, `Flight`, `Plane`, `FareClass` et `UserGroup`. Elles dérivent toutes d'une classe abstraite appelée `AirDataObject`, laquelle regroupe la fonctionnalité qui leur est commune. C'est donc dire que chaque entité du modèle de données est représentée par un objet en mémoire vive. En effet, lorsque TOLLER démarre, il construit le modèle de données décrit-ci haut en mémoire à partir des informations contenues dans les fichiers

de texte. De façon concrète, les objets sont créés en mémoire et conservés dans des tableaux dynamiques, chaque objet possédant un ensemble de pointeurs vers les objets auxquels il est associé. Bien entendu, cette structure de données n'existe que pour la 'durée de vie' du programme, et doit être reconstruite à chaque fois que le programme est exécuté, ce qui est long et coûteux. Une solution à ce problème serait d'utiliser un serveur de données pouvant implanter notre modèle de données pour ensuite peupler la base de données résultante avec l'information provenant d'Air Canada. Il serait d'ailleurs relativement facile de traduire le modèle représenté par le diagramme ER de la figure 6.2 en langage SQL, le standard dans ce domaine.

Chapitre 7

Tests et résultats numériques

Ce chapitre présente les résultats numériques obtenus en utilisant les modèles développés au chapitre 5 avec AirTOLLER, le logiciel décrit au chapitre 6. On y trouvera d'abord une analyse du temps de résolution requis pour résoudre des instances de différentes tailles en utilisant les trois formulations proposées. Ensuite, nous étudierons un cas spécifique et illustrerons l'impact que peut avoir une variation des paramètres du modèle sur la solution optimale. Finalement, nous ferons une analyse détaillée des résultats obtenus en fixant ces paramètres et en appliquant le modèle sur un petit ensemble de marchés.

7.1 Analyse du temps de résolution

Les tableaux suivants contiennent des informations relatives au temps de résolution requis par les trois modèles présentés afin de résoudre différentes instances du problème, ainsi que certaines données concernant la qualité de la solution obtenue. Ces informations sont fournies par la librairie CPLEX lorsque celle-ci termine son travail et retourne la solution optimale. On y retrouve la valeur de la solution optimale entière, la valeur de la solution optimale du programme relâché, le numéro du nœud où la solution optimale entière fut obtenue, le nombre total de nœuds explorés ainsi que la marge entre la valeur de la solution entière et celle de la solution optimale du programme relâché. Aussi, comme ces symboles apparaissent dans les tableaux ci-dessous, rappelons que K est l'ensemble

des marchés, F l'ensemble des vols, A l'ensemble des arcs de segment, Γ l'ensemble des groupes d'usagers et Φ l'ensemble des classes tarifaires.

Nous comparons d'abord le temps de résolution requis par les trois formulations, soit 111, $N12$ et $NN3$ pour résoudre une même instance du problème, laquelle comportait 10 marchés, 296 vols et 415 segments. Aussi, 3 groupes d'usagers et 3 classes tarifaires furent utilisés par les formulations pouvant traiter ces informations. Le tableau 7.1 présente les résultats obtenus. Précisons que dans le cas de la formulation 111, CPLEX n'a pas eu à appliquer l'algorithme de *Branch and Bound* car il fut en mesure de résoudre le problème par substitution.

| Formul. | $ K $ | $ F $ | $ A $ | $ \Gamma $ | $ \Phi $ | CPU (s) | Obj. Rel. | Obj. Ent. | N. Opt. | N. Tot. | Marge |
|---------|-------|-------|-------|------------|----------|---------|------------|------------|---------|---------|-------|
| 111 | 10 | 296 | 415 | 1 | 1 | 0.51 | - | 59 565.24 | 0 | 0 | - |
| $N12$ | 10 | 296 | 415 | 3 | 1 | 11.28 | 729 116.09 | 714 998.76 | 800 | 943 | 1.94% |
| $NN3$ | 10 | 296 | 415 | 3 | 3 | 199.80 | 488 629.30 | 477 681.84 | 6 071 | 6 230 | 2.24% |

TAB. 7.1 – Comparaison du temps de résolution des différents modèles.

Nous pouvons observer au tableau 7.1 que le temps de résolution augmente considérablement d'une formulation à l'autre. Ceci est dû à l'augmentation du nombre de variables (et en particulier du nombre de variables binaires) découlant de la complexification progressive du modèle. La formulation la plus réaliste, c'est-à-dire $NN3$, comporte un plus grand nombre de variables. Conséquemment, le temps requis pour résoudre les instances utilisant cette formulation est beaucoup plus grand.

Nous comparons maintenant le temps de résolution requis afin de résoudre différentes instances obtenues en variant le nombre de marchés, de vols, de segments, de groupes d'usagers ou de classes tarifaires. Dans tous les cas, la formulation $NN3$ fut utilisée, car celle-ci est la plus réaliste. Ces résultats apparaissent au tableau 7.2. Spécifions que dans le dernier cas, CPLEX a interrompu ses calculs en raison d'un manque de mémoire, ce qui explique la marge relativement élevée entre la valeur de la solution optimale du problème relaxé et la valeur de la meilleure solution entière, laquelle est probablement sous-optimale.

Nous pouvons remarquer que le temps requis afin de résoudre des instances de taille

| Formul. | K | F | A | Γ | Φ | CPU (s) | Obj. Rel. | Obj. Ent. | N. Opt. | N. Tot. | Marge |
|---------|----|-----|-----|---|---|---------|------------|------------|---------|---------|-------|
| NN3 | 10 | 296 | 415 | 3 | 5 | 1542.29 | 412 874.43 | 403 000.57 | 26 984 | 27 731 | 2.39% |
| NN3 | 10 | 296 | 415 | 5 | 3 | 1060.28 | 622 127.11 | 610 203.23 | 8 198 | 10 866 | 1.91% |
| NN3 | 10 | 296 | 415 | 4 | 4 | 4014.17 | 347 847.61 | 337 583.28 | 113462 | 132523 | 2.95% |
| NN3 | 10 | 296 | 415 | 5 | 5 | 3159.05 | 294 824.75 | 280 127.75 | 300 | 40300 | 4.98% |

TAB. 7.2 – Comparaison du temps de résolution de différentes instances.

réaliste est considérable. Rappelons cependant que les travaux présentés dans ce mémoire sont avant tout un effort de modélisation visant à appliquer le paradigme de la programmation bi-niveau au problème de G.d.R. en transport aérien, l'aspect algorithmique n'étant pas une préoccupation de premier ordre. Par exemple, nous avons utilisé les paramètres par défaut de la librairie CPLEX. Un calibrage de ces paramètres mieux adapté à notre application permettrait sans doute de réduire le temps de résolution de façon significative, tout comme la mise en place de règles de branchement spécifiques à notre problème. Ces aspects importants devront faire l'objet de travaux futurs.

7.2 Analyse de sensibilité aux paramètres

En plus du nombre de marchés, de groupes d'usagers et de classes tarifaires, il est possible de modifier la valeur des paramètres entrant dans la composition prix apparent. Ces paramètres sont α_γ , la valeur monétaire du temps propre à chaque groupe d'usagers ; β_γ , la valeur que les usagers de chaque groupe accordent à la qualité de service ; et Q_φ , la qualité de service de chaque classe tarifaire. Toute modification de ces paramètres entraîne un changement dans la perception qu'ont les usagers du prix d'un billet. Comme nos modèles sont basés sur une segmentation discrète de la clientèle, un changement même infinitésimal de l'un de ces paramètres peut avoir des conséquences importantes et provoquer une modification de la structure tarifaire et de l'allocation de la capacité sur un marché donné. L'objectif de cette section est précisément d'illustrer les changements que peut occasionner une modification des paramètres du modèle. Nous nous concentrons sur un seul marché, soit AAA-VVV (codes fictifs), où le meneur offre des vols concurrentiels. Les différentes instances sont résolues en utilisant la formulation NN3 avec deux groupes

d'usagers et deux classes tarifaires. Seuls les paramètres énumérés ci-dessus sont modifiés d'une instance à l'autre. Spécifions aussi que la demande sur ce marché est de 614.68 pour les usagers du groupe 1 et de 1002.89 pour les usagers du groupe 2.

