

Université de Montréal

Dimensions d'objets géométriques et récurrences vectorielles

par

Li Jun

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

Novembre, 1999

©Li Jun, 1999



QA
3
U54
2000
v. 012

Université de Montréal

11 Jan
Département de mathématiques et de physique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Licencié en mathématiques
et mathématiques

Orientation mathématiques appliquées
Montréal, 1990

Édition 1990



Université de Montréal
Faculté des études supérieures
Cette thèse de doctorat intitulée :

“Dimensions d’objets géométriques et récurrences vectorielles”

présentée par

Li Jun

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Christiane Rousseau
(président-rapporteur)

Serge Dubuc
(directeur de recherche)

Jacques Bélair
(membre du jury)

Jacques Lévy Véhel
(examineur externe)

Jiri Teichmann
(Représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le : 7 avril 2000

Sommaire

Cette thèse porte sur des problèmes de dimensions de fractales, particulièrement la dimension fractale de courbes et de surfaces fractales. Aussi dans cette thèse, nous discuterons du comportement asymptotique des récurrences vectorielles, et diverses propriétés géométriques de la courbe de Lévy seront explorées.

Nous montrons d'abord que la dimension fractale d'un attracteur à similitude interne du plan est toujours majorée par sa dimension de similitude. Nous illustrons le cas où la dimension fractale et la dimension de similitude coïncident, ainsi que le cas où les deux dimensions diffèrent l'une de l'autre. Nous nous attardons en particulier à une courbe fractale particulière dont la dimension est déterminée par la plus grande valeur propre d'une matrice carrée d'ordre 5.

Par la suite, nous montrons que l'on peut, en utilisant la courbe de Lévy, paver le plan. Si l'on fait tourner la courbe de Lévy autour de l'origine selon un angle multiple entier de 90 degrés, on obtient quatre courbes. Le déplacement de ces quatre courbes par des vecteurs à composantes entières donne un pavage du plan. Ce surprenant pavage du plan permet de justifier le fait que la courbe de Lévy recouvre une aire positive dont la valeur est $1/4$. Enfin, nous verrons comment l'aire de la courbe de Lévy se distribue dans les triangles de la triangulation obtenue par les droites $x = m, y = n, x \pm y = k, m, n, k \in \mathbb{Z}$.

Quant à l'algorithme pour le calcul de la dimension fractale, nous discuterons comment on raffine une partition finie d'un domaine borné. Des conditions suffisantes pour ce raffinement seront données de sorte que le maillage ainsi construit serve le calcul de la dimension fractale d'un attracteur dans ce domaine. Pour tester cette méthode, des exemples intéressants dont certains sont connus seront discutés.

Dans le quatrième chapitre, nous déterminons le comportement asymptotique des

réurrences vectorielles linéaires de la forme $v_n = Av_{n-1} + b$. Ce comportement dépend principalement des matrices dominantes de Jordan associées à A . L'analyse se fait en s'attardant à deux cas particuliers: lorsque 1 n'est pas une valeur propre de A et lorsque 1 est la seule valeur propre de A . Dans le cas général, on décompose l'espace vectoriel en une somme directe de deux sous-espaces vectoriels invariants.

Dans le dernier chapitre, nous décrivons une famille de surfaces fractales dites expansives et le calcul de leur dimension fractale sera discuté.

Remerciements

Au terme de cette thèse, je voudrais exprimer mes remerciements les plus sincères à mon directeur de recherche, le professeur Serge Dubuc. Comme mathématicien renommé et superviseur de très riches expériences, sa compétence de direction, sa perception historique et ses critiques mathématiques sont incontestables.

Mon directeur de recherche, ainsi que la FES (Faculté des études supérieures), m'ont permis que cette thèse voit le jour par un support financier appréciable.

Je remercie également l'ISM (Institut des sciences mathématiques) pour sa bourse majeure de trois ans. Sans ce support, ce travail est aussi inimaginable.

Je remercie également le DMS (Département de mathématiques et de statistique) pour avoir mis à ma disposition tout l'équipement informatique nécessaire à la réalisation de ce travail, aussi le corps administratif du Département de mathématiques et de statistique.

Particulièrement, je voudrais témoigner de ma reconnaissance envers mes parents. Que ce travail soit le résultat de leurs espoirs et de leurs supports dans cette dizaine d'années.

Aussi, je voudrais témoigner de la contribution de ma femme, Kui, c'est elle qui m'a aidé à passer cette longue période de dures études, particulièrement les hivers de Montréal si différents de ce qui m'était familier.

Table des matières

Sommaire	i
Remerciements	iii
Table des matières	iv
Préliminaires	1
1 Dimensions comparées d'attracteurs à similitude interne	4
1.1 Attracteurs à similitude interne	4
1.2 Dimensions d'attracteurs à similitude interne	6
1.3 Exemples d'égalité entre deux dimensions	9
1.4 Inégalité entre deux dimensions	10
1.5 La courbe de la forêt et ses graphes associés	11
1.6 Comportement asymptotique de l'ordre des graphes	17
1.7 Calcul de dimension fractale de la courbe de la forêt	19
1.8 Conclusion	20
2 Le pavage du plan par la courbe de Lévy	22
2.1 Propriétés de la courbe de Lévy	24
2.2 Recouvrement du plan avec la courbe de Lévy	25
2.3 Chevauchement entre les tuiles	28
2.4 Évaluation de la mesure de Lebesgue de la courbe de Lévy	33

2.5	Distribution de la mesure de la courbe de Lévy relativement à la triangulation	34
2.6	Image du pavage	37
2.7	Conclusion	39
3	Le choix de partitions dans le calcul de la dimension fractale	45
3.1	Le théorème général pour le calcul de la dimension fractale	46
3.2	Applications	49
3.3	Quelques exemples du type forêt	56
3.3.1	Les notations nécessaires	56
3.3.2	Les formules de récurrence associées	58
3.3.3	Le comportement asymptotique de t_n	61
3.3.4	Détermination de la dimension fractale	63
3.4	Conclusion	63
4	Le comportement asymptotique de récurrences vectorielles linéaires	67
4.1	Rappels sur la décomposition de Jordan	69
4.2	Récurrences avec une matrice qui n'admet pas 1 comme valeur propre	70
4.3	Récurrences avec une matrice qui n'admet que 1 comme valeur propre	73
4.4	Récurrences avec une matrice arbitraire	75
4.5	Un exemple de récurrence vectorielle	76
4.6	Conclusion	78
5	La détermination de la dimension de quelques surfaces fractales	80
5.1	Quelques propriétés préliminaires pour les ensembles convexes de \mathbb{R}^3 .	81
5.2	Résultat principal	85
5.3	Quelques exemples de surface fractale	91
	Conclusion	100

Bibliographie	102
Liste des figures	106
Liste des tableaux	107

Préliminaires

L'étude d'objets géométriques compliqués est un des sujets les plus fascinants de l'analyse non linéaire. Au début du siècle, presque en même temps que l'établissement de l'intégrale de Lebesgue, des recherches dans ce sens étaient déjà commencées. On constate leurs traces dans ce domaine chez la plupart des mathématiciens éminents de cette époque. Il y a Weierstrass, Cantor, Peano, Hilbert, von Koch, Cesàro, Sierpiński, Hausdorff, Bouligand, Besicovitch. Les résultats qu'ils ont obtenus constituent une très bonne source de matériaux pour la création d'une nouvelle théorie. Avec de plus en plus de phénomènes non linéaires découverts dans les sciences naturelles et avec le développement de l'informatique, la fondation d'une nouvelle géométrie est devenue une demande. Les livres de B. Mandelbrot "*Les objets fractals: forme, hasard et dimension*" [27], "*The fractal geometry of nature*" [26] marquent la naissance de cette nouvelle géométrie, et la loi de similitude qu'il constate à diverses échelles remet en actualité des recherches mathématiques antérieures. Ces nouvelles idées sont utilisées dans les sciences appliquées et en même temps, un développement plus profond en mathématiques se réalise.

Plusieurs livres de mathématiques sur ce sujet ont ainsi paru à ce jour, comme [1], [11], [14],[15], [29]. Dans toutes les théories fractales, deux mots sont entendus le plus, la similitude et la dimension. La similitude est l'âme des fractales, bien que l'on ait abusé de ce mot avec toutes sortes d'adjectifs: scalaire, statistique, approximative, etc. La même situation tient aussi pour la dimension. Au delà de la dimension topologique, la géométrie fractale a engendré de multiples définitions de nouvelles dimensions. Parmi toutes ces définitions, trois dimensions sont mentionnées le plus souvent, la dimension de Hausdorff, la dimension fractale et la dimension de similitude.

Soit E un ensemble arbitraire de \mathbb{R}^n . Si pour $s \geq 0$, on définit $\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$

où $\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf\{\sum |U_i|^s : E \subset \bigcup U_i, |U_i| < \delta\}$, $|\cdot|$ est le diamètre d'un ensemble. On a la dimension de Hausdorff de E : $\dim_H E = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\}$. C'est la définition classique de dimension qui coïncide le mieux avec les mathématiques traditionnelles mais la difficulté de son traitement restreint son usage.

Une autre dimension, que l'on étudie davantage dans cette thèse, appelée maintenant la dimension fractale [29], est définie par $\dim E = n - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{Vol}^n(E_\delta)}{\log \delta}$ si

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{Vol}^n(E_\delta)}{\log \delta}$ existe, où $E_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta \text{ pour certain } y \in E\}$ le δ -voisinage de E et $\text{Vol}^n(\cdot)$ le volume de dimension n .

Sa meilleure performance pour la représentation de tendance de distribution d'un sous-ensemble de l'espace euclidien est très appréciée.

La dimension de similitude vient directement de l'autosimilitude de l'ensemble considéré, dans ce cas, E doit être l'attracteur (ensemble invariant) d'une famille finie de similitudes contractantes $\{S_i\}$: si la liste des rapports de similitude est $\{r_i\}$, la solution de l'équation $\sum r_i^s = 1$ est cette dimension.

Cette thèse est divisée en cinq parties indépendantes, couvrant chacune un chapitre.

La dimension de similitude d'un attracteur est un paramètre très facile à calculer, mais comme on va le voir, elle ne tient pas toujours compte de la structure de l'attracteur. La dimension fractale peut mieux caractériser une fractale, mais elle est plus difficile à calculer quand la condition de l'ensemble ouvert n'est pas satisfaite. Dans le chapitre 1, nous faisons une comparaison entre ces deux dimensions. Nous illustrons le cas où la dimension fractale et la dimension de similitude coïncident, ainsi que le cas où les deux dimensions diffèrent l'une de l'autre. Nous nous attardons en particulier au calcul de la dimension fractale d'une courbe fractale du nom de "la courbe de la forêt". Cette méthode sera reprise dans d'autres chapitres.

Dans le chapitre 1, on parle d'une courbe fractale à similitude interne découverte par P. Lévy [24]. Dans le chapitre 2, nous faisons une étude beaucoup plus attentive de cette courbe. En particulier, on étudie le pavage du plan par la courbe de Lévy et comme sous-produit, on retrouve la mesure de Lebesgue de la courbe et d'autres propriétés intéressantes. Comme on va le voir, la clé de l'analyse de la courbe de Lévy

est son autosimilarité.

Dans le chapitre 3, on étudie la possibilité de partitions variables de l'espace pour calculer la dimension fractale. Les méthodes antérieures se servent toujours d'un maillage fixé pour le calcul. Notre algorithme ici est d'essayer d'adapter le maillage en fonction des formes de la fractale à diverses échelles. Cette méthode est particulièrement utile pour les fractales à similitude approximative.

Dans le calcul pour la courbe de la forêt, la question du comportement asymptotique d'une récurrence vectorielle de la forme $v_n = Av_{n-1} + b$ est posée. À cause de l'importance de ce problème en analyse non linéaire, on le discute dans le chapitre 4. Quand une des valeurs propres est 1 et que $b \neq 0$, les résultats sont nouveaux.

On utilise le chapitre 5 pour discuter de surfaces fractales. Une méthode pour calculer la dimension fractale d'une certaine famille de surfaces fractales sera discutée avec des exemples. Des propriétés intéressantes pour les corps convexes seront aussi données dans cette partie.

P.S.:

(1) La version anglaise du chapitre 1 est publiée sous le titre *Comparison of dimensions of a self-similar attractor* dans *Fractals: Theory and Applications in Engineering*, pp. 139-151. Springer, London, 1999 (coauteur: S. Dubuc)

(2) la version anglaise du chapitre 4 est soumise sous le titre *Asymptotic behavior of a linear vector recurrence* au *Linear Algebra and Its Applications* (coauteur: S. Dubuc)

Chapitre 1

Dimensions comparées d'attracteurs à similitude interne

En géométrie fractale, il peut arriver que plusieurs types de dimensions puissent être définis pour une même catégorie d'objets géométriques. Par exemple, les attracteurs à similitude interne du plan autorisent la dimension topologique, la dimension de similitude, celle d'Hausdorff et celle de Bouligand. Une question naturelle est de se demander quand est-ce que deux de ces dimensions diffèrent l'une de l'autre. Notre propos portera surtout sur la comparaison entre la dimension de similitude et la dimension de Bouligand (dont le nom est plutôt "box-counting dimension" en anglais). Si le calcul numérique de la dimension de similitude est très facile, il n'en est pas de même pour la dimension de Bouligand lorsque la dernière diffère de la première. Pour cette raison, nous nous attarderons aussi à l'évaluation numérique de la dimension de Bouligand d'une courbe fractale particulière. Celle-ci due à Dubuc [6] porte le nom de courbe de la forêt et est à similitude interne. Elle a une dimension de similitude de 2, mais une dimension fractale de 1,656614. Nous reproduisons le graphique de cette courbe à la figure 1.1.

1.1 Attracteurs à similitude interne

Décrivons d'abord la classe des attracteurs à similitude interne telle que proposée par Mandelbrot [26] et par Hutchinson [21]. Soit un système $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ de N transformations du plan, alors un *attracteur* pour \mathcal{S} est une partie K du plan telle

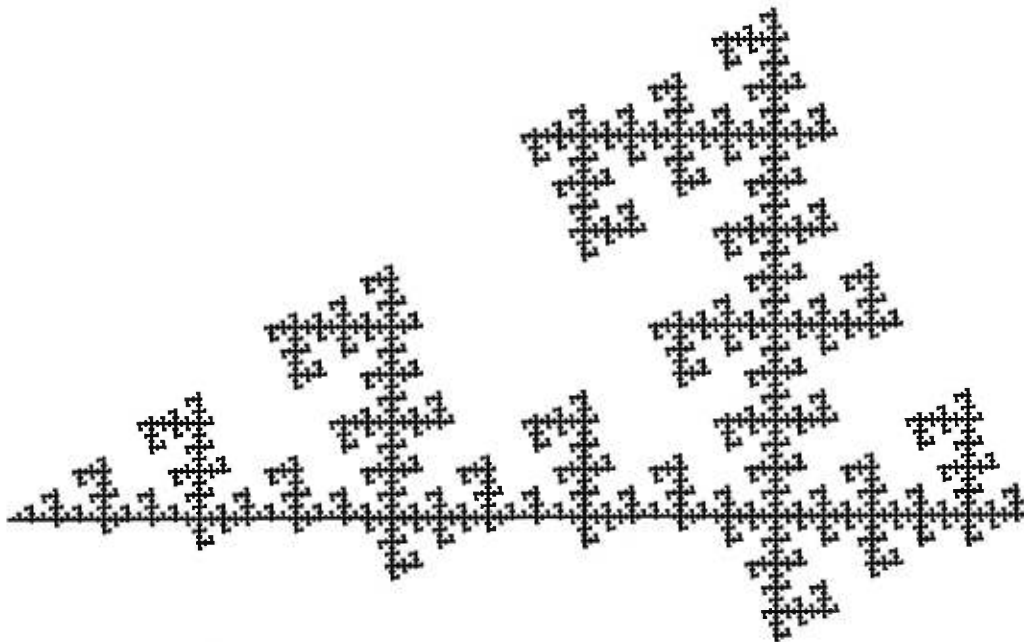


Figure 1.1: Courbe de la forêt

que

$$K = \bigcup_{i=1}^N S_i(K).$$

Lorsque chacune des transformations S_i du système \mathcal{S} est une similitude, on parle d'*attracteur à similitude interne* ou *attracteur autosimilaire*. Le théorème-clef a été fourni par Hutchinson.

Théorème 1.1 (Hutchinson [21]) *Soit $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ un système de N contractions du plan. Alors il existe une et une seule partie compacte du plan telle que*

$$K = \bigcup_{i=1}^N S_i(K). \dots \text{ Pour une partie arbitraire } A \text{ du plan, on pose } \mathcal{S}(A) = \bigcup_{i=1}^N S_i(A),$$

$\mathcal{S}^p(A) = \mathcal{S}(\mathcal{S}^{p-1}(A))$. Alors pour tout compact A , $\mathcal{S}^p(A)$ converge vers l'attracteur K dans la métrique d'Hausdorff.

Barnsley [1] fournit aussi les détails de la démonstration de ce résultat. Il est une situation où le théorème d'Hutchinson s'applique très bien. Cette situation, que Lévy [24] a imaginé le premier, a été décrite par Mandelbrot [26] et est très bien analysée par Tricot [29]. Soient P_0, P_1, \dots, P_N , $N + 1$ points du plan, nous désignons par S_i la similitude du plan qui envoie le segment P_0P_N sur le segment $P_{i-1}P_i$; nous allons supposer que chacun des facteurs de similitude: $r_i = \|P_{i-1}P_i\|/\|P_0P_N\|$ est moindre que 1; alors l'attracteur du système de similitudes $\{S_1, \dots, S_N\}$ est la courbe limite de la suite des lignes polygonales $S^p(P_0P_N)$. Dans la terminologie de Mandelbrot, la ligne polygonale P_0, P_1, \dots, P_N est le générateur de l'attracteur. Tricot donne une paramétrisation naturelle pour cette courbe, et il dit que la courbe a une *structure de similitude interne*.

D'une manière plus générale, si l'on se donne deux lignes polygonales, $P_0P_1 \dots P_N$ (la ligne génératrice) et $Q_0Q_1 \dots Q_M$ (la ligne initiale), il est possible de construire une courbe comme limite d'une suite de lignes polygonales: Q^n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Q^0 est la ligne initiale. On obtient Q^{n+1} à partir de Q^n en remplaçant chacun des segments de Q^n par N segments; si $A_j = [Q_{j-1}^n, Q_j^n]$ est le j -ième segment à remplacer, si T_j est la similitude du plan qui envoie le segment A_j sur le segment $[P_0, P_N]$, alors les N segments de remplacement sont $T_j^{-1}(S_i(T_j(A_j)))$ pour $i = 1, 2, \dots, N$.

1.2 Dimensions d'attracteurs à similitude interne

Nous rappelons d'abord certaines définitions de dimension. Soit K une partie compacte du plan, on désigne par $\mathcal{N}(\epsilon)$ le nombre minimum de disques de rayon ϵ pour recouvrir K , on définit la *dimension supérieure* de K au sens de Bouligand comme le nombre

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \mathcal{N}(\epsilon) / \ln(1/\epsilon)$$

et la *dimension inférieure* de K au sens de Bouligand comme le nombre

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \mathcal{N}(\epsilon) / \ln(1/\epsilon).$$

On notera la dimension inférieure par $\delta(K)$ et la dimension supérieure par $\Delta(K)$. Si $\delta(K) = \Delta(K)$, ce nombre donne la *dimension fractale* de K . On parle aussi de *dimension de Bouligand* [4] ou *dimension de boîte* [15, 29].

Soit $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ un système de similitudes, soit r_i le rapport de similitude de S_i , on suppose que $\forall i r_i < 1$. L'*exposant de similitude* de \mathcal{S} est par définition l'unique solution positive x à l'équation

$$\sum_{i=1}^N r_i^x = 1.$$

On notera ce nombre $e(\mathcal{S})$. Si K est l'attracteur associé au système \mathcal{S} , c'est avec un abus de langage que l'on dit que l'exposant de similitude de \mathcal{S} est la *dimension de similitude* de K . C'est un abus de langage parce qu'un même compact peut bien être l'attracteur de deux systèmes de similitudes dont les exposants de similitude sont différents. On retrouve cette définition de dimension de similitude chez plusieurs auteurs depuis Mandelbrot [26], (cf. [11, 21, 29]).

Nous présentons la principale relation entre la dimension de similitude et la dimension fractale.

Théorème 1.2 (Barnsley, p. 184, [1]) *Si K est un attracteur à similitude interne*

du plan pour un système de similitudes contractantes $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^N \{S_i\}$, alors $\Delta(K) \leq e(\mathcal{S})$.

Démonstration: Barnsley [1], p. 184, énonce ce résultat, mais n'en donne pas la démonstration. Il donne des références qui n'établissent pas non plus ce résultat. Démontrons-le. Désignons par $e = e(\mathcal{S})$ la dimension de similitude de l'attracteur K . Distinguons deux cas.

- Tous les coefficients de similitude r_i sont positifs.

Considérons d'abord un disque D de rayon R de centre C recouvrant l'attracteur K . Soit $\epsilon \in (0, R)$, on dira qu'une suite i_1, i_2, \dots, i_k d'indices extraits de

$\{1, 2, \dots, N\}$ est admissible au niveau ϵ si la double inégalité suivante est valide:

$$R \times r_{i_1} \times r_{i_2} \dots \times r_{i_k} < \epsilon \leq R \times r_{i_1} \times r_{i_2} \dots \times r_{i_{k-1}}. \quad (1.1)$$

Désignons par \mathcal{I} l'ensemble des suites d'indices admissibles au niveau ϵ . La réunion des disques $S_{i_k} \circ \dots \circ S_{i_2} \circ S_{i_1}(D)$ alors que $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathcal{I}$ recouvre K . Nous posons $\tau = \min\{r_i\}$. On a que $\tau > 0$. Si i_1, i_2, \dots, i_k est admissible, alors de la portion droite de la double inégalité 1.1, on en déduit que $\epsilon\tau \leq R \times r_{i_1} \dots \times r_{i_k}$. En mettant à la puissance e chaque membre de la dernière inégalité et en sommant sur \mathcal{I} , on obtient que

$$\#\mathcal{I}\epsilon^e\tau^e \leq R^e \sum_{i_1 \dots i_k \in \mathcal{I}} (r_{i_1} \dots r_{i_k})^e.$$

On peut se convaincre que la somme sur \mathcal{I} des termes $(r_{i_1} \dots r_{i_k})^e$ vaut 1 si bien que la cardinalité de \mathcal{I} est majorée par $(R/(\tau\epsilon))^e$.

D'autre part, de la portion gauche de la double inégalité 1.1, on en déduit que la réunion des disques centrés en $S_{i_k} \circ \dots \circ S_{i_2} \circ S_{i_1}(C)$ de rayon ϵ alors que $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathcal{I}$ recouvre K . D'où le nombre minimal de disques de rayon ϵ pour recouvrir K ne dépasse pas $(R/(\tau\epsilon))^e$. La dimension supérieure de Bouligand est donc majorée par e .

- Un des coefficients de similitude r_i est nul.

On met d'abord en évidence le système \mathcal{S}' des similitudes non dégénérées S_i telles que $r_i \neq 0$. Si K' est l'attracteur compact du système \mathcal{S}' et si K'' est l'ensemble des centres des similitudes qui sont dégénérés, alors $K = K' \cup K''$. Puisque K'' est un ensemble fini, la dimension supérieure de Bouligand de K est celle de K' , qui d'après le cas précédent est majorée par e .

◇

Puisque la dimension d'Hausdorff d'un ensemble est toujours majorée par la dimension supérieure de Bouligand, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.3 (Edgar [11], (6.3.8)) *Si K est un attracteur à similitude interne*

du plan pour un système de similitudes contractantes $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^N \{S_i\}$, alors la dimension d'Hausdorff est majorée par $e(\mathcal{S})$.

1.3 Exemples d'égalité entre deux dimensions

Dans cette section, nous décrivons quelques situations où il y a égalité entre la dimension fractale d'un attracteur et l'exposant de similitude d'un système à l'origine de cet attracteur. Nous citons deux résultats qui vont dans ce sens.

Théorème 1.4 (Barnsley, pp. 184-185, [1]) *Si K est un attracteur à similitude interne du plan pour un système de similitudes contractantes $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^N \{S_i\}$, on suppose que les parties $S_i(K)$ sont disjointes deux à deux ou ne sont que tangentes deux à deux, alors $\Delta(K) = e(\mathcal{S})$.*

Théorème 1.5 (Tricot, p. 195, [29]) *Si K est une courbe simple du plan ayant une structure de similitude interne selon un système \mathcal{S} de similitudes contractantes, alors $\Delta(K) = \delta(K) = e(\mathcal{S})$.*

Malgré tout l'intérêt du dernier théorème, il ne faut pas accorder une importance démesurée à l'hypothèse que l'attracteur est une courbe *simple*. Pour cela, il faut se rappeler un résultat dû à Lévy.

Théorème 1.6 (Lévy, p. 271, [24]) *Soit C la courbe à similitude interne dont le générateur est la ligne polygonale à trois sommets: $(0, 0), (1/2, 1/2), (1, 0)$, alors la mesure superficielle de C vaut $1/4$.*

La courbe C dont on vient de parler porte le nom de courbe de Lévy, son tracé est reproduit dans la figure 1.2. Parce que la mesure plane de la région occupée par C est positive, la dimension d'Hausdorff comme la dimension fractale de C est égale à 2. Or un très simple calcul montre aussi que la dimension de similitude de C vaut 2. On a égalité des dimensions alors que la courbe est loin d'être simple.

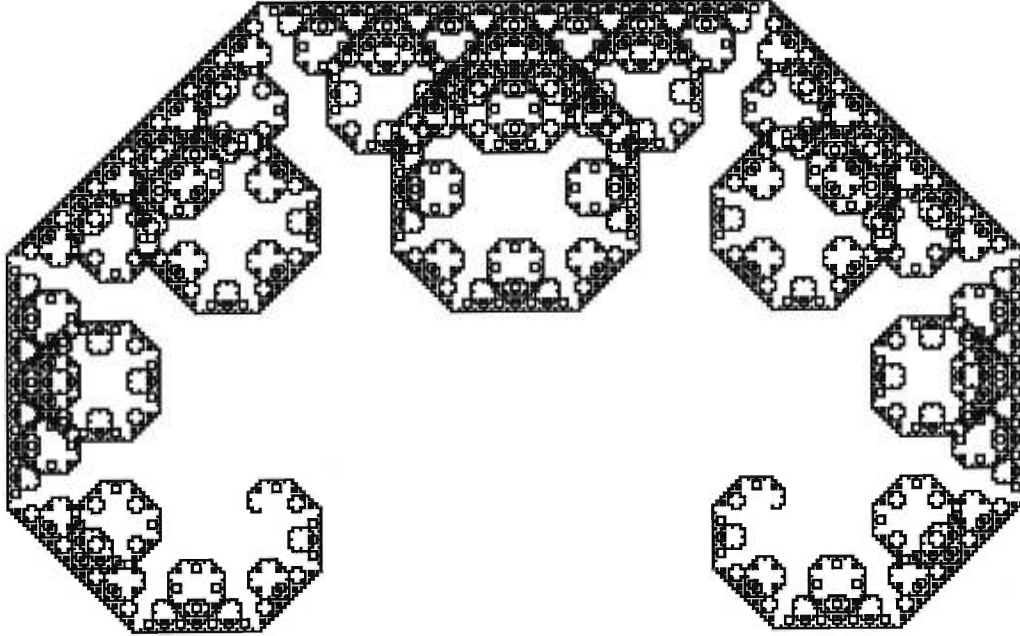


Figure 1.2: Courbe de Lévy

1.4 Inégalité entre deux dimensions

Nous donnons des exemples d'attracteurs dont la dimension fractale est inférieure à la dimension de similitude. Nous commençons par deux séries d'exemples.

- Si l'exposant de similitude d'un système \mathcal{S} de similitudes contractantes du plan est supérieur à deux, la dimension fractale de l'attracteur engendré par \mathcal{S} , qui ne peut pas dépasser deux, diffère nécessairement de sa dimension de similitude.
- Soient \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux systèmes distincts de similitudes contractantes avec cette particularité que toutes les similitudes de \mathcal{S} sont présentes dans \mathcal{S}' et au moins aussi souvent en cas de répétition, il est manifeste que les attracteurs associés à ces deux systèmes coïncident, désignons-le par K . D'autre part, on a que $e(\mathcal{S}) < e(\mathcal{S}')$. On sait que la dimension fractale de K ne dépasse pas la dimension de similitude telle que donnée par \mathcal{S} . D'où la dimension fractale de K diffère de la dimension de similitude telle que donnée par \mathcal{S}' . L'exemple que nous venons de donner prolonge une remarque d'Edgar [11], p. 159.

Nous abordons maintenant un autre exemple d'attracteur dont la dimension fractale est inférieure à sa dimension de similitude.

1.5 La courbe de la forêt et ses graphes associés

Nous considérons la courbe à similitude interne dont l'initiateur est $\mathcal{P}^0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ et dont le générateur est la ligne polygonale

$$\mathcal{P}^1 = \{(0, 0), (1/2, 0), (1, 0), (1, 1/2), (1, 0)\}.$$

La courbe de la forêt Γ est obtenue comme la limite de suite de lignes polygonales $\mathcal{P}^n, n = 0, 1, 2, \dots$ où \mathcal{P}^n est transformée en \mathcal{P}^{n+1} comme \mathcal{P}^0 s'est transformée en \mathcal{P}^1 . Cette courbe est l'attracteur du système des 4 similitudes: $S_1(x, y) = (x/2, y/2), S_2(x, y) = (x/2 + 1/2, y/2), S_3(x, y) = (-y/2 + 1, x/2), S_4(x, y) = (y/2 + 1, -x/2 + 1/2)$.

Il sera commode de nous intéresser à la suite de lignes polygonales \mathcal{Q}^n dont l'initiateur est $\mathcal{Q}^0 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 0)\}$ et dont le générateur est le même. La figure 1.3 donne les 4 premières lignes polygonales. Cette suite de lignes polygonales convergent vers une courbe Γ' qui se déduit aisément de Γ : $\Gamma' = \Gamma \cup S(\Gamma)$ où $S(x, y) = (1 - x, -y)$. Il est donc clair que la dimension fractale de Γ est aussi celle de Γ' . Tous nos calculs ultérieurs s'appuieront sur la suite \mathcal{Q}^n .

Pour évaluer la dimension de Γ' , nous nous servons d'une suite de graphes G_n . Le graphe G_n s'obtient par l'intermédiaire de la ligne polygonale \mathcal{Q}^n . Pour la terminologie relative à la théorie des graphes, nous reprenons les mots de Berge [3] ou de Labelle [23]. Les sommets de G_n sont les sommets mêmes de \mathcal{Q}^n ; les arêtes de G_n sont les paires de sommets consécutifs que l'on retrouve dans la ligne polygonale \mathcal{Q}^n ; cependant on ne tient pas compte des répétitions ou de l'orientation. Chaque arête correspond à un segment horizontal ou vertical de longueur $1/2^n$ qui joint deux sommets entre eux.

