

**Université de Montréal**

**Reconstruction de pare-brises**

par

**Antoine Dion-St-Germain**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

23 septembre 2022



# Université de Montréal

Faculté des arts et des sciences

---

Ce mémoire intitulé

## Reconstruction de pare-brises

présenté par

**Antoine Dion-St-Germain**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Iosif Polterovich*

---

(président-rapporteur)

*Anne Bourlioux*

---

(directrice de recherche)

*Yvan Saint-Aubin*

---

(codirecteur)

*Jean-Marc Lina*

---

(membre du jury)



## Résumé

---

Ce mémoire présente une méthode de reconstruction de la surface d'un pare-brise à partir d'une image observée au travers de celui-ci. Cette image est déformée, car les rayons lumineux traversant le pare-brise subissent deux réfractions : une de chaque côté du verre. La déformation de l'image est dépendante de la forme du pare-brise, c'est donc cette donnée qui est utilisée pour résoudre le problème. La première étape est la construction d'un champ de vecteurs dans l'espace ambiant à partir des déviations des rayons lumineux passant par le pare-brise. Elle repose sur la loi de la réfraction de Snell-Descartes et sur des hypothèses simplificatrices au sujet de la courbure et de l'épaisseur du pare-brise. Le vecteur en un point de ce champ correspond à une prédiction du vecteur normal à la surface, sous l'hypothèse que celle-ci passe par le point en question. La deuxième étape est de trouver une surface compatible avec le champ de vecteurs obtenu. Pour y arriver, on formule un problème de minimisation où la donnée minimisée est la différence entre les vecteurs normaux à la surface et ceux construits à partir des mesures du système d'inspection. Il en résulte une équation d'Euler-Lagrange non linéaire à laquelle on impose des conditions de Dirichlet. Le graphe de la solution à ce problème est alors la surface recherchée. La troisième étape est une méthode de point fixe pour résoudre l'équation d'Euler-Lagrange. Elle donne une suite d'équations de Poisson linéaires dont la limite des solutions respecte l'équation non linéaire étudiée. On utilise le théorème du point fixe de Banach pour obtenir des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution, qui sont aussi des conditions suffisantes pour lesquelles la méthode de point fixe converge.

Mots clés : pare-brise, reconstruction de surface, équation d'Euler-Lagrange, réfraction, loi de Snell-Descartes, équations aux dérivées partielles non linéaires, théorème du point fixe de Banach



# Abstract

---

This Master's thesis presents a method for the reconstruction of a windshield surface using an image observed through it. This image is distorted because the light rays passing through the windshield undergo two refractions : one on each side of the glass. The distortion depends on the windshield shape and therefore this data is used to solve the problem. The first step is the construction of a vector field in the ambient space, from the deviations of the light rays passing through the windshield. This step relies on the Snell-Descartes refraction law and on simplifying assumptions regarding the curvature and thickness of a windshield. A vector at a point of this field corresponds to a prediction of the surface normal vector at this point, under the hypothesis that this point lies on the surface. The second step is to find a surface that is compatible with the obtained vector field. For this purpose, a minimisation problem is formulated for which the minimized variable is the difference between the surface normal vector and the one deduced from the system's measurements. This leads to a nonlinear Euler-Lagrange equation for which the Dirichlet boundary conditions are imposed. The graph of the solution is the desired surface. The third step is a fixed-point method to solve the Euler-Lagrange equation. At the center of this method is a sequence of linear Poisson equations, each giving an approximating solution. It is shown that the limit of this sequence of solutions respects the original nonlinear equation. The Banach fixed-point theorem is used to get sufficient existence and uniqueness conditions, that are also sufficient conditions under which the proposed fixed-point method converges.

Keywords : windshield, surface reconstruction, Euler-Lagrange equation, refraction, Snell-Descartes law, nonlinear partial differential equations, Banach fixed-point theorem





# Table des matières

---

<b>Résumé</b> .....	5
<b>Abstract</b> .....	7
<b>Table des figures</b> .....	11
<b>Liste des sigles et des abréviations</b> .....	13
<b>Remerciements</b> .....	15
<b>Chapitre 1. Introduction</b> .....	17
1.1. Mise en situation et objectif .....	17
1.2. Réfraction et loi de Snell-Descartes .....	18
1.3. Reconstruction de surface .....	20
1.4. Motivation .....	20
1.5. Le système .....	21
<b>Chapitre 2. Le modèle</b> .....	25
2.1. Modélisation de la caméra .....	25
2.2. Problème direct : notation et équations .....	26
2.3. Plans parallèles .....	28
2.4. Approximations .....	30
2.5. La fonction $f(\theta)$ .....	32
<b>Chapitre 3. Problème inverse : reconstruction de la forme du verre</b> .....	35
3.1. Le pare-brise comme graphe d'une fonction .....	35
3.2. Le vecteur normal observé $N_{\text{obs}}$ et la fonction $\Phi$ .....	36
3.3. Le problème de minimisation .....	37

3.3.1.	L'équation d'Euler-Lagrange : formulation générale.....	37
3.3.2.	L'équation d'Euler-Lagrange : application à la reconstruction de surface...	37
3.4.	Des exemples .....	38
3.4.1.	Algorithme pour les exemples.....	39
3.4.2.	Le pare-brise linéaire.....	39
3.4.3.	Le pare-brise plan.....	41
3.4.4.	Le pare-brise parabolique.....	41
3.4.5.	Le pare-brise sphérique centré sur la caméra.....	43
3.4.6.	Le pare-brise ellipsoïdal centré sur la caméra.....	43
3.5.	Existence et unicité par le théorème du point fixe de Banach.....	44
3.5.1.	L'espace de Sobolev et les normes utilisées.....	44
3.5.2.	Le théorème du point fixe de Banach.....	47
3.5.3.	Principe de comparaison.....	47
3.5.4.	Le théorème d'existence et d'unicité.....	49
3.5.5.	Exemples d'utilisation du théorème.....	53
3.6.	Preuve alternative pour l'unicité de la solution.....	56
3.6.1.	Vérification du critère d'unicité sur les exemples.....	57
<b>Conclusion .....</b>		<b>59</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>		<b>61</b>

# Table des figures

---

1.1	La loi de Snell-Descartes .....	19
1.2	Un exemple de pare-brise plat (1952) [1] .....	21
1.3	Un exemple de pare-brise courbé et incliné (2011)[2] .....	22
1.4	Un exemple de dédoublement de l'image[8] .....	22
1.5	Un exemple de dédoublement de l'affichage HUD [3] .....	23
1.6	Le système d'inspection [5] .....	23
2.1	Direction $L_1$ de la droite associée au point $X_{\text{img}}$ .....	26
2.2	Notation .....	27
2.3	Pare-brise plat .....	28
2.4	Le déplacement dans le verre .....	31
2.5	Approximation .....	32
2.6	La fonction $f(\theta)$ .....	33
3.1	Le pare-brise comme graphe de $z_1(\mathbf{x})$ .....	36
3.2	Extraction du vecteur $N_{\text{obs}}$ pour les exemples .....	39
3.3	Le pare-brise linéaire .....	40
3.4	Le pare-brise parabolique .....	41
3.5	Interprétation du théorème 3.5.17 .....	50
3.6	Encadrement de $\hat{u}$ par $u_m$ et $u_M$ .....	51
3.7	Le pare-brise ellipsoïdal .....	56



## Liste des sigles et des abréviations

---

CCD	Capteur photographique, de l'anglais <i>charged coupled device</i>
CMM	Machine à mesurer tridimensionnelle, de l'anglais <i>coordinate measuring machine</i>
HUD	Affichage tête haute, de l'anglais <i>head-up display</i>
TPFB	Théorème du point fixe de Banach



## Remerciements

---

Je tiens à remercier Anne Bourlioux, ma directrice de mémoire, pour sa patience et son soutien continu, des premières esquisses du projet jusqu'aux dernières retouches de la rédaction. J'ai pu à de nombreuses reprises compter sur son évaluation rapide et complète des pistes de solution vers lesquelles je me suis dirigé, ainsi que sur ses conseils s'étant souvent avérés clés dans l'avancement de cette recherche.

Je remercie aussi Yvan Saint-Aubin, codirecteur de ce mémoire, pour ses avis et ses suggestions au sujet des différentes approches empruntées et de la présentation des résultats. Ses examens minutieux de la rédaction ont attrapé plus d'une erreur et ont grandement contribué à la qualité de ce mémoire.

Un grand merci également à Iosif Polterovich pour avoir vérifié certaines parties de la preuve d'existence et d'unicité. J'ai pu en améliorer la rigueur grâce aux livres de référence qu'il nous a suggérés.

Finalement, je suis reconnaissant envers SYNERGX pour le soutien financier offert par l'intermédiaire de la bourse Mitacs. Je remercie en particulier Stéphane Baldo d'avoir proposé et lancé ce projet. Son aide a été curciale dans le déploiement des notions mathématiques nécessaires à sa réalisation. Son expertise industrielle a guidé les réflexions au travers des contraintes et des réalités du domaine d'application de ce mémoire.

Cette recherche a reçu le soutien de Mitacs dans le cadre du programme Mitacs Accélération.





# Chapitre 1

---

## Introduction

### 1.1. Mise en situation et objectif

Les rayons lumineux passant d'un milieu optique à un autre sont déviés de leur trajectoire : c'est ce que l'on appelle la réfraction de la lumière. Cette déviation est décrite par la loi de Snell-Descartes. Elle dépend du vecteur normal de l'interface séparant les deux milieux optiques ainsi que de leurs indices de réfraction. Cela explique pourquoi l'image observée au travers d'un objet transparent, un pare-brise par exemple, peut être déformée.

Pour des raisons de sécurité et de confort lors de la conduite, mais aussi pour des applications technologiques comme les affichages tête haute (HUD), on voudrait que les pare-brises ne causent qu'une très faible déformation de l'image. C'est entre autres pourquoi les pare-brises passent par les systèmes d'inspection. Lorsque la déformation est trop grande, le pare-brise doit être rejeté.

Le projet dont traite ce mémoire a été proposé par *SYNERGX*, une entreprise qui conçoit des systèmes d'inspection pour le verre. Le système d'inspection étudié ici est inspiré d'un de leurs systèmes. Il est constitué d'une caméra et d'une grille. La caméra capture une image de la grille au travers du pare-brise inspecté. C'est à partir de cette image qu'il est décidé si le pare-brise doit être rejeté ou non. Puisque la position de la caméra du système d'inspection relativement au pare-brise ne correspond pas nécessairement à celle du conducteur, on cherchera à trouver la forme du pare-brise. En effet, si la forme du pare-brise est connue, la déformation de l'image peut être complètement calculée pour toutes les positions de caméra. Cette donnée est aussi utile pour prédire d'autres phénomènes optiques liés au pare-brise tels que la polarisation de la lumière et le dédoublement de l'image.

Ce chapitre introductoire explique les notions préliminaires qui seront utiles pour la modélisation puis la résolution du problème. On présente ensuite au chapitre 1 un aperçu

de la configuration du système ainsi que des enjeux qui motivent le projet. Le chapitre 2 suit en proposant un modèle accompagné d'hypothèses simplificatrices justifiées par la réalité des pare-brises inspectés. Ce modèle permet d'extraire le champ de vecteurs normaux utilisé au chapitre 3. Ce dernier chapitre énonce le problème inverse comme la résolution d'une équation d'Euler-Lagrange, qui s'avère être ici une équation aux dérivées partielles non linéaire. Il se termine par un théorème donnant des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution. La preuve de celui-ci repose sur le théorème du point fixe de Banach et fournit donc aussi un algorithme de point fixe pour inverser le problème.

## 1.2. Réfraction et loi de Snell-Descartes

Cette section donne les principes d'optique nécessaires à la modélisation. Il s'agit principalement d'introduire la version vectorielle des lois de Snell-Descartes.

**Définition 1.2.1** (Indice de réfraction). *L'indice de réfraction  $n$  d'un milieu optique dans lequel la lumière se propage à une vitesse  $v$  est donné par  $n = \frac{c}{v}$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.*

Les milieux optiques en jeu ici sont l'air ( $n_1 \approx 1,00$ ) et le verre ( $n_2 \approx 1,52$ ). On se limite donc au cas  $\eta := n_2/n_1 \approx 1,52$ .

La réfraction de la lumière d'un milieu optique à un autre suit la loi de Snell-Descartes (voir [9]).

**Théorème 1.2.2** (Loi de Snell-Descartes pour la réfraction). *Soit un rayon lumineux réfracté par une interface optique.*

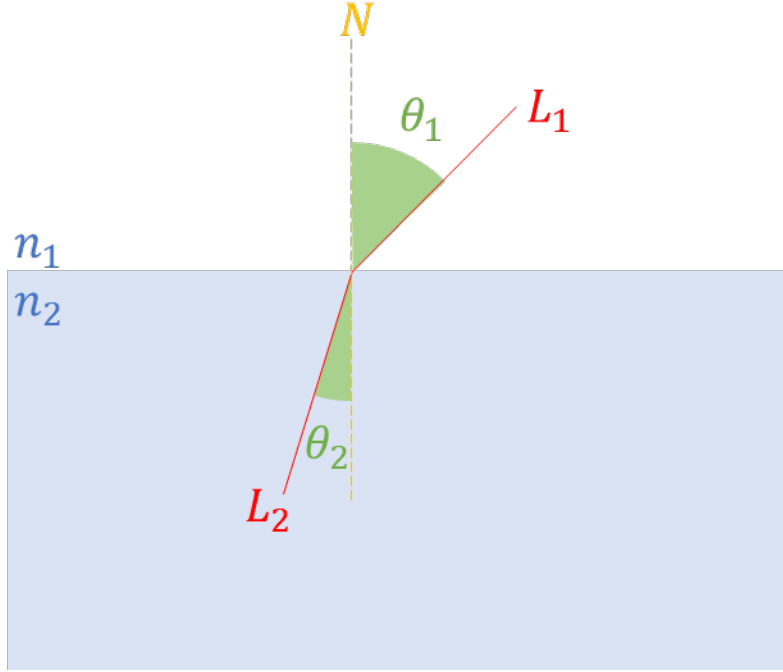
- (1) *Le rayon incident, le rayon émergent et la droite normale à l'interface optique sont coplanaires.*
- (2) *De plus, si les milieux optiques des rayons incident et émergent ont les indices de réfractions  $n_1$  et  $n_2$ , alors la relation entre les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  que forment les rayons incident et émergent avec la droite normale est donnée par*

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2). \tag{1.2.1}$$

La figure 1.1 illustre la loi de Snell-Descartes.

**Corollaire 1.2.3** (Formulation vectorielle). *Soit  $L_1$  le vecteur directeur du rayon lumineux dans le milieu  $n_1$ ,  $L_2$  le vecteur directeur du rayon lumineux dans le milieu  $n_2 > n_1$  et  $N$  le vecteur normal à l'interface optique. Supposons  $L_1, L_2$  et  $N$  unitaires. La relation entre  $L_1, L_2$  et  $N$  est*

$$\eta L_2 = L_1 + \alpha N, \tag{1.2.2}$$



**Figure 1.1.** La loi de Snell-Descartes

où  $\alpha = -(L_1 \cdot N) + \sqrt{(L_1 \cdot N)^2 - 1 + \eta^2}$  et  $\eta = \frac{n_2}{n_1} > 1$ .