Les résultats sont présentés sous forme de tableaux. Les vols ayant une charge nulle, c'est-à-dire ceux n'étant empruntés par aucun passager, ont été retirés de ces tableaux dans le but d'alléger la présentation. Rappelons que nous posons l'hypothèse que les vols de la compétition possèdent une capacité illimitée. Ainsi, sur un marché donné, lorsque les vols du meneur sont complets, les passagers restants se dirigent vers le vol de la compétition qui leur paraît le moins cher, de sorte que la majorité des vols de la compétition possèdent une charge nulle. En fait, selon cette hypothèse, il ne peut y avoir plus de vols de la compétition avec une charge non nulle qu'il y a de groupes d'usagers, chaque groupe se dirigeant vers le vol qu'il perçoit comme étant le plus abordable, si les vols du meneur sont complets. De plus, précisons que chaque ligne dans les tableaux de résultats apparaissant ci-dessous correspond aux informations relatives à un groupe d'usagers. Comme nous considérons ici deux groupes d'usagers, l'information sur chaque vol est présentée sur deux lignes consécutives dans le tableau. La première colonne précise le type du vol, soit "L" pour un vol du meneur et "C" pour un vol de la compétition. Quant aux autres colonnes, les symboles les décrivant correspondent à ceux utilisés lors de la présentation des modèles et ne nécessitent donc pas d'explications supplémentaires. Notons finalement que dans la dernière colonne, en plus du code des segments composant le vol, la capacité de ceux-ci est donnée, pour les vols du meneur. Il s'agit de la valeur apparaissant entre parenthèses.

Instance 1

Les valeurs des paramètres sont présentées au tableau 7.3, tandis que les résultats apparaissent au tableau 7.4.

Dans ce premier cas, les usagers des deux groupes accordent une valeur relativement élevée à la durée des vols et à la qualité de service. La classe 2 possède aussi un indice de qualité élevé par rapport à celui de la classe 1. Les vols de la compétition ne sont pas concurrentiels pour les passagers du groupe 1, qui se dirigent vers les vols du meneur.

| | | | | |
|----------|-----------------|----------------|-----------|-------------|
| γ | α_γ | β_γ | φ | Q_φ |
| 1 | 150.0 | 1200.0 | 1 | 8.0 |
| 2 | 75.0 | 500.0 | 2 | 4.0 |

TAB. 7.3 – Valeur des paramètres pour l'instance 1.

| Type | f | γ | D_f | $T_{f,1}$ | $v_{f,\gamma,1}$ | $T_{f,2}$ | $v_{f,\gamma,2}$ | $A(f)$ (avec (u_a)) |
|------|-----|----------|-------|-----------|------------------|-----------|------------------|-------------------------|
| L | 1 | 1 | 458 | 357.71 | 191.00 | 218.97 | 0.00 | AC1(191),AC2(191) |
| L | 1 | 2 | 458 | 357.71 | 0.00 | 218.97 | 0.00 | AC1(191),AC2(191) |
| L | 2 | 1 | 480 | 302.71 | 0.00 | 191.47 | 0.00 | AC3(132),AC4(132) |
| L | 2 | 2 | 480 | 302.71 | 0.00 | 191.47 | 132.00 | AC3(132),AC4(132) |
| L | 3 | 1 | 345 | 715.21 | 132.00 | 565.21 | 0.00 | AC5(132) |
| L | 3 | 2 | 345 | 715.21 | 0.00 | 565.21 | 0.00 | AC5(132) |
| L | 4 | 1 | 478 | 307.71 | 114.68 | 193.97 | 0.00 | AC6(132),AC7(191) |
| L | 4 | 2 | 478 | 307.71 | 0.00 | 193.97 | 17.32 | AC6(132),AC7(191) |
| C | 5 | 1 | 449 | 692.71 | 0.00 | 230.22 | 0.00 | AA2037(139),AA1435(188) |
| C | 5 | 2 | 449 | 692.71 | 0.00 | 230.22 | 853.57 | AA2037(139),AA1435(188) |
| L | 6 | 1 | 440 | 402.71 | 177.00 | 252.71 | 0.00 | AC8(177),AC9(191) |
| L | 6 | 2 | 440 | 402.71 | 0.00 | 252.71 | 0.00 | AC8(177),AC9(191) |

TAB. 7.4 – Résultats de l'instance 1.

Ces vols sont tous complets. Notons aussi que le meneur offre un vol direct (le vol 3) sur ce marché. Ce vol possède une durée moindre et paraît avantageux aux yeux des passagers accordant une grande valeur au temps (ceux du groupe 1). Son prix est donc plus élevé. Puisque la demande résiduelle en passagers du groupe 1 n'est pas suffisante pour emplir le vol 4, les prix de ce vol en classe 2 s'ajustent donc en conséquence afin que des passagers du groupe 2 occupent les sièges restants sur ce vol.

Instance 2

Les valeurs des paramètres sont présentées au tableau 7.5, tandis que les résultats apparaissent au tableau 7.6.

| | | | | |
|----------|-----------------|----------------|-----------|-------------|
| γ | α_γ | β_γ | φ | Q_φ |
| 1 | 150.0 | 1200.0 | 1 | 8.0 |
| 2 | 20.0 | 200.0 | 2 | 4.0 |

TAB. 7.5 – Valeur des paramètres pour l’instance 2.

| Type | f | γ | D_f | $T_{f,1}$ | $v_{f,\gamma,1}$ | $T_{f,2}$ | $v_{f,\gamma,2}$ | $A(f)$ (avec (u_a)) |
|------|-----|----------|-------|-----------|------------------|-----------|------------------|------------------------|
| C | 1 | 1 | 494 | 444.64 | 0.00 | 213.41 | 0.00 | US438(126),US1(188) |
| C | 1 | 2 | 494 | 444.64 | 0.00 | 213.41 | 853.57 | US438(126),US1(188) |
| L | 2 | 1 | 458 | 357.71 | 191.00 | 225.41 | 0.00 | AC1(191),AC2(191) |
| L | 2 | 2 | 458 | 357.71 | 0.00 | 225.41 | 0.00 | AC1(191),AC2(191) |
| L | 3 | 1 | 480 | 302.71 | 0.00 | 218.08 | 0.00 | AC3(132),AC4(132) |
| L | 3 | 2 | 480 | 302.71 | 0.00 | 218.08 | 132.00 | AC3(132),AC4(132) |
| L | 4 | 1 | 345 | 715.21 | 132.00 | 565.21 | 0.00 | AC5(132) |
| L | 4 | 2 | 345 | 715.21 | 0.00 | 565.21 | 0.00 | AC5(132) |
| L | 5 | 1 | 478 | 307.71 | 114.68 | 218.74 | 0.00 | AC6(132),AC7(191) |
| L | 5 | 2 | 478 | 307.71 | 0.00 | 218.74 | 17.32 | AC6(132),AC7(191) |
| L | 6 | 1 | 440 | 402.71 | 177.00 | 252.71 | 0.00 | AC8(177),AC9(191) |
| L | 6 | 2 | 440 | 402.71 | 0.00 | 252.71 | 0.00 | AC8(177),AC9(191) |

TAB. 7.6 – Résultats de l’instance 2.

Dans ce cas-ci, nous avons considérablement diminué la valeur que les passagers du groupe 2 accordent au temps et à la qualité de service. Ceux-ci sont donc moins exigeants et un nouveau vol de la compétition leur paraît maintenant avantageux. Par contre, la structure tarifaire demeure la même en classe 1. Notons cependant que le prix du vol 5 (lequel correspond au vol 4 de l’instance 1) en classe 2 s’ajuste désormais en fonction du nouveau vol de la compétition.

Instance 3

Les valeurs des paramètres sont présentées au tableau 7.7, tandis que les résultats apparaissent au tableau 7.8.

| | | | | |
|----------|-----------------|----------------|-----------|-------------|
| γ | α_γ | β_γ | φ | Q_φ |
| 1 | 150.0 | 1200.0 | 1 | 8.0 |
| 2 | 5.0 | 50.0 | 2 | 4.0 |

TAB. 7.7 – Valeur des paramètres pour l'instance 3.

| Type | f | γ | D_f | $T_{f,1}$ | $v_{f,\gamma,1}$ | $T_{f,2}$ | $v_{f,\gamma,2}$ | $A(f)$ (avec (u_a)) |
|------|-----|----------|-------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------------------------------|
| L | 1 | 1 | 458 | 357.71 | 191.00 | 210.78 | 0.00 | AC1(191),AC2(191) |
| L | 1 | 2 | 458 | 357.71 | 0.00 | 210.78 | 0.00 | AC1(191),AC2(191) |
| C | 2 | 1 | 605 | 998.95 | 0.00 | 196.03 | 0.00 | CO1055(104),CO283(104),CO193(155) |
| C | 2 | 2 | 605 | 998.95 | 0.00 | 196.03 | 853.57 | CO1055(104),CO283(104),CO193(155) |
| L | 3 | 1 | 480 | 302.71 | 0.00 | 208.94 | 0.00 | AC3(132),AC4(132) |
| L | 3 | 2 | 480 | 302.71 | 0.00 | 208.94 | 132.00 | AC3(132),AC4(132) |
| L | 4 | 1 | 345 | 715.21 | 132.00 | 565.21 | 0.00 | AC5(132) |
| L | 4 | 2 | 345 | 715.21 | 0.00 | 565.21 | 0.00 | AC5(132) |
| L | 5 | 1 | 478 | 307.71 | 114.68 | 209.11 | 0.00 | AC6(132),AC7(191) |
| L | 5 | 2 | 478 | 307.71 | 0.00 | 209.11 | 17.32 | AC6(132),AC7(191) |
| L | 6 | 1 | 440 | 402.71 | 177.00 | 252.71 | 0.00 | AC8(177),AC9(191) |
| L | 6 | 2 | 440 | 402.71 | 0.00 | 252.71 | 0.00 | AC8(177),AC9(191) |

TAB. 7.8 – Résultats de l'instance 3.