Nous notons d'abord que chaque graphe G_n est connexe. Nous vérifions quelques autres propriétés de ces graphes.

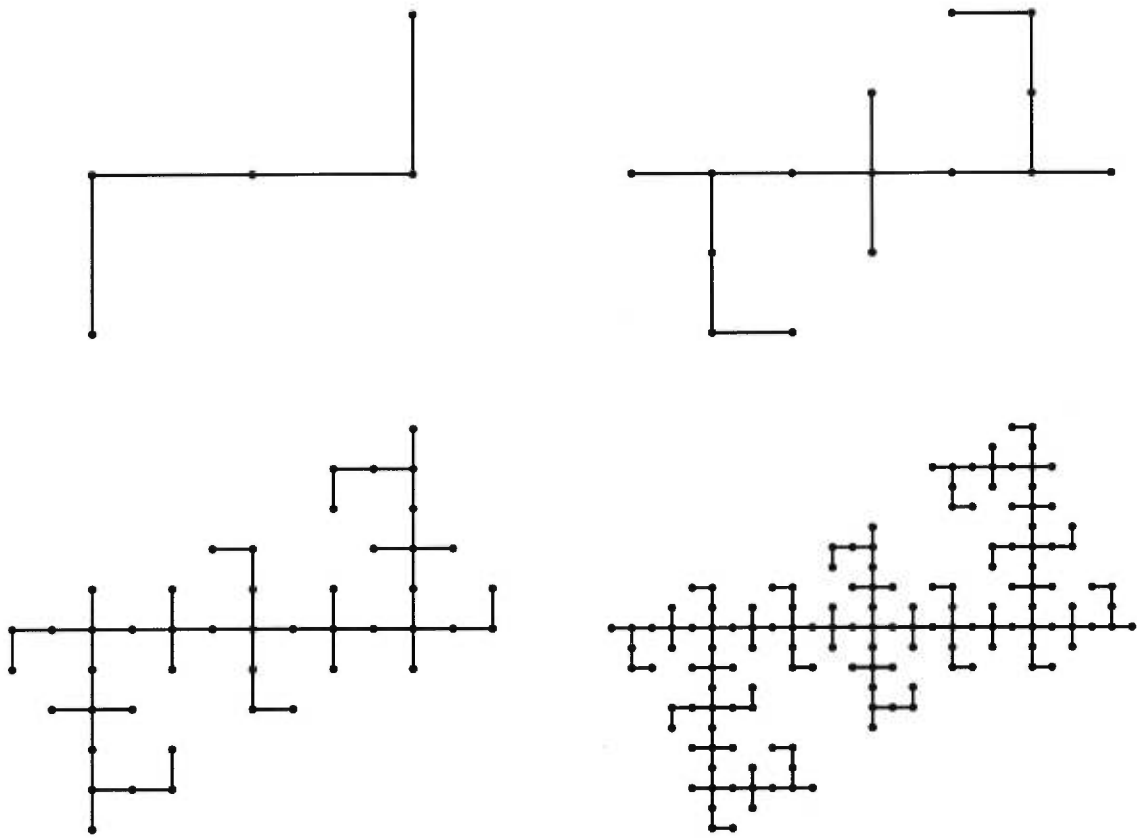
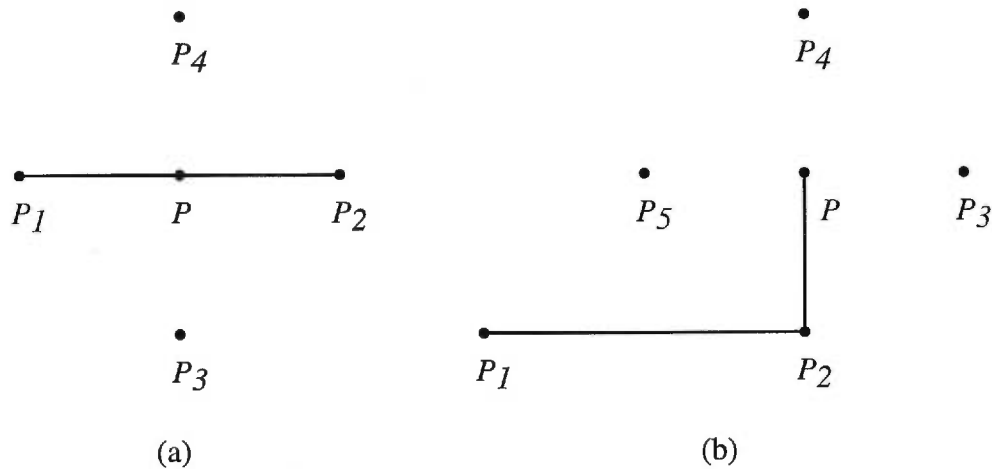


Figure 1.3: Les 4 premières lignes polygonales approchant Γ' .

Figure 1.4: Deux cas pour le point P

Lemme 1.7 Soient P et P' deux sommets de G_n à une distance de $1/2^n$, alors $\{P, P'\}$ est une arête de G_n .

Démonstration: On procède par induction sur n . Le lemme est trivial pour $n = 0$. On suppose que pour un entier donné n , le lemme a déjà été vérifié. Considérons maintenant deux sommets P et P' de G_{n+1} tels que $\|PP'\| = 1/2^{n+1}$. Or la distance entre deux points distincts de G_n est minorée par $1/2^n$. Donc P ou P' est hors de G_n . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $P \notin G_n$. On peut distinguer deux cas.

- P est le point milieu d'une arête de G_n . Soit $\{P_1, P_2\}$ l'arête de G_n dont P est le milieu, désignons par P_3 et P_4 les deux points tels que $P_1P_3P_2P_4$ est le carré dont P_1P_2 est la diagonale (voir la figure 1.4a). P' est nécessairement l'un des points P_1, P_2, P_3, P_4 . Par construction, il est impossible que P_3 ou P_4 appartiennent à G_{n+1} . (En effet, si $(x, y) \in G_{n+1}$, alors un des deux nombres $x2^{n+1}, y2^{n+1}$ est un entier pair.) Donc $\{P, P'\}$ est une arête de G_{n+1} .
- P n'est pas le point milieu d'une arête de G_n . Il existe une arête $\{P_1, P_2\}$ de G_n telle que P_1P_2P est un triangle rectangle (angle droit en P_2) et $\|PP_2\| = 1/2^{n+1}$. En plus de P_2 , on peut trouver trois autres points P_3, P_4, P_5 qui une fois reliés à P donnent des segments horizontaux ou verticaux de longueur $1/2^{n+1}$ (voir la

figure 1.4b). P' est en principe l'un de ces quatre points P_2, P_3, P_4, P_5 . Comme tantôt, il est impossible que P_3 ou P_5 appartiennent à G_{n+1} . Il est aussi exclu que $P'' = P_4$ parce que ceci entraînerait que P_2 et P_4 seraient deux sommets de G_n à une distance de $1/2^n$; par induction, on obtiendrait que $\{P_2, P_4\}$ est une arête; ce qui contredit le fait que P n'est pas le point milieu d'une arête de G_n . Donc $P' = P_2$ et $\{P, P'\}$ est une arête de G_{n+1} .

◇

Théorème 1.8 *Pour chaque entier n , G_n est un graphe sans cycle.*

Démonstration: On procède par induction sur n . Le théorème est trivial pour $n = 0$, G_0 avec une seule arête est forcément sans cycle. On suppose que pour un entier donné n , le graphe G_n est sans cycle. Raisonnons par l'absurde en prétendant l'existence d'au moins un cycle élémentaire dans le graphe G_{n+1} , $[P_0, P_1, \dots, P_q]$. On remarque que deux sommets consécutifs du cycle, P_i, P_{i+1} ne peuvent pas appartenir tous les deux à G_n . (Ceci vient du fait que si P, P' sont deux sommets distincts de G_n , alors $\|PP'\| \geq 1/2^n$.) On remarque aussi que parmi deux sommets consécutifs du cycle P_i, P_{i+1} , il en est un qui appartient à G_n . Quitte à effectuer une permutation circulaire d'un cran dans le cycle, sans perte de généralité, on peut supposer que P_0 est un sommet du graphe G_n . q est forcément pair et les points du cycle de rang pair, P_0, P_2, \dots, P_q sont tous dans G_n . Puisque $\|P_i - P_{i+2}\| \leq 1/2^n$ et que $P_i \neq P_{i+2}$ (le cycle est élémentaire), alors $\|P_i - P_{i+2}\| = 1/2^n$. Vu le lemme 1.7, $P_i P_{i+2}$ est une arête du graphe G_n . $[P_0, P_2, \dots, P_q]$ serait un cycle G_n , ce qui contredit l'hypothèse d'induction. ◇

Nous distinguons cinq types de ces sommets:

1. sommet qui n'appartient qu'à une seule arête;
2. sommet qui appartient exactement à deux arêtes alors que ces deux arêtes sont en prolongement l'un de l'autre;
3. sommet qui appartient exactement à deux arêtes alors que ces deux arêtes sont perpendiculaires;

4. sommet qui appartient exactement à trois arêtes;
5. sommet qui appartient exactement à quatre arêtes.

Nous introduisons ensuite cinq suites de nombres entiers: a_n, b_n, c_n, d_n, e_n , il s'agit du nombre de sommets de G_n qui sont respectivement de type 1, 2, 3, 4, 5. De toute évidence, $a_0 = 2, b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = 0$. Voici les formules de récurrence pour ces suites.

Proposition 1.9 *Les nombres de sommets de divers types des graphes G_n sont liés d'une génération à l'autre par les formules suivantes*

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n + c_n + d_n \quad (1.2)$$

$$b_{n+1} = a_n + b_n + c_n + d_n + e_n - 1 \quad (1.3)$$

$$c_{n+1} = a_n \quad (1.4)$$

$$d_{n+1} = c_n \quad (1.5)$$

$$e_{n+1} = b_n + d_n + e_n \quad (1.6)$$

Démonstration: Pour la démonstration, il est commode de consulter la figure 1.5 qui illustre comment d'une génération à l'autre, les arêtes autour d'un sommet d'un certain type se transforment. Considérons un sommet P du graphe G_n . Dans la figure, on indique ce point par un petit carré plein. Il y a 5 types possibles énumérés dans la partie supérieure de la figure. Demandons-nous comment le type de P va se transformer à la génération suivante dans le graphe G_{n+1} . De plus, déterminons le type des nouveaux sommets de G_{n+1} dans le voisinage de P , ce sont les sommets P' de G_{n+1} tels que $\{P, P'\}$ est une arête de G_{n+1} ; les nouveaux sommets sont indiqués par un petit disque. Les transformations des types et les types des nouveaux sommets dans le graphe G_{n+1} sont décrits dans la portion inférieure de la figure. C'est le lemme 1.7 qui assure le bien-fondé de la figure, qui dit ceci.

1. Si P est de type 1 dans le graphe G_n , P est de type 3 dans le graphe G_{n+1} et produit un nouveau sommet de type 1 et un nouveau sommet de type 2.
2. Si P est de type 2 dans le graphe G_n , P est de type 5 dans le graphe G_{n+1} et produit deux nouveaux sommets de type 1 et deux autres sommets de type 2.

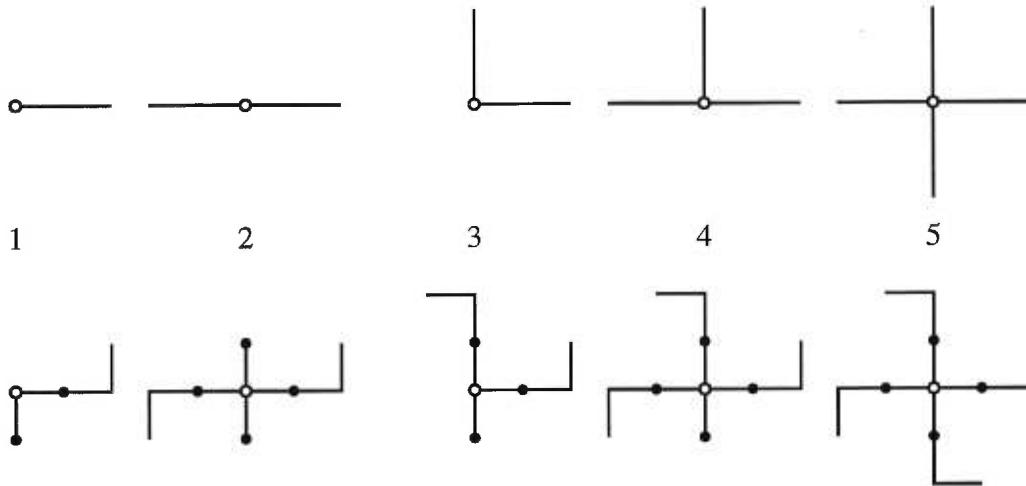


Figure 1.5: Sommets de graphe de divers types avec la transformation des arêtes qui les contiennent

3. Si P est de type 3 dans le graphe G_n , P est de type 4 dans le graphe G_{n+1} et produit 3 nouveaux sommets de type 2.
4. Si P est de type 4 ou 5 dans le graphe G_n , P devient de type 5 dans le graphe G_{n+1} et produit 4 nouveaux sommets de type 2.

À la n -ième génération, un sommet de type 2 engendre deux sommets de type 1 à la génération suivante, un sommet de type 1, 3 et 5 contribue chacun pour un sommet de type 1, alors qu'un sommet de type 4 n'apporte aucune contribution de type 1; ce qui donne la formule (1.2).

b_{n+1} est aussi égal au nombre d'arêtes du graphe G_n . Or le théorème 1.8 affirme que le graphe G_n est sans cycle et il est connu que dans un graphe non vide connexe et sans cycle, le nombre d'arêtes est égal au nombre de sommets diminué de 1. (cf. Berge, p. 22, [3] ou Labelle, p. 34, [23]). Puisque le nombre de sommets de G_n est $a_n + b_n + c_n + d_n + e_n$, la formule (1.3) s'ensuit.

Les sommets de G_n qui deviennent un sommet de type 3 à la génération suivante, sont uniquement ceux du type 1. D'où la formule (1.4).

Les sommets de G_n qui deviennent un sommet de type 4 à la génération suivante, sont uniquement ceux du type 3. D'où la formule (1.5).

Les sommets de G_n qui deviennent des sommets de type 5 à la génération suivante, sont ceux du type 2, 4 ou 5. D'où la formule (1.6). \diamond

1.6 Comportement asymptotique de l'ordre des graphes

Désignons par t_n le nombre de sommets de G_n . Dans la terminologie de la théorie des graphes, le nombre de sommets dans un graphe G est l'ordre de G . Pour trouver la dimension fractale de Γ' , c'est le comportement asymptotique de t_n qui est essentiel. C'est ce que nous examinons maintenant.

Théorème 1.10 *Soient A une matrice carrée d'ordre m , B et V_0 deux vecteurs de \mathbb{R}^m , on considère la suite de vecteurs V_n obtenus par la récurrence:*

$$V_n = A \cdot V_{n-1} + B.$$

On suppose que A admet m valeurs propres distinctes $\{\lambda_i\}$ telles que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{m-1}| \leq 1 < |\lambda_m|$.

Soit X_m un vecteur-colonne propre tel que $AX_m = \lambda_m X_m$, soit U_m un vecteur-ligne propre tel que $U_m A = \lambda_m U_m$, normalisé pour que $U_m X_m = 1$, alors lorsque n tend vers l'infini, $V_n = c \lambda_m^n X_m + O(n)$ où $c = U_m(V_0 + B)/(\lambda_m - 1)$.

Démonstration: Parce que les valeurs propres de A sont distinctes, A est donc semblable à une matrice diagonale, *i.e.* il existe une matrice P d'ordre m telle que

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

où $P = (X_1, X_2, \dots, X_m)$, X_i les vecteurs propres correspondants aux λ_i respectivement.

Par la récurrence, on a

$$\begin{aligned}
V_n &= A \cdot V_{n-1} + B \\
&= A^n \cdot V_0 + \sum_{i=1}^{n-1} A^i \cdot B \\
&= P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{m-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_m^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot V_0 + \sum_{i=1}^{n-1} P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^i & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{m-1}^i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_m^i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P^{-1} \cdot B \\
&= P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{m-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_m^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot V_0 + P \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_1^n}{1-\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\lambda_2^n}{1-\lambda_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1-\lambda_{m-1}^n}{1-\lambda_{m-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1-\lambda_m^n}{1-\lambda_m} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$P^{-1} \cdot B.$$

(Si $\lambda_i = 1$, on doit remplacer $\frac{1-\lambda_i^n}{1-\lambda_i}$ par n).

$$= \lambda_m^n \cdot P \cdot \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot (V_0 + \frac{1}{\lambda_{m-1}} \cdot B) + E_n V_0 + E'_n B$$

où E_n and E'_n sont deux suites de matrices dont les coefficients sont uniformément bornés en n ou au pire $O(n)$.

On a vu que la matrice P est obtenue en disposant les vecteurs-colonnes propres X_1, X_2, \dots, X_m côte à côte. D'autre part on vérifie que la i -ème rangée de la matrice P^{-1} est un vecteur-ligne propre qui correspond à la valeur propre λ_i et que ce vecteur U_i est normalisé pour que $U_i X_i = 1$. Un dernier calcul montre que la matrice $P \cdot$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \text{ est précisément la matrice } X_m U_m. \text{ D'où le résultat du}$$

théorème. \diamond

Proposition 1.11 *L'ordre de G_n a le comportement asymptotique suivant: Il existe un $c \neq 0$ tel que*

$$t_n \sim c \cdot 3,152757602^n \quad (1.7)$$

Démonstration: Si on note $V_n = (a_n, b_n, c_n, d_n, e_n)^T$, alors on peut écrire les formules de la proposition 1.9 sous une forme matricielle

$$V_n = A \cdot V_{n-1} + B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le logiciel Maple, on trouve que A a cinq valeurs propres distinctes:

$$\lambda_1 = 0;$$

$$\lambda_2 = -0,5763788013 + 0,54968424651i; \quad \lambda_3 = -0,5763788013 - 0,54968424651i;$$

$$\lambda_4 = 1; \quad \lambda_5 = 3,152757602.$$

D'autre part, désignons le vecteur propre qui correspond à la valeur propre λ_5 par $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$. On peut normaliser X pour que $\sum_{i=1}^5 x_i = 1$. (Par la théorie de Frobenius, toutes les composantes de X sont positives.) Par le théorème 1.10, il existe une constante c telle que chaque composante de V_n est asymptotique à $c\lambda_5^n$ fois la composante correspondante de X lorsque n tend vers l'infini. D'où $t_n \sim c\lambda_5^n$. Pour montrer que $c \neq 0$, il suffit d'observer que $t_n > 2^n$, car tous les points $(i/2^n, 0)$, $i = 0, 1, \dots, 2^n$ sont tous des sommets de G_n . \diamond

1.7 Calcul de dimension fractale de la courbe de la forêt

Tout est en place pour le calcul de la dimension de Γ .

Théorème 1.12 *La dimension fractale de Γ' vaut 1,656614253.*

Démonstration: Désignons par ω_n le nombre de carrés élémentaires de longueur $1/2^n$ déterminés par le maillage des points $(i/2^n, j/2^n)$, $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}$, et qui rencontrent Γ' . La réunion de tous les carrés centrés en un sommet de G_n et de côté 2^{1-n} recouvre

Γ' . D'où $t_n \leq \omega_n \leq 4t_n$. Donc, t_n et ω_n sont de même ordre et peuvent être utilisés l'un ou l'autre pour le calcul de la dimension fractale de Γ' (le comportement asymptotique de ω_n détermine la dimension de Γ'):

$$\Delta(\Gamma') = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \omega_n}{n \log 2}$$

cf. Tricot, p. 130, [29]).

Enfin, en utilisant la proposition 1.11, on a

$$\Delta(\Gamma') = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log t_n}{n \log 2} = \frac{\log 3,152757602}{\log 2} = 1,656614253.$$

◇

Remarque 1.1 *Nous avons déjà indiqué que la dimension fractale de Γ est celle de Γ' . Puisque la dimension de similitude est 2, nous avons bien que $\Delta(\Gamma) < e(\Gamma)$.*

1.8 Conclusion

Nous avons montré que l'attracteur d'un système \mathcal{S} de similitudes a toujours une dimension fractale majorée par l'exposant de similitude de \mathcal{S} . Nous avons voulu décrire des situations où tantôt la dimension fractale coïncide avec la dimension de similitude, tantôt les deux dimensions diffèrent. Pour le moment, il ne semble pas possible de donner une explication générale des écarts entre les deux dimensions pour les courbes fractales.

La situation est un peu différente pour les ensembles autosimilaires de la ligne, comme on voit dans un papier récent de Simon & Solomyak [28]. Dans ce travail, ils comparent la dimension de Bouligand et la dimension de similitude pour des ensembles de Cantor de construction superposante sur \mathbb{R} . Ils expliquent pourquoi les deux dimensions diffèrent dans deux familles spécifiques de cette sorte d'ensembles de Cantor.

La remarque intéressante suivante a été proposée par un des arbitres. Si S est une similitude contractante dont le centre est l'origine, alors, le système de similitudes $\{S, -S\}$ a l'origine comme son attracteur; la dimension de similitude est positive

mais la dimension fractale de l'attracteur est 0. Le seul inconvénient de cet exemple est que l'attracteur n'est pas une courbe.

Nous terminons par une question. Soit une courbe à similitude interne obtenue à l'aide d'une ligne polygonale avec la propriété qu'au moins deux de ses segments se rencontrent en plus d'un point, est-il vrai que la dimension fractale de la courbe est inférieure à sa dimension de similitude?

Chapitre 2

Le pavage du plan par la courbe de Lévy

Nous rappelons un résultat dû à Lévy et que nous avons déjà cité dans le chapitre 1.

Théorème 2.1 (Lévy, p. 271, [24]) *Soit C la courbe à similitude interne dont le générateur est la ligne polygonale à trois sommets: $(0, 0), (1/2, 1/2), (1, 0)$, alors la mesure superficielle de C vaut $1/4$.*

La courbe C dont on vient de parler porte le nom de la courbe de Lévy, son tracé est reproduit dans la figure 2.1.

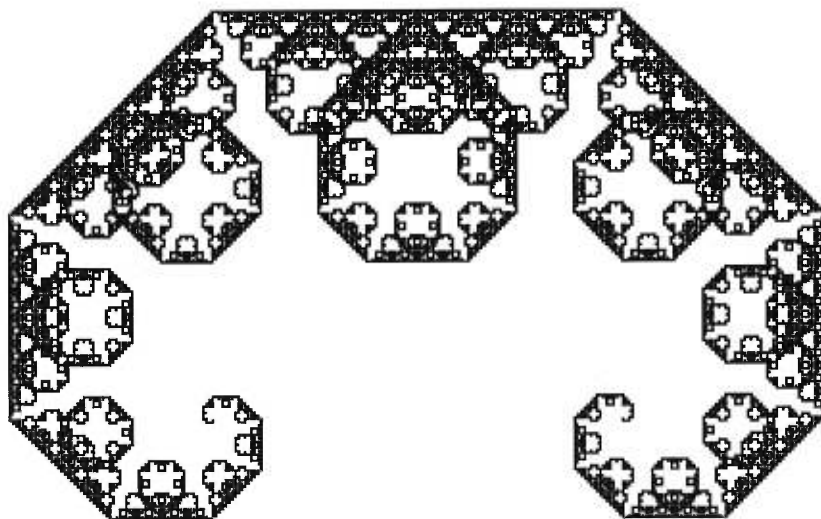


Figure 2.1: Courbe de Lévy

La démonstration du théorème 2.1 que fournit Lévy n'est pas simple, c'est pour cette raison que dans ce chapitre, nous développons une démonstration beaucoup plus transparente. Introduisons quatre courbes, C_0, C_1, C_2 et C_3 , directement issues de la courbe C de Lévy: $C_0 = C$; C_1 est l'image de C par la rotation de 90 degrés centrée au point $(1/2, 1/2)$; C_2 est l'image de C par la rotation de 180 degrés centrée au point $(1/2, 1/2)$; C_3 est l'image de C par la rotation de 270 degrés centrée au point $(1/2, 1/2)$. Nous considérerons la famille de toutes les translations de C_0, C_1, C_2, C_3 par un vecteur du plan à coordonnées entières $(i, j), i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}$. Nous vérifierons les propriétés suivantes pour cette famille de courbes.

1. Chaque courbe $(i, j) + C_k$ est un déplacement plan de C .
2. Les courbes $(i, j) + C_k$ où $i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, 2, 3$ forment un recouvrement dénombrable du plan.
3. Deux courbes distinctes $(i, j) + C_k$ et $(i', j') + C_{k'}$ ne peuvent se rencontrer que sur un ensemble de mesure nulle.

Comme nous le verrons plus tard, le théorème de Lévy est une conséquence de ces trois propriétés. Les deux dernières propriétés reviennent à dire que la famille dénombrable de compacts $(i, j) + C_k$ où $i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, 2, 3$ forme un pavage du plan dont C_0, C_1, C_2, C_3 sont les diverses tuiles. D'autre part, la seconde propriété entraîne que l'intérieur de la courbe de Lévy n'est pas vide. Pour être explicite, nous mettrons de l'avant un losange dont les diagonales mesurent $1/64$, recouvert dans son intérieur par la courbe de Lévy.

Nous attarderons aussi à déterminer comment l'aire de la courbe de Lévy se distribue sur les triangles de la triangulation obtenue par les droites $x = m, y = n, x \pm y = k, m, n, k \in \mathbb{Z}$ ainsi que sur des triangles encore plus petits. De plus, nous discuterons sommairement de la représentation graphique de ce pavage créé par la courbe de Lévy.

2.1 Propriétés de la courbe de Lévy

Dans cette section, nous exposons les propriétés fondamentales de la courbe de Lévy. En particulier, nous montrons que l'enveloppe convexe de la courbe de Lévy est un octogone dont nous donnons les sommets. Soient S_1, S_2 les deux similitudes suivantes du plan: $S_1(x, y) = ((x - y)/2, (x + y)/2)$, $S_2(x, y) = ((1 + x + y)/2, (1 - x + y)/2)$. La courbe de Lévy C est l'attracteur du système de fonctions itérées $\{S_1, S_2\}$, c'est l'unique partie compacte du plan solution de l'équation:

$$C = S_1(C) \cup S_2(C) \quad (2.1)$$

$S_1(C)$ et $S_2(C)$ forment deux portions de C , qui sont chacune semblables à C et dont la réunion recrée C . Si dans (2.1), on remplace C par $S_1(C) \cup S_2(C)$, on décompose C en 4 portions semblables à C :

$$C = S_1(S_1(C)) \cup S_1(S_2(C)) \cup S_2(S_1(C)) \cup S_2(S_2(C)) \quad (2.2)$$

Les deux portions élémentaires d'ordre 1 de la courbe de Lévy sont $S_1(C), S_2(C)$, il s'agit de la première et seconde moitié de C . Les quatre portions élémentaires d'ordre 2 sont les quarts successifs de C : $S_1(S_1(C)), S_1(S_2(C)), S_2(S_1(C)), S_2(S_2(C))$. Si les portions élémentaires d'ordre n sont les arcs de courbe A_1, A_2, \dots, A_{2^n} , les portions élémentaires d'ordre $n+1$ sont $S_1(A_1), S_1(A_2), \dots, S_1(A_{2^n}), S_2(A_1), S_2(A_2), \dots, S_2(A_{2^n})$. Ces décompositions en portions élémentaires nous serviront plusieurs fois. Le prochain résultat était déjà connu de Lévy, mais pour que notre texte se suffise à lui-même, nous en donnerons la démonstration.

Théorème 2.2 *L'enveloppe convexe de la courbe de Lévy est l'octogone dont les sommets sont*

$$(0, 1), (-1/2, 1/2), (-1/2, 0), (-1/4, -1/4), (5/4, -1/4), (3/2, 0), (3/2, 1/2), (1, 1).$$

Démonstration: Nous vérifions d'abord que les huit sommets appartiennent à la courbe de Lévy. Le point $(0, 1)$ est un point fixe de la transformation du plan $S_1 \circ S_2$. Or $S_1 \circ S_2$ applique C en lui-même. Donc $(0, 1)$ appartient à C . On sait que $S_1(C) \subset C$. D'où $(-1/2, 1/2) = S_1(0, 1) \in C$; de même $(-1/2, 0) = S_1(-1/2, 1/2) \in C$

et $(-1/4, -1/4) = S_1(-1/2, 0) \in C$. Pour montrer que les quatre autres points $(5/4, -1/4), (3/2, 0), (3/2, 1/2), (1, 1)$ appartiennent à C , il suffit de remarquer que la courbe de Lévy est symétrique par rapport à la droite $x = 1/2$.

Puisque les sommets de l'octogone sont dans C , l'enveloppe convexe de C contient cet octogone. Vérifions maintenant que l'octogone contient l'enveloppe convexe de C . Si P désigne l'octogone, on remarque que $S_1(P) \subset P$ et $S_2(P) \subset P$. Si F désigne la fonction d'ensemble qui à une partie compacte A du plan associe le compact $F(A) = S_1(A) \cup S_2(A)$ et si l'on munit l'ensemble des parties compactes du plan de la métrique d'Hausdorff, F est une contraction. Or $F(P) \subset P$. De ce fait, le point fixe de F , qui est C , est forcément contenu dans P . D'où l'octogone contient l'enveloppe convexe de C . \diamond

Corollaire 2.3 *La courbe de Lévy est contenue dans le rectangle $[-1/2, 3/2] \times [-1/4, 1]$.*

Remarque 2.1 *Dubuc-Elqortobi [8, 9] ont déjà décrit diverses enveloppes convexes de figures fractales dont celle de la courbe de Lévy, mais ici, nous sommes beaucoup plus directs et explicites.*

2.2 Recouvrement du plan avec la courbe de Lévy

Dans cette section, nous indiquons comment recouvrir le plan avec une suite de tuiles qui ont chacune la forme de la courbe de Lévy. Nous mettons aussi le doigt sur un carré entièrement recouvert par la courbe de Lévy.

Théorème 2.4 *Soit $C_0 = C$ la courbe de Lévy, soient C_1, C_2, C_3 les images de C après des rotations respectives de $90, 180, 270$ degrés autour du point $(1/2, 1/2)$, alors les courbes $(i, j) + C_k$ où $i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, 2, 3$ forment un recouvrement du plan.*

Démonstration: Désignons par A la réunion de toutes les courbes $(i, j) + C_k$ où $i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, 2, 3$. Montrons d'abord que A est fermé. Soit D_r le disque fermé de rayon $r > 0$ centré en 0 , puisque $A \cap D_r$ est la réunion des $C_n \cap D_r$ qui ne

sont pas vides et que pour r donné, il n'y a qu'un nombre fini de C_n qui rencontre D_r , alors $A \cap D_r$ est fermé. Parce que r peut être aussi grand que l'on veut, A est donc fermé.

