

2m11.2782.11

Université de Montréal

**CONNECTIVITÉ DES GRAPHS
SOMMET -TRANSITIFS**

par

Jonathan Dumas

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

En vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M. Sc.)
en mathématiques

Décembre 1999

© Jonathan Dumas, 1999



QA
3
U54
2000
v.021

Université de Montréal
CONJECTURES DES GRAPHES
SOMMET-TRANSITES

par

Jonathan Dumas

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

En vue de l'obtention du grade de

Maître en sciences (M.Sc.)
en mathématiques

Montréal, 1999

© Jonathan Dumas, 1999



Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**CONNECTIVITÉ DES GRAPHES
SOMMET-TRANSITIFS**

présenté par

Jonathan Dumas

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Ivo Rosenberg
(président-rapporteur)

Gert Sabidussi
(directeur de recherche)

Abraham Broer
(membre du jury)

Mémoire accepté le :

15 mars 2000

SOMMAIRE

Ce mémoire est constitué de résultats originaux tirés de [6, 5] (deux manuscrits soumis pour publication au cours de la dernière année) et de résultats connus nécessaires à leur compréhension ou intimement reliés à ceux-ci.

Le lecteur pourra trouver au chapitre 1 les définitions des concepts de base utilisés par la suite ainsi que la notation adoptée. Les notions particulières au sujet sont définies dans les chapitres subséquents.

Le second chapitre couvre le contenu de [25, 26, 27] (Mader et Watkins), dans lesquels est décrite la structure des graphes sommet-transitifs hypoconnexes. On y introduit de ce fait des outils (atomes, fragments, etc.) et techniques de preuves que l'on utilisera à maintes reprises par la suite.

Le matériel original présenté au chapitre 3 provient de [6]. On donne notamment une caractérisation des graphes de Cayley hypoconnexes et une description des groupes sur lesquels on peut définir de tels graphes. On y présente aussi une preuve originale, courte et relativement simple d'un résultat concernant la connectivité des graphes de Cayley hiérarchiques pour lequel on ne trouve dans la littérature que des preuves inductives plutôt lourdes [2, 12].

Au chapitre 4, on étudie, dans un premier temps, la structure des graphes sommet-transitifs X ayant un séparateur minimum S tel que $X - S$ ait plus de deux composantes ($X - S$ a toujours au moins deux composantes). On y montre, entre autres, que ces graphes ont une structure très semblable à celle des graphes sommet-transitifs hypoconnexes, et l'on donne une borne inférieure étonnamment grande pour la cardinalité d'une composante de $X - S$ dont la cardinalité n'est pas minimale. Tous les résultats de la section 4.1 sont originaux et proviennent de [5]. On verra, à la section 4.2, une application des résultats de la section précédente à l'étude des graphes de Cayley dits vospériens et superconnexes. On

trace ensuite une esquisse du problème de la classification des graphes sommet-transitifs en fonction de certaines propriétés de connectivité, sujet à propos duquel l'état des connaissances ne semble pas avoir progressé depuis Jung [15, 14]. Il est à noter que nous ne rendons pas justice à l'envergure des travaux de Jung, en ne présentant que quelques résultats pouvant s'exprimer sans l'usage de la lourde «machinerie» qui semble nécessaire au traitement de ce sujet.

REMERCIEMENTS

Je me considère privilégié d'avoir pu travailler avec Gert Sabidussi au cours de la dernière année et demie et lui suis sincèrement reconnaissant pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux.

Je remercie aussi: Daniel Audet, Bruno Blanchet, Abraham Broer, Sébastien Côté, Yannick Delbecque, Jean Dion, Jérôme Fournier, Marc Fredette, Aurélie Labbe, Catherine Mussely, Chrystelle Renaud, Ivo Rosenberg et Hidemitsu Sayeki.

Remerciements spéciaux à Nicolas Beauchemin (administrateur de réseau et conseiller L^AT_EX) pour son professionnalisme, et à mes partenaires de billard, Stéphane Lafrance et Maurice Morel.

Table des matières

Sommaire	iii
Remerciements	v
Introduction	1
Chapitre 1. Définitions et notation	3
Chapitre 2. Graphes sommet-transitifs hypoconnexes	6
2.1. Fragments et atomes	6
2.2. Structure des graphes sommet-transitifs hypoconnexes	11
2.3. Quelques conséquences	15
Chapitre 3. Graphes de Cayley hypoconnexes	19
3.1. Graphes de Cayley	20
3.2. Une caractérisation	21
3.3. Conditions de minimalité sur S	26
Chapitre 4. Liens entre X et $X - S$	31
4.1. Influence du nombre de composantes de $X - S$	31
4.2. Vers une classification	40
Bibliographie	49

INTRODUCTION

Les graphes dont l'action du groupe d'automorphismes sur leur ensemble de sommets est transitive sont dits sommet-transitifs. Cette propriété leur confère une grande symétrie et nous permet d'utiliser des techniques algébriques pour les étudier.

La connectivité d'un graphe est, essentiellement, le nombre minimum de sommets qu'il faut lui enlever pour le rendre non connexe.

En 1970 paraissent deux articles majeurs aux contenus très semblables; Mader [26] et Watkins [27] y décrivent en détail la structure des graphes sommet-transitifs hypoconnexes (c.-à-d. dont la connectivité est strictement inférieure au degré de régularité). Les techniques de preuves mises à l'oeuvre dans ces articles sont radicalement différentes de celles habituellement utilisées, où l'on dénombre et étudie le comportement de nombreux chemins (on n'a qu'à penser aux multiples versions du théorème de Menger). Watkins et Mader analysent plutôt certains sous-ensembles de sommets (fragments, atomes) dont les voisinages sont des séparateurs minimums. Halin avait déjà adopté une façon de faire très similaire [8].

Jung, dans deux textes denses et techniques [15, 14], s'engage ensuite dans une investigation détaillée des fragments et séparateurs minimums de plusieurs familles de graphes, dont les graphes sommet-transitifs. Il vient près d'établir ce qu'on pourrait qualifier de classification complète (avec caractérisation) des graphes sommet-transitifs en regard de leurs propriétés de connectivité. Malheureusement, ses travaux ont trouvé peu d'échos par la suite.

Mader [22, 23, 24], Watkins et Jung [21, 19] ont continué à s'intéresser aux questions de connectivité, notamment dans les graphes infinis, et ont ponctuellement obtenus des résultats s'appliquant spécifiquement aux graphes sommet-transitifs [20, 16].

En 1981, Godsil, qui ne s'est pas autrement penché sur le sujet, publie une note [7] dans laquelle il montre que les graphes de Cayley dont l'ensemble générateur est minimal ont une connectivité maximale, répondant ainsi à une question que lui avait posée Watkins. Depuis, plusieurs auteurs ont investi le créneau fertile de l'étude de la connectivité de classes particulières de graphes de Cayley: abéliens (Hamidoune [9], Hamidoune, Lladó et Serra [13]), hiérarchiques (Als-pach [2], Baumslag [3], Hamidoune, Lladó et Serra [12, 11]), circulants (Boesch et Tindell [4]), engendrés par des transpositions (Akers et Krishnamurthy [1]), etc.

Chapitre 1

DÉFINITIONS ET NOTATION

Dans ce qui suit, le terme *graphe* signifie graphe simple (c.-à-d. sans boucles ni arêtes multiples et non orienté) fini. L'ensemble de sommets et l'ensemble d'arêtes du graphe X sont respectivement notés $V(X)$ et $E(X)$. L'*ordre* de X est le nombre de sommets de X .

Deux sommets u, v de X sont dits *adjacents* si l'arête $[u, v]$ est présente dans X . Le *voisinage* de u , noté $N_X(u)$ ou $N(u)$ est l'ensemble des sommets de X adjacents à u . Le *degré* de u est le nombre de voisins de u , et sera noté $d_X(u)$ ou $d(u)$. Un graphe dont tous les sommets sont de même degré d est dit *d-régulier* ou *régulier de degré d*. Le degré de régularité d'un graphe X sera noté d_X .

Un *uv*-chemin (de longueur l) dans X est une suite de sommets différents x_0, \dots, x_l telle que $x_0 = u$, $x_l = v$, et $[x_{i-1}, x_i] \in E(X)$, pour $i = 1, \dots, l$. S'il existe un *uv*-chemin dans X pour toute paire de sommets $u, v \in V(X)$, alors X est *connexe*. Clairement, un graphe non connexe est une union de sous-graphes connexes; les sous-graphes connexes maximaux d'un graphe non connexe sont appelés *composantes connexes*, ou simplement *composantes* de celui-ci.

La distance entre deux sommets $u, v \in V(X)$, notée $d_X(u, v)$ ou $d(u, v)$ est la longueur d'un *uv*-chemin de longueur minimum dans X . Le *diamètre* d'un graphe connexe X , noté $\text{diam}X$ est $\max\{d(u, w) : u, w \in V(X)\}$.

Nous utiliserons fréquemment les graphes suivants.

1. K_n , le *graphe complet* d'ordre n . Chaque sommet de K_n est adjacent à tous les autres.
2. $\overline{K_n}$, le *graphe discret* d'ordre n . C'est le complémentaire du graphe complet; $E(\overline{K_n}) = \emptyset$.

3. C_n , le *cycle* de longueur n . On peut voir C_n comme étant le graphe dont les sommets sont les entiers modulo n , et dans lequel le sommet i est adjacent aux sommets $i \pm 1 \pmod{n}$.
4. Q_n , le *n-cube*. Les sommets du n -cube sont les mots binaires (constitués de «0» et de «1») de longueur n , et deux sommets du n -cube sont adjacents s'ils ne diffèrent qu'en une seule position.
5. $K_{m,n}$, le *graphe biparti complet*. Il existe une partition de $V(K_{m,n})$ en deux ensembles A, B tels que $|A| = m, |B| = n$, qu'aucune arête ne joint deux sommets de A ni deux sommets de B , et que chaque sommet de A est adjacent à chaque sommet de B .

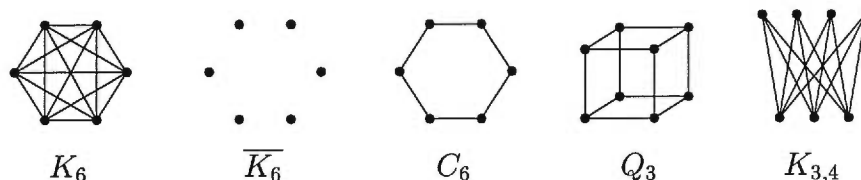


FIG. 1.0.1.

Étant donné un sous-ensemble S de sommets de X , le graphe $X - S$ est le sous-graphe induit par $V(X) \setminus S$. Si $X - S$ est non connexe, on dit que S est un *séparateur* de X .

Si un sommet u n'est pas adjacent à tous les autres sommets de X , son voisinage est clairement un séparateur de X . Ainsi, les graphes complets sont les seuls à ne pas avoir de séparateurs.

Un séparateur de cardinalité minimum est un *séparateur minimum*. Si X n'est pas un graphe complet, sa *connectivité*, notée κ_X ou simplement κ , est la cardinalité d'un séparateur minimum de X . La connectivité du graphe complet d'ordre n est, par définition, $n - 1$.

On définit, pour tout sous-ensemble $A \subset V(X)$,

$$N_X[A] = N[A] := \{v \in V(X) : u \in A \text{ et } [u, v] \in E(X)\}$$

$$N_X(A) = N(A) := N[A] \setminus A$$

Les ensembles de sommets $N[A]$ et $N(A)$ sont appelés, respectivement, *voisinage* et *voisinage ouvert* de A .

Soient X et Y deux graphes. Un *isomorphisme* φ entre X et Y est une bijection entre $V(X)$ et $V(Y)$ telle que $[\varphi(u), \varphi(v)] \in E(Y)$ si et seulement si $[u, v] \in E(X)$. S'il existe un isomorphisme entre X et Y , ils sont dits isomorphes et l'on note $X \cong Y$.

Un isomorphisme de X vers lui-même est un *automorphisme* de X . L'ensemble des automorphismes de X , muni de la composition, forme un groupe noté $\text{Aut}(X)$. Si $\text{Aut}(X)$ agit transitivement sur $V(X)$, alors X est dit *sommet-transitif*. Un graphe sommet-transitif est nécessairement régulier.

Si $\text{Aut}(X)$ agit transitivement sur $E(X)$ (c.-à-d. si pour toute paire d'arêtes $[u, v], [x, y]$ de X , il existe un automorphisme φ tel que $\varphi(u) = x$ et $\varphi(v) = y$ ou encore $\varphi(u) = y$ et $\varphi(v) = x$), alors X est dit *arête-transitif*.

Si X est arête-transitif et que pour toute arête $[u, v]$ de X , il existe un automorphisme φ tel que $\varphi(u) = v$, alors X est dit *arc-transitif*.

Le *line-graph* $L(X)$ d'un graphe X est le graphe dont l'ensemble de sommets est $E(X)$ et dans lequel les sommets $[u, v]$ et $[x, y]$ sont adjacents si, en tant qu'arêtes de X , elles sont adjacentes (c.-à-d. si $[u, v] \neq [x, y]$ et $\{u, v\} \cap \{x, y\} \neq \emptyset$).

Chapitre 2

GRAPHES SOMMET-TRANSITIFS HYPOCONNEXES

Soit X un graphe connexe quelconque. Le voisinage d'un sommet de X est un séparateur de X , à moins que ce sommet ne soit adjacent à tous les autres. Si X n'est pas un graphe complet, sa connectivité κ_X est donc bornée supérieurement par δ_X , son degré minimum. Comme la connectivité du graphe complet K_n est par définition $n - 1$, l'inégalité

$$\kappa_X \leq \delta_X$$

est vérifiée, quel que soit le graphe connexe X .

Définition 2.0.1. Un graphe connexe X est dit *hypoconnexe* [28] si $\kappa_X < \delta_X$. Autrement, c.-à-d. si $\kappa_X = \delta_X$, on dit que X est *maximalement connexe*.

Les graphes sommet-transitifs étant réguliers, le présent chapitre est consacré à l'étude des graphes sommet-transitifs dont la connectivité est strictement inférieure au degré de régularité.

2.1. FRAGMENTS ET ATOMES

Un graphe X est maximalement connexe si et seulement si le voisinage d'un de ses sommets est un séparateur minimum. Autrement dit, X est maximalement connexe si et seulement si il possède un séparateur minimum S tel que le graphe $X - S$ ait un sommet isolé.

De manière équivalente, X est hypoconnexe si et seulement si

$$\min\{|A| : A \text{ est une composante de } X - S; S \text{ est un s\u00e9p. min. de } X\} \geq 2.$$

Ce constat rend les d\u00e9finitions suivantes naturelles.