DÉMONSTRATION. Les rayons lumineux et la droite normale à l'interface optique sont coplanaires. Il existe donc  $a, \alpha \in \mathbb{R}$  tels que

$$\eta L_2 = a L_1 + \alpha N. \quad (1.2.3)$$

On prend le produit scalaire avec un vecteur  $T$  orthogonal à  $N$  et coplanaire à  $L_1$  et  $N$  :

$$\eta(L_2 \cdot T) = a(L_1 \cdot T) + \alpha(N \cdot T) \quad (1.2.4)$$

$$\eta \sin(\theta_2) = a \sin(\theta_1). \quad (1.2.5)$$

On a donc  $a = 1$  par la loi de Snell-Descartes. On prend ensuite le produit scalaire avec  $N$  :

$$\eta(L_2 \cdot N) = (L_1 \cdot N) + \alpha(N \cdot N) \quad (1.2.6)$$

$$\eta \cos(\theta_2) = (L_1 \cdot N) + \alpha. \quad (1.2.7)$$

On isole  $\alpha$  puis on exprime  $\cos(\theta_2)$  en fonction de  $L_1$  et  $N$  :

$$\alpha = -(L_1 \cdot N) + \eta \cos(\theta_2) \quad (1.2.8)$$

$$= -(L_1 \cdot N) + \eta \sqrt{1 - \sin^2(\theta_2)} \quad (1.2.9)$$

$$= -(L_1 \cdot N) + \sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta_1)} \quad (1.2.10)$$

$$= -(L_1 \cdot N) + \sqrt{(L_1 \cdot N)^2 - 1 + \eta^2} \quad (1.2.11)$$

On obtient bien

$$\eta L_2 = L_1 + \alpha N \quad (1.2.12)$$

avec

$$\alpha := -(L_1 \cdot N) + \sqrt{(L_1 \cdot N)^2 - 1 + \eta^2}. \quad (1.2.13)$$

□

### 1.3. Reconstruction de surface

Il est possible d'obtenir une description précise de la surface des pare-brises en utilisant des instruments de métrologie tels que les machines à mesurer tridimensionnelles (appelées CMM, de l'anglais *Coordinate Measuring Machine*). Ces instruments détectent la position d'un nuage de points sur la surface en la palpant avec une sonde tactile. Les désavantages de cette méthode sont le coût du matériel requis, le temps d'exécution et le contact physique avec le verre. La méthode proposée dans ce mémoire évite ces trois désavantages en utilisant une caméra plutôt qu'une CMM.

Une approche du problème de la reconstruction de surface est décrite dans l'article de Bolitho, Hoppe et Kazhdan [7]. Le problème qui y est étudié est la reconstruction d'une surface à partir d'un nuage de points orientés. En d'autres mots, la donnée initiale est une collection de points sur la surface accompagnés de leurs vecteurs normaux correspondants. La solution proposée est de trouver une fonction indicatrice dont la frontière du support est la surface recherchée. Cette approche mène à une équation de Poisson. Dans ce mémoire, contrairement à cet article, la position des points sur la surface ne fait pas partie des données disponibles. La nature presque plane des pare-brises nous permettra de représenter les surfaces par le graphe d'une fonction plutôt que d'utiliser une fonction indicatrice. Un point commun avec l'approche de [7] est que l'approche présentée fera aussi apparaître une équation de Poisson.

### 1.4. Motivation

La courbure et l'inclinaison des pare-brises ont tendance à être plus fortes qu'elles ne l'étaient. On en voit un exemple en comparant le pare-brise relativement plat d'une voiture DeSoto de 1952 (figure 1.2) au pare-brise courbé d'une voiture Nissan Leaf de 2011 (figure

1.3). Les raisons pour lesquelles la courbure et l'inclinaison des pare-brises ont changé incluent l'aérodynamisme, la largeur du champ de vision et l'apparence de la voiture.



**Figure 1.2.** Un exemple de pare-brise plat (1952) [1]

Cependant, la courbure et l'inclinaison du pare-brise causent des effets optiques indésirables comme le dédoublement de l'image. Les figures 1.4 et 1.5 montrent des exemples de dédoublement de l'image. La figure 1.4 illustre le dédoublement de l'image d'un objet se trouvant à l'extérieur du véhicule. La figure 1.5 montre le dédoublement de l'image projetée par l'affichage HUD. Ce dernier projette une image sur le pare-brise de manière à ce que le conducteur en voit la réflexion. Ces phénomènes peuvent être modélisés si les deux surfaces du pare-brise sont connues.

s

## 1.5. Le système

Le système d'inspection étudié dans ce mémoire est inspiré d'un des systèmes d'inspection de SYNERGX. Il est constitué d'une caméra observant le motif d'une grille au travers des pare-brises qu'il inspecte. Lors de leur inspection, les pare-brises sont déplacés sur un convoyeur jusqu'à passer entre la grille et la caméra. Une image de la grille peut donc être capturée au moment où ils traversent le champ de vision de celle-ci (en rouge sur la figure 1.6). Si le passage d'un pare-brise cause une distorsion anormale de l'image, il sera rejeté.



**Figure 1.3.** Un exemple de pare-brise courbé et incliné (2011)[2]



**Figure 1.4.** Un exemple de dédoublement de l'image[8]

Ce système n'observe qu'une partie du pare-brise à un temps donné. Dans ce mémoire, on néglige cet aspect en supposant que la totalité du pare-brise est visible dans une image.





Figure 1.5. Un exemple de dédoublement de l'affichage HUD [3]

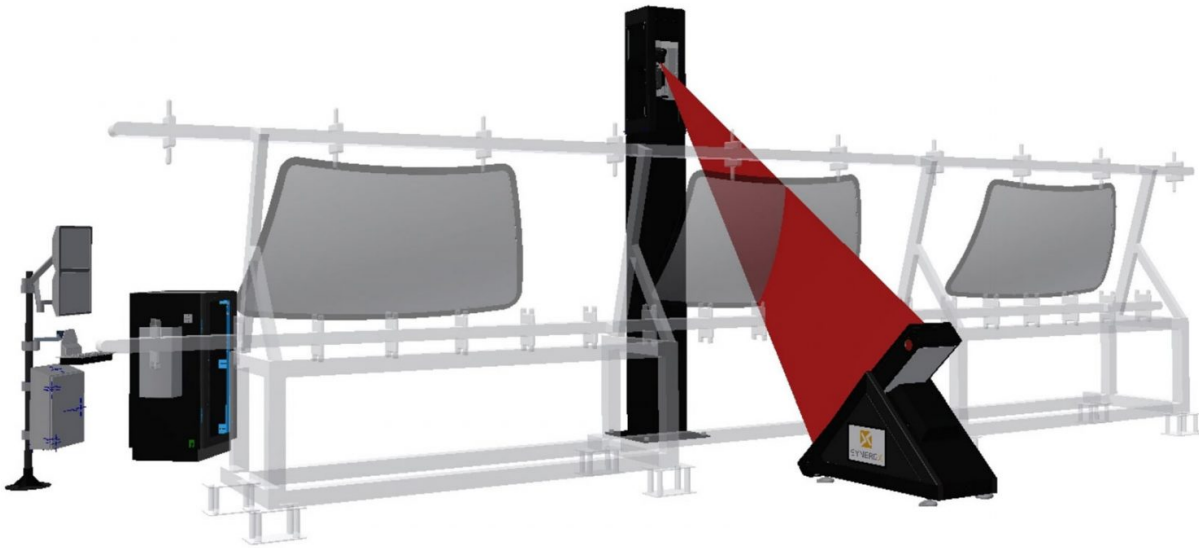


Figure 1.6. Le système d'inspection [5]





# Chapitre 2

---

## Le modèle

Dans ce chapitre, on décrit la trajectoire d'un rayon lumineux subissant deux réfractions aux travers d'un pare-brise. On met d'abord en place la notation pour le cas d'un pare-brise de forme générale. On discute ensuite en détail du cas d'un pare-brise délimité par deux plans parallèles. Cette configuration mène à des simplifications très intéressantes lors du calcul du tracé du rayon lumineux. On voit alors dans quelles mesures ces simplifications peuvent être utilisées pour des pare-brises courbes, sous certaines hypothèses, ce qui permet d'aborder le problème inverse avec l'approche discutée dans le chapitre 3.

### 2.1. Modélisation de la caméra

Une étape préliminaire de l'utilisation du système d'inspection est sa calibration. Cette section décrit brièvement le processus de calibration pour un modèle de caméra simple, qui ignore notamment la distorsion optique de la lentille.

Dans ce modèle, la caméra est composée d'une origine et d'un plan image (voir la figure 2.1). Le plan image représente le capteur photographique (*CCD*) de la caméra. Il se trouve à une distance  $f$  connue de l'origine. On associe une position  $X_{\text{img}}$  sur le plan image à chaque point  $X_{\text{grille}}$  observé par la caméra. Le point  $X_{\text{img}}$  est obtenu en prenant l'intersection du plan image avec la droite reliant l'origine au point  $X_{\text{grille}}$  observé sur la grille.

Avec ce modèle, la direction  $L_1$  de la droite associée à un point  $X_{\text{img}} = (x_{\text{img}}, y_{\text{img}})$  est donnée par

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{f^2 + x_{\text{img}}^2 + y_{\text{img}}^2}} \begin{pmatrix} x_{\text{img}} \\ y_{\text{img}} \\ f \end{pmatrix}. \quad (2.1.1)$$

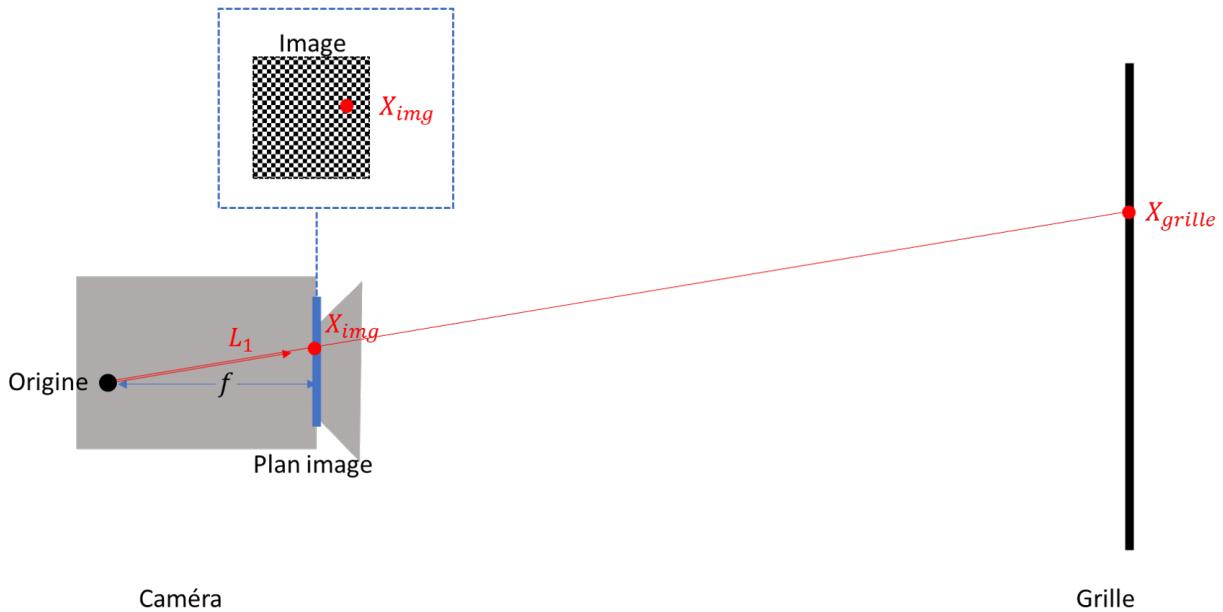
La position dans l'image  $X_{\text{img}}$  du point  $X = (x, y, z)$  est

$$X_{\text{img}} = \frac{f}{z} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Pour le problème de reconstruction du pare-brise, on utilise une grille de calibration. Sur cette grille se trouve un motif qui permet d'identifier le point  $X_{\text{grille}} = (x_{\text{grille}}, y_{\text{grille}})$  de la grille observée au point  $X_{\text{img}}$  de l'image. On exprime le positionnement dans l'espace de la grille par une matrice de rotation  $R$  et une translation  $T$  :

$$X_{\text{grille}} = R \begin{pmatrix} x_{\text{grille}} \\ y_{\text{grille}} \\ 0 \end{pmatrix} + T. \quad (2.1.3)$$

La rotation  $R$  et la translation  $T$  sont trouvées en minimisant l'erreur entre les observations et les données simulées.



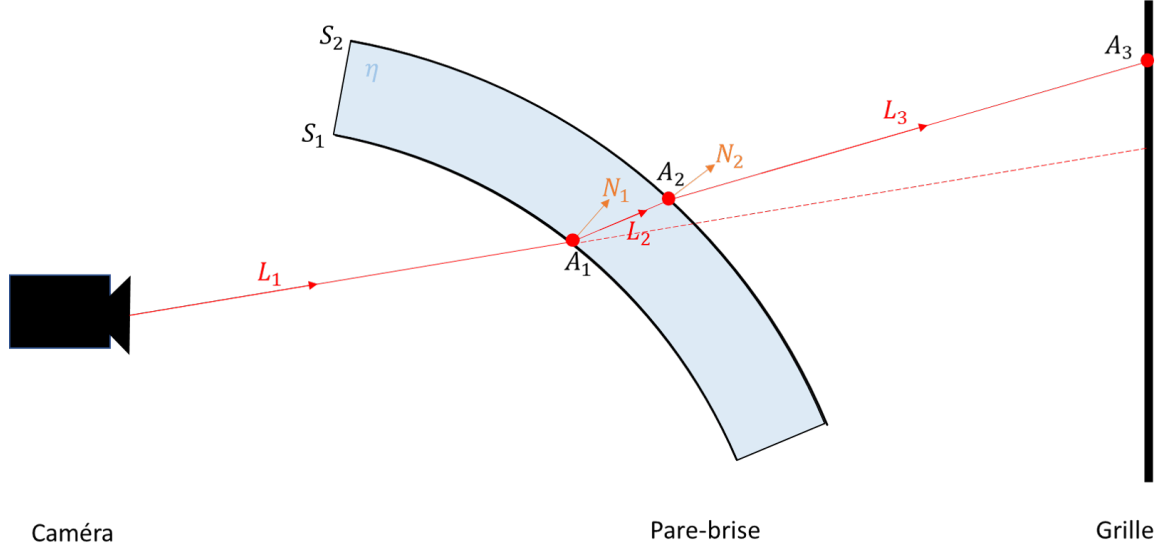
**Figure 2.1.** Direction  $L_1$  de la droite associée au point  $X_{\text{img}}$

## 2.2. Problème direct : notation et équations

Le problème direct consiste à trouver la position sur la grille correspondant à un point observé dans l'image de la caméra pour un pare-brise d'incidence de réfraction  $\eta > 1$  dont les surfaces le délimitant sont connues (voir fig 2.2).

La notation  $L_1, L_2$  et  $L_3$  est utilisée pour les trois vecteurs directeurs du rayon lumineux : celui dans l'air (côté caméra), celui dans le verre et celui dans l'air (côté grille). Les points d'incidence du rayon lumineux avec les surfaces du pare-brise sont notés par  $A_1$  pour le

côté caméra et par  $A_2$  pour le côté grille. Les vecteurs normaux aux surfaces du pare-brise en ces deux points sont notés  $N_1$  et  $N_2$  respectivement. Finalement, l'intersection du rayon lumineux avec la grille est notée par  $A_3$ . On place l'origine sur la caméra.



**Figure 2.2.** Notation

L'étalonnage de la caméra permet de trouver la direction  $L_1$  associée à un point de l'image. On suppose donc que  $L_1$  est connue pour la suite.

