Université de Montréal

Développement du sens du nombre et de la numération :
élaboration d'un outil d'évaluation et d'une séquence didactique

Par
Nathalie Bisaillon

Département de didactique
Facultés des sciences de l'éducation

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Ph. D.,
en didactique, option mathématiques

Octobre 2021

Université de Montréal

Département de didactique, Faculté des sciences de l’éducation

Cette thèse intitulée

Développement du sens du nombre et de la numération :
élaboration d’un outil d’évaluation et d’une séquence didactique

Présenté par
Nathalie Bisaillon

A été évalué(e) par un jury composé des personnes suivantes

Sophie René De Cotret
Présidente-rapporteure

Louise Poirier
Directrice de recherche

Daniel Daigle
Co-directeur de recherche

Sarah Dufour
Membre du jury

Patricia Marchand
Évaluatrice externe

Serge J. Larivée
Représentant de la doyenne

Résumé

Le sens du nombre est un des piliers des apprentissages en arithmétique. Son acquisition permet, entre autres, de comprendre notre système de numération. Dans les années 1980, des chercheures se sont intéressées aux difficultés associées à l'apprentissage de la numération et ont énoncé une série de recommandations pour favoriser la compréhension de ce concept. Ces recherches sont encore aujourd'hui des recherches phares et plusieurs études s'en sont inspirées. Des études plus récentes montrent cependant que les difficultés liées à l'apprentissage de la numération demeurent les mêmes pour les élèves d'aujourd'hui. L'objectif général de la présente recherche est de mieux comprendre comment se développe le sens du nombre et de la numération, de la petite enfance jusqu'à l'âge de 7-8 ans et de faire ressortir les conditions qui favorisent ce développement.

Des recherches montrent que le développement du sens du nombre s'appuie sur la construction de représentations mentales dynamiques et imagées. Pour favoriser cette construction, les élèves doivent avoir accès à des représentations concrètes et imagées aussi variées que fécondes. Des tâches de résolution de problèmes dans lesquelles les élèves s'engagent doivent aussi être prévues pour favoriser les apprentissages. Des recherches montrent enfin que le sens du nombre peut être décrit sous forme de continuum qui se développe du préscolaire à l'âge adulte. Or, aucune étude connue ne s'est intéressée à ce type de progression et n'a tenté d'identifier les conditions qui favorisent ce développement en tenant compte des éléments ci-haut mentionnés.

Dans la présente recherche, une proposition de continuum du sens du nombre et de la numération de la petite enfance à 8 ans, s'appuyant sur ces recherches, a été établie. Ce continuum identifie les éléments clés du développement de la compréhension des élèves. Un outil d'évaluation a été construit. Il permet de situer l'élève sur ce continuum. Une séquence didactique a été mise en place. Elle donne l'occasion à l'élève de développer sa compréhension selon ce continuum. Ces instruments s'adressent aux élèves de la fin de la 2e année et du début de la 3e année, soit des enfants de 7-8 ans. La construction de ces instruments constitue un des objectifs spécifiques de cette recherche. Un deuxième objectif est de vérifier la viabilité en contexte de ces instruments auprès de professionnels de l'éducation.

Les objectifs de l’étude ont été atteints : les instruments ont été créés, puis leur viabilité en contexte a été évaluée par des professionnels du milieu de l’éducation. Selon l’analyse qualitative des commentaires des participants, l’outil d’évaluation permettrait d’évaluer le niveau de développement du sens du nombre des élèves et de dépister ceux qui ont des difficultés à apprendre ces concepts. Il donnerait aussi l’occasion aux élèves de développer leur sens du nombre, selon leur niveau de compréhension, à travers une séquence d’activités.

Une analyse fine des commentaires fait clairement ressortir que le sens du nombre, de même que les conditions à mettre en place pour favoriser son développement, n’occupent pas une assez grande place dans l’enseignement actuel de l’arithmétique au primaire ni dans le Programme de formation de l’école québécoise. Il demeure cependant un prédicteur important de réussite scolaire. C’est pour cette raison que d’autres travaux doivent porter sur les concepts ciblés dans la présente étude afin de mieux accompagner les élèves et leurs enseignants vers la réussite.

Mots-clés : didactique, mathématiques, difficulté d’apprentissage, sens du nombre, numération, subitisation, groupitisation, outil d’évaluation, séquence didactique, représentation mentale.

Abstract

Number sense is one of the pillars of learning arithmetic. Its acquisition allows, among other things, to understand our decimal and positional numeral system. In the 1980s, researchers became interested in the difficulties associated with learning numeration by elementary school children. They proposed a framework and a series of recommendation to promote the understanding of this concept. Their research is still a reference today and several studies have been inspired by it. More recent studies, however, show that the difficulties associated with learning numeration remain the same for today's students. The general objective of this research is to better understand how number sense develops from infancy up to the age of 7-8 years and to highlight the conditions that increase this development.

Research shows that the development of number sense and the understanding of mathematical concepts is based on the construction of dynamic and image-based mental representations. To promote this construction, students must be given access to concrete and image-based representations that are as varied as they are fruitful. Problem-solving tasks in which students are called upon to engage must also be included in the planning of mathematical activities to promote student learning. Finally, research shows that number sense can be described as a continuum that develops from preschool to adult life. However, no known study has been focusing on in this type of progression leading to the understanding of numeration and has attempted to identify the conditions to promote the development of number sense by taking into account the above-mentioned elements.

In the present study, a proposal for a number sense continuum, from infancy to age 8, has been established. This continuum identifies key elements in the development of student understanding. An evaluation tool has been built. It helps situate the student on this continuum. A didactic sequence has also been built. It gives students the opportunity to develop their understanding along this continuum. These tools were intended for students at the end of Grade 2 and the beginning of Grade 3, i.e. children aged 7-8. The construction of these tools was one of the specific objectives of this research. A second objective was to verify viability in context of these tools with education professionals.

The objectives of the study were achieved: the device was created and then the viability in context was evaluated by professionals in the education community. According to the qualitative analysis of participants' comments, the device could make it possible to assess the level of development of the number sense of the students and to identify those who have difficulty in learning this concept. It also could give students the opportunity to develop their number sense, to their level of understanding, through a sequence of activities.

A detailed analysis of the comments clearly shows that number sense, as well as the conditions that need to be put in place to promote its development, do not occupy a sufficiently large place in the current teaching of arithmetic at the elementary school level or in the Quebec Education Program. However, it remains an important predictor of academic success. For this reason, further work must be done on the concepts targeted in this study in order to better guide students and their teachers towards success.

Keywords: didactics, mathematics, learning difficulty, number sense, numeration, subitizing, groupitizing, assessment tool, didactic sequence, mental representation.

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Liste des sigles et des abréviations

OCDE : Organisation de coopération et de développement économiques

PFÉQ : Programme de formation de l'école québécoise

Remerciements

Une thèse de doctorat n'est pas quelque chose qui se fait seule. Je dois d'abord dire merci à mes directeurs de recherche. Louise, merci! Tu es avec moi depuis le début de cette aventure. Tu as cru en moi et tu m'as laissé la liberté d'explorer les sujets qui m'intéressaient. Merci pour ton ouverture d'esprit et ton soutien. Daniel, merci! Merci de t'être joint à l'équipe et de m'avoir insufflé la dose de courage et la rigueur dont j'avais besoin pour terminer cette aventure. Michel, même si tu n'étais pas un directeur officiel, merci! Merci pour nos nombreux échanges et tes précieux commentaires.

Je dois aussi dire merci à ma famille et mes amis pour leur très grande compréhension. Faire une thèse est quelque chose de sournois qui vole du temps à gauche et à droite, mais vous êtes encore là pour moi malgré mes nombreuses absences. Merci de votre compréhension, merci pour votre soutien, vos encouragements et vos précieux conseils. Je tiens à dire un merci particulier à ma fille qui, sans le savoir, m'a donné la motivation nécessaire pour terminer ce projet. Enfin, merci à mes deux correctrices qui ont lu, corrigé et commenté plus d'une version de ce document…!

Merci aux participants de cette recherche qui ont pris le temps, malgré les conditions particulières dans lesquelles nous étions à cause de la COVID de vérifier la viabilité en contexte de l'outil d'évaluation et la séquence didactique et d'en discuter avec moi. Sans vous, je n'y serais pas arrivée!

Enfin, merci à mes collègues pour les échanges constructifs qui m'ont permis de pousser plus loin mes réflexions.

Introduction

La réussite en mathématiques contribue au succès scolaire et professionnel (Dionne, 2007). En effet, les « habiletés mathématiques ont une influence sur l'employabilité, la productivité et les salaires dans l'industrialisation et le développement des nations, au-delà de l'influence de la littératie, du nombre d'années d'études et de l'intelligence » (Geary, 2000). La réussite en arithmétique, branche des mathématiques qui étudie les propriétés et les règles de calcul entre les nombres (Mathieu, de Champlain et Tessier, 1990), est importante puisqu'elle se trouve au cœur de la majorité des activités mathématiques du primaire et du secondaire. Le développement du sens du nombre est un élément clé de cette réussite. Le sens du nombre se définit essentiellement comme ce qui permet à une personne de comprendre les nombres et leurs relations et de porter des jugements mathématiques (Bobis, 2007, Northcore et McIntosh, 1999; Reys et Yang, 1998). Le sens du nombre est au cœur de la présente étude.

Ce texte comporte cinq chapitres. Le premier chapitre, la problématique, a pour objectif de cerner le contexte scolaire dans lequel les élèves québécois du primaire apprennent les mathématiques et développent leur sens du nombre. Ensuite, afin de mieux comprendre les enjeux de la réussite en mathématiques, certains prédicteurs de la réussite en mathématiques seront présentés. Enfin, un portrait de la compréhension qu'ont les élèves du système de numération est proposé. Ce premier chapitre nous amène à nous questionner sur le développement du sens du nombre et de la numération et sur les conditions à mettre en place afin de favoriser ce développement. Ce questionnement a guidé les choix de contenus rapportés au deuxième chapitre.

Dans le deuxième chapitre, les caractéristiques du système de numération sont explicitées. Cette description mènera à la présentation du bilan actuel des connaissances associées à l'apprentissage de chacune de ces caractéristiques. La présentation d'études s'intéressant au développement du sens du nombre et de la numération permet de bien cerner les enjeux de ces apprentissages. La description d'études empiriques sur l'enseignement du sens du nombre et de la numération conduit à l'élaboration d'objectifs spécifiques de recherches.

Le troisième chapitre expose les choix méthodologiques qui permettent de répondre aux objectifs spécifiques. Dans un premier temps, le type de recherche dans lequel cette démarche s'inscrit, la recherche-développement, sera présenté. Dans un deuxième temps, l'outil d'évaluation et la séquence didactique, les deux instruments qui ont été créés dans cette étude seront détaillés. Dans un troisième temps, le portrait des participants sera peint. Dans un quatrième temps, les instruments qui ont été utilisés pour collecter les données seront décrits. Enfin, les choix pour le traitement et l'analyse des données seront exposés.

Le quatrième chapitre présente les résultats. Une analyse qualitative des commentaires que les participants ont formulés par rapport aux deux instruments a été réalisée. Les commentaires ont été analysés en fonction de l'outil d'évaluation d'abord et de la séquence didactique et de ses activités ensuite.

Enfin, dans le cinquième et dernier chapitre, le chapitre de discussion, un retour sur les résultats saillants ainsi que sur l'ensemble de cette thèse est réalisé.

1. Problématique

Ce chapitre présente la problématique à la source de cette thèse. Les mathématiques jouent un rôle important de classement dans le parcours scolaire des élèves. Au primaire, la réussite en mathématiques est essentielle pour poursuivre le cheminement régulier. Au secondaire, les élèves ont accès à des parcours scolaires différents selon leurs résultats en mathématiques. Pour pouvoir faire des études collégiales en sciences ou en gestion par exemple, ils auront besoin de réussir en mathématiques. De plus, certaines habiletés mathématiques, dont le sens du nombre, seraient d'importants prédicteurs de la réussite en mathématiques et dans d'autres matières comme la lecture (Case et Okomato, 1996; Claessens et coll., 2009; Duncan et coll., 2007; Pagani et coll. 2011). Le développement du sens du nombre concerne autant les concepts, les procédures et les stratégies de résolution de problèmes qui permettent d'affronter les tâches les plus complexes en mathématiques. Ainsi, les leçons tirées de l'analyse de cette recherche pourraient aider à mettre en place des tâches qui auront un impact sur la réussite des élèves, notamment chez les élèves éprouvant des difficultés.

La première partie de ce chapitre présente le contexte scolaire québécois et expose les grandes lignes du *Programme de formation de l'école québécoise* en faisant ressortir les composantes des compétences à développer en mathématiques (Gouvernement du Québec, 2001). La deuxième partie présente certaines des variables qui prédisent la réussite en mathématiques, dont le sens du nombre et la compréhension du système de numération. La troisième partie présente des recherches récentes qui permettent de dresser un portrait des performances des élèves de troisième année, à l'âge où les élèves ont normalement développé leur compréhension de la numération et de ses composantes (Koudogbo, 2013; Koudogbo et coll., 2017). Ce bilan montre que les résultats des élèves d'aujourd'hui ne semblent pas réellement se différencier de ceux des élèves des années 1980 (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986, 1988), malgré les efforts des milieux éducatifs pour accroître la réussite scolaire. Dans la dernière partie, une synthèse de ce premier chapitre est présentée afin d'identifier la question générale de recherche qui orientera le contenu du deuxième chapitre, soit le cadre conceptuel.

1.1. Contexte scolaire québécois

Le *Programme de formation de l'école québécoise* (PFÉQ) de l'école primaire est en vigueur depuis 2001. Il vise la réussite pour tous, autant sur le plan scolaire que social. Il aspire à préparer les élèves à la poursuite de leur cheminement scolaire et professionnel. Ce programme est axé sur le développement de compétences, des « savoir-agir fondés sur la mobilisation et l'utilisation efficaces d'un ensemble de ressources » (Gouvernement du Québec, 2001, p. 4). Les compétences sont des outils intellectuels complexes et flexibles qui permettent aux individus de mieux comprendre le monde afin d'agir sur ce dernier. Elles sont en interaction avec les connaissances; sans les connaissances, les compétences ne peuvent pas s'actualiser et sans les compétences, les connaissances ne servent à rien (Perrenoud, 1995).

La maîtrise des mathématiques est un atout dans notre société (Gouvernement du Québec, 2001). Selon l'Organisation de coopération et de développement économiques (OCDE), « tous les adultes doivent posséder une " culture " mathématique, scientifique et technologique pour pouvoir s'épanouir, travailler et participer pleinement à la vie de la société » (OCDE, 2007, p. 347). Pour mener les élèves vers cette cible, le PFÉQ propose le développement de trois compétences : résoudre des situations problèmes, raisonner à l'aide des concepts et des processus mathématiques et communiquer à l'aide du langage mathématique. Ces trois compétences disciplinaires sont en constante interaction.

La première compétence « Résoudre des situations problèmes » se traduit par l'engagement de l'élève dans un processus à travers lequel il déploie plusieurs stratégies et utilise plusieurs de ses connaissances. Cette démarche intellectuelle permet à l'élève de développer un « outil intellectuel puissant au service du raisonnement et de l'intuition créatrice » (Gouvernement du Québec, 2001, p. 125). Cette démarche est exploitée dans une multitude de situations. La résolution d'une situation problème pousse l'élève à mettre en place différentes stratégies de compréhension, d'organisation, de résolution, de validation et de communication (Gouvernement du Québec, 2001; Poirier, 2001; Polya, 1957; Roegiers, 1998).

La seconde compétence « Raisonner à l'aide des concepts et des processus mathématiques » est présente lorsque l'élève organise de façon structurée et logique ses idées face à une tâche, ce qui lui permet de la résoudre. C'est l'occasion, pour l'élève, de percevoir la situation et d'établir un enchaînement logique de concepts pour trouver la réponse (Baruk, 1992; Gouvernement du Québec, 2001).

La dernière compétence « Communiquer à l'aide du langage mathématique » concerne la connaissance et l'utilisation appropriées du langage ou du symbolisme mathématique. Elle permet aux élèves de soutenir leurs apprentissages en nommant correctement les concepts qu'ils abordent. Cette compétence amène aussi les élèves à produire ou à interpréter des messages utilisant le langage mathématique (Gouvernement du Québec, 2001; Lemoyne, 2004).

Le PFÉQ inclut également un document intitulé *Progression des apprentissages* (Gouvernement du Québec, 2009), une liste des concepts et des procédures à maîtriser selon les niveaux scolaires; ces savoirs dits essentiels, rappelons-le, sont en constante interaction avec les trois compétences disciplinaires. La présente recherche concerne uniquement la section « Arithmétique » du programme. L'arithmétique, branche des mathématiques qui étudie les propriétés et les règles de calcul entre les nombres (Mathieu, de Champlain et Tessier, 1990), se trouve au cœur de la majorité des activités mathématiques du primaire. Elle est « constituée des éléments de base en mathématiques puisqu'ils sont réinvestis dans tous les autres champs de la discipline » (Gouvernement du Québec, 2009, p. 4). La majorité des « savoirs essentiels » en mathématiques au primaire relèvent de l'arithmétique.

La section « Arithmétique » de la Progression des apprentissages est divisée en trois parties : le sens et l'écriture des nombres, le sens des opérations sur des nombres et les opérations sur des nombres. Le sens du nombre se développe dès le jeune âge et continue à se développer tout au long de la vie d'un individu (Giroux, 2010; Gouvernement du Québec, 2009, p. 5). Le sens du nombre sera défini plus en détail à la section 1.2.1. Il est en étroite interaction avec le sens des opérations. C'est le développement du sens des opérations qui permettrait à l'élève d'identifier l'opération à effectuer selon la tâche qui lui est proposée. Il pourrait ensuite effectuer cette opération de façon adéquate. La progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2009) tente de faire ressortir tous les savoirs essentiels à la réussite des élèves quant au déploiement du sens du nombre, du sens des opérations et de la réalisation des opérations.

Toujours dans le but de mettre en place le plus de conditions permettant de mener les élèves vers la réussite, le Québec s'est doté d'une *Politique de la réussite éducative* (Gouvernement du Québec, 2017). Le premier objectif de cette politique est de porter à 85 %, d'ici 2030, le nombre d'élèves de moins de 20 ans qui obtiennent un premier diplôme d'études secondaires ou d'études professionnelles. La réussite aux épreuves ministérielles en mathématiques est un des critères conduisant à l'obtention du diplôme.

Cette politique propose des orientations pour améliorer la réussite des élèves aux épreuves ministérielles et, par le fait même, le taux de diplomation. L'axe 1 de cette politique cible l'atteinte du plein potentiel des élèves en s'appuyant, entre autres, sur la constitution de bases solides. Un des éléments identifiés pour mettre en place ces fondations est le développement des compétences en littératie et en numératie dès la petite enfance et tout au long de la vie (Gouvernement du Québec, 2017). La recherche de Garcia Coll et coll. (2007) montre, par exemple, que la réussite en mathématiques au préscolaire prédit les résultats dans cette discipline tout au long de la scolarité.

D'autres études précisent, parmi les éléments mathématiques travaillés au préscolaire, ceux qui sont de bons prédicteurs de la réussite en mathématiques. Ils seront présentés dans la prochaine section.

1.2. Prédicteurs de réussite en mathématiques

La littérature scientifique reconnaît différents prédicteurs de la réussite des élèves en mathématiques. Les habiletés visuo-spatiales, les fonctions exécutives, plus particulièrement l'inhibition, et le sens du nombre sont les prédicteurs les plus souvent identifiés (Deshaies et coll., 2020; Hawes et coll., 2009; Moss et coll., 2016). Hawes et coll. (2009) proposent une métaphore intéressante pour décrire le rôle que ces prédicteurs entretiennent entre eux. Ils comparent l'apprentissage des mathématiques à la construction d'une maison. Pour eux, le sens du nombre représente les briques d'une maison, les « fundamental building blocks ». Les habiletés visuo-spatiales sont des outils pour manipuler et assembler les briques et les fonctions exécutives sont les règles et les contraintes de construction.

Les habiletés visuo-spatiales sont liées, selon Hawes et coll. (2009) à la capacité qu'ont les individus à générer, retirer, garder ou manipuler de l'information visuo-spatiale. Ces habiletés permettraient éventuellement aux élèves de manipuler mentalement les nombres.

Les fonctions exécutives sont des fonctions du cerveau qui permettent de prendre des décisions stratégiques selon les situations rencontrées (Houdé 2004). L'inhibition réfère plus particulièrement à la capacité qu'ont les individus de freiner une réponse, de « résister » (Deshaies et al., 2020; Houdé, 2004) à la mauvaise réponse. Les élèves auraient besoin de l'inhibition pour bloquer la mauvaise stratégie et permettre le recours à la bonne, ce qui est essentiel pour bien réussir en mathématiques (Houdé, 2004).

Le sens du nombre, dont il sera question dans la section qui suit, est un autre important prédicteur de la réussite en mathématiques et dans d'autres matières (Mazzocco et Thompson, 2005; Pagani et coll., 2011). Il est au centre du présent travail.

1.2.1. Le sens du nombre

Dans cette section, les composantes et les caractéristiques du sens du nombre seront présentées. Ce concept demeure complexe à définir puisqu'il présente plusieurs facettes. Son importance sera ainsi précisée.

Selon Jordan (2010), le sens du nombre est le fondement qui soutient l'apprentissage de notions mathématiques complexes associées au calcul mental ainsi qu'à la résolution de problèmes. Van Luit et Schopman (2000) précisent aussi que les difficultés précoces par rapport au sens du nombre ont un impact sur les apprentissages mathématiques ultérieurs.

Le sens du nombre est un concept important en didactique des mathématiques. Pour Devlin (2017), un mathématicien britannique, il s'agit même du concept mathématique le plus important du 21e siècle. Gersten et Chard (1999) le comparent à la conscience phonologique, un prédicteur puissant de la réussite en lecture, puisque le sens du nombre est un des piliers de la réussite en mathématiques. De leur côté Witzel, Ferguson et Brown (2007) associent le sens du nombre à la compréhension en lecture. Pour eux, comprendre les mathématiques n'est pas seulement reconnaître des symboles mathématiques et effectuer les bonnes techniques, tout comme comprendre un texte en lecture ne consiste pas seulement à reconnaître les lettres pour leur associer les bons sons.

Pour définir le sens du nombre, il est d'abord important de le distinguer du nombre. « Le nombre est une entité abstraite qui permet de rendre compte des quantités discrètes finies, manipulables, figurées, ou évoquées, c'est-à-dire qui permet de résoudre certains problèmes de comparaison et d'évaluation à l'aide, si besoin est, d'opérations élémentaires » (Mounier, 2010, p. 21). Le sens du nombre concerne tous les nombres, mais, pour la présente recherche, il s'agit du sens du nombre naturel, soit le nombre qui « sert à compter ou à dénombrer les objets d'un ensemble » (Patnaude et Mathieu, 2019). Il ne s'agit pas non plus du « concept de nombre » tel que Piaget en parle dans la Genèse du nombre (Piaget et Szeminska, 1941), soit comme étant une synthèse des opérations de classification et de sériation.

Deux courants de pensée définissent le sens du nombre. Ces deux points de vue se complètent, mais relèvent de théories différentes. Pour certains auteurs, le sens du nombre se manifeste avant l'âge de 4 ans. Ce serait alors une aptitude à percevoir, de façon précise, les petites numérosités (de 0 à 4 éléments) ou, de façon approximative (sans compter chacun des éléments), des quantités lorsqu'elles sont de l'ordre du simple au double, par exemple 4 et 8 ou 10 et 20 (Dehaene, 2001; Jordan et Levine, 2009). Cette aptitude serait présente dès les premiers mois de la vie (Starkey et Cooper, 1980; Wynn, 1992a ; Wynn, 1992b). Cette vision a donné naissance à une conception désignée par l'expression *sens des petites numérosités* (Dehaene, 2003).

D'autres attribuent une portée plus large au sens du nombre en considérant le sens des petites numérosités comme ses premières manifestations (Greeno, 1991; Howden, 1989; McIntosh et Dole, 2000; Reys et Yang, 1998; Van de Walle et Lovin, 2007). Pour ces auteurs, le sens du nombre se développe tout au long de la vie. Il ne s'agirait pas d'une connaissance finie, mais plutôt d'un bagage intellectuel qui évolue dans le temps, en fonction des expériences que l'on vit (Reys, 1994). Van de Walle et Lovin (2007) parlent d'abord d'un « sens initial du nombre » qui s'apparenterait à une bonne intuition sur les nombres et leur relation (Howden, 1989). Ils précisent ensuite que les enfants continuent de développer leur sens du nombre à travers la compréhension de la valeur de position et des opérations sur les nombres, ce qui contribue à la construction de représentations mentales. Selon eux, les programmes traditionnels d'enseignement délaissent trop rapidement le développement de cette pensée flexible au profit d'un enseignement des gestes et des techniques de calcul plus stricts. Ainsi, plus d'attention devrait être accordée à la construction du sens du nombre au préscolaire et au primaire (Van de Walle et Lovin, 2007).

Selon Reys et Yang (1998), le sens du nombre se rapporte à la compréhension générale qu'un individu a du nombre et des opérations arithmétiques. Il ne s'agit pas de la simple application d'algorithmes ou de procédés techniques, ni de la mémorisation de définitions (Greeno, 1991; Howden, 1989; McIntosh et Dole, 2000). C'est plutôt une forme de raisonnement, une capacité de réflexion sur les nombres qui se manifeste par une flexibilité dans le traitement et la manipulation des nombres et dans le choix des stratégies opératoires. Cette flexibilité se manifeste par le fait que l'élève soit capable de jouer avec les nombres et les opérations. Il est capable de réfléchir sur ces derniers et de choisir, parmi toutes les possibilités qu'il connaît, celle qui convient le mieux pour une tâche donnée. L'élève est capable de s'adapter à la tâche qu'il doit résoudre (Gagné et coll., 2009; Gouvernement du Québec, 2019; Houdé 2004). Le développement du sens du nombre se caractérise avant tout par la capacité de comprendre des situations numériques et les effets des manipulations sur les nombres. C'est une manière de penser (Reys, 1994).

Le sens du nombre est un concept complexe, difficile à cerner, car il y a plusieurs variables en jeu. Étant donné cette complexité, Reys (1994), en s'appuyant sur ses observations des élèves, a tenté d'établir une liste de comportements associés au sens du nombre, leur présence pouvant varier selon les situations qui sont proposées aux élèves :

- faire des liens entre les mathématiques et le monde réel;
- être capable de juger de la justesse d'une réponse;
- inventer ses propres procédures de calcul;
- se représenter un nombre de plusieurs façons selon le contexte en jeu;
- reconnaître des régularités dans le système de numération;
- obtenir facilement la réponse à des calculs élémentaires;
- être capable d'utiliser ses connaissances sur les nombres pour en déduire de nouvelles;
- faire régulièrement appel à l'estimation;

- jouer avec les nombres en les composant ou en les décomposant;
- reconnaître la grandeur, la quantité derrière les chiffres.

Ces composantes ne sont pas exclusives au sens du nombre, particulièrement les deux premières. Cependant, elles expriment toutes cette idée de flexibilité, de compréhension des nombres, de leurs relations et de la capacité à les manipuler selon les tâches à résoudre liées au sens du nombre. Elles vont aussi de pair avec le développement des compétences visées dans le programme de formation. Selon le PFÉQ (2001), réussir en arithmétique ne signifie pas seulement être capable de bien reproduire des séquences de calcul ou apprendre des définitions. Réussir implique surtout de développer sa compétence mathématique, qui pourrait se traduire notamment par le développement du sens du nombre. À la lumière des travaux rapportés plus haut, le sens du nombre permet de comprendre les nombres et leurs relations, de faire preuve de jugement et de créativité en résolution de problèmes mathématiques, au-delà des automatismes ou des simples applications, et qui conduit au calcul mental (Bobis, 2007; McIntosh et Dole, 2000; Tsao, 2004; Reys, 1994; Rodriguez, 2009).