D\u00e9finition 2.1.1. Soit X un graphe connexe et soit S un s\u00e9parateur minimum de X . Un ensemble non vide A de sommets de X est appel\u00e9 *fragment* relatif \u00e0 S si

1. $N(A) = S$;
2. $A \cup N(A) \neq V(X)$.

Un *atome* est un fragment de cardinalit\u00e9 minimum, le minimum \u00e9tant pris sur tous les fragments relatifs \u00e0 tous les s\u00e9parateurs minimums de X .

Remarque 2.1.2. On d\u00e9duit ais\u00e9ment de ces d\u00e9finitions que tout graphe non complet contient au moins un atome et qu'un atome induit un sous-graphe connexe.

Nous utiliserons tr\u00e8s fr\u00e9quemment ces termes; aussi m\u00e9ritent-ils d'\u00eatre illustr\u00e9s \u00e0 l'aide de l'exemple suivant.

Exemple 2.1.3. Le graphe X de la figure 2.1.1 est 1-connexe; $\{u\}$ et $\{c_0\}$ sont les s\u00e9parateurs minimums de X . Les ensembles de sommets $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, A , B et C sont les fragments relatifs \u00e0 $\{u\}$. Parmi ceux-ci, A est le seul atome. Le graphe X poss\u00e8de deux autres atomes, $\{c_1, c_2\}$ et $\{c_3, c_4\}$.

Convenons de la notation suivante. Pour tout ensemble de sommets A du graphe X ,

$$\bar{A} := V(X) \setminus (N(A) \cup A).$$

Pour chaque fragment D consid\u00e9r\u00e9 dans l'exemple pr\u00e9c\u00e9dent, \bar{D} est aussi un fragment. C'est \u00e9videmment une propri\u00e9t\u00e9 g\u00e9n\u00e9rale des fragments. Le lemme

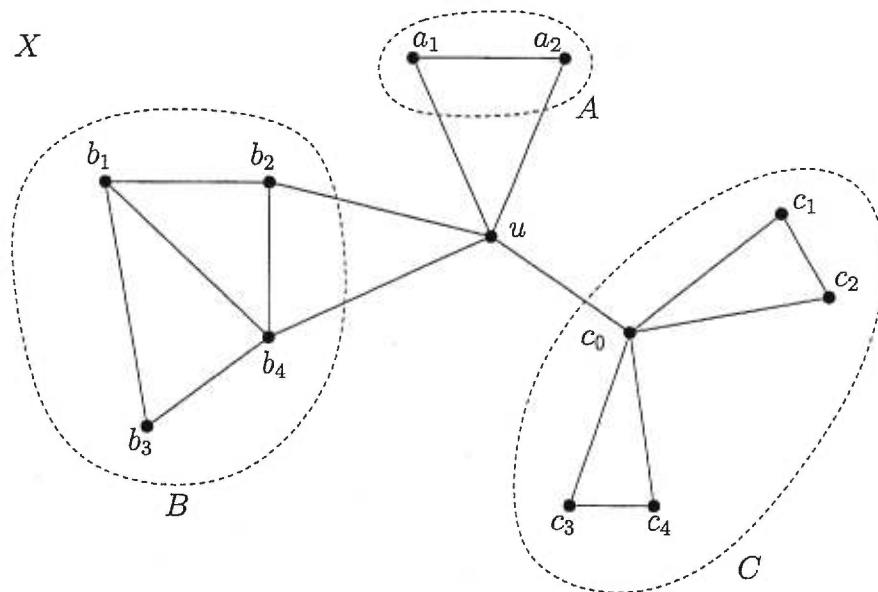


FIG. 2.1.1.

suisant, dont la preuve est omise, rassemble plusieurs autres faits élémentaires auxquels nous ferons appel sans mention explicite.

Lemme 2.1.4. *Soit X un graphe connexe et soient A, B des ensembles non vides de sommets de X .*

1. Si $\overline{A} \neq \emptyset$, alors $N(A)$ est un séparateur de X . En particulier, $\kappa_X \leq |N(A)|$;
2. $N(A \cap B) \subset (A \cap N(B)) \cup (N(A) \cap N(B)) \cup (N(A) \cap B)$;
3. si A est un fragment, alors \overline{A} est un fragment et $\overline{\overline{A}} = A$.

La table est mise en vue d'obtenir le principal résultat présenté dans ce chapitre, à savoir que les atomes d'un graphe sont disjoints (théorème 2.1.9). Les trois lemmes suivants sont, en quelque sorte, conçus pour obtenir le théorème 2.1.9 en corollaire. Cette présentation, empruntée à Watkins ([29], pp 168–169), est plus simple que les preuves originales de Mader [26] et de Watkins [27].

Lemme 2.1.5. *Soit X un graphe de connectivité κ et soient A, A' deux fragments de X relatifs aux séparateurs minimums S et S' , respectivement. Si $A \cap A' \neq \emptyset$, alors $|A \cap S'| \geq |S \cap \overline{A}'|$ et $|S \cap A'| \geq |\overline{A} \cap S'|$.*

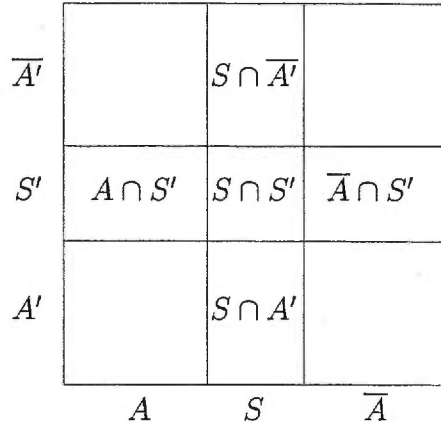


FIG. 2.1.2.

DÉMONSTRATION. Rappelons d'abord que $S = N(A)$ et $S' = N(A')$. Comme $\emptyset \neq \overline{A} \subset \overline{A \cap A'}$, l'ensemble de sommets $N(A \cap A')$ est un séparateur de X , ce qui implique que $|N(A \cap A')| \geq \kappa$. Comme

$$N(A \cap A') \subset (A \cap S') \cup (S \cap S') \cup (S \cap A'),$$

on a (voir la figure 2.1.2)

$$\begin{aligned} |A \cap S'| + |S \cap S'| + |S \cap A'| &\geq |N(A \cap A')| \\ &\geq \kappa \\ &= |S| \\ &= |S \cap \overline{A'}| + |S \cap S'| + |S \cap A'|. \end{aligned}$$

Ainsi, $|A \cap S'| \geq |S \cap \overline{A'}|$. L'autre inégalité vient par symétrie. ■

Lemme 2.1.6. *Soient A et A' deux fragments du graphe X tels que $A \cap A' \neq \emptyset$. Si $|A| \leq |\overline{A'}|^1$, alors $(A \cap A')$ est un fragment de X et $|A \cap S'| = |S \cap \overline{A'}|$, $|S \cap A'| = |\overline{A} \cap S'|$.*

1. Dans la proposition D2 de [29], l'équivalent de notre lemme 2.1.6, on utilise une inégalité stricte (réitérée en D9); c'est une erreur. Le corollaire D6 (notre lemme 2.1.7) ne peut découler de la proposition D2 telle que formulée.

DÉMONSTRATION. Posons $S = N(A)$ et $S' = N(A')$. Posons aussi $r = |A \cap S'|$ et $t = |S \cap \overline{A}'|$.

Par le lemme 2.1.5,

$$t \leq r. \quad (2.1.1)$$

Nous affirmons que $\overline{A} \cap \overline{A}' \neq \emptyset$. En effet, si tel n'était pas le cas, on aurait

$$\begin{aligned} |\overline{A}'| &= |A \cap \overline{A}'| + |S \cap \overline{A}'| + |\overline{A} \cap \overline{A}'| \\ &= |A \cap \overline{A}'| + t + 0 \\ &\leq |A \cap \overline{A}'| + r \\ &= |A \cap \overline{A}'| + |A \cap S'| \\ &= |A| - |A \cap A'| \\ &< |A|, \end{aligned}$$

et ceci contredit l'hypothèse selon laquelle $|A| \leq |\overline{A}'|$.

Comme \overline{A} et \overline{A}' sont des fragments qui s'intersectent, le lemme 2.1.5 s'applique et l'on conclut que $t \geq r$. Comme $t \leq r$ (2.1.1), on obtient $r = t$, c.-à-d. $|A \cap S'| = |S \cap \overline{A}'|$. Symétriquement, $|S \cap A'| = |\overline{A} \cap S'|$. De plus,

$$\begin{aligned} \kappa &\leq |N(A \cap A')| \\ &\leq |S \cap A'| + |S \cap S'| + |A \cap S'| \\ &= |S \cap A'| + |S \cap S'| + |S \cap \overline{A}'| \\ &= |S| \\ &= \kappa. \end{aligned}$$

L'ensemble de sommets $N(A \cap A')$ est donc un séparateur minimum de X et $A \cap A'$ est un fragment. ■

Lemme 2.1.7. *Soit A un atome d'un graphe connexe X et soit B un fragment quelconque de X . Alors*

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \subset B.$$

DÉMONSTRATION. Comme B est un fragment, \overline{B} en est aussi un. Un atome étant un fragment de cardinalité minimale, $|A| \leq |\overline{B}|$. Par le lemme précédent, $A \cap B$ est donc un fragment, mais $A \cap B$ ne peut être autre que A , encore par la minimalité de $|A|$. ■

Remarque 2.1.8. Ce dernier résultat dit aussi implicitement que pour tout atome A et tout séparateur minimum S de X ,

$$A \cap S \neq \emptyset \Rightarrow A \subset S.$$

Le résultat suivant a été démontré indépendamment par Mader [25] et Watkins [27] au début des années 70.

Théorème 2.1.9. *Les atomes d'un graphe sont disjoints.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate du lemme 2.1.7. ■

Toute simple qu'elle soit, cette condition que satisfont les atomes d'un graphe a de profondes implications sur la forme très particulière qu'ont les graphes sommet-transitifs hypoconnexes.

2.2. STRUCTURE DES GRAPHES SOMMET-TRANSITIFS HYPOCONNEXES

D'une manière informelle, un graphe sommet-transitif est un graphe dont aucun sommet n'est différentiable des autres. Comme tout graphe contient au moins un atome, chaque sommet d'un graphe sommet-transitif appartient à un atome. On a vu que les atomes d'un graphe sont disjoints; ceux d'un graphe sommet-transitif forment donc une partition de son ensemble de sommets.

Exemple 2.2.1. Le graphe de la figure 2.2.1 est le plus petit graphe sommet-transitif hypoconnexe. Les ensembles de sommets entourés sont ses atomes. Le voisinage de chaque atome est un séparateur minimum, et ceux-ci sont constitués de deux atomes.

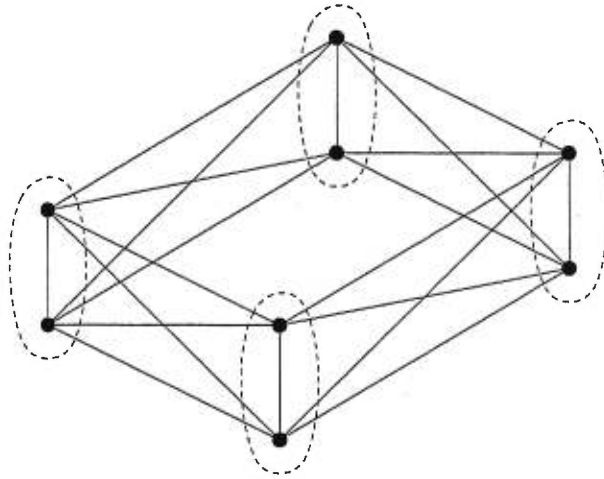


FIG. 2.2.1.

La substance du théorème suivant et de la proposition 2.2.5 se trouve dans [26, Lemma 4] et [27, Theorem 2].

Théorème 2.2.2. *Soit X un graphe sommet-transitif. Alors*

1. $\mathcal{A} = \{A \subset V(X) : A \text{ est un atome de } X\}$ est une partition de $V(X)$;
2. les sous-graphes induits par les atomes de X sont des graphes sommet-transitifs isomorphes;
3. Tout séparateur minimum de X (en particulier, le voisinage de chaque atome de X) est une union disjointe d'atomes.

DÉMONSTRATION. D'abord, si X est maximalelement connexe, l'énoncé devient trivial, chaque sommet de X étant un atome.

Supposons donc que X est hypoconnexe, et soit A un atome. Soit $u \in A$ et v un sommet quelconque de X . Par la sommet-transitivité de X , il existe un automorphisme φ de X qui envoie u sur v . Comme $\varphi(A)$ est aussi un atome et

qu'il contient v , chaque sommet de X est contenu dans un atome (le choix de v étant arbitraire). Ainsi, par le théorème 2.1.9, \mathcal{A} est une partition de $V(X)$. Ceci démontre aussi que tous les atomes de X sont isomorphes.

Si w est un sommet quelconque dans A , il existe un automorphisme ψ de X tel que $\psi(u) = w$. Comme $\psi(A) \cap A \neq \emptyset$, on a $\psi(A) = A$. Ainsi, la restriction de ψ sur A est un automorphisme du sous-graphe induit par A . Le choix des sommets $u, w \in A$ étant arbitraire, le sous graphe induit par A (et par tout autre atome de X) est sommet-transitif.

Soit S un séparateur minimum X . Par le lemme 2.1.7, chaque atome de X est soit inclus dans S , soit disjoint de S . Puisque \mathcal{A} partitionne $V(X)$, tout séparateur minimum de X est une union disjointe d'atomes. ■

Le théorème 2.2.2 ne suffit pas à décrire toute la symétrie inhérente aux graphes sommet-transitifs hypoconnexes. Comme on peut s'y attendre (et comme le suggère l'exemple 2.2.1), l'agencement des atomes au sein d'un tel graphe n'est pas du tout désordonné. Pour bien décrire la situation, il est nécessaire d'utiliser le concept de graphe quotient.

Définition 2.2.3. Soit X un graphe et $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_k\}$ une partition de $V(X)$. Le *quotient* X/\mathcal{P} de X par \mathcal{P} est le graphe ayant \mathcal{P} comme ensemble de sommets et pour lequel $[A_i, A_j] \in E(X/\mathcal{P})$ si et seulement si il existe $a_i \in A_i$ et $a_j \in A_j$ ($A_i \neq A_j$) tels que $[a_i, a_j]$ est une arête de X .