Parce que l'origine du plan appartient à C_0 , il est évident que A contient $G_0 = \mathbb{Z}^2$. En se servant de la relation (2.1), on obtient que A contient $G_1 = S_1(\mathbb{Z}^2)$. En itérant l'usage de la relation (2.1), on obtient que A contient chaque sous-groupe G_n de la récurrence $G_{n+1} = S_1(G_n)$. Puisque $G_{2n} = S_1^{2n}(\mathbb{Z}^2) = \{(i/2^n, j/2^n)\}$, alors A est dense dans \mathbb{R}^2 . D'où $A = \mathbb{R}^2$. \diamond

Corollaire 2.5 *La courbe de Lévy a un intérieur non vide.*

Ceci est une conséquence simple du théorème précédent si l'on se sert d'un argument de Baire: un recouvrement dénombrable du plan par des compacts ne peut avoir lieu que si l'un des compacts admet un intérieur non vide; de ce fait, la courbe de Lévy elle-même admet au moins un point intérieur. Cependant, il est possible d'être explicite dans la mise en évidence d'un point intérieur. Avant d'y arriver, nous présentons une triangulation du plan qui jouera un grand rôle dans l'analyse de la courbe de Lévy.

La triangulation $\mathcal{T} = \{T_n\}$ consiste d'abord à subdiviser le plan selon les carrés $(i, j), (i+1, j), (i+1, j+1), (i, j+1), i, j \in \mathbb{Z}$, puis à subdiviser chacun de ces carrés en 4 triangles en joignant chacun des sommets du carré au centre du carré $(i+1/2, j+1/2)$. La figure 2.2 illustre cette triangulation avec la numérotation que nous retenons pour les triangles. Cette numérotation s'étend aux courbes $(i, j) + C_k$: si $T_n = \triangle ABC$ où l'angle droit est en A et où les sommets sont disposés dans l'ordre positif, si la courbe $(i, j) + C_k$ a pour point initial B , pour point final C et admet A comme point milieu, alors on accorde à cette courbe le numéro n en posant $C_n = (i, j) + C_k$.

Lemme 2.6 *Le carré $[1/4, 3/4]^2$ est recouvert par les 4 courbes, C_0, C_1, C_2, C_3 .*

Démonstration: Notons par Q le carré $[1/4, 3/4]^2$. Montrons d'abord que chaque courbe $C' = C_n$ ne rencontre pas l'intérieur de Q si $n > 3$. Soit m le plus grand multiple de 4 qui ne dépasse pas n , désignons par Q' le carré formé par la réunion des 4 triangles $T_m, T_{m+1}, T_{m+2}, T_{m+3}$. Soit Q'' le carré de même centre que Q' , en

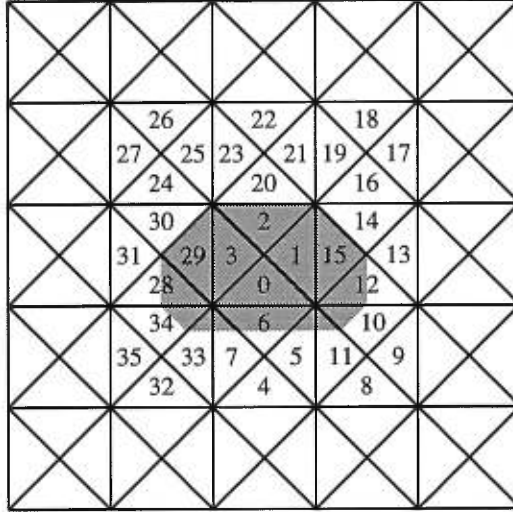


Figure 2.2: Triangulation du plan avec numérotation. L'enveloppe convexe de la courbe de Lévy est en gris.

homothétie avec Q' selon le rapport $3/2$. Le corollaire 2.3 fait voir que l'enveloppe convexe de C' est contenu dans Q'' . Or Q'' ne rencontre pas l'intérieur de Q , donc il en est de même pour C' . D'autre part, le théorème 2.4 a montré que l'union de tous les C_n donne tout le plan. Donc $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$ contient l'intérieur de Q . Finalement, on en tire que Q lui-même est contenu dans $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$. \diamond

Théorème 2.7 *Le carré dont les sommets sont les points $(1/2, 55/64) \pm (0, 1/128)$, $(1/2, 55/64) \pm (1/128, 0)$ est recouvert par la courbe de Lévy.*

Démonstration: Soient les quatre points $A = (33/64, 55/64)$, $B = (1/2, 7/8)$, $C = (31/64, 55/64)$, $D = (1/2, 27/32)$, une recherche par ordinateur montre que quatre portions élémentaires d'ordre 11 de la courbe de Lévy passent par ces 4 points d'une manière bien précise. Si l'on observe les portions de rangs 864, 907, 1142 et 1185, les points initiaux et les points finaux des arcs A_{884} , A_{1185} , A_{1142} , A_{907} sont respectivement A et B , B et C , C et D , D et A . Si $S(x, y) = A + S_1^{11}(x, y)$, alors $S(0, 0) = A$, $S(1, 0) = B$, $S(1, 1) = C$, $S(0, 1) = D$. L'image de C_0 par S est la portion A_{884} , les images de C_1, C_2, C_3 par S sont les autres portions. D'où l'image de $\cup_{i=0}^3 C_i$ par S est une partie de C_0 . Vu le lemme 2.6, l'image du carré $[1/4, 3/4]^2$ est contenue dans C_0 ; or cette image est exactement le carré dont les sommets sont les points $(1/2, 55/64) +$

$(0, \pm 1/128), (1/2, 55/64) + (\pm 1/128, 0)$. \diamond

La figure 2.3 présente la onzième ligne polygonale qui approche la courbe de Lévy. Le carré $ABCD$ est tracé en rouge, le carré recouvert par la courbe de Lévy est deux fois plus petit avec même centre.

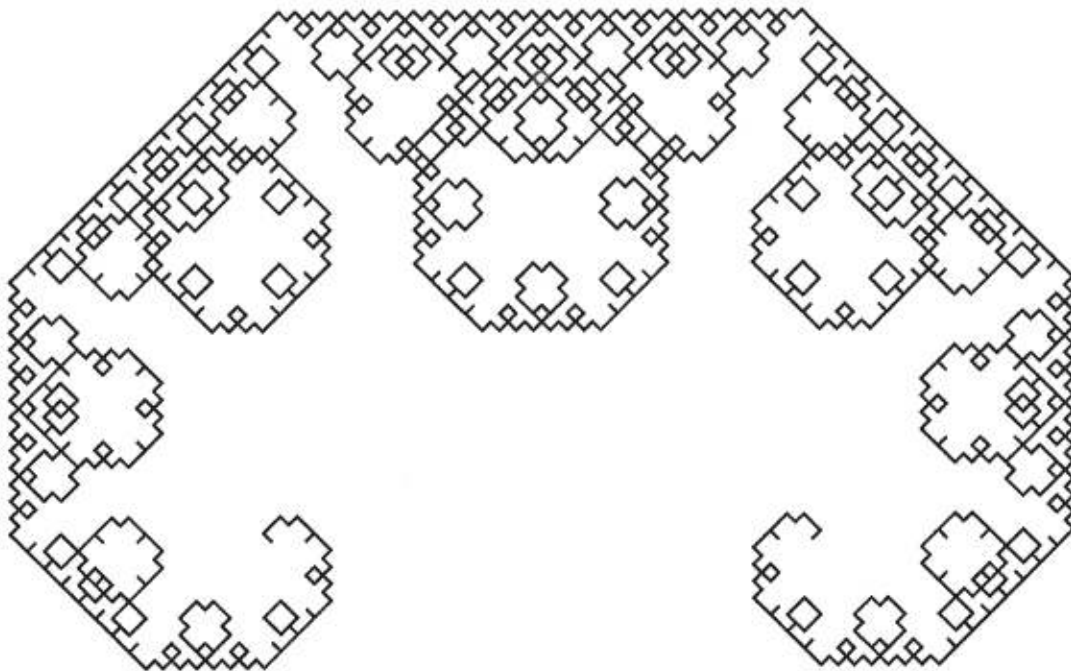


Figure 2.3: Onzième approximation de la courbe de Lévy et indication en rouge d'un carré dont le centre est un point intérieur à la courbe de Lévy.

2.3 Chevauchement entre les tuiles

Dans cette section, nous montrons que l'aire de l'intersection de deux tuiles translées selon des vecteurs à coordonnées entières est toujours nulle, sauf si les objets se confondent. Pour y arriver, nous étudierons le chevauchement de deux portions élémentaires d'ordre n de la courbes de Lévy.

Lemme 2.8 *L'intersection entre deux portions élémentaires distinctes d'ordre n de la courbe de Lévy est de mesure nulle.*

Démonstration: Si A_1, A_2, \dots, A_{2^n} désignent les 2^n portions élémentaires d'ordre n de la courbe de Lévy, on a que $C = \bigcup_{i=1}^{2^n} A_i$. En prenant la mesure, on obtient

$$\mu(C) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{2^n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{2^n} \mu(A_i) \quad (2.3)$$

Mais à cause de la similarité, on a $\mu(A_i) = \frac{1}{2^n} \mu(C)$, donc

$$\sum_{i=1}^{2^n} \mu(A_i) = \mu(C) \quad (2.4)$$

On a donc l'égalité dans (2.3), si bien que pour $i \neq j$, on doit avoir

$$\mu(A_i \cap A_j) = 0$$

◇

Théorème 2.9 *L'intersection de deux courbes distinctes $(i, j) + C_k, (i', j') + C_{k'}$ est de mesure nulle.*

Démonstration: Sans perte de généralité, on peut supposer que $i' = j' = k' = 0$. Il s'agit de démontrer que $\forall i \in \mathbb{Z}, \forall j \in \mathbb{Z}, \forall k \in \{0, 1, 2, 3\}, \mu(C \cap ((i, j) + C_k)) = 0$ si l'un des entiers i, j, k n'est pas nul. Pour la commodité, posons $C' = (i, j) + C_k$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas: $|i| > 1$ ou $|j| > 1$.

Dans ce cas, on montre que les deux tuiles C et C' ne se rencontrent pas. En effet, par le corollaire 2.3, on sait que C est contenu dans le rectangle $[-1/2, 3/2] \times [-1/4, 1]$ et C' est contenu dans le carré $i + [-1/2, 3/2] \times j + [-1/2, 3/2]$. Puisque $|i| > 1$ ou $|j| > 1$, le rectangle et le carré ne se touchent pas si bien que $C \cap C' = \emptyset$ et $\mu(C \cap C') = 0$.

Second cas: $i = -1, 0, 1, j = -1, 0, 1, k = 0, 1, 2, 3$ mais $(i, j, k) \neq (0, 0, 0)$.

En principe, il y a 35 possibilités à envisager pour C' .

L'idée de la démonstration est de faire appel au lemme précédent. Par exemple, regardons les deux portions élémentaires d'ordre 1 de C : $A_1 = S_1(C)$, $A_2 = S_2(C)$. Par le lemme 2.8 $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$. L'image de A_1 et de A_2 par la similitude S_1^{-1} est C et $S_1^{-1}S_2(C) = C_{11}$. D'où $\mu(C \cap C_{11}) = 0$.

Regardons maintenant les 4 portions élémentaires d'ordre 2 de C : A_1, A_2, A_3, A_4 . Observons le chevauchement entre A_2, A_3 . Par le lemme 2.8, $\mu(A_2 \cap A_3) = 0$. Or $A_2 = (0, 1/2) + C/2$, $A_3 = (1/2, 1/2) + C/2$. L'image de A_2 et de A_3 par la similitude $2x, 2y - 1$ est C et $(1, 0) + C = C_{12}$. D'où $\mu(C \cap C_{12}) = 0$.

À partir des 8 portions élémentaires d'ordre 3 de C : $A_i, 1 \leq i \leq 8$, observons d'abord la série de couples de portions: $(A_4, A_5), (A_3, A_5)$. Nous invitons le lecteur à poursuivre la discussion en liaison avec la figure 2.1. Les extrémités de la courbe A_4 sont $(1/4, 3/4), (1/2, 1/2)$ et celles de la courbe A_5 sont $(1/2, 1/2), (3/4, 3/4)$. La similitude qui envoie A_4 sur C envoie A_5 sur C_1 . D'où $\mu(C \cap C_1) = \mu(A_4 \cap A_5)/8 = 0$. Si l'on observe les portions (A_3, A_5) , on vérifie que la similitude qui envoie A_3 sur C envoie A_5 sur C_8 , d'où $\mu(C \cap C_8) = 0$.

Première façon pour terminer la démonstration.

Nous avons écrit un programme informatique qui permet de vérifier que $\mu(C \cap C_n) = 0$ pour $1 \leq n \leq 35$. Dans le tableau 2.1, nous donnons pour chaque valeur de n compris entre 1 et 35, 3 entiers i, j, m . La signification de ces trois entiers est de considérer les deux portions élémentaires d'ordre m , A_i et A_j de la courbe de Lévy; alors la similitude qui envoie A_i sur C enverra A_j sur C_n . Vu le lemme 2.8, alors $\mu(C \cap C_n) = 0$. Ceci complèterait la démonstration assistée par ordinateur.

Seconde façon pour terminer la démonstration.

Si l'on préfère procéder à une vérification visuelle que $\mu(C \cap C_n) = 0$ pour n compris entre 1 et 35, il y a lieu de diminuer le nombre de vérifications par des arguments de symétrie. En effet, on sait que la courbe de Lévy est symétrique par rapport à la droite $x = 1/2$; d'où si C_m est le symétrique de C_n par rapport à cette droite, alors $C_m \cap C$ est de mesure nulle si l'on a vérifié que $\mu(C_n \cap C) = 0$. Dans le même ordre d'idée, si $\mu(C_n \cap C) = 0$, si T est une isométrie qui envoie C_n sur C et si

n	m	i	j	n	m	i	j	n	m	i	j	n	m	i	j
1	3	4	5	10	8	95	139	19	4	9	6	28	2	3	2
2	7	48	70	11	1	1	2	20	5	15	20	29	4	8	10
3	3	5	4	12	2	2	3	21	5	15	21	30	6	30	41
4	5	13	18	13	5	12	18	22	6	24	37	31	5	21	15
5	4	7	9	14	6	24	35	23	5	18	12	32	3	6	4
6	4	8	9	15	4	9	7	24	3	5	3	33	1	2	1
7	4	10	8	16	3	4	6	25	4	8	11	34	8	96	140
8	3	3	5	17	5	12	19	26	7	61	81	35	4	11	8
9	4	6	9	18	7	48	68	27	5	19	12				

Tableau 2.1: Liste des couples de portions élémentaires d'ordre m (A_i, A_j) semblables au couple de courbes (C, C_n) .

$C_m = T(C)$, alors $\mu(C \cap C_m) = 0$. À partir de ces deux constats, il suffit de vérifier que $\mu(C \cap C_n) = 0$ pour $n = 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 22$. Il y a donc 15 cas à regarder. On remarque de plus que l'enveloppe convexe de C_{17} , de C_{18} ou de C_{22} ne rencontre l'enveloppe convexe de C que selon un segment, ce qui règle les trois derniers cas.

Dans la démonstration, nous avons déjà réglé le cas $n = 11$ avec les deux portions élémentaires d'ordre 1, le cas $n = 12$ avec l'ordre 2, les cas $n = 1, 8$ avec l'ordre 3. L'inspection de la figure 2.4, cas $m = 4$, montre que $\mu(C \cap C_n) = 0$ pour $n = 5, 6, 9$; pour cela, on observe les segments orientés de rang 6,7,8 et 9 de la quatrième ligne polygonale approchant C , des segments sont indiqués par l'addition d'une pointe de flèche à chaque segment mis en évidence. De la même façon, on voit que $\mu(C \cap C_n) = 0$ pour $n = 4, 13$ (cas $m = 5$); $n = 14$ (cas $m = 6$); $n = 2$ (cas $m = 7$); $n = 10$ (cas $m = 8$).

Troisième façon pour terminer la démonstration.

Une autre démonstration est possible. Elle est un peu plus longue, mais elle ne requiert pas le support d'un ordinateur. Il s'agit de vérifier que $\mu(C \cap C_n) = 0$ pour $1 \leq n \leq 35$.

Comme les enveloppes convexes des tuiles $C_{17}, C_{18}, C_{22}, C_{26}, C_{27}$ ne touchent l'enveloppe convexe de C qu'à la frontière, il ne nous reste que 30 autres tuiles à considérer. Pour la commodité, nous posons $\mu_n = \mu(C \cap C_n)$. Si on sait que $\mu_n = 0$, on va déduire que

$\mu_m = 0$ pour d'autres nombres $m : 1 \leq m \leq 35$, et on répètera l'argument jusqu'à l'épuisement des 30 nombres.

Cette procédure est possible. Si $C = C' \cup C''$ et $C_n = C'_n \cup C''_n$ où C', C'' et C'_n, C''_n sont respectivement les portions élémentaires d'ordre 1 de C et C_n , on a

$$C \cap C_n = (C' \cap C'_n) \cup (C' \cap C''_n) \cup (C'' \cap C'_n) \cup (C'' \cap C''_n)$$

Il y a quatre paires de tuiles d'ordre 1 dans le terme à droite: $C' \cap C'_n, C' \cap C''_n, C'' \cap C'_n, C'' \cap C''_n$. Et on peut toujours faire correspondre à chacune de ces paires de tuiles une autre paire de tuiles (C, C_m) en trouvant une similitude envoyant la première tuile d'ordre 1 de la paire en C , et la seconde, en C_m . Et ceci peut se faire facilement en comparant les formes géométriques des paires de tuiles. Donc, si $\mu_n = 0$, il est possible de trouver 4 entiers $m, 1 \leq m \leq 35$, telles que $\mu_m = 0$ pour m .

Vu le lemme 2.8, $\mu_{11} = \mu_{33} = 0$. Dans la première étape, on a donc deux nombres: 11, 33. De $\mu_{11} = 0$, par la procédure, on obtient $\mu_{12} = \mu_{28} = 0$ et de $\mu_{33} = 0$, le même résultat est obtenu.

Alors, on obtient, dans la deuxième étape, deux nombres: 12, 28. Et on écrit brièvement $(11, 33)_1 \rightarrow (12, 28)_2$.

Si à chaque étape, on ne garde que les nombres qui ne sont pas apparus dans les étapes précédentes, alors, en 8 étapes, on parcourt les 30 nombres. On représente cette évolution par le graphe:

$$\begin{aligned} (11, 33)_1 &\rightarrow (12, 28)_2 \rightarrow (1, 3, 8, 16, 24, 32)_3 \rightarrow (5, 6, 7, 9, 15, 19, 25, 29, 35)_4 \\ &\rightarrow (4, 13, 20, 21, 23, 31)_5 \rightarrow (14, 30)_6 \rightarrow (2)_7 \rightarrow (10, 34)_8. \end{aligned}$$

La figure 2.5, située à la fin du chapitre, illustre cette évolution.

◇

Corollaire 2.10 *La famille dénombrable de courbes $(i, j) + C_k$ où $i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, 2, 3$ forme un pavage du plan.*

2.4 Évaluation de la mesure de Lebesgue de la courbe de Lévy

Dans cette section, nous montrons que la mesure de Lebesgue de la courbe de Lévy vaut $1/4$. Il s'agit de démontrer le théorème 2.1.

Première démonstration.

En considérant l'enveloppe convexe de C dans la figure 2.2, on vérifie simplement qu'il y a au plus 15 triangles dont l'intersection avec C est de mesure positive. Si D représente l'ensemble des indices de ces triangles, alors $D = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 28, 29, 33, 34\}$.

L'idée de la démonstration est de choisir pour chaque $n \in D$, une isométrie appropriée S telle que $C_n = S(C)$, dans un tel cas, on aura l'identité

$$\mu(C_n \cap T_0) = \mu(C \cap S^{-1}(T_0)). \quad (2.5)$$

Si pour $n = 5$, on prend pour S la rotation de 90 degrés autour du point $(1, 0)$, on obtiendra que $S^{-1}(T_0) = T_{15}$ et $\mu(C_5 \cap T_0) = \mu(C \cap T_{15})$. Pour $n = 15$, on prend pour S la rotation de -90 degrés autour du point $(1, 0)$, on obtiendra que $S^{-1}(T_0) = T_5$ et $\mu(C_{15} \cap T_0) = \mu(C \cap T_5)$. Par symétrie selon l'axe $x = 1/2$, on a que $\mu(C_7 \cap T_0) = \mu(C \cap T_{29})$ et $\mu(C_{29} \cap T_0) = \mu(C \cap T_7)$.

Maintenant, on montre que pour toutes les valeurs de $n \in D$ autres que 5,7,15,29, $\mu(C_n \cap T_0) = \mu(C \cap T_n)$. Selon que n vaut 1,2,3,6,11,12,28,33, on choisit pour S la symétrie respective par rapport à l'axe $x + y = 1$, $y = 1/2$, $y = x$, $y = 0$, $y = x - 1$, $x = 1$, $x = 0$, $y = -x$. Si n vaut 10 ou 34, on choisit pour S la symétrie par rapport à $(1,0)$ et $(0,0)$ respectivement (la symétrie par rapport à un point (a, b) est la transformation ponctuelle : $(x, y) \mapsto (2a - x, 2b - y)$). Dans chacun des cas, S est une involution et $S^{-1}(T_0) = S(T_0)$ si bien que si $T_n = S(T_0)$, alors $S^{-1}(T_0) = T_n$.

Par addition des identités trouvées, nous obtenons que

$$\mu(C \cap \bigcup_{n \in D} T_n) = \sum_{n \in D} \mu(T_0 \cap C_n) \quad (2.6)$$

Vu le théorème 2.9, on a que $\mu(C_i \cap C_j) = 0$ si $i \neq j$; d'où l'intersection de $T_0 \cap C_i$

avec $T_0 \cap C_j$ est aussi de mesure nulle si $i \neq j$, alors

$$\sum_{n \in D} \mu(T_0 \cap C_n) = \mu(T_0 \cap \bigcup_{n \in D} C_n). \quad (2.7)$$

Mais $C \subset \bigcup_{n \in D} T_n$, donc, $\mu(C \cap \bigcup_{n \in D} T_n) = \mu(C)$. D'autre part en se servant de l'enveloppe convexe de C_n , on voit que, pour $n \notin D$, C_n ne rencontre pas l'intérieur de T_0 . Le théorème 2.4 permet alors de justifier que $T_0 \subset \bigcup_{n \in D} C_n$. Donc, $\mu(T_0 \cap \bigcup_{n \in D} C_n) = \mu(T_0)$. Enfin de (2.6) et de (2.7), on a $\mu(C) = \mu(T_0)$.

Seconde démonstration.

Posons

$$B_N = \bigcup_{i=0}^N \bigcup_{j=0}^N \bigcup_{k=0}^3 (i, j) + C_k.$$

Vu le corollaire 2.3 et le théorème 2.4, on montre que B_N est coïncé entre deux carrés: $[1/2, N - 1/2]^2 \subset B_N \subset [-1/2, N + 1/2]^2$. D'où $(N - 1)^2 \leq \mu(B_N) \leq (N + 1)^2$. Vu le théorème 2.9, l'aire de B_N vaut $4(N + 1)^2 \mu(C)$. On a donc que $[(N - 1)/(N + 1)]^2 \leq 4\mu(C) \leq 1$. Si l'on fait tendre N vers l'infini, on obtient que la seule valeur possible pour $\mu(C)$ est $1/4$.

2.5 Distribution de la mesure de la courbe de Lévy relativement à la triangulation

Nous nous demandons comment se distribue la courbe de Lévy dans les triangles T_n de la triangulation de base \mathcal{T} , il s'agit de trouver la valeur des nombres $\mu(C \cap T_n)$.

Théorème 2.11 *Toutes les valeurs non nulles de $\mu_n = \mu(C \cap T_n)$ où $T_n \in \mathcal{T}$ sont fournies par le tableau 2.2.*

Démonstration: Pour abrégé, posons $\mu_n = \mu(C \cap T_n)$. Les triangles T_n dont l'intérieur ne rencontre pas l'enveloppe convexe de C sont ceux tels que $n \notin D$. Pour

n	0	1	2	3	5	6	7	10	11	12	15	28	29	33	34
μ_n	$\frac{1}{210}$	$\frac{2}{105}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{105}$	$\frac{1}{420}$	$\frac{1}{420}$	$\frac{1}{420}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{2}{105}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{1}{105}$

Tableau 2.2: Distribution de la mesure de C dans les triangles $T_n, n \in D$.

ces triangles, $\mu(C \cap T_n) = 0$. Puis, nous recherchons des relations linéaires entre les autres valeurs μ_n . Reprenons les deux similitudes S_1, S_2 qui envoient l'hypothénuse de T_0 sur l'un ou l'autre de ses côtés adjacents à l'angle droit. Posons $C' = S_1(C), C'' = S_2(C)$. La relation (2.1) est que $C = C' \cup C''$.

Nous invitons le lecteur de poursuivre la discussion en ayant la figure 2.2 sous la main pour des consultations successives. Partons du nombre $a = \mu(C \cap (T_2 \cup T_3))$. Puisque $\mu(S_1(C \cap (T_2 \cup T_3))) = a/2$ et que $S_1(C \cap (T_2 \cup T_3)) = C' \cap T_{29} = C \cap T_{29}$, alors $\mu_{29} = a/2$.

Regardons l'effet de S_1 sur d'autres morceaux de C . Par exemple, $C' \cap T_{28} = S_1(C \cap (T_{29} \cup T_{30}))$. D'où $\mu(C' \cap T_{28}) = \mu(C \cap (T_{29} \cup T_{30}))/2$. Mais $C'' \cap T_{29} = \emptyset, \mu(C \cap T_{30}) = 0$; d'où $\mu_{28} = a/4$. De même, en regardant l'effet de S_1 sur $C \cap (T_{28} \cup T_{31})$, on obtient que $\mu_{34} = a/8$. L'action de S_1 sur $C \cap (T_{34} \cup T_{35}), C \cap (T_{33} \cup T_{32})$ entraîne que $\mu_{33} = a/16, \mu_7 = a/32$ respectivement.

Regardons l'action de S_1 sur $C \cap (T_7 \cup T_4)$. On a que $\mu(C' \cap T_6) = \mu(S_1(C \cap (T_7 \cup T_4))) = \mu(C \cap T_7)/2$. D'autre part, $\mu(C \cap T_6) = \mu((C' \cup C'') \cap T_6) = 2\mu(C' \cap T_6)$ (parce que $\mu(C' \cap C'') = 0$, que T_6 est symétrique par rapport $x = 1/2$ et que C', C'' sont en symétrie par rapport à la même verticale $x = 1/2$). D'où $\mu_6 = a/32$.

Calculons $\mu_0 = \mu(C \cap T_0) = \mu(C' \cap T_0) + \mu(C'' \cap T_0)$. Or $\mu(C' \cap T_0) = \mu(C \cap (T_5 \cup T_6))/2$ puisque S_1 envoie C sur C' et $T_5 \cup T_6$ sur T_0 . De même $\mu(C'' \cap T_0) = \mu(C \cap (T_6 \cup T_7))/2$ puisque S_2 envoie C sur C'' et $T_6 \cup T_7$ sur T_0 . De là, $\mu_0 = \mu_5/2 + \mu_6 + \mu_7/2 = a/16$ (par symétrie $\mu_5 = \mu_7$).

On calcule μ_2 de la même manière. $\mu_2 = \mu(C' \cap T_2) + \mu(C'' \cap T_2)$. Or $\mu(C' \cap T_2) = \mu(C \cap (T_{15} \cup T_{12}))/2$ et $\mu(C'' \cap T_2) = \mu(C \cap (T_{29} \cup T_{28}))/2$. De là, $\mu_2 = \mu_{15}/2 + \mu_{12}/2 + \mu_{29}/2 + \mu_{28}/2 = 3a/4$ (par symétrie $\mu_{15} = \mu_{29}, \mu_{12} = \mu_{28}$).

On peut maintenant isoler la valeur de $\mu_3 = a - \mu_2 = a/4$. Toutes les autres valeurs de μ_n s'obtiennent directement par symétrie relativement à l'axe $x = 1/2$. En additionnant tous les nombres μ_n , on obtient $\sum_n \mu_n = 105a/32$. Or la mesure de C est précisément cette somme. Puisque $\mu(C) = 1/4$ (par le théorème 2.1), la valeur de a est $8/105$, ce qui permet de compléter le tableau des valeurs μ_n . \diamond

Il est possible d'observer la distribution de la mesure de la courbe de Lévy sur des triangles plus petits. La triangulation que nous avons considérée jusqu'ici sera dite d'ordre 1. La triangulation d'ordre 2 du plan se fait en partageant chaque triangle d'ordre 1 en deux triangles. Soit $T_n = \triangle ABC$ un des triangles d'ordre 1 avec A comme sommet de l'angle droit et où A, B, C se suivent dans le sens positif, si D est le point milieu de BC , le partage de T_n est constitué des triangles $T'_n = \triangle DAB$ et $T''_n = \triangle DCA$. La triangulation d'ordre 2 est formée de tous ces triangles T'_n, T''_n .

La courbe de Lévy C est composée de deux courbes semblables $C' = S_1(C)$ et $C'' = S_2(C)$. Du lemme 4.1, on sait que $C' \cap C''$ est de mesure nulle. Donc, la distribution de la mesure de C sur les triangles d'ordre 2 peut s'obtenir en additionnant les deux distributions de la mesure de C' et de C'' sur les triangles d'ordre 2. Si $\mu'_n = \mu(C \cap T'_n)$, $\mu''_n = \mu(C \cap T''_n)$, on remarque que $\mu'_n = \mu(S_1(C) \cap T'_n) + \mu(S_2(C) \cap T'_n)$, $\mu''_n = \mu(S_1(C) \cap T''_n) + \mu(S_2(C) \cap T''_n)$. D'où

$$\left. \begin{aligned} \mu'_n &= \mu(C \cap S_1^{-1}T'_n)/2 + \mu(C \cap S_2^{-1}T'_n)/2 \\ \mu''_n &= \mu(C \cap S_1^{-1}T''_n)/2 + \mu(C \cap S_2^{-1}T''_n)/2. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Or chacun des triangles $S_1^{-1}T'_n, S_2^{-1}T'_n, S_1^{-1}T''_n, S_2^{-1}T''_n$ fait partie de la triangulation d'ordre 1. Avec le théorème 2.2, on peut calculer les nombres μ'_n, μ''_n .

Cependant ce calcul est un peu fastidieux. Regardons comment on peut abrégé les calculs. Puisque $T'_n \subset T_n$, alors $\mu'_n = 0$ si $\mu_n = 0$; de façon semblable, $\mu''_n = 0$ si $\mu_n = 0$. Il suffit donc de déterminer les quantités μ'_n, μ''_n pour les 15 valeurs n de D . Quelques-unes de ces 30 quantités sont nulles. En effet, tout triangle disjoint de l'intérieur de l'enveloppe convexe de C rencontre C selon un ensemble de mesure nulle; de ce fait, toutes les quantités suivantes sont nulles : $\mu'_5, \mu''_7, \mu''_{11}, \mu'_{10}, \mu''_{12}, \mu'_{28}, \mu'_{33}, \mu''_{34}$.