Les étapes à suivre pour trouver  $A_3$  à partir de  $L_1$  et d'un pare-brise connu sont :

- (1) Trouver  $A_1$  en prenant l'intersection de la surface  $S_1$  avec la droite de direction  $L_1$  passant par l'origine.
- (2) Trouver le vecteur normal  $N_1$  de la surface  $S_1$  au point  $A_1$ .
- (3) Calculer  $\alpha_1$  :

$$\alpha_1 := -L_1 \cdot N_1 + \sqrt{(L_1 \cdot N_1)^2 - 1 + \eta^2}. \quad (2.2.1)$$

- (4) Calculer  $L_2$  avec la loi de Snell-Descartes :

$$L_2 = \eta^{-1} (L_1 + \alpha_1 N_1). \quad (2.2.2)$$

- (5) Trouver  $A_2$  en prenant l'intersection de la surface  $S_2$  avec la droite de direction  $L_2$  passant par le point  $A_1$ .
- (6) Trouver le vecteur normal  $N_2$  de la surface  $S_2$  au point  $A_2$ .
- (7) Calculer  $\alpha_2$  :

$$\alpha_2 := \eta L_2 \cdot N_2 - \sqrt{(\eta L_2 \cdot N_2)^2 + 1 - \eta^2}. \quad (2.2.3)$$

- (8) Calculer  $L_3$  avec la loi de Snell-Descartes :

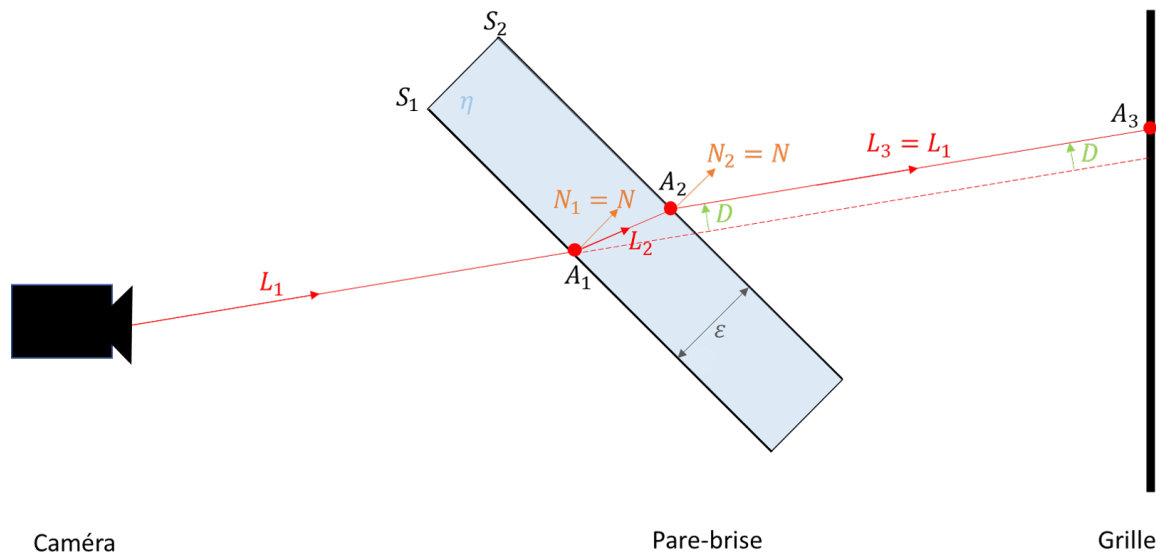
$$L_3 = L_1 + \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_2. \quad (2.2.4)$$

- (9) Trouver  $A_3$  en prenant l'intersection de la droite de vecteur directeur  $L_3$  passant par  $A_2$ .

On note que les directions du tracé lumineux sur les schémas sont en fait les directions opposées aux directions physiques réelles. Cela permet de retirer quelques signes négatifs des équations et n'a pas d'autres incidences sur le modèle (principe de réciprocité de Helmholtz).

De plus, la figure 2.2 illustre un cas en dimension 2 qui réduit tout le problème à un unique plan de réfraction. Dans un cas tridimensionnel, le rayon sortant du verre pourrait être gauche au rayon entrant. En d'autres mots, les vecteurs directeurs  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  ne sont pas nécessairement coplanaires.

### 2.3. Plans parallèles



**Figure 2.3.** Pare-brise plat

Un des cas les plus simples de la réfraction double est celui des plans parallèles de vecteur normal  $N$  séparés par une épaisseur  $\varepsilon$  (figure 2.3). Les rayons lumineux sortant du pare-brise sont alors parallèles aux rayons d'entrée comme l'indique le théorème suivant. L'implication  $N_1 = N_2 \implies L_1 = L_3$  sera exploitée dans les sections suivantes afin de simplifier le modèle.

Le théorème suivant est particulièrement intéressant dans le cas où les surfaces du pare-brise sont des plans parallèles, car la condition sur les droites normales y est toujours respectée.

**Théorème 2.3.1** (Réfraction double). *Soit un rayon lumineux traversant deux interfaces optiques de manière à passer du milieu  $n_1$  au milieu  $n_2 > n_1$ , puis du milieu  $n_2$  au milieu*

$n_1$ . Le rayon résultant est parallèle au rayon incident si et seulement si les droites normales aux points d'entrée et de sortie sont parallèles.

DÉMONSTRATION. Soit  $L_1$  et  $L_3$ , les vecteurs directeurs des rayons lumineux du milieu  $n_1$ , et  $L_2$ , le vecteur directeur du rayon du milieu  $n_2$ . On note les vecteurs normaux des deux interfaces optiques par  $N_1$  et  $N_2$ .

On utilise la forme vectorielle de la loi de Snell-Descartes.

$$\eta L_2 = L_1 + \alpha_1 N_1 = L_3 + \alpha_2 N_2 \quad (2.3.1)$$

$$\alpha_1 := -(L_1 \cdot N_1) + \sqrt{(L_1 \cdot N_1)^2 - 1 + \eta^2} \quad (2.3.2)$$

$$\alpha_2 := -(L_3 \cdot N_2) + \sqrt{(L_3 \cdot N_2)^2 - 1 + \eta^2} \quad (2.3.3)$$

On trouve

$$L_3 - L_1 = \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_2. \quad (2.3.4)$$

Pour  $\eta > 1$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont strictement positifs. On a donc  $L_1 = L_3 \implies N_1 = N_2$ .

De plus, si  $N := N_1 = N_2$ , alors

$$L_3 \cdot N - L_1 \cdot N = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (2.3.5)$$

$$\implies \sqrt{(L_3 \cdot N)^2 - 1 + \eta^2} = \sqrt{(L_1 \cdot N)^2 - 1 + \eta^2} \quad (2.3.6)$$

$$\implies L_3 \cdot N = L_1 \cdot N \quad (2.3.7)$$

$$\implies \alpha_1 = \alpha_2 \quad (2.3.8)$$

$$\implies L_3 = L_1 + \alpha N - \alpha N = L_1 \quad (2.3.9)$$

On a donc  $N_1 = N_2 \iff L_1 = L_3$ . □

La réfraction double sur les plans parallèles a donc les propriétés importantes suivantes.

- (1)  $L_3 = L_1$ .
- (2) Le tracé lumineux est entièrement contenu dans le plan défini par  $L_1$  et  $N$ .
- (3) Le déplacement  $V := A_2 - A_1$  à l'intérieur du verre est déterminé par l'épaisseur  $\varepsilon$ , le vecteur directeur  $L_1$  et le vecteur normal  $N$ . C'est le vecteur parallèle à  $L_2$  qui parcourt une distance  $\varepsilon$  dans la direction  $N$  (voir figure 2.4) :

$$V := \frac{\varepsilon}{L_2 \cdot N} L_2. \quad (2.3.10)$$

On peut trouver la translation  $D$  entre les droites formées par les rayons entrant et sortant du verre (figure 2.4). Le vecteur  $D$  correspond à la partie de  $V$  orthogonale à  $L_1$  :

$$D := \left( I - L_1 L_1^T \right) V. \quad (2.3.11)$$

On calcule ensuite la norme de ce vecteur, qui correspond à la distance entre les deux droites. On désigne d'abord par  $\theta$  l'angle entre  $L_1$  et  $N$ , puis on calcule les produits scalaires entre  $L_2 \cdot L_1$  et  $L_2 \cdot N$  :

$$L_2 \cdot L_1 = \eta^{-1} \left( \sin^2(\theta) + \cos(\theta) \sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)} \right) \quad (2.3.12)$$

$$L_2 \cdot N = \eta^{-1} \sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)}. \quad (2.3.13)$$

On obtient

$$\|D\|^2 = \|V\|^2 - (L_1 \cdot V)^2 \quad (2.3.14)$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{(L_2 \cdot N)^2} \left( 1 - (L_2 \cdot L_1)^2 \right) \quad (2.3.15)$$

$$= \frac{\eta^2 \varepsilon^2}{\eta^2 - \sin^2(\theta)} \left( 1 - \eta^{-2} \left( \sin^2(\theta) + \cos(\theta) \sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)} \right)^2 \right) \quad (2.3.16)$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{\eta^2 - \sin^2(\theta)} \left( \eta^2 - \sin^4(\theta) - \cos^2(\theta) (\eta^2 - \sin^2(\theta)) - 2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)} \right) \quad (2.3.17)$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{\eta^2 - \sin^2(\theta)} \left( (\eta^2 - \sin^2(\theta)) - 2 \cos(\theta) \sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)} + \cos^2(\theta) \right) \sin^2(\theta) \quad (2.3.18)$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{\eta^2 - \sin^2(\theta)} \left( \sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)} - \cos(\theta) \right)^2 \sin^2(\theta) \quad (2.3.19)$$

$$= \varepsilon^2 \left( 1 - \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)}} \right)^2 \sin^2(\theta). \quad (2.3.20)$$

Le système d'inspection est conçu de manière à ce que l'angle  $\theta$  soit au voisinage de  $60^\circ \approx 1,05$  radian. On a donc

$$\|D\| = \varepsilon \left( 1 - \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)}} \right) \sin(\theta). \quad (2.3.21)$$

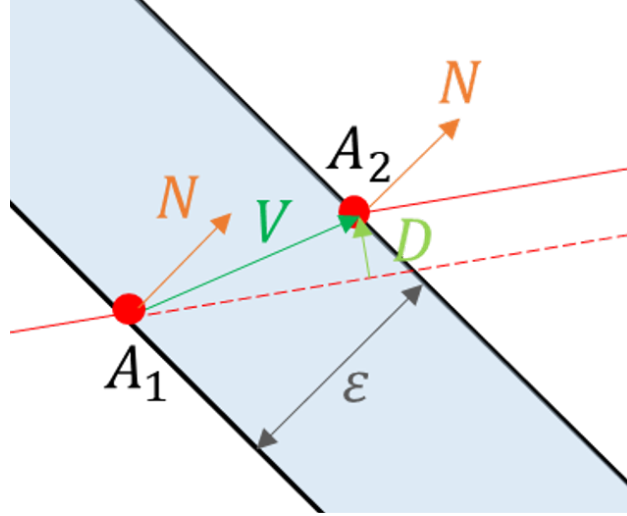
En posant  $f(\theta) = \left( 1 - \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)}} \right) \sin(\theta)$ , on obtient l'expression suivante :

$$\|D\| = \varepsilon f(\theta). \quad (2.3.22)$$

## 2.4. Approximations

En réalité, les pare-brises ne correspondent pas parfaitement à des plans parallèles. Ils n'en sont cependant pas si éloignés. On fait les suppositions suivantes.

- (1) Les courbures de chacune des surfaces du pare-brise sont faibles.



**Figure 2.4.** Le déplacement dans le verre

- (2) Les surfaces du pare-brise sont presque parallèles.
- (3) L'épaisseur du pare-brise est petite et presque constante.

Ces suppositions font en sorte que le vecteur normal change peu à l'entrée et à la sortie du verre (voir figure 2.5). On fait donc l'approximation  $N_1(A_1) = N_2(A_2)$ , c'est-à-dire que l'on suppose que, pour un même rayon lumineux, les vecteurs normaux aux deux interfaces optiques sont les mêmes. Le vecteur normal peut cependant varier d'un rayon lumineux à l'autre dans cette approximation. De plus, on suppose que l'épaisseur le long du vecteur normal est une constante  $\epsilon$ . Ces approximations permettent de réutiliser les résultats de la section 2.3.

Le calcul pour trouver la position  $A_3$  sur la grille se simplifie :

- (1) Trouver  $A_1$  en prenant l'intersection de la surface  $S_1$  avec la droite de direction  $L_1$  passant par l'origine.
- (2) Trouver le vecteur normal  $N$  de la surface  $S_1$  au point  $A_1$ .
- (3) Calculer  $\alpha$  :

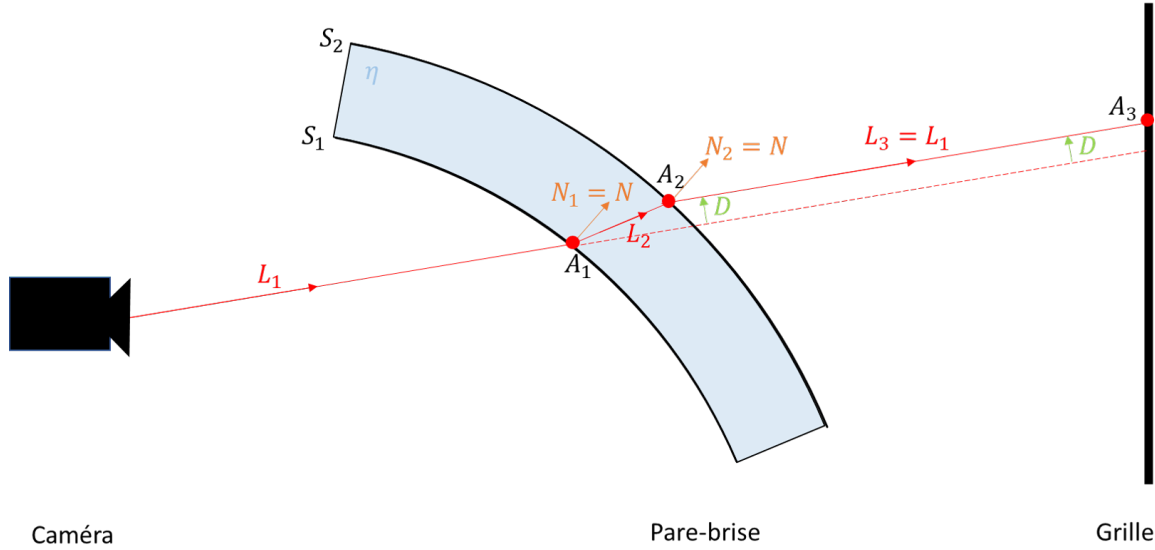
$$\alpha := -L_1 \cdot N + \sqrt{(L_1 \cdot N)^2 - 1 + \eta^2}. \quad (2.4.1)$$

- (4) Calculer  $L_2$  avec la loi de Snell-Descartes :

$$L_2 := \eta^{-1} (L_1 + \alpha N). \quad (2.4.2)$$

- (5) Calculer le déplacement dans le verre  $V$  à partir de  $N$ ,  $L_1$  et  $\epsilon$  :

$$V := \frac{\epsilon}{L_2 \cdot N} L_2. \quad (2.4.3)$$



**Figure 2.5.** Approximation

- (6) Trouver  $A_3$  en prenant l'intersection de la grille avec la droite de vecteur directeur  $L_1$  passant par  $A_1 + V$ .