On définit l'application

$$\begin{aligned} \nu : V(X) &\longrightarrow \mathcal{P} \\ u \in A_i &\longmapsto A_i \end{aligned}$$

que nous appellerons *application canonique* de X sur X/\mathcal{P} .

Exemple 2.2.4. Le graphe X de la figure 2.2.2 est sommet-transitif et hypoconnexe ($\kappa_X = 9$ et $d_X = 11$). Posons $\mathcal{A} = \{A \subset V(X) : A \text{ est un atome de } X\}$. Les atomes de X sont les huit triangles distingués. Le quotient de X par \mathcal{A} , aussi appelé *graphe des atomes* de X , est le 3-cube.

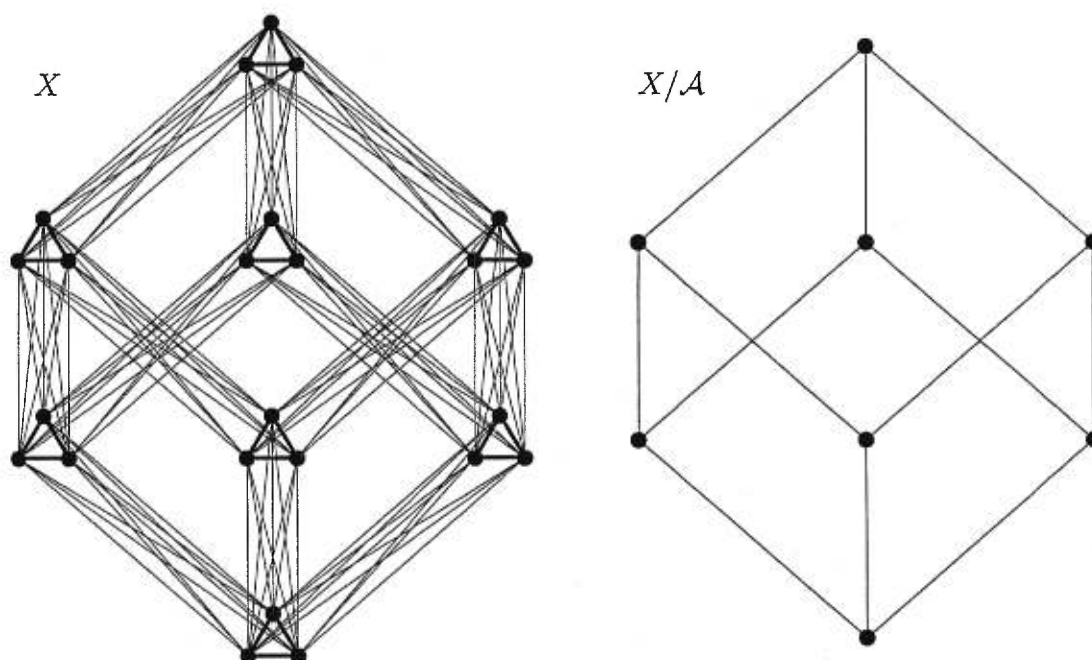


FIG. 2.2.2.

Le 3-cube est sommet-transitif (tout comme C_4 , le cycle de longueur 4, qui est le graphe des atomes du graphe de l'exemple 2.2.1). Ce n'est pas un hasard.

Proposition 2.2.5. *Soit X un graphe sommet-transitif hypoconnexe et soit $\mathcal{A} = \{A \subset V(X) : A \text{ est un atome de } X\}$. Alors le graphe quotient $Y = X/\mathcal{A}$ est sommet-transitif, maximalement connexe et son degré est supérieur ou égal à 2.*

DÉMONSTRATION. Comme la partition \mathcal{A} est préservée sous tout automorphisme de X , chaque automorphisme φ de X induit une permutation φ' des sommets de Y , car ceux-ci sont précisément les atomes de X . On veut montrer que ces φ' sont des automorphismes de Y .

Disons que deux atomes A_i et A_j de X «partagent» des arêtes s'il existe une arête de X joignant un sommet de A_i à un sommet de A_j . Clairement, pour tout automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(X)$, A_i et A_j partagent des arêtes si et seulement si $\varphi(A_i)$ et $\varphi(A_j)$ partagent des arêtes. Ceci démontre que φ' est bien un automorphisme

de Y , si l'on remarque que les atomes qui partagent des arêtes sont exactement ceux qui, en tant que sommets de Y , sont adjacents.

Pour voir que Y est sommet-transitif, choisissons deux sommets quelconques A_i et A_j de Y ainsi que $a_i \in A_i$ et $a_j \in A_j$. Par la sommet-transitivité de X , il existe $\varphi \in \text{Aut}(X)$ tel que $\varphi(a_i) = a_j$. Alors, $\varphi(A_i) = A_j$, et φ' est un automorphisme de Y qui envoie A_i sur A_j . Le graphe Y est donc sommet-transitif.

Soit $\nu : V(X) \rightarrow \mathcal{A}$ l'application canonique de X sur Y et soit a la cardinalité des atomes de X . Clairement, l'image par ν d'un séparateur de X est un séparateur de Y . Conséquemment, Y n'est pas un graphe complet et l'on peut choisir un séparateur minimum T de Y . Il n'est pas difficile de voir que $\nu^{-1}(T)$ est un séparateur de X . Ainsi,

$$\kappa_X \leq |\nu^{-1}(T)| = a|T|.$$

Or, le voisinage $N_X(A)$ d'un atome quelconque A de X est un séparateur minimum de X et le nombre d'atomes contenus dans $N_X(A)$ est, par construction de Y , d_Y . On a donc que

$$a d_Y = |N_X(A)| = \kappa_X \leq |\nu^{-1}(T)| = a|T| \leq a d_Y,$$

ce qui implique que $|T| = d_Y$, c.-à-d. que Y est maximalelement connexe.

Il reste à montrer que $d_Y \geq 2$. On a déjà vu que Y n'est pas un graphe complet. Or, si le degré de Y était 1, Y serait isomorphe à K_2 , le graphe complet sur 2 sommets, car c'est le seul graphe sommet-transitif 1-régulier connexe. ■

2.3. QUELQUES CONSÉQUENCES

Les graphes sommet-transitifs hypoconnexes ont une structure très particulière (décrite dans la précédente section); ceci facilite l'étude de certaines de leur propriétés. Les résultats présentés dans la présente section sont des conséquences du théorème 2.2.2 et de la proposition 2.2.5 et se retrouvent dans [27] et [26].

Théorème 2.3.1. *Tout graphe arête-transitif est maximalelement connexe.*

DÉMONSTRATION. Nous montrons la contraposée. Soit X un graphe hypoconnexe et soit A un atome de X ($|A| \geq 2$). Comme un atome induit un sous-graphe

connexe, on peut choisir une arête $[a_1, a_2]$ de X joignant deux sommets de A ainsi qu'une arête $[a_3, b]$ joignant le sommet a_3 de A au sommet b appartenant à un atome B différent de A .

Ces deux arêtes ne peuvent être sur la même orbite de l'action de $\text{Aut}(X)$ sur $E(X)$. En effet, si un automorphisme φ était tel que $\varphi([a_1, a_2]) = [a_3, b]$, alors l'atome $\varphi(A)$ intersecterait les atomes A et B , ce qui est impossible. Le graphe X n'est donc pas arête-transitif. ■

Théorème 2.3.2. *Soit p un nombre premier et soit X un graphe sommet-transitif de connectivité p . Alors X est maximalelement connexe.*

DÉMONSTRATION. Supposons que X est hypoconnexe et soit A un atome de X . Alors, $N(A)$ est un séparateur minimum de X et il est constitué d'au moins deux atomes (théorème 2.2.2 et proposition 2.2.5). Si k est le nombre d'atomes dans $N(A)$, on a

$$p = \kappa_X = k |A|.$$

Comme $k \geq 2$ et $|A| \geq 2$, cette égalité contredit le fait que p est premier. ■

Le prochain théorème fournit une borne inférieure (la meilleure) pour la connectivité d'un graphe sommet-transitif en fonction de son degré. Pour le démontrer, nous utilisons une opération sur les graphes appelée produit lexicographique.

Définition 2.3.3. Le *produit lexicographique* des graphes X et Y , noté $X \circ Y$, est le graphe ayant $V(X) \times V(Y)$ comme ensemble de sommets et tel que

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \in E(X \circ Y) \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \text{ et } [y_1, y_2] \in E(Y), \text{ ou} \\ [x_1, x_2] \in E(X). \end{cases}$$

Le graphe $X \circ Y$ est constitué de $|X|$ copies isomorphes du graphe Y , chacune étant associée à un certain sommet de X , et tout sommet dans la copie de Y

associée au sommet u de X est adjacent à tous les sommets des copies de Y associées aux voisins de u dans X .

Exemple 2.3.4. Le graphe de la figure 2.2.1 est isomorphe à $C_4 \circ K_2$ et le graphe X de la figure 2.2.2 est isomorphe à $Q_3 \circ C_3$, où Q_3 désigne le 3-cube.

Proposition 2.3.5. *Si X n'est pas un graphe complet et si Y n'a pas de sommets isolés, alors $X \circ Y$ est hypoconnexe.*

DÉMONSTRATION. Soit (x, y) un sommet de $X \circ Y$. Le voisinage de (x, y) est

$$\{x\} \times N(y) \cup N(x) \times V(Y).$$

Le degré de (x, y) est donc $d(y) + d(x)|Y|$. Ainsi, le degré minimum de $X \circ Y$ est $\delta_{X \circ Y} = \delta_Y + \delta_X|Y|$.

Soit $u \in V(X)$ un sommet de degré minimum δ_X . L'ensemble de sommets $N(u) \times V(Y)$ est un séparateur de $X \circ Y$, car X n'est pas un graphe complet. Ainsi,

$$\kappa_{X \circ Y} \leq \delta_X|Y| < \delta_Y + \delta_X|Y| = \delta_{X \circ Y},$$

c.-à-d. que $X \circ Y$ est hypoconnexe. ■

Théorème 2.3.6.

$$\inf\{\kappa_X/d_X : X \text{ est un graphe sommet-transitif}\} = \frac{2}{3}$$

et cette valeur n'est atteinte pour aucun graphe.

DÉMONSTRATION. Pour un graphe maximalelement connexe X , le rapport κ_X/d_X vaut 1; considérons donc un graphe X sommet-transitif et hypoconnexe. Soit A un atome de X et $u \in A$. Soit k le nombre d'atomes dans $N(A)$ (rappelons que $k \geq 2$). Comme le voisinage de u est inclus dans $N(A) \cup A$ et que u n'est pas adjacent à lui-même, $|N(u)| < (k+1)|A|$, et

$$\kappa_X/d_X = \frac{k|A|}{|N(u)|} > \frac{k|A|}{(k+1)|A|} \geq \frac{2}{3}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons $X_m := C_4 \circ K_m$. Clairement, $\kappa_{X_m} = 2m$ et $d_{X_m} = 3m - 1$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\kappa_{X_m}}{d_{X_m}} = \frac{2}{3}.$$

Ceci complète la preuve. ■

Corollaire 2.3.7. *Tout graphe sommet-transitif de degré 2,3,4 ou 6 est maximale-ment connexe.*

DÉMONSTRATION. Soit X un graphe sommet-transitif de connectivité κ et de degré $d \in \{2, 3, 4, 6\}$. Par les théorèmes 2.3.2 et 2.3.6, si X était hypoconnexe, κ serait un nombre composé (c.-à-d. non premier) satisfaisant

$$\frac{2}{3}d < \kappa < d.$$

On vérifie facilement que c'est impossible. ■

Chapitre 3

GRAPHES DE CAYLEY HYPOCONNEXES

Les graphes de Cayley constituent la plus importante classe de graphes sommet-transitifs. De ce fait, tous les résultats donnés précédemment à propos des graphes sommet-transitifs hypoconnexes s'appliquent aux graphes de Cayley hypoconnexes. Cependant, on peut tirer avantage du fait qu'un graphe de Cayley est défini à partir d'un groupe pour obtenir des résultats plus raffinés concernant les questions de connectivité relatives à ceux-ci.

Dans un article [7] publié en 1981, Godsil soulève la question de la caractérisation des graphes de Cayley hypoconnexes en ces termes: «*The problem of characterizing the Cayley graphs [having maximal connectivity] remains open, interesting and difficult.*». Nous donnons une telle caractérisation (théorème 3.2.2) à la section 2 du présent chapitre.

Il est démontré, dans l'article susmentionné, que les graphes de Cayley dont l'ensemble générateur est minimal ont une connectivité maximale. Nous donnons une preuve originale très simple de ce résultat (théorème 3.3.2). Une généralisation de ce théorème a été obtenue, en 1992, par Alspach [2] et Hamidoune, Lladó et Serra [12], indépendamment. Nous en présentons (théorème 3.3.5) une preuve originale beaucoup plus simple que les preuves de [2] et [12].

Le matériel original présenté dans ce chapitre (le théorème 3.2.2, les preuves des théorèmes 3.3.2 et 3.3.5 et la proposition 3.2.4) sont principalement tirés de [6], dans lequel on traite aussi de problèmes concernant les graphes de Cayley orientés hypoconnexes, sujet que nous n'abordons pas ici.

3.1. GRAPHE DE CAYLEY

Définition 3.1.1. Soit G un groupe et $S = S^{-1}$ un sous-ensemble de G . Le *graphe de Cayley* (noté $\text{Cay}(G, S)$) associé à G et S est le graphe ayant G comme ensemble de sommets et dont l'ensemble d'arêtes est $\{[g, gs] : g \in G, s \in S\}$.

Remarque 3.1.2. Dans cette définition, l'hypothèse $S = S^{-1}$ aurait pu être ignorée sans que cela ne pose de problèmes majeurs. Si l'on ne demande pas que l'ensemble S soit fermé sous l'inversion, alors $\text{Cay}(G, S) = \text{Cay}(G, S \cup S^{-1})$. En effet, si $s^{-1} \in S^{-1} \setminus S$, alors les arêtes créées par s^{-1} sont du type $[g, gs^{-1}]$, mais elles sont déjà présentes dans le graphe $\text{Cay}(G, S)$ car $[g, gs^{-1}] = [gs^{-1}, gs^{-1}s]$. L'usage montre qu'il est souvent plus simple d'utiliser un ensemble S fermé sous l'inversion, ne serait-ce que parce que dans ce cas, le voisinage d'un sommet g est simplement $gS = \{gs : s \in S\}$.

Selon la définition que nous avons adoptée, un graphe de Cayley peut être infini, non connexe ou encore avoir des boucles. Comme nous désirons éviter ces trois cas de figure, des restrictions supplémentaires doivent être imposées à G et S .