Vu que T'_n, T''_n font une partition de T_n , alors $\mu''_n = \mu_n - \mu'_n$. Il suffit de se limiter au calcul des μ_n . Déjà on peut dire que $\mu'_5 = 0, \mu'_7 = \mu_7 = 1/420, \mu'_{11} = \mu_{11} = 1/210, \mu'_{10} = 0, \mu'_{12} = \mu_{12} = 2/105, \mu'_{28} = 0, \mu'_{33} = 0, \mu'_{34} = \mu_{34} = 1/105$.

On peut enfin abrégier les calculs en tenant compte de la symétrie d'axe $x = 1/2$, c'est ainsi que $\mu'_n = \mu_n/2$ pour $n = 0, 2, 6$. Les seules autres inconnues à trouver sont $\mu_1 = \mu_3$ et $\mu_{15} = \mu_{29}$. En posant $n = 1$ et 15 dans l'équation 2.8, on obtient que $\mu'_1 = \mu_{11}/2 + \mu_0/2 = 1/210, \mu'_{15} = \mu_9/2 + \mu_2/2 = 1/35$.

Dans la figure 2.6, on représente la distribution de mesure d'ordre 2 de la courbe de Lévy.

En principe, il n'y a pas de difficulté à déterminer la distribution de la mesure de la courbe de Lévy sur des triangulations de plus en plus fines. Si $T = \triangle ABC$ est un triangle rectangle du k -ième ordre avec un angle droit en A et orienté positivement, si $D = (B + C)/2$, alors le partage de T est constitué des triangles $T' = \triangle DAB$ et $T'' = \triangle DCA$. La triangulation d'ordre $k + 1$ est formée de tous ces triangles T', T'' . La relation 2.8 permet de calculer la mesure de l'intersection de la courbe de Lévy avec chaque triangle de la triangulation d'ordre $k + 1$ en fonction des calculs faits à partir de la triangulation d'ordre k .

2.6 Image du pavage

Nous entreprenons la représentation graphique du pavage engendré par la courbe de Lévy, cette tâche n'est pas complètement évidente. L'objet mathématique à visualiser est le recouvrement $\{(i, j) + C_k : i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, 2, 3\}$. Vu la complexité de la situation, nous nous orientons vers une figure en couleur. Nous limitons quand même le choix des couleurs, nous procédons en quadrichromie. Nous tracerons donc en noir la courbe de Lévy et ses translations selon un vecteur à coordonnées entières. Nous tracerons les courbes $(i, j) + C_k$ en bleu si $k = 1$, en rouge si $k = 2$, en vert si $k = 3$. Vu le caractère périodique de l'image, il suffirait d'observer l'image dans la fenêtre fournie par le carré unité $[0, 1]^2$. Cependant, pour une meilleure perception du pavage, nous prendrons comme fenêtre un carré trois fois plus grand : $[-1, 2]^2$.

Comment allons-nous tracer la courbe de Lévy et toutes les courbes de même forme $(i, j) + C_k$? On aurait pu tracer la courbe de Lévy par approximation selon la ligne polygonale d'ordre n constituée de 2^n segments. Malgré tout, nous préférons tracer la courbe de Lévy par une autre approximation. Nous fixons la valeur n de l'ordre d'approximation. Si $P_0P_1 \dots P_{2^n}$ est la ligne polygonale d'ordre n pour approcher la courbe de Lévy, alors on approche la courbe de Lévy par une chaîne de 2^{n-1} triangles, le m -ième triangle étant $P_{2^{m-2}}P_{2^{m-1}}P_{2^m}$, $m = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$. Le grand avantage de cette approximation est le suivant. Si chaque courbe $(i, j) + C_k$ est approchée par une chaîne analogue de 2^{n-1} triangles, alors la totalité des triangles ainsi obtenus produit précisément un pavage du plan. Ce résultat peut s'obtenir par induction sur n .

Pour tracer la figure dans son ensemble, il faut donc tracer les courbes $(i, j) + C_k$ dans un certain ordre. Pour tenir compte de la fenêtre d'observation et de l'étendue de chacune des courbes, il faut faire varier i et j de -2 à 3.

Une fois ces objectifs posés, nous avons écrit un programme POSTSCRIPT pour réaliser une image du pavage créé par la courbe de Lévy. La figure 2.7 a été conçue d'après ce programme en prenant pour ordre d'approximation $n = 12$. Pour fin de validation, nous donnons les 4 premières approximations du pavage à la figure 2.8.

Commentaires: La figure du pavage est complexe. Cependant, dans sa réalisation matérielle, elle apporte certaines déceptions. Les courbes de Lévy sont parfois estompées, surtout les courbes en noir. Aurait-il mieux valu faire appel à plus de couleurs? Ou est-ce que ceci dépend du fait que les tracés en vert ont une priorité dans la figure parce que dans le programme exécuté, les tracés se font successivement en noir, en bleu, en rouge, en vert. Ou est-ce que ce résultat dépend des procédures graphiques jumelées au langage POSTSCRIPT? À l'égard de cette figure, beaucoup d'autres questions pourraient être envisagées. Nous espérons revenir à ces questions de graphisme dans un autre travail.

2.7 Conclusion

Dans le souci de donner une démonstration plus transparente du résultat de Lévy à l'effet que la mesure superficielle des points couverts par la courbe de Lévy vaut $1/4$, nous avons été amenés à explorer un pavage du plan avec des tuiles dont la forme est justement celle de la courbe de Lévy. Ce pavage a été sans doute reconnu par Lévy lui-même, du moins on peut le soupçonner à la lecture de l'introduction de son remarquable article de 1938 [24]. Nous citons ses paroles :

« Elle (la courbe C) n'en a pas moins la propriété très curieuse que, si l'on pouvait la matérialiser, on pourrait paver le plan, c'est-à-dire le couvrir par des plaques identiques entre elles et ayant la forme de l'aire couverte par cette courbe, sans que deux de ces plaques se recouvrent, et sans qu'il y ait de vides (plus exactement il y a des points qui seraient vides, ou au contraire couverts plusieurs fois, suivant que les plaques représenteraient seulement pour chaque courbe l'intérieur des aires qu'elle recouvre, ou la courbe complète; mais ces points constituent un ensemble de mesure nulle). »

Cependant, on ne retrouve pas d'autres mentions de ce pavage ailleurs dans son article. Le pavage est remarquable à plusieurs égards, d'abord parce que les tuiles sont très irrégulières, ce sont des figures fractales. En un sens, Lévy a été un précurseur. En 1970, Davis et Knuth [5] ont effectué un pavage du plan avec des tuiles qui ont pour forme la courbe du dragon. Husimi [20] lors d'un congrès à Rome en 1985 sur l'artiste Escher a indiqué comment la courbe du dragon permet aussi d'autres pavages du plan à la Escher. Ce qui distingue le pavage avec la courbe de Lévy, c'est que la courbe de Lévy n'est pas simplement connexe alors que la courbe du dragon l'est. Enfin, on peut dire que le pavage avec la courbe de Lévy pose un difficile défi pour sa représentation graphique.

En bien des façons, la courbe de Lévy contredit nos habitudes de pensée, mais c'est souvent ce qui arrive en géométrie fractale. La courbe de Lévy est un attracteur engendré par deux similitudes de ratio $1/\sqrt{2}$ avec une dimension de similitude égale à 2, et en effet, on peut aussi vérifier qu'elle satisfait la condition pour l'ensemble ouvert. Mais curieusement sa mesure de Lebesgue est positive, ce qui fait que sa

dimension fractale est aussi de 2.

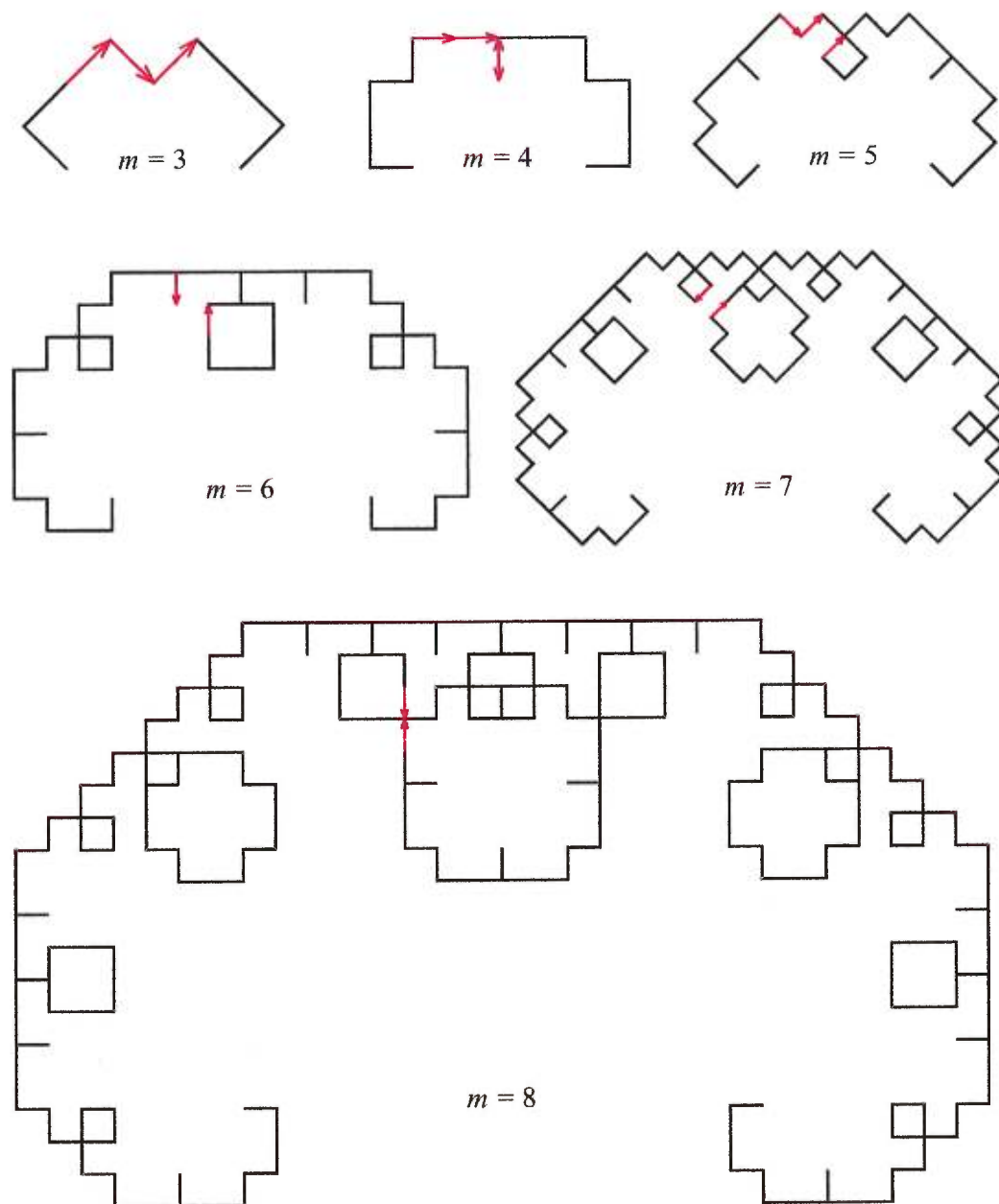


Figure 2.4: Lignes polygonales approchant la courbe de Lévy et indication par des flèches rouges des segments qui permettent de vérifier que $\mu(C \cap C_n) = 0$.

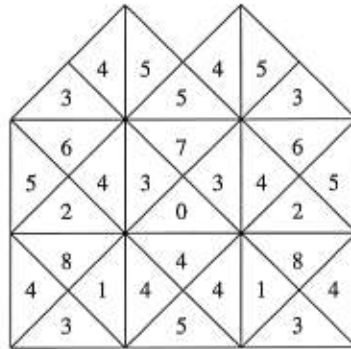


Figure 2.5: Évolution des tuiles numérotées par ordre de leur apparition.

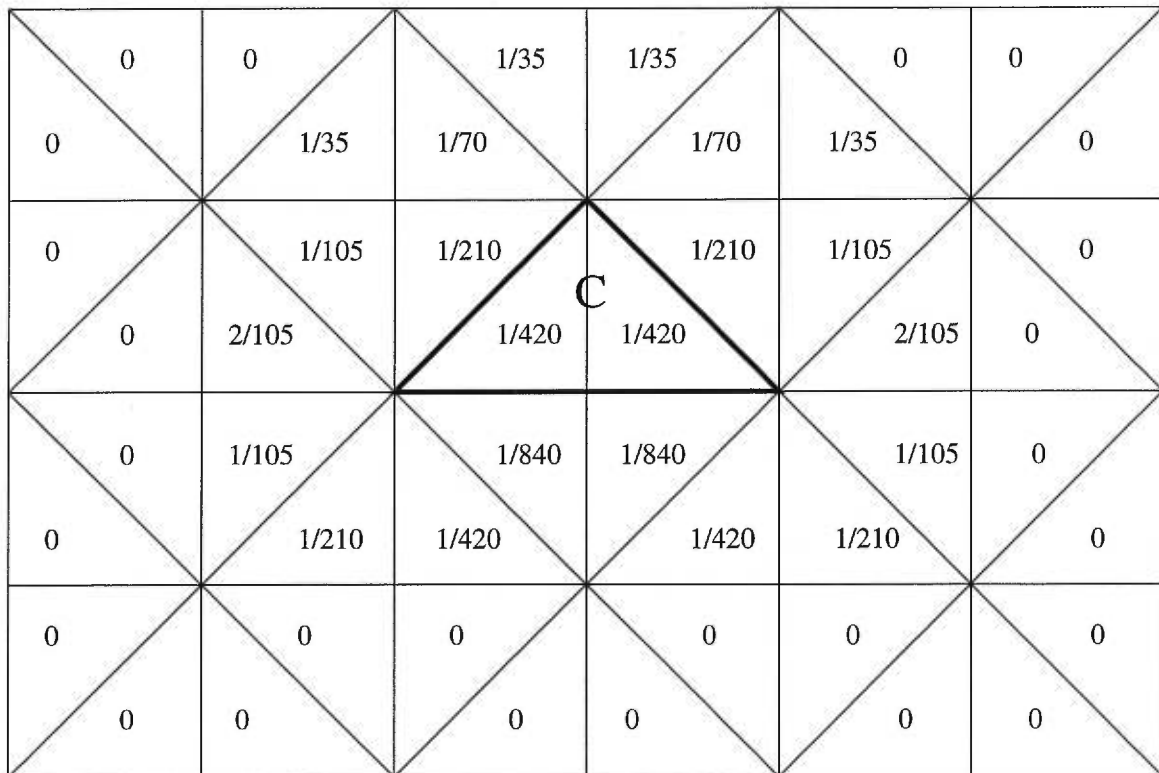


Figure 2.6: La distribution de la mesure de la courbe de Lévy sur la triangulation d'ordre 2. Le triangle T_0 est tracé en gras.

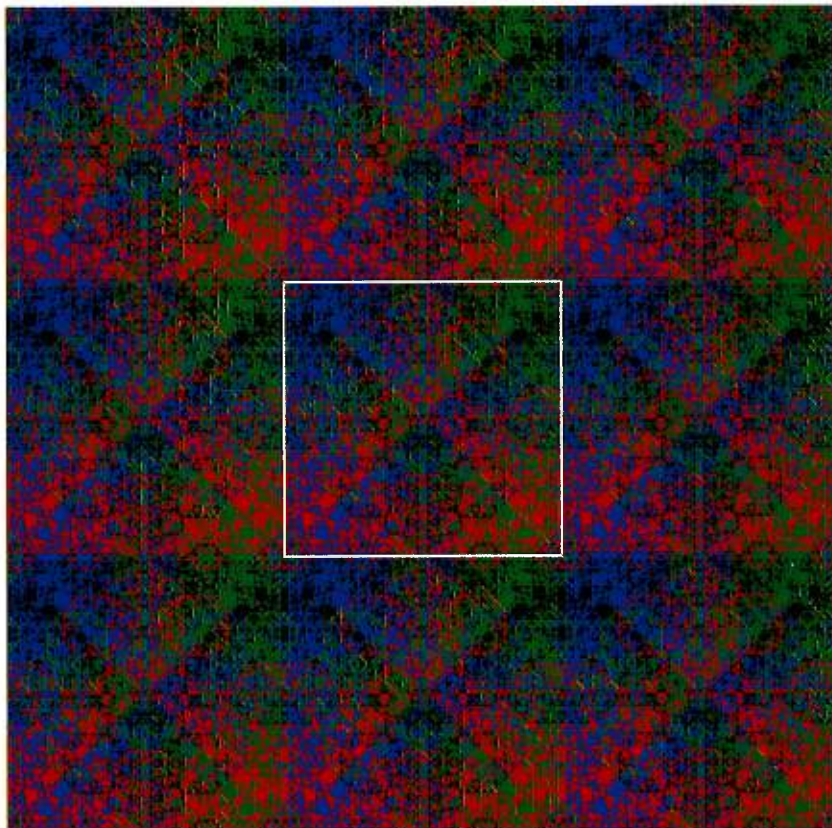


Figure 2.7: Tracé du pavage en couleur; la courbe de Lévy et ses translatées par des vecteurs à coordonnées entières sont en noir, la courbe C_1 et ses translatées en bleu, la courbe C_2 et ses translatées en rouge, la courbe C_3 et ses translatées en vert. Le carré unité est désigné par un trait blanc. L'ordre d'approximation est de 12.

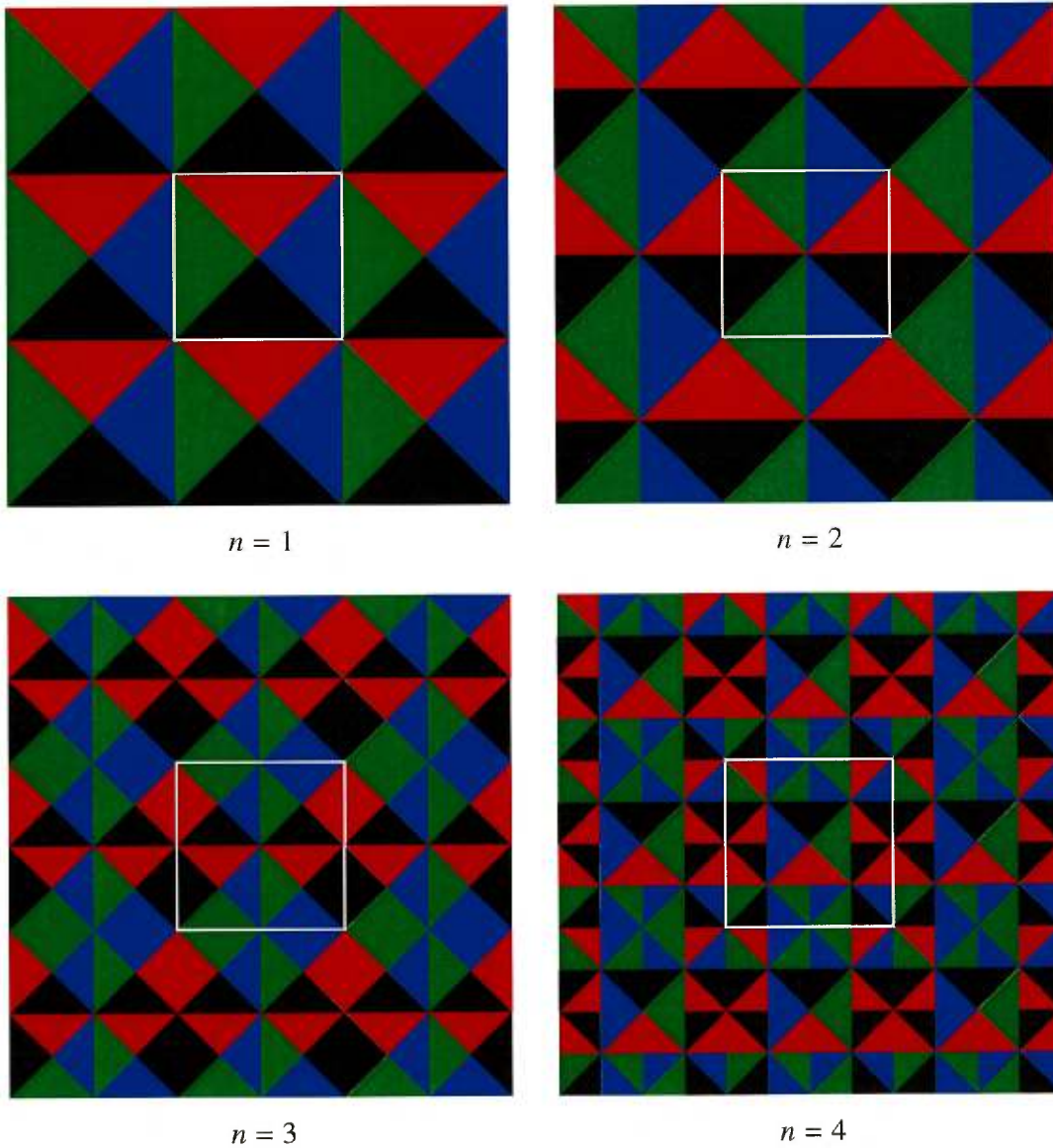


Figure 2.8: Les quatre premières approximations du pavage.

Chapitre 3

Le choix de partitions dans le calcul de la dimension fractale

La dimension fractale, qui est un des indices les plus utiles dans le traitement d'un ensemble géométrique complexe, reflète bien les relations internes de tous ses points. Elle qualifie la façon dont un ensemble se distribue sur une famille de partitions de plus en plus fines. La méthode la plus efficace dans son calcul est l'emploi de pavés carrés de plus en plus petits. Dans ce cas, on n'a qu'à compter le nombre de pavés de même taille rencontrant l'objet. De tels résultats de calcul de dimension fractale se trouvent dans la plupart de livres de géométrie fractale comme ceux écrits par Barnsley [1, p. 176, Theorem 2], Falconer [15, p. 41], Tricot [29, p. 130]. Une question naturelle est quelle sorte de famille de partitions permet le calcul de la dimension fractale. D'autre part, un grand nombre de fractales peuvent aussi donner lieu à ce genre de décomposition de l'espace par des pavés de plus en plus petits en utilisant une partie ou tout un pavé à chaque génération. Par exemple, nous avons vu que la courbe de la forêt (voir la figure 1.1) se construit sur les bords des pavés carrés de plus en plus petits. Pour cette raison, une caractérisation plus générale de ce genre de famille de pavés est nécessaire. Il serait bon d'obtenir des résultats plus généraux que ceux rencontrés au chapitre 1, ceci dans l'intérêt des mathématiques et des sciences appliquées. Car il est fréquent de rencontrer des fractales où la loi de similitude interne n'est plus strictement respectée. Dans les sections suivantes, nous développons des méthodes générales de calcul de dimensions fractales et nous les exerçons sur des exemples de fractales du type forêt.

3.1 Le théorème général pour le calcul de la dimension fractale

Définition 3.1 Soit D un ensemble ouvert de \mathbb{R}^m , une partition finie de type mosaïque de D est une collection finie de sous-ensembles ouverts simplement connexes $\{D_i\}_{i=1}^n$, $D_i \subset D$, $i = 1, 2, \dots, n$, avec $\bar{D} = \bigcup_{i=1}^n \bar{D}_i$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^m}(\bar{D}_i \cap \bar{D}_j) = 0$ où $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^m}$ est la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^m .

Dans la suite, on suppose que D est un ensemble ouvert simplement connexe de \mathbb{R}^m et on utilise le symbole ∂ pour représenter le bord d'un ensemble.

Définition 3.2 (Mosaïque et maillage) Si $\{D_i\}_{i=1}^n$ est une partition finie de type mosaïque de D , on appelle $\mathcal{M}_1 = \{D_i\}_{i=1}^n$ la mosaïque de première génération, et $\mathcal{R}_1 = \bigcup_{i=1}^n \partial D_i$ le maillage de première génération.

Si pour chaque D_i , il existe une partition finie du type mosaïque $\{D_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$, on appelle $\mathcal{M}_2 = \{D_{ij}\}_{i=1, \dots, n; j=1 \dots n_i}$ la mosaïque de deuxième génération, et $\mathcal{R}_2 = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{n_i} \partial D_{ij}$ le maillage de deuxième génération. Il est évident que $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$.

.....

Si pour chaque $D_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$, $\{D_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j}\}_{j=1}^{n_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}}$ est une partition finie du type mosaïque, on appelle $\mathcal{M}_n = \{D_{i_1 \dots i_{n-1} j}\}_{i_1=1 \dots n; i_2=1 \dots n_{i_1}; \dots; j=1 \dots n_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}}$ la mosaïque de n -ième génération et $\mathcal{R}_n = \bigcup_{i_1=1}^n \bigcup_{i_2=1}^{n_{i_1}} \dots \bigcup_{j=1}^{n_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}} \partial D_{i_1 \dots i_{n-1} j}$ le maillage de n -ième génération.

On voit qu'il existe une relation d'ordre d'inclusion entre \mathcal{R}_i : $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \subset \dots \subset \mathcal{R}_n \dots$.

Dans ce cas, on peut donc définir la famille de partitions $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^\infty$ comme une mosaïque de D , $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^\infty$ un maillage de D , et on appelle $D_{i_1 i_2 \dots i_n}$ un bloc de la n -ième génération.

Définition 3.3 Soit D un ensemble ouvert simplement connexe dans \mathbb{R}^m muni de la métrique euclidienne, on note par $d_e(D)$ le plus petit diamètre des boules contenant D , et par $d_i(D)$ le plus grand diamètre des boules inscrites à l'intérieur de D .

Si on décompose un ensemble ouvert D dans \mathbb{R}^m comme ceux-ci décrits en-haut, à chaque prochaine génération, on espère obtenir des mosaïques de plus en plus fines, d'où la définition suivante:

Définition 3.4 Soient \mathcal{M} une mosaïque. On dit qu'une mosaïque est ρ -uniforme si les conditions suivantes sont satisfaites:

(1) Il existe une constante c_1 telle que

$$d_e(D_{i_1 i_2 \dots i_n})/d_i(D_{i_1 i_2 \dots i_n}) < c_1, \text{ pour tout } i_1, i_2, \dots, i_n, n \quad (3.1)$$

(2) Il existe c_2, c_3 tels que

$$c_2 \rho^n < d_i(D_{i_1 i_2 \dots i_n}) < c_3 \rho^n, \text{ pour tout } i_1, i_2, \dots, i_n, n \quad (3.2)$$

Théorème 3.1 Soit A une partie de \mathbb{R}^m , on suppose que D est un ouvert de \mathbb{R}^m contenant A et que \mathcal{M} est une mosaïque ρ -uniforme associée à D . À chaque n , on utilise $\mathcal{N}_n(A)$ pour désigner le nombre de $D_{i_1 i_2 \dots i_n}$ rencontrant A . Si

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log(\mathcal{N}_n(A))}{-\log(\rho^n)} \right\}$$

existe, la dimension fractale de A est exactement d .

Démonstration: On montre d'abord que, pour chaque $\epsilon > 0$, la boule $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^m : \text{dist}(y, x) < \epsilon\}$ est recouverte par un nombre fini de blocs fermés d'une certaine génération, et ce nombre est indépendant du choix de x et ϵ .

Étant donné ϵ , il existe n pour que $c_3 \rho^{n+1} < \epsilon < c_3 \rho^n$. Par la définition 3.4, on a

$$d_e(D_{i_1 i_2 \dots i_n}) < c_1 d_i(D_{i_1 i_2 \dots i_n}) < c_1 c_3 \rho^n \quad (3.3)$$

et le volume de $D_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq K_m (c_2 \rho^n / 2)^m$ où K_m est la mesure de Lebesgue de la boule unité de \mathbb{R}^m .

Puisque tous les blocs de la n -ième génération rencontrant la boule $B(x, \epsilon)$ doivent être contenus dans la boule $B(x, \epsilon + c_1 c_3 \rho^n)$, on a que le nombre de blocs de la n -ième génération rencontrant $B(x, \epsilon)$ est majoré par

$$\frac{K_m(\epsilon + c_1 c_3 \rho^n)^m}{K_m(c_2 \rho^n / 2)^m} \leq \frac{2^m K_m(c_3 \rho^n + c_1 c_3 \rho^n)^m}{K_m(c_2 \rho^n)^m} = 2^m (1 + c_1)^m c_2^{-m} c_3^m.$$

Alors, si $\mathcal{N}(\epsilon)$ représente le nombre minimal de boules de rayon ϵ pour recouvrir A , on a

$$\mathcal{N}_n(A) \leq 2^m (1 + c_1)^m c_2^{-m} c_3^m \mathcal{N}(\epsilon)$$

n est, en effet, une fonction de ϵ .

Dans l'autre sens, chaque $D_{i_1 i_2 \dots i_n}$ peut toujours être recouvert par une boule de rayon $c_1 c_3 \rho^n / 2$ en raison de (3.3), on a aussi

$$\mathcal{N}(c_1 c_3 \rho^n / 2) \leq \mathcal{N}_n(A)$$

Enfin on a les inégalités

$$\mathcal{N}(c_1 \rho^{-1} \epsilon / 2) \leq \mathcal{N}(c_1 c_3 \rho^n / 2) \leq \mathcal{N}_n(A) \leq 2^m (1 + c_1)^m c_2^{-m} c_3^m \mathcal{N}(\epsilon)$$

Si $\epsilon \rightarrow 0$, on a $n \rightarrow +\infty$, on peut écrire

$$\frac{\log \mathcal{N}(c_1 \rho^{-1} \epsilon / 2)}{\log \frac{c_3}{\epsilon}} \leq \frac{\log \mathcal{N}_n(A)}{-\log \rho^n} \leq \frac{\log [2^m (1 + c_1)^m c_2^{-m} c_3^m \mathcal{N}(\epsilon)]}{\log \frac{c_3 \rho}{\epsilon}}$$

Donc, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mathcal{N}_n(A)}{-\log \rho^n}$ existe, ça équivaut à dire que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}(\epsilon)}{-\log \epsilon}$ existe et c'est la même valeur que la dimension fractale de A . \diamond

Dans certains cas, le nombre des $\overline{D}_{i_1 i_2 \dots i_n}$ rencontrant A est plus facile à manipuler, et on a le théorème jumelé suivant:

Théorème 3.2 *Dans le théorème 3.1, si on note $\mathcal{N}'_n(A)$ pour désigner le nombre des $\overline{D}_{i_1 i_2 \dots i_n}$ rencontrant A , et si*

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log(\mathcal{N}'_n(A))}{-\log(\rho^n)} \right\}$$

existe, la dimension fractale de A est exactement d .

3.2 Applications

Dans cette section, on utilise le théorème 3.1 pour traiter de fractales tantôt anciennes, tantôt nouvelles.

Exemple 3.1 *L'ensemble standard de Cantor*

L'ensemble standard de Cantor est issu de l'intervalle unité $E_0 = [0, 1]$. Dans la première génération, les deux segments fermés $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$ sont gardés, on note leur union E_1 ; dans la deuxième génération, on garde $[0, \frac{1}{9}]$ et $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ de $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{5}{9}]$ et $[\frac{8}{9}, 1]$ de $[\frac{2}{3}, 1]$, leur union est notée par E_2 ; \dots ; dans la n -ième génération, on a alors

$$E_n = \bigcup_{k_i \in \{0,2\}} \left[\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{3^i}, \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} \right].$$

Puisque $E_n \supset E_{n+1}$, l'ensemble standard de Cantor est donc défini par $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

La partition finie du type mosaïque provenant naturellement de la construction est

$$\text{donc } \mathcal{M} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n \text{ où } \mathcal{M}_n = \bigcup_{k_i \in \{0,1,2\}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{3^i}, \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} \right) \right\}.$$

Il est clair que cette mosaïque est uniforme avec $\rho = 1/3$.