On note qu'avec cette approximation la partie de  $A_3$  orthogonale à  $L_1$  est exactement égale à la partie de  $V$  orthogonale à  $L_1$ . En d'autres mots, le déplacement orthogonal à  $L_1$  se fait entièrement dans le verre. On peut donc réutiliser le résultat (2.3.22) pour trouver la distance entre les droites entrante et sortante :

$$\|D\| = \varepsilon f(\theta). \quad (2.4.4)$$

La différence entre l'approximation de cette section et le cas des plans parallèles de la section précédente est qu'ici le vecteur normal  $N$  n'est pas constant d'un rayon lumineux à l'autre. Les vecteurs  $V$  et  $D$  dépendent donc aussi de  $L_1$ .

## 2.5. La fonction $f(\theta)$

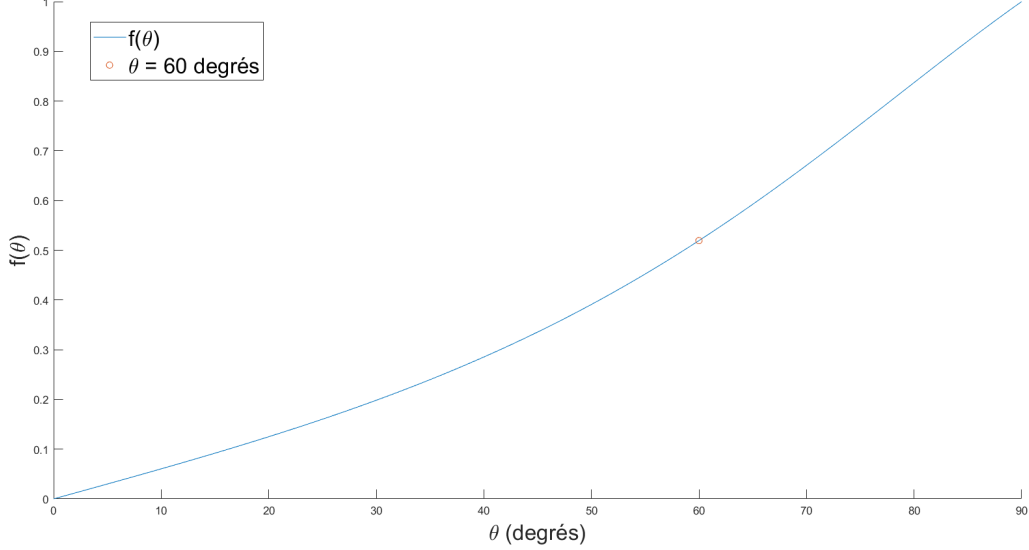
Dans cette section, on démontre que la fonction  $f(\theta)$  de l'équation (2.4.4) est monotone sur  $\theta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . La monotonie de  $f(\theta)$  est utile dans le problème inverse traité au prochain chapitre. On peut se limiter à cet intervalle, car un angle en dehors de cet intervalle signifierait que le rayon lumineux entrant est à l'intérieur du verre, ce qui ne correspond pas à la situation étudiée. On rappelle que le système d'inspection est conçu de manière à ce que l'angle  $\theta$  soit au voisinage de  $60^\circ \approx 1,05$  radian.

On rappelle que la fonction  $f(\theta)$  est donnée par

$$f(\theta) = \left( 1 - \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)}} \right) \sin(\theta). \quad (2.5.1)$$



On remarque que la fonction serait un sinus si  $\eta = \infty$  et qu'elle serait nulle si  $\eta = 1$ . Le cas qui sera étudié est celui où l'indice de réfraction se rapproche de celui du verre ( $\eta = 1.52$ ). La figure 2.6 illustre cette fonction et sa monotonie. On peut démontrer analytiquement la



**Figure 2.6.** La fonction  $f(\theta)$

monotonie en bornant inférieurement la dérivée par 0. La dérivée de  $f(\theta)$ , pour  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , est

$$f'(\theta) = \cos(\theta) + \frac{\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)}{\sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)}} - \frac{\cos^2(\theta) \sin^2(\theta)}{(\eta^2 - \sin^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.5.2)$$

Sachant que  $\eta > 1$ , on peut borner inférieurement les termes négatifs.

$$f'(\theta) > \cos(\theta) + \frac{\sin^2(\theta)}{\sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)}} - \frac{\cos^2(\theta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} - \frac{\cos^2(\theta) \sin^2(\theta)}{(1 - \sin^2(\theta)) \sqrt{\eta^2 - \sin^2(\theta)}} \quad (2.5.3)$$

$$f'(\theta) > 0 \quad (2.5.4)$$

La fonction  $f(\theta)$  est donc monotone sur  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Ce fait est utilisé au moment de l'inversion du problème à la section suivante.



# Chapitre 3

---

## Problème inverse : reconstruction de la forme du verre

Le but du problème inverse est de trouver la forme du pare-brise à partir des observations. Pour chaque pixel de l'image, ces observations consistent en la direction  $L_1$  du rayon lumineux à la sortie de la caméra, et sa position finale  $A_3$  sur la grille. La question est de trouver la forme du pare-brise telle que, quand le rayon de direction initiale  $L_1$  est doublement réfracté en passant à travers le pare-brise, il aboutit au point  $A_3$ .

La stratégie proposée ici consiste à reprendre les hypothèses présentées au chapitre 2, à savoir qu'on suppose que le pare-brise est mince et d'épaisseur constante. Dans ce cas, la forme du pare-brise est donnée par une seule surface qu'on prend comme étant le graphe  $z = z_1(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ . On reprend aussi l'hypothèse  $N_1(A_1) = N_2(A_2)$ . On va montrer que cette hypothèse nous permet de prédire, pour tout point de l'espace entre la caméra et la grille, quelle devrait être la direction normale au pare-brise, si il passait par ce point, pour correspondre aux observations. On appelle ce champ de normales les normales observées. On formule alors le problème inverse en celui de trouver la fonction  $z_1(\mathbf{x})$  qui minimise l'écart entre la direction normale en tout point de son graphe et la normale observée en ce même point.

### 3.1. Le pare-brise comme graphe d'une fonction

Avec l'approximation  $N_1(A_1) = N_2(A_2)$ , le problème inverse revient à trouver la surface  $S_1$  à partir des paires des observations  $A_3$  et  $L_1$ . Puisque les pare-brises sont en général plutôt plats, on se permet de supposer qu'il existe un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$  et une fonction  $z_1(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $S_1$  est le graphe de  $z_1(\mathbf{x})$  (voir figure 3.1) Le vecteur normal à  $S_1$  au point  $(\mathbf{x}, z_1(x))$  est alors donné par

$$N(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\nabla z_1(\mathbf{x}) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

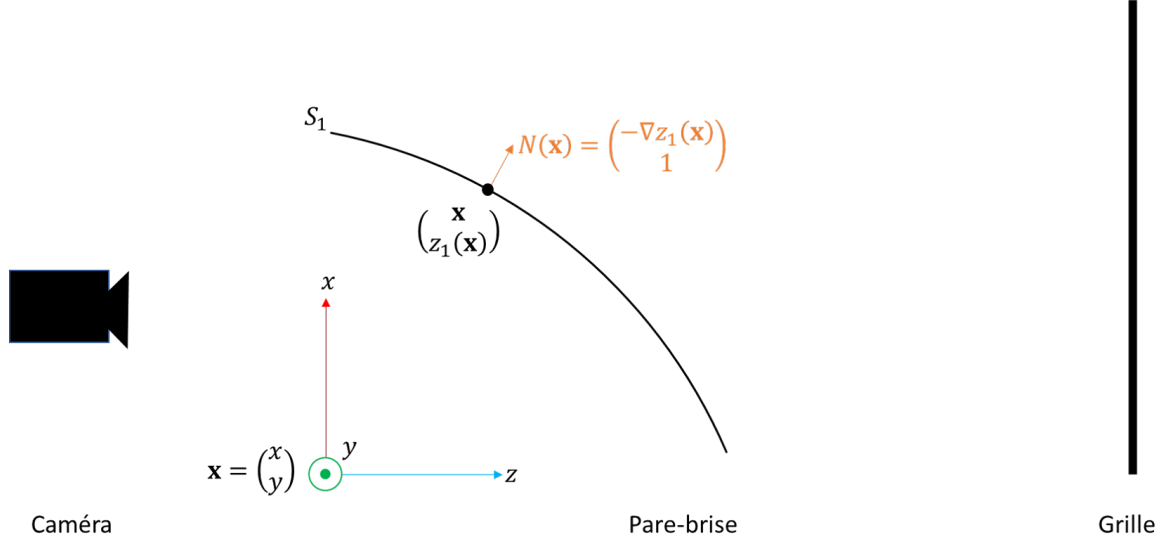


Figure 3.1. Le pare-brise comme graphe de  $z_1(\mathbf{x})$

## 3.2. Le vecteur normal observé $N_{\text{obs}}$ et la fonction $\Phi$

Pour résoudre le problème inverse, on cherche la fonction  $z_1(\mathbf{x})$  qui minimise l'écart entre le vecteur normal  $N(\mathbf{x})$  du graphe de  $z_1(\mathbf{x})$  et une mesure expérimentale  $N_{\text{obs}}$  de ce vecteur normal. Dans cette section, on explique comment trouver  $N_{\text{obs}}$  à partir des observations. Le déplacement perpendiculaire à  $L_1$  peut être trouvé à partir des observations.

$$D = A_3 - (A_3 \cdot L_1)L_1 \quad (3.2.1)$$

On peut donc inverser (2.3.22) pour trouver l'angle  $\theta$  entre  $N_{\text{obs}}$  et  $L_1$ .

Sous les hypothèses simplificatrices, la loi de Snell-Descartes garantit que le vecteur normal se trouve dans le plan formé par  $L_1$  et  $D$ . On peut donc exprimer le vecteur normal unitaire observé  $N_{\text{obs}}$  en fonction de  $\theta$ .

$$\hat{N}_{\text{obs}} = \cos(\theta)L_1 + \frac{\sin(\theta)}{\|D\|}D \quad (3.2.2)$$

Pour la suite, on a besoin d'exprimer  $N_{\text{obs}}$  en fonction d'un point  $(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^d$ . On pose  $L_1(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{\|(\mathbf{x}, z)\|} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{pmatrix}$  et on note le déplacement associé à  $L_1(\mathbf{x}, z)$  par  $D(\mathbf{x}, z)$ . On obtient :

$$\hat{N}_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z) = \cos(\theta)L_1(\mathbf{x}, z) + \frac{\sin(\theta)}{\|D(\mathbf{x}, z)\|}D(\mathbf{x}, z). \quad (3.2.3)$$

Pour la suite, on choisit d'exprimer  $N_{\text{obs}}$  de manière à ce que la dernière composante soit 1, comme dans l'expression de  $N(\mathbf{x})$  à la section précédente :

$$N_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{\hat{N}_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z) \cdot e_d} \hat{N}_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z), \quad (3.2.4)$$

où  $e_d$  est le vecteur unitaire dans  $\mathbb{R}^d$  dont la dernière composante est 1. On note les  $d - 1$  premières composantes de  $N_{\text{obs}}$  par la fonction  $-\Phi(\mathbf{x}, z) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ .

$$N_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z) = \begin{pmatrix} -\Phi(\mathbf{x}, z) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

On a que le vecteur  $N_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z)$  est défini sur tout  $\Omega \times \mathbb{R}$ , même aux points où le pare-brise ne passe pas réellement.

On remarque aussi que pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ , on a

$$N_{\text{obs}}(\gamma \mathbf{x}, \gamma z) = N_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z). \quad (3.2.6)$$

En d'autres mots,  $N_{\text{obs}}$  est constant le long de la droite de direction  $L_1$  passant par la caméra, située à l'origine.

### 3.3. Le problème de minimisation

On formule le problème inverse en un problème de minimisation. On cherche la fonction  $z_1(\mathbf{x})$  qui minimise la différence entre le vecteur normal  $N(\mathbf{x})$  et le vecteur normal observé  $N_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z_1(\mathbf{x}))$ .

#### 3.3.1. L'équation d'Euler-Lagrange : formulation générale

L'équation d'Euler-Lagrange est une équation aux dérivées partielles que respectent les points critiques d'une fonctionnelle. Elle sera utilisée pour formuler le problème de minimisation en une équation aux dérivées partielles.

**Théorème 3.3.1** (Équation d'Euler-Lagrange). *La fonctionnelle*

$$I[f] := \int_{\Omega} \mathcal{L}(x, f, \nabla f) dx = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, f, f_1, \dots, f_n) dx \quad (3.3.1)$$

est extrémisée par  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  si  $f$  est une solution de

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_i} = 0, \quad (3.3.2)$$

où  $f_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}$

#### 3.3.2. L'équation d'Euler-Lagrange : application à la reconstruction de surface

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$  un ouvert convexe. La partie étudiée du pare-brise se trouve dans  $\Omega \times \mathbb{R}$ . La position de la face intérieure du pare-brise, c'est-à-dire celle qui se trouve du côté caméra,

est donnée par la fonction  $z_1(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . (En pratique, on a toujours  $d = 3$ . Des exemples seront aussi donnés pour le cas  $d = 2$ .) On cherche à minimiser la fonctionnelle  $F$  suivante.

$$F[z_1] := \int_{\Omega} \mathcal{L}(\mathbf{x}; z_1(\mathbf{x}); \nabla z_1(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (3.3.3)$$

où

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; z; \nabla z) := (N(\mathbf{x}) - N_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z))^2 = \left( \frac{-\nabla z + \Phi(\mathbf{x}; z)}{1 - 1} \right)^2 = (\nabla z - \Phi(\mathbf{x}; z))^2 \quad (3.3.4)$$

L'équation d'Euler-Lagrange correspondante est alors

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{d\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla z} = 0 \quad (3.3.5)$$

où  $\frac{d}{d\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla z} := \sum_{i=1}^{d-1} \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_{x_i}}$  et  $z_{x_i}$  correspond à la  $i$ -ème composante du gradient  $\nabla z$ . Les dérivées sont évaluées en  $(\mathbf{x}, z, \nabla z) = (\mathbf{x}, z_1(\mathbf{x}), \nabla z_1(\mathbf{x}))$ .