Clairement, $\text{Cay}(G, S)$ est un graphe fini si et seulement si G est un groupe fini. Aussi, il est aisé de montrer que $\langle S \rangle$, le sous-groupe de G engendré par S , induit une composante connexe de $\text{Cay}(G, S)$. Si l'on veut que $\text{Cay}(G, S)$ soit connexe, S doit donc engendrer G . L'ensemble S est d'ailleurs habituellement appelé *ensemble générateur* du graphe de Cayley $\text{Cay}(G, S)$. Finalement, une boucle étant une arête du type $[g, g]$, la condition $1 \notin S$ est nécessaire et suffisante pour que $\text{Cay}(G, S)$ n'en ait pas.

Ainsi, lorsque nous ferons mention d'un graphe de Cayley $\text{Cay}(G, S)$, il sera désormais entendu que

- G est un groupe fini;
- $1 \notin S$ et $S = S^{-1}$;
- $\langle S \rangle = G$.

Proposition 3.1.3. *Soit $X = \text{Cay}(G, S)$ et soit A un ensemble non vide de sommets de X . Alors*

1. X est régulier et $d_X = |S|$;
2. $N[A] = AS$ et $N(A) = AS \setminus A$;
3. les translations à gauche par les éléments de G sont des automorphismes de X ;
4. X est sommet-transitif.

DÉMONSTRATION. 1. Quel que soit le sommet x de X , $N(x) = xS$; chaque sommet a donc $|S|$ voisins.

$$2. N[A] = \bigcup_{a \in A} N(a) = \bigcup_{a \in A} aS = AS, \text{ et } N(A) := N[A] \setminus A = AS \setminus A.$$

3. La translation à gauche par un élément $g \in G$ est l'application $\gamma_g : x \mapsto gx$. Cette application est évidemment une bijection de $V(X)$ (γ_g est un automorphisme de G). L'image d'une arête quelconque $[x, xs]$ de X par γ_g est l'arête $[gx, gxs]$, qui est aussi une arête de X . Comme X a un nombre fini d'arêtes, γ_g induit une bijection sur $E(X)$, et γ_g est un automorphisme de X . En fait, $\{\gamma_g : g \in G\}$ est un sous-groupe de $\text{Aut}(X)$ isomorphe à G .

4. Quels que soient les sommets x, y de X , la translation $\gamma_{yx^{-1}}$ est un automorphisme de X tel que $\gamma_{yx^{-1}}(x) = y$. Le graphe X est donc sommet-transitif. ■

3.2. UNE CARACTÉRISATION

Un graphe de Cayley étant entièrement déterminé par la donnée d'un groupe et d'un sous-ensemble générateur, il est naturel de vouloir traduire ses propriétés (celles du graphe) en langage algébrique, de manière à obtenir des conditions nécessaires et/ou suffisantes sur G et S pour que $\text{Cay}(G, S)$ ait certaines propriétés «graphe-théoriques».

La caractérisation que nous donnons des graphes de Cayley hypoconnexes (théorème 3.2.2) repose sur un résultat de Hamidoune [10] qui dit que les atomes du graphe $\text{Cay}(G, S)$ sont les translatés à gauche d'un sous-groupe non trivial de G . Le théorème original concerne les graphes de Cayley orientés; la version présentée ici en est une spécialisation au cas non orienté. Il est à noter que ce

résultat est implicite dans la preuve du théorème 3.1 de [7], qui est antérieur à l'article de Hamidoune.

Théorème 3.2.1. *Soit $X = \text{Cay}(G, S)$ et soit A l'atome de X contenant 1 (l'élément neutre de G). Alors A est un sous-groupe de G , les atomes de X sont les translatés à gauche de A , et $A = \langle A \cap S \rangle$.*

DÉMONSTRATION. Si X est maximalelement connexe, chacun de ses sommets constitue un atome. L'atome A est donc $\{1\}$. Si l'on admet que $\langle \emptyset \rangle = \{1\}$, la conclusion vient trivialement.

Supposons donc que X est hypoconnexe. Dans ce cas, $|A| \geq 2$ et l'on peut choisir $x \in A \setminus \{1\}$. La translation à gauche par x étant un automorphisme de X , l'ensemble xA est un atome. On a vu (théorème 2.1.9) que les atomes d'un graphe sont disjoints. Comme $x \in A \cap xA$, on doit donc avoir $A = xA$. Le choix de $x \in A \setminus \{1\}$ étant arbitraire, on conclut que A est un sous-ensemble de G fermé sous la multiplication à gauche. Comme A est fini, cette condition est suffisante pour que A soit un sous-groupe de G . Vu que xA est un atome pour tout $x \in G$, chaque atome de X est un translaté à gauche de A .

Comme $\langle S \cap A \rangle$ est l'ensemble des éléments de G pouvant être écrits sous forme d'un mot en les éléments de $S \cap A$, l'ensemble $\langle S \cap A \rangle$ induit une composante connexe du sous-graphe induit par A . Comme A est un atome, il induit un sous-graphe connexe, et $A = \langle S \cap A \rangle$. ■

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème suivant.

Théorème 3.2.2. *Un graphe de Cayley $X = \text{Cay}(G, S)$ est hypoconnexe si et seulement si il existe un sous-groupe non trivial A de G tel que $A \cap S \neq \emptyset$ et*

$$|AS| < |A| + |S| < |G|. \quad (3.2.1)$$

DÉMONSTRATION. Si X est hypoconnexe, on sait, par le théorème 3.2.1, que l'atome de X contenant 1 est un sous-groupe non trivial A de G tel que $A = \langle A \cap S \rangle$. Ainsi, $A \cap S \neq \emptyset$, ce qui implique que $A \subset AS$. Comme $N(A) = AS \setminus A$, on obtient $|N(A)| = |AS| - |A|$. Le voisinage ouvert de A étant un séparateur

minimum, sa cardinalité est κ , et $\kappa < d_X$, car X est hypoconnexe. On a donc (voir la figure 3.2.1, où la superficie de la région grise se veut une indication pour la cardinalité de S)

$$|AS| - |A| = |N(A)| = \kappa < d_X = |S|,$$

et la première inégalité de l'équation 3.2.1 est démontrée. Pour obtenir la seconde

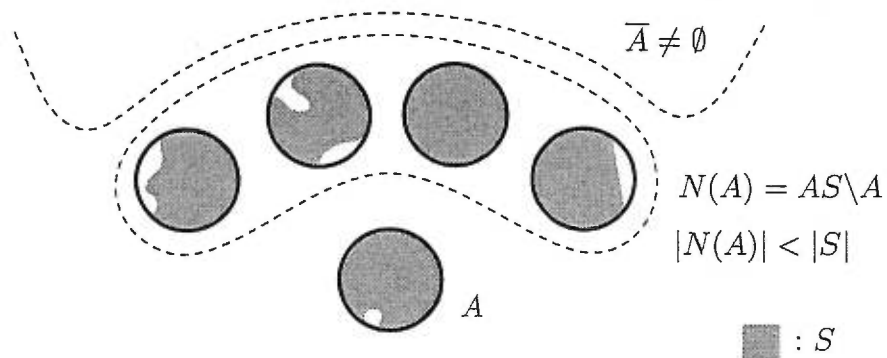


FIG. 3.2.1. Représentation schématique de l'atome A et de son voisinage.

inégalité, considérons G comme étant l'union disjointe de AS et de \bar{A} ($\bar{A} = G \setminus AS$). Comme S est strictement inclus dans AS (car $1 \in AS$, mais $1 \notin S$), $|S| < |AS|$. D'autre part, \bar{A} est un fragment de X ; sa cardinalité est donc inférieurement bornée par $|A|$, car A est un atome. Ainsi,

$$|A| + |S| < |\bar{A}| + |AS| = |G|.$$

Réciproquement, s'il existe un sous-groupe A de G satisfaisant l'énoncé du théorème, alors $A \subset AS$ et $\bar{A} = G \setminus AS$. Par l'inéquation 3.2.1, $|G| > |AS|$, donc $\bar{A} \neq \emptyset$. Ainsi, $N(A)$ est un séparateur de X , ce qui implique que $\kappa \leq |N(A)|$. Comme $A \subset AS$, on a que $|N(A)| = |AS| - |A|$. Par l'inéquation 3.2.1, $\kappa \leq |N(A)| = |AS| - |A| < |S|$. Le graphe X est donc hypoconnexe. ■

Il n'est pas dit, dans cette preuve, qu'un sous-groupe A de G satisfaisant les hypothèses du théorème est nécessairement un atome de X . Il se peut qu'un autre sous-groupe de G satisfasse ces conditions. Cette situation survient, par exemple,

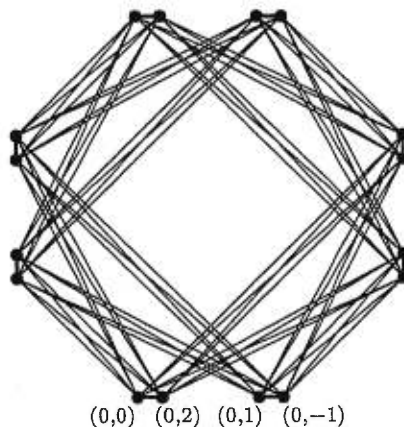


FIG. 3.2.2. Le graphe $X_2 = \text{Cay}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, \{(0, 2), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, 2)\})$.

dans les graphes

$$X_1 = \text{Cay}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, S_1),$$

$$\text{où } S_1 = \{(0, \pm 1), (0, 2), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, 2)\}$$

$$\text{et } X_2 = \text{Cay}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4, S_2),$$

$$\text{où } S_2 = \{(0, 2), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, 2)\} = S_1 \setminus \{(0, \pm 1)\}.$$

Les graphes X_1 et X_2 sont isomorphes à $C_4 \circ K_4$ et $C_4 \circ (K_2 + K_2)$, respectivement. Le sous-groupe $A_1 = \{(0, 0), (0, \pm 1), (0, 2)\}$ est un atome de X_1 mais $A_2 = \{(0, 0), (0, 2)\}$ satisfait aussi les hypothèses du théorème 3.2.2. Dans X_2 , les rôles de A_1 et de A_2 sont inversés; A_2 et ses translatés sont les atomes de X_2 .

Bien que l'on dispose de la caractérisation donnée par le théorème 3.2.2, il est possible de décrire plus précisément les groupes G et ensembles générateurs S tels que $\text{Cay}(G, S)$ est hypoconnexe.

Proposition 3.2.3. *Soit $X = \text{Cay}(G, S)$ et soit A l'atome de X contenant 1. Alors, $AS = SA$.*

DÉMONSTRATION. Si X est maximale connexe, $A = \{1\}$ et la conclusion est triviale. Supposons donc que X est hypoconnexe.

Comme AS est une union d'atomes et que les atomes de X sont les translatés à gauche de A (c.-à-d. qu'ils sont de la forme xA), AS est stable sous multiplication à droite par A . Autrement dit, $ASA = AS$. Ainsi, $SA \subset ASA = AS$.

Il reste à montrer que $AS \subset SA$. Comme SA est la réunion de tous les atomes contenant un élément de S , on doit montrer que chaque atome inclus dans AS contient un élément de S . Soit k le nombre d'atomes dans $N(A) = AS \setminus A$. Comme X est hypoconnexe, $|S| > k|A|$. Or, $S \subset AS$, et $|AS| = (k+1)|A|$. Par un raisonnement semblable au principe des tiroirs de Dirichlet, S doit intersecter tous les sous-ensembles de AS de cardinalité $|A|$ et donc, tous les atomes inclus dans AS . On en conclut que $AS \subset SA$. ■

En conséquence de cette proposition, si A est l'atome d'un graphe de Cayley hypoconnexe contenant 1, alors AS est stable sous multiplication à gauche et à droite par A , c.-à-d. que AS (et, par conséquent, $AS \setminus A$) est une union de doubles translatés de A .

Proposition 3.2.4. *Il existe un graphe de Cayley hypoconnexe associé au groupe G si et seulement si il existe un sous-groupe non-trivial A de G et des doubles translatés At_1A, \dots, At_kA ($t_i \notin A$) de A dont l'union T est fermée sous l'inversion, engendre G et est telle que $A \cup T \neq G$.*

DÉMONSTRATION. Si $X = \text{Cay}(G, S)$ est hypoconnexe et que A est l'atome de X contenant 1, on prend $T = AS \setminus A$. On vérifie que $T^{-1} = (AS)^{-1} \setminus A = S^{-1}A^{-1} \setminus A = SA \setminus A = AS \setminus A = T$. Vu que $A \subset \langle T \rangle$, que $S \subset A \cup T$ et que S engendre G , T doit nécessairement engendrer G . Finalement, T étant le voisinage ouvert de l'atome A , on a que $A \cup T \neq G$.

Réciproquement, si A et T sont tels que décrits, n'importe quel sous-ensemble S de $A \cup T$ tel que $1 \notin S = S^{-1}$ et $|S| > |T|$ fera l'affaire.

En effet, il est aisé de montrer qu'il existe un translaté $tA \subset A \cup T$ tel que $|tA \cap S| > \frac{1}{2}|A|$. Donc, $A \subset \langle S \rangle$. L'ensemble S intersecte aussi tous les doubles translatés At_iA formant T ; il engendre donc T et conséquemment, G . On vérifie aussi que $\text{Cay}(G, S)$ est hypoconnexe ($|N(A)| = |T| < |S|$). ■

Malgré son apparence, cette condition que doit satisfaire un groupe G pour garantir l'existence d'un graphe de Cayley hypoconnexe sur G n'est pas du tout restrictive. L'inverse d'un double translaté AtA d'un groupe A étant $At^{-1}A$, il est facile de choisir un ensemble de doubles translats dont l'union T sera fermée sous l'inversion. Il suffit alors d'en choisir suffisamment pour que T engendre G . Si le seul ensemble T satisfaisant ces conditions (pour tout sous-groupe non trivial A) est $G \setminus A$, ce qui est plutôt rare, alors G ne peut être le groupe sous-jacent d'un graphe de Cayley hypoconnexe.

3.3. CONDITIONS DE MINIMALITÉ SUR S

Dans un contexte général, un ensemble générateur S d'un groupe G est dit *minimal* (par rapport à l'inclusion) si aucun sous-ensemble propre de S n'engendre G , c.-à-d. si $\langle S \setminus \{s\} \rangle \neq G$, quel que soit $s \in S$. On doit modifier légèrement cette définition pour traduire le concept de minimalité d'un ensemble générateur S pour un graphe de Cayley, car dans ce cas, S doit être fermé sous l'inversion. On dit alors que S est un ensemble générateur minimal si $\langle S \setminus \{s, s^{-1}\} \rangle \neq G$, pour tout $s \in S$.