Il est évident que $\mathcal{N}_n(E) = 2^n$. Par le théorème 3.1, la dimension fractale de l'ensemble standard de Cantor est

$$\dim E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mathcal{N}_n(E)}{-\log(1/3)^n} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Dans l'exemple suivant, on construit une fractale en imitant la construction de l'ensemble standard de Cantor mais comme on va voir, la similitude scalaire n'existe plus.

Exemple 3.2 *L'ensemble général de Cantor*

Dans la suite, sauf indication contraire, il sera entendu qu'un segment est un intervalle fermé.

La construction de l'ensemble général de Cantor est similaire à celle de l'ensemble standard de Cantor, mais d'une génération à l'autre, la seule procédure semblable est que, à chaque génération, un segment parent ne produit, dans lui-même, que deux et seulement deux segments descendants disjoints, dont l'un partage l'extrémité gauche avec le parent et l'autre l'extrémité droite.

On choisit $E^{(0)} = E_0$ un intervalle fermé comme l'ensemble initial. La génération initiale est donc $\mathcal{F}_0 = \{E_0\}$.

Dans la première génération E_0 produit deux segments E_{00} et E_{01} comme ce que l'on décrit en haut, où $E_{00}, E_{01} \subset E_0$, $E_{00} \cap E_{01} = \emptyset$, on a $\mathcal{F}_1 = \{E_{00}, E_{01}\}$ et $E^{(1)} = E_{00} \cup E_{01}$.

On suppose que la $(n - 1)$ -ième génération \mathcal{F}_{n-1} est construite. Chaque segment $E_{0i_1 \dots i_{n-1}}$ produit deux segments de n -ième génération $E_{0i_1 \dots i_{n-1}0}$ et $E_{0i_1 \dots i_{n-1}1}$ comme ce que l'on a décrit plus haut, où $E_{0i_1 \dots i_{n-1}0}, E_{0i_1 \dots i_{n-1}1} \subset E_{0i_1 \dots i_{n-1}}$, $E_{0i_1 \dots i_{n-1}0} \cap E_{0i_1 \dots i_{n-1}1} = \emptyset$, et on a donc $\mathcal{F}_n = \{E_{0i_1 \dots i_n}\}_{i_1 \dots i_n \in \{0,1\}^n}$ et $E^{(n)} = \bigcup_{i_1 \dots i_n \in \{0,1\}^n} E_{0i_1 \dots i_n}$.

Alors, on peut définir $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$.

Si, à partir d'un certain n_0 , il existe trois constantes $0 < \rho < 1, 0 < a_1 < a_2$ telles que $a_1 < |E_{0i_1 \dots i_n}| / \rho^n < a_2, \forall i_1 \dots i_n \in \{0,1\}^n, n > n_0$, on dit que E est un ensemble général de Cantor.

• **La construction de la mosaïque uniforme:**

Nous présentons deux lemmes, c'est le second qui servira la construction d'une mosaïque uniforme.

Lemme 3.3 Soient $a < 0, b > 0$, on suppose que $\{x_n\}_{n \geq 0}$ est une suite définie par récurrence:

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + a & \text{si } x_n > 0 \\ x_n + b & \text{si } x_n \leq 0 \end{cases}$$

alors

$$\min(a, x_0) \leq x_n \leq \max(b, x_0).$$

La démonstration se fait très simplement par induction mathématique.

Lemme 3.4 Soient $0 < a < 1, b > 1, x_0 > 0$, on suppose que $\{x_n\}_{n \geq 0}$ est une suite définie par récurrence:

$$x_{n+1} = \begin{cases} ax_n & \text{si } x_n > 1 \\ bx_n & \text{si } x_n \leq 1 \end{cases}$$

alors

$$\min(a, x_0) \leq x_n \leq \max(b, x_0).$$

La démonstration est essentiellement la même, on passe du groupe additif des réels au groupe multiplicatif des nombres réels positifs. La figure 3.1 donne aussi une vérification claire et géométrique du lemme 3.4.

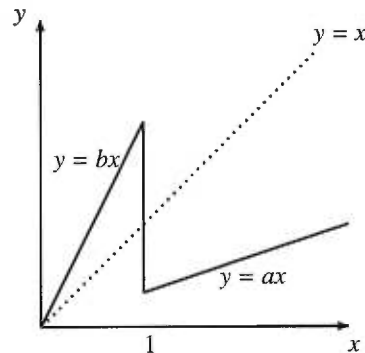


Figure 3.1: Graphe de la fonction itérante.

Supposons que nous soyons en présence d'un ensemble général de Cantor pour lequel il existe deux constantes positives a_1, a_2 , telles que $(\forall n) \forall i_1 \dots i_n \in \{0, 1\}^n, a_1 < |E_{0i_1 \dots i_n}| / \rho^n < a_2$. Nous allons montrer que $\dim(E) = -\log 2 / \log \rho$. Il faut distinguer deux cas: $\rho = 1/2$ et $\rho < 1/2$. Si $\rho = 1/2$, il est relativement facile de vérifier que la mesure de E est positive et qu'ainsi sa dimension fractale vaut 1. Nous supposons désormais que $\rho < 1/2$. Nous construisons une mosaïque ρ -uniforme dont une partie des blocs reprendra les intervalles responsables de la construction de l'ensemble de Cantor. La mosaïque de génération 1 est formée de trois intervalles, E_{00}, E_{01} et $E_0 - (E_{00} \cup E_{01})$. Nous dirons que les deux premiers intervalles sont noirs et que le troisième intervalle est blanc. On construit la mosaïque de génération $n + 1$ à partir

de la mosaïque de génération n , des intervalles blancs ou noirs. D'abord on remplace chaque intervalle noir de la n -ième génération, $E_{0i_1\dots i_n}$, par deux intervalles noirs et un intervalle blanc: $E_{0i_1\dots i_n 0}$, $E_{0i_1\dots i_n 1}$ et $E_0 - (E_{0i_1\dots i_n 0} \cup E_{0i_1\dots i_n 1})$. Soit maintenant I un intervalle blanc de la génération n , si la longueur de I ne dépasse pas ρ^n , on considérera que I est aussi un intervalle blanc de la $(n+1)$ -ième génération; sinon, on partage I en m sous-intervalles de même longueur et chacun de ces sous-intervalles sera considéré comme un intervalle blanc de la $(n+1)$ -ième génération. Le nombre m que l'on retient en tout temps est le plus petit entier supérieur ou égal à $1/\rho$.

Il est maintenant possible de trouver deux nombres a'_1, a'_2 tels que pour tout n , un intervalle de la mosaïque de la génération n a une longueur comprise entre $a'_1\rho^n$ et $a'_2\rho^n$. Soit I un intervalle de la mosaïque de génération n , si I est un intervalle noir, alors, par hypothèse $a_1\rho^n < |I| < a_2\rho^n$. Supposons maintenant que I est un intervalle blanc, considérons les ancêtres de I : la suite I_1, I_2, \dots, I_{n-1} telle que I_k est un intervalle de la mosaïque de génération k et $I \subset I_{n-1} \subset \dots \subset I_2 \subset I_1$. Désignons par I_r le plus lointain ancêtre blanc de I , c'est-à-dire I_r est blanc et I_{r-1} est noir. Nous posons $x_k = |I_{r+k}|/\rho^{r+k}$, $k = 0, 1, \dots, n-r$. On fait appel au lemme 3.4 avec $a = 1/(m\rho)$, $b = 1/\rho$. Or il est possible de trouver un nombre positif ϵ , indépendant de r tel que $\epsilon \leq x_0 \leq a_2$. D'où $\min(1/(m\rho), \epsilon)\rho^n \leq |I| \leq \max(1/\rho, a_2)\rho^n$. Cette inégalité permet de justifier la ρ -uniformité de la mosaïque associée à la construction de l'ensemble général de Cantor E .

Il est évident que $\mathcal{N}_n(E) = 2^n$. Du théorème 3.1, on obtient directement que $\dim(E) = -\log 2 / \log \rho$.

Exemple 3.3 *Le tamis de Sierpinski*

Le tamis de Sierpinski est la fractale du plan la plus connue et qui peut se produire de la manière suivante.

Étant donné un triangle équilatéral A_0 dont chaque côté est de longueur 1. À la première étape, on enlève le triangle équilatéral ouvert dont les trois sommets sont les milieux des trois côtés de A_0 et on obtient une figure A_1 composée de trois petits triangles fermés équilatéraux de taille $1/2$. À la deuxième étape, on modifie les trois



Figure 3.2: La construction du tamis de Sierpinski

petits triangles de A_1 de la même manière et on obtient une figure A_2 composée de neuf triangles fermés équilatéraux encore plus petits de taille $(1/2)^2$. On procède ainsi jusqu'à l'infini. Pour tout n , A_n est l'union de 3^n triangles fermés équilatéraux

de taille $(1/2)^n$. L'ensemble limite $A = \bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i$ est appelé le tamis de Sierpinski.

Une mosaïque uniforme peut se construire sur A_0 . On pose $D = A_0$ et on le décompose par des triangles équilatéraux identiques. La première génération \mathcal{M}_1 contient donc quatre triangles ouverts équilatéraux dont l'un est le triangle ouvert enlevé à la première étape de génération et les trois autres sont justement les trois triangles qui composent A_1 . \mathcal{M}_2 se génère en décomposant les triangles de \mathcal{M}_1 de la même manière, il contient donc 4^2 triangles équilatéraux ouverts dont 3^2 triangles sont les triangles qui composent A_2 . Et ainsi de suite. Donc, \mathcal{M}_n contient 4^n triangles ouverts équilatéraux dont les 3^n triangles qui composent A_n .

Il est évident que $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une mosaïque $1/2$ -uniforme en choisissant $c_1 > 2$, $0 < c_2 < \sqrt{3}/6 < c_3$. On a $\mathcal{N}_n(A) = 3^n$ et $\rho = 1/2$. Du théorème 3.1, la dimension fractale du tamis de Sierpinski est $\frac{\log 3}{\log 2}$.

Exemple 3.4 *La courbe de Lévy*

Le théorème 3.1 nous donne aussi la possibilité de calculer directement la dimension fractale de la courbe de Lévy (voir la figure 1.2) sans avoir recours au résultat sur sa mesure superficielle.

En effet, on décompose d'abord le plan par la triangulation effectuée dans la figure 2.2. Les triangles ouverts sont identiques au triangle initial tenu dans la généralisation

de la courbe de Lévy (consulter le chapitre 2). Ceux-ci construisent la mosaïque de première génération \mathcal{M}_1 . Et puis, on décompose chaque triangle en deux triangles identiques de taille $1/\sqrt{2}$ aussi comme on fait dans le chapitre 2, on obtient les blocs de \mathcal{M}_2 . Ainsi de suite jusqu'à l'infini. Il est clair que la mosaïque $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_n\}_{n=1}^{\infty}$ est $1/\sqrt{2}$ -uniforme.

Lemme 3.5 *Soient E_n l'ensemble des triangles rectangles isocèles initiaux de 2^n portions élémentaires d'ordre n de la courbe de Lévy. Alors, les éléments de E_n sont exactement des triangles de \mathcal{M}_n si A_0 un triangle de \mathcal{M}_1 .*

Démonstration: On montre le lemme par récurrence sur n .

A_0 est un triangle de \mathcal{M}_1 . On fait l'hypothèse que les triangles rectangles de E_n sont dans \mathcal{M}_n , on montre que les triangles de E_{n+1} sont aussi des triangles de \mathcal{M}_{n+1} .

Pour voir ça, on n'a qu'à prouver que les deux triangles produits par un triangle isocèle rectangle arbitraire de E_n sont des triangles de \mathcal{M}_{n+1} .

Supposons $\triangle ABC$ (voir la figure 3.3a), un triangle isocèle de E_n , alors, il produit deux petits triangles rectangles isocèles $\triangle ACE$ et $\triangle ABD$ dans E_{n+1} . De la construction de \mathcal{M}_i , $i = 1, 2, \dots$, outre le $\triangle ABC$, les triangles rectangles isocèles de \mathcal{M}_n qui possèdent l'arête AB ne peuvent être à la place de $\triangle ABF$ ou de $\triangle ABG$. Mais dans n'importe quelle situation, $\triangle ABD$ est un triangle de \mathcal{M}_{n+1} produit par $\triangle ABF$ ou $\triangle ABG$. Même raisonnement, $\triangle ACE$ est aussi un triangle de \mathcal{M}_{n+1} . \diamond

Lemme 3.6 *À chaque étape dans la construction triangulaire de la courbe de Lévy, chaque triangle rectangle isocèle produit exactement deux triangles rectangles isocèles dont les côtés sont plus petits par le facteur $1/\sqrt{2}$ et les intersections entre les triangles rectangles isocèles de même génération sont de mesure nulle.*

Démonstration: Du lemme 3.5, si deux triangles rectangles isocèles de E_n ont une intersection de mesure non nulle, ces deux triangles doivent coïncider puisque ils sont des triangles de \mathcal{M}_n . Donc, pour montrer le lemme, on n'a qu'à prouver que chaque triangle rectangle isocèle de E_n est produit par un triangle rectangle isocèle unique de E_{n-1} . Comme dans la figure 3.3b, on suppose que $\triangle ABC$ est un triangle rectangle

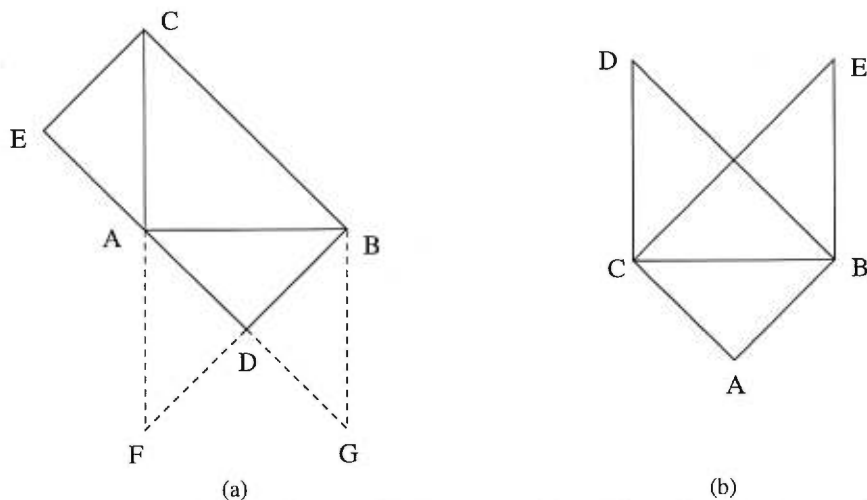


Figure 3.3: La position relative entre des triangles de deux générations

isocèle de E_n , alors, les triangles de E_{n-1} qui produit $\triangle ABC$ ne peuvent être que $\triangle BCD$ ou $\triangle BCE$. Mais du lemme 3.5, les triangles de E_{n-1} sont des triangles de \mathcal{M}_{n-1} , donc, $\triangle BCD$ ou $\triangle BCE$ ne peuvent pas avoir une intersection de mesure non nulle s'ils ne coïncident pas, seulement un d'eux appartient au \mathcal{M}_{n-1} . Alors, on a le lemme. \diamond

Lemme 3.7 *Pour tout n , l'intersection de chaque triangle rectangle isocèle de E_n avec la courbe de Lévy est non vide.*

Démonstration: L'intersection de A_0 avec la courbe de Lévy n'est pas vide puisqu'elle contient au moins trois sommets de A_0 . Par similarité, un triangle isocèle rectangle de E_n a la même propriété. \diamond

Du lemme 3.5 et 3.6, on voit que E_n est composé de 2^n blocs de \mathcal{M}_n . Du lemme 3.7, chacun de ces 2^n blocs de la mosaïque de n -ième génération a l'intersection non vide avec la courbe de Lévy. D'où $\mathcal{N}_n(A) \geq 2^n$. Enfin, en utilisant le théorème 3.1, on a

$$\dim F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mathcal{N}_n(A)}{-\log(1/\sqrt{2})^n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{-\log(1/\sqrt{2})^n} = 2. \text{ Mais la courbe de Lévy est}$$

une courbe plane, sa dimension fractale doit être 2.

3.3 Quelques exemples du type forêt

Dans le chapitre 1, on a discuté de la courbe de la forêt qui est engendrée par le maillage carré issu de \mathbb{Z}^2 . En effet, cette propriété sert bien à la détermination de sa dimension fractale. Aussi peut-on retrouver sa trace dans la pratique. Un grand nombre de fractales de ce genre peuvent se produire sur le maillage. Dans cette section, on s'intéresse particulièrement à la construction de fractales sur le maillage carré. Pour simplifier la discussion, on ne considère ici que le maillage carré binaire. Dans le plan \mathbb{R}^2 muni du système cartésien, le maillage carré binaire de la n -ième génération est l'ensemble \mathcal{R}_n composé de tous les points de la forme $[\frac{i}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$, $i, j \in \mathbb{Z}$ et de tous les arêtes horizontales ou verticales de longueur $\frac{1}{2^n}$ qui les joignent, et on appelle $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_n\}_{n=0}^{+\infty}$ le maillage carré binaire du plan. Dans les fractales à venir, l'intervalle $[0, 1]$ est toujours le segment initial, et le générateur est composé de segments choisis parmi les 12 arêtes de première génération dans le carré unitaire $[0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

3.3.1 Les notations nécessaires

D'abord, on donne des notations pour le système itératif de similitudes contractantes et on les utilise pour représenter les fractales dans cette section.

Une similitude contractante du plan est une transformation de la forme

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto Ax + b \end{aligned}$$

où $A = \begin{pmatrix} u_i & v_i \\ -v_i & u_i \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$. A est le terme de rotation et de contraction, b le terme de translation.

Si $\mathcal{S} = \{S_k\}_{k=1}^d$ est un système de similitudes contractantes, l'attracteur de \mathcal{S} est un

ensemble invariant Q pour \mathcal{S} , *i.e.*, $\bigcup_{k=1}^d S_k(Q) = Q$. Et on appelle d le degré de cet

attracteur.

Au lieu de travailler sur un ensemble compact de départ K tel que, pour tout k , $S_k(K) \subset K$ comme on fait dans [14], l'ensemble de départ ici sera toujours l'intervalle

unité $I = [0, 1]$. On note $Q^1 = \bigcup_{k=1}^d S_k(I)$, \dots , $Q^{n+1} = \bigcup_{k=1}^d S_k(Q^n)$, on se restreint à

laisser $Q^n \subset Q^{n+1}$, (ici, on n'a qu'à demander $I \subset \bigcup_{k=1}^d S_k(I)$). L'ensemble limite

$Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} (Q^n) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} Q^n$ est donc l'attracteur à considérer. Ceci est assuré par le

lemme suivant.

Lemme 3.8 *Q est un ensemble invariant pour le système itératif de similitudes con-*

tractantes $\mathcal{S} = \bigcup_{k=1}^d S_k$.

Démonstration: On doit montrer $\mathcal{S}(Q) = Q$. Et on note la limite d'une suite d'ensembles non-décroissants l'union totale de tous les ensembles de la suite.

D'abord, $\mathcal{S}(Q^n) = Q^{n+1}$. On fait $n \rightarrow +\infty$, alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{S}(Q^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q^{n+1} = Q$.

Puisque $Q^n \subset Q$, on a $\mathcal{S}(Q^n) \subset \mathcal{S}(Q)$, et il est évident que $Q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{S}(Q^n) \subset \mathcal{S}(Q)$.

Soit $y \in \mathcal{S}(Q)$, i.e., $y \in \bigcup_{k=1}^d S_k(Q)$. Alors $\exists n_0$ tel que $y = S_{n_0}(x)$ et $x \in Q$. On peut

donc trouver un nombre positif N , et pour tout $n > N$, $x \in Q^n$. Alors, $y \in Q^n$ pour tout $n > N + 1$, i.e., $y \in Q$. \diamond

On voit que la distance de Hausdorff entre Q^n et Q^{n+1} est moindre que $\frac{1}{2^{n+1}}$, et il est

facile de prouver que la distance entre Q^n et Q n'est pas plus grande que $\frac{1}{2^n}$. En effet,

l'attracteur compact unique pour le système itératif de similitudes contractantes \mathcal{S} est la fermeture de Q et partage la même dimension fractale.

En effet, chaque Q^n correspond à un graphe G_n sur le maillage carré binaire \mathcal{R}_n . Les

sommets de G_n sont les mêmes sommets de Q_n ; les arêtes de G_n sont les paires de sommets consécutifs que l'on retrouve dans Q^n . Pour faciliter le calcul, on rappelle les définitions du chapitre 1 pour les sommets d'un graphe sur le maillage carré.

Nous distinguons cinq types de sommets:

1. sommet qui n'appartient qu'à une seule arête;
2. sommet qui appartient exactement à deux arêtes alors que ces deux arêtes sont en prolongement l'un de l'autre;
3. sommet qui appartient exactement à deux arêtes alors que ces deux arêtes sont perpendiculaires;
4. sommet qui appartient exactement à trois arêtes;
5. sommet qui appartient exactement à quatre arêtes.

Et cinq suite de nombres entiers: a_n, b_n, c_n, d_n, e_n représente respectivement les nombres de sommets de G_n de type 1, 2, 3, 4, 5.

3.3.2 Les formules de récurrence associées

Pour un attracteur construit sur le maillage carré binaire, sa dimension fractale dépend fortement de t_n – le nombre total de tous les sommets du G_n . Dans la suite, on étudie quatre attracteurs construits sur le maillage carré binaire avec leur dimension de similitude qui est respectivement moindre, égale ou plus grande que 2. L'initiateur est toujours l'intervalle $[0, 1]$, le degré de leur générateur est respectivement 3, 4, 4, 6. On utilise la notation (u_i, v_i, a_i, b_i) pour représenter la similitude S_i définie dans le paragraphe précédent. Les systèmes itératifs de similitudes contractantes pour chaque attracteur sont donnés comme dans la suite:

$$(a) S_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right), S_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right), S_3 = \left(0, \frac{1}{2}, 1, 0\right);$$

$$(b) S_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right), S_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right), S_3 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), S_4 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right);$$

$$(c) S_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right), S_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right), S_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, 1, 0\right); S_4 = \left(0, \frac{1}{2}, 1, 0\right);$$

$$(d) S_1 = (0, \frac{1}{2}, 0, 0), S_2 = (0, -\frac{1}{2}, 0, 0), S_3 = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0), S_4 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0),$$

$$S_5 = (0, \frac{1}{2}, 1, 0), S_6 = (0, -\frac{1}{2}, 1, 0).$$

Les figures correspondantes sont attachées à la fin du chapitre 3.

Les raisonnements similaires du lemme 1.8 servent à prouver que les cas (a), (c) et (d) sont des graphes connexes sans cycle.

Proposition 3.9 *Dans l'exemple (a), on a les formules de récurrence suivantes:*

$$a_{n+1} = a_n + b_n; \tag{3.4}$$

$$b_{n+1} = a_n + b_n + c_n + d_n - 1; \tag{3.5}$$

$$c_{n+1} = a_n + c_n - 1; \tag{3.6}$$

$$d_{n+1} = b_n + d_n; \tag{3.7}$$

$$e_{n+1} = 0. \tag{3.8}$$

Les conditions initiales sont: $a_0 = 2, b_0 = 0, c_0 = 0, d_0 = 0, e_0 = 0, t_0 = 2$.

Proposition 3.10 *Dans l'exemple (c), on a les formules de récurrence suivantes:*

$$a_{n+1} = 2a_n + 2b_n - 1; \tag{3.9}$$

$$b_{n+1} = a_n + b_n + d_n + e_n - 1; \tag{3.10}$$

$$c_{n+1} = 0; \tag{3.11}$$

$$d_{n+1} = a_n + d_n - 1; \tag{3.12}$$

$$e_{n+1} = b_n + e_n. \tag{3.13}$$

Les conditions initiales sont: $a_0 = 2, b_0 = 0, c_0 = 0, d_0 = 0, e_0 = 0, t_0 = 2$.

Proposition 3.11 *Dans l'exemple (d), on a les formules de récurrence suivantes:*

$$a_{n+1} = 2a_n + 2b_n + d_n; \quad (3.14)$$

$$b_{n+1} = a_n + b_n + d_n + e_n - 1; \quad (3.15)$$

$$c_{n+1} = 0; \quad (3.16)$$

$$d_{n+1} = a_n; \quad (3.17)$$

$$e_{n+1} = b_n + d_n + e_n. \quad (3.18)$$

Les conditions initiales sont: $a_0 = 2, b_0 = 0, c_0 = 0, d_0 = 0, e_0 = 0, t_0 = 2$.

Démonstration: Pour comprendre les prochains arguments, il y a lieu de consulter la figure 3.5. Dans la proposition 3.9, seulement $a_n - 1$ sommets de type 1 produisent pour chacun un autre sommet de type 1 dans la génération suivante, le sommet $(0, 0)$ y reste toujours celui de type 1, et chaque sommet de type 2 contribue pour un sommet de type 1, on a donc $a_{n+1} = (a_n - 1) + 1 + b_n$; l'expression de b_{n+1} vient directement du résultat qui dit, dans un graphe non vide et sans cycle, le nombre d'arêtes est égal au nombre de sommets diminué de 1 (cf Berge, p. 22, [3] ou Labelle, p. 34, [23]); les sommets de type 3 de la $(n + 1)$ -ième génération viennent des sommets de type 3 et des $a_n - 1$ sommets de type 1 de la dernière génération; les sommets de type 4 se maintiennent comme les sommets de type 4 et les sommets de type 2 deviennent des sommets de type 4 dans la génération suivante; il n'y a pas de sommets de type 5.

Dans la proposition 3.10, chaque sommet de type 1 produit deux sommets de type 1 dans la génération suivante à l'exception du sommet $(0, 0)$ qui n'a pas de contribution mais qui reste pour toujours celui de type 1; en même temps, un sommet de type 2 produit deux sommets de type 1; l'expression de b_{n+1} est comme celle en haut; pour la même raison, il n'y a pas de type 3; puisque, sauf que $(0, 0)$ reste invariant, chaque sommet de type 1 devient un sommet de type 4 à partir de la génération suivante et y reste pour toujours, l'expression de d_{n+1} est claire; aussi, les sommets de type 2 deviennent des sommets de type 5 à partir de la génération suivante et y restent, alors, l'expression de e_{n+1} est évidente.

Dans la proposition 3.11, les sommets de type 1 et de type 2 produisent pour chacun deux sommets de type 1 dans la génération suivante, et chaque sommet de type 4

produit un sommet de type 1; la raison pour l'expression de b_{n+1} est comme celle en haut; il n'y a pas de type 3; seulement les sommets de type 1 deviennent des sommets de type 4 dans la génération suivante, on a d_{n+1} ; et puisque tous les sommets de type 2,4 deviennent des sommets de type 5 dans la génération suivante et y restent sans changement, on obtient l'expression de e_{n+1} .

◇

3.3.3 Le comportement asymptotique de t_n

Proposition 3.12 *Quand n croît vers l'infini, on a*

(1) dans l'exemple (a), $t_n \sim c_1 \cdot 2,618033989^n$;

(2) dans l'exemple (c), $t_n \sim c_2 \cdot 3,414213562^n$;

(3) dans l'exemple (d), $t_n \sim c_3 \cdot 3,561552813^n$;

où les nombres 2,618033989, 3,414213562, 3,561552813 sont les racines dominantes respectives des polynômes caractéristiques suivants:

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda;$$

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 - 2\lambda;$$

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda.$$

Démonstration: (1) On note $V_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)^T$, alors on peut écrire les formules de récurrence de la proposition 3.9 sous la forme matricielle

$$V_n = A \cdot V_{n-1} + B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le logiciel Maple, on obtient que $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda$ est le polynôme caractéristique de A si bien que les valeurs propres de A sont:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0,381966011; \quad \lambda_3 = 1; \quad \lambda_4 = 2,618033989.$$

Pour la même raison que lors du traitement de la courbe de la forêt, on voit que t_n a au moins une croissance exponentielle. Du théorème 1.10, on a (1).

(2) On note $V_n = (a_n, b_n, d_n, e_n)^T$, alors on peut écrire les formules de récurrence de la proposition 3.10 sous la forme matricielle

$$V_n = A \cdot V_{n-1} + B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le logiciel Maple, on obtient que $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 6\lambda^2 - 2\lambda$ est le polynôme caractéristique de A si bien que les valeurs propres de A sont:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 0,585786438; \quad \lambda_3 = 1; \quad \lambda_4 = 3,414213562.$$

Mais $a_n \geq 2a_{n-1}$, on a que t_n est au moins à croissance exponentielle. Du théorème 1.10, on a (2).

(3) On note $V_n = (a_n, b_n, d_n, e_n)^T$, alors on peut écrire les formules de récurrence de la proposition 3.11 sous la forme matricielle

$$V_n = A \cdot V_{n-1} + B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on obtient que $\lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$ est le polynôme caractéristique de A si bien que les valeurs propres de A sont:

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = -0,561552813; \quad \lambda_3 = 1; \quad \lambda_4 = 3,561552813.$$

Mais $a_n \geq a_{n-1}$, on a que t_n est au moins à croissance exponentielle. Du théorème 1.10, on obtient (3).

◇

3.3.4 Détermination de la dimension fractale

Les sommets du graphe G_n appartiennent à l'ensemble des points binaires du plan,

$$i.e. \{(x, y) : x = x_0 + \sum_{i=1}^{i_x} \frac{j_i}{2^i}, y = y_0 + \sum_{i=1}^{i_y} \frac{k_i}{2^i}, j_i, k_i \in \{0, 1\}, x_0, y_0 \in \mathbb{Z}\}.$$

Et il est facile de vérifier que les carrés (partie ouverte) dans le maillage carré binaire du plan constituent une mosaïque 1/2-uniforme. Par le même raisonnement que celui de la preuve du théorème 1.12, on a l'équivalence de t_n et $\mathcal{N}'_n(A)$ quand n croît vers

$$l'infini. Et du théorème 3.2, on a $\dim F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathcal{N}'_n(A)}{n \log 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log t_n}{n \log 2}$. Enfin,$$

en utilisant la proposition 3.12, on a

- Dans l'exemple (a): $\dim F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log 2,618033989}{\log 2} = 1,388483827$; la dimension

de similitude est $\log 3 / \log 2 = 1,584962501$.

- Dans l'exemple (c): $\dim F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log 3,414213562}{\log 2} = 1,771553303$; la dimension

de similitude est $\log 4 / \log 2 = 2$.

- Dans l'exemple (d): $\dim F = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log 3,561552813}{\log 2} = 1,832506383$; la dimension

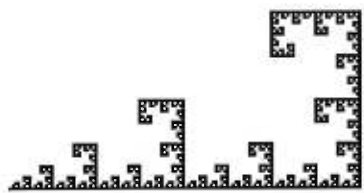
de similitude est $\log 6 / \log 2 = 2,584962501$.