Nous avons ici diminué de façon encore plus drastique la valeur que les passagers du groupe 2 accordent au temps et à la qualité de service des vols qu'ils empruntent. Nous observons le même phénomène qu'auparavant, c'est-à-dire qu'un autre vol de la compétition paraît maintenant avantageux pour les passagers du groupe 2. Le meneur doit donc ajuster les prix de ses vols en classe 2 pour faire face à ce nouveau compétiteur. La structure tarifaire des vols du meneur en classe 1 n'est toutefois pas modifiée.

Instance 4

Les valeurs des paramètres sont présentées au tableau 7.9, tandis que les résultats apparaissent au tableau 7.10.

| | | | | |
|----------|-----------------|----------------|-----------|-------------|
| γ | α_γ | β_γ | φ | Q_φ |
| 1 | 150.0 | 1200.0 | 1 | 8.0 |
| 2 | 5.0 | 50.0 | 2 | 2.0 |

TAB. 7.9 – Valeur des paramètres pour l'instance 4.

| Type | f | γ | D_f | $T_{f,1}$ | $v_{f,\gamma,1}$ | $T_{f,2}$ | $v_{f,\gamma,2}$ | $A(f)$ (avec (u_a)) |
|------|-----|----------|-------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------------------------------|
| L | 1 | 1 | 458 | 450.25 | 191.00 | 210.78 | 0.00 | AC1(191),AC2(191) |
| L | 1 | 2 | 458 | 450.25 | 0.00 | 210.78 | 0.00 | AC1(191),AC2(191) |
| C | 2 | 1 | 605 | 998.95 | 0.00 | 196.03 | 0.00 | CO1055(104),CO283(104),CO193(155) |
| C | 2 | 2 | 605 | 998.95 | 0.00 | 196.03 | 853.57 | CO1055(104),CO283(104),CO193(155) |
| L | 3 | 1 | 480 | 395.25 | 0.00 | 208.94 | 0.00 | AC3(132),AC4(132) |
| L | 3 | 2 | 480 | 395.25 | 0.00 | 208.94 | 132.00 | AC3(132),AC4(132) |
| L | 4 | 1 | 345 | 807.75 | 132.00 | 357.75 | 0.00 | AC5(132) |
| L | 4 | 2 | 345 | 807.75 | 0.00 | 357.75 | 0.00 | AC5(132) |
| L | 5 | 1 | 478 | 400.25 | 114.68 | 209.11 | 0.00 | AC6(132),AC7(191) |
| L | 5 | 2 | 478 | 400.25 | 0.00 | 209.11 | 17.32 | AC6(132),AC7(191) |
| L | 6 | 1 | 440 | 495.25 | 177.00 | 212.28 | 0.00 | AC8(177),AC9(191) |
| L | 6 | 2 | 440 | 495.25 | 0.00 | 212.28 | 0.00 | AC8(177),AC9(191) |

TAB. 7.10 – Résultats de l'instance 4.

Dans ce cas-ci, nous avons réduit l'indice de qualité de la classe 2. Cet indice passe de 4 à 2, tandis que l'indice de qualité de la classe 1 demeure 8. Remarquons que le schéma d'allocation demeure le même qu'au cas précédent, mais les prix demandés par le meneur pour des billets de classe 1 sont maintenant considérablement plus élevés. En effet, le meneur n'attire que des passagers du groupe 1 sur ses vols. Or ces passagers accordent une grande valeur à la qualité de service. Le meneur peut donc demander plus pour ses billets en classe 1 sans craindre que les passagers du groupe 1 se déplacent vers la classe 2, celle-ci affichant désormais un indice de qualité bas.

7.3 Analyse détaillée des résultats

Cette section présente des résultats numériques plus détaillés. Ces résultats furent obtenus en appliquant la formulation *NN3* sur un ensemble de cinq marchés, en considérant trois groupes d'usagers et trois classes tarifaires. Les marchés ont tous comme origine la ville AAA, tandis que les destinations étaient des villes américaines vers lesquelles le meneur (c'est-à-dire AC) offre soit des vols directs ou encore des vols composés de plusieurs segments. Dans ce dernier cas, tous les segments sont assurés par le meneur. En effet, nous n'avons pas considéré les vols 'mixtes', c'est-à-dire les vols multi-segments dont une partie est assurée par le meneur alors que les autres segments sont effectués par des appareils d'une compagnie alliée au meneur. De plus, afin de respecter certaines ententes de confidentialité, ces résultats furent obtenus en utilisant des données tarifaires fictives. Ainsi, les prix de vols de la compétition présentés ci-dessous de même les estimés de demande sur chaque marché ont été générés de façon aléatoire et ne proviennent pas du jeu de données nous ayant été fourni par Air Canada. Ceci ne modifie toutefois en rien le comportement du modèle et la validité des résultats obtenus à l'aide de celui-ci. Les informations sur les horaires, vols et segments présentées ci-dessous proviennent d'un jeu de données réelles, mais les codes des vols et des marchés ont été maquillés.

La valeur monétaire du temps et la valeur d'appréciation de la qualité de service des différents groupes d'usagers considérés sont présentées au tableau 7.11, tout comme la qualité de service des différentes classes tarifaires utilisées.

Les tableaux de cette section reprennent le même format que ceux de la section précédente. Cependant, comme nous considérons maintenant trois groupes d'usagers, un vol sera complètement décrit par trois lignes consécutives dans ces tableaux.

| γ | α_γ | β_γ | φ | Q_φ |
|----------|-----------------|----------------|-----------|-------------|
| 1 | 200.0 | 1200.0 | 1 | 8.0 |
| 2 | 50.0 | 200.0 | 2 | 2.0 |
| 3 | 5.0 | 50.0 | 3 | 1.0 |

TAB. 7.11 – Valeur des paramètres.

Nous allons maintenant présenter et décrire les résultats marché par marché. Dans chaque cas, nous pouvons observer des phénomènes intéressants, que nous expliquerons en détail.

Marché 1 AAA-ZZZ

La demande en usagers des groupes 1, 2 et 3 sur ce marché est respectivement de 15.89, 248.94 et 432.09. Les résultats sont présentés au tableau 7.12. Nous pouvons d'abord observer ce que nous appelons un 'effet réseau' : les vols 1, 2 et 3 (appartenant au meneur) partagent leur dernier segment, soit AC11. La charge totale de ces vols ne peut donc pas excéder la capacité de ce segment, c'est-à-dire 112. Remarquons que nous obtenons ce nombre en additionnant les charges pour tous les groupes d'usagers et toutes les classes tarifaires sur ces trois vols, ce qui signifie que le segment AC11 est complet. C'est aussi le cas pour le segment AC12. Celui-ci possède une capacité maximale de 50, qui correspond à la charge du seul vol l'utilisant (le vol 2). Quant aux vols 1 et 3, il semble à première vue que leurs premiers segments respectifs (soit AC10 et AC13) ne sont pas complets. Or ces segments sont aussi empruntés par des vols affectés à d'autres marchés. Ces vols utilisent la capacité toujours disponible sur ces segments. Bref, nous pouvons constater que, d'une certaine manière, les vols partageant les mêmes segments entrent en compétition pour la capacité disponible. Le modèle se doit alors d'allouer cette capacité de façon à maximiser les revenus du meneur sur l'ensemble des marchés.

Aussi, remarquons que la compétition offre un vol direct sur ce marché, alors que les vols du meneur se composent tous de deux segments. Il en résulte que les vols du meneur ont une durée beaucoup plus importante que ceux de la compétition (pratiquement le double). Conséquemment, le meneur n'est pas en mesure de concurrencer la compétition pour les passagers ayant une valeur du temps élevée, c'est-à-dire ceux du groupes 1. Le meneur doit en effet se contenter d'attirer les passagers ayant une valeur du temps plus basse, c'est-à-dire ceux des groupes 2 et 3, mais même avec ces passagers, les prix qu'il doit proposer sont considérablement plus bas que ceux que propose la compétition sur ses vols directs.