Le nombre permet de décrire et de nommer des quantités; il s'agit d'un objet culturel (Dehaene, 2003). À l'inverse, « une quantité est susceptible d'être évaluée, c'est-à-dire associée à un nombre » (Baruk, 1997, p. 980). Le sens du nombre, lui, est quelque chose qui se développe et qui permet, entre autres, de comprendre les nombres et leurs relations. Une des premières clés du développement du sens du nombre est la subitisation. La subitisation est la capacité de percevoir instantanément la quantité (Clements, 1999; Dehaene, 2003; Mandler et Shebo, 1982; Starkey et Cooper, 1980; Wynn, 1992a, 1992b). Elle est présente avant que l'enfant utilise le nombre et elle permet, éventuellement, d'identifier le nombre. Elle sera davantage détaillée dans la section 2.2.4.2. Le sens du nombre étant quelque chose qui évolue, une autre des clés permettant son développement est la compréhension du système de numération. Nous en parlons dans la section suivante.

1.2.2. La compréhension du système de numération

La numération est un « système comprenant des symboles et des règles d'utilisation de ces symboles permettant d'écrire et de nommer les divers nombres » (Patnaude et Mathieu, 2019). Un système de numération permet donc de représenter des nombres. Sa compréhension est la base de l'arithmétique (Koudogbo, 2013). Notre système de numération existe parce qu'il permet de traiter rapidement de grandes quantités. Nous reviendrons en détail sur ses composantes dans le cadre théorique à la section 2.2.

Comprendre la numération sous-entend la flexibilité dans la manipulation des quantités, tout comme il en a été précédemment question dans les caractéristiques générales du sens du nombre. Un exemple de cette flexibilité est l'élève qui est capable de représenter la quantité 456 de différentes façons, par exemple 4 centaines + 5 dizaines + 6 unités, mais aussi, en adoptant une notation abrégée, 3c + 15d + 6u ou encore 3c + 14d + 16u. Il pourra aussi choisir la meilleure décomposition selon l'opération demandée. Par exemple, si l'on veut enlever 163 de 456, il choisira 3c + 15d + 6u. Il pourrait aussi jouer avec les nombres en faisant 20 + 15 – 1 pour effectuer le calcul 19 + 15.

Cette souplesse dans la manipulation des nombres et cette facilité à jouer avec les différents groupements de dix facilitera aussi la compréhension des conversions entre unités de mesure. Nous utilisons le Système international d'unités (SI) qui s'appuie sur le principe de multiplication par dix, un fonctionnement décimal. Enfin, cette flexibilité soutiendra la compréhension des fractions et des nombres décimaux (DeBlois, 1995; Tempier, 2013).

La maîtrise du concept de numération est difficile pour plusieurs élèves (Koudogbo, 2013). Au cours des trente dernières années, plusieurs chercheurs se sont intéressés à la numération et aux difficultés que posent son enseignement et son apprentissage (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986; Clark et Kamii, 1996; DeBlois, 1995 ; Jones et coll., 1994, 1996; Koudogbo, Giroux et René de Cotret, 2017; Poirier, 2001).

Selon Witzel et ses collaborateurs (2007), une des difficultés observées chez des élèves qui ont un pauvre sens du nombre est celle de percevoir la pertinence et le rôle du groupement dans notre système de numération. Derrière l'écriture des nombres avec des chiffres se cachent des groupements de dix, de cent, etc. Dans une recherche phare, Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) avaient déjà fait ressortir les difficultés des élèves à voir et comprendre les groupements sous-entendus par l'écriture positionnelle, autrement dit à les conceptualiser. Ces chercheuses ont aussi fait des recommandations par rapport à l'enseignement de la numération. Nous y reviendrons dans notre cadre théorique à la section 2.4.1. Dans la prochaine section, les travaux relativement récents de chercheurs qui se sont questionnés sur la compréhension qu'ont les élèves d'aujourd'hui des principes soutenant notre système de numération seront présentés. Ils seront comparés aux études menées par Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) au début des années '80.

1.3. État des lieux sur la compréhension des élèves du système de numération

Pour les adultes instruits, lire des nombres et faire des opérations avec ces derniers semblent des performances élémentaires, surtout pour les nombres naturels. Notre système de numération ne semble pas si énigmatique. Pourtant, plusieurs élèves manifestent des difficultés à apprendre cette branche de l'arithmétique (Mounier, 2010).

Dans les années 1980, deux chercheuses québécoises ont étudié les difficultés éprouvées par les élèves à comprendre la numération et ses principes (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986). Leurs travaux sont depuis une référence incontournable lorsqu'il est question de l'apprentissage de la numération (Koudogbo et coll., 2017). Elles ont remarqué qu'un grand nombre d'élèves ne percevaient pas les groupements sous-entendus par l'écriture positionnelle des nombres ni le rôle des groupements dans le traitement de la quantité. Notre système de numération est un système dit positionnel. Les chiffres ont une valeur différente selon la place qu'ils occupent dans le nombre. Par exemple, dans le nombre 456, le 4 signifie qu'il y a quatre centaines, elles-mêmes formées de dix groupes de dix. Comme cela a été mentionné plus tôt, être compétent en arithmétique ne signifie pas seulement être capable d'effectuer des calculs avec les nombres. Il faut aussi comprendre les relations entre les nombres et, pour y arriver, il faut entre autres pouvoir identifier le rôle du groupement de dix dans notre système de numération et être capable de manipuler ces groupements pour arriver à solutionner divers problèmes.

Trente ans plus tard, Koudogbo et ses collègues (2013, 2017) ont évalué 18 élèves de 3^{e} année (8-9 ans) en utilisant les mêmes tâches que celles utilisées par Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b). Ces tâches faisaient appel à la numération. Elles ont ensuite comparé les résultats de leurs élèves à ceux ciblés dans les études des années 1980. Il semblerait que les performances de ces élèves ne se soient pas différentes de celles des élèves ciblés dans les études réalisées dans les années 1980 (Koudogbo, 2013). Pour effectuer cet exercice, elles ont considéré quatre groupes d'élèves. Les trois premiers (cohortes A, B1 et B2) sont les élèves ayant vécu les expérimentations des années 1980. Les élèves de la cohorte C sont les élèves rencontrés lors des recherches de Koudogbo et ses collaborateurs (Koudogbo, 2013; Koudogbo et coll., 2017) :

- cohorte A : 75 élèves de 3e année ayant reçu un enseignement normalement attendu;
- cohorte B1 : 23 élèves de 3e année ayant reçu un enseignement par Bednarz et Janvier-Dufour;
- cohorte B2 : 26 élèves de 3e année provenant de la même commission scolaire que le Groupe B1, mais ayant suivi un enseignement normalement attendu;
- cohorte C : 18 élèves de 3e année (8-9 ans), issus d'une même commission scolaire, 6 élèves jugés forts, 6 élèves jugés moyens et 6 jugés faibles par les enseignantes titulaires, faisant l'objet de l'expérimentation de Koudogbo (2013) et ayant reçu un enseignement normalement attendu.

Koudogbo et ses collègues (2013, 2017) ont utilisé deux tâches issues des travaux de Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) pour évaluer les élèves. La première vérifie si les élèves « groupent des traits » (Koudogbo et coll., 2017). Une image dans laquelle il y a 144 traits est montrée à l'enfant. La consigne qui lui est donnée est « Peux-tu me dire combien il y a de traits sur la feuille ? » (Koudogbo et coll., 2017, p. 206). Les réponses des élèves sont classées en quatre catégories :

1) coder la collection à partir de groupes de dix, en faisant d'abord des groupes de dix et en faisant ensuite une centaine avec dix groupes de dix, soit en comptant les groupes de dix - ici quatorze - et en les multipliant directement par dix pour obtenir 140. Les élèves font des groupes de groupes;
2) coder la collection à partir de groupes de dix, en faisant une addition des groupes de dix (ou d'autres groupes réguliers) et ensuite additionner les unités non groupées (10, 20, 30…140, 141, 142, 143, 144);
3) dénombrer, compter un à un, en ayant recours à la bijection et en utilisant une chaîne numérique stable. La non-pertinence de l'ordre et la cardinalité sont aussi présentes;
4) faire une description qualitative de la quantité : « Il y en a beaucoup! ».

La première conduite démontre un raisonnement multiplicatif, qui permet aux élèves de recourir à des stratégies démontrant qu'ils perçoivent la pertinence du groupement et qu'ils lient le code symbolique aux groupements (Bednarz et Janvier-Dufour, 1988). La deuxième conduite fait aussi appel aux groupements. Ces raisonnements sont donc adéquats pour cette tâche, tandis que les deux autres se caractérisent plutôt par un raisonnement additif et ne sont pas considérées comme des stratégies efficaces pour réussir la tâche (Bednarz et Janvier-Dufour, 1988). Les résultats des élèves à la première tâche de Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) et de Koudogbo et coll. (2017) sont synthétisés au tableau 1.1.

Tableau 1.1 Résultats des élèves à la 1re tâche de Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) et de Koudogbo et coll. (2017)

Cohortes	Réponses (%) des élèves en fonction des catégories			
	1	2	3	4
A (n = 75)	0 %	26 %	33,3 %	41 %
B1 (n = 26)	29,5 %	62,5 %	4 %	4 %
B2 (n = 23)	0 %	27 %	35,5 %	38,5 %
C (n = 18)	5,5 %	39 %	33,3 %	22,2 %

Bednarz et Janvier-Dufour (cohortes A, B1 et B2); Koudogbo et coll. (cohorte C)

Les élèves de la cohorte B1, groupe expérimental des années 1980, se démarquent par rapport aux trois autres groupes d'élèves à cette tâche. Ils réussissent à 92 % à faire des groupes de dix. Parmi ces élèves, 29,5 % groupent de façon récurrente dix groupes de dix, pour obtenir la centaine.

La deuxième tâche de Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) utilisée par Koudogbo et ses collègues (2017) évalue l'habileté à manipuler les nombres. Il est demandé à l'élève de résoudre un problème comportant une soustraction avec emprunt : 234 – 178. Pour trouver la réponse, ce dernier doit décomposer 234, puisqu'il ne peut enlever directement les sept dizaines et les huit unités. Les quantités sont organisées. Le tout est présenté de façon imagée (figure 1.1). Il y a des groupes de 10 (rouleaux de dix bonbons) et des groupes de 100 (sacs de dix rouleaux de bonbons), mais cette information n'est pas fournie à l'élève, il doit la découvrir ou l'induire par lui-même.

L'enfant doit répondre en dessinant ce qu'il restera de la collection. Quatre catégories de réponses ont été définies pour ce problème :

1) pas de recherche de la règle du groupement, c'est-à-dire que l'élève ne se questionne pas par rapport au nombre de bonbons dans les rouleaux et par rapport au nombre de rouleaux

dans un sac. L'élève n'arrivera pas à résoudre le problème. L'élève dira par exemple qu'il n'a pas assez de bonbons pour en enlever huit;

2) recherche de la règle du groupement. L'élève défait au moins un sac et un rouleau, en ayant recours à un mode de représentation imagé. Il maîtrise le travail à faire sur les groupements, ce qui lui permet d'identifier le nombre. Il opère ensuite sur les nombres en ayant recours à un algorithme de calcul;
3) recherche de la règle du groupement. L'élève défait au moins un sac et un rouleau, et travaille sur les groupements à partir du matériel;
4) recherche de la règle du groupement sans parvenir à contrôler ses actions sur les groupements. L'élève est confus entre les deux groupes.

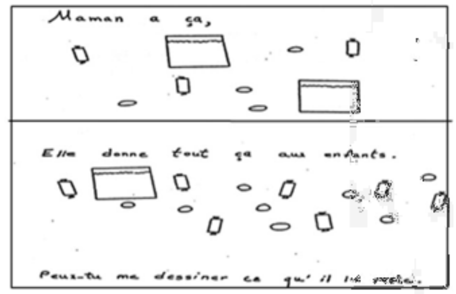


Figure 1.1.
Tâche de résolution de problèmes des bonbons, Koudogbo, Giroux et René de Cotret, 2017, p. 208

Les résultats des élèves à cette tâche réalisée par de Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) et Koudogbo et coll. (2017) sont synthétisés au tableau 1.2.

Tableau 1.2
Résultats des élèves à la 2e tâche de Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) et de Koudogbo et coll. (2017)

Cohortes	Réponses (%) des élèves en fonction des catégories			
	1	2	3	4
A (n = 75)	60 %	17 %	13 %	10 %
B1 (n = 26)	4 %	0 %	92 %	4 %
B2 (n = 23)	30,5 %	15%	39 %	15,5 %
C (n = 18)	44 %	22 %	0 %	33,3 %

Bednarz et Janvier-Dufour (cohortes A, B1 et B2); Koudogbo et coll. (cohorte C)

Encore une fois, les élèves de la cohorte B1 se démarquent des autres cohortes en défaisant les groupes beaucoup plus souvent que les élèves des autres cohortes. En effet, 92 % de leurs réponses relèvent des catégories 2 et 3 qui sont celles associées à la réussite de la tâche, alors que c'est le cas pour 30 % des réponses des élèves de la cohorte A, de 54 % des réponses des élèves de la cohorte B2 et de 22 % des réponses des élèves de la cohorte C. Les élèves qui ne réussissent pas la tâche emploient des stratégies de non-groupement, soit des stratégies ne prenant pas en compte les quantités qui sont regroupées, mais seulement celles qui sont directement accessibles (Koudogbo et coll., 2017). Les élèves de la cohorte C affichent le plus bas taux de réussite.

Malgré le petit échantillon d'élèves rencontrés dans les l'expérimentation de Koudogbo (2013), les résultats obtenus permettent de penser que la situation des élèves ne se soit pas améliorée depuis les années '80 en ce qui a trait à leur compréhension du système de numération et du sens du nombre. Les travaux de Bednarz et Janvier-Dufour permettent cependant de constater qu'il est possible d'accompagner les élèves afin qu'ils développent et manifestent une véritable compréhension du système de numération. Cet accompagnement pourrait aussi favoriser le développement du sens du nombre, permettant à l'élève de faire preuve de flexibilité et d'être plus confiant lorsqu'il résout des tâches et des problèmes. Il connaîtrait plusieurs stratégies lui permettant de trouver la réponse. Il serait aussi capable de choisir la meilleure représentation d'un nombre selon le contexte en jeu ou encore d'utiliser ses connaissances sur les nombres pour en déduire des nouvelles (Reys, 1994).

La séquence didactique que Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) ont mise en place et documentée pendant trois ans a permis aux élèves de réfléchir et de développer progressivement leur compréhension du sens du nombre. Les résultats de leurs travaux ont permis à ces chercheuses d'énoncer un certain nombre de recommandations pour l'enseignement de la numération. Ces recommandations seront décrites dans le cadre conceptuel. Ce qui doit être retenu pour le moment concerne premièrement le fait qu'il est possible d'accompagner les élèves dans le développement du sens du nombre et que ce développement est nécessaire aux apprentissages subséquents en mathématiques et deuxièmement le besoin, bien réel et actuel, de poursuivre la recherche concernant le développement des concepts de numération et du sens du nombre chez les élèves. C'est pour cette raison que la présente étude a été mise en place.

Si les besoins en recherche peuvent facilement être identifiés, la réflexion sur le développement du sens du nombre et de la numératie pourrait aussi s'inspirer de travaux menés dans une perspective professionnelle. En 2011, Lyons et Bisaillon ont publié un ouvrage professionnel issu d'observations de situations réelles en classe et intitulé les *Incontournables du nombre*. Cet ouvrage qui n'a pas été validé par la recherche est, malgré tout, d'intérêt puisqu'il puise ses propositions dans l'observation d'élèves et d'enseignants et dans une réflexion pratique entourant l'enseignement des concepts ciblés dans cette thèse. Développé pour les enseignants et les orthopédagogues du primaire, cet ouvrage a guidé plusieurs professionnels dans la mise en place de pratiques de classe jugées efficaces par les utilisateurs du matériel. Cette réflexion professionnelle a inspiré la présente étude qui tentera d'aller plus loin en proposant un cadre basé sur la recherche qui prend en considération la réalité du terrain. La relation circulaire entre la pratique et la recherche est au cœur des travaux en didactique (Dorier, 2021). Ainsi, la présente étude s'inscrit dans une perspective écologique dont les retombées seront assurées par la participation de professionnels de l'enseignement qui pourront en récolter les fruits afin d'améliorer les pratiques. À terme, c'est la réussite de tous les élèves qui est visée.

1.4. Synthèse de la problématique et question générale de recherche

Depuis 2001, le Québec s'est doté d'un programme de formation basé sur le développement de compétences. Ce programme met de l'avant la compréhension des élèves plutôt que l'acquisition de connaissances factuelles. Par exemple, comme il est mentionné dans la Progression des apprentissages (Gouvernement du Québec, 2009), il est souhaité que les élèves saisissent le sens des opérations plutôt qu'ils appliquent simplement une technique de façon automatisée.

Cette orientation du programme vise ainsi, en contexte d'apprentissage des mathématiques, le développement du sens du nombre, lequel permet de comprendre les nombres et leurs relations. Le sens du nombre évolue tout au long de la vie et se manifeste d'abord par la prise en compte du sens des petites numérosités, ce qui permet éventuellement aux élèves de développer un sens de la numération, autre élément clé de la réussite en mathématiques.

Selon la recherche de Koudogbo (2013, 2017), il apparaît que les principes sous-jacents du système de numération posent des difficultés de compréhension chez les élèves de 3^{e} année, difficultés semblables à celles identifiées dans des recherches ayant eu lieu dans les années 1980. Cependant, les résultats de Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986, 1988) montrent que les élèves qui bénéficient d'un enseignement plus systématique de certains concepts de base du sens du nombre, notamment la perception de la pertinence du groupement, ont de meilleures performances dans des tâches mathématiques en lien avec la numération. Les études de Jordan et coll. (1994, 1996) portant sur le sens du nombre vont dans le même sens à savoir qu'un travail sur les concepts de base du sens du nombre, dont la subitisation, pourrait faciliter la compréhension de la numération. D'autres études doivent être menées pour confirmer ces résultats et pour mieux documenter la place à donner aux concepts de base du sens du nombre, soit les concepts sur lesquels s'appuie l'apprentissage de la numération. Il importe aussi de préciser ces concepts et de déterminer leur rôle dans le développement du sens du nombre. Enfin, il nous apparaît essentiel de définir les tâches et les situations à privilégier pour faciliter son développement.

Par ailleurs, les recherches qui s'intéressent aux conditions favorisant l'apprentissage de la numération considèrent peu le rôle que pourraient jouer les habiletés arithmétiques normalement développées au cours de la petite enfance dans cet apprentissage (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986, 1988; Clark et Kamii, 1996; Jones et coll., 1994). De plus, plusieurs (Greeno, 1991; Howden, 1989; McIntosh et Dole, 2000; Reys, 1994) s'entendent pour dire que le sens du nombre est quelque chose qui se développe tout au long de la vie. La présente étude s'intéresse à ce développement jusqu'à la compréhension de la numération. Or, certaines études s'intéressent à ce développement chez les jeunes enfants et d'autres s'intéressent au développement lié à l'apprentissage de la numération. Il semble donc que la réflexion doive se poursuivre afin d'identifier, grâce aux travaux disponibles dans la littérature scientifique, un continuum qui rendrait compte du développement du sens du nombre et afin de mieux comprendre comment et dans quel(s) contexte(s) il se développe.

C'est en ayant à l'esprit ce bilan que la question générale de recherche suivante a été formulée.

Comment se développe le sens du nombre et de la numération, de la petite enfance jusqu'à l'âge de 7-8 ans et quelles conditions favorisent ce développement?

La réalisation de cette étude apparaît pertinente puisqu'elle est susceptible d'avoir des retombées tant d'un point de vue scientifique que d'un point de vue pratique et social. La présente recherche est susceptible de permettre, entre autres, de documenter les relations entre les aptitudes arithmétiques précoces et le développement de la compréhension du système de numération. Elle pourra aussi préciser les conditions favorisant le développement du sens du nombre et de la numération.

Ensuite, d'un point de vue pratique, les résultats de la présente étude sont susceptibles de fournir aux intervenants du milieu scolaire des pistes de réflexion pour mieux comprendre les difficultés que certains élèves rencontrent lorsqu'ils apprennent la numération. Ils seront ainsi plus outillés pour intervenir rapidement auprès des élèves et, peut-être, contrer l'apparition de certaines difficultés que les élèves pourraient avoir. Les résultats de cette recherche pourront apporter des précisions par rapport aux conditions favorisant le développement du sens du nombre et de la numération.

Enfin, cette étude s'intéresse aux élèves de la classe ordinaire. Or, au Québec, la classe ordinaire inclut des élèves ayant des profils fort variés et certains sont considérés en difficulté. Même si cette étude ne cible pas spécifiquement les élèves en difficulté, les résultats obtenus permettront certainement de nourrir la réflexion entourant la réussite de ces élèves sur le plan des apprentissages en mathématiques, mais aussi, plus généralement sur la réussite scolaire qui, elle, est liée à la réussite personnelle et sociale (CSE - Conseil supérieur de l'éducation, 2008; OCDE, 2010).

Afin de répondre à la question générale de recherche, les principaux concepts théoriques et les liens que ces concepts peuvent entretenir entre eux seront définis dans le prochain chapitre.

2. Cadre conceptuel

Le but de ce chapitre est de fournir des pistes permettant de répondre à la question générale de recherche présentée au chapitre précédent. Pour y arriver, les principaux concepts rattachés à cette question générale seront définis afin de faire ressortir les liens qu'ils entretiennent entre eux. Lorsque des outils pédagogiques sont développés, comme ce sera le cas ici, une épistémologie sous-jacente vient guider et justifier les choix. Cette étude s'inspire à la fois des courants de la pensée socioconstructiviste et de la pensée cognitiviste. Elle s'appuie notamment sur les balises du socioconstructivisme relevées par Poirier (2001), et de certains éléments du cognitivisme rapportés dans Legendre (2004) et dans Rocheleau (2009). Dans ce contexte, l'élève doit jouer un rôle actif dans ses apprentissages (Legendre, 2004; Poirier, 2001; Rocheleau, 2009; Van de Walle et Lovin, 2007). Il est appelé à se construire des représentations et des conceptions à partir de ses connaissances antérieures et en fonction des tâches ou situations auxquelles il est confronté (Legendre, 2004; Poirier , 2001; Rocheleau, 2009; Van de Walle et Lovin, 2007). L'apprentissage passe aussi par un état de déséquilibre, déséquilibre déclenché par les tâches ou les situations. C'est la recherche pour retrouver l'état d'équilibre qui conduira à un apprentissage. De plus, l'apprentissage impliquerait la formation d'associations mentales grâce à un processus d'établissement de relations (Rocheleau, 2009). La présente étude vise à prendre en compte des contenus mathématiques en considérant le fonctionnement cognitif de l'élève. Les conduites de l'élève sont interprétées selon des situations mathématiques et la culture de la classe, mais aussi selon la capacité de l'élève à faire face aux défis associés à ces situations (Sierpinska, 1999).

Cette étude s'inscrit aussi dans une perspective didactique. La théorie didactique, selon Giroux (2013), se penche sur la spécificité des processus d'enseignement et d'apprentissage, des mathématiques dans le cas qui nous intéresse, dans le but de produire une tâche spécifiquement destinée à faire apprendre la connaissance visée. Dans cette étude, l'apprentissage d'un concept est donc perçu comme quelque chose qui se construit à travers des tâches impliquant d'abord un problème à résoudre. La réalisation de ces tâches donne l'occasion à l'élève de se questionner, de réfléchir et de discuter avec les autres de ses stratégies et de ses conceptions (Braconne-Michoux et Marchand, 2021; Legendre, 2004; Poirier, 2001; Rocheleau, 2009; Van de Walle et Lovin, 2007). Il ne peut y avoir de réel apprentissage, selon Noirefalise et Matheron (2005) sans qu'il existe des moments donnant l’occasion de mettre à l’épreuve ce qui a été appris, c’est-à-dire des moments de l’entraîner à utiliser les connaissances nouvelles.

Dans ce contexte, l’enseignant transfère à l’élève la responsabilité de l’apprentissage (ou une partie de celle-ci) en lui proposant des situations lui permettant de solliciter ses connaissances et ses stratégies afin qu’il puisse construire ou poursuivre la construction de nouvelles connaissances (Brousseau, 1983; Giroux, 2013). Il importe donc de miser sur le potentiel mathématique de l’élève et sur ses forces (Mary et Squalli, 2021), en tenant compte du niveau de développement de son sens du nombre. Ce niveau peut varier selon le développement respectif de chacun des élèves. C’est donc dans ce cadre que cette thèse s’intéresse au développement du sens du nombre et aux conditions, plus spécifiquement aux tâches, susceptibles de favoriser ce développement.

Ce chapitre se divise en quatre parties. La première partie présente les caractéristiques du système moderne de numération afin de mieux saisir son fonctionnement puisque cette thèse s’intéresse à son apprentissage. Il est question de la position (le rôle de la place occupée par chaque chiffre dans l’écriture d’un nombre), de l’équivalence (trente et une unités peuvent être représentées avec 3 dizaines et 1 unité), du groupement (pour faciliter la représentation de grandes quantités, les éléments sont groupés de façon récurrente, selon la base choisie) et de l’aspect multiplicatif et additif du système (31 signifie $3 \times 10 + 1$). La deuxième partie s’intéresse au développement de la compréhension du sens du nombre et de la numération. Les travaux associés à certains modèles de développement ou à des phases du développement y sont rapportés. La troisième partie de ce chapitre présente des modèles d’enseignement ayant pour but d’amener les élèves à développer le sens du nombre et de la numération et se penche aussi sur les caractéristiques des tâches permettant ce développement. La quatrième partie de ce chapitre présente les objectifs spécifiques de recherche élaborés à partir du bilan des écrits scientifiques rapportés.

Dans la prochaine section, les caractéristiques du système de numération seront d’abord présentées pour mieux comprendre ce que les élèves doivent apprendre.

2.1 Caractéristiques du système de numération

Les premières sociétés organisées ont des systèmes de numération dans le but de représenter les nombres de façon économique pour décharger la mémoire et permettre d'effectuer facilement des opérations (Koudogbo, 2017). Les systèmes de numération n'ayant pas rempli ces conditions se sont vus remplacés par d'autres, plus appropriés (Koudogbo, 2017). Il y a plusieurs systèmes de numération qui ont vu le jour à travers l'histoire et dans pratiquement toutes les régions du monde.

Le système de numération indo-arabe, utilisé notamment au Québec, est un système positionnel de base dix. Dans la prochaine section, les caractéristiques de ce système seront décrites : la position, l'équivalence, le groupement ainsi que ses aspects multiplicatif et additif.

2.1.1 Position

Le système de numération indo-arabe est positionnel, ce qui signifie qu'un symbole prend une valeur différente selon la place qu'il occupe dans l'écriture d'un nombre. C'est la position du chiffre qui lui donne une valeur, elle constitue donc un élément multiplicatif associé au système récurrent de groupement, ce qui sera détaillé dans les prochaines sections. Par exemple, dans le nombre 345, le 3 vaut 3 centaines, puisqu'il est placé à la troisième position, à partir de la droite. Dans le nombre 453, le 3 vaut maintenant 3 unités, puisqu'il est placé à la première position. Cette caractéristique permet d'écrire tous les nombres naturels avec seulement dix chiffres. L'invention du zéro joue un rôle fondamental dans ce système; ce symbole permet de représenter l'absence d'unités dans une position et donc de distinguer 24 de 204 (Ifrah, 1985).

Le recours à un système positionnel offre un potentiel économique indéniable. Prenons, par exemple, la quantité huit cent quatre-vingt-dix-sept. Nous n'avons besoin que de trois symboles pour la représenter soit : 897. La figure 2.1 montre comment représenter le même nombre au moyen de la numération non positionnelle et hiéroglyphique, de l'Égypte ancienne, tel qu'ils le faisaient à partir du XXVII^{e} siècle avant J.-C.. Les chiffres étaient placés sur deux ou trois lignes superposées, en petits groupes.

de deux, trois ou quatre signes identiques pour éviter la cohue sur une même ligne et aussi pour « faciliter à l'œil du lecteur l'addition des valeurs correspondantes » (Ifrah, 1985, p. 156). La numération égyptienne requiert un symbole différent pour représenter chaque groupe décimal (unité, dizaine, centaine, etc.), jusqu'à un maximum de neuf occurrences pour chaque valeur. Dans un tel système, l'écriture des nombres nécessite un nombre illimité de symboles, ce qui n'est pas économique. Bien que permettant de faire des calculs, ces derniers étaient lourds et laborieux.

Figure 2.1
Représentation de 897 avec les hiéroglyphes égyptiens.