Les dérivées à calculer sont donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -2(\nabla z_1 - \Phi) \cdot \Phi_z \quad (3.3.6)$$

$$\frac{d}{d\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla z} = 2 \frac{d}{d\mathbf{x}} \cdot (\nabla z_1 - \Phi) = 2 \left( \Delta z_1 - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Phi - \nabla z_1 \cdot \Phi_z \right) \quad (3.3.7)$$

où  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Phi = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_i$ , où  $\Phi_i$  est la  $i$ -ème composante de  $\Phi$ . L'équation d'Euler-Lagrange devient

$$-2(\nabla z_1 - \Phi) \cdot \Phi_z - 2 \left( \Delta z_1 - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Phi - \nabla z_1 \cdot \Phi_z \right) = 0 \quad (3.3.8)$$

En posant  $\Psi(\mathbf{x}; z) := -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Phi - \Phi \cdot \Phi_z$ , on obtient l'équation semi-linéaire suivante :

$$-\Delta z_1(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}; z_1(\mathbf{x})). \quad (3.3.9)$$

C'est cette équation qui sera étudiée dans le reste de ce chapitre. On impose les conditions de Dirichlet suivantes :

$$z_1(\mathbf{x}) = z_b(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3.3.10)$$

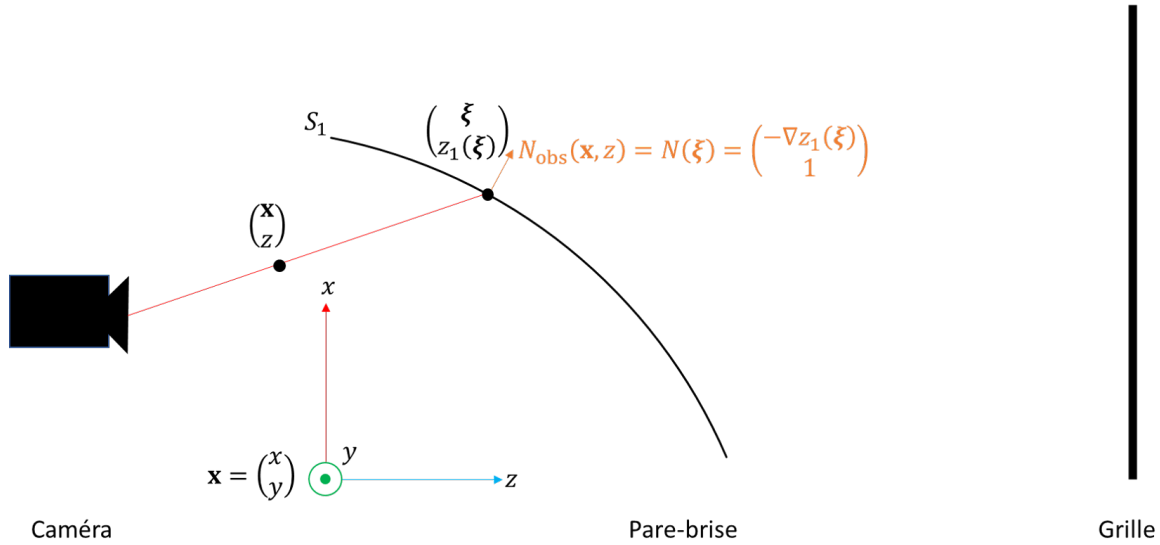
### 3.4. Des exemples

Avant d'amorcer l'étude des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange obtenue, on étudie quelques exemples. Tous ont pour but de reconstruire une forme de pare-brise connue. Ainsi, chacun des exemples commence par la forme  $z(\mathbf{x})$  du pare-brise à étudier. La fonction  $z$  sera à une ou deux variables selon que les rayons lumineux sont confinés au plan (exemples

bidimensionnels) ou à l'espace (exemples tridimensionnels). Pour chaque forme  $z$  de pare-brise étudiée, le vecteur normal  $N_{\text{obs}}$  est déduit. Le problème de reconstruction commence alors avec la fonction  $\Phi$  comme seule donnée.

### 3.4.1. Algorithme pour les exemples

Pour les exemples de la section 3.4, on suppose que les hypothèses simplificatrices sont exactes. Le vecteur normal observé  $N_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z)$  est donc égal au vecteur normal du graphe de  $z_1$  au point  $\xi \in \Omega$  (i.e.  $N(\xi)$ ), où  $\xi$  correspond à l'intersection entre la droite de direction  $L_1(\mathbf{x}, z)$  passant par l'origine et le graphe de la surface  $z_1$  (voir figure 3.2).



**Figure 3.2.** Extraction du vecteur  $N_{\text{obs}}$  pour les exemples

Les étapes à suivre pour extraire la fonction  $\Psi$  dans chacun des exemples sont donc :

- (1) Trouver l'intersection  $(\xi, z_1(\xi))$  entre la surface  $S_1$  et la droite de direction  $(\mathbf{x}, z)$  passant par l'origine. Cela revient à trouver la fonction  $d(\mathbf{x}, z)$  telle que le point  $(\xi, z_1(\xi)) = d(\mathbf{x}, z)(\mathbf{x}, z)$  se trouve sur la surface  $S_1$ .
- (2) Extraire le vecteur normal  $N(\xi)$  à la surface  $S_1$  au point  $(\xi, z_1(\xi)) = d(\mathbf{x}, z)(\mathbf{x}, z)$ . Poser  $N_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z) = N(\xi)$ .
- (3) Calculer les fonctions  $\Phi(\mathbf{x}, z)$  et  $\Psi(\mathbf{x}, z)$  à partir du vecteur normal observé  $N_{\text{obs}}(\mathbf{x}, z)$ .

### 3.4.2. Le pare-brise linéaire

Ce premier cas est nettement le plus simple. Le pare-brise est une droite dans le plan. On est donc en dimension  $d = 2$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}$ . La surface  $S_1$  du pare-brise, qui est une courbe dans ce cas-ci, est le graphe de  $z_1(\mathbf{x}) = mx + c$ , où  $m$  et  $c$  sont réels.

On suit les étapes présentées à la section précédente. Cependant, puisque le vecteur normal  $N(x)$  est constant sur la surface, il n'est pas nécessaire de trouver le point  $(\xi, z_1(\xi))$ . Pour tout  $x \in \Omega$ , le vecteur normal est donné par

$$N(\xi) = \begin{pmatrix} -z_{1x}(\xi) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4.1)$$

Le vecteur normal observé est donc aussi constant :

$$N_{\text{obs}}(x, z) = N(x) = \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4.2)$$

Il en est de même pour la fonction  $\Phi(x; z) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

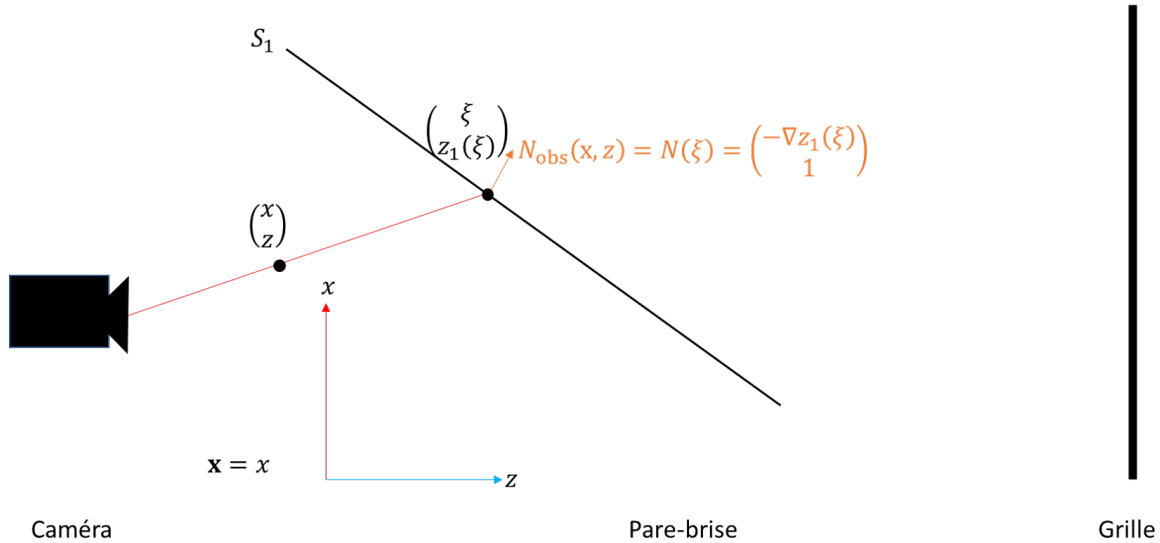
$$\Phi(x, z) = m. \quad (3.4.3)$$

Ses dérivées par rapport à  $x$  et  $z$  sont donc nulles et la fonction  $\Psi(x; z)$  s'annule également :

$$\Psi(x, z) = 0. \quad (3.4.4)$$

L'équation d'Euler-Lagrange devient alors

$$\Delta z = z_{xx} = 0. \quad (3.4.5)$$



**Figure 3.3.** Le pare-brise linéaire

La forme générale de la solution est  $z_1(x) = \hat{m}x + \hat{c}$ ,  $\hat{m}, \hat{c} \in \mathbb{R}$ . Pour un problème de Dirichlet, la solution est complètement déterminée par les conditions aux bords  $z_1(a) = z_a$  et  $z_1(b) = z_b$ . On note que l'hypothèse  $N_1(A_1) = N_2(A_2)$  est en fait exactement respectée dans cet exemple.



### 3.4.3. Le pare-brise plan

L'exemple du plan est très semblable à celui de la droite. C'est le cas tridimensionnel le plus simple. On a  $d = 3$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Le surface  $S_1$  du pare-brise est le graphe de la fonction  $z_1(x,y) = m_1x + m_2y + c$ , avec  $m_1, m_2, c \in \mathbb{R}$ .

Dans ce cas, comme pour celui du pare-brise linéaire, on a que le calcul de  $\xi$  n'est pas nécessaire puisque le vecteur normal  $N(x,y) = \begin{pmatrix} -m_1 \\ -m_2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est constant (voir figure 3.3).

La fonction  $\Psi(x,y;z)$  est donc encore nulle pour les mêmes raisons que dans le cas linéaire. L'équation d'Euler-Lagrange associée est alors

$$\Delta z = 0. \tag{3.4.6}$$

Les solutions sont les fonctions harmoniques sur  $\Omega$ . Pour un problème de Dirichlet, la solution particulière est complètement déterminée par les conditions aux bords  $z|_{\partial\Omega} = z_b$ .

### 3.4.4. Le pare-brise parabolique

Le troisième exemple retourne dans le plan, mais le pare-brise est maintenant parabolique. Il est décrit par la fonction  $z_1(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ , où  $a_0 > 0$  et  $a_2 < 0$ .

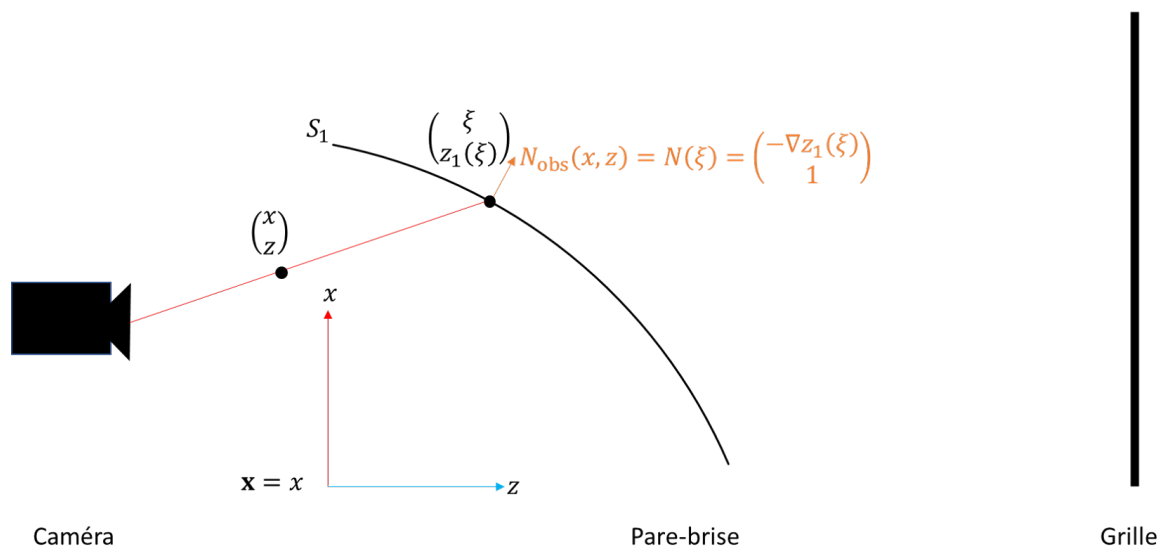


Figure 3.4. Le pare-brise parabolique

Ici, contrairement aux cas linéaires, on doit trouver l'expression pour  $\xi$  puisque le vecteur normal observé  $N_{\text{obs}}(x,z)$  n'est pas constant (voir figure 3.4). On a l'expression suivante pour  $\xi$  :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ z_1(\xi) \end{pmatrix} = d(x,z) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.4.7)$$

où  $d(x,z) \in \mathbb{R}$  est à trouver. On peut le trouver analytiquement : c'est une racine de la parabole  $z_1(xd(x,z)) = d(x,z)z$ .

$$0 = a_2(d(x,z)x)^2 + (a_1x - z)d(x,z) + a_0 \quad (3.4.8)$$

$$d(x,z) = \frac{z - a_1x \pm \sqrt{(z - a_1x)^2 - 4a_0a_2x^2}}{2a_2x^2}. \quad (3.4.9)$$

Pour déterminer laquelle des deux racines est la bonne, on impose que le domaine  $\Omega$  soit devant la caméra, donc que  $x > 0$ . Cela a pour conséquence que  $d(x,z)$  est toujours strictement positif, car le pare-brise ne se trouve pas derrière la caméra :

$$\frac{z - a_1x \pm \sqrt{(z - a_1x)^2 - 4a_0a_2x^2}}{2a_2x^2} > 0 \quad (3.4.10)$$

$$\implies a_1x - z > \pm \sqrt{(z - a_1x)^2 - 4a_0a_2x^2}. \quad (3.4.11)$$

Puisque  $a_0a_2 < 0$ , on a que le côté droit de l'inégalité est toujours supérieur au côté gauche en valeur absolue. On doit donc choisir le signe négatif pour respecter l'inégalité. On obtient la solution suivante :

$$d(x,z) = \frac{z - a_1x - \sqrt{(z - a_1x)^2 - 4a_0a_2x^2}}{2a_2x^2}. \quad (3.4.12)$$

Maintenant que  $\xi$  est connu, on peut calculer  $N_{\text{obs}}(x,z)$ .

$$N_{\text{obs}}(x,z) = \begin{pmatrix} -z_1(x) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{z - \sqrt{(z - a_1x)^2 - 4a_0a_2x^2}}{x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.13)$$

On peut alors trouver  $\Phi$  et  $\Psi$  :

$$\Phi(x,z) = \frac{z - \sqrt{(a_1x - z)^2 - 4a_0a_2x^2}}{x}, \quad (3.4.14)$$

$$\Psi(x,z) = -\Phi_x - \Phi \cdot \Phi_z = \frac{a_1x - z + \sqrt{(a_1x - z)^2 - 4a_0a_2x^2}}{x^2}. \quad (3.4.15)$$

La fonction  $z_1(x)$  est donc une solution de l'équation différentielle suivante :

$$-z_{xx} = \frac{a_1x - z + \sqrt{(a_1x - z)^2 - 4a_0a_2x^2}}{x^2}. \quad (3.4.16)$$

On peut vérifier que l'équation est bien respectée pour  $z_1(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  :

$$\Psi(x, z_1(x)) = \frac{a_1x - (a_2x^2 + a_1x + a_0) + \sqrt{(a_1x - (a_2x^2 + a_1x + a_0))^2 - 4a_0a_2x^2}}{x^2} = -2a_2 \quad (3.4.17)$$

et donc

$$-z_{1xx} = -2a_2. \quad (3.4.18)$$

### 3.4.5. Le pare-brise sphérique centré sur la caméra

Cet exemple utilise les résultats de la section précédente. Il s'agit du pare-brise sphérique dont le centre se trouve sur la caméra. La surface est définie par tous les points respectant l'équation  $S(\xi, \nu; z_1(\xi, \nu)) = 0$ , où

$$S(x, y; z) := x^2 + y^2 + z^2 - R^2. \quad (3.4.19)$$

Cette configuration a la particularité que le vecteur normal en chaque point est parallèle au rayon lumineux l'intersectant ( $L_1$  est parallèle à  $N_{\text{obs}}$ ). Cela fait en sorte qu'il n'est pas nécessaire de trouver l'intersection  $(\xi, \nu, z_1(\xi, \nu))$ .