Proposition 3.3.1. *Soit $X = \text{Cay}(G, S)$, S étant un ensemble générateur minimal. Les éventuels triangles de X sont engendrés par les éléments d'ordre 3 de S et ils sont tous arête-disjoints.*

DÉMONSTRATION. Supposons que les sommets x, y et z de X soient mutuellement adjacents. Alors, $y = xs_1$, $z = ys_2$ et $z = xs_3$, pour certains $s_1, s_2, s_3 \in S$ (voir la figure 3.3.1). Ainsi, $xs_3 = z = ys_2 = xs_1s_2$, d'où $s_3 = s_1s_2$. Comme S est minimal et que $s_1 \neq s_3 \neq s_2$, on doit avoir $s_3 = s_1^{-1}$ ou $s_3 = s_2^{-1}$. En étudiant l'un ou l'autre de ces cas (et en utilisant la minimalité de S), on conclut que $s_3 = s_1^{-1} = s_2^{-1}$.

Chaque triangle de X est donc engendré par une paire de générateurs $\{s, s^{-1}\}$ d'ordre 3. Évidemment, cela implique qu'ils sont tous arête-disjoints. ■

Chaque sommet d'un atome A d'un graphe sommet-transitif hypoconnexe est adjacent à plus des deux tiers des sommets de A et des atomes voisins. Par

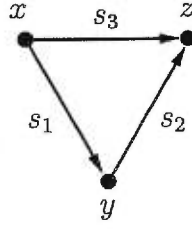


FIG. 3.3.1.

contre, les voisins d'un sommet d'un graphe de Cayley dont l'ensemble générateur est minimal sont, en quelque sorte, très «dispersés». Ceux-ci ont donc une très faible propension à l'hypoconnexité. En fait, ils sont tous maximalelement connexes, comme l'a montré Godsil [7]. La preuve donnée ici est sensiblement plus simple que la preuve originale.

Théorème 3.3.2. *Si S est un ensemble générateur minimal, alors $X = \text{Cay}(G, S)$ est maximalelement connexe.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire et soit A l'atome de X contenant 1. Soit $k \geq 2$ le nombre d'atomes dans $N(A) = AS \setminus A$. Comme $S \subset AS$ et que $|S| > |N(A)| = k|A|$, la proportion de sommets dans AS qui appartiennent à S est strictement supérieure à

$$\frac{k|A|}{|AS|} = \frac{k|A|}{(k+1)|A|} \geq \frac{2}{3}.$$

Soit $x \in A \cap S$, c.-à-d. un sommet adjacent à 1 dans A . On a alors

$$\begin{aligned} N(1) &= S \subset AS, & |S| &> \frac{2}{3}|AS| \text{ et} \\ N(x) &= xS \subset AS, & |xS| &> \frac{2}{3}|AS|. \end{aligned}$$

Ainsi, $|N(1) \cap N(x)| > \frac{1}{3}|AS|$. Comme $|A| \geq 2$ et que AS contient au moins trois atomes, $|N(1) \cap N(x)| > 2$. Il y a donc au moins deux triangles dans X qui partagent l'arête $[1, x]$, ce qui contredit la proposition 3.3.1. ■

Définition 3.3.3. Soit $S = \{s_1, \dots, s_l\} \subset G \setminus \{1\}$ un ensemble générateur ordonné fermé sous l'inversion, et posons $S_i = \{s_1, \dots, s_i\}$. Alors S est dit *quasi-minimal* si, pour $i = 1, \dots, l-1$, $\langle S_i \rangle \neq \langle S_{i+1} \rangle$ ou $s_i = s_{i+1}^{-1}$.

Un graphe de Cayley dont l'ensemble générateur est quasi-minimal est dit *hiérarchique*.

Évidemment, un ensemble générateur minimal est quasi-minimal, quel que soit l'ordre qui lui est donné (à condition que chaque élément d'ordre supérieur à 2 précède ou suive son inverse), mais l'inverse est faux. L'ensemble $S = \{2, 1, -1\} \subset \mathbb{Z}_4$ par exemple, est quasi-minimal mais non minimal. On remarque que $\{1, 2, -1\}$ n'est pas quasi-minimal.

Bien que cela semble improbable², il existe des graphes de Cayley hiérarchiques hypoconnexes.

Exemple 3.3.4. Soit $S = \{(Id, 2), (\sigma, \pm 1), (\tau, \pm 1)\} \subset \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_4$, où σ et τ sont des transpositions (\mathbb{S}_n désigne le groupe symétrique sur n éléments). Clairement, S est quasi-minimal. S n'engendre pas $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_4$ mais un sous-groupe H d'ordre 12. Le graphe $\text{Cay}(H, S)$ est hypoconnexe, comme le montre la figure 3.3.2.

Le graphe $\text{Cay}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \{(2, 0), (\pm 1, 1), (\pm 1, 0)\})$ est aussi hiérarchique et hypoconnexe (il est isomorphe à $C_4 \circ K_2$, le graphe de la figure 2.2.1). Dans ces deux cas, le premier élément de l'ensemble générateur quasi-minimal est d'ordre 2, tous les autres sont d'ordre 4 et leur carré est le premier élément en question. Ce type d'ensemble générateur quasi-minimal est d'ailleurs le seul à produire un graphe de Cayley hypoconnexe; c'est ce que dit le théorème 3.3.5, un résultat obtenu indépendamment par Alspach [2] (cas non orienté) et Hamidoune, Lladó et Serra [12] (cas orienté) en 1992. La preuve que nous en donnons est originale et considérablement plus simple et plus courte que les preuves données dans [2] et [12].

Théorème 3.3.5. *Si $S = \{s_1, \dots, s_l\}$ est quasi-minimal et que $\text{Cay}(G, S)$ est hypoconnexe, alors $s_1^2 = 1$ et $s_i^2 = s_1$, pour $i = 2, \dots, l$.*

2. En fait, Marc Baumslag [3] a «démontré» que tous les graphes de Cayley hiérarchiques finis sont maximalement connexes, oubliant sans doute quelque cas particulier dans l'hypothèse d'induction.

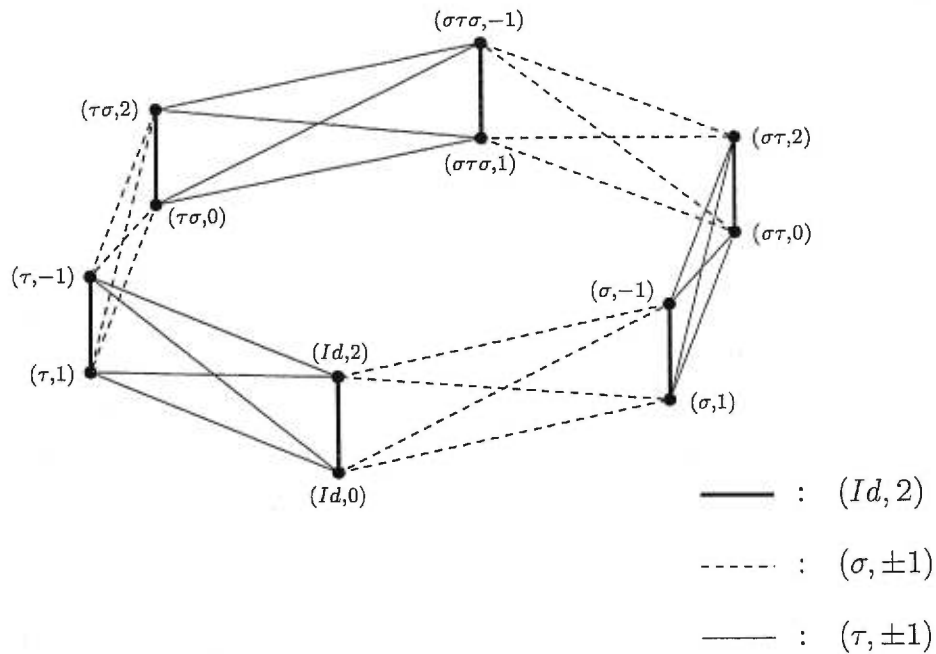


FIG. 3.3.2.

DÉMONSTRATION. Supposons que $X = \text{Cay}(G, S)$ est hypoconnexe et soit A l'atome de X contenant 1. Posons $S_i = \{s_1, \dots, s_i\}$ ($S_0 = \emptyset$). Pour chaque $s_i \in S$, au moins l'un des cas suivants survient:

1. $A \cap \langle S_i \rangle \neq A \cap \langle S_{i-1} \rangle$;
2. $\langle S_i \rangle$ intersecte un atome inclus dans $N(A)$ et disjoint de $\langle S_{i-1} \rangle$;
3. $s_i = s_{i-1}^{-1}$.

Pour s'en convaincre, supposons qu'il existe un élément $s_i \in S$ tel qu'aucun des cas énumérés ne survienne. Si $s_i \in A$, alors $s_i \in A \cap \langle S_i \rangle = A \cap \langle S_{i-1} \rangle$. Comme $s_i \neq s_{i-1}$, cela contredit la quasi-minimalité de S . Si $s_i \notin A$, alors $s_i \in AS \setminus A = N(A)$. L'atome qui contient s_i intersecte $\langle S_{i-1} \rangle$, car le cas 2 ne survient pas. Les atomes de X étant des translatés à gauche de A , on a que $s_i \in tA$, pour un certain $t \in \langle S_{i-1} \rangle$, donc, $s_i = ta$ pour un certain $a \in A$. Cet élément a appartient à $\langle S_{i-1} \rangle$, car le cas 1 ne survient pas. Par conséquent, $s_i \in \langle S_{i-1} \rangle$ et $s_i \neq s_{i-1}$, en contradiction avec la quasi-minimalité de S .

En donnant une borne supérieure pour le nombre d'occurrences de chacun des cas énumérés plus haut, nous serons en mesure de borner supérieurement $|S|$.

D'abord, comme $A \cap \langle S_i \rangle$ est un sous-groupe de A et que $1 \notin S$,

$$2^r \leq |A|,$$

où r est le nombre d'éléments s_i tels que $A \cap \langle S_i \rangle \neq A \cap \langle S_{i-1} \rangle$. Ainsi, $r \leq \lfloor \log_2 |A| \rfloor$. Maintenant, soit k le nombre d'atomes dans $N(A)$. Clairement, k est une borne supérieure pour le nombre d'occurrences du cas 2. Finalement, le cas 3 survient au plus $|S|/2$ fois (lorsque chaque élément de S est d'ordre supérieur à 2). Ainsi,

$$|S| \leq 2 (\lfloor \log_2 |A| \rfloor + k).$$

Comme X est hypoconnexe, $|S| > |N(A)| = k|A|$. On doit donc avoir

$$k|A| < 2 (\lfloor \log_2 |A| \rfloor + k). \quad (3.3.1)$$

Étant donné que $k \geq 2$ et que $|A| \geq 2$, la solution à l'équation 3.3.1 est $|A| = 2$, sans restriction sur k . Comme $|AS| - |A| < |S| < |AS|$, on doit avoir $|S| = |AS| - 1$, c.-à-d. que $S = AS \setminus \{1\}$.

Soit a l'élément d'ordre 2 de A (c.-à-d. que $A = \{1, a\}$), et soit s un élément quelconque de $S \setminus \{a\}$. On remarque que $as \in AS \setminus \{1\} = S$.

L'ordre donné sur S induit évidemment un ordre sur $\{a, s, as\}$. Nous prétendons que les seuls ordres possibles sont $\{a, s, as\}$ et $\{a, as, s\}$, et que $s^{-1} = as$.

En effet, comme chacun de ces trois éléments est engendré par les deux autres, le troisième doit nécessairement être l'inverse du second, afin que la quasi-minimalité de S ne soit pas baffouée. Comme a est d'ordre 2, il est son propre inverse, et doit apparaître en premier (parmi a, s et as). Ainsi, s et as sont l'inverse l'un de l'autre et sont consécutifs dans S . De plus, $a(s^2) = (as)s = 1 = a^2$, d'où $s^2 = a$.

Comme le choix de $s \in S \setminus \{a\}$ était arbitraire, a doit être le premier élément de l'ensemble ordonné S (c.-à-d. que $a = s_1$) et $s_i^2 = s_1$ pour $i = 2, \dots, l$. ■

L'ensemble générateur d'un graphe de Cayley hiérarchique hypoconnexe ne peut donc pas être minimal. Ainsi, le théorème précédent est bel et bien une généralisation du théorème 3.3.2.

Chapitre 4

LIENS ENTRE X ET $X - S$

Soit S un séparateur minimum d'un graphe sommet-transitif X . Comme $X - S$ est non connexe, il possède au moins deux composantes. Que $X - S$ soit constitué de plus de deux composantes semble alors une condition plutôt banale. Il n'en est rien. On verra, à la première section de ce chapitre, les implications étonnamment profondes qu'elle a sur la structure du graphe X .

À la section suivante, on traite du problème de la caractérisation des graphes sommet-transitifs selon leurs propriétés de connectivité. Jung [15, 14] semble être le dernier à s'être intéressé au sujet dans toute sa généralité (et non à certaines classes de graphes de Cayley) et achève presque de classifier et de caractériser chaque classe de graphes sommet-transitifs en fonction de leur type de fragments et de séparateurs minimums [14]. Nous ne présentons ici que certains de ses résultats, adaptés pour la plupart, qui ne nécessitent pas l'utilisation de toute la machinerie qu'il a utilisée pour étudier ces questions.

Tous les résultats de la section 4.1 ainsi que les propositions 4.2.2 et 4.2.4 sont originaux et sont tirés de [5].

4.1. INFLUENCE DU NOMBRE DE COMPOSANTES DE $X - S$

Soit X un graphe sommet-transitif maximalelement connexe et u un sommet de X . Se peut-il que $X - N(u)$ ait plus d'une composante de taille relativement grande, deux composantes se partageant à peu près également presque tous les sommets de $X - N(u)$, par exemple? Cela semble peu probable, surtout lorsque l'on remarque que tous les chemins dans X joignant deux sommets de différentes composantes de $X - N(u)$ passent par $N(u)$; si plusieurs composantes ont une

grande cardinalité, cela fait de u un sommet occupant une position apparemment «centrale», une propriété qui le rendrait différentiable des autres sommets (et les sommets d'un graphe sommet-transitif sont indifférentiables).