Des systèmes de notations hybrides, comme le système de numération chinois, ont vu le jour entre les systèmes de numération « additive » comme celui des Égyptiens et la numération telle qu'on la connaît aujourd'hui au Québec. Dans ces systèmes de numération, un signe particulier était donné à la dizaine, à la centaine, à l'unité de mille, etc. et la notation des dizaines, centaines, unités de mille, etc. se faisait en suivant la règle multiplicative (Guitel, 1975 ; Ifrah, 1994). Un exemple de numération hybride ou « mixte » (Guitel, 1975) est la numération chinoise. La figure 2.2 présente le nombre 7659, qui se lit 7 milles 6 cents 5 dix 9 (7 x 1000 + 6 x 100 + 5 x 10 + 9). Ce type de système de numération a conduit à l'invention du principe de position (Ifrah, 1994).

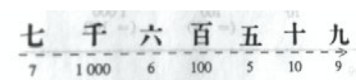


Figure 2.2
Exemple de notation hybride chinoise
Ifrah, 1994, p. 433

Même si elles ne sont pas positionnelles, ces numérations reposent sur deux principes communs avec notre système de numération, soient le groupement et l'équivalence. Ils sont présentés dans les prochaines sections.

2.1.2 Équivalence

Le principe d'équivalence est présent dans tous les systèmes de numération. Par souci d'économie, des formes ou des signes faisant l'objet d'une convention sont utilisés pour représenter des groupes d'éléments. Dès lors, tous les éléments à dénombrer ne sont plus directement accessibles. Les Égyptiens, par exemple, disposaient d'un symbole pour représenter un paquet de dix éléments.

Ainsi, pour indiquer dix jarres d'huile, ils écrivaient « ∩ ». Dans le système moderne de numération, dix s'écrit « 10 », soit un paquet de dix éléments et aucun élément restant.

Les règles d'équivalence permettent de faire des opérations sur les nombres. Par exemple, pour les unités, au moment d'effectuer 247 + 329, il faut établir que 7 + 9 font 16, qu'il y a donc un paquet de dix et six unités non groupées. Aucun autre échange n'étant requis, le résultat sera : 240 + 320 + 16, soit 576. Cette souplesse dans la représentation des nombres permet aussi de résoudre les soustractions dites « difficiles » par les élèves comme 405 - 132. Il faut savoir que dans quatre cents, il y a assez de dizaines pour enlever les 3 qui sont affichées à la position des dizaines du nombre 132. Ainsi, 405 peut être représenté par 3c + 10d + 5u et soustraire « facilement » 1c + 3d + 2u pour obtenir 273. Cette flexibilité de représentation des nombres constitue l'une des manifestations attendues d'un bon sens du nombre.

Les règles d'équivalence nécessitent de jouer avec les groupes d'unités d'ordre supérieur qui permettent de représenter les nombres. Cette caractéristique de notre système de numération, soit le concept de groupement, est présentée dans la prochaine section.

2.1.3 Groupement

Le groupement représente la base du système de numération soit l'unité de groupement régulier (Guedj, 1996). Il permet de compter par groupes en utilisant un nombre limité d'éléments pour représenter un nombre ou pour opérer sur les nombres (Koudogbo, 2017). Le système de numération indo-arabe repose sur un groupement régulier, un groupement récurrent décimal. En d'autres mots, les unités sont organisées en groupes de dix qui deviennent une dizaine. Les dizaines peuvent elles aussi être groupées par dix, pour obtenir des centaines et ainsi de suite. En numération, le groupement est donc le principe par lequel les collections sont organisées en formant des groupes et des groupes de groupes.

Le recours au groupement existe dans tous les systèmes de numération, même ceux qui ne sont pas positionnels; grouper permet de dénombrer plus aisément une grande quantité d'éléments (Kayler, 2003). On groupe pour mieux voir les quantités. La base du groupement la plus fréquente est la base décimale, mais il y a aussi, par exemple, la base sexagésimale (60) encore utile aujourd'hui pour lire l'heure ou encore la base vingt, jadis utilisée par les Mayas.

Il y a donc eu progressivement un passage des unités aux groupes, et des groupes au groupement pour donner éventuellement naissance aux divers systèmes de numération. Ainsi, nos Ancêtres pouvaient représenter des numérosités de plus en plus grandes sans avoir besoin d'en recompter tous les éléments. Les entailles sur les antiques bâtons de bergers montrent les traces de ce changement progressif. D'abord de simples entailles représentent chaque objet énuméré. Les groupes de cinq et de dix jouent un rôle de plus en plus important. La figure 2.3 permet de constater les marques différentes permettant de percevoir rapidement les groupes de 5, 10, 15, etc. Par simplification, ce type de représentation très répandu chez les bergers de la préhistoire (Ifrah, 1994) a donné naissance au système romain de numération (par exemple, XVIII pour le cas C).

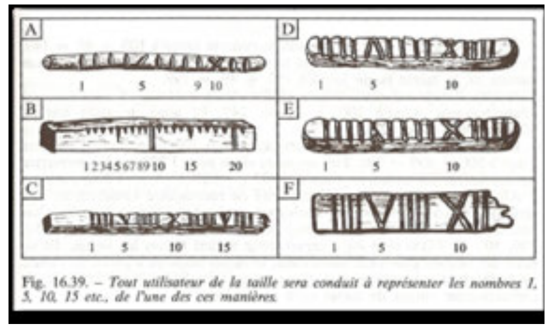


Figure 2.3
Exemples d'entailles de différentes formes et de différentes valeurs, Ifrah, 1994, p. 465

Les derniers éléments à considérer dans les caractéristiques de notre système de numération sont ses aspects multiplicatif et additif. Ils sont présentés dans la prochaine section.

2.1.4 Aspects multiplicatif et additif

La position est un élément multiplicatif qui est associé au principe de groupement récurrent. Ainsi, dans l'écriture d'un nombre, chaque chiffre affiché représente un produit à effectuer par la valeur associée à la position qu'il occupe. Par exemple, dans le nombre 300, le chiffre 3 représente la valeur 3×100 (aspect multiplicatif). De plus, tous les produits qui sont juxtaposés aux diverses positions affichées doivent être additionnés (aspect additif) pour obtenir le nombre représenté. Par exemple, pour le nombre 324, le 3 vaut 3×100, le 2 vaut 2×10 et le 4 vaut 4×1 (aspect multiplicatif). Il faut ensuite faire la somme de ces produits pour obtenir : $324 = 3 \times 100 + 2 \times 10 + 4 \times 1$ (aspect additif).

La prochaine section présente une courte synthèse des caractéristiques du système de numération.

2.1.5 Synthèse des caractéristiques du système de numération

Le sens du nombre requiert la perception des aspects additif et multiplicatif constituant les fondements de notre système de numération. De plus, pour comprendre le système de numération, l'élève doit préalablement saisir la pertinence du groupement. Il lui faudra ensuite maîtriser les règles d'équivalences pour enfin saisir le fonctionnement du système de numération positionnelle. L'utilisation d'une notation « mixte » a facilité dans l'histoire, cette transition vers la notation positionnelle.

La prochaine partie est consacrée au développement, d'un point de vue cognitif, de la compréhension du sens du nombre attendu lorsque les élèves entament leur 3^{e} année du primaire, en procédant à rebours, soit de la compréhension de la numération jusqu'aux manifestations présentes chez les tout-petits. Ce choix est justifié par le fait que les représentations de ces élèves, la population ciblée dans cette étude, se construisent sur la base de représentations antérieures qui peuvent être observées chez les enfants du préscolaire.

2.2 Le développement du sens du nombre et de la numération

Comme nous l'avons soulevé dans la problématique, plusieurs élèves peuvent éprouver des difficultés à comprendre les rouages de notre système de numération, à apprendre le concept de valeur de position et à développer leur flexibilité dans l'utilisation des nombres à plusieurs chiffres (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986; Clark et Kamii, 1996; Fuson, 1990; Jones et coll., 1994). Le passage à la numération est le « grand défi de l'enseignement de l'arithmétique au primaire » (Poirier, 2001, p. 26).

Comprendre chacune des caractéristiques du système de numération se fait de façon progressive, le but ultime étant que l'élève développe une souplesse dans la manipulation des nombres entiers au moment d'opérer sur ces derniers lorsqu'ils sont présentés sous leur forme positionnelle décimale. Cette compréhension leur permettra éventuellement de manipuler plus facilement les nombres rationnels. Comme il en a été question dans la problématique, ces manifestations de la compréhension de la numération sont des indicateurs d'un bon sens du nombre tel qu'entendu par Reys (1994).

Afin de répondre à la première partie de la question générale de recherche et de pouvoir mieux comprendre le développement du sens du nombre de la petite enfance jusqu'à 7-8 ans, il importe d'abord de préciser ce que signifie « comprendre le système de numération ». Ensuite, des recherches s'étant intéressées à certaines parties du développement cognitif de l'élève par rapport au sens du nombre seront présentées.

2.2.1 Compréhension et flexibilité dans les représentations des nombres

Pour Duval (1996), la compréhension est la capacité de reconnaître, dans des représentations différentes, les représentations d'un même objet. Selon lui, une fois cette compréhension acquise « elle constitue un seuil dont le franchissement change radicalement l'attitude vis-à-vis d'un type d'activité ou d'une discipline. Le sujet a conscience de franchir un seuil, d'acquérir un pouvoir d'initiative et de contrôle dans le déroulement des démarches » (Duval, 1996, p. 365). La compréhension est le fruit de la construction de connexions entre les différentes représentations d'un même concept mathématique (Duval, 1996; Hiebert et Wearne, 1992).

Les représentations externes, celles qui sont perçues par les élèves par leur sens, peuvent être, selon ces auteurs, concrètes, imagées, symboliques ou verbales (Hierbert et Wearne, 1992). Deux de ces quatre modes de représentation sont régis par des symboles et des règles que l'élève doit apprendre : les représentations symboliques et verbales (les mots, les chiffres, les façons de les écrire et de les nommer) alors que les deux autres ne suivent pas de règles formelles. Les représentations concrètes et imagées sont généralement plus intuitives pour les élèves, puisqu'elles sont associées à du matériel ou des illustrations. Par exemple, pour écrire 14, toutes les caractéristiques du système de numération positionnel entrent en jeu. Pour nommer ce nombre, l'élève doit aussi mémoriser cette exception (il s'agit d'une exception parce que le nom de ce nombre ne suit pas la régularité, soit de dire un mot représentant le nombre de dizaines suivi du nombre d'unités comme « trente » « deux »). Cependant, il peut utiliser 14 jetons (représentation concrète) ou encore dessiner 14 ronds (représentation imagée) pour représenter les 14 bonbons qu'il avait à compter. Ces représentations externes sont des outils qui permettent de prendre en compte les quantités et les relations entre les quantités. Elles jouent un rôle important dans l'apprentissage et la construction de représentations mentales solides et cohérentes (Bednarz et

Dufour-Janvier, 1984b, 1986; Thomas et Mulligan, 1995; Thomas et coll., 2002). Nous reviendrons sur les caractéristiques des représentations externes dans la prochaine section portant sur les études s'intéressant à l'enseignement de la numération.

Les représentations internes, quant à elles, sont celles que la personne évoque mentalement. Il est impossible d'y avoir directement accès, la personne doit expliquer ce qu'elle se représente dans sa tête ou encore essayer d'en faire un dessin. Elles sont essentielles pour qu'il y ait apprentissage (Racicot, 2008), que ce soit en mathématiques ou dans d'autres matières. L'élève se construit un modèle mental qui reflète la structure d'un concept. Les élèves ont besoin d'utiliser des images mentales des nombres et des relations que les nombres ont entre eux pour éventuellement trouver leur propre façon de résoudre des tâches mathématiques (Sullivan, 2018). Enfin, selon Clements et Battista (1992) la construction de représentations mentales imagées joue un rôle important dans la pensée mathématique, au primaire, mais aussi dans les mathématiques avancées.

Pour Bednarz et Janvier-Dufour (1988), il est important que les enfants construisent progressivement des représentations mentales significatives et utiles des nombres. Hiebert et Wearne (1992) décrivent la compréhension de la numération qu'ont les élèves comme « la construction de connexions entre des concepts clés tels que la valeur de position, la quantification d'un nombre d'objets, le groupement par dix, le traitement des groupes de dix comme une nouvelle unité et la capacité de percevoir tous ces concepts derrière l'écriture positionnelle » (traduction libre, Hiebert et Wearne, 1992, p. 99). Comprendre le système de numération serait donc la capacité de reconnaître les relations entre les différentes représentations externes et les traiter afin de s'en faire une représentation interne (Hiebert et Wearne, 1992). Pour le système de numération, il pourrait s'agir de la représentation concrète avec du matériel tel que les blocs de base dix ou les tableaux de numération. La représentation imagée est une illustration schématisée de ce matériel. La représentation symbolique, quant à elle, permet de représenter le nombre au moyen des chiffres et est exprimée à l'oral ou à l'écrit (Lyons, 1982; Jones et coll., 1996). L'élève comprend mieux lorsque les tâches lui permettent d'abord d'appréhender les concepts à travers leurs représentations concrètes, ensuite leurs représentations imagées et finalement leurs représentations symboliques (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986; Lyons, 1982).

Thomas, Mulligan et Goldin (2002) ont mené une recherche sur les représentations internes que les élèves de la 3e à la 6e année se font des nombres. Ils ont constaté que les élèves qui avaient une solide compréhension de la numération manifestaient des signes de représentations internes imagées et dynamiques. Ces élèves étaient capables de se représenter notre système de numération en base dix et pouvaient manipuler mentalement les éléments, indépendamment du contexte ou du mode de représentation initial (concret, imagé ou symbolique). Dans leur conclusion, ils soulignent l'importance de présenter aux élèves les nombres de façon concrète et imagée pour permettre aux élèves de se construire des représentations mentales efficaces et dynamiques des concepts mathématiques. Ils proposent aussi de recourir à l'image virtuelle afin d'aider les élèves à construire ces représentations mentales imagées. L'image virtuelle apparaît à l'écran (TNI, ordinateur, tablette intelligente, etc.) et permet une manipulation virtuelle. Elle devient donc une représentation externe imagée et dynamique, qui peut parfois offrir plus de flexibilité dans le choix des contraintes ou dans les stratégies des élèves que les représentations externes concrètes (Clements et Battista, 1992; Giroux et Ste-Marie, 2007).

La construction de représentations mentales imagées et dynamiques, dans lesquelles les éléments qui les constituent peuvent bouger, changer ou se transformer (Thomas et Mulligan, 1995), est donc un élément clé menant à la compréhension du système de numération. Pour arriver à construire ces représentations internes, il faut vivre des activités mathématiques diversifiées et riches (Mary et Squalli, 2021) qui exposent les concepts à apprendre à partir de représentations externes concrètes ou imagées et qui conduisent l'élève à associer ces représentations à leur mode de représentation symbolique. Une représentation mentale flexible permet de se représenter une quantité de différentes façons et de manipuler cette représentation dans sa tête. Plus la représentation mentale est flexible, plus le sens du nombre est performant (Thomas et coll. 2002).

Cette représentation mentale imagée et dynamique évoluerait au fur et à mesure du développement du sens du nombre (Thomas et coll. 2002). Il semble y avoir un développement cognitif menant à la compréhension de notre système de numération. Dans la prochaine section, des recherches ayant pour but d'explorer ce développement seront présentées. Le sens du nombre étant quelque chose qui se développe et qui se construit (Reys, 1994), la présentation de ces recherches a pour objectif d'en dégager les éléments communs et les éléments distinctifs afin d'identifier un continuum possible de développement du sens du nombre. L'établissement de cet itinéraire cognitif pourrait permettre la création de mesures d'évaluation pouvant servir à l'identification des forces de l'élève, de son niveau de développement du sens du nombre. Il pourrait aussi lui permettre d'actualiser son potentiel mathématique (Mary et Squalli, 2021) à travers des tâches présentant un défi adapté à ce niveau de développement.

2.2.2 Compréhension du système de numération

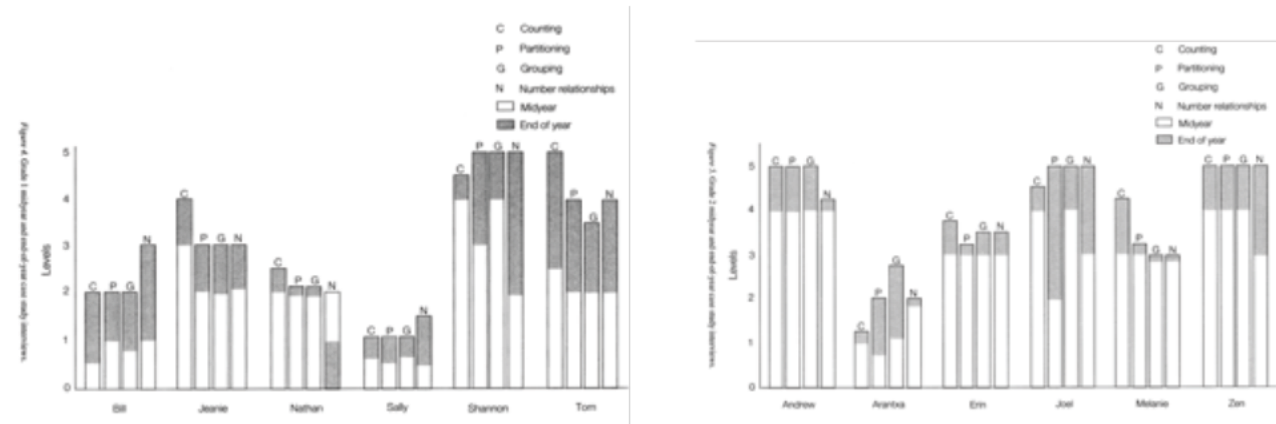
Les caractéristiques du système de numération indo-arabe, qui se rapportent aux principes de position, d'équivalence, de groupement et aux aspects multiplicatif et additif ont préalablement été définies. Avoir un bon sens du nombre et de la numération signifie comprendre chacune de ces caractéristiques et les liens qu'elles ont entre elles. Cela revient à être capable de se faire une représentation interne imagée et dynamique des nombres à plusieurs chiffres ce qui permet d'avoir une flexibilité lors de la résolution de problèmes. Cependant, il faut du temps pour y arriver; la compréhension du système de numération touche un ensemble de connaissances qui se développent progressivement. Dans cette section, les travaux de Jones et ses collaborateurs (1994, 1996) seront d'abord présentés. Ils proposent un modèle de développement du sens du nombre « à plusieurs chiffres » (traduction libre de « multi-digit number »). Ils se sont intéressés à l'évolution de la pensée des enfants par rapport à la numération. Cette étude servira de point de départ à la compréhension du développement du sens du nombre. En effet, les auteurs identifient les principaux niveaux de ce développement. Ils s'intéressent cependant davantage aux niveaux supérieurs de leur modèle, soit les niveaux dans lesquels les élèves démontrent un début de compréhension de certaines caractéristiques du système de numération et fournissent peu de détails sur les premiers niveaux.

Ils ont travaillé avec douze élèves de première et de deuxième année. À la suite d'une recension des écrits et d'une expérience d'enseignement de deux ans, les auteurs ont développé un cadre de référence présentant la progression des élèves en numération. Ils ont identifié cinq niveaux de conceptualisation.

Tableau 2.1
Description de l'évolution de la pensée arithmétique de l'enfant selon les travaux de Jones et coll. (1994)

Niveaux	Description de la pensée
1 Pré-valeur de position	• Réflexion en termes d'unités seulement; • Difficulté à décomposer et à comparer des nombres à plusieurs chiffres; • Pas d'utilisation du groupement.
2 Début du comptage groupé	• Début d'une coordination dans le comptage en termes d'unités et de dizaines; • Début de compréhension du groupement.
3 Utilisation de la dizaine comme unité abstraite	• Coordination dans le comptage en termes d'unités et de dizaines; • Comptage par bonds de dix; • Flexibilité dans la représentation des nombres à deux chiffres (comparaison, décomposition, opérations).
4 Passage à la centaine	• Compréhension des centaines comme nouvelle unité; • Coordination dans le comptage des unités, dizaines et centaines; • Comptage par bonds de cent; • Flexibilité dans la représentation des nombres à trois chiffres (comparaison, décomposition, opérations).
5 Compréhension de la valeur de position	• Flexibilité dans toutes les composantes pour les nombres à trois chiffres.

Afin de valider leur modèle, ils ont réalisé une étude de cas auprès de 6 élèves de 1re année et de 12 élèves de 1re et 2e année, choisis au hasard. Pour leur recherche, ils ont divisé chacun des niveaux présentés dans le tableau 2.1 en quatre éléments clés dans le développement du sens du nombre à plusieurs chiffres : compter, décomposer, grouper et établir des relations entre les nombres. Pour eux, compter correspond à la capacité d'associer un mot-nombre à chacun des éléments d'une collection, puis d'être capable de compter par bonds de dix, de cent, et de faire des allers-retours. Décomposer des nombres signifie être capable de représenter un nombre de différentes façons. Par exemple, 36 peut être représenté par 3 dizaines + 6 unités, mais pourrait aussi être représenté par 2 dizaines + 16 unités. Pour ces auteurs, grouper fait référence à la capacité de percevoir la pertinence du groupement dans le système de numération. Enfin, établir des relations entre les nombres signifie être capable de comparer les nombres entre eux. Ils ont créé des problèmes mathématiques en s'appuyant sur cette catégorisation et ont présenté ces problèmes aux élèves.



Élèves de 1re année

Élèves de 2e année

Figure 2.4
Résultats des expérimentations de Jones et coll. 1994

Les résultats de leur étude sont présentés dans la figure 2.4. Il est possible de constater une différence de performance entre les élèves de 1re année et les élèves de 2e année. En première année, à la fin de l'année, un élève n'atteint pas le niveau 2, deux élèves sont au niveau 2, un élève est au niveau 3, avec un début de niveau 4, un élève est principalement au niveau 4 et un dernier principalement au niveau 5. En deuxième année, à la fin de l'année, un élève est situé principalement au niveau 2, avec un élément lié au niveau 1, deux élèves sont principalement au niveau 3 et trois élèves sont principalement au niveau 5.

La majorité des élèves de 1re année, à la fin de l'année, sont au moins au niveau 2. La moitié des élèves de 2e année, à la fin de l'année sont au niveau 3 ou inférieur, soit à la compréhension du concept de l'équivalence que l'on pourrait associer à cette utilisation de la dizaine comme unité abstraite. L'autre moitié des élèves étant redue au niveau 5. Le niveau 5 de ce modèle semble demeurer un défi pour la moitié des élèves de fin 2e année.

Selon ces auteurs, une bonne compréhension de la valeur de position dans le système de numération (niveau 5) est synonyme de flexibilité, comme il a été mentionné dans notre problématique. L'enfant doit être capable de composer et décomposer les nombres, soit de les représenter de différentes façons afin de pouvoir effectuer l'opération demandée en choisissant la décomposition la plus appropriée pour son calcul (Fuson, 1990).

Pour parvenir à cette flexibilité, la conception des nombres doit être *multiunitaire*, ce qui veut dire que l'élève doit être capable de considérer qu'un nombre est constitué d'unités de différents ordres, soit des unités, des dizaines, des centaines, etc. Quand des unités d'ordre supérieur sont utilisées pour représenter des groupes d'unités ainsi que des groupes de groupes, on parle alors d'*unitisation* (Twomey et Dolk, 2011). Il faut donc recourir au concept d'équivalence présent dans notre système de numération qui a été décrit précédemment, ce qui permet de décomposer un nombre de plusieurs façons (niveaux 3 et 4) pour éventuellement choisir celle qui sera la meilleure selon l'opération que l'on voudra effectuer (niveau 5). Au niveau supérieur, les élèves deviennent capables de traiter simultanément les unités et les dizaines (Twomey et Dolk, 2011).

Pour comprendre un nouveau concept, ici la numération, il faut en avoir une représentation mentale et pouvoir associer cette représentation au mot-nombre ou à son écriture symbolique (Jones et coll., 1994) et vice versa. Le niveau 5 correspond donc à la capacité de l'élève à manipuler les nombres et à choisir la meilleure représentation selon l'opération à réaliser. Cette capacité repose sur le niveau 4, soit la capacité de manipuler des centaines et ce niveau s'appuie sur la capacité de l'élève de manipuler des dizaines (niveau 3), soit de constater l'intérêt et le rôle des paquets de 10. Il s'agit aussi du passage à l'équivalence; l'élève est capable d'attribuer une valeur à un objet ou à la position d'un chiffre dans un nombre. Pour atteindre le niveau 3, il faut avoir compris que cette numération repose sur des groupes et des groupes de groupes (niveau 2). Comme il en a été question dans la problématique, l'une des difficultés fréquemment rencontrées par les élèves est en effet de comprendre la pertinence du principe de groupement présent dans le système de numération. Pour la présente étude, il semble donc important de mieux comprendre les niveaux inférieurs identifiés par Jones et ses collaborateurs (1994), soit le premier et le deuxième niveau. Les prochaines sections feront donc état des recherches s'intéressant à ces niveaux. Il sera question d'abord du concept de groupement qui mène éventuellement à l'utilisation de la dizaine et de la centaine. Ensuite, les recherches ayant eu comme intérêt le développement de la pensée multiplicative, qui est incontournable pour accéder au concept de groupement, seront présentées (niveau 2 de leur modèle). Nous finirons avec les études permettant de mieux comprendre le premier niveau identifié par Jones et ses collaborateurs (1994), soit la perception additive des nombres (niveau 1 de leur modèle).

2.2.3 Pertinence du groupement

Le groupement est le concept sur lequel s'appuie la numération (Fuson, 1990; Poirier, 2001). C'est le niveau 2 du cadre de référence établi par Jones et ses collaborateurs (1994). Comprendre notre système de numération requiert d'être capable de faire et défaire des groupes, de grouper des groupes ou encore d'échanger un groupe d'un certain ordre contre une unité d'ordre supérieur ou inversement (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986). Avant de comprendre le concept d'équivalence, il faut comprendre le rôle des paquets et plus particulièrement des paquets de dix dans notre système de numération.

La stratégie de grouper se provoque par une tâche présentant une quantité importante d'objets à dénombrer. La figure 2.5 en est un bon exemple. Pour pouvoir dénombrer d'un seul coup d'œil une grande quantité, il est nécessaire de former des groupes (dizaines[1]) et des groupes de groupes ( centaines). Il est ainsi plus facile d'accéder au cardinal (ou au nombre d'éléments) de cette collection ainsi organisée.

le comptage un à un la collection organisée

Figure 2.5
Exemple d'organisation visuelle et globale de 324 éléments

Malgré son importance capitale, peu d'élèves perçoivent la pertinence de recourir au groupement et peu d'élèves sont capables d'expliquer comment le groupement permet d'organiser une collection, comme il a été mentionné dans notre problématique (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1996).

L'élève comprend le sens du groupement lorsqu'il peut grouper ou dégrouper les diverses unités utilisées dans le système de numération, lorsqu'il peut composer et décomposer les nombres et

[1] Notre système étant toutefois en base 10, il est pertinent d'utiliser des paquets de 10.

lorsqu'il peut les manipuler (Brissiaud, 2005). Le recours au groupement dans la représentation des nombres rappelle ainsi la nature complexe de la multiplication. La prochaine partie fait état de recherches s'intéressant au développement de la pensée multiplicative et de son rôle dans la compréhension de la numération.

2.2.3.1. Sens de la multiplication (pensée multiplicative)

Comme il a été vu préalablement, le processus de groupement récurrent de notre système de numération s'appuie sur des éléments multiplicatifs et simultanés. Pour maîtriser le système de numération, les élèves doivent développer leur compréhension de la multiplication. Il ne s'agit pas de la simple capacité d'effectuer des multiplications, mais plutôt de la possibilité de considérer la relation particulière qui s'établit entre des valeurs à multiplier, d'utiliser en quelque sorte une pensée multiplicative. Cela pourrait correspondre au niveau 2 du cadre de référence établi par Jones et ses collaborateurs (1994). Étant donné l'importance de cette pensée multiplicative par rapport à la compréhension de la numération, des travaux supplémentaires à ceux de Jones et ses collaborateurs (1994) sont présentés. En effet, Clark et Kamii (1996) ont détaillé ce niveau ainsi que le niveau 1 du modèle de Jones et ses collaborateurs (1994). Leurs études permettent de mieux comprendre les premiers niveaux du développement du sens du nombre.