Le vecteur normal est

$$N(\xi, \nu, z_1(\xi, \nu)) = \frac{1}{S_z(\xi, \nu, z_1(\xi, \nu))} \nabla S(\xi, \nu, z_1(\xi, \nu)) = \begin{pmatrix} \frac{\xi}{z_1(\xi, \nu)} \\ \frac{\nu}{z_1(\xi, \nu)} \\ 1, \end{pmatrix} \quad (3.4.20)$$

où  $S_z = 2z$  est la dérivée partielle de  $S$  par rapport à  $z$ . Puisque  $(\xi, \nu, z_1(\xi, \nu)) = d(x, y; z)(x, y, z)$ , le vecteur normal observé est

$$N_{\text{obs}}(x, y; z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.21)$$

Les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  sont données par

$$\Phi(x, y; z) = -\frac{1}{z} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.4.22)$$

et

$$\Psi(x, y; z) = \frac{2}{z} + \frac{x^2 + y^2}{z^3} = \frac{1}{z} \left( 2 + \left( \frac{x}{z} \right)^2 + \left( \frac{y}{z} \right)^2 \right). \quad (3.4.23)$$

L'équation est donc

$$-\Delta z = \frac{1}{z} \left( 2 + \left( \frac{x}{z} \right)^2 + \left( \frac{y}{z} \right)^2 \right). \quad (3.4.24)$$

### 3.4.6. Le pare-brise ellipsoïdal centré sur la caméra

Ce cas est une généralisation du précédent. La surface du pare-brise est formée des points respectant l'équation  $S(\xi, \nu; z_1(\xi, \nu)) = 0$ , où

$$S(x, y; z) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 - 1. \quad (3.4.25)$$

Encore une fois, il n'est pas nécessaire de trouver le point  $(\xi, \nu, z_1(\xi, \nu))$ . Le vecteur normal observé est donné par

$$N_{\text{obs}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{a_1 x}{a_3 z} \\ \frac{a_2 y}{a_3 z} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4.26)$$

On peut alors trouver  $\Phi(x, y, z)$  et  $\Psi(x, y, z)$  :

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{a_3 z} \begin{pmatrix} a_1 x \\ a_2 y \end{pmatrix}, \quad (3.4.27)$$

$$\Psi(x, y, z) = \frac{a_1 + a_2}{a_3 z} + \frac{a_1^2 x^2 + a_2^2 y^2}{a_3^2 z^3}. \quad (3.4.28)$$

## 3.5. Existence et unicité par le théorème du point fixe de Banach

Dans cette section, on démontre un théorème qui donne des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution de

$$\begin{cases} -\Delta z_1(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}, z_1(\mathbf{x})) & \mathbf{x} \in \Omega \\ z_1(\mathbf{x}) = z_b(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Des bornes de cette solution et un algorithme pour la construire sont aussi donnés. Ces résultats reposent sur le théorème du point fixe de Banach (TPFB) et des propriétés connues des fonctions superharmoniques. On précise l'espace dans lequel on travaille, on énonce des résultats préliminaires, puis on démontre le théorème principal de cette section.

### 3.5.1. L'espace de Sobolev et les normes utilisées

L'espace dans lequel on choisit de chercher et de comparer les solutions est l'espace de Sobolev  $W^{1,2}(\Omega)$ , où  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Ce choix est motivé par l'importance du gradient de la surface dans le phénomène de la réfraction. On donne dans cette sous-section la définition de l'espace  $W^{1,2}(\Omega)$ , la notation des normes utilisées et les notions de trace et de positivité pour  $W^{1,2}(\Omega)$ .

On donne d'abord la définition de l'espace  $L^2(\Omega)$  sur laquelle se base celle de l'espace  $W^{1,2}(\Omega)$ .

**Définition 3.5.1** (Espace des fonctions de carré intégrable). *L'espace des fonctions de carré intégrable  $L^2(\Omega)$  est l'espace des fonctions dont l'intégrale du carré est finie :*

$$L^2(\Omega) := \{f(\mathbf{x}) : \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \in \mathbb{R}\}. \quad (3.5.2)$$

La norme suivante est naturellement associée à cet espace.

**Définition 3.5.2** (Norme  $\|\cdot\|_2$ ).

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}. \quad (3.5.3)$$

On peut maintenant définir l'espace  $W^{1,2}(\Omega)$ .

**Définition 3.5.3** (Espace de Sobolev). *L'espace de Sobolev  $W^{1,2}(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions de carré intégrable dont les dérivées sont aussi de carré intégrable :*

$$W^{1,2}(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) : \nabla f \in L^2(\Omega)\}. \quad (3.5.4)$$

On munit  $W^{1,2}(\Omega)$  de la norme suivante.

**Définition 3.5.4** (Norme  $\|\cdot\|$ ).

$$\|f\| := \sqrt{\|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2}. \quad (3.5.5)$$

Pour que les problèmes avec conditions au bord soient bien posés dans l'espace de Sobolev, il faut introduire une notion supplémentaire. En effet, deux fonctions sont égales au sens de Sobolev si la norme  $\|\cdot\|$  de leur différence est nulle. Or, deux fonctions peuvent être égales au sens de Sobolev, mais ne pas être égales en tout point du bord. C'est la notion de trace d'une fonction qui permet de donner un sens aux conditions au bord.

**Théorème 3.5.5** (Théorème de la trace). *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  borné dont le bord  $\partial\Omega$  est  $C^1$ . Alors il existe un opérateur linéaire borné*

$$T : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega) \quad (3.5.6)$$

tel que

- (1)  $Tu = u|_{\partial\Omega}$  pour  $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  et
- (2)  $\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|$  pour  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , où  $C \in \mathbb{R}$  ne dépend que de  $\Omega$ .

DÉMONSTRATION. Voir [6] section 5.5. □

On introduit une notation pour les fonctions de trace nulle dans  $W^{1,2}(\Omega)$ .

**Définition 3.5.6** (Espace  $W_0^{1,2}(\Omega)$ ). *L'espace  $W_0^{1,2}$  est défini comme étant l'espace des fonctions de trace nulle dans  $W^{1,2}(\Omega)$  :*

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \{u \in W^{1,2}(\Omega) : Tu = 0\}. \quad (3.5.7)$$

Pour la suite, on écrira que  $u(\mathbf{x}) = 0$  sur  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  ou que la fonction  $u$  s'annule sur  $\partial\Omega$  lorsque la trace de  $u$  est nulle ( $Tu = 0$ ). On rencontre un problème similaire à celui de la trace lorsque l'on souhaite définir le signe d'une fonction  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ . Les définitions suivantes donnent un sens à  $u \geq 0$ .

**Définition 3.5.7** (Espace  $C_c^\infty(\Omega)$ ). *L'espace  $C_c^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions infiniment dérivables dont le support est compact dans  $\Omega$ .*

**Définition 3.5.8** (Non-négativité dans  $L^2(\Omega)$  au sens des distributions). *On dit que  $u \in L^2(\Omega)$  est non-négative au sens des distributions si, pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty$  non-négative, on a*

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq 0 \quad (3.5.8)$$

*On écrit alors  $u \geq 0$ . L'inégalité inverse est définie similairement.*

Une inégalité utile, mais qui ne sera pas démontrée ici, est le cas particulier de l'inégalité de Poincaré pour les fonctions de trace nulle et pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

**Proposition 3.5.9.** *Soit  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Alors*

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u\|_2^2, \quad (3.5.9)$$

où  $\lambda_1$  est la plus petite valeur propre du laplacien  $(-\Delta)$ .

Une proposition similaire faisant intervenir le laplacien peut être obtenue.

**Proposition 3.5.10.** *Soit  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Si  $-\Delta u \in L^2(\Omega)$ , alors*

$$\|u\|_2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\Delta u\|_2. \quad (3.5.10)$$

**DÉMONSTRATION.** C'est une conséquence de l'identité de Green appliquée à la proposition précédente. Soit  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  avec  $-\Delta u \in L^2(\Omega)$ . Alors

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u\|_2^2. \quad (3.5.11)$$

On écrit la définition de  $\|\nabla u\|$ , puis on applique l'identité de Green :

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla u\|_2^2 = \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} -u\Delta u d\mathbf{x} \quad (3.5.12)$$

On utilise ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\Delta u\|_2 \|u\|_2. \quad (3.5.13)$$

Finalement, on divise par  $\|u\|_2$  pour obtenir l'inégalité recherchée :

$$\|u\|_2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\Delta u\|_2. \quad (3.5.14)$$

□

Un résultat similaire existe pour la norme  $\|\cdot\|$ .

**Proposition 3.5.11.** *Soit  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Si  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ , alors*

$$\|u\| \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \|\Delta u\|_2. \quad (3.5.15)$$

DÉMONSTRATION. La preuve ressemble à celle de la proposition précédente. Soit  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  avec  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ . Alors

$$\|u\|^2 = \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2. \quad (3.5.16)$$

La proposition 3.5.9 donne

$$\|u\|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \|\nabla u\|_2^2. \quad (3.5.17)$$

On utilise l'identité de Green et l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur  $\|\nabla u\|_2^2$  comme à la démonstration précédente :

$$\|u\|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \|\Delta u\|_2 \|u\|_2. \quad (3.5.18)$$

On peut borner la norme  $\|u\|_2$  par la norme  $\|u\|$  et diviser par  $\|u\|$  de chaque côté pour obtenir l'inégalité désirée :

$$\|u\| \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \|\Delta u\|_2. \quad (3.5.19)$$

□

### 3.5.2. Le théorème du point fixe de Banach

Le premier résultat présenté est le théorème du point fixe de Banach. Il sera appliqué dans la démonstration du théorème final de cette section sur une transformation pour laquelle tout point fixe est une solution de (3.5.1).

**Théorème 3.5.12** (Théorème du point fixe de Banach (TPFB)). *Soit  $A : X \rightarrow X$ , une transformation dans un espace de Banach  $X$ . Supposons que  $A$  est une contraction de  $X$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $\gamma < 1$  telle que, pour tout  $u, v \in X$ , on a*

$$\|A[v] - A[u]\| \leq \gamma \|v - u\|. \quad (3.5.20)$$

*Alors  $A$  a un unique point fixe, qui est la limite de la suite  $u^{(k+1)} := A[u^{(k)}], u^{(0)} \in X$ .*

DÉMONSTRATION. Voir [6] section 9.2.1. □

### 3.5.3. Principe de comparaison

On présente ici une méthode pour comparer des fonctions à partir de leur laplacien et des conditions au bord. Ce résultat sera utile dans la démonstration du théorème sur les conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution.

La première proposition est le principe du minimum pour les fonctions harmoniques.

**Proposition 3.5.13** (Principe du minimum pour fonction harmonique). *Soit  $h$  une fonction harmonique sur  $\Omega$ . Alors*

$$\min_{\overline{\Omega}} h = \min_{\partial\Omega} h. \quad (3.5.21)$$

Les deux propositions suivantes concernent les fonctions superharmoniques, c'est-à-dire les fonctions dont le laplacien est négatif. La première ne sera pas démontrée. Elle concerne l'espace  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Elle est utilisée dans la preuve de la seconde qui généralise le résultat à l'espace  $W^{1,2}(\Omega)$ .

**Proposition 3.5.14** (Principe du minimum pour les fonctions superharmoniques de trace nulle). *Soit  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  telle que  $u$  est superharmonique sur  $\Omega$  et  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Alors  $u \geq 0$  sur  $\Omega$ .*

DÉMONSTRATION. Voir [6] section 6.4. □

**Proposition 3.5.15** (Principe du minimum pour les fonctions superharmoniques de  $W_0^{1,2}(\Omega)$ ). *Soit  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  telle que  $-\Delta u \in L^2(\Omega)$ ,  $-\Delta u \geq 0$ . Alors  $u \geq 0$  sur  $\Omega$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  satisfaisant les hypothèses de la proposition. On étend la définition de  $u$  sur  $\mathbb{R}^d$  par  $u(\mathbf{x}) = 0$  si  $\mathbf{x} \notin \Omega$ . On cherche à démontrer que

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq 0 \quad (3.5.22)$$

pour toute fonction  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  positive. Soit  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  positive. On pose  $\phi(\mathbf{x}) = \psi(-\mathbf{x})$ . On a alors  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . On définit  $u_\phi$  comme la convolution de  $\phi$  avec  $u$  :

$$u_\phi(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y}. \quad (3.5.23)$$

On note que  $u_\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  (voir [11] section 5.4), donc  $u_\phi \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$  et  $u_\phi(\mathbf{x}) = 0$  sur  $\partial U$ , où  $U$  est un compact de  $\mathbb{R}^d$  contenant le support de  $u_\phi$ . Puisque  $u = 0$  à l'extérieur de  $\Omega$ , on a

$$u_\phi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} u(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y}. \quad (3.5.24)$$

Le laplacien de  $u_\phi$  est négatif :

$$-\Delta u_\phi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} -u(\mathbf{y})\Delta\phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (3.5.25)$$

$$= \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} u(\mathbf{x} - \mathbf{y})\Delta\phi(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (3.5.26)$$

$$= \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x} - \mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\mathbf{y}. \quad (3.5.27)$$

$$= \int_{\Omega} -\Delta u(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad (3.5.28)$$

où  $\Omega_{\mathbf{x}} := \{z \in \mathbb{R} : \mathbf{x} - z \in \Omega\}$ . On peut donc appliquer la proposition 3.5.14 :

$$u_\phi(\mathbf{x}) \geq 0. \quad (3.5.29)$$



Or  $\phi(-\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$  et

$$u_\phi(0) = \int_{\Omega} u(\mathbf{y})\phi(-\mathbf{y})d\mathbf{y}. \quad (3.5.30)$$

Alors

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})d\mathbf{y} \geq 0. \quad (3.5.31)$$

C'est vrai pour toute fonction  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  positive. Donc  $u \geq 0$ .

□

*Une preuve alternative reposant sur le principe du minimum pour les fonctions faiblement superharmoniques est donnée dans l'article de Serrin [10].*

Finalement, on donne une manière de comparer deux fonctions à partir de leur laplacien et des conditions au bord.

**Proposition 3.5.16** (Principe de comparaison pour  $W^{1,2}(\Omega)$ ). *Soit  $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$  telles que  $-\Delta u \leq -\Delta v$  sur  $\Omega$ ,  $u \leq v$  sur  $\partial\Omega$  et  $\Delta u, \Delta v \in L^2(\Omega)$ . Alors  $u \leq v$  sur  $\Omega$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$  satisfaisant les hypothèses du théorème. On considère la fonction  $w := v - u$ . C'est une fonction de laplacien négatif et de trace positive. On l'exprime comme la somme d'une fonction harmonique  $h$  de trace  $h = v - u$  et d'une fonction  $p$  de trace nulle dont le laplacien est  $-\Delta p = -\Delta(v - u)$ . La proposition 3.5.13 implique  $h \geq 0$ . La proposition 3.5.15 implique  $p \geq 0$ . Alors  $w = v - u = h + p \geq 0$  donc  $u \leq v$ . □

### 3.5.4. Le théorème d'existence et d'unicité

On peut maintenant donner des conditions suffisantes d'existence et d'unicité du problème (3.5.1). Ce théorème peut être interprété comme un test pour la fonction  $\Psi$  sur un domaine  $\hat{\Omega} = \Omega \times I \subset \mathbb{R}^3$  (voir figure 3.5).