Théorème 4.1.1. *Soit X un graphe sommet-transitif maximale-ment connexe et soit $u \in V(X)$. Alors, au plus une composante de $X - N(u)$ n'est pas un sommet isolé.*

DÉMONSTRATION. Si X est complet, l'énoncé est trivialement vérifié. Supposons donc que X n'est pas complet. Dans ce cas, $\text{diam}X \geq 2$. Étant donné que X est sommet-transitif, u possède (au moins) une antipode, c.-à-d. un sommet à distance $\text{diam}X$ de u . Soit C une composante de $X - N(u)$ de cardinalité maximale parmi celles qui contiennent une antipode de u , et soit $y \in V(C)$ une antipode de u .

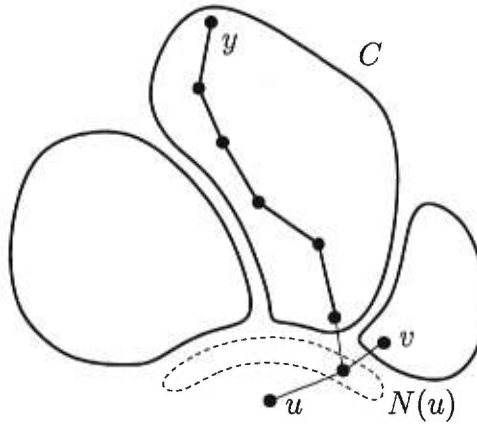


FIG. 4.1.1. Représentation schématique de $X - N(u)$.

Soit v un sommet d'une composante autre que C ou $\{u\}$ (si une telle composante n'existe pas, la conclusion vient trivialement). Comme tout yv -chemin dans X doit intersecter $N(u)$ (voir la figure 4.1.1), $d(y, v) \geq d(y, u) = \text{diam}X$, et la distance entre les sommets y et v dans X est nécessairement $\text{diam}X$.

Analysons maintenant le graphe $X - N(v)$, qui est évidemment isomorphe à $X - N(u)$. Le sommet y appartient à une composante C' de $X - N(v)$ contenant une antipode de v dans X (nommément, y). Ainsi, $|C'| \leq |C|$, par le choix de C .

Or, il est clair que $V(C) \subset V(C')$, ce qui implique que $V(C) = V(C')$. Ainsi,

$$N(u) = N_X(V(C)) = N_X(V(C')) = N(v),$$

et v est un sommet isolé de $X - N(u)$. ■

On dit que deux sommets (ou plus) sont des *jumeaux* s'ils ont le même voisinage.

Remarque 4.1.2. À la lumière du théorème précédent, si X est maximale-ment connexe et que $X - N(u)$ a plus de deux composantes, alors X a des jumeaux. Le principal résultat présenté dans ce chapitre, le théorème 4.1.7 est une généralisation de ce dernier énoncé.

Dans les preuves du théorème 4.1.7 et du lemme 4.1.6, on utilisera une terminologie non standard.

Définition 4.1.3. Soit X un graphe connexe et soit S un séparateur minimum de X . Une composante connexe de $X - S$ sera appelée *S-composante*, et ce terme désignera aussi bien la composante elle-même que son ensemble de sommets.

Une *S-composante* de cardinalité minimum sera dite *petite*; autrement, on dira que la *S-composante* est *grande*.

Ainsi, tout fragment relatif au séparateur minimum S est une union de *S-composantes* et le voisinage ouvert d'une *S-composante* est S .

Remarque 4.1.4. Soit A une *S-composante* d'un graphe X . Alors \overline{A} est l'union de toutes les autres *S-composantes*. Conséquemment, une seule *S-composante* B peut être telle que $|B| > |\overline{B}|$. Comme $X - S$ a au moins deux composantes, il existe sûrement une *S-composante* C telle que $|C| \leq |\overline{C}|$. En particulier, toutes les petites *S-composantes* satisfont cette condition.

Exemple 4.1.5. Le graphe illustré à la figure 4.1.2 est de connectivité 2 et S est un séparateur minimum. Les ensembles de sommets A_1 et A_2 sont les petites *S-composantes* alors que B et C sont les grandes *S-composantes*. Il est à noter que les petites *S-composantes* ne sont pas nécessairement des atomes; les atomes de ce graphe sont les sommets de degré deux.

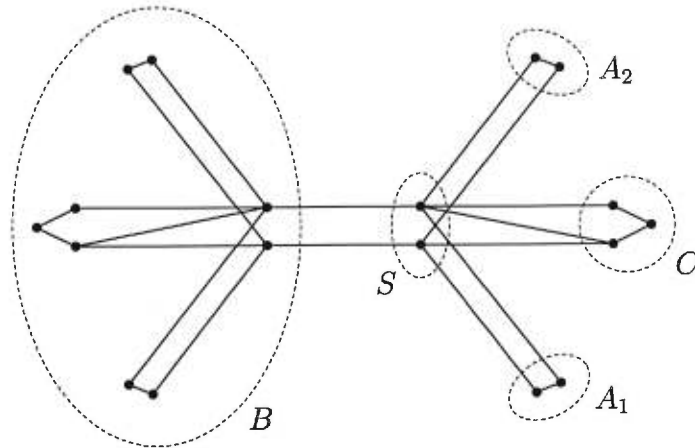


FIG. 4.1.2.

Le lemme suivant étant plutôt technique, il peut être éclairant, avant d'en lire la preuve, de l'appliquer au graphe de la figure 4.1.2, qui a été conçu à cette fin.

Dans les preuves qui suivent, l'image par un automorphisme φ d'un ensemble de sommets A sera noté φA , au lieu de $\varphi(A)$, afin d'alléger le texte.

Lemme 4.1.6. *Soit S un séparateur minimum d'un graphe quelconque X tel qu'il y ait plus de deux S -composantes. Soient A et B deux S -composantes et supposons que $|A| \leq |\overline{A}|$.*

Si $A \cap \varphi B \neq \emptyset$ pour un automorphisme φ de X , alors soit que $A = \varphi B$, ou que toutes les S -composantes sauf B sont incluses dans φB et $|B| > |\overline{B}|$.

DÉMONSTRATION. Si X est non connexe, $S = \emptyset$ et les S -composantes sont les composantes de X . L'automorphisme φ induit donc une permutation des composantes; nécessairement, $A = \varphi B$.

Supposons donc que X est connexe.

Si $A = B$, alors $|A| \leq |\overline{A}| = |\overline{B}|$, et sinon, $A \subset \overline{B}$; dans les deux cas, $|A| \leq |\overline{B}|$. Comme φ est un automorphisme,

$$|A| \leq |\overline{\varphi B}|.$$

Par le lemme 2.1.6 appliqué à A et à φB , $\overline{A} \cap \overline{\varphi B} \neq \emptyset$, et

$$|A \cap \varphi S| = |S \cap \overline{\varphi B}|, \quad (4.1.1)$$

$$|\overline{A} \cap \varphi S| = |S \cap \varphi B|. \quad (4.1.2)$$

Trois cas se présentent.

Cas 1: $\overline{A} \cap \varphi S \neq \emptyset$.

\overline{A} est constitué des S -composantes différentes de A . Comme $\overline{A} \cap \overline{\varphi B} \neq \emptyset$, il existe une S -composante A' qui intersecte $\overline{\varphi B}$. En appliquant le lemme 2.1.6 à A' et $\overline{\varphi B}$, on obtient $|A' \cap \varphi S| \geq |S \cap \varphi B|$. En combinant cette inégalité à (4.1.2), on a que $|A' \cap \varphi S| \geq |\overline{A} \cap \varphi S|$. Comme $A' \subset \overline{A}$, on conclut que $\overline{A} \cap \varphi S = A' \cap \varphi S$, c.-à-d. que A' est la seule S -composante différente de A qui intersecte φS . Comme le choix de A' parmi toutes les S -composantes dans \overline{A} qui intersectent $\overline{\varphi B}$ était arbitraire, A' est aussi la seule S -composante intersectant $\overline{\varphi B}$. Donc,

$$(\overline{A} \cap \overline{\varphi B}) \cup (\overline{A} \cap \varphi S) \subset A',$$

c.-à-d. que

$$\overline{A} \setminus \varphi B \subset A'.$$

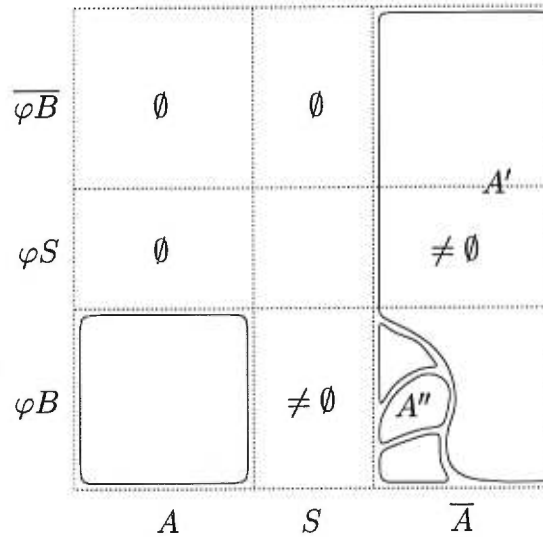


FIG. 4.1.3.

Cela signifie que toute S -composante différente de A et A' est incluse dans φB . Soit A'' l'une d'elles (par hypothèse, il existe plus de deux S -composantes). Un sommet de A'' ne peut avoir un voisin dans $\overline{\varphi B}$, car $A'' \subset \varphi B$. Comme $N(A'') = S$, cela implique que $S \cap \overline{\varphi B} = \emptyset$. Par (4.1.1), $A \cap \varphi S = \emptyset$. Comme A induit un sous-graphe connexe (c'est une S -composante), A ne peut intersecter φB et $\overline{\varphi B}$ sans intersecter φS . Ainsi, $A \cap \overline{\varphi B} = \emptyset$, car $A \cap \varphi B \neq \emptyset$, par hypothèse. Ainsi, $A \subset \varphi B$, c.-à-d. que toutes les S -composantes sont incluses dans φB , à l'exception de A' (voir la figure 4.1.3). B étant elle-même une S -composante, on doit avoir $A' = B$, et

$$|B| = |\varphi B| \geq |\varphi B \cap S| + |\overline{A'}| > |\overline{A'}| = |\overline{B}|,$$

d'où

$$|B| > |\overline{B}|.$$

Cas 2: $S \cap \overline{\varphi B} \neq \emptyset$.

Cette condition et celle du cas 1 sont symétriques par rapport à A et φB . Comme l'hypothèse $|A| \leq |\overline{A}|$ n'a jamais été utilisée dans la preuve du cas 1, on peut reprendre celle-ci en inversant les rôles de A et φB pour conclure, entre autres, que $|A| > |\overline{A}|$, une contradiction. Le cas 2 ne survient donc pas.

Cas 3: $\overline{A} \cap \varphi S = \emptyset = S \cap \overline{\varphi B}$.

En la combinant à (4.1.1) et (4.1.2), cette condition implique que $\overline{A} \cap \varphi S = A \cap \varphi S = S \cap \varphi B = S \cap \overline{\varphi B} = \emptyset$, c.-à-d. que $S = S \cap S' = S'$. Ainsi, φ stabilise S et doit donc permuter les S -composantes. Comme $A \cap \varphi B \neq \emptyset$, on conclut que $A = \varphi B$. ■

Théorème 4.1.7. *Soit S un séparateur minimum d'un graphe sommet-transitif X tel qu'il y ait plus de deux S -composantes, et soit D l'union des ensembles de sommets des petites S -composantes. Alors*

1. les petites S -composantes sont des sous-graphes isomorphes;
2. $\mathcal{D} = \{\varphi D : \varphi \in \text{Aut}(X)\}$ est une partition de $V(X)$;
3. \overline{D} est une grande S -composante, à moins que $\overline{D} = \emptyset$;

4. φD est soit inclus dans S , soit disjoint de S , quel que soit l'automorphisme φ de X .

Le lecteur est invité à consulter les figures 4.1.4 et 4.1.5, deux exemples de graphes satisfaisant les hypothèses du théorème.

DÉMONSTRATION. 1. Soient A_1, \dots, A_k les petites S -composantes. En considérant les A_i comme des ensembles de sommets, on a $D = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Par la remarque 4.1.4, $|A_i| \leq |\overline{A_i}|$, pour $i = 1, \dots, k$. Ainsi, pour tout automorphisme φ tel que $A_i \cap \varphi A_j \neq \emptyset$, on a que $A_i = \varphi A_j$ (lemme 4.1.6). L'énoncé 1 vient, par la sommet-transitivité de X .

2. Soit φ un automorphisme de X tel que $\varphi D \cap D \neq \emptyset$. Nécessairement, il existe A_i et A_j tels que $A_i \cap \varphi A_j \neq \emptyset$, et donc, $A_i = \varphi A_j$ (lemme 4.1.6). Conséquemment, $S = \varphi S$, car

$$S = N(A_i) = N(\varphi A_j) = \varphi N(A_j) = \varphi S.$$

Comme φ stabilise S , il doit permuter les S -composantes. Cette permutation doit respecter les cardinalités de celles-ci; φ stabilise donc aussi D . On montre aisément que $\varphi D = \psi D$ pour toute paire d'automorphismes φ, ψ tels que $\varphi D \cap \psi D \neq \emptyset$. Comme X est sommet-transitif, $\mathcal{D} = \{\varphi D : \varphi \in \text{Aut}(X)\}$ est une partition de $V(X)$.

3. Supposons que $\overline{D} \neq \emptyset$, c.-à-d. qu'il existe une grande S -composante $B \subset \overline{D}$ (par la définition de D). On doit montrer que $B = \overline{D}$. Par la sommet-transitivité de X , il existe un automorphisme φ tel que $A_1 \cap \varphi B \neq \emptyset$. Si $|B| \leq |\overline{B}|$, alors $A_1 = \varphi B$ (lemme 4.1.6), et B est une petite S -composante, en contradiction avec le choix de B . Donc, $|B| > |\overline{B}|$, et comme il ne peut exister qu'une seule S -composante satisfaisant cette condition, $B = \overline{D}$. L'énoncé 3 est démontré.