Pour plusieurs, la multiplication est une façon plus rapide de faire de l'addition. Il est alors question de l'addition répétée, un des sens qui peuvent être attribués à la multiplication (Clark et Kamii, 1996). Pour Clark et Kamii (1996), qui s'appuient sur les travaux de Piaget (1947), la multiplication est une opération plus complexe que simplement cette addition répétée. Elle est construite à un niveau d'abstraction plus évolué que celui requis par l'addition. Elle comporte aussi un nombre de relations d'inclusion à établir de façon simultanée. En multiplication, il faut traiter plusieurs relations qui sont inclusives et faire le tout simultanément.

La figure 2.6, une illustration utilisée par Clark et Kamii (1996), est reprise ici pour démontrer ce propos. La partie du haut représente ce qui se passe dans notre tête lorsque la multiplication se manifeste sous forme d'addition répétée. Chacun des paquets est fait d'unités de un. Chaque paquet est constitué de trois unités. Les groupes sont combinés de façon consécutive les uns après les autres. La partie du bas représente la multiplication et le traitement inclusif et simultané présent lorsque l'on développe une pensée multiplicative. En regardant la figure de bas en haut, chacune des trois unités du premier ensemble devient un nouvel ensemble de trois unités qui s'imbriquent pour devenir le tout. Le fait de transformer trois unités en une nouvelle unité supérieure demande un niveau d'abstraction plus élevé que de ne penser qu'à des unités du même ordre qui sont consécutives. Les flèches pointent dans les deux sens pour illustrer que toutes ces relations doivent être faites simultanément.

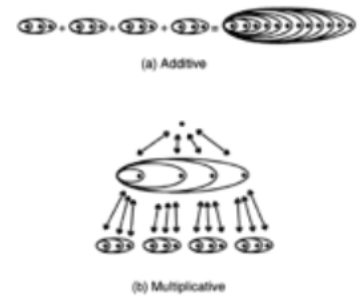


Figure 2.6
Représentation de la simultanéité de la multiplication, Clark et Kamii, 1996, p. 42

Lorsque les enfants acquièrent une pensée multiplicative, ils deviennent capables de traiter de façon simultanée les unités élémentaires et celles des ordres supérieurs (dizaine, centaine, etc.) (Clark et Kamii, 1996). L'arrangement rectangulaire est une autre façon d'illustrer la simultanéité. Par exemple, la grille de la figure 2.7 présente 4 rangées et 5 colonnes. Pour chaque case de la grille, il y a deux dimensions à considérer de façon simultanée, la colonne et la rangée. Ce sens de la multiplication permet de visualiser la majorité des situations multiplicatives. Il est en effet possible de représenter une situation d'addition répétée dans un arrangement rectangulaire ou encore une situation de produit cartésien. Ce sens est aussi derrière le matériel de base dix proposé aux élèves pour les aider à se représenter et à comprendre le système de numération. Il joue un donc rôle important dans l'acquisition de la pensée multiplicative.

Les travaux de Battista et coll. (1998), sans être liés à la numération, traitent de la compréhension de la disposition rectangulaire et la décrivent comme une « structuration spatiale » (Twomey et Dolk, 2011). Pour Battista et coll. (1998), la structuration spatiale est l'opération mentale associée à la construction de l'organisation d'un ensemble d'objets.

1	*2*	*3*	*4*	*5*
2				
3				
4				

Figure 2.7
Arrangement rectangulaire
4 par 5

Battista et coll. (1998) ont fait passer des entrevues à des enfants de 7-8 ans quatre fois durant une année scolaire. Leur but était de comprendre comment les enfants traitaient la quantité lorsqu'elle est présentée dans un arrangement rectangulaire. Ils ont proposé une tâche dans laquelle les élèves devaient compléter, avec des tuiles (unités carrées), des arrangements rectangulaires. Certains rectangles étaient complètement vides, d'autres étaient partiellement remplis. Les élèves devaient d'abord faire une prédiction du nombre de tuiles nécessaires, en faire le dessin et finalement vérifier leurs réponses avec de vraies tuiles placées dans l'arrangement rectangulaire. Les chercheurs en sont venus à établir quatre niveaux de structuration spatiale. Au premier niveau, les élèves ne font aucune utilisation des colonnes ou des rangées; ils considèrent les quantités de façon unidimensionnelle. Au deuxième niveau, les élèves sont capables de considérer le nombre d'éléments dans les colonnes ou les rangées sous forme d'addition répétée. Au troisième niveau, les élèves comprennent que les unités carrées (tuiles) sont des indicateurs du nombre de colonnes et de rangées, mais ne comprennent pas encore comment une unité carrée peut se retrouver à la fois dans une colonne et une rangée. Au quatrième niveau, ils sont en mesure de le faire. Le développement de cette compréhension est un concept-clé selon Twomey et Dolk (2011).

Clark et Kamii (1996) ont également étudié le développement de cette pensée et simultanée. Les objectifs de leur recherche étaient multiples. En utilisant les travaux de Piaget (1947) en trame de fond, elles désiraient mieux comprendre les différences entre les enfants qui ont une pensée multiplicative et ceux qui ont une pensée additive. Elles ont voulu identifier des niveaux de développement de cette pensée et identifier à quelle année scolaire la majorité des élèves développent cette pensée multiplicative.

Pour ce faire, elles ont présenté une tâche faisant appel à la multiplication à 336 élèves de la première à la cinquième année du primaire dans des classes hétérogènes de la région de Birmingham en Alabama aux États-Unis. En entrevues individuelles, elles ont montré aux enfants trois poissons en contre-plaqué mesurant respectivement 5, 10 et 15 cm, soit les poissons A, B et C de la figure 2.8. Des jetons qui représentaient la nourriture à donner aux poissons étaient placés devant les enfants. Les explications et les consignes étaient les suivantes :

Figure 2.8
Les poissons
Clark et Kamii, p. 44 , 1996

- En pointant le poisson B : « Ce poisson mange deux fois ce que le poisson A mange. Le gros poisson (en pointant le C) mange trois fois ce que mange le petit (en pointant le A).

> Ce poisson (B) mange deux fois ce que ce poisson (A) mange parce qu'il est deux fois plus gros que lui (A) ». Simultanément, l'interviewer fait la démonstration devant l'enfant en reportant le poisson A deux fois sur le poisson B et en reportant le poisson A trois fois sur le poisson C.

La question alors posée aux enfants était : « Si ce poisson (A) reçoit un jeton de nourriture, combien de jetons devra-t-on donner aux deux autres poissons? » (Clark et Kamii, 1996, p. 45). Elles ont également posé une variété de questions comportant différentes quantités de nourriture, par exemple si C reçoit 9 jetons que recevront les autres? Ou encore si A reçoit 4 jetons, que donnera-t-on à B et C?

Les chercheures ont choisi cette tâche parce qu'elle permettait aux enfants de faire la démonstration de leur pensée multiplicative en manipulant les jetons, sans obligation de donner des réponses numériques.

Cette recherche a permis d'identifier quatre niveaux de développement de la pensée additive à la pensée multiplicative, ce qui pourrait correspondre aux deux premiers niveaux de Jones et ses collaborateurs (1994). Le tableau 2.2 présente le modèle de développement résultant de leur expérimentation.

Tableau 2.2 Modèle de développement de Clark et Kamii (1996)

Niveaux	Développement de la pensée	Manifestations
Niveau I	Jugement qualitatif seulement	Considération uniquement de la longueur des poissons pour décider de la quantité de nourriture. Il faut que B en reçoive plus que A et que C en ait plus que B. Ce niveau de pensée pourrait être qualifié de non numérique; il s'agit plutôt d'une comparaison visuelle basée sur la grandeur des poissons.
Niveau II	Pensée additive en utilisant +1 ou +2	Plus un jeton, si le poisson est un peu plus grand (A vs B ou B vs C) ou plus deux jetons, s'il est beaucoup plus grand (A vs C).
Niveau III	Pensée additive tenant compte de +2 pour B et +3 pour C par rapport à A	Utilisation de l'information donnée pour la multiplication, mais en faisant seulement une addition.
Niveau IVA	Début d'une pensée multiplicative	Réussite uniquement suite à un questionnement de la personne qui mène l'entrevue.
Niveau IVB	Pensée multiplicative	Réussite spontanée.

Au terme de cette recherche, elles ont pu constater des différences entre la pensée additive et la pensée multiplicative, comme le montre le tableau 2.2. Selon leurs résultats, c'est en deuxième année que la pensée multiplicative commence à être présente de façon significative, par 45 % des élèves. Cependant, seulement 49 % des élèves de 5e année ont une pensée multiplicative que l'on pourrait qualifier de « solide ». Les auteurs n'expliquent pas pourquoi les élèves font si peu de progrès.

Les résultats de Clark et Kamii (1996) vont dans le même sens que ceux de Jones et coll. (1994). En effet, pour ces derniers, le défi principal des élèves de 1re année était le comptage par groupes. La pensée multiplicative permet de compter par groupes et par groupes de groupes, ce que la pensée additive ne permet pas de faire. Elle permet en effet de considérer de façon simultanée deux informations, soit le nombre d'éléments dans un groupe et le nombre de groupe. Cette pensée multiplicative conduit à une meilleure compréhension du système de numération. Ainsi, il semble normal, selon les résultats de Clark et Kamii (1996), que ce type de comptage soit encore difficile à l'âge de 6 ou 7 ans puisque cette pensée est présente pour seulement 45 % des élèves de 2e année et 49 % des élèves de 5e année. Ces résultats permettent de mieux comprendre les résultats de Jones et ses collaborateurs (1994). En effet, selon eux, le défi des élèves de 2e année est le début de la compréhension du système de numération avec l'utilisation des dizaines et des centaines.

Avant d'acquérir une pensée multiplicative, les enfants développent une pensée additive comme le font ressortir Clark et Kamii (1996); ils ont une conception unitaire du nombre. Cette pensée pourrait aussi être associée aux trois premiers niveaux identifiés par Battista et coll. (1998). La prochaine partie fera état de recherches s'intéressant au développement de la pensée additive.

2.2.4 Sens de l'addition (pensée additive)

La pensée additive est décrite aux niveaux 1, 2 et 3 du cadre de référence de Clark et Kamii (1996) et elle correspond globalement au niveau 1 du cadre de référence établi par Jones et ses collaborateurs (1994, 1996). L'élève est capable de considérer une quantité en termes d'unités seulement. Il ne peut traiter simultanément deux informations qui interagissent simultanément. Il ne peut donc pas manipuler des groupes ni manipuler des nombres à plusieurs chiffres. Avant de compter par dix, l'élève doit donc perfectionner ses stratégies de comptage à l'unité (Jones et coll., 1994). Dans les prochaines sections, les différentes stratégies de comptage qui peuvent être utilisées ainsi que les bases cognitives sur lesquelles elles s'appuient seront présentées.

2.2.4.1 Le comptage

Selon Brissiaud (2005), l'enfant doit utiliser deux modes de traitement de l'information pour progresser : un comptage séquentiel, c'est-à-dire l'énumération, et une perception visuelle globale, qui est très rapide. Le mode séquentiel se caractérise par l'utilisation de la chaîne numérique verbale. Il repose sur la stratégie de correspondance terme à terme, c'est-à-dire toucher à chacun des objets en disant un mot de la suite des nombres et en s'assurant de considérer chacun des objets une et une seule fois. L'autre mode de traitement de l'information proposé par Brissiaud (2005) est associé à la reconnaissance globale des quantités, soit la capacité de traiter rapidement une quantité visuellement bien structurée. Ce mode de traitement s'appuie sur des aptitudes primitives de comptage, soit la subitisation perceptuelle.

Les deux modes distincts, permettant de traiter l'information numérique, semblent complémentaires. Nous tenterons d'abord de mieux comprendre comment se développent les habiletés séquentielles pour ensuite nous pencher sur celles qui sont globales.

2.2.4.1.1 Le mode séquentiel de traitement de la quantité (énumération)

L'enfant d'âge préscolaire développe sa connaissance de la chaîne numérique (Fuson, 1991) en l'utilisant des objets pour compter. Il développe aussi sa capacité de recourir à la correspondance terme à terme (un mot-nombre pour chacun des objets qui est touché une et une seule fois) (Gelman et Gallistel, 1978); il apprend à considérer chaque objet une seule fois et à y associer un seul mot-nombre.

Vers 6 ans, l'élève perçoit différemment le nombre qui devient abstrait. Le nombre n'est plus seulement une sorte d'étiquette, il signifie aussi la valeur d'un ensemble (Bideaud, 2004). L'enfant accède alors à la cardinalité et sait que le dernier mot-nombre qu'il prononce est la réponse attendue à la question « Combien ? », ce qui montre que l'enfant sait dénombrer une collection. Le dénombrement est donc un mode évolué de comptage un à un qui met en application le principe de cardinalité. Les recherches de Gelman et Gallistel (1978) ont permis d'établir cinq principes du dénombrement, les deux plus élémentaires étant l'ordre stable (mémoriser la suite de mots de la chaîne numérique) et la correspondance terme à terme (associer chaque mot de la chaîne numérique à un et un seul élément de l'ensemble à énumérer). Viennent ensuite les principes de cardinalité (savoir que le dernier mot-nombre prononcé représente tous les objets comptés), d'abstraction (compter l'objet une seule fois même s'il y en a de différentes natures ou grandeurs) et de non-pertinence de l'ordre (reconnaître que l'ordre dans lequel les objets sont comptés n'a aucune importance). Quand tous ces principes sont intégrés, la chaîne numérique est utilisée de façon bidirectionnelle, c'est-à-dire que l'enfant peut également compter à rebours de façon fluide (Fuson, 1991). Il est alors à la porte du comptage par bonds, qui est associé au début du développement de la pensée multiplicative.

Une autre facette du comptage est la possibilité de compter des objets de façon plus globale, sans faire un comptage un par un. Il s'agit de la reconnaissance globale ou de la « groupitisation » dont il sera question dans la prochaine section.

2.2.4.1.2 La reconnaissance globale ou la « groupitisation »

La reconnaissance globale est cette capacité de reconnaître les quantités sans avoir besoin de pointer chacun des éléments à compter (Brissiaud, 1995). Clements (1999) la nomme *subitisation conceptuelle*. La quantité est organisée et structurée, en respectant la limite sensorielle de nos perceptions qui est de trois ou quatre éléments. Cette habileté aide à développer l'abstraction du nombre et les stratégies arithmétiques (Clements, 1999). Par exemple, dans la figure 2.9, il est possible de voir sur la carte de gauche que 3 + 2 = 5. On voit aussi sur la carte de droite que 2 + 2 = 4 et 4 + 1 = 5. Cette reconnaissance globale s'appuie sur les aptitudes de *subitisation perceptuelle* (Clements, 1999), soit la capacité de reconnaître instantanément des numérosités inférieures à quatre; il en sera question dans la prochaine section. Il s'agit aussi d'un comptage global qui permet de percevoir en bloc les figures, sans passer par un comptage séquentiel. Il s'agit de trouver la quantité d'une collection à partir de la composition ou de la décomposition d'une constellation (Clements, 1999).

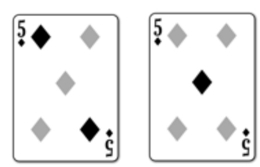


Figure 2.9
Exemple de décomposition visuelle

Dans les années 2000, des chercheurs en sciences cognitives se sont questionnés sur l’impact de l’organisation de la quantité sur les habiletés de comptage. Wender et Rothkegel (2000) ont mesuré le temps que des adultes prennent pour compter des petites quantités. Ils se sont rendu compte que ce temps est plus court lorsque les éléments sont organisés en petits groupes subitisables, qu’il s’agisse de configurations classiques, comme les points sur le dé, ou autres sous-ensembles faciles à compter d’un seul coup d’œil. Leur conclusion est que le fait de structurer la quantité a un impact majeur sur les performances de comptage. Ils ont proposé le terme « groupitizing » pour désigner cette stratégie de reconnaissance globale. Ces auteurs concluent que l’idée de « groupitisation » soutiendrait le développement de la flexibilité souhaitée en addition et pourrait aussi permettre de mieux comprendre que les plus grands nombres sont formés par l’emboîtement de nombres plus petits. Autrement dit, compter au moyen de petits groupes faciliterait plus tard la perception du rôle du groupement dans notre système de numération.

Un peu plus récemment, Starkey et McCandliss (2014) se sont intéressés à l’impact de l’organisation en petits groupes, qui respectent les limites de la subitisation perceptuelle sur l’efficacité du comptage chez des élèves, du préscolaire à la troisième année, ce qui les a menés à la stratégie de « groupitisation » (traduction libre de « groupitizing ») proposée par Wender et Rothkegel (2000). Ils ont constaté que la vitesse de comptage est augmentée lorsqu’il y a des petits groupes, surtout lorsque ces derniers respectent les limites de la subitisation perceptuelle.

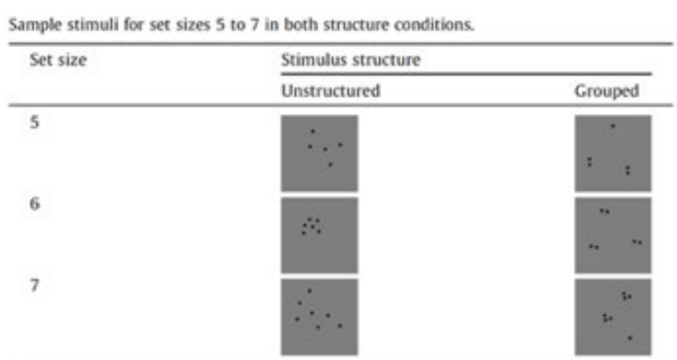


Figure 2.10
Exemple de cartes présentées aux élèves dans la recherche de Starkey et McCandliss, 2014, p. 126

Des images affichant 5, 6 ou 7 points, de même grosseur, étaient montrées aux élèves. Les points pouvaient avoir 3 ou 6 mm de diamètre et l’espace qu’ils occupaient variait entre 5 cm par 5 cm et 10 cm par 10 cm. La figure 2.10 montre quelques exemples d’images de points exposés aux enfants.

Les résultats de Starkey et McCandliss (2014) montrent que la vitesse de comptage est influencée par le fait que la quantité soit organisée[2] en petits groupes ou non. En effet, les élèves de 2e année qui ont participé à leur recherche prennent 3500 millisecondes (ms) pour compter lorsque les quantités ne sont pas organisées en petits groupes contre 3000 ms lorsqu'elles se présentent en petits groupes subitisables. Pour les élèves de 3e année, ils ont besoin de 3000 ms pour compter les éléments un à un contre 2500 ms lorsqu'elles sont organisées en petits groupes. Les quantités qui ne sont pas organisées en petits groupes sont donc comptées nettement moins rapidement. De plus, il est possible de constater que les élèves plus avancés comptent plus vite, et ce, particulièrement lorsque les quantités sont organisées. Dans leur recherche, ce sont les élèves de 2e et de 3e année qui ont davantage tiré profit du fait que la quantité était organisée en petits groupes. Ils ont aussi comparé les résultats des élèves aux épreuves de groupitisation à des épreuves standards en arithmétique et ils ont constaté que les élèves qui avaient de meilleures performances en groupitisation avaient également de meilleures performances en arithmétique. Ils en concluent que la groupitisation contribue à la compréhension de notre système de numération symbolique. Ainsi, la perception du rôle du groupement dans notre système de numération serait liée à notre capacité de groupitiser.

Prendre conscience des différentes représentations d'un nombre est important, mais jouer avec ces représentations l'est encore plus. En effet, l'habileté à composer et décomposer une quantité qui se développe à partir de 4 ans et demi (Brissiaud, 2005), et qui se fait d'abord à partir de représentations de la quantité en petits groupes, servira par exemple de support aux premières opérations additives. Il s'agit aussi d'une habileté essentielle à la perception plus abstraite de la quantité qui deviendra un nombre. Plus l'enfant est habile à composer et décomposer une quantité, plus il est flexible dans cette activité et plus il sera en mesure d'acquérir une bonne « image mentale » des quantités, une bonne « photographie mentale » (Bergeron, 2003, p. 15).

Comme nous l'avons mentionné dans la problématique, avant 4 ans, l'enfant a une certaine capacité à reconnaître les quantités, il est capable de recourir à la subitisation perceptuelle. La

[2] Le mot « organiser », selon Antidote, signifie « pourvoir quelque chose d'une structure afin d'en assurer le bon fonctionnement ». Donc, selon cette étude, il serait possible de dire que la vitesse de comptage est augmentée lorsque la quantité est organisée en petits groupes.

groupitisation s'appuie sur ces aptitudes, de même que le reste du développement du sens du nombre. La subitisation perceptuelle est la toute première manifestation cognitive de ce développement. Elle est détaillée dans la prochaine section.

2.2.4.2 La subitisation perceptuelle

Nous savons depuis longtemps que les animaux possèdent des capacités numériques rudimentaires. Dehaene (2003) rapporte des études datant du début du XIX^{e} siècle à ce propos. Par exemple, les rats peuvent être conditionnés pour toujours choisir le troisième tunnel, peu importe la distance entre les tunnels, ou encore un canari arrive à choisir la quatrième pastille disposée dans une série de pastilles alignées l'une à côté de l'autre. Le lien entre les capacités des animaux et celles des enfants ou des adultes n'était toutefois pas l'objet d'études, à l'époque.

Depuis une vingtaine d'années, surtout avec l'arrivée massive de la technologie, les outils de cueillette de données se sont perfectionnés rendant possibles les études avec de très jeunes enfants. Ces recherches permettent de constater qu'eux aussi possèdent des capacités numériques rudimentaires. Deux méthodologies ont davantage été utilisées : la réaction à l'erreur et l'imagerie cérébrale. La première, appelée aussi la méthode de la transgression des attentes, mesure le temps d'attention d'un individu par rapport à un évènement qui se produit (Baillargeon, 2002; Baillargeon, Spelke et Wasserman, 1985). Le plus souvent, une caméra capte le mouvement des yeux. Lorsqu'un phénomène transgressant les attentes du sujet se produit, le temps d'attention est pratiquement deux fois plus grand que si la situation avait été celle normalement attendue. Par exemple, prenons un livre déposé sur une table. Si la table est brusquement retirée, le livre devrait tomber par terre. S'il ne tombe pas, cela correspond à un évènement inattendu, qui transgresse notre attente. Nous serions donc plus attentifs à cet évènement et la caméra l'aurait capté. Cette méthodologie est aujourd'hui une procédure standard pour évaluer un nombre important de particularités cognitives chez l'enfant tel que la mémoire ou la reconnaissance de propriétés abstraites, par exemple les expressions faciales (Oakes, 2010). Elle permet aussi de mesurer le temps d'habituation de l'enfant, c'est-à-dire le temps qu'il prend pour se désintéresser de ce qui lui est présenté. L'imagerie cérébrale, quant à elle, permet « d'observer l'activité électrique et les flux sanguins du cerveau, dont les variations permettent de déterminer les zones cérébrales sollicitées[3] » lorsqu'une personne exécute une tâche cognitive.

L'intérêt des chercheurs par rapport au développement cognitif de l'enfant et à ses aptitudes précoces s'est ainsi beaucoup développé depuis les recherches sur les animaux (Houdé et coll., 2011). Plusieurs chercheurs (Dehaene, 2003; Houdé, 2004; Wynn, 1992a; Wynn, 1992b) se sont penchés sur les performances arithmétiques précoces, surtout en lien avec le *sens des petites numérosités*. Par *sens des petites numérosités,* nous entendons la capacité de traiter mathématiquement des quantités jusqu'à 4, c'est-à-dire la capacité de les reconnaître, les différencier ou encore les décomposer, donc savoir que 2 et 1 font 3 par exemple.

Le très jeune enfant est capable de recourir à la subitisation pour des quantités de 1 à 3. On entend par subitisation la capacité de reconnaître un nombre sans autre processus de comptage, ce que Clements (1999) appelle la *subitisation perceptuelle*. On constate que l'enfant peut reconnaître des réponses incorrectes à des ajouts ou retraits dont les valeurs sont de petites numérosités.

En 1980, Starkey et Cooper ont démontré que les bébés âgés entre 16 et 30 semaines arrivent à distinguer des petites numérosités (1, 2 et 3 éléments) et à constater la différence entre deux collections qui ont un élément de différence. Pour ce faire, ils présentaient deux images ayant chacune des points sur une ligne. Le bébé devait regarder les deux images et les chercheurs notaient ses réactions en mesurant le temps de fixation sur chaque ensemble. Ils ont utilisé la méthode de la transgression des attentes (Baillargeon, 2002; Baillargeon, Spelke et Wasserman, 1985), c'est-à-dire, la méthode qui habitue d'abord un individu à un certain stimulus. Ensuite, des images tests lui sont montrées. Le temps d'attention porté à chacune des images est mesuré. Les images que l'individu n'associe pas au stimulus de départ lui demandant plus d'attention, ses attentes sont alors transgressées et le temps d'attention est plus grand. Ainsi, plusieurs images avec une rangée de points (figure 2.11) ont été montrées à l'enfant, une ligne à la fois. Une même ligne contenait deux cases. Dans chacune des cases, il y avait 2 et 3 points respectivement. Pour le familiariser à la représentation des lignes contenant 2 et de 3 points par exemple, des images avec des points placés à des distances différentes, mais contenant toujours le même nombre d'éléments, la quantité 2 à

[3] https://fr.wikipedia.org/wiki/Imagerie_c%C3%A9r%C3%A9brale

gauche et la quantité 3 à droite, étaient proposées à l'enfant. Ensuite, des images tests lui étaient montrées, soit des images ayant différentes quantités de points que ce à quoi on l'avait habitué ou encore des images qui avaient le même nombre de points.

Les bébés de l'expérimentation de (Starkey et Cooper, 1980) réagissaient de moins en moins longuement lorsqu'on leur montrait 2 points à gauche et 3 points à droite par rapport à 3 points à gauche et 2 points à droite, ils n'étaient donc pas surpris par les images qui leur étaient présentées, démontrant qu'ils percevaient la *numérosité* de ces items. Pour les images montrant 4 points à gauche et 6 points à droite par rapport à 6 points à gauche et 4 points à droite, ils demeuraient attentifs plus longtemps, ils étaient toujours surpris par ces images, ils ne les discriminaient pas, manifestant ainsi qu'il s'agissait toujours de quelque chose de nouveau. En d'autres mots, lorsque les lignes avaient 2 et 3 éléments, l'enfant était capable de discriminer le 2 du 3 et n'avait donc pas de réaction. Cependant, lorsque les lignes avaient 4 et 6 éléments, l'enfant ne pouvait pas discriminer le 4 du 6 et était donc plus attentif. Il est à noter que les chercheurs ont éliminé la possibilité que la réaction de l'enfant soit due à l'espace occupé par les points dans l'image. En effet, le bébé discriminait des lignes de points qui avaient la même longueur, mais non la même quantité de points lorsqu'on lui présentait 2 et 3 points, mais n'arrivait pas à le faire pour 4 et 6 points. D'autres chercheurs (Dehaene, 2003; Dehaene et coll. 2004; Wynn, 1992a, 1992b) sont venus expliquer ces résultats en parlant du nombre flou. Au-delà de 3 (parfois 4) éléments, le bébé ne fait plus de discrimination précise de la quantité. Ainsi, pour lui, qu'il y ait 4 ou 6 éléments, c'est du pareil au même.