- Dans l'exemple (b): $\dim F = 2$; (\overline{F} est un losange plein) la dimension de similitude est $\log 4 / \log 2 = 2$.

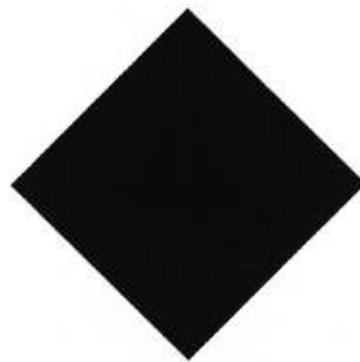
3.4 Conclusion

Dans les sciences appliquées, on considère comme fractale un objet géométrique qui a une structure de similitude interne approximative. Ceci diffère de la structure de similitude interne telle que définie en mathématiques. Heureusement, ces similitudes n'existent que dans quelques échelles, et s'arrêtent au plus bas à l'échelle moléculaire. Il demeure que les théorèmes 3.1 et 3.2 ont leur importance dans le traitement de ces fractales approximatives. Si on traite une partie d'un objet considéré comme ce

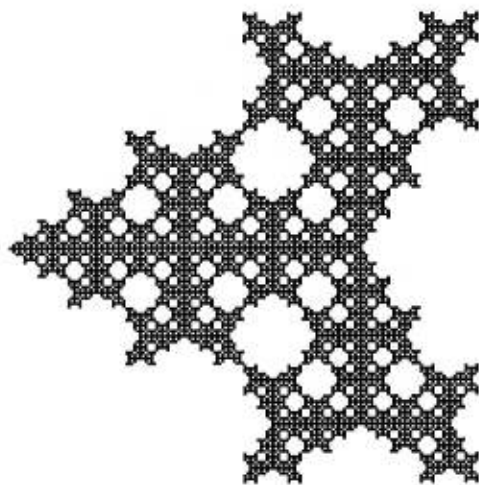
genre de fractale, une mosaïque naturelle provenant de la généralisation de cet objet peut être déterminée et le théorème 3.1 ou 3.2 aura son application si une tendance uniforme de cette généralisation est vérifiée. Dans la nature, il n'y a pas de beauté parfaite. Bien que la similitude en échelle soit une loi générale, une perturbation extérieure est inévitable dans la généralisation d'un objet fractal. Une question est immédiate: Si cette perturbation est minimisée à un certain niveau, est-ce que l'on peut donner une condition tolérante pour un système itératif de similitudes telle que la fractale ainsi obtenue qui n'a qu'une similitude approximative ait une dimension fractale calculable comme dans le cas strict?



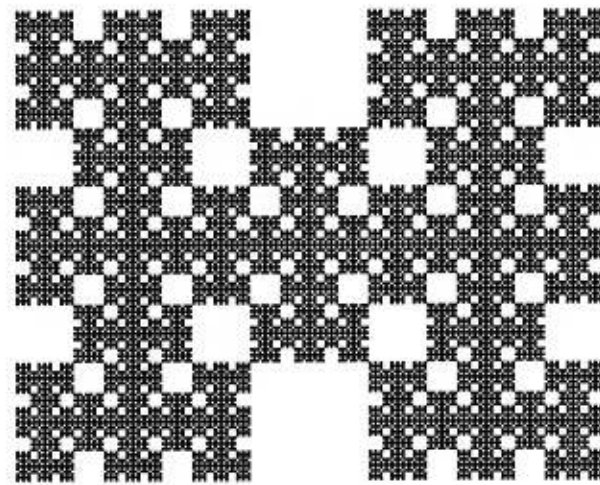
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 3.4: Quatre attracteurs.

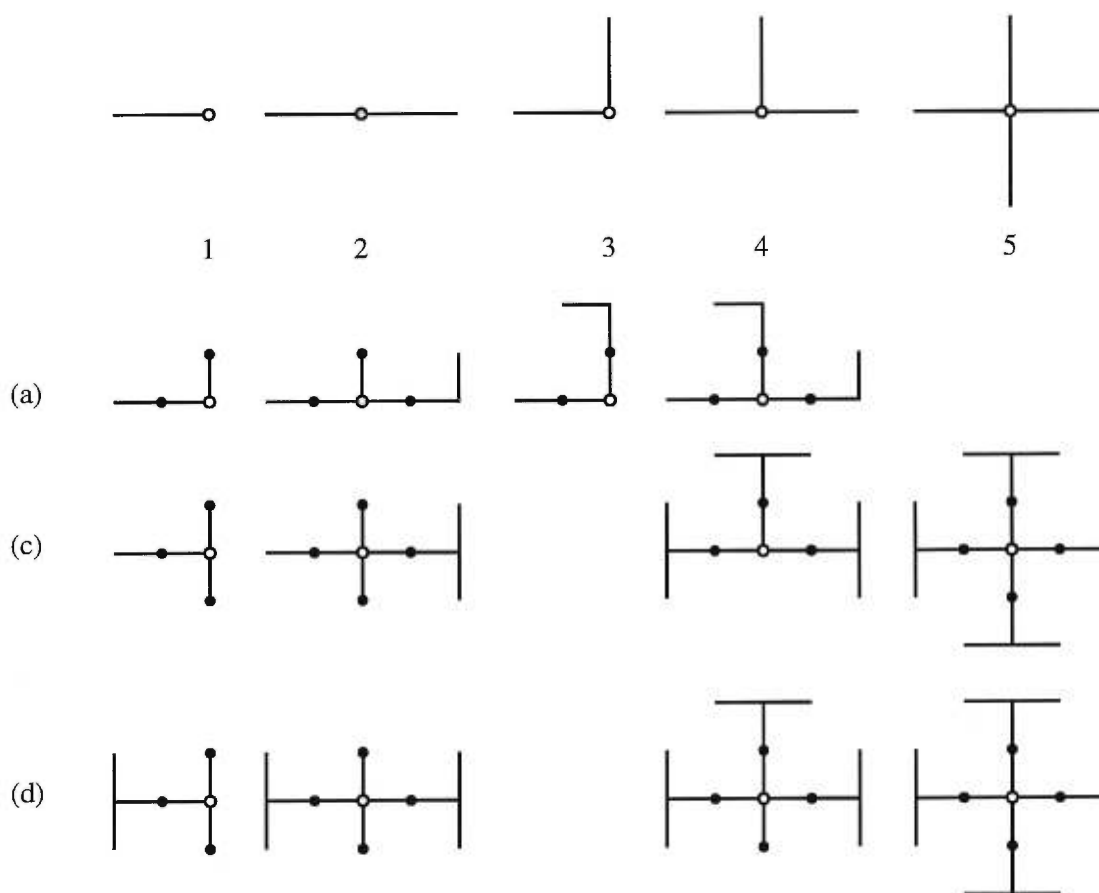


Figure 3.5: Transformations des sommets des types de 1 à 5 à l'occasion des trois attracteurs (a), (c) et (d). Les schémas de la première ligne indiquent les divers types que peut prendre un sommet à une génération donnée, ce sommet est indiqué par un point blanc. Les schémas des lignes suivantes montrent comment se transforme le sommet à la génération suivante; les nouveaux sommets créés au voisinage du sommet de départ sont indiqués par des points noirs. Si un schéma manque, c'est qu'il n'apparaît pas dans la construction de l'attracteur correspondant.

Chapitre 4

Le comportement asymptotique de récurrences vectorielles linéaires

Soient A une matrice carrée d'ordre p dont les coefficients sont des nombres complexes, b et v_0 deux vecteurs de \mathbb{C}^p , on considère la suite de vecteurs v_n de \mathbb{C}^p obtenus par la récurrence :

$$v_n = Av_{n-1} + b \quad (4.1)$$

où $n = 1, 2, 3, \dots$.

Notre propos est d'étudier comment se comporte la suite v_n selon notre connaissance de la matrice A et des deux vecteurs b et v_0 . Ce qui est bien connu dans la littérature mathématique est le cas où le rayon spectral ρ de la matrice A est inférieur à 1. Dans ce cas, la matrice $I - A$ est inversible et la suite v_n converge vers $(I - A)^{-1}b$, cette limite est absolument indépendante du vecteur initial v_0 . Si $v_0 = 0$, la suite v_n est reliée avec ce qui est connu sous le nom de la série de Neumann. C'est ainsi que l'on retrouve dans le livre d'Ortega-Rheinbold [25] le lemme de Neumann. *Si A est un opérateur linéaire de \mathbb{R}^p dont le rayon spectral est < 1 , alors $I - A$ est inversible et $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Un autre cas bien connu apparaît dans la théorie de Perron. Par exemple, dans le livre de Bellman [2, p. 282], on retrouve ce résultat. *Soient A une matrice positive, $b = 0$ et v_0 un vecteur non négatif non nul, alors le rayon spectral ρ de A est une valeur propre pour A et v_n/ρ^n converge vers un vecteur propre associé à ρ .*

Indiquons maintenant le genre de résultat vers lequel nous tendons. Auparavant, il

faut retenir des informations spectrales supplémentaires sur A . On désigne par $p(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice A et par $m(\lambda)$ le polynôme minimal de la matrice A . Par définition, le rayon spectral ρ de A est la quantité : $\max\{|\lambda| : p(\lambda) = 0\}$. On désignera par μ la plus grande multiplicité rencontrée parmi les racines de l'équation $m(\lambda) = 0$ situées sur le cercle $|\lambda| = \rho$ du plan complexe. Notre objectif sera de trouver des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ (où $k \geq 1$) situées sur le cercle $|\lambda| = \rho$ de multiplicité égale à μ ainsi que des vecteurs propres x_i associés à ces valeurs propres tels que

$$v_n = \sum_{i=1}^k c_i n^{\mu-1} \lambda_i^n x_i + e_n \quad (4.2)$$

où c_i sont des coefficients appropriés et où e_n est une suite de vecteurs dont les normes ont une croissance limitée: $\|e_n\| = o(n^{\mu-1} \rho^n)$. Un tel comportement aura lieu lorsque $\rho > 1$.

L'outil principal que nous emprunterons pour l'analyse de la suite v_n sera la décomposition de Jordan d'une matrice. Décrivons maintenant le cheminement que nous emploierons pour l'analyse de la récurrence (4.1). Dans la section 4.1, nous ferons des rappels sur la décomposition de Jordan et nous introduirons la définition de matrice dominante de Jordan. Dans la section 4.2, nous donnerons le comportement asymptotique de la suite v_n lorsque le nombre 1 n'est pas une valeur propre de A , ceci à l'aide des matrices dominantes de Jordan relatives à A . Une discussion semblable aura lieu dans la section 4.3, où cette fois-ci le nombre 1 sera la seule valeur propre de A . À la section 4.4, on traitera de la récurrence (4.1) avec une matrice arbitraire A grâce à une décomposition de l'espace \mathbb{C}^p en une somme directe de deux sous-espaces invariants. Enfin, dans la dernière section, nous donnerons un exemple de récurrence qui permet d'apprécier les résultats antérieurs. Ce chapitre-ci amplifie ce que nous avons fait antérieurement dans le chapitre 1, où nous avons déterminé le comportement asymptotique de la récurrence (4.1) lorsque la matrice A est diagonalisable.

4.1 Rappels sur la décomposition de Jordan

Nous effectuons un rappel sur la décomposition de Jordan, puis nous introduisons le concept de matrice dominante de Jordan. Une matrice de Jordan d'ordre p est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{p \times p}.$$

Théorème 4.1 (Jordan) *Soit A une matrice carrée d'ordre p avec coefficients dans*

\mathbb{C} , alors A est semblable à sa forme canonique de Jordan $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix}_{p \times p}$

où J_i est une matrice de Jordan d'ordre p_i de valeur propre λ_i pour $i = 1, \dots, m$ et où $p_1 + p_2 + \dots + p_m = p$.

On retrouve la démonstration du théorème de Jordan dans des livres d'algèbre comme celui de Gantmacher [16]. Un des résultats dont nous ferons un grand usage concerne les puissances successives d'une matrice de Jordan.

Lemme 4.2 *Soit J une matrice de Jordan d'ordre p dont les éléments diagonaux sont égaux à λ , alors*

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \lambda^{n-(p-1)} \\ 0 & \lambda^n & \cdots & \binom{n}{p-2} \lambda^{n-(p-2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^n \end{pmatrix}_{p \times p}$$

pour $n \geq p - 1$. Et si $\lambda \neq 0$, alors la suite des éléments de J^n situés sur la i -ième ligne et la j -ième colonne est $O(n^{p-2} \lambda^n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$ sauf si $i = 1, j = p$.

Démonstration: On retrouve l'expression de J^n dans le livre de Varga [30], Lemma 3.1, page 64. Le comportement des éléments de J^n y est également décrit. \diamond

Par le théorème de Jordan, on peut représenter la matrice sous la forme $A = PJP^{-1}$, alors que la forme canonique J est constituée des matrices de Jordan J_1, J_2, \dots, J_m . À chaque matrice de Jordan J_i , nous associerons un vecteur colonne propre x_i et un vecteur ligne propre u_i^T . Si la matrice de Jordan J_i commence dans la c -ième colonne de J , alors x_i est la c -ième colonne de P . Si la matrice de Jordan J_i termine sur la l -ième ligne de J , alors u_i^T est la l -ième ligne de P^{-1} .

Lemme 4.3 *Sous la notation précédente, $Ax_i = \lambda_i x_i$, $u_i^T A = \lambda_i u_i^T$ et $u_i^T x_j = \delta_{i,j}$.*

Démonstration: La relation $AP = PJ$ permet de vérifier que $Ax_i = \lambda_i x_i$, tandis que la relation $P^{-1}A = JP^{-1}$ entraîne que $u_i^T A = \lambda_i u_i^T$. La relation $P^{-1}P = I$ implique que $u_i^T x_j = \delta_{i,j}$. \diamond

Définition 4.1 *Une matrice de Jordan J_i , d'ordre p_i et dont les éléments diagonaux sont tous égaux à λ_i , provenant de la décomposition de Jordan de A , est dite dominante si $|\lambda_i| = \rho$ et si $p_i = \mu$.*

D'autre part, relativement à une décomposition de Jordan, on notera par D l'ensemble des indices de dominance, c'est l'ensemble des i tels que J_i est une matrice dominante de Jordan. Enfin, définissons deux autres paramètres τ et ν dont nous aurons besoin à l'occasion. Par définition, $\tau = \max\{|\lambda_i| : |\lambda_i| < \rho\}$; ν est la plus grande multiplicité rencontrée parmi les racines de l'équation $m(\lambda) = 0$ situées sur le cercle $|\lambda| = \tau$ du plan complexe.

4.2 Récurrences avec une matrice qui n'admet pas 1 comme valeur propre

Dans cette section, nous discutons du cas où la matrice carrée A d'ordre p présente dans la récurrence (4.1) n'admet pas 1 comme valeur propre.

Lemme 4.4 *Étant donnés $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda_i| \leq |\lambda_j|$, $p_i, p_j \in \mathbb{N}$. Si $|\lambda_i| < |\lambda_j|$ ou $p_i < p_j$, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{p_i-1} \lambda_i^{n-(p_i-1)}}{\binom{n}{p_j-1} \lambda_j^{n-(p_j-1)}} = 0 \quad (4.3)$$

et lorsque n tend vers l'infini, cette suite est $O(1/n)$.

Démonstration: Posons $u_n = \frac{\binom{n}{p_i-1} \lambda_i^{n-(p_i-1)}}{\binom{n}{p_j-1} \lambda_j^{n-(p_j-1)}}$, alors $u_n = \frac{\lambda_j^{p_j-1}}{\lambda_i^{p_i-1}} \cdot \frac{(p_j-1)!}{(p_i-1)!}$.

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p_i+2)}{n(n-1)\dots(n-p_j+2)} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^n.$$

En notant $\frac{\lambda_j^{p_j-1}}{\lambda_i^{p_i-1}} \cdot \frac{(p_j-1)!}{(p_i-1)!} = c$, on a $u_n \sim c \cdot n^{p_i-p_j} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^n$.

Donc, si $|\lambda_i| < |\lambda_j|$ ou $p_i < p_j$, on a que $u_n = O(1/n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. \diamond

Théorème 4.5 *Soient A une matrice carrée d'ordre p , b et v_0 deux vecteurs de \mathbb{C}^p , on considère la suite de vecteurs v_n obtenus par la récurrence (4.1): On suppose que 1 n'est pas une valeur propre de A et que dans la décomposition de Jordan, D est l'ensemble des indices de dominance, alors*

$$v_n = \binom{n}{\mu-1} \sum_{i \in D} c_i \lambda_i^{n-(\mu-1)} x_i + (I-A)^{-1}b + e_n$$

lorsque n tend vers l'infini, où $c_i = u_i^T (v_0 - (I-A)^{-1}b)$, $i \in D$ et où $e_n = O(n^{\mu-2} \rho^n)$ si $\mu > 1$ et $e_n = O(n^{\nu-1} \tau^n)$ si $\mu = 1$.

Démonstration: Comme 1 n'est pas une valeur propre de A , alors $I-A$ est inversible. Nous posons $w_n = v_n - (I-A)^{-1}b$. La relation de récurrence entre les w_n est simple: $w_n = Aw_{n-1}$ si bien que $w_n = A^n w_0$. On suppose que la décomposition de Jordan de A est PJP^{-1} alors que la matrice J est formée à partir de m matrices de Jordan J_1, J_2, \dots, J_m . D'où

$$A^n = P \begin{pmatrix} J_1^n & & & \\ & J_2^n & & \\ & & \dots & \\ & & & J_m^n \end{pmatrix}_{p \times p} P^{-1} \quad (4.4)$$

Pour déterminer le comportement de A^n lorsque $n \rightarrow \infty$, nous faisons appel au lemme 4.2 qui dit que pour $n > p_i - 1$, pour $i = 1, \dots, m$, on a

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} & \dots & \binom{n}{p_i-1} \lambda_i^{n-(p_i-1)} \\ 0 & \lambda_i^n & \dots & \binom{n}{p_i-2} \lambda_i^{n-(p_i-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i^n \end{pmatrix}_{p_i \times p_i}.$$

Distinguons deux cas.

Cas 1 : $\mu > 1$

Soit J_i une matrice dominante de Jordan, son ordre est $p_i = \mu$ et l'on peut affirmer

$$\text{que lorsque } n \rightarrow \infty, \text{ on a } J_i^n = \binom{n}{\mu-1} \lambda_i^{n-(\mu-1)} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{p_i \times p_i} + O(n^{\mu-2} \rho^n).$$

D'autre part, si J_j une matrice de Jordan qui n'est pas dominante, en utilisant le lemme 4.4, on obtient que $J_j^n = O(n^{\mu-2} \rho^n)$.

Si l'on remplace dans l'équation (4.4) chacune des matrices dominantes de Jordan J_i^n

$$\text{par } \binom{n}{\mu-1} \lambda_i^{n-(\mu-1)} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{p_i \times p_i} \text{ et toutes les autres matrices de Jordan par}$$

des matrices nulles, la matrice obtenue du côté droit de l'équation (4.4) est alors $A'_n =$

$$\binom{n}{\mu-1} \sum_{i \in D} \lambda_i^{n-(\mu-1)} x_i u_i^T. \text{ L'erreur commise par cette approximation matricielle de}$$

A^n est de l'ordre de $n^{\mu-2} \rho^n$ lorsque n croît. D'où l'on tire que $v_n = w_n + (I - A)^{-1} b = A^n w_0 + (I - A)^{-1} b$; par conséquent, $v_n = A'_n w_0 + (I - A)^{-1} b + O(n^{\mu-2} \rho^n)$.

Cas 2 : $\mu = 1$

Chaque matrice dominante de Jordan J_i est d'ordre 1 et se réduit au scalaire λ_i de module ρ . D'où J_i^n est le scalaire λ_i^n . D'autre part, si J_j une matrice de Jordan qui n'est pas dominante, en utilisant le lemme 4.4, on obtient que $J_j^n = O(n^{\nu-1} \tau^n)$.

Si l'on pose $A'_n = \sum_{i \in D} \lambda_i^n x_i u_i^T$, en raisonnant comme tantôt, on obtient que $v_n =$

$$A'_n w_0 + (I - A)^{-1} b + O(n^{\nu-1} \tau^n). \diamond$$

Corollaire 4.6 *Supposons que $\rho < 1$, alors $I - A$ est inversible et il existe une*

constante C qui ne dépend que de A , de b et de v_0 telle que
 $\forall n \quad |v_n - (I - A)^{-1}b| \leq Cn^{\mu-1}\rho^n.$

4.3 Récurrences avec une matrice qui n'admet que 1 comme valeur propre

Nous discutons maintenant la situation extrême où la matrice carrée A de la récurrence (4.1) n'admet que le nombre 1 comme valeur propre. Nous commençons par une remarque.

Remarque 4.1 Si $\lambda - 1$ est le polynôme minimal de A , c'est-à-dire que 1 est la seule valeur propre de A et $\mu = 1$, alors pour tout n , $v_n = v_0 + nb$. Ceci est la conséquence du fait que $A = I$.

Théorème 4.7 Soient A une matrice carrée d'ordre p , b et v_0 deux vecteurs de \mathbb{C}^p , on considère la suite de vecteurs v_n obtenus par la récurrence (4.1). On suppose que 1 est la seule valeur propre de A , que $\mu > 1$ et que D est l'ensemble des indices de dominance dans la décomposition de Jordan de A , alors

$$v_n = \binom{n}{\mu} \sum_{i \in D} (u_i^T b) x_i + O(n^{\mu-1})$$

lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration: On suppose que la décomposition de Jordan de A est PJP^{-1} alors que la matrice J est formée à partir de m matrices de Jordan J_1, J_2, \dots, J_m .

D'où

$$v_n = A^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k b = P J^n P^{-1} v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} P J^k P^{-1} b$$

donc

$$v_n = P \begin{pmatrix} J_1^n & & \\ & \dots & \\ & & J_m^n \end{pmatrix} P^{-1} v_0 + P \begin{pmatrix} Q_1^{(n)} & & \\ & \dots & \\ & & Q_m^{(n)} \end{pmatrix} P^{-1} b \quad (4.5)$$

où $Q_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} J_i^k$.

Par le lemme 4.2,

$$J_i^k = \begin{pmatrix} 1 & \binom{k}{1} & \cdots & \binom{k}{p_i-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \binom{k}{p_i-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$Q_i^{(n)} = \begin{pmatrix} n & \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{1} & \cdots & \sum_{k=p_i-1}^{n-1} \binom{k}{p_i-1} \\ 0 & n & \cdots & \sum_{k=p_i-2}^{n-1} \binom{k}{p_i-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Citons une formule que l'on retrouve à la page 3 des tables de Gradshteyn-Ryzhik [18] et dont l'origine remonte à Krechmar [22].

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

À l'aide de cette formule, on peut exprimer plus simplement les matrices $Q_i^{(n)}$. On a

$$Q_i^{(n)} = \begin{pmatrix} n & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{p_i} \\ 0 & n & \cdots & \binom{n}{p_i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Regardons l'ordre de grandeur des coefficients des deux matrices $J_i^n, Q_i^{(n)}$ lorsque n tend vers ∞ . Tous les coefficients sont $O(n^{p_i-1})$ à l'exception du coefficient sur la première ligne et la dernière colonne de la seconde matrice. La suite des éléments situés sur la première ligne et la dernière colonne de $Q_i^{(n)}$ est exactement $\binom{n}{p_i}$. Si E est la matrice carrée d'ordre μ dont tous les éléments sont nuls à l'exception de l'élément situé sur la première ligne et la dernière colonne qui lui vaut 1, alors $Q_i^{(n)} = \binom{n}{\mu} E +$

$O(n^{\mu-1})$ si $i \in D$. Si dans l'expression $P \begin{pmatrix} Q_1^{(n)} & & \\ & \cdots & \\ & & Q_m^{(n)} \end{pmatrix} P^{-1}$, on remplace $Q_i^{(n)}$ par la matrice nulle si $i \notin D$ et par $\binom{n}{\mu} E$ si $i \in D$, la matrice résultante est $\binom{n}{\mu} \sum_{i \in D} x_i u_i^T$. L'erreur commise par ce remplacement est de l'ordre de $n^{\mu-1}$. D'autre part, si l'on remplace la matrice J par 0 dans $PJ^n P^{-1}$, l'erreur commise par ce second remplacement est $O(n^{\mu-1})$. En effectuant ces deux remplacements dans l'équation (4.5), on obtient la conclusion du théorème. \diamond

4.4 Récurrences avec une matrice arbitraire

Dans cette section, nous discutons du cas général, où la matrice carrée A d'ordre p est arbitraire.

Lemme 4.8 *Soit A un opérateur linéaire de \mathbb{C}^p qui admet 1 comme valeur propre, alors il existe deux sous-espaces vectoriels V' et V'' de \mathbb{C}^p qui admettent les propriétés suivantes:*

- \mathbb{C}^p est la somme algébrique directe de V' et de V'' ;
- $A : V' \rightarrow V'$ et $A : V'' \rightarrow V''$;
- 1 est la seule valeur propre de A restreint à V' ;
- 1 n'est pas une valeur propre de A restreint à V'' .

Démonstration: Nous reprenons de Gantmacher [16] le résultat suivant.

Si pour un opérateur donné A agissant sur un espace vectoriel V de dimension finie, le polynôme minimal $m(\lambda)$ est représenté sous forme du produit de deux polynômes premiers entre eux $m_1(\lambda)$ et $m_2(\lambda)$ (avec coefficients les plus élevés égaux à 1): $m(\lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$, la totalité de l'espace V se décompose alors en deux espaces invariants V_1 et V_2 dont les polynômes minimaux sont respectivement $m_1(\lambda)$ et $m_2(\lambda)$.

De fait, $V_1 = \{x : m_1(A)x = 0\}$ et $V_2 = \{x : m_2(A)x = 0\}$.

Nous posons $V = \mathbb{C}^p$, nous désignons encore par $m(\lambda)$ le polynôme minimal de A . Le nombre 1 est une racine de l'équation $m(\lambda) = 0$; notons par r la multiplicité de cette

racine. Il suffit de poser $m_1(\lambda) = (\lambda - 1)^r$ et $m_2(\lambda) = m(\lambda)/(\lambda - 1)^r$ dans le résultat précédent. Le lemme en découle. \diamond

Remarque 4.2 *Il est possible d'effectuer la décomposition du lemme 4.8 sans faire le calcul du polynôme minimal de A . Il suffirait de poser:*

- $V' = \{x : (\exists n) (A - I)^n x = 0\}$;
- V'' est l'orthogonal de $U = \{u : (\exists n) u(A - I)^n = 0\}$, $V'' = \{x : (\forall u \in U) ux = 0\}$.

À notre connaissance, ce résultat n'est pas présent dans la littérature, c'est pourquoi nous avons évité cette approche.

Pour étudier la récurrence (4.1) lorsque 1 est une valeur propre de A , on se sert de la décomposition V', V'' du lemme 4.8. On décompose v_0 et b : $v_0 = v'_0 + v''_0$ et $b = b' + b''$ où $v'_0, b' \in V'$ et $v''_0, b'' \in V''$. On pose

$$v'_n = Av'_{n-1} + b', \quad v''_n = Av''_{n-1} + b''.$$

Il devient évident que $v_n = v'_n + v''_n$. Le comportement asymptotique des deux suites v'_n, v''_n est déjà connu, ce qui permet de prévoir le comportement asymptotique de la suite v_n .

4.5 Un exemple de récurrence vectorielle

Nous illustrons les résultats précédents par un exemple. Il s'agit de déterminer le comportement asymptotique de la suite v_n de vecteurs à 5 composantes obtenue par la récurrence (4.1) où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avec l'aide de Maple, nous trouvons que A admet 5 valeurs propres distinctes: $\lambda_1 = 0$, λ_2 et λ_3 qui sont $-0,576378801 \pm 0,5496842465i$, $\lambda_4 = 1$ et $\lambda_5 = 3,152757602$. Les vecteurs propres x_5 et u_5 associés à la valeur propre λ_5 tels que $Ax_5 = \lambda_5 x_5$, $A^T u_5 =$

$\lambda_5 u_5$ sont respectivement

$$x_5^T = (2,223716637, 1,929040965, 0,705324328, 0,223716637, 1),$$

$$u_5^T = (0,168458510, 0,199567357, 0,163082981, 0,146135241, 0,092703125).$$

Les vecteurs propres x_4 et u_4 associés à la valeur propre $\lambda_4 = 1$ sont respectivement

$$x_4^T = (1, -1, 1, 1, -3), u_4^T = (1/6, 0, 0, -1/6, -1/3).$$

La décomposition de l'espace \mathbb{C}^p proposée par le lemme 4.8 est facile à obtenir dans ce cas-ci. $V = \mathbb{C}^5$, $V' = \{tx_4 : t \in \mathbb{C}\}$, $V'' = \{x : u_4^T x = 0\}$. Si $v \in V$, alors on obtient la décomposition de v de la manière suivante: $v = v' + v''$ où $v' = (u_4^T v)x_4 / (u_4^T x_4)$ et $v'' = v - v'$.

Remarque 4.3 Si on fait la décomposition $b = b' + b''$, $v_0 = v'_0 + v''_0$, $v_n = v'_n + v''_n$, une simple vérification montre que les coefficients $u_i^T b'$ et $u_i^T (v_0 - (I - A)^{-1} b'')$ pour les termes dominants de v'_n et v''_n sont aussi respectivement $u_i^T b$ et $u_i^T (v_0 - b / (1 - \lambda_i))$.

La seconde identité est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 4.9 Si $I - A$ est inversible et si $A^T u = \lambda u$, alors $u^T (I - A)^{-1} b = u^T b / (1 - \lambda)$.

Démonstration: Soit $w = (I - A)^{-1} b$, alors $(I - A)w = b$. D'où $u^T b = u^T (I - A)w = [(I - A^T)u]^T w = (1 - \lambda)u^T w$. Une division par $1 - \lambda$ établit le lemme. \diamond

D'après la remarque 4.1 et après calcul, $v'_n = v'_0 + nb' = (n + 1)x_4/6$. D'autre part, selon le théorème 4.5, $v''_n = c_5 \lambda_5^n x_5 + w + O(|\lambda_3|^n)$ où $c_5 = u_5^T (v_0 - (I - A)^{-1} b'')$ et où le vecteur w de correction est la solution à l'équation $(I - A)w = b''$. Le vecteur w que l'on recherche dans V'' est l'unique solution dans \mathbb{C}^5 d'un système de 6 équations compatibles: $(I - A)w = b''$ et $u_4^T w = 0$. On vérifie que

$$w^T = (1/18, -2/9, -1/9, -5/18, 1/6).$$

Selon la remarque 4.3, $c_5 = u_5^T (v_0 - b / (1 - \lambda_5)) = 0,246710938$. Puisque $v_n = v'_n + v''_n$, on obtient que $v_n = c_5 \lambda_5^n x_5 + (n + 1)x_4/6 + w + O(|\lambda_3|^n)$.