**Théorème 3.5.17** (Conditions suffisantes d'existence et d'unicité). *Soit un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  borné d'aire  $|\Omega|$  dont la frontière  $\partial\Omega$  est  $C^1$ , un intervalle fermé  $I \subset \mathbb{R}$  et une fonction  $z_b \in C(\partial\Omega)$  à valeurs dans  $I$ . On pose  $\hat{\Omega} := \Omega \times I$ . Soit finalement  $\lambda_1$  la plus petite valeur propre de  $-\Delta$  sur  $\Omega$  avec condition de Dirichlet nulle.*

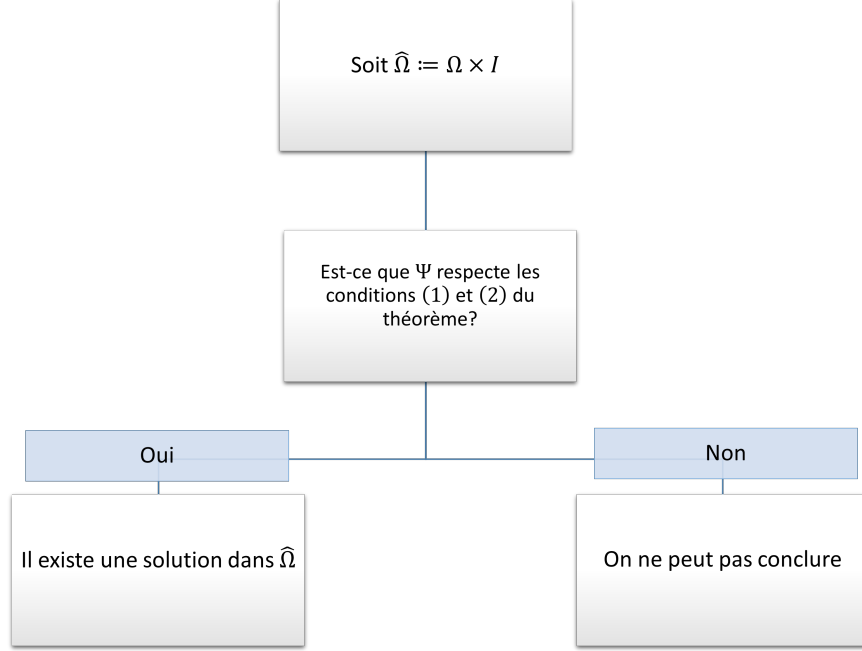
Supposons que  $\Psi : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  respecte les deux conditions suivantes :

$$(1) \exists m, M \in \mathbb{R} \forall (\mathbf{x}, z) \in \hat{\Omega}$$

$$16 \left( \frac{\inf I - \min_{\partial\Omega} z_b}{\text{diam}(\Omega)^2} \right) < m \leq \Psi(\mathbf{x}, z) \leq M < 16 \left( \frac{\sup I - \max_{\partial\Omega} z_b}{\text{diam}(\Omega)^2} \right); \quad (3.5.32)$$

$$(2)$$

$$\sup_{\hat{\Omega}} |\Psi_z(\mathbf{x}, z)| < \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}. \quad (3.5.33)$$



**Figure 3.5.** Interpr\u00e9tation du th\u00e9or\u00e8me 3.5.17

Alors, il existe une solution  $z_1 \in W^{1,2}(\Omega)$  \u00e0 valeurs dans  $I$  au probl\u00e8me :

$$\begin{cases} -\Delta z_1(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}, z_1(\mathbf{x})) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ z_1(\mathbf{x}) = z_b(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5.34)$$

De plus, la suite des solutions des probl\u00e8mes lin\u00e9aires

$$\begin{cases} -\Delta z_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}, z_1^{(k)}(\mathbf{x})) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ z_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = z_b(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.5.35)$$

converge vers  $z_1$  selon  $\|\cdot\|$  pour toute fonction initiale  $z_1^{(0)} \in W^{1,2}(\Omega)$  tel que  $z_1^{(0)}(\mathbf{x}) \in I$  pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

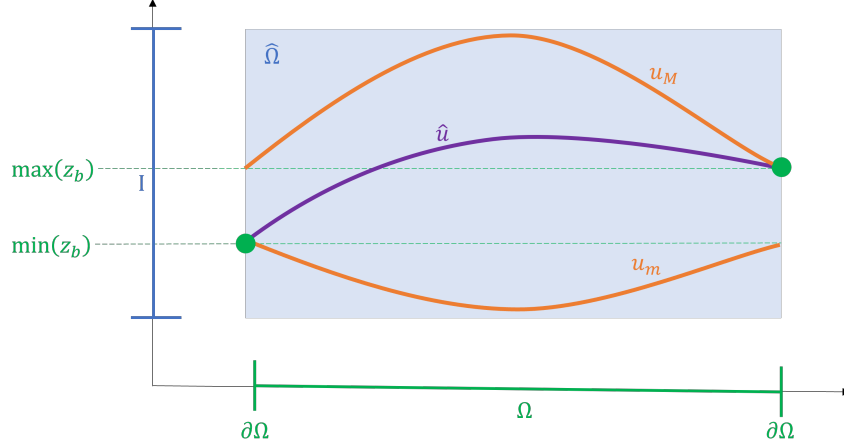
D\u00c9MONSTRATION. Soit  $\Psi : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  respectant les hypoth\u00e8ses du th\u00e9or\u00e8me \u00e0 d\u00e9montrer. L'id\u00e9e de la preuve est d'utiliser le TPFB sur la transformation  $A[u] = \hat{u}$  d\u00e9finie par

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \hat{u}(\mathbf{x}) = z_b(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5.36)$$

On limite le domaine de  $A[u]$  \u00e0 l'ensemble suivant

$$X := \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega) : u(\mathbf{x}) = z_b(\mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ et } |\{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) \in I\}| = |\Omega| \right\}. \quad (3.5.37)$$

Il reste donc \u00e0 d\u00e9montrer que la transformation  $A$  sur  $X$  respecte les hypoth\u00e8ses du TPFB.



**Figure 3.6.** Encadrement de  $\hat{u}$  par  $u_m$  et  $u_M$

On démontre d'abord que  $X$  est un espace complet avec la norme  $\|\cdot\|$ . L'espace  $W^{1,2}(\Omega)$  est complet. Pour toute suite de Cauchy  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ , il existe une limite  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ . Si l'on suppose  $u \notin X$ , alors la distance entre  $u$  et  $u_k$  est bornée inférieurement :

$$\|u - u_k\| \geq \|u - u_k\|_2 \geq \int_{\mathbf{1}_{u(\mathbf{x}) < \inf I}} (u(\mathbf{x}) - \inf I)^2 d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{1}_{u(\mathbf{x}) > \sup I}} (u(\mathbf{x}) - \sup I)^2 d\mathbf{x} > 0. \quad (3.5.38)$$

La borne est indépendante de  $k$ . Il est donc impossible pour une suite de  $X$  de converger vers  $u \notin X$ . On a alors la complétude de  $X$ . On démontre ensuite que  $A$  est fermée dans  $X$ . On a  $\Psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \in L^2(\Omega)$  pour tout  $u \in X$  puisque  $|\Psi|$  est bornée et  $|\Omega| < \infty$ . On a donc  $\hat{u} \in W^{1,2}(\Omega)$  ([6] section 6.2, théorème 4). On donne maintenant deux paraboloides qui encadrent  $\hat{u}$  (voir figure 3.6). Si les constantes  $m$  et  $M$  du théorème existent, on peut choisir  $m$  négatif et  $M$  positif. On définit les fonctions  $u_m$  et  $u_M$  par

$$u_m := \frac{-m}{4}(\mathbf{x} - \mathbf{c})^2 - \max_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \left\{ \frac{-m}{4}(\mathbf{y} - \mathbf{c})^2 \right\} + \min_{\partial\Omega} \{z_b\} \quad (3.5.39)$$

et

$$u_M := \frac{-M}{4}(\mathbf{x} - \mathbf{c})^2 - \min_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \left\{ \frac{-M}{4}(\mathbf{y} - \mathbf{c})^2 \right\} + \max_{\partial\Omega} \{z_b\}, \quad (3.5.40)$$

où  $\mathbf{c}$  est le centre d'un disque de diamètre  $\text{diam}(\Omega)$  contenant  $\Omega$ . On remarque que

$$-\Delta u_m = m \leq -\Delta \hat{u} = \Psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \leq M = -\Delta u_M \quad (3.5.41)$$

De plus,

$$u_m \leq u \text{ sur } \partial\Omega \quad (3.5.42)$$

et

$$u_M \geq u \text{ sur } \partial\Omega. \quad (3.5.43)$$

On peut donc utiliser le principe de comparaison (prop. 3.5.16) pour encadrer  $\hat{u}$ .

$$u_m(\mathbf{x}) \leq \hat{u}(\mathbf{x}) \leq u_M(\mathbf{x}). \quad (3.5.44)$$

Il reste à démontrer  $\inf_{\Omega} u_m > \inf I$  et  $\sup_{\Omega} u_M < \sup I$  pour obtenir  $\hat{u} \in X$ . On fait la démonstration pour  $u_m$  (celle pour  $u_M$  est similaire) :

$$\inf_{\Omega} u_m \geq -\max_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \left\{ \frac{-m}{4} (\mathbf{y} - \mathbf{c})^2 \right\} + \min_{\partial\Omega} \{z_b\} \quad (3.5.45)$$

$$\geq \frac{m}{4} \max_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} \{(\mathbf{y} - \mathbf{c})^2\} + \min_{\partial\Omega} \{z_b\} \quad (3.5.46)$$

$$\geq \frac{m}{4} \left( \frac{\text{diam}}{2} \right)^2 + \min_{\partial\Omega} \{z_b\}. \quad (3.5.47)$$

En bornant  $m$  par l'hypothèse (1) du théorème, on obtient

$$\inf_{\Omega} u_m > \inf I. \quad (3.5.48)$$

L'image de la fonction  $\hat{u} \in W^{1,2}(\Omega)$  est donc contenue dans  $I$ . Cela implique  $\hat{u} \in X$ , ce qui démontre la fermeture de  $A$ .

Finalement, on démontre que  $A$  est une contraction sur  $X$ . Soit  $\hat{u} = A[u]$  et  $\hat{v} = A[v]$ ,  $u, v \in X$ . On a par la proposition 3.5.11

$$\|\hat{u} - \hat{v}\| \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \|\Delta\hat{u} - \Delta\hat{v}\|_2. \quad (3.5.49)$$

On substitue les laplaciens par  $\Psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$  et  $\Psi(\mathbf{x}, v(\mathbf{x}))$ .

$$\|\hat{u} - \hat{v}\| \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \|\Psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) - \Psi(\mathbf{x}, v(\mathbf{x}))\|_2. \quad (3.5.50)$$

On borne en utilisant le fait que la dérivée  $\Psi_z$  est bornée :

$$\|\hat{u} - \hat{v}\| \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \|u - v\|_2 \sup_{\hat{\Omega}} |\Psi_z|. \quad (3.5.51)$$

La norme  $\|\cdot\|_2$  se borne par la norme  $\|\cdot\|$  :

$$\|\hat{u} - \hat{v}\| \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \|u - v\| \sup_{\hat{\Omega}} |\Psi_z|. \quad (3.5.52)$$

Le coefficient qui multiplie  $\|u - v\|$  est inférieur à 1 par hypothèse du théorème :

$$\left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \sup_{\hat{\Omega}} |\Psi_z| < 1. \quad (3.5.53)$$

On obtient donc que  $A$  est un contraction sur  $X$ . On a démontré que  $A : X \rightarrow X$  est une contraction sur un espace complet. Les résultats du théorème sont alors garantis par le TPFB appliqué à la transformation  $A$ .  $\square$

Le corollaire suivant donne une manière de trouver une itération initiale  $z_1^{(0)}$  de la suite proposée au théorème 3.5.17.

**Corollaire 3.5.18** (Itération initiale). *Dans le théorème 3.5.17, on peut choisir  $z_1^{(0)} = h$  comme itération initiale, où  $h$  est la solution de*

$$\begin{cases} -\Delta h = 0 & \mathbf{x} \in \Omega, \\ h = z_b & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5.54)$$

DÉMONSTRATION. La fonction  $h$  est harmonique donc  $h \in W^{1,2}(\Omega)$ . Les fonctions harmoniques atteignent leur minimum et leur maximum sur leur frontière. On a donc  $h(\mathbf{x}) \in [\min_{\partial\Omega} z_b, \max_{\partial\Omega} z_b] \subset I$ . Ces deux conditions sont celles demandées par le théorème 3.5.17.  $\square$

La deuxième condition du théorème 3.5.17 repose sur la première valeur propre  $\lambda_1$  du laplacien  $-\Delta$  sur  $\Omega$ . Celle-ci n'est pas toujours simple à obtenir. La proposition suivante aide à contourner ce problème.

**Proposition 3.5.19** (Inégalité de Rayleigh-Faber-Krahn). *La première valeur propre  $\lambda_1$  du laplacien  $-\Delta$  sur un domaine  $\Omega$  est bornée par la première valeur propre laplacien sur le disque de même aire :*

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi j_{0,1}^2}{|\Omega|} \geq \frac{18}{|\Omega|}, \quad (3.5.55)$$

où  $j_{0,1} \approx 2,4048$  est le premier zéro de la fonction de Bessel  $J_0(x)$ .

DÉMONSTRATION. Voir [4].  $\square$

En pratique, on peut donc remplacer la deuxième condition du théorème par une condition légèrement plus exigeante, mais plus directe :

$$\sup_{\Omega} |\Psi_z| \leq \frac{18}{18 + |\Omega|}. \quad (3.5.56)$$

### 3.5.5. Exemples d'utilisation du théorème

On donne maintenant des exemples qui respectent les deux conditions du théorème. Toutes les longueurs sont en mm.

Dans tous les exemples, on utilise le domaine  $\Omega$  défini par le rectangle  $[a,b] \times [c,d]$  dont les coins sont arrondis de manière à ce que  $\partial\Omega \in C^1$ . On a donc  $|\Omega| < (b-a)(d-c)$  et  $\text{diam}(\Omega) < \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$ . On impose la condition de Dirichlet  $z = z_b$  sur  $\partial\Omega$ , avec  $z_b > 0$  pour que le pare-brise soit devant la caméra.

#### (1) Le plan

Pour le plan, on a  $\Psi = 0$  sur tout  $\hat{\Omega} = \Omega \times I$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ . Les conditions du théorème sont donc respectées pour tout intervalle  $I$  contenant les conditions frontières. Ce cas

n'illustre pas l'utilité du théorème 3.5.17 puisque la solution est la fonction harmonique aux conditions de Dirichlet  $z_b$ .