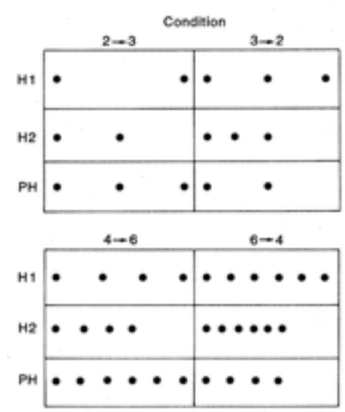


Figure 2.11
Images utilisées dans l'expérimentation de Starkey et Cooper, 1980, p. 1034

Lorsqu'il est question de mieux comprendre les capacités de discrimination exacte des petites numérosités chez les poupons, les études de Wynn (1992a, 1992b) sont maintes fois citées. Elles permettent de mieux comprendre l'aptitude des nourrissons à distinguer les petits numérosités (1 à 3) et à faire des équivalences numériques de façon perceptuelle, quand des objets défilent sous leurs yeux. En d'autres mots, ces travaux fondateurs mettent en lumière la capacité de bébé à

« compter » le résultat précis pour des additions et des soustractions de petites numérosités (Noël, 2005). Pour le démontrer, Wynn (1992a, 1992b) a mené ses travaux sur des bébés de 4 à 5 mois. Elle a utilisé un théâtre avec des marionnettes de Mickey Mouse dans lequel les personnages entraient ou sortaient. Par exemple, un premier Mickey Mouse était placé dans le théâtre et le rideau se fermait. Devant bébé, quelqu'un venait en placer un autre derrière le rideau toujours fermé. Ensuite, l'expérimentateur ouvrait le rideau permettant à bébé de voir ce que le rideau cachait. Des situations possibles (dans ce cas-ci il y aurait eu deux Mickey Mouse) et des évènements impossibles (on aurait montré aucun, un ou trois Mickey Mouse) étaient ainsi présentés aux poupons. Wynn (1992a, 1992b) a aussi utilisé la méthode de transgression des attentes en mesurant le temps d'attention à l'aide d'une caméra et d'un chronomètre. Dans ce cas-ci, une erreur, quelque chose d'invraisemblable, est présentée au bébé. Par exemple il y a deux Mickey Mouse sur la scène, l'un sort lorsque le rideau est fermé et il n'en reste aucun lorsqu'on ouvre le rideau. Le temps de fixation de bébé était ici significativement plus long que si un seul Mickey Mouse restait sur la scène. Ces résultats lui ont permis de conclure que bébé peut distinguer « un seul » de « plusieurs », tout comme deux de trois. Dehaene (2003) précise que pour percevoir 3 éléments ou moins, il ne faut pas beaucoup plus qu'une demi-seconde (650 ms pour 3 éléments) et le taux d'exactitude est pratiquement de 100 %. Lorsque les quantités augmentent, le temps requis augmente également et le degré de précision diminue. Par exemple, pour 4 éléments, il faut 850 ms et le taux d'erreur est de 10 %.

Avant de présenter les études s'intéressant aux conditions à mettre en place pour favoriser le développement du sens du nombre et de la numération, une synthèse des travaux présentés jusqu'ici pour mieux comprendre le développement cognitif du sens du nombre est proposée dans la prochaine section.

2.2.5 Synthèse des recherches présentées par rapport au développement du sens du nombre et de la numération

À la lumière des recherches qui ont été présentées, il semble qu'un bon sens du nombre soit associé à la compréhension du nombre et du système de numération. Cette compréhension s'appuie sur une représentation interne imagée et dynamique des quantités. Il a aussi été possible d'identifier des éléments clés menant à la compréhension de la numération.

Les recherches de Jones et ses collaborateurs (1994, 1996) ont permis d'identifier des niveaux de développement de la pensée arithmétique chez des élèves de 1re et 2^{e} année. Leur regard porte cependant seulement sur l'apprentissage des principes liés au système de numération, soit la valeur de position, l'équivalence et le groupement. Ainsi, pour les élèves qui se situent au niveau 1 de leur modèle, ils mentionnent ce qu'ils ne sont pas capables de comprendre par rapport au système de numération et non ce qu'ils pourraient comprendre du sens du nombre.

Les recherches de Clark et de Kamii (1996) ont permis de mieux comprendre un élément clé menant à la compréhension de la numération soit le groupement. Elles ont permis de préciser que pour comprendre la pertinence et le rôle du groupement dans notre système de numération, les élèves ont besoin d'avoir développé une pensée multiplicative. La pensée multiplicative permet de traiter de façon simultanée les unités élémentaires et les unités d'ordre supérieur comme les unités par rapport aux dizaines. Tout comme Jones et ses collaborateurs (1994, 1996), elles ont identifié des niveaux de développement de cette pensée multiplicative. Les deux recherches permettent de dire que le développement de la pensée multiplicative est central au développement du sens du nombre et de la numération.

Cependant, Clark et Kamii (1996) proposent des niveaux de développement en lien avec seulement un principe du système de numération, soit le groupement associé à la pensée multiplicative. Les travaux de Battista et coll. (1998) permettent de mieux comprendre cette pensée multiplicative en l'associant à la structuration spatiale. La pensée multiplicative serait associée au quatrième niveau proposé par ces auteurs, soit la capacité de considérer qu'un carré est inclus à la fois dans une colonne et une rangée. Selon eux, les manifestations d'un élève qui n'a pas acquis cette pensée et ces manifestations pourraient être attribuées à une pensée additive. Cependant, tout comme Clark et Kamii (1996), ils ne font pas de liens avec les autres principes constituant les bases du système de numération. Pour les élèves qui n'ont pas développé leur pensée multiplicative, Clark et Kamii (1996) qualifient leur pensée d'additive et pour les élèves encore plus faibles, elles parlent d'un jugement qualitatif ou non numérique.

Pour mieux comprendre cette pensée additive et ce jugement non numérique qui sont préalables à la compréhension du système de numération, les recherches s'intéressant au comptage ont été présentées. Grâce aux travaux de Fuson (1991) et de Gelman et Gallistel (1978), les principes du dénombrement qui mènent à un comptage par bond ont été décrits. Ce dernier type de comptage se situe à la porte de la pensée multiplicative. Une autre stratégie de comptage consiste à utiliser la reconnaissance globale. Les recherches de Starkey et McCandiss (2014) ont permis de mieux comprendre cette stratégie puisqu'ils ont constaté que les éléments organisés en petits groupes de 2 ou 3 étaient comptés plus vite que les éléments désorganisés. Ils ont nommé *groupitisation* cette capacité à mieux compter lorsque les éléments sont placés en petits groupes. Enfin, dans le but de mieux cerner la groupitisation, les recherches portant sur la subitisation, la perception instantanée des petites quantités (0 à 3) présente chez les nourrissons, ont été abordées.

La présente étude s'intéresse au sens du nombre et de la numération, c'est pourquoi ces recherches ont été retenues. Cependant, aucune recherche qui relie tous ces éléments entre eux n'a été identifiée. Certaines études, comme celles de Jones et coll. (1994) ou de Clark et Kamii (1996) présentent des niveaux de développement, mais seulement pour une partie du sens du nombre. La définition d'un continuum permettrait d'intégrer toutes ces recherches dans un même modèle cohérent. Ce continuum pourrait servir de cadre de référence pour bâtir des épreuves visant l'identification des niveaux de développement des élèves et pour créer et organiser des séquences didactiques selon ces niveaux de développement. La prochaine section présente ce que pourrait être ce continuum de développement.

2.2.5.6 Un continuum du développement du sens du nombre et de la numération

Un continuum du développement du sens du nombre et de la numération menant à la compréhension du système de numération a été construit à partir du bilan des écrits scientifiques présentés dans ce chapitre. Ce continuum fait ressortir les liens entre les aptitudes primitives des enfants en arithmétique et la compréhension de la numération. Il est présenté au tableau 2.3. Cinq niveaux de développement du sens du nombre et de la numération ont été établis. Un âge possible de développement a été associé à chacun des niveaux. Une étape du développement du sens du nombre et de la pensée arithmétique de l'enfant a aussi été associée à chacun des niveaux. Une liste des principaux comportements observables est proposée. Il s'agit d'une synthèse de tous les écrits scientifiques présentés dans le chapitre et plusieurs auteurs interviennent à plusieurs niveaux. Cependant, seuls les auteurs ayant spécifiquement traité des niveaux de développement et de l'âge possible des apprentissages concernés ont été soulignés dans le tableau.

Ce continuum constitue une hypothèse qui permettra d'étudier le développement du sens du nombre et donc, en quelque sorte, une hypothèse du développement cognitif de l'élève. Ce continuum comporte un but, soit la compréhension de la numération à travers la construction de représentations mentales et il propose le développement de cette compréhension. Des procédures employées par les élèves qui pourraient être associées à l'utilisation de ces représentations mentales par les élèves lors de la réalisation de tâches mathématiques sont suggérées. La flexibilité, élément important du sens du nombre, est présente à tous les niveaux. Les âges possibles de développement sont proposés comme un guide général puisque l'âge d'acquisition dépend beaucoup des opportunités d'apprendre.

Tableau 2.3
Tableau synthèse du continuum du développement cognitif du sens du nombre et de la numération

Niv.	Âge possible de développement	Dév. du sens du nombre	Procédures observables	Principaux auteurs
1	Avant 4 ans	Perception de petites numérosités	L'élève utilise la subitisation perceptuelle.	Clements (1999) Starkey et Cooper (1980) Wynn (1992a, 1992b)
2	5-6 ans	Pensée additive	L'élève effectue un comptage séquentiel. L'élève recourt à la groupitisation; il fait un comptage global. Il fait preuve de flexibilité additive.	Clark et Kamii (1996) Fuson (1990) Gelman et Gallistel (1978) Starkey et McCandliss (2014)
3	6-7 ans	Pensée multiplicative Pré-valeur de position	L'élève fait un comptage par bonds. L'élève reconnaît la pertinence du groupement. L'élève considère simultanément les quantités dans une colonne et une rangée. Il fait preuve de flexibilité multiplicative.	Battista et coll. (1998)Bednarz et Dufour-Janvier (1984a, 1986) Clark et Kamii (1996) Jones et coll. (1994) Koudgobo (2013, 2017) Thomas et Mulligan (1995)
4	7-8 ans	Passage à la dizaine Passage à la centaine	L'élève reconnaît l'intérêt de faire des groupes de dix pour faciliter le dénombrement. L'élève comprend le rôle de la centaine; il est capable de manipuler ce groupe de groupes. L'élève comprend le concept d'équivalence. L'élève fait un comptage mixte. Il fait preuve de flexibilité de représentation.	Jones et coll. (1994)
5	8 ans	Compréhension de la valeur de position dans la numération	L'élève manipule les nombres et leurs multiples représentations. Il fait preuve de flexibilité opératoire.	Jones et coll. (1994)

Au premier niveau, il est question des aptitudes présentent chez les nourrissons, soit les aptitudes de subitisation. Les jeunes enfants sont capables de reconnaître de façon instantanée trois ou quatre éléments ou moins (Wynn, 1992a, 1992b) et de constater la différence entre deux collections lorsque les quantités de ces collections sont au moins du simple au double (Starkey et Cooper, 1980). Même certains animaux ont ces aptitudes. Autour de l'âge de 4 ans, ces aptitudes se développent et permettent, entre autres, de compter de plus grandes collections.

Au deuxième niveau, il s'agit du développement de la pensée additive, tel que proposé par Clark et Kamii (1996). Cette pensée se développerait autour de 5-6 ans. Elle peut être caractérisée par la capacité de tirer profit des habiletés de groupitisation (Brissiaud, 2005; Clements, 1999; Starkey et McCandliss, 2014). Selon ces auteurs, les élèves sont capables de reconnaître des constellations ou d'en utiliser de nouvelles pour compter des quantités allant jusqu'à 20 et de se les représenter mentalement. Organiser les quantités en petits groupes permet de compter plus vite. C'est aussi à cette étape que les élèves développent leurs habiletés de comptage séquentiel les menant au dénombrement et à une perception abstraite du nombre entier (Fuson, 1991; Gelman et Gallistel, 1978). Ils seront capables de se représenter des quantités organisées en petits groupes dans leur tête. Ils développent une flexibilité additive.

Le niveau trois du continuum correspond à la pensée multiplicative Clark et Kamii (1996) et la pré-valeur de position (Jones et coll. ,1994). Il semble se développer autour de 6-7 ans. À ce niveau, selon ces auteures, les élèves développent leur pensée multiplicative, leur capacité à considérer de façon simultanée deux informations sur le même objet, comme dans la tâche de l'inclusion des classes de Piaget ou dans les tâches associées à la disposition rectangulaire proposées par Battista et coll. (1998). Cette pensée tire profit de la pensée additive et des habiletés de groupitisation et de la prise de conscience du fait qu'organiser les quantités en petits groupes permet de compter plus vite. Il s'agit maintenant de faire des groupes organisés, soit des paquets de même quantité et éventuellement des groupes de groupes. Cette pensée leur permettra donc de comprendre le rôle des groupements dans le système de numération et de compter par bonds (Bednarz et Dufour-Janvier, 1984a, 1984, 1986; Koudogbo et coll., 2017). Ils seront capables de se représenter des quantités groupées (organisées en groupes de groupes) dans leur tête. Ils développent une flexibilité multiplicative.

Le quatrième niveau est le passage à la dizaine et le passage à la centaine (Jones et coll., 1994). Il semble se développer autour de 7-8 ans. Il s'agit du passage entre l'énumération et la numération. Les élèves doivent comprendre les règles d'équivalence du système de numération. Selon ces auteurs, ils sont capables d'utiliser du matériel représentant les groupes de dix et de cent et de se représenter les nombres dans leur tête en utilisant ce matériel comme référence. Ils peuvent utiliser un comptage mixte, soit compter par bonds de un, de dix et de cent. En tirant profit des acquis liés à la pensée multiplicative, les élèves sont capables de se représenter les quantités groupées en paquets de dix et de cent (il s'agit souvent d'une représentation imagée des blocs de base dix). Ils développent une flexibilité de représentation. La notation mixte, comme la notation des Chinois, apparaît à ce niveau.

Le niveau cinq est la compréhension de la valeur de position du système de numération (Jones et coll., 1994). Il se développerait autour de 8 ans. Selon ces auteurs, c'est à ce niveau que les élèves manœuvrent facilement les différentes quantités, que ce soit avec du matériel concret ou avec des représentations symboliques. Ils manipulent les représentations des nombres aussi bien avec des représentations externes que dans leur tête. Ils sont capables de se représenter mentalement, concrètement ou symboliquement un nombre de différentes façons (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986; Hiebert et Wearne, 1992; Lyons, 1982; Thomas et coll. (2002); Reys, 1994). Ils peuvent le composer et le décomposer facilement selon la tâche qu'ils ont à accomplir. Ils sont capables d'utiliser leur flexibilité de représentation et de faire des choix selon les tâches qui leur sont proposées.

La section 2.2 qui se termine avec la présentation d'une hypothèse de continuum du développement du sens du nombre émergeant des études consultées et des observations réalisées auprès d'élèves du primaire visait à fournir des pistes pour répondre à la première partie de la question générale de recherche en rapportant les travaux portant sur le développement du sens du nombre et de la numération. Ce développement n'est évidemment pas indépendant de l'enseignement. En effet, l'enseignement favorise ce développement. La partie qui suit vise à décrire l'état de la recherche liée à cette question et, plus particulièrement, à préciser les conditions qui favorisent le développement du sens du nombre et de la numération.

2.3 L’enseignement du sens du nombre et de la numération

Comme il a été mentionné dans la problématique, malgré les efforts des milieux éducatifs, certains élèves d’aujourd’hui ont encore des difficultés à comprendre les rouages du système de numération; ils sont par exemple capables d’effectuer des calculs correctement, mais sans en comprendre le sens (Koudogbo, 2013). Une explication possible serait l’introduction rapide de la représentation symbolique des nombres, sans considérer la valeur de ces symboles, donc l’équivalence (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986; Hierbert et Wearne, 1992; Koudogbo et coll., 2017). Une autre explication serait l’escamotage de la compréhension du groupement et de l’aspect multiplicatif du système de numération (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986; Koudogbo et coll., 2017).

Cette partie permettra de répondre à la deuxième partie de la question générale de recherche, soit d’identifier les conditions qui favorisent le développement du sens du nombre et de la numération. Pour ce faire, des recherches portant sur l’enseignement de la numération seront d’abord présentées. Ces recherches s’intéressent aux développements des niveaux 3 à 5 de notre continuum. Ensuite, des recherches portant sur l’enseignement du sens du nombre seront explorées. Ces recherches se penchent sur les niveaux 2 et 3 de notre continuum. Finalement, les conditions favorisant le développement de la reconnaissance globale ou groupitisation seront étudiées, soit le niveau 2 de notre continuum. La mise en évidence de recommandations par rapport à l’enseignement de la numération terminera cette section, permettant ainsi d’identifier les caractéristiques des tâches permettant aux élèves de surmonter de nouveaux défis mathématiques et de poursuivre le développement de leur sens du nombre.

2.3.1 L’enseignement de la numération

En arithmétique, de nombreuses tâches présentées à l’élève impliquent la représentation de la quantité. Comme nous l’avons mentionné préalablement, ces représentations externes proposées par les tâches auront un impact sur les représentations internes que l’élève se fera de la quantité. Une des façons de décrire les représentations externes est celle proposée par Bruner (1966) et reprise par (Lyons, 1982). Selon ces auteurs, il y a quatre modes de représentations externes : le mode concret, le mode imagé, le mode symbolique et le mode verbal (Bruner, 1966; Bednarz et Dufour-Janvier, 1984b, 1986; Lyons, 1982).

Le mode concret renvoie à l'utilisation de matériel. Généralement, il sera question de matériel concret de substitution puisque les vrais objets sont souvent difficilement manipulables. Des jetons pourront représenter des moutons ou des voitures par exemple. Les blocs de base dix, la monnaie ou encore les bouliers sont associés au mode concret. Le mode imagé, de son côté, propose une représentation sous forme de graphique, de schéma ou de diagramme. Le mode symbolique est le système de code reconnu en mathématiques, à l'écrit. C'est celui qui pose le plus de difficulté aux élèves (Bednarz et Dufour-Janvier, 1984b, 1986; Lyons, 1982). Le mode verbal est lié aux règles qui permettent de nommer les nombres.

Selon Bruner (1996) et Lyons (1982), l'apprentissage d'un concept mathématique aurait avantage à passer progressivement du mode concret, puis au mode imagé et finalement au mode symbolique. De plus, Thomas et coll. (2002) font ressortir l'idée que les élèves pourraient tirer profit de la variété des représentations qui leur sont proposées, en particulier à travers des tâches proposant des représentations qui permettent de développer leur flexibilité, soit les représentations externes concrètes et imagées. Ils parlent de représentations « imagées dynamiques », représentations rendues possibles aujourd'hui grâce à la technologie. Elles permettent en effet aux élèves d'interagir facilement avec des représentations externes. Clements et Battista (1992) ajoutent qu'il est important que les élèves puissent explorer et manipuler les objets. Cette manipulation pourrait être celle des représentations concrètes ou imagées des quantités permettant à l'élève de s'en faire une représentation mentale.

Les approches d'enseignement dont il sera question ci-après respectent la séquence développementale décrite plus haut (représentations concrètes, imagées, symboliques) et mettent de l'avant des tâches dans lesquelles la manipulation ne suffira plus, obligeant l'élève à trouver une façon de ne plus y avoir recours. Dans cette perspective, le mode symbolique ne correspond pas à la représentation initiale sur laquelle se construisent ensuite les apprentissages, mais correspond à la cible d'apprentissage. Il s'agit aussi d'approches amenant l'élève à développer certains éléments liés au développement du sens du nombre, tel que présentés par Reys (1994). Ces approches devraient donc permettre à l'élève de faire des liens entre les mathématiques et le monde réel, d'être capable de juger de la justesse d'une réponse, d'inventer ses propres procédures de calcul, de représenter un nombre de plusieurs façons selon le contexte en jeu, de reconnaître des régularités dans le système de numération, d'obtenir facilement la réponse à des calculs élémentaires, d'utiliser ses connaissances sur les nombres pour en déduire de nouvelles, de faire régulièrement appel à l'estimation, de jouer avec les nombres en les composant ou en les décomposant et reconnaître la grandeur, la quantité, derrière les chiffres.

Pour illustrer cette vision du développement de la numération, deux recherches dans lesquelles des interventions pour aider les élèves à apprendre la numération ont été mises en place sont présentées. La première est la recherche phare lorsqu'il est question de l'enseignement et de l'apprentissage de la numération, soit celle de Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) dont il a brièvement été question dans la problématique de la présente étude. La seconde, un peu plus récente, menée par Hiebert et Wearne (1992) a pour objectif de faire ressortir les caractéristiques d'un enseignement du concept de la valeur de position basé sur la construction de sens en le comparant avec un enseignement traditionnel.

Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) ont, durant cinq ans, mené des études auprès de 200 enfants du primaire, âgés de 6-7 ans à 9-10 ans. Dans le cadre d'une première étude, elles ont observé les élèves pour constater leur peu de compréhension de notre système de numération et elles ont identifié les caractéristiques de l'enseignement des mathématiques pouvant influencer ces difficultés. Elles ont ainsi établi un cadre de référence pour l'apprentissage et l'évaluation de la numération. Dans une seconde étude, elles ont mis à l'essai des activités basées sur ce cadre de référence auprès d'un groupe d'élèves qu'elles ont pris en charge de la première année (6-7 ans) à la troisième année (8-9 ans).

Au cours des deux premières années de la recherche, elles ont identifié des caractéristiques de l'enseignement de la numération qui entraînent le développement de conceptions inadéquates par rapport à ce concept chez les élèves. Dans l'enseignement de la numération, dans les années 1980, une grande insistance était mise sur le passage à l'écriture symbolique des nombres. De plus, les représentations imagées de nombres fournies aux élèves apparaissaient toujours alignées et respectant l’ordre de l’écriture conventionnelle du nombre (les centaines à gauche, les dizaines au centre et les unités à droite). Le matériel, qu’il soit imagé ou concret était toujours utilisé pour le passage à l’écriture conventionnelle et non pour la compréhension du rouage du système de numération. Enfin, l’enseignement de la numération était souvent détaché de celui des opérations. En France, Mounier (2010) a lui aussi fait une analyse de l’enseignement en étudiant les manuels avec lesquels les élèves travaillaient et a constaté que ce qui était proposé aux élèves n’était pas différent de ce qu’avaient constaté Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986).

Dans leurs observations des deux premières années, Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) en sont venues à décrire les difficultés qu’avaient les élèves à comprendre le système de numération :

- « difficulté à voir les groupes et leur rôle dans l’écriture conventionnelle;
- difficulté à voir la pertinence du groupement;
- difficulté à opérer avec ces groupes;
- difficulté à travailler simultanément avec deux groupes d’ordres différents;
- difficulté à interpréter les procédures de calcul relatives aux opérations en termes de groupement (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, p. 30) ».

À la suite de ces observations, elles ont énoncé des recommandations pour l’enseignement de la numération qu’elles ont mises en application durant les trois autres années de leur expérimentation. Voici les recommandations qu’elles ont énoncées :

- « être beaucoup moins axé sur l’écriture, le symbolisme et le vocabulaire;
- éviter de dicter des règles ou des procédures superflues, artificielles, inutiles, mais plutôt inciter l’enfant à en formuler lui-même;
- davantage mener l’apprentissage en fonction des difficultés des élèves;
- reconsidérer la conception de la manipulation pour que le matériel joue réellement un rôle de support mutuel auquel l’enfant pourra avoir naturellement recours;
- s’inspirer davantage de l’évolution historique des systèmes de numération puisqu’elle révèle combien le passage du recours à la correspondance un à un, à un recours au groupement est important (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, p. 31). »

Pour leur expérimentation (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984b), les auteures ont mis en place des situations d'enseignement originales, des environnements contextuels d'apprentissage qui permettaient aux élèves de construire une symbolisation du nombre « ayant un sens et utilisable au niveau des opérations » (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984b, p. 5). Les situations proposées aux élèves sont des résolutions de problèmes. L'enfant se questionne et en vient à modifier ses conceptions (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984b). Les situations étaient élaborées à partir d'un même matériel. Il devait être assez familier pour les élèves et permettre, dès le départ, la présence d'au moins deux niveaux de groupement (un groupe et un groupe de groupes). Trois critères étaient utilisés pour le choix du matériel afin de respecter l'objectif établi. Il s'agissait de pouvoir identifier plus ou moins rapidement le nombre de groupes ainsi que la présence de groupes de groupes, de déduire plus ou moins facilement la relation entre les groupes (par exemple, il y a dix unités dans une dizaine) et permettre d'opérer plus ou moins directement sur les groupes (par exemple, avec les blocs de base dix, il est impossible d'enlever directement une dizaine d'une centaine forçant les échanges).

Tout au long de leur expérimentation, les auteures ont veillé à ce que l'évolution des situations fasse en sorte que les représentations concrètes ou imagées proposées aux élèves soient progressivement moins descriptives et donc, plus efficaces et plus symboliques; même si le matériel est initialement nécessaire à la compréhension, il devient rapidement encombrant. Un même environnement était exploité longtemps, mais les situations choisies étaient de plus en plus complexes et les besoins de communication et d'opérations étaient plus exigeants. Les contraintes des tâches poussaient les élèves à progressivement utiliser des représentations de nombres plus efficaces, soit des représentations de plus en plus symboliques.

Figure 2.12
Exemple du matériel « boîtes de céréales » utilisé par Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, p. 8

La figure 2.12 présente un exemple d'environnement qu'elles ont utilisé : les « boîtes de céréales ». Les contraintes proposées dans les tâches seront ensuite exposées.

Ce matériel est familier et accessible. Il permet d'identifier rapidement deux niveaux de groupement et la règle de groupement est apparente. De plus, il est possible de manipuler directement les boîtes dans les caisses et les caisses dans les paniers. Les enfants peuvent opérer facilement sur les groupes. Une activité proposée avec ce matériel était la « chaîne de montage ». Les élèves jouent des rôles différents. Un premier reçoit les boîtes de céréales, une à une. Lorsqu'il en a assez pour former une caisse, il les passe à son voisin qui les accumule jusqu'à ce qu'il en ait assez pour former un panier. Il les passe alors à un troisième élève qui accumule les paniers. Les autres élèves observent cette chaîne de montage. L'enseignant choisit, à tour de rôle un élève qui est appelé à commenter, à décrire ce qui se passe. L'enseignant arrête les élèves et pose des questions au commentateur sur l'action qui vient d'être exécutée ou sur l'état de la collection à un moment précis. Différentes contraintes peuvent être ajoutées pour pousser plus loin la compréhension des élèves. Par exemple, il était demandé aux élèves qui accumulent les boîtes ou les caisses, de le faire le dos tourné, ainsi les autres élèves ne voient pas combien ils en donnent à leur voisin. Cette contrainte poussait les élèves à se trouver un système pour garder des traces de l'état de la collection. Souvent, ils utilisaient leurs doigts ou des objets. Plusieurs en sont venus à se faire des codes. Des comparaisons de collections de boîtes de céréales peuvent être faites, une commande écrite peut être donnée aux élèves et ces derniers doivent préparer la commande. Ainsi, « l'évolution des systèmes de numération s'est faite à travers plusieurs représentations, dans la recherche d'une représentation du nombre de plus en plus efficace pour répondre à des besoins de communication et de traitement (opération) de plus en plus exigeants » (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984b, p. 16) et donc pour répondre aux besoins de la tâche.

Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986, 1988) ont émis des recommandations pour un enseignement permettant la construction du sens du nombre. Les conclusions de leur recherche renforcent les recommandations qu'elles avaient mises de l'avant dans la première partie de leurs expérimentations. Elles suggèrent donc, pour un enseignement optimal de la numération, que :

- l'accent soit mis sur l'utilisation des groupes à partir de représentations où la règle de groupement est plus accessible;
- des situations faisant appel à un travail sur des collections et des collections groupées soient d'abord mises en place pour permettre l'évolution de la représentation des élèves vers une représentation de plus en plus conventionnelle;
- des environnements dans lesquels les enfants doivent constamment communiquer leurs réponses et opérer soient utilisés;

- l'enfant soit continuellement en situation de résolution de problèmes et qu'il ait naturellement recourt au matériel.

D'autres auteurs, dont Hiebert et Wearne (1992) se sont aussi intéressés à ce type d'enseignement de la numération en tentant d'en identifier les principales caractéristiques. Ils ont donc fait la comparaison entre un enseignement traditionnel à partir d'un manuel et un enseignement basé sur la construction des concepts (« conceptually based instruction »), particulièrement sur la valeur de position et sur l'addition et la soustraction de nombres à deux chiffres. Ils ont tenté de faire ressortir le lien entre l'enseignement, la compréhension et la performance.

Pour eux, la compréhension d'un concept est une construction de connexions entre ses différentes représentations. Faire des liens entre des représentations externes permet de bâtir des liens entre les représentations internes et mène à la compréhension des concepts. Les représentations externes qu'ils utilisent sont des représentations concrètes, imagées, verbales ou symboliques (Bruner, 1966, Lyons, 1982). Toutes les représentations sont des outils pour traiter l'information, elles ont des rôles différents.

Pour leur expérimentation, Hiebert et Wearne (1992) ont travaillé avec 153 élèves de première année provenant d'une école de banlieue au Delaware. Les élèves ont été placés de manière aléatoire dans les six classes de première année de l'école. Quatre classes ont implanté la méthode d'enseignement conceptuel pour l'apprentissage de la valeur de position (103 élèves), un enseignant a utilisé sa propre méthode d'enseignement (enseignante élite selon la direction) et un autre a utilisé l'enseignement et le manuel habituels (50 élèves composaient les deux autres groupes). Un observateur externe a assisté à 20 rencontres et un enregistrement audio a été fait. Une analyse de verbatim et un accord inter juge ont été faits.