À la lumière de ces observations, nous pouvons conclure que le meneur n'est pas en position dominante sur ce marché et aurait peut-être avantage à réviser ses itinéraires ou à déplacer sa capacité sur d'autres marchés plus rentables.

| Type | f | γ | D_f | $T_{f,1}$ | $v_{f,\gamma,1}$ | $T_{f,2}$ | $v_{f,\gamma,2}$ | $T_{f,3}$ | $v_{f,\gamma,3}$ | $A(f)$ (avec (u_a)) |
|------|-----|----------|-------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------|------------------|------------------------|
| L | 1 | 1 | 318 | 220.50 | 0.00 | 174.75 | 0.00 | 149.75 | 0.00 | AC10(112),AC11(112) |
| L | 1 | 2 | 318 | 220.50 | 0.00 | 174.75 | 0.00 | 149.75 | 0.00 | AC10(112),AC11(112) |
| L | 1 | 3 | 318 | 220.50 | 0.00 | 174.75 | 0.63 | 149.75 | 0.00 | AC10(112),AC11(112) |
| L | 2 | 1 | 288 | 245.50 | 0.00 | 177.25 | 0.00 | 152.25 | 0.00 | AC12(50),AC11(112) |
| L | 2 | 2 | 288 | 245.50 | 0.00 | 177.25 | 0.00 | 152.25 | 0.00 | AC12(50),AC11(112) |
| L | 2 | 3 | 288 | 245.50 | 0.00 | 177.25 | 50.00 | 152.25 | 0.00 | AC12(50),AC11(112) |
| L | 3 | 1 | 273 | 258.00 | 0.00 | 183.00 | 0.00 | 153.50 | 0.00 | AC13(191),AC11(112) |
| L | 3 | 2 | 273 | 258.00 | 24.94 | 183.00 | 0.00 | 153.50 | 0.00 | AC13(191),AC11(112) |
| L | 3 | 3 | 273 | 258.00 | 0.00 | 183.00 | 0.00 | 153.50 | 36.43 | AC13(191),AC11(112) |
| L | 4 | 1 | 263 | 266.33 | 0.00 | 191.33 | 0.00 | 154.33 | 0.00 | AC14(191),AC14(112) |
| L | 4 | 2 | 263 | 266.33 | 112.00 | 191.33 | 0.00 | 154.33 | 0.00 | AC14(191),AC14(112) |
| L | 4 | 3 | 263 | 266.33 | 0.00 | 191.33 | 0.00 | 154.33 | 0.00 | AC14(191),AC14(112) |
| C | 5 | 1 | 279 | 444.50 | 0.00 | 178.00 | 0.00 | 291.77 | 0.00 | NW1101(110),NW489(110) |
| C | 5 | 2 | 279 | 444.50 | 0.00 | 178.00 | 0.00 | 291.77 | 0.00 | NW1101(110),NW489(110) |
| C | 5 | 3 | 279 | 444.50 | 0.00 | 178.00 | 345.03 | 291.77 | 0.00 | NW1101(110),NW489(110) |
| C | 6 | 1 | 165 | 421.80 | 15.89 | 317.45 | 0.00 | 228.07 | 0.00 | DL2091(142) |
| C | 6 | 2 | 165 | 421.80 | 0.00 | 317.45 | 0.00 | 228.07 | 0.00 | DL2091(142) |
| C | 6 | 3 | 165 | 421.80 | 0.00 | 317.45 | 0.00 | 228.07 | 0.00 | DL2091(142) |
| L | 7 | 1 | 268 | 262.17 | 0.00 | 187.17 | 0.00 | 153.92 | 0.00 | AC15(132),AC16(112) |
| L | 7 | 2 | 268 | 262.17 | 112.00 | 187.17 | 0.00 | 153.92 | 0.00 | AC15(132),AC16(112) |
| L | 7 | 3 | 268 | 262.17 | 0.00 | 187.17 | 0.00 | 153.92 | 0.00 | AC15(132),AC16(112) |

TAB. 7.12 – Résultats obtenus sur le marché AAA-ZZZ.

Marché 2 AAA-WWW

La demande en usagers des groupes 1, 2 et 3 sur ce marché est respectivement de 20.22, 178.41, 990.79. Les résultats sont présentés au tableau 7.13.

Dans ce cas-ci, tous les vols, que se soit ceux du meneur ou ceux de la compétition,

| Type | f | γ | D_f | $T_{f,1}$ | $v_{f,\gamma,1}$ | $T_{f,2}$ | $v_{f,\gamma,2}$ | $T_{f,3}$ | $v_{f,\gamma,3}$ | $A(f)$ (avec (u_a)) |
|------|-----|----------|-------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------|------------------|------------------------|
| L | 1 | 1 | 71 | 254.83 | 0.00 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC17(50) |
| L | 1 | 2 | 71 | 254.83 | 50.00 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC17(50) |
| L | 1 | 3 | 71 | 254.83 | 0.00 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC17(50) |
| L | 2 | 1 | 71 | 254.83 | 0.00 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC18(50) |
| L | 2 | 2 | 71 | 254.83 | 50.00 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC18(50) |
| L | 2 | 3 | 71 | 254.83 | 0.00 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC18(50) |
| L | 3 | 1 | 71 | 254.83 | 0.00 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC19(50) |
| L | 3 | 2 | 71 | 254.83 | 50.00 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC19(50) |
| L | 3 | 3 | 71 | 254.83 | 0.00 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC19(50) |
| L | 4 | 1 | 71 | 254.83 | 20.22 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC20(50) |
| L | 4 | 2 | 71 | 254.83 | 0.00 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC20(50) |
| L | 4 | 3 | 71 | 254.83 | 0.00 | 179.83 | 29.78 | 154.83 | 0.00 | AC20(50) |
| L | 5 | 1 | 71 | 254.83 | 0.00 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC21(50) |
| L | 5 | 2 | 71 | 254.83 | 28.41 | 179.83 | 0.00 | 154.83 | 0.00 | AC21(50) |
| L | 5 | 3 | 71 | 254.83 | 0.00 | 179.83 | 21.59 | 154.83 | 0.00 | AC21(50) |
| C | 6 | 1 | 75 | 496.00 | 0.00 | 179.50 | 0.00 | 209.25 | 0.00 | DL5988(50) |
| C | 6 | 2 | 75 | 496.00 | 0.00 | 179.50 | 0.00 | 209.25 | 0.00 | DL5988(50) |
| C | 6 | 3 | 75 | 496.00 | 0.00 | 179.50 | 939.42 | 209.25 | 0.00 | DL5988(50) |

TAB. 7.13 – Résultats obtenus sur le marché AAA-WWW.

sont directs, c'est-à-dire qu'ils ne se composent que d'un seul segment. Le meneur couvre ce marché avec de petits avions rapides, ce qui lui permet d'offrir une durée de vol avantageuse par rapport à la compétition. Les vols du meneur sont ainsi tous remplis à capacité avec des passagers des groupes 1 et 2, qui sont les plus payants, et avec quelques passagers du groupe 3, qui occupent la capacité résiduelle sur le vol 5. Remarquons cependant que ces passagers se dirigent vers la classe 3, qui offre une qualité moindre. Le meneur est donc en position dominante sur ce marché. Notons aussi l'absence d'effet réseau, tous les vols étant directs et ne partageant pas leurs segments avec d'autres vols.

Marché 3 AAA-VVV

La demande en usagers des groupes 1, 2 et 3 sur ce marché est respectivement de 81.85, 96.08, 1439.64. Les résultats sont présentés au tableau 7.14.

Sur ce marché, seul le vol 5 (appartenant au meneur) est direct. Ce vol offre donc un avantage appréciable aux passagers accordant une grande valeur au temps, ce qui permet au meneur d'en exiger un prix plus élevé, tout en attirant un maximum de passagers. Nous pouvons d'ailleurs constater que ce vol est complet et qu'il attire tous les passagers du groupe 1 présents sur ce marché en plus d'autres passagers du groupe 2 occupant la capacité résiduelle. Aussi, remarquons la présence de nombreux effets réseau. Les vols 1 et 2 partagent notamment leur dernier segment, entrant ainsi en compétition pour les places disponibles, avec comme résultat que ces vols se partagent la capacité du segment AC2. Le premier segment du vol 1, soit AC13, est aussi emprunté par des vols affectés à d'autres marchés (voir les autres tableaux).

Marché 4 AAA-YYY

La demande en usagers des groupes 1, 2 et 3 sur ce marché est respectivement de 47.09, 80.18 et 104.13. Les résultats sont présentés au tableau 7.15.