Cette dernière équation invite à considérer une première approximation de v_n : $w_n = c_5 \lambda_5^n x_5 + (n + 1)x_4/6 + w$ ainsi qu'une approximation plus grossière $W_n = c_5 \lambda_5^n x_5$. Nous considérons les deux vecteurs résiduels: $r_n = w_n - v_n$ et $R_n = W_n - v_n$.

n	$\ r_n\ _\infty$	$\ R_n\ _\infty$	$\ r_n\ _\infty/\ v_n\ $	$\ R_n\ _\infty/\ v_n\ $
3	0,1185	1,7314	$6,586 \cdot 10^{-3}$	$9,619 \cdot 10^{-2}$
6	0,0927	3,2880	$1,717 \cdot 10^{-4}$	$6,089 \cdot 10^{-3}$
9	0,0372	4,8293	$2,203 \cdot 10^{-6}$	$2,860 \cdot 10^{-4}$
12	0,0148	6,3423	$2,794 \cdot 10^{-8}$	$1,199 \cdot 10^{-5}$
15	0,0100	7,8402	$6,020 \cdot 10^{-10}$	$4,728 \cdot 10^{-7}$
18	0,0060	9,3350	$1,148 \cdot 10^{-11}$	$1,796 \cdot 10^{-8}$
20	0,0462	10,813	$2,833 \cdot 10^{-12}$	$6,640 \cdot 10^{-10}$

Tableau 4.1: Erreurs absolues et relatives de deux approximations.

Le tableau 4.1 donne la valeur des erreurs absolues et relatives de ces deux approximations du vecteur v_n pour les premières valeurs de n qui sont divisibles par 3. Tant que les erreurs numériques ne se sont pas encore fait sentir, la norme de r_n est plus petite que celle de R_n . Le cas le plus favorable est lorsque $n = 19$, on a que $\|r_{19}\|_\infty/\|R_{19}\|_\infty = 5,87 \cdot 10^{-4}$. Lorsque n dépasse 19, cette qualité de la première approximation est perturbée par les erreurs numériques dans le calcul de la quantité $c_5 \lambda_5^n x_5$. Ce nombre varie avec le chiffre des nombres à virgule flottante que nous utilisons dans le logiciel Maple quand il est plus petit que 16 chiffres. Cependant, ce nombre représente une certaine stabilité pour $n = 19$ quand nous changeons les nombres à virgule flottante de 16 chiffres en 32 chiffres.

4.6 Conclusion

Dans plusieurs circonstances, il est des plus utiles d'étudier de façon approfondie le comportement asymptotique des récurrences vectorielles linéaires. De telles études permettent de connaître la précision de certaines méthodes itératives pour résoudre un système linéaire d'équations ou encore permettent de calculer la valeur propre dominante de matrices carrées non négatives. On retrouve cette idée dans ce que l'on appelle la méthode des puissances pour la recherche des valeurs propres d'une matrice A . Cette méthode est exposée dans les livres classiques de Householder [19] et de Wilkinson [31]. D'autre part, les résultats que nous avons obtenus sont particulièrement nouveaux lorsque le vecteur b est différent du vecteur nul et que 1 est une valeur propre de A . Comme il arrive souvent en analyse non linéaire que l'on

transforme un système non linéaire en un système linéaire approché, on peut aussi se demander quelles sont les conséquences que l'on peut tirer des résultats de ce travail pour le sujet de la dynamique non linéaire. Les conclusions sont sûrement plus faciles à tirer si aucune des valeurs propres n'appartient à la circonférence unité.

Chapitre 5

La détermination de la dimension de quelques surfaces fractales

Les fractales que nous avons rencontrées jusqu'ici étaient toutes situées dans le plan, ce qui facilite leur étude. Mais ce que l'on rencontre dans la nature a plutôt une forme tridimensionnelle, la structure cristalline d'une roche, le relief d'un terrain, etc. La complexité de ces fractales demande beaucoup plus de techniques et de connaissances en 3 dimensions des détails, et cela les rend plus difficiles à traiter. Dans ce chapitre, nos objets d'étude seront des surfaces fractales de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Premièrement, on produit quelques surfaces fractales dont le sens est encore imprécis en mathématiques, bien que plusieurs images compliquées soient déjà exposées dans des galeries et des revues. Deuxièmement, nous voulons que ces surfaces fractales puissent être traitées par des moyens mathématiques, comme par des indices utiles tels que la dimension fractale ceci, afin de caractériser leurs structures. Dans les études traditionnelles de fractales, les objets produits par les systèmes itératifs de similitudes occupent une place très importante en raison de la similitude interne qu'ils engendrent. C'est cette méthode que nous emploierons le plus souvent pour produire nos surfaces fractales, et nous tenterons de la généraliser en ajoutant quelques autres objets d'un type différent.

Dans [29], C. Tricot a étudié des courbes fractales et des résultats très intéressants sont obtenus. Dans ce chapitre, nous essayerons de généraliser certaines de ses méthodes aux objets dans \mathbb{R}^3 , ce qui permettra de déterminer explicitement la dimension de certaines surfaces fractales. C'est ainsi que nous contribuerons à approfondir nos

connaissances sur les surfaces fractales.

5.1 Quelques propriétés préliminaires pour les ensembles convexes de \mathbb{R}^3

Il est difficile d'imaginer la discussion de la dimension fractale d'un ensemble sans étudier ses recouvrements: leur formes, leur relations, etc. Dans ce cas, il est nécessaire pour nous d'obtenir des propriétés préliminaires pour les ensembles convexes de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et qui auront une influence très directe en caractérisant les recouvrements.

Définition 5.1 Soit E un ensemble de \mathbb{R}^3 , on définit le diamètre de E comme la borne supérieure des distances euclidiennes entre deux points arbitraires de E , c'est-à-dire

$$\text{Diam}(E) = \sup\{\text{dist}(a, b); a, b \in E\} \quad (5.1)$$

où $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ signifie la distance euclidienne entre deux points.

Définition 5.2 Soit E un ensemble dans \mathbb{R}^3 , on définit la taille de E , notée avec $\text{Taille}(E)$, la distance euclidienne minimale entre deux plans parallèles situés des deux côtés de E .

Définition 5.3 Soit E un ensemble dans \mathbb{R}^3 , la taille dans la direction perpendiculaire au diamètre est définie de la manière suivante: soit un diamètre d de E trouvé, on note par $\text{taille}_d^\perp(E)$ la distance euclidienne minimale entre deux plans situés des deux côtés de E et parallèles à ce diamètre. Sans confusion, on peut définir $\text{Taille}_d^\perp(E)$ la borne inférieure de $\text{taille}_d^\perp(E)$ de tous les diamètres.

Dans ce qui suit, on suppose que K est un ensemble convexe de \mathbb{R}^3 .

Proposition 5.1

$$\text{Taille}(K) \leq \text{Taille}_d^\perp(K) \leq 2\text{Taille}(K) \quad (5.2)$$

Démonstration: L'inégalité à gauche est évidente. Pour établir l'inégalité à droite, nous faisons appel à la figure 5.1, on suppose que la taille de K vaut $\epsilon > 0$, P_1, P_2 sont les deux plans parallèles indiqués dans la définition 5.2, d_1 est le diamètre de la projection de K dans le plan P_1 . En même temps, on suppose que d est un diamètre de K et on le fait situer dans le plan du papier; L_1, L_2 sont les deux plans parallèles à d et perpendiculaires au plan du papier et situés des deux côtés de K . θ est défini comme l'angle entre P_1 et L_1 . Il est clair que $AB \leq d_1$ et $d \geq d_1$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \text{Taille}_d^\perp(K) &\leq \text{la distance entre } L_1 \text{ et } L_2 \\ &\leq d_1 \sin \theta + \epsilon \cos \theta \end{aligned}$$

où $\sin \theta \leq \frac{\epsilon}{d} \leq \frac{\epsilon}{d_1}$, et $\cos \theta \leq 1$.

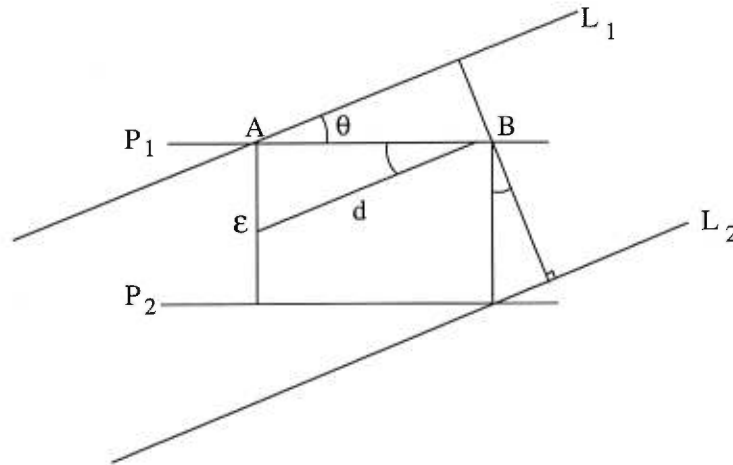


Figure 5.1: Taille(K) et Taille $_d^\perp(K)$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Taille}_d^\perp(K) &\leq d_1 \cdot \frac{\epsilon}{d_1} + \epsilon \cdot 1 \\ &= 2\epsilon \end{aligned}$$

i.e.

$$\text{Taille}_d^\perp(K) \leq 2\text{Taille}(K).$$

◇

Proposition 5.2

$$\frac{1}{12}\text{Taille}^2(K)\text{Diam}(K) \leq \text{Vol}(K) \leq 2\text{Taille}(K)\text{Diam}^2(K) \quad (5.3)$$

où $\text{Vol}(\cdot)$ signifie le volume d'un ensemble.

Démonstration: Soit $CD = d$ un des diamètres de K . Tel qu'indiqué dans la figure 5.2a, on peut trouver une boîte A_1A_7 qui est circonscrite à l'ensemble convexe K , où CD est égal à A_1A_4 , parallèle aux plans A_1A_3 et A_1A_8 , perpendiculaire aux plans A_1A_6 et A_3A_8 , avec deux extrémités C, D dans les plans A_1A_6 et A_3A_8 respectivement. Soient A, B deux points de contact de l'ensemble convexe K avec les plans A_1A_8 et A_2A_7 respectifs. Et on suppose que E, F sont deux points de CD tels que $AE \perp CD$ dans $\triangle ACD$ et $BF \perp CD$ dans $\triangle CBD$.

On a

$$\begin{aligned} \text{Aire } \triangle CBD + \text{Aire } \triangle ACD &= \frac{1}{2}d \cdot AE + \frac{1}{2}d \cdot BF \\ &= \frac{1}{2}d \cdot (AE + BF) \\ &\geq \frac{1}{2}d \cdot A_1A_2 \\ &\geq \frac{1}{2}d \cdot \text{Taille}_d^\perp(K) \end{aligned}$$

Donc, au moins un triangle, $\triangle CBD$ ou $\triangle ACD$, a une aire plus grande que $\frac{1}{4}d \cdot$

$\text{Taille}_d^\perp(K)$, on suppose que c'est $\triangle CBD$ sans faire de la confusion.

Supposons que P_1 et P_2 sont deux plans parallèles au $\triangle CBD$ entre lesquels K est situé et que M, N sont deux points de contact respectifs de K avec ces deux plans (voir la figure 5.2b). Puis, la distance entre M et N est plus grande que la $\text{Taille}(K)$.

Alors

$$\begin{aligned} \text{Vol}(MCBDN) &\geq \frac{1}{3}\text{Taille}(K) \cdot \text{Aire } \triangle CBD \\ &\geq \frac{1}{12}\text{Taille}(K) \cdot d \cdot \text{Taille}_d^\perp(K) \\ &\geq \frac{1}{12}d \cdot \text{Taille}^2(K) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\text{Vol}(K) \geq \frac{1}{12}d \cdot \text{Taille}^2(K)$$

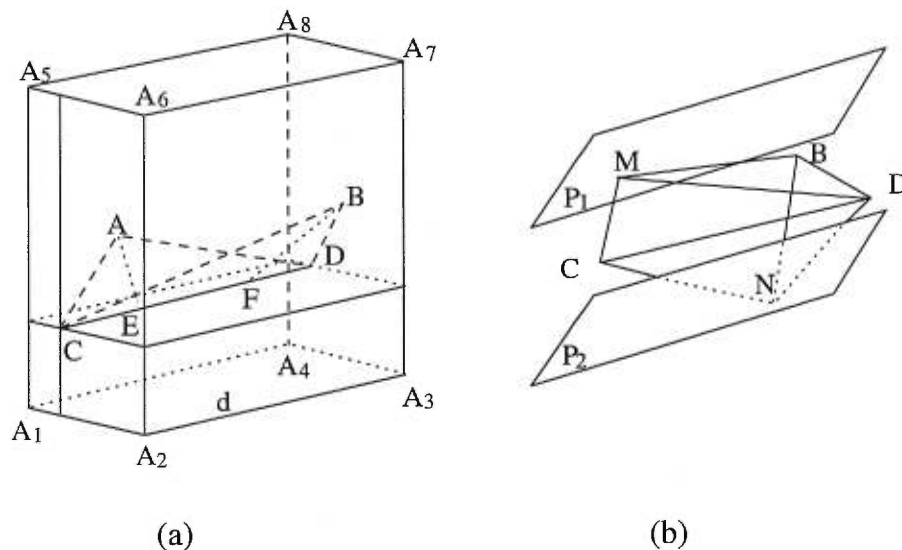


Figure 5.2: Une boîte circonscrite à K et K pris en sandwich par deux plans parallèles

L'inégalité à droite peut être prouvée avec l'inégalité 5.2 et la figure 5.2a. Si on suppose que $\text{Taille}_d^\perp(K)$ égale A_1A_2 , alors

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &\leq \text{Vol}(\text{Boîte } A_1A_7) \\ &\leq \text{Taille}_d^\perp(K) \cdot d^2 \\ &\leq 2\text{Taille}(K) \cdot \text{Diam}(K)^2. \end{aligned}$$

◇

Proposition 5.3 Soit E un ensemble de \mathbb{R}^3 , alors, pour tous $\eta \geq \epsilon \geq 0$, on a

$$\text{Vol}(E(\eta)) \leq (\eta/\epsilon)^3 \text{Vol}(E(\epsilon)) \quad (5.4)$$

où $E(\epsilon) = \{x : \text{dist}(x, E) \leq \epsilon\}$.

Démonstration: La preuve est similaire à celle de Tricot [29] pour un ensemble de \mathbb{R}^2 . ◇

Proposition 5.4 Soit E un ensemble de \mathbb{R}^3 , on a

$$\text{Taille}(K(E)) = \text{Taille}(E) \quad (5.5)$$

et

$$\text{Diam}(K(E)) = \text{Diam}(E) \quad (5.6)$$

où $K(E)$ est l'enveloppe convexe de E , i.e., $K(E) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \sum_{i=0}^3 p_i x_i, x_i \in$

$E, p_i \geq 0, \sum_{i=0}^3 p_i = 1\}$.

Démonstration: Les résultats sont évidents. \diamond

5.2 Résultat principal

On généralise ici un résultat important de Tricot [29]. D'abord, on donne une définition pour caractériser une classe de surfaces.

Définition 5.4 On dit qu'une surface simple Σ est expansive si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement $\{\Sigma_n^\epsilon\}$ de Σ par des pièces telles que

$$\begin{aligned} i) \quad & \frac{\epsilon}{a} \leq \text{Taille}(\Sigma_n^\epsilon) \leq \epsilon; \\ ii) \quad & \sum \text{Vol}(K(\Sigma_n^\epsilon)) \leq a \text{Vol}(\bigcup K(\Sigma_n^\epsilon)); \\ iii) \quad & K(\Sigma_n^\epsilon) \subset \Sigma(b\epsilon) \end{aligned} \quad (5.7)$$

où a, b sont deux constantes indépendantes de ϵ , $K(\cdot)$ signifie l'enveloppe convexe d'un ensemble et on dit que Σ_n^ϵ est une pièce de Σ quand $\Sigma_n^\epsilon \subset \Sigma$.

Définition 5.5 Soit Σ une surface simple, et $\mathcal{F} = \{\Sigma_i\}_{i=1}^N$ un recouvrement fini de Σ par ses pièces. Soit $c > 0$, on dit que \mathcal{F} est un c -recouvrement de Σ par ses pièces si $\text{Taille}(\Sigma_i) \geq c \text{Diam}(\Sigma_i)$ pour tout i . Et on note $\epsilon_{\max} = \max_{1 \leq i \leq N} \{\text{Taille}(\Sigma_i)\}$ et

$$\epsilon_{\min} = \min_{1 \leq i \leq N} \{\text{Taille}(\Sigma_i)\}.$$

Lemme 5.5 *Soit Σ une surface simple expansive, et $\mathcal{F} = \{\Sigma_i\}_{i=1}^N$ un c -recouvrement de Σ par ses pièces avec $\epsilon_{\min} \neq 0$. On suppose de plus que pour tout $\epsilon > 0$ chacune des pièces Σ_i^ϵ dans la définition 5.4 peut être recouverte par au plus k éléments de \mathcal{F} . Alors, on a l'inégalité double suivante*

$$c_1 \text{Vol}(\Sigma(\epsilon_{\min})) \leq \sum_i \text{Vol}(K(\Sigma_i)) \leq c_2 \frac{\epsilon_{\max}^2}{\epsilon_{\min}^2} \text{Vol}(\Sigma(\epsilon_{\min})) \quad (5.8)$$

où $c_1 = c/648$, $c_2 = 24ka^3b^3c^{-1}$.

Démonstration: Pour abrégé, nous remplaçons $K(\Sigma_i)$ par K_i .

(a) La preuve de l'inégalité à gauche.

On voit que, pour chaque $\epsilon > 0$, $\Sigma(\epsilon)$ est dans $\bigcup_i \Sigma_i(\epsilon)$, certainement dans $\bigcup_i K_i(\epsilon)$.

Par conséquent

$$\text{Vol}(\Sigma(\epsilon)) \leq \text{Vol}\left(\bigcup_i K_i(\epsilon)\right)$$

Le diamètre de $K_i(\epsilon)$ est au plus $\text{Diam}(K_i) + 2\epsilon$ et sa taille vaut $\text{Taille}(K_i) + 2\epsilon$. Soit ϵ tel que $\epsilon \leq \text{Taille}(K_i)$, on en déduit

$$\text{Diam}(K_i(\epsilon)) \leq 3\text{Diam}(K_i)$$

et

$$\text{Taille}(K_i(\epsilon)) \leq 3\text{Taille}(K_i)$$

En utilisant la proposition 5.2 et la proposition 5.4, on a, pour tout i ,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K_i(\epsilon)) &\leq 2\text{Diam}^2(K_i(\epsilon)) \cdot \text{Taille}(K_i(\epsilon)) \\ &\leq 54\text{Diam}^2(K_i) \cdot \text{Taille}(K_i) \\ &\leq \frac{648}{c} \left(\frac{1}{12} \text{Taille}^2(K_i) \cdot \text{Diam}(K_i)\right) \\ &\leq \frac{648}{c} \text{Vol}(K_i) \end{aligned}$$

Si on choisit $\epsilon = \epsilon_{\min}$ qui est moindre que $Taille(K_i)$ pour tout i , alors, on obtient

$$\text{Vol}(\Sigma(\epsilon_{\min})) \leq \frac{648}{c} \sum_i \text{Vol}(K_i)$$

L'inégalité se déduit en laissant $c_1 = c/648$.

(b) La preuve de l'inégalité à droite.

On laisse $\epsilon = \epsilon_{\min}$, alors, $Taille(\Sigma_n^\epsilon) \leq \epsilon_{\min}$ pour tout n . Si on utilise $\tilde{\Sigma}_i$ pour représenter la pièce Σ_i enlevée du bord, alors, on a

$$\text{Diam}(\Sigma_i) \leq \sum_{\Sigma_n^{\epsilon_{\min}} \cap \tilde{\Sigma}_i \neq \emptyset} \text{Diam}(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}}) \quad (5.9)$$

Pour tout i et tout n , on a $Taille(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}}) \leq Taille(\Sigma_i)$, et puisque chaque $\Sigma_n^{\epsilon_{\min}}$ peut être recouverte par au plus k éléments de \mathcal{F} , par conséquent, chaque $\Sigma_n^{\epsilon_{\min}}$ ne peut pas être comptée plus de k fois si on fait la somme sur i de l'inégalité 5.9, donc

$$\sum_i \text{Diam}(\Sigma_i) \leq k \sum_n \text{Diam}(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}})$$

En utilisant la proposition 5.4 et la définition 5.5, on a l'estimation suivante pour le volume des enveloppes convexes:

$$\begin{aligned} \sum_i \text{Vol}(K_i) &\leq 2 \sum_i \text{Diam}^2(K_i) \cdot Taille(K_i) \\ &\leq \frac{2k\epsilon_{\max}^2}{c} \sum_n \text{Diam}(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}}) \end{aligned}$$

Comme $\epsilon_{\min} \leq a \text{Taille}(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}}) = a \text{Taille}(K(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}}))$, on a

$$\begin{aligned} \sum_i \text{Vol}(K_i) &\leq \frac{2k\epsilon_{\max}^2}{c} \left(\sum_n \frac{1}{12} \text{Diam}(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}}) \cdot Taille^2(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}}) \right) \cdot 12 \cdot \left(\frac{a}{\epsilon_{\min}} \right)^2 \\ &\leq \frac{24ka^2\epsilon_{\max}^2}{c\epsilon_{\min}^2} \sum_n \text{Vol}(K(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}})) \end{aligned}$$

Par la définition 5.4, on a

$$\sum_i \text{Vol}(K_i) \leq 24ka^3c^{-1} \cdot \frac{\epsilon_{\max}^2}{\epsilon_{\min}^2} \cdot \text{Vol}\left(\bigcup_n (K(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}}))\right)$$

Puisque $K(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}}) \subset \Sigma(b\epsilon_{\min})$ par la définition 5.4, on a

$$\text{Vol}\left(\bigcup_n K(\Sigma_n^{\epsilon_{\min}})\right) \leq \text{Vol}(\Sigma(b\epsilon_{\min}))$$

Enfin, en utilisant la proposition 5.3, on a

$$\sum_i \text{Vol}(K_i) \leq c_2 \cdot \frac{\epsilon_{\max}^2}{\epsilon_{\min}^2} \text{Vol}(\Sigma(\epsilon_{\min}))$$

où $c_2 = 24ka^3b^3c^{-1}$ \diamond

Théorème 5.6 *Soit Σ une surface simple expansive, et soit $d \geq 1$ un nombre réel. Supposons que, pour chaque ϵ , avec $0 \leq \epsilon \leq \text{Taille}(\Sigma)$, nous pouvons trouver un c -recouvrement $\mathcal{F} = \{\Sigma_{i(\epsilon)}\}$ de Σ par ses pièces satisfaisant*

$$\frac{\epsilon}{d} \leq \text{Taille}(\Sigma_{i(\epsilon)}) \leq \epsilon \quad (5.10)$$

et qu'il existe un entier k positif tel que, pour $\delta > 0$, chaque pièce Σ_i^δ choisie dans la définition 5.4 peut être recouverte par au plus k éléments de \mathcal{F} . Alors, la dimension fractale de Σ est

$$\text{Dim}(\Sigma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(3 - \frac{\log \sum_i \text{Diam}(\Sigma_{i(\epsilon)})}{\log \epsilon} \right) \quad (5.11)$$

si elle existe.

D'une façon générale, nous avons la dimension fractale supérieure sous la forme

$$\overline{\text{Dim}}(\Sigma) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left(3 - \frac{\log \sum_i \text{Diam}(\Sigma_{i(\epsilon)})}{\log \epsilon} \right) \quad (5.12)$$

et la dimension fractale inférieure sous la forme

$$\underline{\text{Dim}}(\Sigma) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left(3 - \frac{\log \sum_i \text{Diam}(\Sigma_{i(\epsilon)})}{\log \epsilon} \right) \quad (5.13)$$

Démonstration: Du lemme 5.5, on a

$$c_1 \text{Vol}(\Sigma(\frac{\epsilon}{d})) \leq \sum_i \text{Vol}(K(\Sigma_{i(\epsilon)})) \leq c_2 d^2 \text{Vol}(\Sigma(\epsilon_{\min}))$$

où $\epsilon_{\min} = \min\{\text{Taille}\Sigma_{i(\epsilon)}\} \leq \epsilon$.

Et en utilisant la proposition 5.3, on a $\frac{1}{d^3} \text{Vol}(\Sigma(\epsilon)) \leq \text{Vol}(\Sigma(\frac{\epsilon}{d}))$, alors,

$$\frac{c_1}{d^3} \text{Vol}(\Sigma(\epsilon)) \leq \sum_i \text{Vol}(K(\Sigma_{i(\epsilon)})) \leq c_2 d^2 \text{Vol}(\Sigma(\epsilon))$$

Quand $\epsilon \rightarrow 0$, on a donc

$$\sum_i \text{Vol}(K(\Sigma_{i(\epsilon)})) \simeq \text{Vol}(\Sigma(\epsilon))$$

Par conséquent

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \text{Vol}(\Sigma(\epsilon))}{\log \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_i \text{Vol}(K(\Sigma_{i(\epsilon)}))}{\log \epsilon}$$

Mais

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_i \text{Vol}(K(\Sigma_{i(\epsilon)}))}{\log \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_i \text{Diam}^3(K(\Sigma_{i(\epsilon)}))}{\log \epsilon}$$

Enfin, on a

$$\text{Dim}(\Sigma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(3 - \frac{\log \sum_i \text{Diam}^3(K(\Sigma_{i(\epsilon)}))}{\log \epsilon} \right).$$

◇

On discute maintenant de surfaces fractales dans \mathbb{R}^3 obtenues par un système itératif de contractions. On désignera par Σ la surface fractale compacte et par K l'enveloppe convexe de Σ . Le système itératif de similitudes contractantes est une famille de

fonctions $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^n$ où $f_i : K \rightarrow K$ sont des similitudes de facteur r_i pour $i = 1, 2, \dots, n$, donc elles sont aussi des similitudes de Σ dans Σ .

On dit qu'un système itératif de similitudes contractantes satisfait *la condition d'ensemble ouvert de Moran* si et seulement si il existe un ensemble ouvert non vide U tel que (1) $f_i(U) \subset U$ pour $i = 1, 2, \dots, n$; (2) $f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ (p. 160, Edgar [11]). Généralement, on peut choisir l'intérieur de K comme l'ensemble ouvert. Aussi on emprunte de [11] la notion suivante .

Définition 5.6 On appelle $(r_i)_{i \in E}$ la liste des facteurs d'un système itératif de similitudes contractantes si et seulement si, pour chaque $e \in E$

$$\text{dist}(f_i(x), f_i(y)) = r_i \text{dist}(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3 \quad (5.14)$$

où $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ est la distance euclidienne de \mathbb{R}^3 .

Corollaire 5.7 Soit Σ une surface fractale simple obtenue par un système itératif de similitudes contractantes $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ avec la liste des facteurs $\mathcal{R} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, où $0 < r_i < 1, i = 1, 2, \dots, n$, définies sur l'enveloppe convexe K de Σ .

Supposons que \mathcal{F} satisfait la condition d'ensemble ouvert de Moran, alors

$$\text{Dim}(\Sigma) = s_0$$

où s_0 est la dimension de similitude de Σ , i.e., la solution de l'équation

$$\sum_{i=1}^n r_i^{s_0} = 1 \quad (5.15)$$

Démonstration: À cause de la condition d'ensemble ouvert de Moran, il est évident que l'expansivité de Σ est satisfaite en choisissant les Σ_n^ϵ sous la forme de $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(\Sigma)$.

Soit Σ^* une pièce de Σ obtenue en laissant $\Sigma^* = f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(\Sigma)$, on peut lui accorder une mesure par

$$\mu(\Sigma^*) = (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^{s_0} = \left(\frac{\text{Diam}(\Sigma^*)}{\text{Diam}(\Sigma)} \right)^{s_0}$$

avec $\mu(\Sigma) = 1$.

Nous pouvons toujours recouvrir Σ par N_ϵ pièces de ce type, disjointes ou adjacentes, avec des diamètres entre $r_{\min}\epsilon$ et ϵ , où $r_{\min} = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$.

Si on numérote $\Sigma_i^{(\epsilon)}$, $i = 1, \dots, N_\epsilon$ toutes les pièces d'un recouvrement de Σ de ce genre, alors

$$1 = \sum_i \mu(\Sigma_i^{(\epsilon)}) = (\text{Diam}(\Sigma))^{-s_0} \cdot \sum_i (\text{Diam}\Sigma_i^{(\epsilon)})^{s_0}$$

Nous pouvons supposer que $\text{Diam}(\Sigma) = 1$ sans perte de généralité, alors

$$1 \leq N_\epsilon \epsilon^{s_0} \leq r_{\min}^{-s_0} \leq r_{\min}^{-3}$$

i.e., $\epsilon^{-s_0} \leq N_\epsilon \leq r_{\min}^{-3} \epsilon^{-s_0}$. Donc

$$r_{\min}^3 \epsilon^{3-s_0} \leq \sum_i (\text{Diam}(\Sigma_i^{(\epsilon)}))^3 \leq r_{\min}^{-3} \epsilon^{3-s_0}$$

Par conséquent,

$$\sum_i (\text{Diam}(\Sigma_i^{(\epsilon)}))^3 \simeq \epsilon^{3-s_0}$$

Enfin, du théorème 5.6, on a

$$\begin{aligned} \text{Dim}(\Sigma) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(3 - \frac{\log \sum_i (\text{Diam}(\Sigma_i^{(\epsilon)}))^3}{\log \epsilon} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(3 - \frac{\log \epsilon^{3-s_0}}{\log \epsilon} \right) \\ &= s_0 \end{aligned}$$

◇

5.3 Quelques exemples de surface fractale

Dans [7], S. Dubuc a présenté deux genres de surfaces fractales à similitude interne stricte. Dans la suite, on calcule leur dimension fractale, et en même temps, on essaie de les transformer dans des formes plus générales.

Exemple 5.1 *La pyramide de von Koch*

Pour construire la pyramide de von Koch, on commence avec un tétraèdre régulier de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 de sommets P_0, P_1, P_2, P_3 . Par exemple, il pourrait s'agir du tétraèdre dont les sommets ont pour coordonnées cartésiennes $P_0 = (1, 0, 0)$, $P_1 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$, $P_2 = (-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$, $P_3 = (0, 0, \sqrt{2})$. On définit maintenant six similitudes $\{S_i\}_{i=1}^6$. Les trois premières similitudes sont les homothéties de facteur $1/2$ et de centres respectifs P_0, P_1, P_2 . Pour définir les trois autres similitudes, on pose $Q_0 = (P_1 + P_2)/2$, $Q_1 = (P_0 + P_2)/2$, $Q_2 = (P_0 + P_1)/2$. La similitude S_4 est cette similitude d'orientation positive telle que $S_4(P_1) = Q_1$, $S_4(P_2) = Q_2$, $S_4(P_0) = M = \frac{(P_0 + P_1 + P_2)}{6} + \frac{P_3}{2}$ et $S_4(P_3) = (4P_0 + P_3)/6$. De façon symétrique, on définit S_5 et S_6 . La pyramide de von Koch est l'attracteur compact défini par le système $\{S_i\}_{i=1}^6$.