Les représentations externes ont été utilisées comme étant des outils permettant de montrer, de manipuler et de communiquer de l'information par rapport aux quantités traitées, selon différentes situations et différentes contraintes. Les principes suivants ont guidé le déroulement de leur expérimentation :

- les représentations externes étaient utilisées comme des outils pour montrer et enregistrer les quantités ou les opérations sur les quantités lors de la résolution de problèmes;

- une fois qu'une représentation externe était introduite, elle était utilisée par les élèves de façon consistante dans la résolution de leurs problèmes. Cela leur permettait de se familiariser avec cette représentation et de s'entraîner à l'utiliser;
- les représentations étaient aussi analysées par rapport à leurs propres caractéristiques. Par exemple, les représentations imagées de quantités ne sont pas manipulables, ce qui oblige les élèves à ajouter des traces lors de leurs calculs;
- les discussions autour des représentations avaient pour but d'identifier comment elles pouvaient être utilisées et comment elles étaient similaires ou différentes les unes par rapport aux autres.

Le but de ces principes était de rendre les élèves confortables avec les différentes représentations pour qu'ils fassent des liens entre elles.

Une représentation concrète accompagnée d'un problème était d'abord utilisée. Ensuite, un dessin du matériel était présenté. Finalement, l'écriture symbolique était introduite. Une fois une représentation introduite, des allers-retours dans les autres modes de représentations déjà introduits étaient faits.

Hierbert et Wearne (1992) ont ciblé deux concepts mathématiques pour leur expérimentation : la valeur de position et l'addition et la soustraction de deux nombres à deux chiffres dans lesquelles il n'y avait aucune retenue ou aucun emprunt.

Pour travailler, avec les groupes expérimentaux, la valeur de position, par exemple, ils ont d'abord posé un problème aux élèves en leur demandant de trouver combien il y avait d'éléments (entre 50 et 100) en utilisant des cubes emboîtables de 1cm^3. Ils ont accordé de l'importance aux discussions stratégiques entre les élèves. Certains comptaient par un, d'autres par groupes ou par groupes de groupes. À la suite de ces échanges, les chercheurs montraient aux élèves comment écrire avec les symboles la quantité dont ils venaient de parler (notation positionnelle). Par la suite, les élèves utilisaient leur cahier. Pour travailler sur le concept de valeur de position, il y avait dans le cahier une image montrant des paquets de 10 bâtons et des bâtons libres et les élèves devaient trouver combien il y avait de « dix » et combien de « un » pour ensuite l'écrire. D'autres exercices étaient présentés aux élèves pour les amener à comparer des quantités ou à dire s'il s'agissait de nombres pairs. À la fin de la séquence, de nouvelles images de matériel étaient proposées aux élèves pour leur permettre, par exemple, d'associer des images de boîtes de crayons avec de la monnaie (une boîte de 10 crayons coûte dix cents).

Pour l'addition et la soustraction, les chercheurs ont eu recours à la même structure. Le travail fait avec les groupes expérimentaux commençait par un problème posé aux élèves au moyen d'un matériel concret. Il y avait ensuite un échange de stratégies utilisées pour résoudre le problème et pour arriver à la notation symbolique de la solution. Dans le cahier, pour les groupes contrôles, c'était aussi sensiblement la même démarche que lors du travail fait par rapport à la valeur de position. Des images montrant du matériel demandaient à l'élève d'écrire symboliquement ce qu'il trouve et plusieurs autres exercices.

Ils ont comparé la performance des élèves ayant vécu les différents types d'enseignement. Ils ont donc fait un prétest et trois posttests (fin de l'automne, hiver et printemps). Ils ont aussi rencontré douze élèves en entrevues, deux élèves en provenance de chaque groupe. Les questions du prétest portaient sur l'écriture des nombres, le comptage par bons de un et de dix, le groupement des objets, l'addition et la soustraction de nombres à un et deux chiffres. Dans les posttests 1 et 2, les questions portaient sur les mêmes concepts, à la différence du test 3 qui lui avait des questions sur les additions et les soustractions impliquant des retenues ou des emprunts.

En entrevue, des tâches de comptage un à un et avec des paquets de dix ont été proposées aux élèves. Ils ont été questionnés sur l'écriture symbolique et sur la résolution de problèmes d'addition et de soustraction. Les élèves ne pouvaient pas manipuler de matériel et il leur était demandé d'expliquer pourquoi ils effectuaient leurs opérations de telles manières et comment ils avaient obtenu la réponse.

Beaucoup d'information a été obtenue à partir des tests; les auteurs mentionnent qu'il était difficile de comparer les résultats parce que beaucoup de variables sont en jeu, dont les caractéristiques des élèves (il y a des élèves forts dans les groupes qui n'ont pas vécu l'expérimentation). Ils ont tout de même pu observer que les démarches de résolution du groupe expérimental étaient plus avancées que celles du groupe contrôle. Ils ont pu tirer cette conclusion parce qu'ils ont d'abord constaté que les élèves des groupes expérimentaux arrivaient, en plus grande proportion, à résoudre des problèmes demandant un haut niveau de compréhension de la valeur de position. Par exemple, pour additionner 26 à 37, la stratégie la plus commune utilisée par les élèves des groupes expérimentaux était d'additionner d'abord les dizaines et ensuite les unités pour faire 20 + 30 et ensuite 6 + 7 pour arriver à 53. Ils arrivaient donc à traiter les dizaines et les unités comme des parties d'un nombre qu'on peut ensuite combiner.

De plus, ils ont constaté qu'il y a une différence marquée entre les deux groupes pour les questions portant sur l'addition et la soustraction impliquant des retenues et des emprunts, concept qui n'avait été enseigné dans aucun groupe. Il s'agissait donc d'une nouvelle sorte de question. Les auteurs émettent l'hypothèse qu'un enseignement basé sur la construction des concepts pourrait permettre le développement d'une pensée mathématique plus flexible. Les élèves ont été capables d'utiliser leurs connaissances sur la valeur de position et sur l'addition et la soustraction et de transférer le tout pour comprendre une nouvelle situation. Pour leur part, les élèves des groupes contrôles manifestaient plutôt une pensée rigide. Les réponses aux questions des élèves rencontrés en entrevue renforcent ce constat. Les élèves des groupes expérimentaux trouvaient plus d'une stratégie tandis que les élèves des groupes contrôles n'avaient qu'une façon de trouver la solution. Enfin, selon Hiebert et Wearne (1992), il est possible de faire un enseignement basé sur la construction de concept, ce dernier facilite la compréhension et le développement d'une pensée flexible en mathématique. Enfin, moins de temps passé aux exercices répétitifs ne semble pas avoir eu d'impact sur la performance des élèves.

Cette étude leur a permis de réaliser trois constats. Premièrement, le matériel n'est pas utilisé de la même façon dans les deux approches d'enseignement étudiées par Hiebert et Wearne (1992). Dans la première, il est présent au départ et accompagne l'élève dans la construction de sa représentation interne tandis que dans la deuxième, il sert de support à l'image lorsque l'élève n'a pas compris au départ. Deuxièmement, le temps passé à discuter sur les problèmes n'est pas le même. Dans la première, beaucoup de temps est accordé à cette étape, tandis qu'il n'y en a pratiquement pas dans l'enseignement plus traditionnel qui a eu lieu pendant leur expérimentation. Enfin, ils en sont venus à questionner la cohérence entre les leçons présentées dans le manuel. En effet, les chercheurs ont choisi, lors de leur expérimentation, de suivre la progression du contenu du cahier, mais ils auraient aimé avoir plus de temps pour certains apprentissages comme le passage à la dizaine. Ils en sont venus à conclure que le changement d'une activité à l'autre proposé dans le manuel représentait une coupure artificielle, qui ne favorisait pas le développement de la compréhension.

De ces recherches s'intéressant à l'enseignement de la numération nous retenons l'importance du recours aux modes de représentations externes concrets et imagés, à travers des tâches riches et variées, pour développer le sens du nombre. Ces études ont permis de constater qu'une trop grande insistance sur le mode de représentation externe symbolique nuit à la compréhension (Bednarz et Dufour-Janvier, 1984b, 1986; Bruner,1966; Lyons 1982, Hierbert et Wearne, 1992). De plus, il est recommandé d'utiliser du matériel concret et imagé pour aider les élèves à mieux comprendre les concepts mathématiques et de le faire à travers des situations problèmes permettant les manipulations de matériel. Ces manipulations, à travers la résolution d'un problème qui demande à l'élève de réfléchir et à travers le questionnement que fait l'enseignant sur cette action, le conduisent à se créer des images mentales des quantités. Le matériel, grâce à la tâche proposée, accompagne ainsi l'élève dans la construction de sa représentation interne (Hiebert et Wearne, 1992). Thomas et coll. (2002) soulignent que les élèves qui performent le mieux dans leurs expérimentations sont les élèves qui se construisent des représentations mentales imagées et dynamiques. Le lien avec le mode symbolique, une fois ces images construites, est beaucoup plus accessible aux élèves (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986; Hiebert et Wearne, 1992). Le matériel de manipulation et les représentations imagées sont donc importants pour la compréhension de la numération de même que des contextes et des tâches d'apprentissage riches. Par les exigences de la tâche, le matériel doit devenir encombrant pour inciter le passage vers un autre type de représentation (symbolique). L'importance des discussions par rapport aux choix de stratégies de résolution des élèves et par rapport au matériel utilisé et à la façon d'utiliser ce matériel pour résoudre les problèmes est aussi à retenir. Ces discussions permettent en effet aux élèves d'apprendre d'autres stratégies ou confronter les leurs; elles permettent de consolider les apprentissages (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984b; Hiebert et Wearne, 1992).

La présente section permet d'identifier certaines conditions à mettre en place en enseignement pour favoriser la compréhension de la numération. Cependant, les recherches présentées ne s'intéressent pas à ce qui pourrait être réalisé en amont avec les élèves pour les préparer à aborder les notions de groupement. Dans la problématique, il a été mentionné que Bednarz et Dufour-Janvier (1984a, 1984b, 1986) avaient travaillé sur le sens du nombre avec les élèves, mais qu'elles n'avaient pas documenté leurs actions. Des recherches s'intéressant à l'enseignement du sens du nombre pourraient permettre d'identifier les conditions à mettre en place en enseignement pour favoriser le développement du sens du nombre avant d'aborder les notions de groupement et pourraient combler ce manque. Nous en présentons une dans la prochaine section.

2.3.2 L'enseignement du sens du nombre

Cette section, comme la précédente, tente d'apporter des éléments de réflexion visant à répondre à la question générale de recherche. En effet, elle vise à documenter l'état de question liée aux conditions à mettre en place pour favoriser le développement du sens du nombre et de la numération. Nous avons retenu l'étude de Jordan et Dyson (2016) parce qu'elle inclut un travail sur les aptitudes de subitisation des élèves dans leur démarche menant à une meilleure compréhension de la numération.

Jordan et Dyson (2016) ont mené une étude ayant pour objectif de tester des interventions visant le développement du sens du nombre qu'elles associent à trois axes : le nombre, les relations entre les nombres et les opérations sur les nombres. Elles reconnaissent le rôle des aptitudes de subitisation dans le développement du sens du nombre chez les enfants de 3 à 6 ans comme tremplin pour une meilleure compréhension des relations entre les nombres et une meilleure compréhension des opérations sur les nombres.

La recherche a duré quatre ans. Pour les deux premières années, les participants de cette étude étaient 128 élèves du préscolaire provenant de cinq écoles situées dans des quartiers défavorisés. Pour les deux années suivantes, elles ont sélectionné 121 nouveaux élèves. Cette fois, les chercheures ont choisi des élèves qui avaient obtenu un faible résultat à un test portant sur le sens du nombre. Ces élèves étaient de niveau préscolaire et 1re année.

Les interventions ont eu lieu avec des petits groupes de quatre élèves. Les intervenants étaient des étudiants gradués. Les élèves ont eu vingt-quatre rencontres, soit trois par semaine, durant huit semaines. Chaque leçon durait trente minutes. Les intervenants participant à la recherche avaient une rencontre chaque semaine avec les chercheures pour répondre à leurs questions et pour apprendre les contenus de la semaine suivante.

Des groupes contrôles ont été constitués. Durant la première année, les élèves du groupe contrôle étaient des élèves qui recevaient un enseignement normal. Les auteurs qualifient ce groupe de « buisiness as usual ». Durant la deuxième année, un groupe contrôle d'élèves participant à la lecture d'une histoire en petits groupes a été formé afin de contrôler la variable « travail en petits groupes ». Durant la troisième année, ce type de groupe contrôle a été maintenu, mais l'histoire racontée était en lien avec le sens du nombre. Durant la quatrième année, les auteurs ont comparé les résultats de deux groupes expérimentaux mettant en place différentes tâches pour les 5 dernières minutes de la rencontre (jeu de société sur la droite numérique et jeux à l'aide des constellations pour apprendre la droite numérique). Les résultats de ces deux groupes étaient comparés à un groupe contrôle qui recevait l'enseignement régulier.

Le contenu des rencontres entre les intervenants et les élèves était planifié selon quatre axes : 1) rendre explicite les liens entre les différentes représentations d'un nombre (le nom, la façon de l'écrire et une représentation visuelle); 2) faire constater les relations d'ordre entre les nombres (plus grand, plus petit, un de plus, un de moins, etc.); 3) présenter le tout sous forme de jeu pour maintenir l'attention et la motivation des élèves et 4) encourager les élèves à répondre rapidement aux questions. Les concepts abordés à travers ces rencontres étaient le nombre, les relations entre les nombres, les opérations sur les nombres, l'apprentissage de la chaîne numérique. Pour travailler sur les nombres, les élèves ont travaillé à partir de la boîte de 10 et des doigts. Il leur était demandé combien de points il y avait dans la boîte de 10 ou combien de doigts il était possible de voir sur une image. Pour travailler les relations entre les nombres, les élèves utilisaient des cartes comme celle de gauche de la figure 2.13. Ils pouvaient alors comparer les nombres entre eux. Des questions comme « lequel est le plus grand » leur étaient posées. Pour travailler sur les opérations, les élèves devaient représenter une phrase mathématique à l'aide de cercles. Par exemple, pour faire 4 + 1, ils

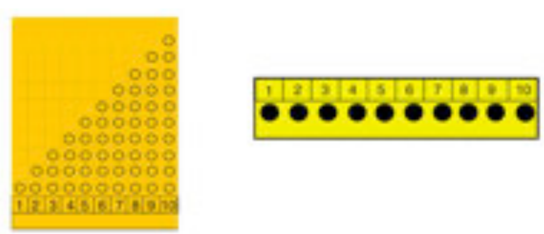


Figure 2.13
Cartes utilisées pour démontrer les relations un de plus et un de moins entre les nombres
Jordan et Dyson, 2016, p. 71

devaient faire 4 cercles et un autre à côté. Finalement, pour travailler la chaîne numérique, ils ont joué à un jeu de tables avec un dé et ils devaient compter le nombre de déplacements du pion en ajoutant toujours les résultats du dé. Par exemple, au premier tour, ils avaient un 3 et au deuxième tour un 4. Au moment de déplacer le pion au deuxième tour, ils devaient dire 4, 5, 6, 7.

Afin de mesurer les effets de ces interventions, deux outils de mesure différents ont été utilisés. Les chercheures ont eu recours à une tâche qu'elles ont créée qui évalue le sens du nombre des élèves. Cette tâche porte sur les habiletés de comptage séquentiel, l'écriture des nombres, l'ordre des nombres et les petites additions. Elle a été utilisée en prétest et en posttest immédiat. Elles ont aussi évalué les connaissances générales des élèves en mathématiques à l'aide d'outils utilisés en classe. Finalement, elles ont mesuré la capacité d'attention des élèves.

Les résultats des deux premières années d'expérimentation au posttest ont démontré que les élèves ayant participé au projet avaient une meilleure compréhension du nombre et des mathématiques en général que ceux des groupes contrôles. En effet, les scores des élèves des groupes contrôles au test portant sur le sens du nombre étaient de 50 % au prétest et de 68 % au posttest immédiat contre 45 % à 74 % pour les groupes expérimentaux. L'analyse des caractéristiques des élèves qui ne se sont pas beaucoup améliorés leur a permis de constater que ces derniers ne possédaient pas les connaissances numériques de base. Par exemple, ils n'arrivaient pas à reconnaître et nommer les quantités deux ou trois.

Les chercheures ont donc adapté leurs interventions et la sélection des élèves pour les deux dernières années d'expérimentation en ciblant les élèves des groupes expérimentaux qui n'avaient pas assez développé les connaissances de base. Elles ont utilisé la même méthodologie de recherche, soit la même séquence pour les activités. Elles ont aussi utilisé les mêmes outils d'évaluation, soit le prétest et le posttest immédiat. Elles ont ajouté un posttest différé. Elles ont utilisé cependant deux types de groupes expérimentaux afin de mieux comprendre les interventions à favoriser pour amener les élèves à développer leur sens du nombre. Dans le premier, les élèves ont joué à un jeu de société leur donnant l'occasion de travailler avec la droite numérique. Des activités papier-crayon visant l'apprentissage de la droite numérique ont aussi eu lieu.

Dans le deuxième groupe expérimental, les élèves ont d'abord eu l'occasion de reconnaître la quantité d'objets dans de petits arrangements (1 à 4 éléments) et d'y associer le mot-nombre (subitisation perceptuelle). Les chercheures ont aussi renforcé l'utilisation de la représentation des nombres sur une ligne numérique avec des points en dessous comme sur l'image de la figure 2.13. Elles ont travaillé la groupitisation[4] avec les cartes à points et les boîtes de dix, mais les utilisaient surtout pour soutenir le comptage un à un pour les collections plus grandes que cinq. Elles voulaient renforcer le comptage terme à terme et éventuellement l'acquisition du principe de cardinalité. Les constellations étaient donc utilisées pour apprendre la chaîne numérique. Voici un exemple de séquence d'enseignement qui était proposé :

1) subitiser zéro, un et deux;
2) construire une collection de deux éléments;
3) constater que deux est « un de plus » que un;
4) compter deux doigts;
5) montrer un ou deux doigts sans compter;
6) constater que un et un font deux;
7) écrire la phrase mathématique associée à ce constat;
8) compléter des phrases mathématiques associées à ce constat.

À la suite des deux années d'intervention, elles ont constaté que les élèves des groupes expérimentaux avaient de meilleures performances que les élèves des groupes contrôles sous tous les aspects évalués dans le pré/posttest. Elles ont aussi constaté que les élèves qui avaient seulement travaillé sur la droite numérique avaient des résultats inférieurs à ceux des élèves qui avaient travaillé à partir des représentations imagées des petites quantités. Les auteures en concluent que certains élèves ont besoin de travailler sur les petites quantités avec des activités de subitisation et de groupitisation. Elles ont aussi constaté l'importance du mode de représentation externe imagé dans la réussite des élèves. Elles se sont rendu compte de l'importance du « sous-sol » dans leur modèle. Cependant, les activités de subitisation et de groupitisation qu'elles ont utilisées visaient le développement des habiletés de comptage séquentiel et ne visaient pas le développement d'une représentation mentale imagée et dynamique. Il a été établi dans le présent chapitre que la

[4] Nous privilégierons le mot « groupitisation » à l'expression « reconnaissance globale ». Cependant, les deux mots sont interchangeables.

compréhension de la numération passait par la création de telles représentations mentales. Les activités proposées dans cette séquence d'enseignement favorisaient donc moins le développement de la compréhension de la numération.

Dans la prochaine section, une exploration de conditions d'enseignement et d'outils didactiques à utiliser pour développer les habiletés de groupitisation et permettre le développement de représentations dynamiques et imagées appuyées sur ces habiletés seront explorées. Il n'y a, à notre connaissance, aucune étude s'étant intéressée aux conditions à mettre en place pour favoriser l'enseignement et le développement des habiletés de groupitisation et leur flexibilité. Il n'y a que des études, comme celle de Jordan et Dyson (2016) qui les utilisent pour soutenir le comptage séquentiel ou des articles qui décrivent ce qu'est la reconnaissance globale. Cependant une étude s'est intéressée à la relation entre les habiletés spatiales et le sens du nombre pour permettre aux élèves de se construire une représentation mentale de la droite numérique. Elle est présentée dans cette section.

2.3.3 L'enseignement de la groupitisation

Dans la section précédente, une recherche de Starkey et McCandliss (2014) a été présentée. Ces chercheurs démontrent que lorsque la quantité est représentée en petits groupes, il est possible de la compter plus rapidement et plus efficacement. Cependant, l'idée d'organiser les collections de différentes façons existe depuis longtemps dans l'enseignement des mathématiques (Bergeron, 2003; Brissiaud, 2005). Les activités de groupitisation peuvent présenter des quantités organisées selon des constellations stéréotypées comme celles que l'on retrouve sur le dé, sur les cartes à jouer ou sur les dominos (figure 2.14), qui sont facilement reconnues. D'autres constellations, moins stéréotypées existent et elles peuvent soutenir le développement de la flexibilité nécessaire à un bon sens du nombre (Bergeron, 2003).

Figure 2.14
Exemple de constellations stéréotypées

La boîte de dix est une constellation de plus en plus populaire. Les points y sont placés sur deux colonnes. La figure 2.15 présente deux exemples de constellations. Il est possible de reconnaître les quantités sans avoir à les

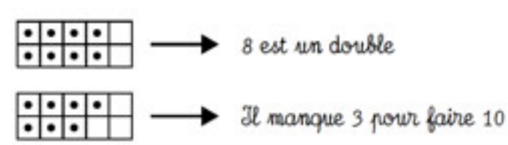


Figure 2.15
Exemple de boîtes de 10
Bergeron, 2003, p.15

compter ou les recompter un à un chaque fois (Losq, 2005). Cette façon de traiter les quantités permet donc de rendre visuelle une addition (par exemple ici 4 + 4 = 8), de mettre en évidence certaines propriétés des nombres (la parité, les complémentaires de dix, etc.), d'aider la mémorisation (récupération rapide, sans effort). Cela constitue un levier pour la construction de la numération (une boîte de dix est une dizaine) (Losq, 2005). Le cadre de la boîte de dix ajoute une souplesse aux constellations classiques en permettant une manipulation des points selon les opérations demandées (Bergeron, 2003). Par exemple, dans une boîte de dix, le recours à la compensation peut être intéressant. En effet, il est facilement possible de voir que pour représenter 9, il manque un point dans la boîte. Ainsi, pour faire 9 + 6, il sera possible de déplacer un point de la boîte qui en contient 6 pour le placer dans la boîte qui en contient 9. Il y a maintenant une boîte de 10 pleine et une boîte avec 5 points.

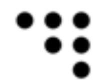


Figure 2.16
Exemple de constellation non conventionnelle

Les élèves peuvent aussi s'appuyer sur des objets ou des formes connues (une image globale) pour construire leur représentation mentale de la constellation, particulièrement lorsqu'il s'agit d'une constellation non prototypique (Braconne-Michoux et Marchand, 2021). Par exemple, pour la constellation présentée à la figure 2.16, certains pourraient dire qu'ils voient un escalier à l'envers. Il est aussi possible d'amener les élèves à décrire ce qu'il voit de manière opératoire. Par exemple, dans la constellation de la figure 2.16, ils pourraient dire qu'il y a un, avec deux, avec trois ou après un déplacement mental, dire qu'il y a deux rangées de trois. Clements (1999) parle alors d'un comptage « global », par opposition au comptage séquentiel dans lequel tous les éléments sont énumérés un à un.

Cette souplesse de représentation favorise le développement de la flexibilité qui enrichit le sens du nombre (Brissiaud, 2005). Il ne s'agit donc pas simplement de reconnaître une constellation, mais bien de jouer avec différentes dispositions, les différentes structurations spatiales (Braconne-Michoux et Marchand, 2021). C'est ce qui soutiendra éventuellement les habiletés de calcul (Brissiaud, 2005). Cette flexibilité palliera certaines difficultés fréquemment rencontrées par les élèves (Brissiaud, 2005; Fayol, 2012), comme le rappel de faits numériques en addition et en multiplication. En effet, l'élève disposera d'une image mentale de la quantité avec laquelle il pourra opérer mentalement, une représentation imagée et dynamique.

Les habiletés de groupitisation semblent aussi liées avec les habiletés spatiales (Braconne-Michoux et Marchand, 2021; Clements et Battista, 1992). En effet, pour arriver à se représenter mentalement les points de la figure 2.16, il semble falloir être capable de les placer dans sa tête en respectant leur position dans l'espace (Clements et Battista, 1992). La pensée spatiale ou le raisonnement spatial considèrent la position et le déplacement d'objets et de soi, soit mentalement ou physiquement, dans l'espace. Il ne s'agit pas d'une procédure ni d'une habileté, mais d'un nombre important de concepts, d'outils et de procédures (Gouvernement de l'Ontario, 2014). Le champ de recherches s'intéressant au rôle des habiletés spatiales ou à la pensée spatiale dans le développement du potentiel mathématique des élèves est actuellement en essor (Braconne-Michoux et Marchand, 2021; Marchand, 2020). Les liens entre les habiletés spatiales et l'apprentissage des mathématiques, dont l'arithmétique, commencent à peine à être compris (Gouvernement de l'Ontario, 2014). Toutefois, plusieurs s'entendent pour dire que les habiletés des élèves à utiliser des représentations non verbales des quantités, sous-entendant qu'elles sont imagées, sont associées à la réussite en mathématiques (Hawes et coll., 2009 ; Jordan et coll. 2003 ; National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2006; Newcombe, 2010). Il n'existe cependant pas, à notre connaissance, de recherche s'étant intéressée aux liens entre les habiletés spatiales des élèves et leur capacité de se représenter mentalement des constellations ni entre le rôle des habiletés de groupitisation et le développement du sens du nombre et de la numération. Cependant, les recherches de Gunderson et coll. (2012) s'en approchent, en ce sens qu'ils se sont intéressés au rôle des habiletés spatiales dans la réussite en mathématiques, plus particulièrement dans la capacité de se représenter la droite numérique mentalement.

Gunderson et coll. (2012) ont mené deux études longitudinales. Dans la première, 152 élèves de 2^{e} et 3^{e} année provenant de cinq écoles publiques ont été rencontrés en début et en fin d'année. Le but était de mesurer les progrès en mathématiques chez les élèves après deux ans d'enseignement régulier. Les évaluations ont eu lieu sous forme d'entrevues individuelles. Une première tâche portait sur la connaissance de la droite numérique, de 0 à 1000. Une droite numérique non graduée était présentée aux élèves et ces derniers devaient placer les nombres qui leur étaient donnés au bon endroit sur la droite. La deuxième tâche évaluait les habiletés spatiales. Un carré était montré aux élèves. Une forme ressemblant à un morceau de casse-tête y avait été enlevée. Les élèves devaient choisir parmi les morceaux de casse-tête qui leur était montré celui qui venait compléter la forme. Le tout était présenté dans le mode de représentation imagé. Pour y arriver, les élèves devaient manipuler la forme dans leur tête puisqu'elle n'était pas présentée dans la bonne position sur la feuille et qu'ils ne pouvaient pas la manipuler (épreuve de rotation de figure). Les habiletés de lecture et les compétences mathématiques en général étaient aussi évaluées avec des épreuves standardisées.

À la suite de la deuxième entrevue, en fin d'année, les chercheures ont pu constater que la performance des élèves à la tâche de la droite numérique en début d'année était un prédicteur de leur performance à la fin de l'année. Elles ont aussi constaté que les habiletés spatiales, mesurées dans l'épreuve de rotation de figure, sont un important prédicteur du niveau des habiletés numériques reliées à la droite numérique. De plus, en comparant les résultats des élèves ayant la même performance par rapport à la droite numérique en début d'année, elles ont été capables de voir que ceux qui avaient le plus amélioré leurs performances dans l'utilisation de la droite numérique étaient les élèves qui avaient le mieux réussi l'épreuve des habiletés spatiales en début d'année. Ces résultats leur font dire que les habiletés spatiales jouent un rôle important dans la réussite en mathématiques, et plus particulièrement par rapport à l'utilisation de la droite numérique.