Sur ce marché, ni le meneur ni la compétition n'offrent de vols directs. Le meneur est cependant concurrentiel et remplit ses vols à capacité avec des passagers de groupes

| Type | f | γ | D_f | $T_{f,1}$ | $v_{f,\gamma,1}$ | $T_{f,2}$ | $v_{f,\gamma,2}$ | $T_{f,3}$ | $v_{f,\gamma,3}$ | $A(f)$ (avec (u_a)) |
|------|-----|----------|-------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------|------------------|------------------------|
| L | 1 | 1 | 473 | 268.56 | 0.00 | 204.81 | 0.00 | 179.81 | 0.00 | AC13(191),AC2(191) |
| L | 1 | 2 | 473 | 268.56 | 45.93 | 204.81 | 0.00 | 179.81 | 0.00 | AC13(191),AC2(191) |
| L | 1 | 3 | 473 | 268.56 | 0.00 | 204.81 | 0.00 | 179.81 | 0.00 | AC13(191),AC2(191) |
| L | 2 | 1 | 458 | 298.56 | 0.00 | 206.06 | 0.00 | 181.06 | 0.00 | AC1(191),AC2(191) |
| L | 2 | 2 | 458 | 298.56 | 0.00 | 206.06 | 0.00 | 181.06 | 0.00 | AC1(191),AC2(191) |
| L | 2 | 3 | 458 | 298.56 | 0.00 | 206.06 | 145.07 | 181.06 | 0.00 | AC1(191),AC2(191) |
| L | 3 | 1 | 480 | 262.72 | 0.00 | 204.22 | 0.00 | 179.22 | 0.00 | AC3(132),AC4(132) |
| L | 3 | 2 | 480 | 262.72 | 0.00 | 204.22 | 0.00 | 179.22 | 0.00 | AC3(132),AC4(132) |
| L | 3 | 3 | 480 | 262.72 | 0.00 | 204.22 | 132.00 | 179.22 | 0.00 | AC3(132),AC4(132) |
| C | 4 | 1 | 621 | 453.88 | 0.00 | 413.95 | 0.00 | 167.47 | 0.00 | AA4858(46),UA19(168) |
| C | 4 | 2 | 621 | 453.88 | 0.00 | 413.95 | 0.00 | 167.47 | 0.00 | AA4858(46),UA19(168) |
| C | 4 | 3 | 621 | 453.88 | 0.00 | 413.95 | 0.00 | 167.47 | 985.57 | AA4858(46),UA19(168) |
| L | 5 | 1 | 345 | 775.22 | 81.85 | 325.22 | 0.00 | 225.22 | 0.00 | AC5(132) |
| L | 5 | 2 | 345 | 775.22 | 0.00 | 325.22 | 50.15 | 225.22 | 0.00 | AC5(132) |
| L | 5 | 3 | 345 | 775.22 | 0.00 | 325.22 | 0.00 | 225.22 | 0.00 | AC5(132) |
| L | 6 | 1 | 478 | 264.39 | 0.00 | 204.39 | 0.00 | 179.39 | 0.00 | AC6(132),AC7(191) |
| L | 6 | 2 | 478 | 264.39 | 0.00 | 204.39 | 0.00 | 179.39 | 0.00 | AC6(132),AC7(191) |
| L | 6 | 3 | 478 | 264.39 | 0.00 | 204.39 | 132.00 | 179.39 | 0.00 | AC6(132),AC7(191) |
| L | 7 | 1 | 440 | 358.56 | 0.00 | 221.06 | 0.00 | 182.56 | 0.00 | AC8(177),AC9(191) |
| L | 7 | 2 | 440 | 358.56 | 0.00 | 221.06 | 0.00 | 182.56 | 0.00 | AC8(177),AC9(191) |
| L | 7 | 3 | 440 | 358.56 | 0.00 | 221.06 | 0.00 | 182.56 | 45.00 | AC8(177),AC9(191) |

TAB. 7.14 – Résultats obtenus sur le marché AAA-VVV.

| Type | f | γ | D_f | $T_{f,1}$ | $v_{f,\gamma,1}$ | $T_{f,2}$ | $v_{f,\gamma,2}$ | $T_{f,3}$ | $v_{f,\gamma,3}$ | $A(f)$ (avec (u_a)) |
|------|-----|----------|-------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------|------------------|------------------------|
| L | 1 | 1 | 520 | 239.52 | 0.00 | 199.77 | 0.00 | 174.77 | 0.00 | AC21(191),AC22(37) |
| L | 1 | 2 | 520 | 239.52 | 15.28 | 199.77 | 0.00 | 174.77 | 0.00 | AC21(191),AC22(37) |
| L | 1 | 3 | 520 | 239.52 | 0.00 | 199.77 | 21.72 | 174.77 | 0.00 | AC21(191),AC22(37) |
| L | 2 | 1 | 575 | 213.94 | 0.00 | 195.19 | 0.00 | 170.19 | 0.00 | AC23(191),AC24(52) |
| L | 2 | 2 | 575 | 213.94 | 0.00 | 195.19 | 0.00 | 170.19 | 0.00 | AC23(191),AC24(52) |
| L | 2 | 3 | 575 | 213.94 | 52.00 | 195.19 | 0.00 | 170.19 | 0.00 | AC23(191),AC24(52) |
| C | 3 | 1 | 473 | 687.04 | 0.00 | 203.69 | 0.00 | 372.56 | 0.00 | DL5594(50),DL697(180) |
| C | 3 | 2 | 473 | 687.04 | 0.00 | 203.69 | 0.00 | 372.56 | 0.00 | DL5594(50),DL697(180) |
| C | 3 | 3 | 473 | 687.04 | 0.00 | 203.69 | 30.41 | 372.56 | 0.00 | DL5594(50),DL697(180) |
| L | 4 | 1 | 425 | 318.69 | 47.09 | 243.69 | 0.00 | 182.69 | 0.00 | AC25(132),AC26(112) |
| L | 4 | 2 | 425 | 318.69 | 64.91 | 243.69 | 0.00 | 182.69 | 0.00 | AC25(132),AC26(112) |
| L | 4 | 3 | 425 | 318.69 | 0.00 | 243.69 | 0.00 | 182.69 | 0.00 | AC25(132),AC26(112) |

TAB. 7.15 – Résultats obtenus sur le marché AAA-YYY.

variés. En effet, les passagers de groupes ayant une valeur du temps élevée se dirigent vers les vols les plus courts (remarquons par exemple que le vol 4 accueille tous les passagers du groupe 1 sur ce marché) tandis que les passagers des groupes ayant une valeur du temps moins élevée se dirigent vers les vols plus longs.

Marché 5 AAA-XXX

La demande en usagers des groupes 1, 2 et 3 sur ce marché est respectivement de 110.94, 111.37 et 631.09. Les résultats sont présentés au tableau 7.16.

Remarquons encore une fois l'absence de vols directs sur ce marché. Le meneur offre cependant des vols concurrentiels qui attirent des passagers accordant une plus grande valeur au temps. De nombreux effets réseaux impliquent de nouveau le segment AC13, dont nous avons déjà discuté. Ces effets démontrent que notre modèle est en mesure d'adopter un point de vue macroscopique et de maximiser les revenus du meneur en établissant des schémas d'allocation qui exploitent la topologie particulière d'un réseau aérien.

| Type | f | γ | D_f | $T_{f,1}$ | $v_{f,\gamma,1}$ | $T_{f,2}$ | $v_{f,\gamma,2}$ | $T_{f,3}$ | $v_{f,\gamma,3}$ | $A(f)$ (avec (u_a)) |
|------|-----|----------|-------|-----------|------------------|-----------|------------------|-----------|------------------|------------------------|
| L | 1 | 1 | 502 | 242.49 | 0.00 | 201.24 | 0.00 | 176.24 | 0.00 | AC10(112),AC27(191) |
| L | 1 | 2 | 502 | 242.49 | 111.37 | 201.24 | 0.00 | 176.24 | 0.00 | AC10(112),AC27(191) |
| L | 1 | 3 | 502 | 242.49 | 0.00 | 201.24 | 0.00 | 176.24 | 0.00 | AC10(112),AC27(191) |
| C | 2 | 1 | 472 | 473.12 | 0.00 | 203.74 | 0.00 | 225.12 | 0.00 | AA581(97),AA827(139) |
| C | 2 | 2 | 472 | 473.12 | 0.00 | 203.74 | 0.00 | 225.12 | 0.00 | AA581(97),AA827(139) |
| C | 2 | 3 | 472 | 473.12 | 0.00 | 203.74 | 398.40 | 225.12 | 0.00 | AA581(97),AA827(139) |
| L | 3 | 1 | 457 | 392.49 | 79.63 | 204.99 | 0.00 | 179.99 | 0.00 | AC13(191),AC27(191) |
| L | 3 | 2 | 457 | 392.49 | 0.00 | 204.99 | 0.00 | 179.99 | 0.00 | AC13(191),AC27(191) |
| L | 3 | 3 | 457 | 392.49 | 0.00 | 204.99 | 0.00 | 179.99 | 0.00 | AC13(191),AC27(191) |
| L | 4 | 1 | 457 | 392.49 | 0.00 | 204.99 | 0.00 | 179.99 | 0.00 | AC28(132),AC29(132) |
| L | 4 | 2 | 457 | 392.49 | 0.00 | 204.99 | 0.00 | 179.99 | 0.00 | AC28(132),AC29(132) |
| L | 4 | 3 | 457 | 392.49 | 0.00 | 204.99 | 132.00 | 179.99 | 0.00 | AC28(132),AC29(132) |
| L | 5 | 1 | 457 | 392.49 | 31.31 | 204.99 | 0.00 | 179.99 | 0.00 | AC8(177),AC30(132) |
| L | 5 | 2 | 457 | 392.49 | 0.00 | 204.99 | 0.00 | 179.99 | 0.00 | AC8(177),AC30(132) |
| L | 5 | 3 | 457 | 392.49 | 0.00 | 204.99 | 100.69 | 179.99 | 0.00 | AC8(177),AC30(132) |

TAB. 7.16 – Résultats obtenus sur le marché AAA-XXX.