4. Si $\overline{D} = \emptyset$, alors $V(X) = D \cup S$, et l'énoncé 4 découle de l'énoncé 2. Supposons que $\overline{D} \neq \emptyset$, c.-à-d. que \overline{D} est une grande S -composante. S'il existe un automorphisme φ tel que $\varphi D \cap \overline{D} \neq \emptyset$, alors $D \cap \varphi^{-1} \overline{D} \neq \emptyset$ et, par le lemme 4.1.6, toutes les S -composantes sont incluses dans $\varphi^{-1} \overline{D}$, exceptée \overline{D} . Ceci revient à dire que $D \subset \varphi^{-1} \overline{D}$, ou encore $\varphi D \subset \overline{D}$. Ainsi, pour tout automorphisme φ , φD est inclus soit dans D , soit dans \overline{D} , soit dans S . Ceci termine la preuve. ■

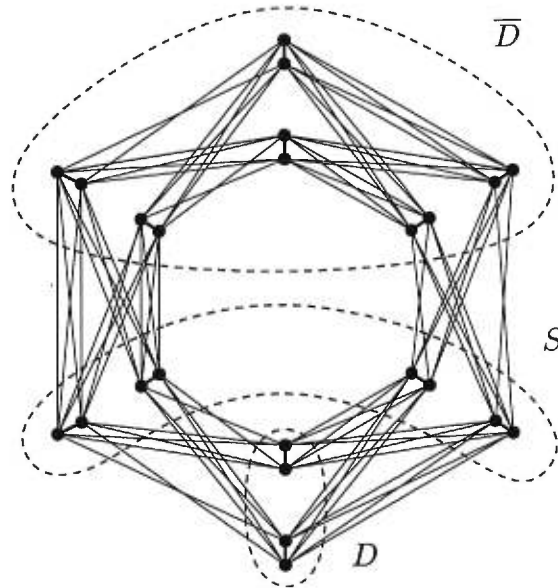


FIG. 4.1.4.

Le théorème 4.1.1 est un corollaire direct du précédent théorème (énoncé 1).

Proposition 4.1.8. *Soit X un graphe sommet-transitif et soit S un séparateur minimum tel qu'il y ait plus de deux S -composantes. Soient D et \mathcal{D} tels que définis dans l'énoncé du théorème 4.1.7. Alors, le graphe $Y = X/\mathcal{D}$ est sommet-transitif, maximalelement connexe et sans jumeaux.*

De plus, Y est complet si et seulement si $\overline{D} = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Les arguments utilisés dans la preuve de la proposition 2.2.5 (qui concerne la partition atomique des graphes sommet-transitifs), peuvent être repris ici pour montrer que Y est sommet-transitif et maximalelement connexe. Y est sans jumeaux par construction. Finalement, le voisinage du sommet D dans Y est $\{\varphi D : \varphi D \subset S\}$. Ainsi, D est adjacent à tous les autres sommets de Y si et seulement si $V(X) = D \cup S$, c.-à-d. si $\overline{D} = \emptyset$ (voir la figure 4.1.5. Le graphe quotient, dans ce cas, est K_4). ■

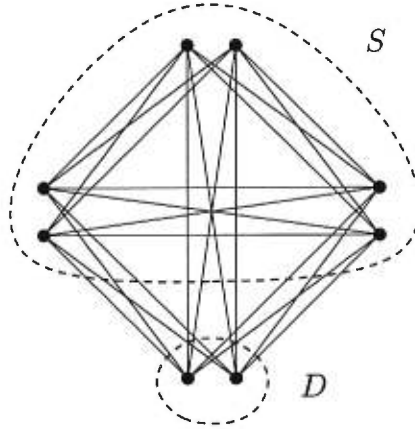


FIG. 4.1.5.

Le théorème suivant dit, grosso modo, que lorsque $X - S$ a plus de deux composantes, celles qui sont petites sont très petites et celle qui est grande (s'il en existe une) est très grande.

Théorème 4.1.9. *Soit X un graphe sommet-transitif sur n sommets, de connectivité κ , et ayant un séparateur minimum S tel qu'il y ait plus de deux S -composantes. Alors, l'un des deux cas suivants survient:*

1. *il existe une seule grande S -composante B et*

$$|B| \geq n - \frac{3}{2}\kappa;$$

2. *toutes les S -composantes ont la même cardinalité et $\kappa \geq n/2$.*

DÉMONSTRATION. Soit Y le graphe quotient défini dans la proposition précédente. Clairement, $\kappa = |S| = d_Y |D|$, où d_Y est le degré de Y . Donc, $|D| = \kappa/d_Y$.

Par le théorème 4.1.7, l'unique (possible) grande S -composante de X est \overline{D} . Si $\overline{D} \neq \emptyset$, alors $|\overline{D}| = |V(X)| - |S| - |D| = n - \kappa - \kappa/d_Y$. Par la proposition 4.1.8, Y n'est pas complet, et donc $d_Y \geq 2$. Ainsi,

$$|\overline{D}| = n - \left(\frac{d_Y+1}{d_Y}\right)\kappa \geq n - \frac{3}{2}\kappa.$$

Si $\overline{D} = \emptyset$, toutes les S -composantes sont petites, et $V(X) = D \cup S$. Par les énoncés 2 et 4 du théorème 4.1.7, $|S| = k|D|$, pour un certain entier positif k . Ainsi, $\kappa = |S| \geq n/2$. ■

Le résultat suivant est un autre corollaire du théorème 4.1.7.

Corollaire 4.1.10. *Soit X graphe sommet-transitif ayant un séparateur minimum S tel qu'il y ait plus de deux S -composantes. Alors, $|S|$ n'est pas un nombre premier, à moins que X soit un graphe biparti complet $K_{p,p}$ pour un certain nombre premier p .*

DÉMONSTRATION. Soit p un nombre premier et supposons que $|S| = p$. Soient D , \mathcal{D} et $Y = X/\mathcal{D}$ tels que définis précédemment. Comme $p = |S| = d_Y|D|$, on doit avoir $d_Y = 1$ ou $|D| = 1$. Par définition, $|D| \geq 2$, d'où $d_Y = 1$. Comme Y est connexe, $Y \cong K_2$. Comme D est une union de S -composantes de même cardinalité et que $|D| = p$, les petites S -composantes sont nécessairement des sommets isolés. Clairement, $X \cong K_{p,p}$ (voir la figure 4.1.6).

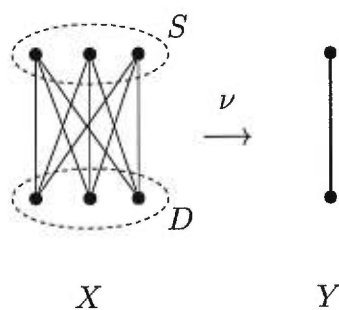


FIG. 4.1.6.

4.2. VERS UNE CLASSIFICATION

Les graphes qu'on a étudiés jusqu'ici ont chacun une structure très particulière, presque artificielle. Le graphe X de la figure 4.2.1 convient mieux à l'idée qu'on se fait du graphe sommet-transitif «typique», en regard de ses propriétés de connectivité. Les seuls séparateurs minimums de X sont les voisinages de chacun

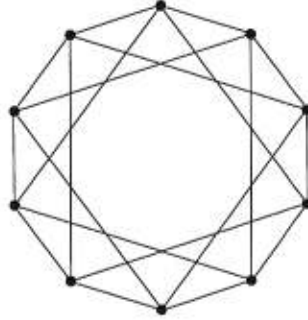


FIG. 4.2.1. $X = \text{Cay}(\mathbb{Z}_{10}, \pm\{1, 3\})$.

de ses sommets, et pour tout sommet $u \in V(X)$, le graphe $X - N(u)$ a exactement deux composantes, le minimum possible. L'étude des graphes ayant de semblables propriétés «désirables» a mené certains auteurs à introduire plusieurs définitions, chacun y allant des siennes, souvent pour décrire les mêmes concepts.

Définition 4.2.1. Soit X un graphe maximalelement connexe. Si les seuls séparateurs minimums de X sont les voisinages des sommets de degré minimum, alors X est dit *superconnexe* [4]. Si X est superconnexe et que $X - S$ a exactement deux composantes pour tout séparateur minimum S , alors X est dit *vospérien* [13].

Hamidoune, Lladó et Serra [13, 11] et Hamidoune [9] ont étudié les graphes de Cayley superconnexes et vospériens. Ils ont obtenu une caractérisation algébrique dans le cas particulier des graphes de Cayley dont le groupe sous-jacent est abélien [13]. Dans ces articles, les graphes superconnexes et les graphes vospériens y sont toujours traités séparément, avec un égal souci de lourdeur dans la notation. Nous encourageons le lecteur à constater lui-même à quel point il aurait été utile à ces auteurs de connaître le fait suivant, une conséquence immédiate du théorème 4.1.1.

Proposition 4.2.2. Soit X un graphe sommet-transitif superconnexe. Alors X est vospérien si et seulement si X est sans jumeaux ou isomorphe à $K_{2n} \setminus M_{2n}$, où M_{2n} est un couplage parfait³.

³. M_{2n} est un sous-graphe 1-régulier contenant tous les sommets de K_{2n} .

DÉMONSTRATION. Suffisance. Si X est superconnexe, ses séparateurs minimums sont $\{N(u) : u \in V(X)\}$. Si $X - N(u)$ a plus de deux composantes, alors X a des jumeaux, par la remarque 4.1.2. Ainsi, X est vospérien s'il n'a pas de jumeaux.

D'autre part, si $X \cong K_{2n} \setminus M_{2n}$, alors un sommet quelconque u de X est adjacent à tous les autres sommets sauf un. Ainsi, $X - N(u)$ a forcément deux composantes; deux sommets isolés, en fait. X est donc vospérien.

Nécessité. Il faut montrer que les seuls graphes sommet-transitifs vospériens ayant des jumeaux sont du type $K_{2n} \setminus M_{2n}$. Si u et v sont jumeaux dans X , alors $\{u\}$ et $\{v\}$ sont clairement des composantes de $X - N(u)$. Donc, si X est vospérien, $X - N(u)$ est uniquement constitué des sommets isolés u et v , ce qui implique que $d_X = d(u) = |V(X)| - 2$. On vérifie facilement que les seuls graphes connexes satisfaisant cette condition sont $K_{2n} \setminus M_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. ■

La famille de graphes $K_{2n} \setminus M_{2n}$ est très restreinte et inintéressante; on peut essentiellement considérer les graphes sommet-transitifs vospériens comme étant les graphes sommet-transitifs superconnexes sans jumeaux, et ainsi attaquer de front le problème de leur caractérisation. En effet, la question des jumeaux est facilement balayée sous le tapis par la proposition suivante, qui nous permet de restreindre notre attention aux graphes sans jumeaux, pour presque tous les problèmes concernant la connectivité des graphes sommet-transitifs.

Proposition 4.2.3. *Soit X un graphe sommet-transitif avec jumeaux. Alors, il existe un graphe sommet-transitif X_{red} sans jumeaux tel que $X \cong X_{red} \circ \overline{K}_k$ pour un certain k , où \overline{K}_k est le graphe discret sur k sommets. De plus, $d_X = kd_{X_{red}}$, $\kappa_X = k\kappa_{X_{red}}$, et les séparateurs minimums de X sont en bijection avec ceux de X_{red} par l'application canonique $\nu : X \rightarrow X_{red}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $u \in V(X)$ et soit k le nombre de jumeaux de u , incluant lui-même. Par hypothèse, $k \geq 2$. Soit J la relation sur $V(X)$ définie par

$$uJv \quad \text{si et seulement si} \quad N(u) = N(v).$$

Clairement, J est une relation d'équivalence dont les classes sont préservées sous tout automorphisme de X . Aussi, chacune est de cardinalité k et induit un

sous-graphe de X isomorphe à $\overline{K_k}$. Si \mathcal{A} est la partition induite par les classes d'équivalence de J , alors $X_{red} := X/\mathcal{A}$ est clairement sommet-transitif, sans jumeaux, et $X \cong X_{red} \circ \overline{K_k}$. Les autres énoncés sont facilement vérifiables. ■

On montre, à la figure 4.2.2, un graphe sommet-transitif X et son graphe réduit X_{red} (dans ce cas-ci, le graphe de Petersen).

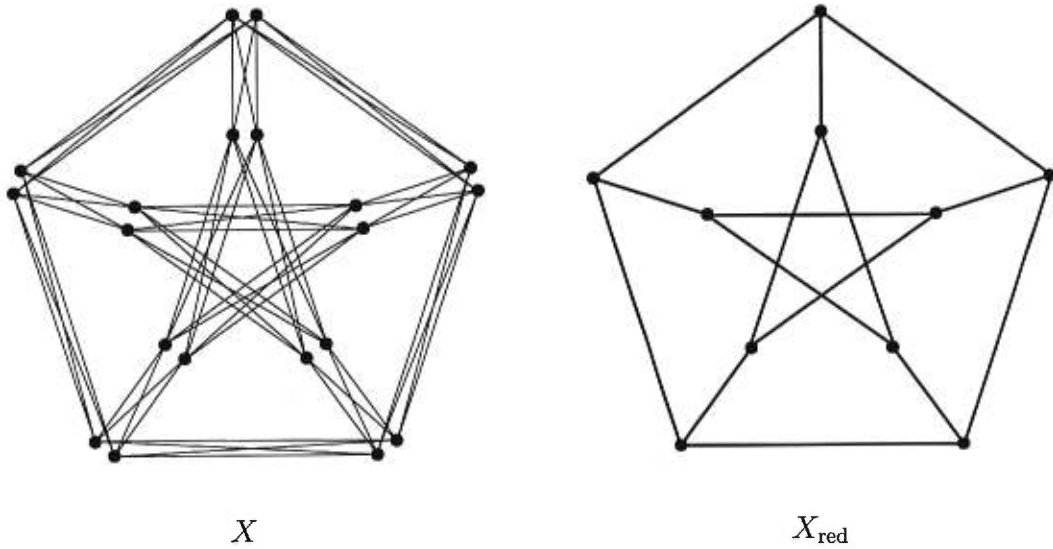


FIG. 4.2.2.

Corollaire 4.2.4. *Soit X un graphe sommet-transitif. Alors, X est superconnexe si et seulement si X_{red} est vospérien.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe de la proposition 4.2.2. ■

Deux voies s'offrent à qui entreprend de caractériser les graphes sommet-transitifs superconnexes: l'étude des graphes superconnexes et celles des graphes non superconnexes. Le choix du chercheur avisé s'arrête habituellement sur le problème qui lui offre le plus de «poigne». C'est ce qu'a fait Jung [15, 14] en étudiant les graphes non superconnexes. Ceux-ci ont, par définition, des séparateurs minimums autres que les voisinages des sommets. Les fragments relatifs à

ces séparateurs ont nécessairement une structure plus riche que celle des sommets isolés.

Définition 4.2.5. Soit X un graphe connexe. Un sous-ensemble $A \subset V(X)$ est un k -fragment [15] si $|A| \geq k$, $|\bar{A}| \geq k$, et si $N(A)$ est un séparateur minimum de X . Ainsi, un 1-fragment est tout simplement un fragment.

Un k -atome est un k -fragment de cardinalité minimum.