Dans leur deuxième étude, Gunderson et coll. (2012) ont travaillé avec 42 élèves, de la maternelle à la 2^{e} année. L'étude s'est déroulée sur trois ans. Elles ont réalisé des entrevues au domicile des élèves à raison de trois ou quatre rencontres par élèves. Elles ont rencontré les élèves lorsqu'ils étaient au préscolaire, en première année et en deuxième année. Elles ont utilisé des tâches semblables à celles utilisées lors de la première étude, sauf qu'elles ont ajouté deux tâches de calcul, une dans laquelle les nombres sont présentés avec des symboles et l'autre dans laquelle les nombres sont présentés avec des nuages de points. Elles ont aussi ajouté une tâche portant sur le vocabulaire. Les résultats obtenus ont montré une grande variabilité dans les performances des élèves. Elles ont donc décidé de comparer les résultats des élèves en prenant leur performance dans la tâche portant sur le vocabulaire comme point de référence puisque ce type de résultat est souvent utilisé comme point de repère dans les tâches évaluant les habiletés cognitives en général. Elles en sont ainsi venues à constater que les habiletés spatiales et les connaissances du vocabulaire jouent un rôle important dans la réussite des calculs impliquant des représentations symboliques alors que seulement les habiletés spatiales étaient d'importants prédicteurs des habiletés de calcul non symbolique, comme le comptage avec du matériel ou des dessins.

Les habiletés spatiales semblent donc liées à la construction de représentations mentales. Yackel et Wheatley (1990) ont travaillé sur la construction de représentations mentales chez les élèves, mais à partir des pièces du tangram. Ils ont proposé deux tâches dans lesquelles ils demandaient aux élèves de reproduire l'image des pièces de tangram qui leur était montrée (dessin). Dans la première tâche, les élèves manipulaient les pièces du tangram et dans la deuxième tâche, ils reproduisaient le dessin seulement. L'image de départ était montrée durant 3 secondes. Les élèves avaient ensuite une minute pour manipuler leurs pièces (tâche 1) ou pour faire leur dessin (tâche 2) et l'image était remontrée une deuxième fois durant 3 secondes pour permettre aux élèves d'ajuster leurs réponses. Des discussions sur les stratégies élaborées par les élèves ont aussi eu lieu. Ce travail, de même que les discussions, ont permis aux élèves, selon les auteurs, de développer un meilleur vocabulaire associé aux dispositions spatiales et d'améliorer la construction de leurs images mentales. Ils n'ont pas fait de mesures statistiques, mais ils ont pu observer que les élèves avaient fait des progrès importants sur ces deux éléments (les dessins étaient plus structurés et les descriptions des élèves étaient plus précises). Il serait donc possible de penser que le fait de demander aux élèves de reproduire un arrangement en absence de la représentation externe en limitant le temps d'observation aide à la construction de représentation mentale imagée (Marchand, 2020; Yackel et Wheatley, 1990). Les discussions entre les élèves sont un autre élément important menant à cette construction.

Compter, lorsque les éléments sont organisés en petits groupes (Starkey et McCandilss, 2014), est plus rapide. L'idée de placer les points pour mieux les compter existe depuis longtemps et les recherches disent que les habiletés des élèves à utiliser des représentations non verbales des quantités sont associées à la réussite en mathématiques. Jordan et coll. (2003) et Gunderson et coll. (2012) ont en effet constaté que les habiletés spatiales jouaient un rôle important dans cette réussite. Avoir une limite de temps aide à la construction de ces représentations mentales puisqu'elle les rend nécessaires à la résolution de la tâche. Les échanges et les discussions sur les stratégies utilisées lors de la réalisation des activités semblent aussi faciliter cette construction.

La prochaine section présente une synthèse des travaux qui ont permis de mieux comprendre les conditions favorisant le développement cognitif du sens du nombre.

2.3.4 Synthèse des conditions favorisant le développement cognitif du sens du nombre

La compréhension du système de numération s'appuie sur la construction de représentations mentales dynamiques et imagées, à travers des tâches riches et variées qui permettent à l'élève de se questionner et d'ajuster ses représentations (Braconne-Michoux et Marchand, 2021). Les études présentées dans cette partie ont permis aux élèves de développer des composantes du sens du nombre rejoignant celles présentées par Reys (1994) et donc de développer une flexibilité dans la représentation externe et interne des nombres de même que dans les opérations.

Les études de Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) montrent que pour permettre aux élèves de se construire ces représentations mentales, il importe de leur présenter des problèmes impliquant le recours au matériel concret ou imagé. Il est aussi important de se servir du matériel comme levier à la compréhension et non comme outil pour simplement introduire les représentations symboliques.

Les études de Hiebert et Wearne (1992) sont venues préciser ces constats en démontrant que lorsque les élèves ont une représentation mentale flexible, ils sont capables de réussir des tâches pour lesquelles ils n'ont jamais reçu d'enseignement en s'appuyant sur leurs connaissances du système de numération. Cependant, ces auteurs ne se sont pas positionnés sur ce qui pouvait être travaillé en amont pour aider les élèves à mieux comprendre le système de numération.

Jordan et Dyson (2016) se sont penchées sur les conditions à mettre en place pour favoriser le développement du sens du nombre chez les élèves du préscolaire et du début du primaire. Leurs études leur ont permis de constater l'importance des capacités de subitisation et de groupitisation dans le développement du sens du nombre, mais elles ont seulement étudié l'importance de la subitisation et de la groupitisation dans la connaissance de la chaîne numérique. Elles n'ont pas mesuré l'impact de ces capacités sur la réussite des élèves par rapport au système de numération. Enfin, constatant le rôle des aptitudes de subitisation dans la réussite des élèves dans l'apprentissage de la chaîne numérique ou dans la comparaison des nombres, nous nous sommes penchées sur l'enseignement de la groupitisation, qui tire profit des aptitudes de subitisation. Nous n'avons trouvé aucune recherche s'intéressant à ce sujet de façon précise, mais les travaux de Gunderson et coll. (2012) qui s'intéressent au rôle des habiletés spatiales dans la construction d'une représentation mentale de la droite numérique s'en approche.

Bien que l'on sache que les habiletés spatiales jouent un rôle important dans la réussite en mathématique et dans la création de représentations mentales, et que l'on sache que les représentations mentales sont essentielles à la compréhension, il ne semble pas y avoir d'étude qui fasse de lien entre les aptitudes liées au tout début du sens du nombre et la compréhension du système de numération positionnel, en termes de développement cognitif. Plus spécifiquement, il ne semble pas y avoir de recherche qui s'intéresse au rôle des habiletés de groupitisation dans la création de représentations mentales dynamiques et imagées menant à la compréhension du système de numération. Enfin, il ne semble pas y avoir d'étude s'intéressant aux conditions à mettre en place pour favoriser le développement de ces représentations mentales. L'exploration d'activités de Yackel et Wheatley (1990) permet cependant d'identifier que le fait de limiter le temps que les élèves ont pour observer une figure les conduit à la construction de représentations mentales imagées plus structurées. Les discussions entre les élèves facilitent aussi cette construction.

La synthèse présentée dans la prochaine section permettra de présenter tous les éléments abordés dans le cadre théorique afin de pouvoir dégager les éléments fondateurs de la méthodologie à mettre en place pour cette étude. À la fin de la synthèse, les objectifs spécifiques qui en découlent seront présentés.

2.4 Synthèse du cadre conceptuel et objectifs spécifiques de recherche

Le sens du nombre est un élément clé de l'apprentissage de l'arithmétique au primaire. Il se caractérise non pas par l'apprentissage de techniques ou de routines, mais plutôt par une flexibilité dans la manipulation des nombres qui traduit une véritable compréhension du concept de numération. Une bonne compréhension du sens du nombre est nécessaire pour manipuler les nombres selon les opérations demandées, pour estimer une réponse ou encore pour inventer des procédures de calcul (Reys, 1994). Or, certains élèves de 3^{e} année semblent toujours éprouver des difficultés à comprendre ce concept de numération. En regardant les résultats de la recherche de Koudogbo (2017), il semblerait que les élèves ayant reçu un enseignement de Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986, 1988) sont en mesure de faire des progrès et de démontrer avec clarté l'état de leurs habiletés. Les auteures n'ont pas transmis d'information par rapport à ce qui est travaillé, mais il est connu qu'elles ont travaillé en amont de la numération.

Le sens du nombre est quelque chose qui se développe dès un très jeune âge (Clements, 1999; Dehaene, 2003; Starkey et Cooper, 1980; Wynn, 1992 a, 1992b). Il semble donc important de documenter ce développement pour pouvoir situer les élèves par rapport à leur compréhension du nombre et de la numération et ensuite mettre en place les interventions adéquates.

Ce deuxième chapitre a d'abord permis de présenter ce qu'est la numération. Il s'agit d'un système organisé qui permet de représenter et de manipuler de grandes quantités. La numération se caractérise par quatre principales caractéristiques : la position, l'équivalence, le groupement et son aspect multiplicatif et additif. L'idée d'une notation mixte, qui a existée dans l'histoire des numérations et qui existe encore chez les Chinois par exemple, et qui facilite le passage vers une notation positionnelle a aussi été abordée. Ce que signifie comprendre un concept mathématique tel que la numération a été précisé. Il s'agit, entre autres, de se faire des représentations mentales justes de ce système de numération (Duval, 1996; Hiebert et Wearne, 1992). Les représentations mentales les plus efficaces semblent être les représentations imagées et dynamiques.

Ensuite, dans la deuxième partie de ce chapitre, des recherches s'étant intéressées à certaines étapes du développement cognitif lié à cette compréhension ont été explorées. La présentation de ses recherches et leur mise en commun a permis l'élaboration d'une hypothèse d'un continuum du sens du nombre et de la numération.

Au-delà de ce continuum, nous retenons de cette deuxième partie que :

- le sens du nombre est présent chez les nourrissons et se caractérise, entre autres, par la capacité de subitiser jusqu'à 4 éléments;

- lorsque les quantités augmentent, un besoin d'organisation s'impose pour compter. Deux options sont possibles : un comptage un à un ou séquentiel et un comptage plus global, par la groupitisation;
- ces habiletés se développent autour du préscolaire et du début de la 1re année (Clements, 1999; Fuson, 1990);
- la reconnaissance de la pertinence du groupement est un élément clé de la compréhension du système de numération qui se développe autour de la fin de la 1re année et du début de la 2^{e} année;
- il semble y avoir un lien entre les habiletés de groupitisation et le groupement, mais ce lien n'est exploité, à notre connaissance, par aucune recherche.

De la troisième section du chapitre portant sur les conditions à mettre en place pour l'enseignement du sens du nombre, nous retenons que :

- un bon sens du nombre est soutenu par une représentation interne imagée et dynamique des quantités;
- le passage au groupement étant quelque chose de difficile, il est important de travailler d'abord avec du matériel au groupement apparent et accessible, à partir de tâches qui mettent l'élève en action cognitivement;
- les activités doivent d'abord mettre de l'avant la manipulation de la quantité dans un mode concret ou imagé, dynamique, pour ensuite être associées au symbolisme ;
- les représentations externes doivent permettre une construction de sens et doivent donc se dérouler dans un environnement de résolution de problèmes ce qui permet de placer l'élève en situation de déséquilibre, l'amenant à modifier ses procédures et à raffiner ses connaissances. Pour reprendre l'expression de Conne (1999), il s'agit de lui « faire faire des mathématiques », à travers une tâche lui permettant d'abord d'explorer les quantités par du matériel concret puis de faire en sorte que le matériel devienne encombrant ou inutilisable. Les contraintes de la tâche le mènent ainsi vers la représentation symbolique de ces mêmes quantités;
- les élèves doivent être appelés à composer et à décomposer les nombres selon différentes contraintes (Brissiaud, 2005);

- il est aussi important de travailler de façon dynamique et simultanée le développement des habiletés de calcul et le développement de la compréhension du système de numération;
- pour maximiser les retombées des interventions auprès des élèves qui ont de la difficulté avec la numération, il est aidant de travailler leurs aptitudes de subitisation perceptuelle et de groupitisation (Jordan et Dyson, 2016);
- développer des habiletés spatiales, telles que la subitisation et la groupitisation, faciliterait la création d'une représentation mentale (Gunderson et coll., 2012);
- limiter le temps d'exposition aux différentes représentations externes facilite la création de représentations mentales (Marchand 2020, Yackel et Wheatley, 1990);
- les discussions entre les élèves à propos des stratégies employées pour réaliser la tâche favorisent le développement de leur compréhension de la numération;
- les élèves doivent avoir des occasions de s'entraîner à utiliser les nouvelles connaissances.

Sachant que le sens du nombre et de la numération est quelque chose qui se développe, sachant que ce développement s'appuie sur la construction de représentations mentales dynamiques et imagées, sachant que ces représentations peuvent s'appuyer, elles, sur les habiletés de groupitisation des élèves et sachant que les tâches mathématiques doivent d'abord se dérouler dans un environnement de résolution de problèmes menant à un déséquilibre pour mener ensuite à la compréhension et finalement permettre à l'élève de s'exercer à les utiliser, cette synthèse du chapitre du cadre conceptuel nous permet de poser nos objectifs spécifiques de recherche. Ils sont présentés dans la prochaine section.

2.4.1. Objectifs spécifiques de recherche

La présente recherche se veut une recherche-développement. Elle s'appuie sur le modèle proposé par Harvey et Loiselle (2009). Ainsi, les origines de la recherche ont été établies à partir de la problématique présentée dans la première section. Cette problématique a conduit à des questions spécifiques de recherche. Par la suite, le référentiel théorique a été construit en faisant la recension des écrits. Cette recension a permis l'établissement d'un continuum du développement cognitif du sens du nombre et de la numération qui lie les aptitudes arithmétiques des tout-petits à la compréhension de la valeur de position de la numération, à travers la construction des représentations dynamiques et imagées des quantités.

Elle a aussi permis d'identifier les conditions favorisant le développement du sens du nombre. L'objet qui sera élaboré s'appuie sur ce continuum et sur les conditions en favorisant le développement.

Ainsi, les objectifs spécifiques de cette recherche sont de :

1. concevoir un outil d'évaluation du développement du sens du nombre et de la numération ainsi qu'une séquence didactique, appuyés sur un continuum du développement cognitif du sens du nombre. Ces instruments s'adressent à des élèves de 7-8 ans. C'est en effet à cet âge que les élèves sont amenés à comprendre la numération. Ces instruments ont pour but de :
    - dépister les élèves susceptibles d'être à risque au moment d'entamer leur 3e année primaire sur le plan des apprentissages en arithmétique;
    - permettre aux élèves de développer une meilleure compréhension du sens du nombre et de la numération en leur donnant l'occasion de développer des représentations mentales dynamiques et imagées tirant profit de leurs habiletés de groupitisation et touchant à différentes facettes de la numération, en leur donnant l'occasion de vivre des activités liées à leur niveau de développement du sens du nombre;
2. vérifier la viabilité en contexte de l'outil d'évaluation et de la séquence didactique grâce aux commentaires, critiques et suggestions de professionnels de l'éducation dans la perspective de pouvoir utiliser cet outil et cette séquence en contexte réel de classe[5];
3. améliorer ces deux instruments à la suite de la vérification de la viabilité en contexte effectuée par les professionnels de l'éducation.

Dans le prochain chapitre, la méthodologie retenue sera présentée.

[5] Cet objectif a été ajouté en raison de l'impossibilité d'aller en classe pour expérimenter la séquence auprès des élèves. Il s'inspire des travaux de Desgagné et coll. (2001) par rapport à la recherche collaborative. Il ne s'agit donc pas seulement de développer des situations d'enseignement riches, mais aussi des situations qui soient « viables en contexte », c'est-à-dire, facilement reproductibles par les enseignants selon les caractéristiques et les contraintes de leur milieu (le déroulement de l'activité, soit avant l'activité, pendant l'activité et après l'activité (Daigle et Berthiaume, 2021), la clarté des consignes, le temps alloué, la facilité à réaliser cette activité, le matériel, le travail en grand groupe ou en équipes).

3. Méthodologie

Dans ce chapitre, nous présentons la méthodologie retenue pour atteindre les objectifs spécifiques de la recherche qui ont été présentés à la fin du chapitre précédent. Cette méthodologie tire profit de la synthèse des travaux présentés dans le cadre théorique. Cette synthèse a permis de déterminer des caractéristiques clés à considérer lors de la mise en place d'interventions ciblant le développement du sens du nombre et la construction d'une représentation interne imagée et dynamique de la quantité chez les élèves.

Puisque cette thèse s'inscrit dans une perspective de recherche-développement, la première partie de ce chapitre est consacrée à la description de ce courant de recherche. La deuxième est destinée à la description des instruments didactiques qui ont été construits. Il est plus particulièrement question des fondements qui ont permis la conception de ces instruments, soit un outil d'évaluation et d'une séquence d'activités. La validation interne du dispositif tire profit d'une analyse a priori (Artigue, 1990) qui s'inspire de l'ingénierie didactique. La troisième partie concerne les participants qui ont été ciblés pour cette recherche. Dans la quatrième partie, il est question de la démarche retenue pour la collecte de données. Enfin, la dernière partie est consacrée au traitement et à l'analyse des données qui a été effectuée.

3.1. La recherche-développement

Cette recherche s'inscrit dans le courant de la recherche-développement puisqu'elle vise l'élaboration de deux instruments, un outil d'évaluation et une séquence didactique. Ce type de recherche est essentiel pour développer un système d'enseignement et d'apprentissage qui soit rigoureux et économique, en temps et en frais divers (Van Der Maren, 1996). La recherche-développement crée des liens entre les théories de l'enseignement et les pratiques (Loiselle et Harvey, 2007). En contexte d'enseignement, ce type de recherche vise la conception d'un objet pédagogique en décrivant chacune des étapes menant à l'objet, de sa conceptualisation à sa validation externe. L'objet qui a été développé est constitué de deux instruments, soit, un outil d'évaluation et une séquence d'activités mathématiques.

La méthodologie retenue pour concevoir le prototype est celle de Harvey et Loiselle, (2009) et de Paillé (2007). La figure 3.1 présente ces deux modèles mis ensemble. Nous avons intégré les étapes de Paillé (2007) à la phase d'opérationnalisation de Harvey et Loiselle (2009); ce sont les cases gris foncé. Enfin, au haut de la figure 3.1, le chapitre dans lequel a été abordée chacune des étapes de la présente étude est précisé.

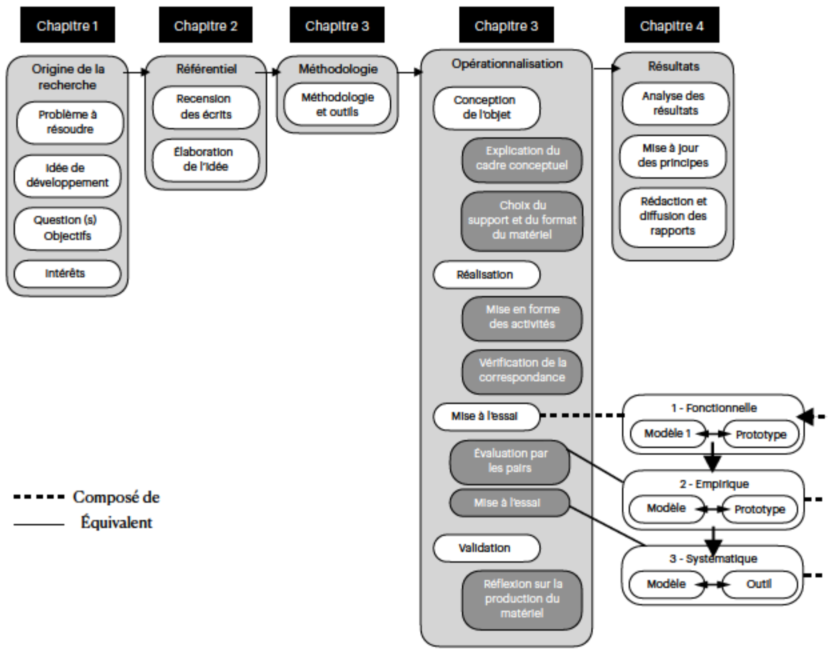


Figure 3.1 Modèle de recherche-développement de Harvey et Loiselle (2009) croisé avec les étapes de Paillé (2007)

Reprenons chacune des étapes du modèle de Harvey et Loiselle (2009) pour les lier à chacune des étapes de la réalisation de la présente étude. La première étape de ce modèle, l'origine de la recherche, a été élaborée dans le premier chapitre du présent document, soit la problématique (chapitre 1). Le problème à résoudre y a été présenté et la question de recherche a été formulée. Elle concerne le développement du sens du nombre et de la numération, de la petite enfance jusqu'à l'âge de 7-8 ans et les conditions qui favorisent ce développement.

La deuxième étape, le référentiel, constitue le cadre théorique de la recherche dans lequel les concepts permettant de répondre à cette question de recherche ont été déployés. Il s'agit du chapitre 2 du présent document. La recension des écrits a été présentée. Ce chapitre se termine avec la présentation des objectifs spécifiques de recherche. Il s'agit de concevoir un outil d'évaluation permettant de dépister les élèves susceptibles d'être à risque au moment d'entamer leur 3e année primaire sur le plan des apprentissages en arithmétique et de construire une séquence didactique permettant à ces mêmes élèves de développer une meilleure compréhension du sens du nombre et de la numération. Une analyse de la viabilité en contexte de ces instruments sera effectuée. Ils seront améliorés à la suite de cette vérification de la viabilité en contexte.

La troisième étape, la méthodologie, est l'objet du présent chapitre. Les méthodes de recherche retenues ainsi que les outils de collecte de données y sont décrits.

La quatrième étape, la phase d'opérationnalisation, sera également présentée dans le présent chapitre. Pour cette phase, étant donné que l'objectif est de produire et de vérifier la viabilité en contexte d'un outil pédagogique, le devis de recherche de type « production de matériel pédagogique » de Paillé (2007) servira de cadre de référence pour atteindre les objectifs, comme mentionné préalablement.

La première sous-étape de Harvey et Loiselle (2009) est la conception de l'objet. Pour Paillé (2007), cette sous-étape est elle aussi divisée en deux parties : l'explication du cadre conceptuel et le choix du format et du support du matériel. Pour l'explication du cadre conceptuel du matériel, un résumé du cadre conceptuel établi dans la présente recherche a été rédigé et se trouve au début du guide d'accompagnement des instruments destinés à l'enseignant (annexe 1). Pour le choix du support matériel et du format du matériel, ces choix ont été réalisés à partir des écrits présentés dans le cadre théorique. Pour le format du matériel, il a été établi, à la section 2.4, que les activités de résolution de problèmes allaient être privilégiées pour permettre le développement de la compréhension et que des activités permettant aux élèves de s'entraîner à utiliser ces connaissances allaient ensuite être exploitées. Toutes les activités de la séquence s'appuient sur le continuum établi. Pour le support du matériel, il a été mentionné, à la section 2.4, que le matériel à privilégier était du matériel offrant d'abord des représentations concrètes et imagées. L'utilisation de l'image virtuelle a été mise de l'avant.

La deuxième sous-étape de Loiselle et Harvey (2007) est la réalisation de l'objet. Pour Paillé (2007), il s'agit de la mise en forme des activités pédagogiques et de la vérification de la correspondance entre le matériel pédagogique et le cadre conceptuel. Cette phase a été réalisée à travers l'analyse a priori de chacune des activités de la séquence didactique. Elle est présentée à la section 3.3 du présent chapitre, dans laquelle les instruments conçus sont présentés.

La troisième sous-étape de Loiselle et Harvey (2007) est la mise à l'essai. Ces auteurs distinguent trois types de mise à l'essai : fonctionnelle, empirique et systématique. La mise à l'essai fonctionnelle a été réalisée à travers l'analyse a priori de chacune des activités. Cette analyse est présentée dans la section 3.2.3.2. Une mise à l'essai empirique a été réalisée auprès des professionnels de l'éducation, ce que Paillé (2007) définit comme la validation par les pairs. Le déroulement de cette évaluation est présenté dans le présent chapitre. Le troisième type de mise à l'essai, soit l'essai systématique, ou la mise à l'essai selon Paillé (2007), a été réalisé en partie seulement. En effet, l'outil d'évaluation a été expérimenté auprès d'élèves de trois groupes classes (N=67), mais la fermeture exceptionnelle des écoles durant plusieurs mois à cause de la pandémie de la COVID-19 a rendu impossible la mise à l'essai de la séquence didactique auprès d'élèves. L'outil d'évaluation et la séquence didactique ont donc été soumis à deux des trois étapes de la mise à l'essai menant à la validation.

La quatrième sous-étape de Loiselle et Harvey (2007) est la validation. Étant donné le contexte de la COVID-19, cette étape n'a pas pu se réaliser. Cependant, Paillé (2007) propose de terminer cette phase de conceptualisation par une réflexion sur la production de matériel pédagogique. Cette dernière est réalisée dans le dernier chapitre de ce travail, soit le chapitre de la discussion.

La quatrième grande étape du modèle de Loiselle et Harvey (2007) est l'analyse des résultats. Cette étape est présentée dans le chapitre 4.

Le cadre méthodologique sur lequel s'appuie cette recherche pour atteindre les objectifs spécifiques de recherche, soit la conception et l'évaluation d'une séquence didactique, a été établi. Les prochaines sections de ce chapitre présentent les mises à l'essai présentées dans la phase d'opérationnalisation, soit la mise à l'essai fonctionnelle et la mise à l'essai empirique. Habituellement, les participants sont présentés avant le dispositif, mais l'ordre a été modifié pour respecter les différentes phases de mises à l'essai.

Les aspects liés à la conception des instruments, plus particulièrement leur réalisation et leur analyse a priori seront abordés dans la prochaine section.

3.2. Les instruments créés (outil d'évaluation et séquence didactique)

Deux instruments ont été créés pour ce travail et soumis à des professionnels pour qu'ils en vérifient la viabilité en contexte. Ils sont constitués de deux composantes, une mesure évaluative nommée « outil d'évaluation » permettant l'évaluation des acquis ou le dépistage d'élèves pouvant éprouver des difficultés en mathématiques et une séquence didactique pouvant être mise en place pour intervenir auprès des élèves. Les instruments complets sont disponibles à l'adresse : https://videos.defimath.ca/these/, le mot de passe est : UdeM[6]. L'outil d'évaluation peut être administré en deuxième année ou au début de la troisième année pour dépister les élèves qui n'auraient pas acquis les concepts ciblés se rapportant au traitement du sens du nombre et de la numération. L'administration de l'outil d'évaluation nécessite environ 30 minutes de temps de classe.

La séquence didactique vise à permettre aux élèves de mieux comprendre le sens du nombre en se construisant une représentation mentale imagée et dynamique de la quantité. Comme énoncé à la section 2.4, cette représentation s'appuie sur les aptitudes de subitisation et de groupitisation présentes chez les tout-petits (Jordan et Dyson, 2016; de Gunderson et coll., 2012). L'hypothèse étant que ce travail sur les capacités de subitisation et de groupitisation aide à mieux saisir, par la suite, la pertinence du groupement. Il mène donc au développement de la pensée multiplicative et à la compréhension du système de numération. Le déroulement de la séquence didactique nécessite dix périodes de 60 minutes chacune, à raison de deux ou trois périodes par semaine.

3.2.1. Outil d'évaluation

Le but de cette épreuve est d'établir un portrait de la classe, c'est-à-dire de situer les élèves par rapport au continuum établi à la section 2.4.1. Ce portrait permet de planifier l'enseignement et donne l'occasion d'identifier des élèves qui auraient besoin d'interventions supplémentaires.

---

[6] Les instruments qui se trouvent en ligne sont les versions améliorées à la suite de la prise en considération des commentaires des participants (version 2). Pour une raison hors de notre contrôle, la version initiale (version 1) et la version finale des instruments (version 3) ne peuvent être disponible sur le site.

Cette épreuve s'inspire des travaux de Lyons et Bisaillon (2020) qui ont proposé un outil permettant d'établir un portrait de classe, s'adressant à tous les niveaux scolaires. Dans la présente recherche nous nous sommes concentrées sur les questions s'adressant à des élèves de fin 2e année ou du début 3e année. Dans le cadre de la présente thèse, des adaptations ont été réalisées selon le cadre conceptuel établi et une nouvelle question a été créée. Les détails sont précisés en notes en bas de page dans les sections suivantes.