Remarques générales

Les tableaux ci-dessus ne présentent que les vols ayant une charge non nulle. En raison des hypothèses que nous avons faites, il est normal que la majorité des vols de la compétition se retrouvent avec une charge nulle. Cependant, dans certains cas, nous avons observé le même phénomène avec des vols du meneur, sans que ceux-ci partagent leurs segments avec d'autres vols. Ceci s'explique par la structure tarifaire en vigueur sur certains marchés. En effet, si le meneur, dans le but d'arracher des passagers à la compétition et de remplir ses vols ayant une charge nulle, décide de diminuer ses prix, alors il risque de causer un déplacement de ses propres passagers. En d'autres mots, le meneur se priverait de passagers payants sur certains vols en les déplaçant vers d'autres vols où ceux-ci seraient moins rentables. Notre modèle permet d'identifier ce genre de situation avec capacité superflue. Cette capacité peut alors être utilisée sur d'autres parties du réseau où elle sera plus rentable.

Chapitre 8

Travaux futurs

Ce chapitre présente certaines avenues pouvant être explorées lors de travaux futurs et permettant de compléter les modèles présentés dans ce mémoire, de les rendre plus conformes aux réalités de l'industrie du transport aérien ou encore de réduire le temps de calcul requis afin de résoudre certaines instances des problèmes abordés.

Ces suggestions exploitent différentes propriétés de la structure de réseau spatio-temporel présenté précédemment. Bien que cette structure n'apparaisse pas directement dans nos formulations, elle offre des possibilités intéressantes qui méritent d'être étudiées plus en profondeur.

8.1 Décomposition du réseau spatio-temporel

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, les modèles présentés au chapitre 5 s'appuient implicitement sur un réseau spatio-temporel dans lequel les nœuds correspondent à des lieux (c'est-à-dire des villes dans le cas qui nous intéresse) dans le temps, et les arcs correspondent à des déplacements dans l'espace-temps. De façon concrète, les arcs sont des segments (de vol) ou encore des escales.

Ainsi, étant donné l'horaire des vols physiques (ce que nous appelons segments) pour un ensemble de marchés pour une certaine période (une journée, par exemple), nous pouvons construire le réseau décrit ci-haut et calculer les vols, qui sont en fait des chemins dans ce réseau. Une procédure permettant d'effectuer cette dernière étape fut

d'ailleurs proposée au chapitre 4.

Or il est possible que le réseau résultant soit en fait une collection de graphes non connexes et indépendants, chacun utilisant son propre sous-ensemble de nœuds et d'arcs. De façon mathématique, en dénotant le réseau global par $\mathcal{G} = (V, A \cup E)$, il est possible qu'il existe une décomposition de \mathcal{G} en $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ où $\mathcal{G}_i = (V_i, (A \cup E)_i)$ telle que $\mathcal{G} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathcal{G}_i$ et $V_i \cap V_j = \emptyset$ et $(A \cup E)_i \cap (A \cup E)_j = \emptyset$ pour n'importe quels i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$.

L'existence d'une telle décomposition peut avoir des conséquences importantes du point de vue de la complexité du problème. En effet, puisque les sous-réseaux $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ sont indépendants, nos modèles peuvent être formulés séparément, en utilisant chacun de ces sous-réseaux, au lieu du réseau global \mathcal{G} , engendrant ainsi n problèmes de plus petite taille pouvant être résolus individuellement. Or comme les modèles que nous avons proposés se réduisent à des programmes linéaires mixtes et que ce type de problème possède une complexité non polynomiale (en supposant bien entendu que $P \neq NP$, voir par exemple Garey et Johnson [eD79]), une telle décomposition est souhaitable. La question est donc de savoir si elle existe.

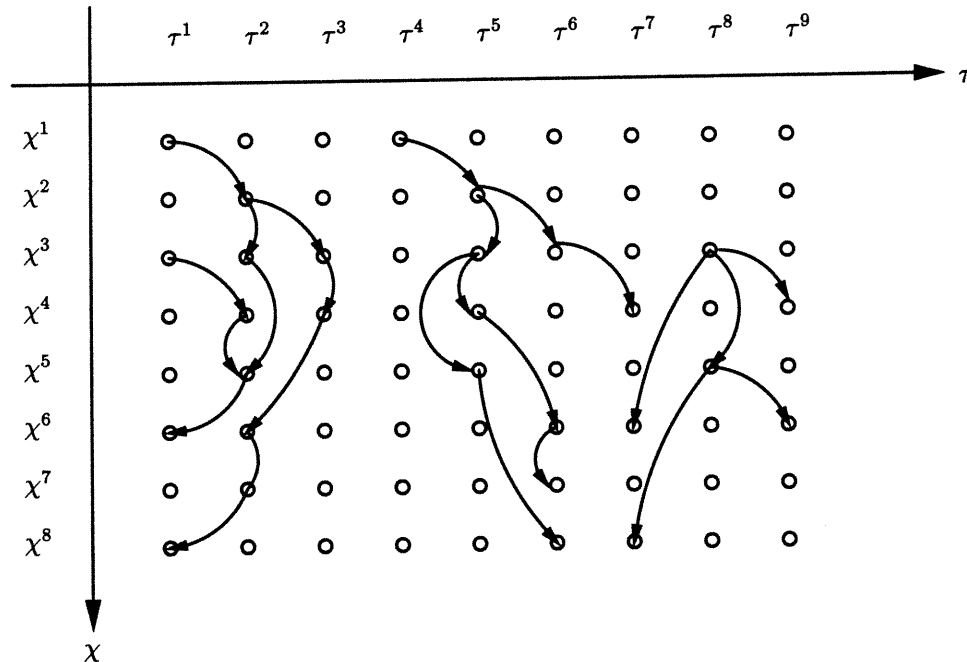


FIG. 8.1 – Un réseau non connexe et décomposable en sous-réseaux

Nous allons proposer une courte procédure d'exploration du réseau \mathcal{G} qui permet de déterminer si une séparation existe et d'en calculer les sous-réseaux.

Procédure DÉCOMPRÉSEAU

Étant donné le réseau global $\mathcal{G} = (V, A \cup E)$,

Début

1. Créer l'ensemble auxiliaire de nœuds \bar{V} et l'initialiser $\bar{V} \leftarrow V$.
2. Créer l'ensemble de sous-réseaux \mathcal{S} et l'initialiser $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$.
3. Tant que $\bar{V} \neq \emptyset$:
 - (a) Extraire une nœud ν de \bar{V} .
 - (b) Créer le sous-réseau \mathcal{G}' et l'initialiser $\mathcal{G}' \leftarrow \emptyset$.
 - (c) Utiliser un algorithme d'exploration de réseau (en surface ou en profondeur) ou un algorithme d'arbre de coût minimal sur \mathcal{G} , en considérant ν comme la source et en supposant que les arcs de \mathcal{G} sont non orientés. À chaque fois qu'un nouveau nœud ν' est atteint, faire $\bar{V} \leftarrow \bar{V} - \{\nu'\}$ et l'ajouter, avec les arcs empruntés pour l'atteindre, au réseau \mathcal{G}' .
 - (d) Faire $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{\mathcal{G}'\}$.
4. Retourner \mathcal{S} , l'ensemble des sous-réseaux de \mathcal{G} .

Fin.

Remarquons que la boucle de l'étape 3 est exécutée au plus $|V|$ fois. De plus, il existe de nombreux algorithmes polynomiaux (et même linéaires) d'exploration de réseau ou d'arbre de coût minimum pouvant être utilisés à l'étape 3(a). La procédure DÉCOMPRÉSEAU est donc de complexité polynomiale, et possiblement linéaire si des algorithmes performants sont utilisés. Ainsi, il peut s'avérer avantageux de l'exécuter avant de formuler les problèmes. Dans le pire cas, l'ensemble \mathcal{S} ne contiendra qu'un seul réseau, c'est-à-dire \mathcal{G} lui-même, et nous n'aurons rien gagné. Cependant, les gains possiblement

réalisés sur le temps de résolution global si une décomposition en sous-réseaux existe justifiant sans doute l'utilisation de cette procédure dans une étape de pré-traitement.