(2) L'ellipsoïde

Soit l'ellipsoïde défini par

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 = 1, \quad (3.5.57)$$

où  $a_1, a_2, a_3 > 0$ . Les conditions frontières sont donc

$$z_b(x) = \sqrt{\frac{1 - a_1x^2 - a_2y^2}{a_3}}. \quad (3.5.58)$$

La fonction  $\Psi$  est donnée par

$$\Psi(x, y, z) = \frac{a_1 + a_2}{a_3z} + \frac{a_1^2x^2 + a_2^2y^2}{a_3^2z^3} \quad (3.5.59)$$

et sa dérivée  $\Psi_z$  est

$$\Psi_z(x, y, z) = -\frac{a_1 + a_2}{a_3z^2} - 3\frac{a_1^2x^2 + a_2^2y^2}{a_3^2z^4}. \quad (3.5.60)$$

On remarque que la première condition du théorème 3.5.17 ne peut pas être respectée lorsque  $I = \mathbb{R}$ , car  $\Psi$  n'est pas bornée près de  $z = 0$ . Il en est de même pour la deuxième condition, car  $\Psi_z$  ne l'est pas non plus. On peut cependant choisir  $I = [s, +\infty)$ , avec  $0 < s < \min(z_b)$ . On obtient alors

$$0 < \Psi(x, y, z) \leq \frac{a_1 + a_2}{a_3s} + \frac{a_1^2(\max(|a|, |b|))^2 + a_2^2(\max(|c|, |d|))^2}{a_3^2s^3} \quad (3.5.61)$$

et

$$\sup |\Psi_z(x, y, z)| = \frac{a_1 + a_2}{a_3s^2} + 3\frac{a_1^2(\max(|a|, |b|))^2 + a_2^2(\max(|c|, |d|))^2}{a_3^2s^4}. \quad (3.5.62)$$

De plus, on a

$$16 \left( \frac{\inf I - \min_{\partial\Omega} z_b}{\text{diam}(\Omega)^2} \right) = 16 \left( \frac{s - \min_{\partial\Omega} z_b}{\text{diam}(\Omega)^2} \right) < 0 \quad (3.5.63)$$

et

$$16 \left( \frac{\sup I - \max_{\partial\Omega} z_b}{\text{diam}(\Omega)^2} \right) = +\infty. \quad (3.5.64)$$

On pose alors

$$m = 0 \quad (3.5.65)$$

et

$$M = \frac{a_1 + a_2}{a_3s} + \frac{a_1^2(\max(|a|, |b|))^2 + a_2^2(\max(|c|, |d|))^2}{a_3^2s^3} \quad (3.5.66)$$

pour obtenir la première condition du théorème 3.5.17

$$16 \left( \frac{\inf I - \min_{\partial\Omega} z_b}{\text{diam}(\Omega)^2} \right) < m \leq \Psi(x,y,z) \leq M < +\infty. \quad (3.5.67)$$

La première condition est donc toujours respectée pour  $I = [s, +\infty)$ ,  $0 < s < \min_{\partial\Omega}(z_b)$ . La deuxième condition pour l'ellipsoïde devient

$$\frac{a_1 + a_2}{a_3 s^2} + 3 \frac{a_1^2 (\max(|a|, |b|))^2 + a_2^2 (\max(|c|, |d|))^2}{a_3^2 s^4} < \frac{18}{18 + (b-a)(d-c)}. \quad (3.5.68)$$

On peut multiplier par  $s^4$  pour obtenir

$$g(s^2) := As^4 + Bs^2 + C < 0 \quad (3.5.69)$$

où

$$\begin{cases} A = \frac{-18}{18+(b-a)(d-c)} \\ B = \frac{a_1+a_2}{a_3} \\ C = 3 \frac{a_1^2 (\max(|a|, |b|))^2 + a_2^2 (\max(|c|, |d|))^2}{a_3^2}. \end{cases} \quad (3.5.70)$$

La fonction  $g$  est une parabole négative dont l'ordonnée à l'origine est positive. L'inégalité est donc respectée dès que  $s^2$  est supérieur au plus grand zéro de  $g$ . On obtient la condition

$$s \geq D := \sqrt{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}. \quad (3.5.71)$$

Or, on veut aussi que  $s < \min_{\partial\Omega}(z_b)$ , donc que  $D < \min_{\partial\Omega}(z_b)$ . Les deux conditions du théorème 3.5.17 sont donc respectées pour  $I = [s, +\infty)$  dès que

$$D < \min_{\partial\Omega}(z_b) \quad (3.5.72)$$

et

$$s \in [D, \min_{\partial\Omega}(z_b)). \quad (3.5.73)$$

On substitue maintenant les variables par des valeurs qui s'approchent d'une situation réelle. On choisit le domaine  $[a,b] \times [c,d] = [-1000,1000] \times [-500,500]$ . On choisit la forme suivante pour le pare-brise :

$$\begin{cases} a_1 = 4,0 \cdot 10^{-8} \\ a_2 = 2,5 \cdot 10^{-7} \\ a_3 = 2,5 \cdot 10^{-7}. \end{cases} \quad (3.5.74)$$

On a donc

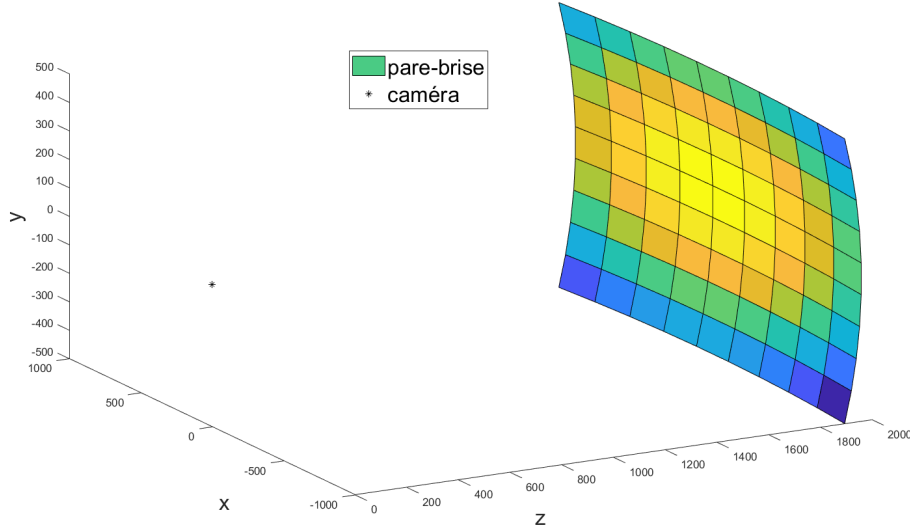
$$D \approx 6,1 \cdot 10^2 \quad (3.5.75)$$

et

$$\min_{\partial\Omega}(z_b) \approx 1,9 \cdot 10^3. \quad (3.5.76)$$

Les conditions du théorème 3.5.17 sont donc respectées pour  $I = [7 \cdot 10^2, +\infty)$  par exemple.

La figure 3.7 illustre le pare-brise étudié ici.



**Figure 3.7.** Le pare-brise ellipsoïdal

### 3.6. Preuve alternative pour l'unicité de la solution

Dans cette section, on trouve un autre critère suffisant d'unicité du problème (3.5.1). L'unicité est déjà démontrée par le théorème 3.5.17, mais on ajoute tout de même la démonstration suivante, car elle est beaucoup plus simple. Cependant, contrairement au théorème 3.5.17, elle ne démontre pas l'existence de la solution et ne donne pas de méthode pour la trouver.

On commence par supposer qu'il existe deux solutions  $z_1$  et  $z_2$ . On note la différence par  $v := z_2 - z_1$ . Puisque  $z_1$  et  $z_2$  ont les mêmes conditions aux bords, on a que  $v$  est nulle sur le  $\partial\Omega$ . On obtient l'égalité suivante :

$$-\Delta v(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}, z_2(\mathbf{x})) - \Psi(\mathbf{x}, z_1(\mathbf{x})). \quad (3.6.1)$$

Le théorème des accroissements finis garantit qu'il existe  $\zeta(\mathbf{x})$  entre  $z_1(\mathbf{x})$  et  $z_2(\mathbf{x})$  tel que

$$\Psi_z(\mathbf{x}, \zeta(\mathbf{x}))v = \Psi(\mathbf{x}, z_2(\mathbf{x})) - \Psi(\mathbf{x}, z_1(\mathbf{x})). \quad (3.6.2)$$

On a alors

$$-\Delta v(\mathbf{x}) = \Psi_z(\mathbf{x}, \zeta(\mathbf{x}))v. \quad (3.6.3)$$



On multiplie par  $v$ , puis on intègre des deux côtés :

$$\int_{\Omega} -\Delta v(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Psi_z(\mathbf{x},\zeta(\mathbf{x}))v^2(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (3.6.4)$$

On applique la première identité de Green à gauche. L'intégrale sur le bord s'annule, car  $v(\mathbf{x})$  est nulle sur  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ .

$$\int_{\Omega} \nabla v(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Psi_z(\mathbf{x},\zeta(\mathbf{x}))v^2(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (3.6.5)$$

Si  $\Psi_z$  est négatif sur  $\Omega$  et nul ailleurs, le côté droit de l'égalité est négatif. Or, le côté gauche de l'égalité est toujours positif (nul si et seulement si  $v$  est une constante). Seul le cas nul est possible. On a donc que la fonction  $v$  est constante. Avec les conditions aux bords, on obtient que la fonction  $v$  est nulle sur  $\Omega$ . On arrive donc au critère d'unicité suffisant  $\Psi_z(\mathbf{x},z) \leq 0$ ,  $\forall(\mathbf{x},z) \in \Omega \times \mathbb{R}$ .

### 3.6.1. Vérification du critère d'unicité sur les exemples

Ici, on vérifie que le critère  $\Psi_z \leq 0$  est vérifié pour les exemples.

(1) La droite et le plan

Pour le pare-brise linéaire et planaire, la vérification est directe puisque  $\Psi = 0$  :

$$\Psi_z = 0 \leq 0. \quad (3.6.6)$$

(2) La parabole

Pour le pare-brise parabolique, la fonction  $\Psi$  est

$$\Psi(x,z) = \frac{a_1x - z + \sqrt{(a_1x - z)^2 - 4a_0a_2x^2}}{x}. \quad (3.6.7)$$

La dérivée est

$$\Psi_z(x,z) = \frac{1}{x^2\sqrt{(a_1x - z)^2 - 4a_0a_2x^2}} \left( z - a_1x - \sqrt{(a_1x - z)^2 - 4a_0a_2x^2} \right). \quad (3.6.8)$$

Or, on a  $|z - a_1x| \leq \sqrt{(a_1x - z)^2 - 4a_0a_2x^2}$ , donc  $\Psi_z \leq 0$ .

(3) La sphère

La fonction  $\Psi(x,y,z)$  pour la sphère est

$$\Psi(x,y,z) = \frac{1}{z} \left( 2 + \left( \frac{x}{z} \right)^2 + \left( \frac{y}{z} \right)^2 \right). \quad (3.6.9)$$

Sa dérivée est

$$\Psi_z(x,y,z) = -\frac{1}{z^2} - 3\frac{x^2 + y^2}{z^4}. \quad (3.6.10)$$

Elle est bien négative.

(4) L'ellipsoïde

La fonction  $\Psi(x,y,z)$  pour l'ellipsoïde est

$$\Psi(x,y,z) = \frac{1}{a_3 z} \left( a_1 + a_2 + \frac{a_1^2 x^2 + a_2^2 y^2}{a_3 z^2} \right). \quad (3.6.11)$$

Sa dérivée est

$$\Psi_z(x,y,z) = -\frac{a_1 + a_2}{a_3 z^2} - 3 \frac{a_1^2 x^2 + a_2^2 y^2}{z^4}. \quad (3.6.12)$$

Elle est bien négative.

## Conclusion

---

Une méthode pour retrouver la forme d'un pare-brise à partir de données générées par un système d'inspection a été présentée. Elle se divise en trois parties. La première, décrite au chapitre 2, concerne l'extraction d'un champ de vecteurs normaux à partir des données obtenues par le système. Elle se base sur la loi de Snell-Descartes et sur des hypothèses simplificatrices au sujet de la courbure et de l'épaisseur du verre. En particulier, elle fait l'hypothèse que les vecteurs normaux à l'entrée et à la sortie du verre sont les mêmes. La deuxième étape est de trouver une surface compatible avec le champ de vecteurs obtenu. Pour y arriver, on formule un problème de minimisation où la donnée minimisée est la différence entre les vecteurs normaux à la surface et ceux prédits à l'étape précédente. Il en résulte une équation d'Euler-Lagrange non linéaire à laquelle on impose des conditions de Dirichlet. La troisième partie, décrite au chapitre 3, donne une méthode de point fixe pour solutionner cette équation. Des conditions sous lesquelles cette méthode converge sont trouvées à l'aide du théorème du point fixe de Banach, c'est-à-dire que, sous ces conditions, on trouve un espace de Banach  $X \subset W^{1,2}(\Omega)$  et une contraction  $A : X \rightarrow X$  ayant la solution désirée comme point fixe. La contraction trouvée correspond à la résolution d'un problème de Poisson linéaire.

Une limitation de la méthode proposée provient des hypothèses simplificatrices du chapitre 2. L'hypothèse  $N_1 = N_2$  n'est pas exacte. Le pare-brise est aussi modélisé comme étant composé d'une unique couche de verre, alors qu'il est en réalité composé de plusieurs couches distinctes. L'hypothèse d'uniformité sur l'indice de réfraction pourrait aussi être une source d'erreur du modèle.

Cependant, l'inversion du problème au chapitre 3 est indépendante de la manière dont le champ de vecteurs normaux est trouvé. Il serait donc possible d'appliquer le théorème principal du chapitre 3 à un champ de vecteurs normaux obtenu à partir d'un modèle aux hypothèses plus faibles que celui présenté au chapitre 2. Le chapitre 3 a aussi ses limitations. Il fait l'hypothèse que des conditions de Dirichlet sont données, ce qui n'est pas forcément facile à obtenir en pratique.

Une première piste pour poursuivre le travail de ce mémoire est de concevoir une méthode plus appropriée pour extraire le champ de vecteurs normaux. En particulier, on voudrait une

méthode qui n'impose pas ou peu de dépendance entre les surfaces interne et externe du pare-brise. On voudrait en particulier ne pas utiliser l'hypothèse  $N_1 = N_2$ .

Une deuxième piste de recherche est le développement d'un algorithme dont la convergence est plus rapide que l'algorithme de point fixe proposé. Un point de départ est la méthode de Newton.

Une troisième et dernière piste est l'analyse de la sensibilité aux conditions au bord pour déterminer si la méthode est toujours valide lorsque l'on ne connaît qu'approximativement les conditions au bord. La détection des bords n'est pas un problème trivial. Il est donc préférable que la méthode soit robuste aux erreurs sur le bord ou qu'elle puisse même s'en passer.

# Références bibliographiques

---

- [1] Windshield. [https://en.wikipedia.org/wiki/Windshield#/media/File:Raked\\_windshield\\_1952\\_DeSoto.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Windshield#/media/File:Raked_windshield_1952_DeSoto.jpg), 2007.
- [2] Commons. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2011\\_Nissan\\_Leaf\\_SL\\_--\\_10-28-2011.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2011_Nissan_Leaf_SL_--_10-28-2011.jpg), 2011.
- [3] Double or Ghost image shown on HUD. <https://www.mazda3revolution.com/threads/double-or-ghost-image-shown-on-hud.229197/>, 2018.
- [4] Rayleigh-Faber-Krahn inequality. [http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Rayleigh-Faber-Krahn\\_inequality&oldid=50821](http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Rayleigh-Faber-Krahn_inequality&oldid=50821), 2020.
- [5] WINDX. <https://synergx.com/glass-distortion-measurement/>, 2022.
- [6] Lawrence C. EVANS : *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.
- [7] Michael KAZDHAN, Matthew BOLITHO et Hugghes HOPPE : Poisson surface reconstruction. <https://hhoppe.com/poissonrecon.pdf>, 2006.
- [8] Jeff McCLURE : Double vision (ghosting) at night through windshield? <https://teslamotorsclub.com/tmc/threads/double-vision-ghosting-at-night-through-windshield.60997/>, 2016.
- [9] Justin PEATROSS et Michael WARE : Physics of light and optics. <https://optics.byu.edu/docs/opticsBook.pdf>, 2022.
- [10] James SERRIN : Weakly Subharmonic Function. *Bollettino Unione Matematica Italiana*, 4(3):347–361, 2011.
- [11] Mikhail SHUBIN : *Invitation to Partial Differential Equations*. Department of Mechanics and Mathematics of the Moscow State University.