Remarque 4.2.6. Les k -atomes les plus intéressants sont les 2-atomes car ce sont essentiellement les plus petits fragments de cardinalité plus grande que 1. Ils sont aussi appelés *superatomes* [9]. Il est à noter que la cardinalité d'un 2-atome peut être supérieure à 2 (voir le graphe X de la figure 4.2.3. Ce graphe est 6-régulier, maximale-ment connexe, et ses 2-atomes ont cardinalité 3).

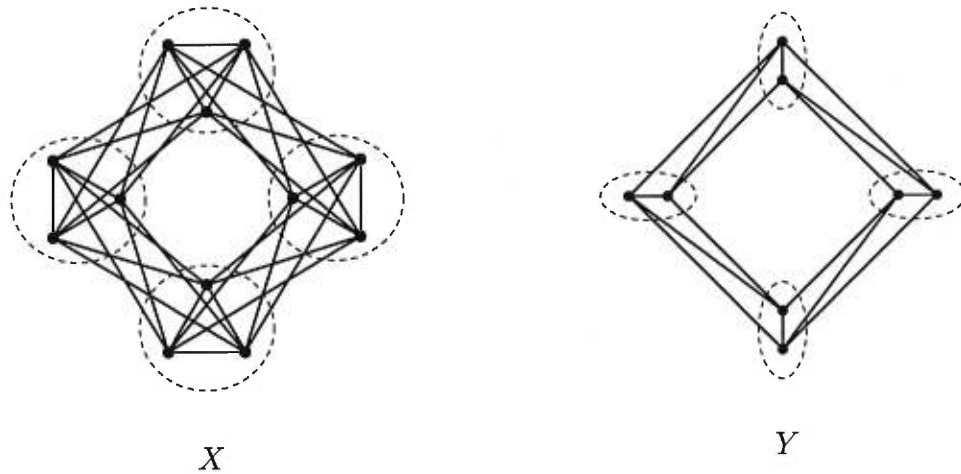


FIG. 4.2.3.

On connaît les graphes sommet-transitifs hypoconnexes et on peut les quotienter de manière à ce que le graphe quotient soit maximale-ment connexe et conserve une grande partie de la structure du graphe original (théorème 2.2.2 et proposition 2.2.5). De même, on sait comment traduire tout résultat concernant la connectivité des graphes sans jumeaux en résultats s'appliquant tout aussi bien aux graphes avec jumeaux.

Ainsi, la famille \mathcal{F} de graphes à laquelle on s'intéresse est celle des graphes sommet-transitifs *maximalement connexes, non superconnexes et sans jumeaux*. Les graphes de la famille \mathcal{F} ont nécessairement des 2-atomes.

On peut vérifier que le graphe Y de la figure 4.2.3 appartient à la famille \mathcal{F} .

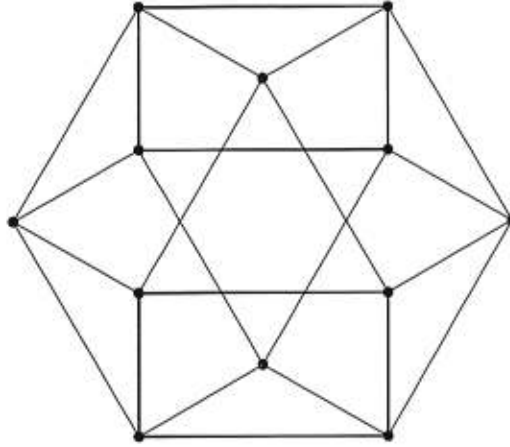
Les 2-atomes de ce graphe sont les paires de sommets entourés de pointillés. On ne peut s'empêcher de remarquer la ressemblance entre ce graphe et celui de la figure 2.2.1, qui est, lui, hypoconnexe. Ce n'est pas surprenant, car les 2-atomes de ce graphe forment une partition de son ensemble de sommets. En fait, ce sera le cas dès qu'un sommet (et, par sommet-transitivité, dès que chaque sommet) n'appartient qu'à un seul 2-atome. On ne dispose pas de caractérisation de ce type de graphes, bien que Jung [14] ait décrit plusieurs de leurs propriétés dont nous ne parlerons pas ici.

Soit X un graphe sommet-transitif. Notons $\lambda_k(X)$ le nombre de k -atomes auxquels un sommet quelconque de X appartient (ce nombre ne dépend pas du sommet, par sommet-transitivité). Le résultat suivant est une conséquence immédiate de [15, Satz 4]. Le résultat original est beaucoup plus général. La preuve est omise.

Théorème 4.2.7. *Soit X un graphe de la famille \mathcal{F} tel que $\lambda_2(X) \geq 2$. Si la cardinalité des 2-atomes de X est supérieure à 2, alors $\lambda_2(X) = 2$ et $|A| = |\bar{A}|$ pour tout 2-atome A de X .*

Autrement dit, dès que les 2-atomes d'un graphe X de la famille \mathcal{F} ne sont pas des arêtes, chaque sommet est contenu dans deux 2-atomes au plus, ce qui est très soulageant. De plus, comme X est maximalement connexe, $N(A) = \kappa_X = d_X$ pour tout 2-atome A . Comme $|A| = |\bar{A}|$, on a que $|V(X)| = 2|A| + d_X$, c.-à-d. que les 2-atomes de X sont obligatoirement de cardinalité $\frac{1}{2}(|V(X) - d_X|)$.

Exemple 4.2.8. Le *line-graph* du cube, $L(Q_3)$, est l'unique exemple donné dans la littérature de graphe sommet-transitif maximalement connexe dont les 2-atomes s'intersectent et sont de cardinalité strictement supérieure à 2. Les six cycles de longueur 4 de $L(Q_3)$ sont ses 2-atomes.

FIG. 4.2.4. $L(Q_3)$

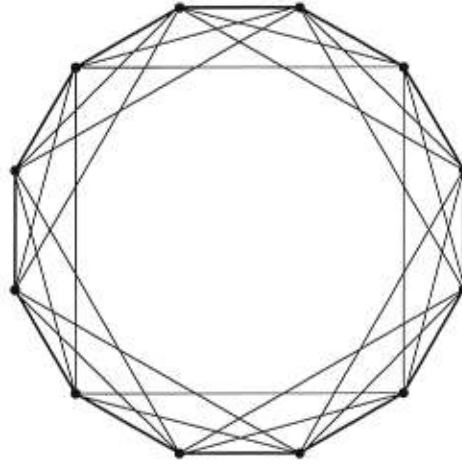
Le seul autre exemple que nous avons trouvé est le *line-graph* de l'octaèdre. Ses 2-atomes sont les triangles créés par les faces de l'octaèdre.

Les seuls graphes X de la famille \mathcal{F} pour lesquels $\lambda_2(X) > 2$ ont donc des 2-atomes de cardinalité 2, c.-à-d. que ce sont des arêtes. Le théorème suivant est une adaptation de [15, Satz 5].

Théorème 4.2.9. *Soit $X \in \mathcal{F}$ et supposons que les 2-atomes de X soient de cardinalité 2. Soit Y le graphe ayant $V(X)$ comme ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles joignant deux sommets d'un même 2-atome dans X . Alors Y est soit une union disjointe de cycles (possiblement un seul) ou de graphes complets.*

En particulier, si chaque arête de X est un 2-atome, alors $X = Y$ et X est un cycle.

Outre les cycles de longueur $n \geq 6$, on trouve, parmi les graphes de la famille \mathcal{F} ayant des 2-atomes de cardinalité 2, les graphes de Cayley $\text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \pm\{1, \dots, k\})$, $k < \frac{n}{2} - 1$, dont les 2-atomes sont les arêtes du cycle induit par le générateur 1 (voir la figure 4.2.5).

FIG. 4.2.5. $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{12}, \pm\{1, 2, 3\})$

Il existe une autre classe de graphes dans \mathcal{F} ayant des 2-atomes de cardinalité 2. Pour les décrire, l'opération sur les graphes suivante est nécessaire.

Définition 4.2.10. Soit X un graphe. Le graphe $T(X)$ (la *troncature* de X) est le graphe dont les sommets sont les couples (u, e) où u est un sommet de X incident à l'arête e , et pour lequel (u, e) et (u', e') sont adjacents si et seulement si $u = u'$ ou $e = e'$ ($(u, e) \neq (u', e')$).

Lorsque le graphe X est d -régulier, chaque sommet de X crée un sous-graphe complet K_d dans $T(X)$, et ceux-ci échangent une seule arête s'ils correspondent à deux sommets adjacents dans X . On peut vérifier que X doit être arc-transitif pour que $T(X)$ soit sommet-transitif.

Le graphe $T(Q_3)$, est illustré à la figure 4.2.6. Les arêtes formant les triangles de ce graphe sont ses 2-atomes. Ce sera aussi le cas pour tout graphe $T(X)$, où X est arc-transitif.

Dans [15, 14], Jung utilise plusieurs graphes auxiliaires (graphes d'intersection des 2-atomes, graphes induits par les 2-atomes de cardinalité 2, etc.) pour étudier les graphes de la famille \mathcal{F} , entre autres. Nous présentons ici le résultat le

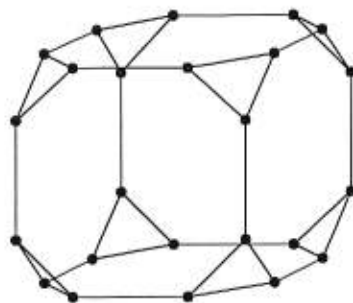


FIG. 4.2.6.

plus accessible [15, Satz 8] qu'on puisse y trouver, une caractérisation des graphes de la famille \mathcal{F} sans K_4 , une classe relativement imposante de graphes.

Théorème 4.2.11. *Soit $X \in \mathcal{F}$. Si aucun sous-graphe de X n'est isomorphe à K_4 , alors X est isomorphe à l'un des graphes suivant:*

1. C_n , $n \geq 6$;
2. $\text{Cay}(\mathbb{Z}_n, \pm\{1, 2\})$, $n \geq 8$, (antiprismes);
3. $L(Q_3)$, le line-graph du cube;
4. $T(X)$, où X est arc-transitif et de degré 3.

Corollaire 4.2.12. *Soit $X \in \mathcal{F}$. Si X n'a pas de triangles, alors X est un cycle.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.B. Akers et B. Krishnamurthy, On group graphs and their fault tolerance, *IEEE Trans. Comput.* 36 (1987) 885–888.
- [2] B. Alspach, Cayley graphs with optimal fault tolerance, *IEEE Trans. Comput.* 41 (1992) 1337–1339.
- [3] M. Baumslag, On the fault-tolerance of quasi-minimal Cayley networks, *Adv. Comput. Inform ICCI'91* (1991) 431–442.
- [4] F. Boesch et R. Tindell, Circulants and their connectivities, *J. Graph Theory*, 8 (1984), 487–499.
- [5] J. Dumas, Connectivity problems in vertex-transitive graphs, manuscrit, soumis pour publication dans *Combinatorica* (novembre 1999).
- [6] J. Dumas, Hypoconnected Cayley digraphs, manuscrit, soumis pour publication dans *Discrete Appl. Math.* (septembre 1999).
- [7] C.D. Godsil, Connectivity of minimal Cayley graphs, *Arch. Math.* 37 (1981) 473–476.
- [8] R. Halin, A theorem on n -connected graphs, *J. Combin. Theory* 7 (1969) 150–154.
- [9] Y.O. Hamidoune, Subsets with small sum in abelian groups I: the Vosper property, *European J. Combin.* 18 (1997) 541–556.
- [10] Y.O. Hamidoune, On the connectivity of Cayley digraphs, *European J. Combin.* 5 (1984) 309–312.
- [11] Y.O. Hamidoune, A.S. Lladó et O. Serra, Small cutsets in quasiminimal Cayley graphs, *Discrete Math.* 159 (1996) 131–142.
- [12] Y.O. Hamidoune, A.S. Lladó et O. Serra, The connectivity of hierarchical Cayley digraphs, *Discrete Appl. Math.* 37/38 (1992) 275–280.
- [13] Y.O. Hamidoune, A.S. Lladó et O. Serra, Vosperian and superconnected abelian Cayley digraphs, *Graphs Combin.* 7 (1991) 143–152.
- [14] H.A. Jung, Die Zusammenhangsstruktur symmetrischer Graphen, *J. Reine Angew. Math.* 283/284 (1976) 202–221.
- [15] H.A. Jung, Über den Zusammenhang von Graphen, mit Anwendungen auf symmetrische Graphen, *Math. Ann.* 202 (1973) 307–320.
- [16] H.A. Jung et M.E. Watkins, Finite separating sets in locally finite graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 59 (1993) 15–25.

- [17] M.E. Watkins, Some classes of hypoconnected vertex-transitive graphs, dans: W.T. Tutte, ed., *Recent Progress in Combinatorics*, Academic Press, 1969, 323–328.
- [18] M.E. Watkins, Connectivity of transitive graphs, *J. Combin. Theory* 8 (1970) 23–29.
- [19] H.A. Jung et M.E. Watkins, The connectivities of locally finite primitive graphs, *Combinatorica* 9 (1989) 261–267.
- [20] H.A. Jung et M.E. Watkins, Fragments and automorphisms of infinite graphs, *European J. Combin.* 5 (1984) 149–162.
- [21] H.A. Jung et M.E. Watkins, On the connectivities of finite and infinite graphs, *Monatsh. Math.* 83 (1977) 121–131.
- [22] W. Mader, Existence of vertices of local connectivity k in digraphs of large outdegree, *Combinatorica* 15 (1995) 533–539.
- [23] W. Mader, Ecken von kleinem Grad in kritisch n -fach zusammenhängenden Digraphen, *J. Combin. Theory Ser. B* 53 (1991) 260–272.
- [24] W. Mader, Degree and local connectivity in digraphs, *Combinatorica* 5 (1985) 161–165.
- [25] W. Mader, Eine Eigenschaft der Atome endlicher Graphen, *Arch. Math.* 22 (1971) 333–336.
- [26] W. Mader, Über den Zusammenhang symmetrischer Graphen, *Arch. Math.* 21 (1970) 331–336.
- [27] M.E. Watkins, Connectivity of transitive graphs, *J. Combin. Theory* 8 (1970) 23–29.
- [28] M.E. Watkins, Some classes of hypoconnected vertex-transitive graphs, dans: W.T. Tutte, ed., *Recent Progress in Combinatorics*, Academic Press, 1969, 323–328.
- [29] J.E. Graver et M.E. Watkins, *Combinatorics with Emphasis on the Theory of Graphs*, Springer-Verlag, 1977.