8.2 Modélisation des aller-retours

Le lecteur attentif aura peut-être remarqué que les vols considérés jusqu'à maintenant dans ce document sont tous des allers simples. Bien entendu, une approche réaliste se doit de traiter les vols aller-retour, car ce type de vol est commun et probablement majoritaire sur certains marchés.

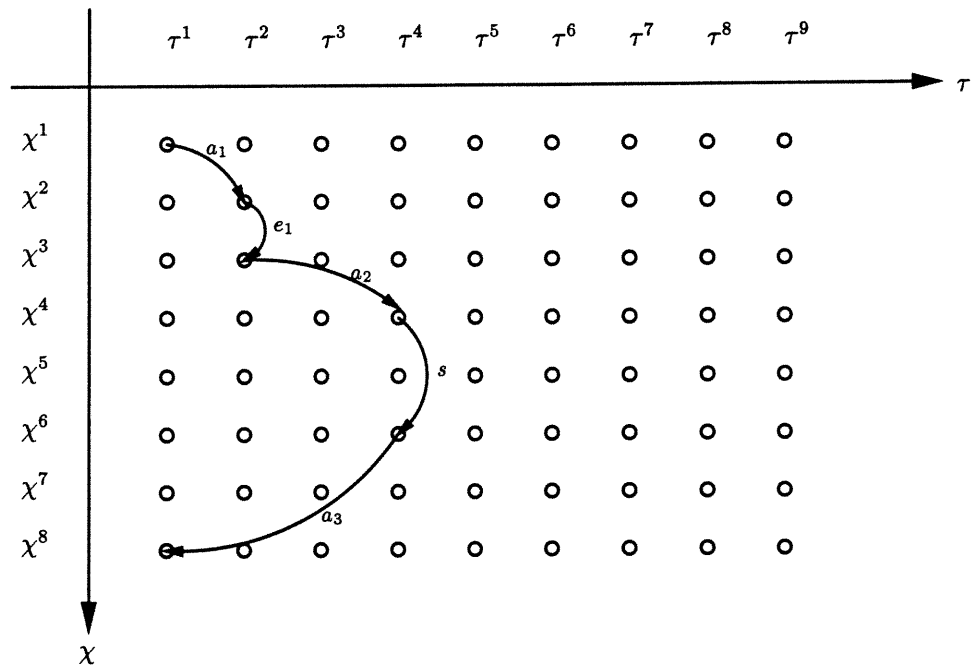


FIG. 8.2 – Un vol aller-retour avec un arc de séjour

Considérons par exemple le marché $\tau^1 - \tau^4 - \tau^1$, c'est-à-dire celui couvert par les vols aller de τ^1 à τ^4 et les vols retour de τ^4 à τ^1 , avec un séjour en τ^4 entre les deux vols. Les vols aller et retour sont déjà présents dans la structure de réseau spatio-temporel. Or il est possible de 'joindre' ces deux vols par un arc d'un nouveau type, que nous appellerons arc de séjour. Ce type d'arc est analogue à un arc d'escale, car il s'agit d'un déplacement unidimensionnel (sur l'axe χ) dans le réseau, mais ayant une durée plus grande. Un tel arc, dénoté s , est présenté à la figure 8.2. En ajoutant ce type d'arc,

nous pouvons donc traiter les vols aller-retour sans devoir modifier les formulations présentées précédemment. Cependant, une nouvelle étape de pré-traitement faisant appel à un algorithme d'exploration de réseau s'avère nécessaire afin de déterminer les arcs de séjour possibles et de joindre les vols aller et retour, à l'intérieur d'une fenêtre de temps donnée.

8.3 Modélisation des restrictions temporelles

Nous avons mentionné à plusieurs reprises que certaines restrictions étaient associées aux classes tarifaires. La nature plus ou moins astreignante d'une classe tarifaire influence d'ailleurs grandement le prix perçu par les clients achetant des billets de cette classe. Or les restrictions les plus importantes, c'est-à-dire celles ayant un plus grand impact sur la perception du prix du billet, sont d'ordre temporel. En effet, elles concernent la période allant de la vente (ou de la réservation) du billet à la date de départ (qui est en fait la date de 'consommation' du produit), et, dans le cas des vols aller-retour, la période de séjour entre l'aller et le retour. Les compagnies aériennes imposent des contraintes artificielles sur la durée de ces périodes afin de tester la propension à payer des consommateurs pour un produit de meilleure qualité.

À la section précédente, nous avons vu comment modéliser un vol aller-retour dans notre structure de réseau. Nous pouvons ici appliquer le même raisonnement et imaginer un autre type d'arc pouvant être ajouté à ce réseau, que nous nommerons arc de vente. Un tel arc est illustré à la figure 8.3. Nous supposons que toutes les ventes ont lieu en un endroit spécial dans le (peut-être cyber-) espace, que nous appellerons τ^{PV} (PV pour Point de Vente). Ainsi, un arc de vente ayant pour origine le nœud (τ^{PV}, χ^0) et pour destination le nœud (τ^1, χ^1) représente une vente (ou une réservation) effectuée au temps χ^0 pour un vol 'consommé' au temps χ^1 . De cette façon, nous pouvons calculer la durée de l'arc de vente et ajuster en conséquence la valeur de la qualité de service de ce vol, venant ainsi modifier la façon dont les usagers percevront le prix du billet. De la même façon, nous pouvons calculer la durée et analyser les caractéristiques de l'arc de séjour d'un vol aller-retour pour ensuite ajuster la qualité de service ce vol. Ainsi, un vol

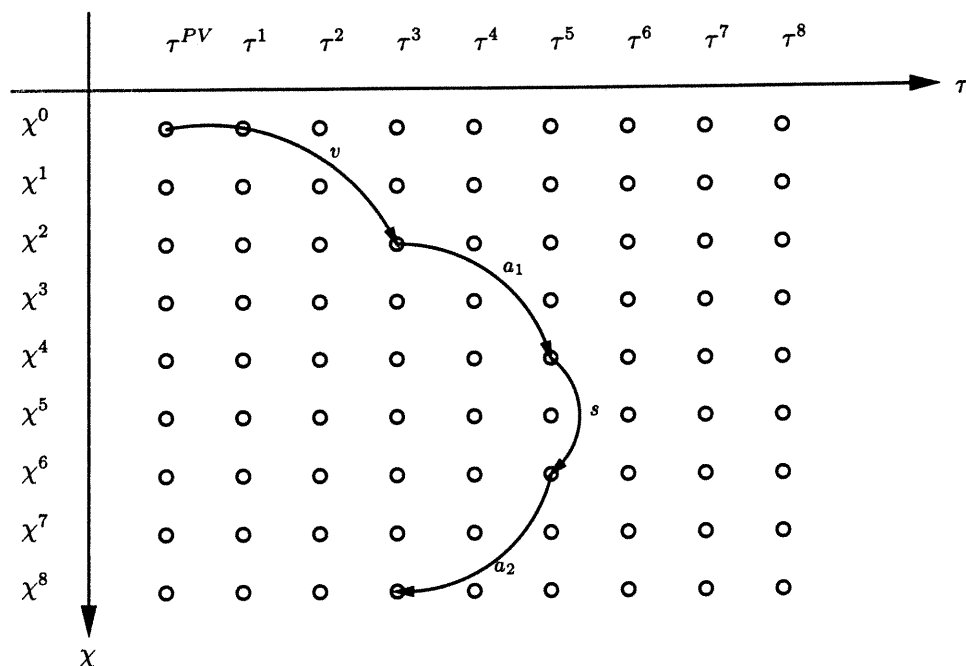


FIG. 8.3 – Un vol aller-retour avec un arc de vente

avec un séjour plus long comportant un samedi ou un dimanche aura une qualité moins grande aux yeux des usagers de certains groupes (par exemple les voyageurs d'affaire).

Bien entendu, de tels ajouts à la structure de données sous-jacente augmentent la quantité d'information devant être analysée et imposent une étape de pré-traitement plus élaborée. En particulier, l'horizon temporel devant être considéré devient très large, car en pratique il peut s'écouler plusieurs semaines, voire quelques mois, entre la vente d'un billet et la 'consommation' de celui-ci ou entre le vol d'aller et le vol de retour.

Chapitre 9

Conclusion

À la lumière des résultats obtenus, nous pouvons conclure que les modèles présentés dans ce mémoire permettent le calcul de schémas d'allocation de la capacité et de structures tarifaires optimales pour l'organisation utilisant cette approche. Comme nous l'avons vu, une analyse plus poussée de ces résultats peut aussi révéler des informations très intéressantes et difficilement perceptibles au premier abord, tels des effets réseau, la présence de capacité résiduelle ou superflue sur un certain marché, etc. De telles informations revêtent une grande valeur dans un contexte décisionnel ou stratégique. Il paraît donc justifié et prometteur d'appliquer le paradigme de programmation mathématique bi-niveau aux problèmes de tarification et d'allocation de la capacité en transport aérien.