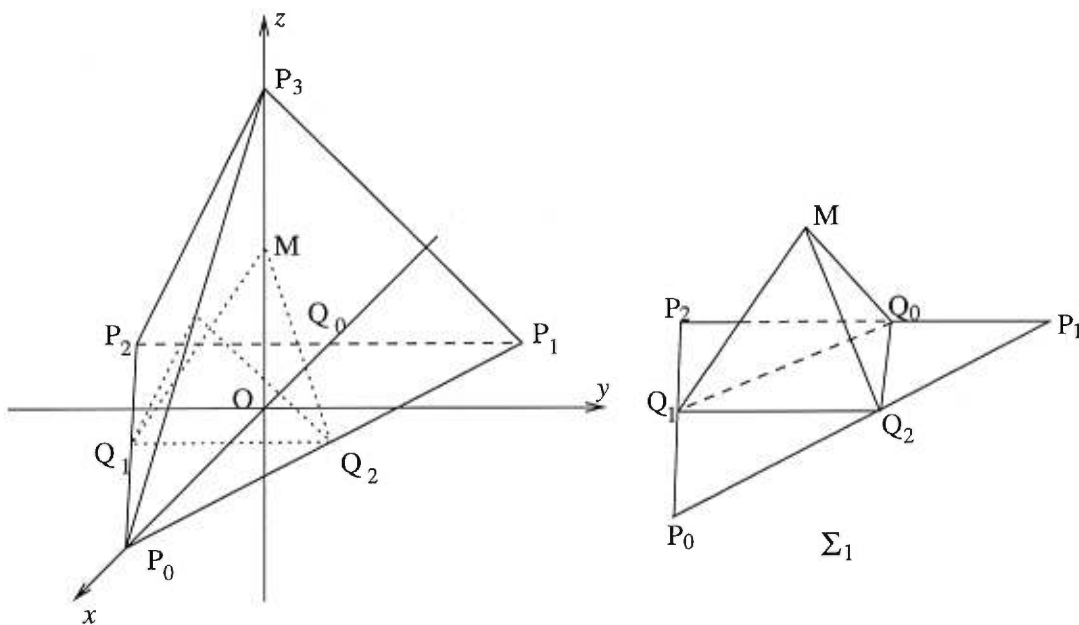


Figure 5.3: La construction de la pyramide de von Koch

Si Σ_0 est le triangle $\triangle P_0 P_1 P_2$, alors, on définit par récurrence $\Sigma_{n+1} = \bigcup_{i=1}^6 S_i(\Sigma_n)$.

Cette suite de surfaces pliées converge vers la pyramide de von Koch dans la métrique d'Hausdorff.

Dans cette surface fractale, la liste $\{r_i\}$ des facteurs de contraction est constituée de $1/2$ répété 6 fois. La dimension de similitude s satisfait

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$$

i.e.

$$s = 1 + \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Pour vérifier la condition d'ensemble ouvert de Moran, il suffit de prendre pour U l'intérieur de l'enveloppe convexe de la pyramide de von Koch. Quant à l'expansivité, on peut choisir Σ_n^ϵ comme des éléments de la famille $\{S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \dots \circ S_{i_k}(\Sigma)\}$, où k satisfait $\frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2^{1-k} \leq \epsilon$. Par conséquent, du corollaire 5.7, la dimension fractale de la pyramide de von Koch est $1 + \frac{\log 3}{\log 2}$.

Exemple 5.2 *Une première surface fractale construite sur un carré*

Pour approcher la surface fractale, la méthode est de produire une suite des surfaces pliées Σ_n (voir la figure 5.4a). Soit Σ_0 le carré unité horizontal se trouvant dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Les Σ_n seront produites de manière récursive: Σ_n est composée de quelques petits carrés. Pour chaque petit carré de Σ_n , on le subdivise en neuf carrés plus petits et on remplace le carré du milieu par cinq autres carrés de même taille qui composent exactement les cinq autres faces d'un cube avec le carré du milieu comme base.

Plus être précis, soient T le carré unité du plan Oxy de \mathbb{R}^3 , X le demi-espace supérieur de \mathbb{R}^3 . On introduit treize similitudes dans X . Les huit premières sont des homothéties de facteur $1/3$ dont les centres sont: quatre sommets du carré T , quatre milieux des côtés de T . Les cinq autres sont de facteur $1/3$ et envoient le carré T sur un des cinq faces latérales ou supérieures du cube $C : [1/3, 2/3] \times [1/3, 2/3] \times [0, 1/3]$. Ces similitudes ne sont pas uniquement déterminées, mais ceci n'a pas d'importance. Alors, Σ est l'attracteur du système $\{S_i\}_{i=1}^{13}$.

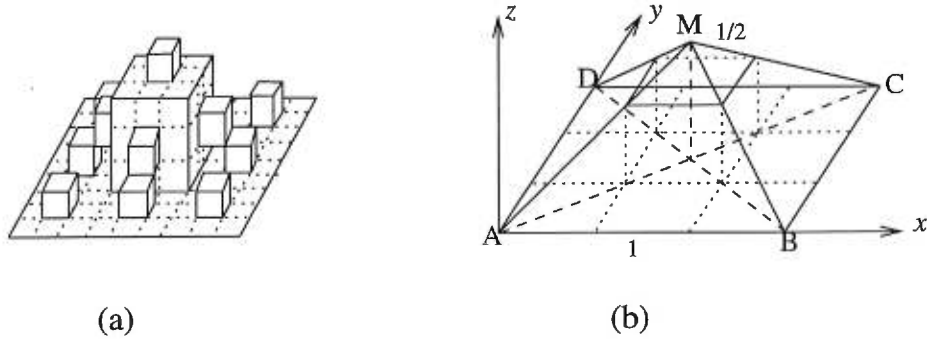


Figure 5.4: Une première surface fractale construite sur un carré

Supposons que $\square ABCD$ est le carré unité du plan Oxy de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , nous introduisons la pyramide $MABCD$ de base $\square ABCD$, dont le sommet M est à la hauteur $1/2$ et est équidistant des quatre coins de la base (voir la figure 5.4b).

Si U est l'intérieur de la pyramide $MABCD$, il est clair que $S_i[U] \cap S_j[U] = \emptyset$.

pour $i \neq j$; et $U \supseteq \bigcup_{i=1}^{13} S_i[U]$. Donc, la condition d'ensemble ouvert de Moran est

satisfaite. Si on veut vérifier l'expansivité, on peut choisir Σ_n^ϵ comme les éléments de la famille $\{S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \dots \circ S_{i_k}(\Sigma)\}$, où k satisfait $\frac{\epsilon}{3} \leq \frac{1}{2} \cdot 3^{-k} \leq \epsilon$. $K(\Sigma_n^\epsilon)$ sont de la même forme de la pyramide $MABCD$, mais avec la taille 3^{-k} fois plus petite. La condition $K(\Sigma_n^\epsilon) \subset \Sigma(\epsilon)$ est claire. La dimension de similitude s est donc la solution de l'équation

$$13 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

i.e.

$$s = \frac{\log 13}{\log 3}$$

Du corollaire 5.7, on a $\text{Dim}(\Sigma) = \frac{\log 13}{\log 3}$.

Exemple 5.3 Une seconde surface fractale construite sur un carré

Dans cet exemple, les notations de l'exemple 5.2 seront préservées, mais on élimine les quatre similitudes qui envoient le carré T sur quatre faces latérales du cube C : $[1/3, 2/3] \times [1/3, 2/3] \times [0, 1/3]$. Dans ce cas, on a 9 similitudes, mais la surface n'est plus l'ensemble invariant de ce système itératif. *i.e.*, elle n'est pas un attracteur simple. On voit à chaque étape de construction, seulement les carrés horizontaux sont remplacés et les murs verticaux sont intouchés.

Pour calculer sa dimension fractale, nous divisons cette surface fractale Σ en deux parties: Σ' l'ensemble *horizontal* et Σ'' l'ensemble *vertical*.

L'ensemble horizontal Σ' est l'attracteur produit par ce système de neuf similitudes. L'ensemble compact convexe initial est la pyramide $MABCD$ (voir la figure 5.4b) et est noté avec K , on note les neuf similitudes par S_i , $i = 1, 2, \dots, 9$, alors Σ' est l'ensemble invariant de $\{S_i\}_{i=1}^9$, et

$$\Sigma' = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(K)$$

où

$$S^k(K) = \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^9 S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \dots \circ S_{i_k}(K)$$

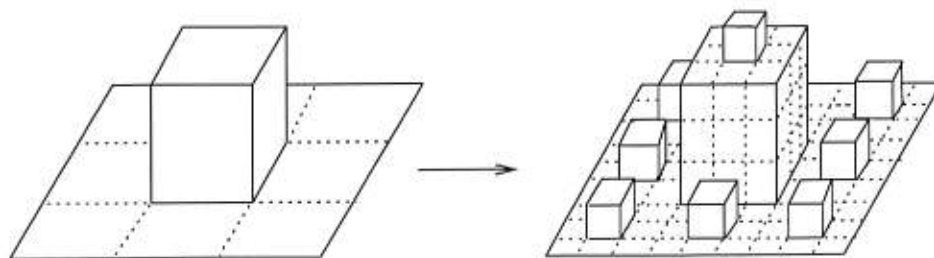


Figure 5.5: Une seconde surface fractale construite sur un carré

La dimension de similitude s de cet ensemble satisfait $9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$, donc $s = 2$.

En faisant la revue du lemme et du théorème précédents, on constate qu'ils se sont même établis pour une partie de surface satisfaisant la condition demandée pour toute

la surface. Dans ce cas-ci, la condition d'ensemble ouvert de Moran se vérifie de la même manière que dans l'exemple 5.2, et par conséquent, on a $\text{Dim}(\Sigma') = 2$. Ainsi, la dimension fractale de Σ n'est pas moindre que 2.

On va voir qu'il n'y a aucune contribution supplémentaire pour la dimension venue de l'ensemble vertical Σ'' . Comme on voit dans la figure 5.4, on peut recouvrir Σ de la manière suivante: la distance du sommet M à ses quatre coins est $\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc, pour $\epsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$, une boule fermée de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$, centrée en M est suffisante pour recouvrir Σ ; pour $\epsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3^{-1}$, $(9 + l)$ boules fermées de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3^{-1}$, centrées aux sommets verticaux de $S_i(K)$, $i = 1, 2, \dots, 9$, sont suffisantes pour recouvrir Σ , où l est la constante signifiant le nombre minimum de boules fermées de rayons $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3^{-1}$ nécessaire pour recouvrir les quatre faces latérales du cube C .

Par récurrence, $9^n + n \cdot 9^{n-1} \cdot l$ boules fermées de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3^{-n}$ sont suffisantes pour recouvrir Σ .

Alors

$$\begin{aligned} \overline{\text{Dim}}(\Sigma) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(9^n + n \cdot 9^{n-1} \cdot l)}{-\log(\sqrt{3} \cdot 3^{-n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 9^n}{\log 3^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{n}{9}l)}{\log 3^n} \\ &= 2 \end{aligned}$$

La dimension de cette surface fractale est donc 2.

Exemple 5.4 *Une surface fractale de type pyramide*

La pyramide de von Koch est une surface fractale très particulière, dans cet exemple, on essaie de produire des surfaces fractales dans une forme plus générale.

La construction est sur le triangle isocèle $\triangle ABC$ avec $AB = AC$ (voir la figure 5.6a), et on note $\angle BAC$ avec θ . Pour éviter des croisements et des cas triviaux, on considère

la situation où θ est entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

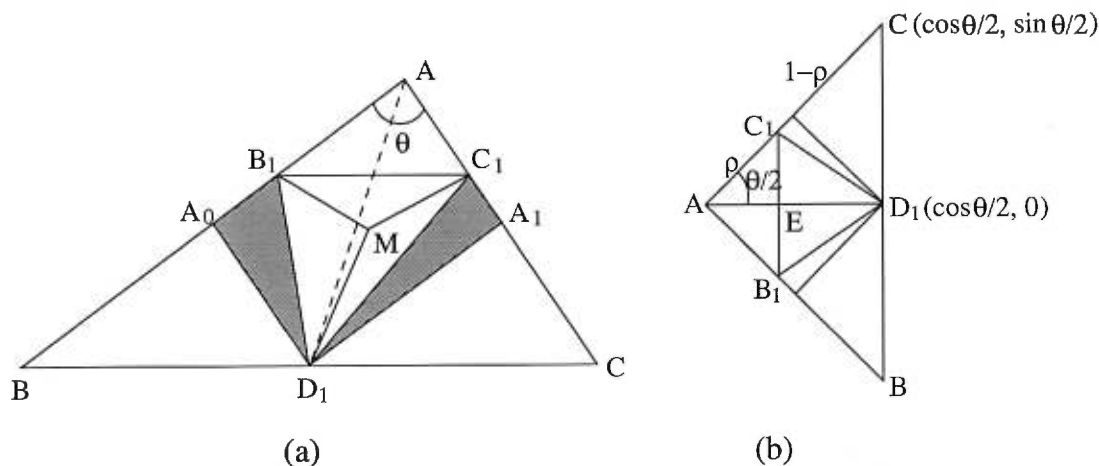


Figure 5.6: La construction d'une surface fractale de type pyramide

À la première étape, on divise $\triangle ABC$ en six parties. Pour y arriver, on pose $A_0 = (A + B)/2$, $A_1 = (A + C)/2$, $D_1 = (B + C)/2$. On montre qu'il existe un et un seul point B_1 sur le segment AA_0 tel que le triangle $B_1D_1C_1$ (où C_1 est le point symétrique à B_1 par rapport à l'axe AD_1) est équilatéral (voir la figure 5.6a). De fait $B_1 = \rho B + (1 - \rho)A$, $C_1 = \rho C + (1 - \rho)A$ où $\rho = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3} \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}$. (Consulter la figure 5.6b.

On suppose que AC est de longueur 1 et on emploie l'égalité $ED_1/C_1E = \sqrt{3}$ où $C_1E = \rho \sin \frac{\theta}{2}$ et $ED_1 = (1 - \rho) \cos \frac{\theta}{2}$.)

Puis on choisit l'unique point M dans le demi-plan supérieur tel que sa distance à B_1 , C_1 et à D_1 est égale à la distance de B_1 à A . La division du triangle $\triangle ABC$ en six parties consiste dans les six triangles: $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_0BD_1$, $\triangle A_1D_1C$, $\triangle A_0B_1D_1$, $\triangle A_1C_1D_1$ et $\triangle B_1C_1D_1$. Puis on remplace le triangle équilatéral $\triangle B_1C_1D_1$ par les trois triangles $\triangle MB_1C_1$, $\triangle MB_1D_1$ et $\triangle MC_1D_1$ qui sont semblables à $\triangle ABC$ pour former la surface d'une pyramide $MB_1C_1D_1$ sans la partie de la base $\triangle B_1C_1D_1$. Ainsi on obtient la surface pliée Σ_1 .

À la deuxième étape, on fait la même procédure sur ces six triangles semblables à $\triangle ABC$ mais $\triangle A_0B_1D_1$ et $\triangle A_1C_1D_1$ sont gardés. Ainsi on obtient la surface pliée Σ_2 .

En suivant la même procédure, on obtient une suite de surfaces pliées $\{\Sigma_n\}_{n=1}^\infty$. Et cette suite converge vers une surface fractale Σ sous la distance de Hausdorff.

Comme dans l'exemple précédent, on divise Σ en deux parties, une partie est composée de tous les triangles semblables à $\triangle A_0B_1D_1$, notée avec Σ'' , et on va voir qu'elle n'ajoutera aucune contribution supplémentaire à la dimension fractale de la surface Σ . Une autre partie est un ensemble auto-similaire Σ' , la trame de la surface, qui peut être générée par six similitudes S_i , $i = 1, \dots, 6$. Ces similitudes peuvent être définies de telle sorte que:

$$\begin{aligned} S_1 : \triangle ABC &\longrightarrow AB_1C_1; & S_4 : \triangle ABC &\longrightarrow MB_1C_1; \\ S_2 : \triangle ABC &\longrightarrow A_0BD_1; & S_5 : \triangle ABC &\longrightarrow MC_1D_1; \\ S_3 : \triangle ABC &\longrightarrow A_1D_1C; & S_6 : \triangle ABC &\longrightarrow MB_1D_1. \end{aligned}$$

S_1, S_4, S_5, S_6 ont pour facteur de similitude $r_1 = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3} \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}$, S_2, S_3 ont $1/2$

comme facteur de similitude r_2 . La condition d'ensemble ouvert de Moran est facilement vérifiée si on choisit U l'intérieur de K . Si on veut, l'expansivité peut être vérifiée en choisissant Σ_n^ϵ l'élément de la famille $\{S_{i_1} \circ S_{i_2} \circ \dots \circ S_{i_k}(\Sigma)\}$, où k satisfait $\epsilon \min\{r_1, r_2\} \leq h \cdot r_1^{-p} r_2^{-q} \leq \epsilon$ et p, q une paire d'entiers positifs avec $p + q = k$, h est la taille de la pyramide de $MABC$. $K(\Sigma_n^\epsilon)$ a la même forme que la pyramide de $MABCD$, mais sa taille est avec un multiplicateur près $r_1^{-p} r_2^{-q}$. La condition $K(\Sigma_n^\epsilon) \subset \Sigma(\frac{l}{h}\epsilon)$ est évidente.

La dimension de similitude de Σ' est donc la solution de l'équation

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s + 4 \left(\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3} \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}\right)^s = 1$$

On la note s_θ , et du corollaire 5.7, la dimension fractale Σ' est donc s_θ .

Soit Σ^* une pièce de Σ donnée par $\Sigma^* = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_k}(\Sigma)$, on peut lui accorder une mesure

$$\mu(\Sigma^*) = (r_{i_1} \cdots r_{i_k})^{s_\theta} = \left(\frac{\text{Diam}(\Sigma^*)}{\text{Diam}(\Sigma)}\right)^{s_\theta}$$

avec $\mu(\Sigma) = 1$.

On peut toujours recouvrir Σ' par N_ϵ pièces de ce type, disjointes ou adjacentes, de diamètres entre $r_{\min}\epsilon$ et ϵ , où $r_{\min} = \min\{r_1, r_2\}$.

Si on note $\Sigma_{i(\epsilon)}$, $i = 1, \dots, N_\epsilon$ toutes ces pièces, alors

$$1 = \sum_i \mu(\Sigma_{i(\epsilon)}) = (\text{Diam}(\Sigma))^{-s_\theta} \sum_i (\text{Diam}\Sigma_{i(\epsilon)})^{s_\theta}$$

et on a

$$N_\epsilon \simeq \epsilon^{-s_\theta}$$

D'un autre point de vue, on peut aussi dire que N_ϵ boules fermées de rayon entre $r_{\min}\epsilon$ et ϵ peuvent recouvrir Σ' et la plupart de Σ'' sauf un nombre fini de triangles.

Supposons que l'aire totale de $\triangle A_0B_1D_1$ et $\triangle A_1C_1D_1$ est S_0 . Si on note $r_{\max} = \max\{r_1, r_2\}$, le nombre de boules fermées de rayon ϵ qui peuvent recouvrir ce nombre fini de triangles de la même forme que $\triangle A_0B_1D_1$ est équivalent ou moindre que

$$\frac{S_0}{\pi\epsilon^2} + \frac{6S_0 \cdot r_{\max}^2}{\pi\epsilon^2} + \dots + \frac{S_0 \cdot r_{\max}^{2(n-1)}}{\pi\epsilon^2} \cdot \frac{r_{\max}^{s_\theta}}{3} \cdot \epsilon^{-s_\theta} + \frac{S_0 \cdot r_{\max}^{2n}}{\pi\epsilon^2} \cdot \frac{\epsilon^{-s_\theta}}{3}$$

où on peut laisser $r_{\max}^{2n} \simeq \epsilon^2$ et $r_{\max}^{-s_\theta} \cdot r_{\max}^2$ est le facteur de cette série. Alors, ce nombre est équivalent à $S_0 \cdot \epsilon^{-s_\theta}$, ou plus petit que $C\epsilon^{-s_\theta}$ avec C une constante. Donc la dimension fractale de Σ ne sera pas plus grande que la limite de

$$\frac{\log(\epsilon^{-s_\theta} + C \cdot \epsilon^{-s_\theta})}{-\log \epsilon} = \frac{\log \epsilon^{-s_\theta}}{-\log \epsilon} + \frac{\log(1 + C)}{-\log \epsilon}.$$

Quand ϵ tend vers 0, ce nombre est s_θ .

Remarque 5.1 On constate que $s_\theta = 1 + \frac{\log 3}{\log 2}$ quand $\theta = \frac{\pi}{3}$, dans ce cas, on retrouve

la situation de l'exemple 5.1; $s_\theta = 2$ quand $\theta = \frac{2\pi}{3}$, la surface est $\triangle ABC$, c'est le

cas trivial.

Conclusion

Ce fut pour moi un long voyage que d'atteindre enfin cette thèse doctorale sur le sujet de la géométrie fractale. La difficulté de la recherche a dépassé ce que j'avais pensé au début. Il est curieux d'observer la partie de mes connaissances mathématiques accumulées dans mes études universitaires qui a servi dans cette nouvelle géométrie: l'analyse mathématique, l'algèbre linéaire, la topologie générale, la théorie des graphes, la théorie de la mesure, la géométrie plane. Pour progresser en recherche, il faut toujours faire des rapprochements. Je serai satisfait si cette thèse pouvait susciter l'intérêt d'autres chercheurs et laisser sa trace dans le domaine des fractales.

Comme on a pu voir, dans le chapitre 1, on a étudié la différence et la coïncidence entre la dimension fractale et la dimension de similitude pour des courbes fractales planes, mais cette recherche est encore loin d'être terminée. Il semble difficile de réunir dans un même cadre général toutes les dimensions. Outre la complexité des courbes fractales, la difficulté de la définition des dimensions cause des problèmes. On vient d'apprendre qu'Edgar [13] a montré que la dimension de Hausdorff de la courbe de forêt a la même valeur que sa dimension fractale que nous avons trouvée ici. Mais sa méthode n'est pas toujours applicable dans d'autres circonstances. Notre méthode semble plus facile à manipuler pour la dimension fractale et elle pose aussi un problème pertinent: si un attracteur est engendré par une famille finie de similitudes, est-ce que sa dimension fractale existe toujours? On espère avoir une réponse dans le futur.

Le chapitre 2 a entrepris un examen de la courbe de Lévy. Ce qui nous a intéressé, c'est sa propriété de pavage et sa mesure non nulle. Quand on utilise la méthode de triangulation pour engendrer la courbe, à chaque étape, on constate qu'il n'y

a, en effet, pas de perte de mesure, c'est-à-dire, sa mesure est conservée jusqu'à l'infini. Est-ce qu'il y a une règle générale de conservation de mesure dans ce genre d'évolution? Au moins on espère avoir des résultats positifs pour cette conjecture dans certaines conditions. La complexité du pavage du plan par la courbe de Lévy semble unique pour l'instant, est-ce qu'il y a d'autres attracteurs qui partagent sa beauté? Les questions en mathématiques et en infographie dans ce sens représentent un grand défi.

Le chapitre 3 a repris l'application de notre méthode trouvée dans le premier chapitre pour des attracteurs du type forêt. Mais on a ajouté une généralisation de la méthode du calcul de la dimension fractale en comptant les carrés rencontrés, ce qui fait que notre technique dépasse le contenu des attracteurs, qui est plus utile dans la pratique. Comment rendre cette méthode plus maniable et utilisable pour d'autres fractales approximatives, c'est une autre tâche qui mérite de l'attention.

Le chapitre 4 semble un peu éloigné de la géométrie fractale. Mais ce problème d'algèbre linéaire vient directement de nos études fractales, et il a son importance en analyse non linéaire. En effet, on peut faire une simplification de la démonstration du théorème de Poincaré [17, pp. 325-336] avec les résultats obtenus dans ce chapitre. Ce théorème a été trouvé par Henri Poincaré dans ses études sur les équations différentielles il y a plus d'une centaine d'années, nous aimerions bien le généraliser dans un cadre plus moderne, c'est encore une question ouverte à répondre.

Dans le chapitre 5, j'ai discuté de quelques surfaces fractales. Ce sujet demande beaucoup d'imagination et de techniques informatiques. Les sujets que l'on peut traiter dans cette direction en ce moment sont plus limités que dans le plan. Dans ce cas, la discussion de surfaces composées comme dans les exemples discutés dans ce chapitre semble avoir beaucoup d'intérêt pour les applications. C'est un autre projet d'avenir que d'imaginer des fractales de l'espace et d'en faire la représentation graphique.

Bibliographie

- [1] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*. Academic Press, San Diego, 1988.
- [2] R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1960.
- [3] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*. Dunod, Paris, 1970.
- [4] G. Bouligand, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*. Bull. Sc. math. **52** (1928) pp. 320-334.
- [5] C. Davis and D. E. Knuth, *Number representation and dragon curves*. J. Recreational Math. **3** (1970) pp. 66-81, pp. 113-149.
- [6] S. Dubuc, *Une foire de courbes sans tangentes*. In Actualités Mathématiques. Actes du VI ième Congrès du Groupement des Mathématiciens d'Expression Latine, pp. 99-123. Gauthier-Villars, Paris, 1982.
- [7] S. Dubuc, *Une équation fonctionnelle pour diverses constructions géométriques*. Ann. sc. math. Québec, 1985, vol. 9, no 2, pp. 151-174.
- [8] S. Dubuc et A. Elqortobi, *Enveloppe convexe d'une courbe de Mandelbrot*. Ann. sc. math. Québec, **11** (1987) pp. 45-64. Comptes Rendus de l'atelier de géométrie fractale (1986) Montréal.
- [9] S. Dubuc et A. Elqortobi, *The support function of an attractor*. Numer. Funct. Anal. and Optimiz, **14** (1993) pp. 323-332.
- [10] S. Dubuc and J. Li, *Comparison of dimensions of a self-similar attractor*. In Fractals: Theory and Applications in Engineering, pp. 139-151. Springer, London, 1999.

- [11] G. A. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [12] G. A. Edgar, *Classics on Fractals*. Addison-Wesley, Menlo Park, 1993.
- [13] G. A. Edgar, *The Forest Fractal Puzzle*. à paraître.
- [14] K. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [15] K. Falconer, *Fractal Geometry -Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [16] F. R. Gantmacher, *Théorie des matrices*. Tome 1. Traduit par C. Sarthou. Dunod, Paris, 1966.
- [17] Gelfond, A. O. (Aleksandr Osipovich) *Calcul des différences finies*. Traduit par G. Rideau. Dunod, Paris, 1963.
- [18] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Édition corrigée et augmentée, éd. A. Jeffrey. Academic Press, New York, 1980.
- [19] A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. Blaisdell, New York, 1964.
- [20] K. Husimi, *Rolling a tetrahedron on the plane to produce periodic patterns of symmetry p_2 and drawing dragon curves as backbones of Escher figures*. In M.C. Escher Art and Science, H. S. M. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose, M. L. Teuber (Ed.) pp. 181-186. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [21] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*. Indiana Univ. Math. J. **30** (1981) pp. 713-747.
- [22] V. A. Krechmar, *Zadachnik po algebre. (Problèmes d'algèbre)*. 2e édition. Gostekhizdal, Moscou, 1950.
- [23] J. Labelle, *Théorie des graphes*. Modulo, Montréal, 1981.

- [24] P. Lévy, *Les courbes planes ou gauches et les surfaces composées de parties semblables au tout*. J. Ecole Poly., Série III **7-8** (1938), pp. 227-292. (Oeuvres de Paul Lévy. Vol. II. pp. 331-304. Gauthier-Villars, Paris, 1974)
- [25] J. M. Ortega and W. C. Rheinholdt, *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, New York, 1970.
- [26] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman, San Francisco, 1983.
- [27] B. B. Mandelbrot, *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. 2^{ème} édition. Flammarion, Paris, 1984.
- [28] K. Simon and B. Solomyak, *Correlation dimension for self-similar Cantor sets with overlaps*. Fund. Math. **155** (1998) pp. 293-300.
- [29] C. Tricot, *Courbes et dimension fractale*. Springer-Verlag , New York, 1995.
- [30] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- [31] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, 1965.

Liste des figures

1.1	Courbe de la forêt	5
1.2	Courbe de Lévy	10
1.3	Les 4 premières lignes polygonales approchant Γ'	12
1.4	Deux cas pour le point P	13
1.5	Sommets de graphe de divers types avec la transformation des arêtes qui les contiennent	16
2.1	Courbe de Lévy	22
2.2	Triangulation du plan avec numérotation. L'enveloppe convexe de la courbe de Lévy est en gris.	27
2.3	Onzième approximation de la courbe de Lévy et indication en rouge d'un carré dont le centre est un point intérieur à la courbe de Lévy.	28
2.4	Lignes polygonales approchant la courbe de Lévy et indication par des flèches rouges des segments qui permettent de vérifier que $\mu(C \cap C_n) =$ 0.	41
2.5	Évolution des tuiles numérotées par ordre de leur apparition.	42
2.6	La distribution de la mesure de la courbe de Lévy sur la triangulation d'ordre 2. Le triangle T_0 est tracé en gras.	42
2.7	Tracé du pavage en couleur; la courbe de Lévy et ses translatées par des vecteurs à coordonnées entières sont en noir, la courbe C_1 et ses translatées en bleu, la courbe C_2 et ses translatées en rouge, la courbe C_3 et ses translatées en vert. Le carré unité est désigné par un trait blanc. L'ordre d'approximation est de 12.	43

2.8	Les quatre premières approximations du pavage.	44
3.1	Graphe de la fonction itérante.	51
3.2	La construction du tamis de Sierpinski	53
3.3	La position relative entre des triangles de deux générations	55
3.4	Quatre attracteurs.	65
3.5	Transformations des sommets des types de 1 à 5 à l'occasion des trois attracteurs (a), (c) et (d). Les schémas de la première ligne indiquent les divers types que peut prendre un sommet à une génération donnée, ce sommet est indiqué par un point blanc. Les schémas des lignes suivantes montrent comment se transforme le sommet à la génération suivante; les nouveaux sommets créés au voisinage du sommet de départ sont indiqués par des points noirs. Si un schéma manque, c'est qu'il n'apparaît pas dans la construction de l'attracteur correspondant. . .	66
5.1	Taille(K) et Taille $_{\frac{1}{d}}$ (K)	82
5.2	Une boîte circonscrite à K et K pris en sandwich par deux plans parallèles	84
5.3	La construction de la pyramide de von Koch	92
5.4	Une première surface fractale construite sur un carré	94
5.5	Une seconde surface fractale construite sur un carré	95
5.6	La construction d'une surface fractale de type pyramide	97

Liste des tableaux

2.1	Liste des couples de portions élémentaires d'ordre m (A_i, A_j) semblables au couple de courbes (C, C_n)	31
2.2	Distribution de la mesure de C dans les triangles $T_n, n \in D$	35
4.1	Erreurs absolues et relatives de deux approximations.	78