L'approche que nous avons adoptée semble toutefois avoir certaines limites. D'abord, dans nos modèles, la tarification et l'allocation de la capacité se font simultanément, en considérant la totalité de la demande. En réalité, les clients achètent leur billet individuellement et se dirigent naturellement vers les vols qui leur paraissent les plus avantageux. Or lorsque ces vols sont remplis, les passagers doivent se tourner vers d'autres vols moins avantageux. Les prix de ces vols s'ajustent en conséquence, mais les vols déjà remplis n'entrent alors plus en ligne de compte, ceux-ci étant en quelque sorte 'disparus' du marché. Comme les passagers sont 'captifs' des vols restants, le meneur et la compétition peuvent offrir leurs billets à des prix plus élevés, lorsque la demande est suffisante. Afin que nos modèles tiennent compte de cette réalité, nous devrions simuler l'arrivée des passagers par un processus stochastique et réoptimiser périodiquement la structure

tarifaire et les schémas d'allocation de la capacité, en retirant à chaque fois les vols complets.

Une autre limite de nos modèles, encore plus fondamentale que celle décrite ci-dessus, trouve son origine dans la perception discrète du problème sur laquelle nous nous sommes basés. En effet, nous avons posé comme hypothèse qu'il était possible de discrétiser et de segmenter la clientèle en un certain nombre de groupes d'usagers. Cet ensemble de groupes d'usagers vient s'ajouter à celui des vols et des classes tarifaires, entraînant ainsi une 'multiplication des indices' ayant comme résultat un nombre très grand de variables de décision. Or comme nous avons pu l'observer dans la présentation des résultats numériques, le temps de résolution requis afin de résoudre des instances de taille réaliste semble croître rapidement et de façon exponentielle lorsque de nouvelles variables sont introduites. Cette explosion combinatoire fait en sorte que les capacités limites des technologies que nous utilisons sont rapidement atteintes. De plus, il semble qu'en pratique un nombre beaucoup plus grand de classes tarifaires (de l'ordre de quelques dizaines) doivent être considérées, ce qui implique une quantité toujours plus grande de variables. Bref, il y a lieu d'explorer des approches différentes si nous désirons résoudre des instances de taille réaliste dans un temps raisonnable. Une stratégie de génération de colonnes pourrait permettre de réduire considérablement le temps de résolution tout en conservant la perception discrète du problème, tandis qu'une alternative possible est de supposer que les usagers ne sont pas répartis dans un certain nombre de groupes discrets mais plutôt distribués selon une loi statistique continue en fonction des valeurs qu'ils accordent au temps et à la qualité de service. Une telle approche permettrait le calcul de schémas d'allocation de la capacité et de structures tarifaires plus lisses que ceux obtenues avec notre approche discrète. Elle nécessite cependant des méthodes de résolution complètement différentes de celles que nous avons proposées. Une combinaison de ces deux approches utilisant d'abord le modèle discret pour obtenir rapidement une bonne solution brute et ensuite le modèle continu pour polir et raffiner cette solution pourrait s'avérer efficace.

De plus, le problème de tarification dans le domaine aérien possède un aspect dynamique que l'on ne peut ignorer. Les prix, la demande et le nombre de places disponibles

varient continuellement et sont actualisés plusieurs fois par jour. Les solutions obtenues à l'aide de nos modèles reflètent l'état actuel du marché mais ne sont valides que pour une période limitée. Dès que des changements aux données fondamentales (prix, capacité, demande) surviennent, de nouvelles solutions doivent être obtenues. Une utilisation pratique de notre approche implique donc un processus de réoptimisation constant, d'où l'importance du temps de résolution. Dans un tel contexte, l'étalonnage des différents paramètres revêt une importance capitale, afin de refléter correctement l'hétérogénéité de la clientèle.

La Gestion du Revenu demeurera sans doute au cours des prochaines années un sujet d'intérêt non seulement dans l'industrie aérienne mais aussi dans d'autres sphères d'activités (par exemple l'industrie hôtelière, le transport ferroviaire et maritime, etc.) où l'on prend de plus en plus conscience de la nécessité d'une telle stratégie. Les recherches visant à appliquer le paradigme de programmation mathématique bi-niveau à ce problème prennent ainsi tout leur sens et permettront peut-être le développement de nouveaux outils plus performants et efficaces. Nous espérons que les travaux présentés dans ce mémoire constituent un pas dans la bonne direction et qu'ils serviront de point de départ à des recherches futures.

Bibliographie

- [BM73] J. Bracken et J. McGill. « Mathematical programs with optimization problems in the constraints ». *Operations Research*, volume 21, pages 37–44, 1973.
- [Boo94] G. Booch. *Object-Oriented Analysis and Design With Applications*. Addison-Wesley, 1994.
- [Bot96] T.C. Botimer. « Efficiency considerations in airline pricing and yield management ». *Transportation Research A*, pages 317–337, 1996.
- [CN77] W. Candler et R. Norton. « Multilevel programming ». Rapport technique 20, World Bank Development Research Center, Washington D.C., 1977.
- [eD79] M.R. Garey et D.S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, 1979.
- [eS00] R. Elmasri et S.B. Navathe. *Fundamentals of Database Systems*. Addison-Wesley, 2000.
- [GG97] G. Gallego et G. Van Ryzin. « A Multiproduct Dynamic Pricing Problem and its Applications to Network Yield Management ». *Operations Research*, volume 45, numéro 1, pages 33–41, 1997.
- [IA97] I. Yeoman et A. Ingold, éditeurs. *Yield Management : Strategies fom the Service Industries*. Cassel, 1997.
- [Kim90] S. Kimes. « Yield management : A tool for capacity-constrained service firms ». *Journal of Operations Management*, numéro 8, pages 348–363, 1990.
- [Lit72] K. Littlewood. « Forecasting and control of passenger bookings ». *AGIFORS Symposium Proceedings*, numéro 12, pages 95–117, 1972.

- [LMS] M. Labbé, P. Marcotte et G. Savard. « On a class of bilevel programs ». À paraître dans *Nonlinear Optimization and Related Topics*, Di Pillo and Giannessi eds, Kluwer Academic Publishers (2000).
- [LMS98] M. Labbé, P. Marcotte et G. Savard. « A bilevel model of taxation and its application to optimal highway pricing ». *Management Science*, numéro 44, pages 1595–1607, 1998.
- [LS99] C.J. Lautenbacher et S. Stidham. « The Underlying Markov Decision Process in the Single-Leg Airline Yield-Management Problem ». *Transportation Science*, volume 33, numéro 2, pages 136–146, 1999.
- [MSa] P. Marcotte et G. Savard. « Bilevel Programming : Algorithms ». À paraître dans *The Encyclopedia of Optimization*, Floudas and Pardalos, eds.
- [MSb] P. Marcotte et G. Savard. « Bilevel Programming : Applications ». À paraître dans *The Encyclopedia of Optimization*, Floudas and Pardalos, eds.
- [MSc] P. Marcotte et G. Savard. « Bilevel Programming : Formulation ». À paraître dans *The Encyclopedia of Optimization*, Floudas and Pardalos, eds.
- [MVR99] J.L. McGill et G.J. Van Ryzin. « Revenue Management : Research Overview and Prospects ». *Transportation Science*, volume 33, numéro 2, pages 233–256, 1999.
- [Rot71] M. Rothstein. « An airline overbooking model ». *Transportation Science*, numéro 5, pages 180–192, 1971.
- [SLD92] B. Smith, J. Leimkuhler et R. Darrow. « Yield management at American Airlines ». *Interfaces*, volume 22, numéro 1, pages 8–31, 1992.
- [Vic] L. N. Vicente. « Bilevel Programming : Introduction, History and Overview ». À paraître dans *The Encyclopedia of Optimization*, Floudas and Pardalos, eds.
- [WB92] L. Weatherford et S. Bodily. « A taxonomy and research overview of perishable asset revenue management : Yield management, overbooking, and pricing ». *Operations Research*, volume 40, numéro 5, pages 831–844, 1992.

- [WKD93] J.T. Wong, F.S. Koppelman et S.D. Daskin. « Flexible Assignment Approach to Itinerary Seat Allocation ». *Transportation Research B*, volume 27B, numéro 1, pages 33–48, 1993.
- [You99] P.-S. You. « Dynamic Pricing in Airline Seat Management for Flights with Multiple Flight Legs ». *Transportation Science*, volume 33, numéro 2, pages 192–206, 1999.