Le but de cet outil n'est pas d'évaluer tous les éléments associés à chacun des niveaux du continuum présenté, mais d'orienter l'évaluation vers ce qui est au cœur de la présente étude, soit le développement des représentations mentales dynamiques et imagées à partir des habiletés de groupitisation. Ainsi, quatre tâches sont proposées aux élèves et chaque tâche implique une ou plusieurs questions associées aux différents niveaux du continuum. Ces tâches mettent l'accent sur le rôle des habiletés de groupitisation dans le développement du sens du nombre, permettant de faire ressortir l'importance de ces éléments dans la construction des représentations mentales et le développement du sens du nombre. Les autres éléments abordés dans le cadre théorique et associés à chacun des niveaux du continuum ne sont pas considérés dans l'outil d'évaluation. Ils le seront dans la séquence didactique qui sera présentée par la suite. L'épreuve a une durée de 30 minutes. Un temps prédéterminé a été alloué à chacune des questions. Selon la nature et la qualité de la réponse de l'élève, l'évaluateur (ou l'enseignant) peut situer l'élève sur le continuum en question.

La tâche se déroule en grand groupe. Il est important que l'enseignant détende l'atmosphère et rappelle aux élèves que le but de l'épreuve est de déterminer ce qui sera travaillé dans les prochaines semaines et non d'évaluer les performances des élèves. Il peut être nécessaire, par exemple, de dire à certains élèves que les résultats de cette évaluation ne seront pas pris en considération dans le bulletin.

Les tâches de cette épreuve sont présentées au cours de la même période, les unes après les autres. Toute l'épreuve est présentée à l'écran, le mode de représentation externe est donc l'image virtuelle. Les élèves notent leur réponse sur la feuille-réponse, présentée à l'annexe 2.

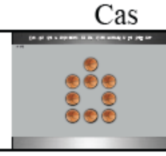
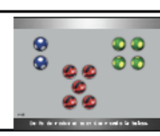
3.2.1.1 Tâche pour l'évaluation du niveau 2 (pensée additive)[7]

Il a été décidé de ne pas évaluer le niveau 1 du continuum étant donné qu'il s'agit d'une aptitude élémentaire, tel que mentionné à la section 2.2.4.1.2. De plus, le taux de réussite pour la subitisation de 3 éléments ou moins est pratiquement de 100 % (Dehaene, 2003).

Pour évaluer le niveau 2 du continuum, une tâche sollicitant les habiletés de groupitisation des élèves, soit leur perception rapide des petites quantités organisées, dont il a été question à la section 2.2.4.1.2 est proposée. Il s'agit d'évaluer la flexibilité de l'élève dans sa construction de représentations mentales des quantités organisées en constellations. Il a été choisi d'évaluer les capacités de groupitisation pour faire ressortir leur rôle et leur importance dans le reste du développement du sens du nombre. Les habiletés de comptage séquentiel n'ont donc pas été évaluées et ne sont pas incluses dans la séquence didactique, puisque l'emphase a été mise sur les capacités de comptage « global », soit la capacité de traiter la quantité d'une collection à partir de la disposition des éléments (Clements 1999), sans passer par un comptage séquentiel (sans énumérer ni dénombrer). Il est possible, par exemple, pour le troisième cas (voir tableau 3.1.) de dire : « j'ai vu 2, 5 et 4 ». Éventuellement, l'élève sera capable de regrouper ces éléments pour dire que ça fait 11 en tout, ce qui n'est pas exigé dans la présente tâche. Ce type de comptage s'oppose à un comptage séquentiel qui passe par une énumération des éléments.

Des images montrant différentes quantités de ballons disposés selon des configurations non familières sont présentées aux élèves. Le troisième cas présente trois constellations familières, mais qui ne sont habituellement pas placées ensemble, ce qui en fait une configuration originale. Ils doivent dessiner le même nombre de ballons sur leur feuille dans la même disposition que celle proposée à l'écran. Le tableau 3.1 montre les différents cas.

Tableau 3.1 Items de la question 1 pour l'évaluation du niveau 2

Niveau	Cas
2	  

[7] Cette tâche est une adaptation d'une des questions incluses dans le portrait de classe (Lyons et Bisaillon, 2020). Des items ont été retirés afin de garder seulement ceux dont les performances des élèves sont représentatives de leurs capacités liées au niveau 2 du continuum.

Les images sont présentées aux élèves durant 0,7 seconde. Selon Mandler et Shebo (1982), il faut 0,65 seconde pour subitiser 3 éléments. Selon Starkey et McCandliss (2014), il faut 0,6 seconde aux élèves pour trouver le nombre total d'éléments d'une collection lorsque ces éléments sont répartis en sous-ensembles de 2 ou 3, soit 0,05 seconde de moins.

Les cas présentés aux élèves dans cette tâche proposent des groupes structurés de façon à faciliter leur capture visuelle. Il n'y a pas plus de 4 éléments sur une même ligne et les éléments sont alignés, en colonne, en rangée ou en diagonale. En nous appuyant sur ces recherches, 0,7 seconde a été accordée pour cette tâche parce que les constellations respectent les limites de la subitisation, soit de 3 éléments ou moins sur la même ligne, la même colonne ou la même diagonale et se présentent en petits groupes. Un peu plus de temps que s'il s'agissait d'une simple subitisation (0,5 seconde) est alloué. La limite de temps a aussi pour but d'empêcher les élèves d'utiliser un comptage un à un. Trois cas en lien avec le niveau 2 sont proposés. Les quantités proposées aux élèves respectent le domaine numérique associé au niveau 2, soit moins de 20 éléments.

Cette tâche prend aussi en considération les habiletés spatiales et la capacité de se faire une représentation mentale d'une image proposant différentes dispositions d'objets. En effet, pour réussir cette tâche, les élèves doivent percevoir rapidement et se représenter mentalement des petites quantités organisées. Même si le total de ballons ne leur est pas demandé, ils doivent tout de même compter globalement les différents éléments de la constellation pour arriver à la reproduire correctement, c'est-à-dire de reproduire l'image à partir de la décomposition et de la recomposition de la constellation. En effet, les deux premiers cas ne sont pas des configurations classiques et le dernier cas, même s'il reprend des configurations classiques demande d'en traiter 3 en même temps, ce qui rend plus difficile la simple reproduction d'un patron.

Différentes réponses sont possibles :

- bonne quantité de ballons et bonne configuration;
- bonne quantité de ballons, mais mauvaise configuration;
- mauvaise quantité de ballons et mauvaise configuration.

Seule la première réponse correspond à la réponse attendue pour que la tâche soit réussie; elle permet de dire que l'élève a une bonne capacité de groupitisation et probablement aussi de bonnes habiletés spatiales. Pour être en mesure de placer le bon nombre de ballons dans la bonne disposition, l'élève doit se fier au nombre d'éléments dans chaque « morceau » de l'image et à leur disposition. Les autres manifestations pourraient indiquer que le développement du sens du nombre se situe plutôt au niveau 1 du continuum puisque l'élève n'est pas capable de considérer, de façon précise, des quantités plus grandes que 4. Elles pourraient aussi indiquer des difficultés sur le plan des habiletés visuo-spatiales.

La tâche suivante permet d'évaluer le niveau 3 du continuum.

3.2.1.2. Tâche pour évaluer le niveau 3 (Pensée multiplicative)[8]

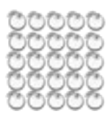
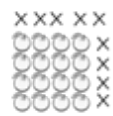
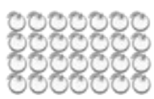
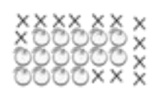
Pour évaluer le niveau 3 du continuum, une tâche de nature multiplicative impliquant un arrangement rectangulaire, un des sens de la multiplication présentés à la section 2.2.3.1, est proposée aux élèves. Il s'agit d'évaluer la flexibilité multiplicative de l'élève, soit sa capacité de se représenter mentalement une quantité en traitant simultanément deux informations, soit le nombre d'éléments dans une colonne et dans une rangée et à reproduire cet arrangement. Il a été choisi d'évaluer la capacité de l'élève à se représenter la quantité dans un arrangement rectangulaire parce que ce type de tâche s'appuie sur les habiletés de groupitisation; il faut visualiser le nombre d'éléments dans une colonne et dans une rangée. Il s'agit aussi d'un sens important de la multiplication puisqu'il permet de représenter la majorité des situations multiplicatives (Battista et coll., 1998; Twomey et Dolk, 2011).

La consigne qui est donnée aux élèves est : « Au marché de fruits, différents lots d'oranges sont placés sur les comptoirs. Voici un exemple, observe comment elles sont disposées. » (Lyons et Bisaillon, 2020). Quelques oranges vont être achetées durant la journée. La question qui est posée aux élèves est : « Où se trouvaient les oranges qui ont été achetées? Fais un X pour indiquer les oranges qui ont été achetées. » (Lyons et Bisaillon, 2020). Chaque arrangement rectangulaire est

[8] Cette tâche est une adaptation d'une des questions incluses dans le portrait de classe (Lyons et Bisaillon, 2020). Un des items a été retiré afin de garder seulement ceux dont les performances des élèves semblaient représentatives de leurs capacités liées au niveau 3 du continuum.

montré durant 10 secondes avant de montrer les oranges restantes après achat. La limite de temps a pour but d'empêcher les élèves d'utiliser un comptage un à un afin d'évaluer si l'élève a recours à son sens de la multiplication et à la représentation mentale qui lui sert de référence. Le tableau 3.2 montre les réponses attendues aux deux cas qui sont présentés aux élèves. Les X représentent les oranges qui ont été achetées durant la journée. Dans les cas où une colonne complète est manquante, le fait de l'ajouter à gauche ou à droit est accepté. Il en est de même s'il s'agit d'une rangée en haut ou en bas.

Tableau 3.2 Items de la question 2 pour l'évaluation du niveau 3

	Avant	Après	Réponse
Cas 1			
Cas 2			

Comme mentionné dans le cadre théorique, selon Starkey et McCandliss (2014), les élèves de 2^e année ont besoin de 3,5 secondes pour dénombrer 7 éléments non groupés et les élèves de 3^e année ont besoin de 3 secondes. Puisque les élèves doivent énumérer les éléments d'une colonne et d'une rangée pour réussir cette épreuve (plus de 7 éléments) et qu'ils doivent s'en faire une représentation mentale associée à la multiplication, nous leur avons accordé 10 secondes pour réussir cette tâche.

Pour réussir à reproduire les arrangements rectangulaires, il ne suffit pas de savoir combien il y avait d'oranges en tout et savoir combien il en manque. Il faut être capable de traiter simultanément deux informations, soit considérer le nombre de colonnes et de rangées et retenir cette information. Ils doivent associer deux informations à chacune des oranges : sa place dans la colonne et dans la rangée. Cette capacité de traiter deux informations de façon simultanée est au cœur de la pensée multiplicative.

Les représentations choisies montrent des quantités organisées dans un arrangement rectangulaire. Dans les deux cas, il manque au moins une colonne et une rangée. L'élève qui fait un comptage additif, un élément à la fois, n'arrivera pas à reproduire ce rectangle. Même si le total des oranges au départ ou encore le total des oranges manquantes ne leur est pas demandé, pour arriver à reproduire correctement ces arrangements rectangulaires, les élèves doivent avoir compté le nombre de colonnes et de rangées parce que le nombre d'oranges dans la colonne et dans la rangée est plus grand que 4 et donc difficile à reconnaître globalement.

Différentes réponses sont possibles :

- bonne quantité d'oranges et bonne configuration;
- bonne quantité d'oranges, mais mauvaise configuration (les oranges manquantes ont été ajoutées une à une, sans reproduire l'arrangement rectangulaire, par exemple);
- mauvaise quantité d'oranges et mauvaise configuration.

Seule la première réponse correspond à la manifestation attendue pour réussir cette tâche; elle permet de dire que l'élève a une pensée simultanée puisqu'il traite les informations en tenant compte des deux dimensions. Pour compléter ces arrangements rectangulaires dont les quantités d'oranges par colonne et par rangée sont plus grandes que 4, l'élève doit avoir compté le nombre de colonnes et le nombre de rangées et s'en être fait une représentation mentale qu'il est capable de reproduire. Connaître le nombre total d'oranges au départ ou le nombre d'oranges manquantes ne suffit pas et n'est pas nécessaire pour réussir la tâche. En effet, la deuxième manifestation montre un début de pensée multiplicative puisque l'élève peut faire une multiplication. Il a obtenu le bon nombre d'oranges, mais il n'avait pas le temps de les compter une à une, il a donc probablement eu recours à la multiplication. Par contre, il ne parvient pas à les replacer, il n'arrive probablement pas à se faire une représentation mentale de cette multiplication, dans un arrangement avec les colonnes et les rangées. La dernière manifestation est probablement associée au niveau 2 du continuum. En effet, l'élève n'est pas capable de considérer les quantités de façon multiplicative, mais seulement de façon additive, un élément à la fois.

La tâche suivante permet d'évaluer le niveau 4 du continuum.

3.2.1.3. Tâche pour évaluer le niveau 4 (Passage à la dizaine et à la centaine)[9]

Pour évaluer le niveau 4 du continuum, une tâche faisant appel au concept d'équivalence, un des principes de notre système de numération que nous avons exposé à la section 2.1.2 est présenté aux

[9] Cette tâche est une adaptation d'une des questions incluses dans le portrait de classe (Lyons et Bisaillon, 2020). Un des items a été retiré, afin de garder seulement ceux dont les performances des élèves semblaient représentatives de leurs capacités liées au niveau 4 du continuum.

élèves. Il s'agit d'évaluer la flexibilité de l'élève à utiliser les dizaines et les centaines et à manipuler les billets dans sa tête afin d'effectuer le calcul dans les temps prescrits. Ces comportements sont des manifestations associées au niveau 3, soit lorsque le passage à la dizaine est réalisé et que l'élève apprend à utiliser la centaine. Ce choix a été fait pour que la tâche soit la plus représentative possible de ce niveau. Ici, les quantités ne sont pas placées dans un arrangement facilitant leur perception. L'élève doit les manipuler mentalement.

La consigne qui est donnée aux élèves est : « Des billets d'argent-jouet vont s'afficher à l'écran pendant environ 20 secondes. Prépare-toi à calculer le montant d'argent affiché » (Lyons et Bisaillon, 2020). La contrainte des 20 secondes force l'élève à faire un calcul mental, en plus du fait qu'il ne soit pas autorisé à procéder à un calcul écrit. Plus de temps que pour la tâche visant la pensée multiplicative a été alloué parce que la présente tâche fait appel à l'équivalence, soit la connaissance, par l'élève, de la valeur d'une dizaine et d'une centaine, en plus de recourir à la pensée multiplicative.

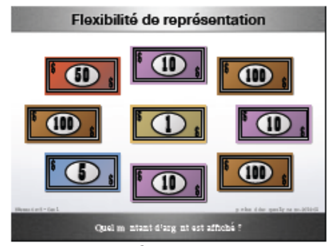


Figure 3.2
Cas de l'outil d'évaluation qui évalue le niveau 4

Pour réussir cette tâche, ces derniers doivent accorder de la valeur aux dizaines et aux centaines et comprendre qu'il faut classer les billets selon leur valeur, pour mieux compter. L'ajout de billets de 5 $ et de 50$ ajoute un défi à ce classement. Ils peuvent compter d'abord les centaines, ensuite aller du côté des dizaines en additionnant le billet de 50 $ et les trois billets de 10 $. Il reste enfin à considérer les unités en prenant le billet de 5 $ et le billet de 1 $ (voir figure 3.2). Il s'agit donc d'un comptage mixte, c'est-à-dire compter par bonds de 100, de 50, de 10, de 5 et de 1.

Différentes réponses sont possibles :

- l'élève a la réponse juste et il n'y a pas de traces de calculs écrits sur sa feuille;
- l'élève a la réponse juste et il y a des traces de calcul sur sa feuille;
- l'élève n'a pas la bonne réponse et il n'y a pas de traces de calcul sur sa feuille;
- l'élève n'a pas la bonne réponse et il y a des traces de calcul sur la feuille.

Seule la première réponse correspond à la manifestation attendue pour réussir cette tâche; elle permet de dire que l'élève a réussi à classer les billets et les a additionnés dans sa tête en utilisant probablement un comptage mixte tel que : 100, 200, 300, 350, 360, 370, 380, 385, 386. La deuxième réponse, même si elle est exacte, n'est pas la manifestation attendue puisqu'elle montre que l'élève a eu recours au papier-crayon. Si l'élève n'a pas la bonne réponse, cela pourrait vouloir dire qu'il n'a pas eu le temps de calculer, donc qu'il manque un peu de flexibilité par rapport à la représentation des nombres dans le système de numération. Cela pourrait aussi vouloir dire qu'il ne comprend pas la valeur des billets de banque, il serait alors au niveau 3 du continuum.

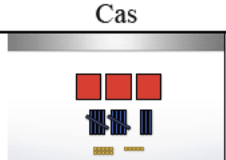
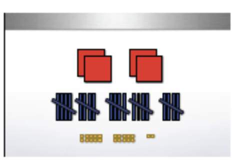
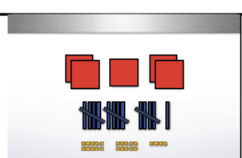
La tâche suivante permet d'évaluer le niveau 5 du continuum.

3.2.1.4 Tâche pour évaluer le niveau 5 (compréhension de la valeur de position)[10]

Pour évaluer le niveau 5 du continuum, une tâche faisant appel à la flexibilité de représentation nécessaire pour manipuler les nombres de façon efficace, tel qu'il en a été question à la section 2.1.2 est présentée aux élèves. Il s'agit d'évaluer la capacité de l'élève de traiter la représentation mentale imagée des quantités de façon dynamique. Ils doivent effectuer des échanges mentalement; des dizaines deviennent des centaines et des unités, des dizaines. L'élève doit recomposer les quantités qui lui sont présentées à l'écran à partir de la représentation mentale qu'il s'en fait puisqu'il a un temps limité pour les observer.

Le tableau 3.3 présente les trois items de la tâche :

Tableau 3.3 Items de la question 4 de l'outil d'évaluation

Cas	Exemples de calcul	Réponse	Intervalle de réponses acceptées
	300 + 100 + 30 + 10 + 5	445	Entre 440 et 450
	400 + 250 + 22	672	Entre 670 et 680
	500 + 100 + 60 + 24	684	Entre 680 et 690

[10] Cette question a été entièrement construite dans le cadre de la présente étude.

Puisque cette question fait appel aux habiletés de calcul mental des élèves, une bonne réponse peut se situer dans un intervalle. En effet, lorsque l'on fait un calcul mental, une réponse approchée du résultat sera bonne (Rodriguez, 2009). Le calcul mental est souvent utilisé au quotidien, ainsi, une estimation donnant l'ordre de grandeur de ce qui doit être calculé est suffisante.

Pour réussir cette tâche, les élèves doivent être capables de recomposer une dizaine ou une centaine, selon les items. Cette tâche fait ainsi appel à l'échange (dix dizaines échangées pour une centaine ou dix unités échangées pour une dizaine). Les unités, les dizaines et les centaines ont été disposées de façon à ce qu'il soit facile de les compter par petits groupes. Cette disposition leur est présentée dans l'exemple. Cette disposition est subitisable[11]. L'élève doit aussi le faire rapidement, les blocs de base dix s'affichent durant 8 secondes. Plus de temps que pour la tâche ciblant le niveau 2 a été alloué, mais moins que celle pour les niveaux 3 et 4 parce qu'ici, les élèves doivent faire appel à leur compréhension de la valeur de position du système de numération et à leur efficacité en calcul. Ils doivent additionner rapidement les blocs de base dix en utilisant un comptage mixte. Une fois qu'ils ont trouvé leur réponse, ils l'écrivent sur la feuille réponse.

Différentes réponses sont possibles :

- l'élève écrit la réponse précise;
- l'élève écrit une réponse dans l'intervalle de réponse accepté;
- l'élève n'écrit par la bonne réponse.

Seules les deux premières réponses correspondent aux réponses attendues pour réussir cette tâche; elles permettent de dire que l'élève est capable de traiter rapidement des représentations de nombres dans sa tête, qu'il fait des échanges et qu'il utilise un comptage mixte. Une mauvaise réponse peut être expliquée de différentes façons. L'élève pourrait ne pas accorder les valeurs respectives aux blocs de base dix qu'il voit à l'écran. Il pourrait ne pas avoir eu le temps, mais accorder quand même la bonne valeur aux blocs de base dix, ce qui signifierait qu'il manque de flexibilité. Il serait alors au niveau 4 du continuum. Il pourrait aussi ne pas accorder les valeurs respectives aux blocs de base dix ou ne pas comprendre le principe des échanges; il serait alors au niveau 3 du continuum.

[11] L'utilisation de l'expression « disposition subitisable » renvoie au fait que la disposition des éléments ou des groupes d'éléments respectent les limites de la subitisation, ce qui la rend « facile à voir ». Une exception peut être apportée à la boîte de dix qui présente deux rangées de 5, 5 dépassants la limite subitisable de 4 éléments. Le cadre permet de jouer avec cette limite.

Un outil d'évaluation contenant quatre questions, associées à quatre niveaux du continuum établi dans la présente recherche a été construit. La prochaine section présente la validation de l'outil d'évaluation que nous avons eu l'occasion de faire avant la fermeture des écoles.

3.2.1.5 Validation initiale de l'outil d'évaluation

Cet outil d'évaluation a été mis à l'essai auprès de 23 élèves de 2^{e} année, de 21 élèves de 3^{e} année et de 23 élèves de 4^{e} année d'une même école primaire. Les élèves de 2^{e} et de 3^{e} année ont été sélectionnés parce que les instruments s'adressent à des élèves de fin 2^{e} année et début 3^{e} année. Les élèves de 4^{e} année ont été ajoutés pour voir s'il y avait une progression au niveau des performances des élèves. La validation a eu lieu au printemps 2020. Le tableau 3.4 présente la moyenne d'élèves ayant donné la bonne réponse à chacune des questions, selon le niveau scolaire.

Tableau 3.4
Résultats de la mise à l'essai de l'outil d'évaluation

	2^{e} (N=23)	3^{e} (N=21)	4^{e} (N=23)
Q1	33 %	68 %	67 %
Q2	10 %	30 %	79 %
Q3	11 %	23 %	48 %
Q4	11 %	20 %	38 %

Il est possible de constater que les performances des élèves de 2^{e} année, au printemps, sont très peu élevées, même pour la question 1 qui fait appel aux habiletés de groupitisation, normalement développée au préscolaire. Les résultats des élèves de 3^{e} année et de 4^{e} année à cette même question sont plus élevés, mais demeurent tout de même bas, considérant qu'il s'agit d'habiletés pouvant être travaillées dès l'âge de 5 ans. Il semble que les élèves n'aient pas pu développer ces habiletés élémentaires, en classe ou à la maison. Ces résultats ajoutent de la pertinence à la séquence didactique qui a été établie puisque les premières activités ciblent la groupitisation et la création de représentations mentales imagées qui évoluent à travers le développement du sens du nombre à partir de ces habiletés.

Il est aussi possible de constater une légère diminution des taux de réussite des élèves de 3^{e} et de 4^{e} année, d'une question à l'autre, ce qui pourrait laisser croire que la progression des niveaux de conceptualisation des questions de notre outil d'évaluation est adéquate.

Enfin, les taux de réussite pour chacune des questions augmentent légèrement selon le niveau scolaire. Cette différence pourrait permettre de dire que le niveau de difficulté des questions est approprié puisque les élèves plus expérimentés les réussissent mieux[12].

Cependant, en nous appuyant sur la recension des écrits, les résultats auraient dû être plus élevés. En effet, pour la question 1, 100 % des élèves auraient dû avoir la bonne réponse, qu'importe leur niveau scolaire étant donné qu'elle cible la groupitisation, habileté développée autour de 5 ans, comme il a été présenté à la section 2.2.1.5.2. À la question 2, le taux de réussite aurait dû s'approcher du 45 % pour les élèves de 2e année et du 50 % pour les élèves de 3e année selon les résultats des études de Clark et Kamii (1996) s'intéressant à la pensée multiplicative présenté à la section 2.2.3.1. Les résultats aux questions 3 et 4 sont un peu moins surprenants puisque Jones et ses collaborateurs (1994) rapportent que la compréhension de la valeur de position du système de numération et, par la même occasion, la création d'une représentation imagée et dynamique demeure un défi pour les élèves de fin 2e année. Il faut cependant préciser que dans les études citées, les élèves n'avaient pas de limite de temps pour démontrer leur niveau de compréhension. On pourrait même dire que ces questions demeurent des défis pour les élèves de 3e et de 4e année.

Malgré les faibles taux de réussite à l'outil d'évaluation, nous avons maintenu son contenu parce qu'il est possible de constater une progression à la fois dans une année scolaire et d'une année scolaire à l'autre. De plus, le choix des questions respecte le continuum établi qui lui s'appuie sur la recension des écrits. Ainsi, la séquence didactique décrite dans la prochaine section cible chacun des niveaux du continuum et donne la possibilité aux élèves de développer des habiletés qu'ils n'auraient pas eu l'occasion de développer, comme les habiletés de groupitisation, par exemple. Il sera donc intéressant d'utiliser cet outil à la fin de la séquence pour déterminer les progrès des élèves, mais aussi pour énoncer des recommandations par rapport aux conditions à mettre en place, dont la nature des tâches, pour favoriser le développement du sens du nombre et de la numération. La prochaine section présente la séquence didactique qui tient compte du continuum établi et qui vise le développement du sens du nombre et la création de représentations mentales imagées et dynamiques des quantités afin d'assurer une meilleure compréhension du système de numération.

[12] Une mise à l'essai avec un plus grand échantillon pourrait permettre de préciser ces résultats.

3.2.2 Séquence didactique

Les concepts mathématiques abordés dans la séquence didactique de même que leur enchaînement ont été établis à partir du continuum établi à la section 2.4.1. Cette séquence a pour but de développer le sens du nombre et visera donc à donner l'occasion à l'élève de développer des composantes de ce sens du nombre identifiées par Reys (1994) qui ont été présentées dans la problématique.

Le déroulement des activités s'inspire de la synthèse des résultats des études empiriques ayant abordées le développement du sens du nombre et l'enseignement de la numération présentée dans le cadre conceptuel. Les activités proposées permettent aux élèves de travailler d'abord dans un mode de représentation externe concret ou imagé et dynamique, pour ensuite établir les liens avec la représentation externe symbolique. L'image virtuelle est beaucoup utilisée pour faciliter la construction de la représentation interne imagée et dynamique (Thomas et coll., 2002) et pour permettre aux élèves d'être plus engagés dans la tâche (Giroux et Ste-Marie, 2007). Du matériel concret aux groupements apparents et accessibles est utilisé lors du passage à la numération. Les élèves ont le temps de manipuler le matériel pour trouver leur réponse. La notation mixte est utilisée pour faciliter le passage vers la représentation symbolique. Les représentations symboliques sont présentées à la fin des activités afin d'institutionnaliser les concepts abordés.

Les élèves travaillent aussi dans un environnement de résolution de problèmes. Les problèmes qui leur sont proposés sont des problèmes qui permettent aux élèves de découvrir les concepts pour les comprendre et non d'appliquer une technique. Ils permettent aussi aux élèves de travailler sur des collections et des collections groupées pour permettre l'évolution vers une représentation de plus en plus conventionnelle. Les activités donnent l'occasion aux élèves de travailler de façon dynamique et simultanée les habiletés de calcul et le développement de la compréhension du système de numération. Les environnements de résolution de problèmes conduisent les élèves à communiquer leur réponse, et donc facilitent la pertinence d'un passage au mode symbolique. Les tâches donneront l'occasion à l'élève de composer et de décomposer les nombres. Des discussions seront aussi déclenchées pour permettre aux élèves d'échanger sur leurs stratégies de résolution et sur leurs conceptions.

Des activités permettant aux élèves d'utiliser les connaissances acquises dans les tâches de résolution de problèmes leur sont aussi proposées. Elles ont pour but de les amener à automatiser certaines stratégies.

Finalement, comme il a été mentionné dans la synthèse de notre cadre théorique, pour maximiser les retombées des interventions auprès des élèves qui ont de la difficulté avec la numération, il est aidant de travailler leurs capacités de subitisation perceptuelle et de groupitisation. De plus, représenter les petites quantités en constellations, classiques ou non, permet de développer la flexibilité cognitive nécessaire à la construction d'un bon sens du nombre. Les élèves ont donc l'occasion, à plusieurs reprises de reconnaître l'utilité des connaissances de la subitisation et de la groupitisation et de s'en servir dans l'action (Conne, 1999).

La prochaine section présente la séquence didactique, son déroulement ainsi que chacune des activités. Une analyse a priori de chacune des activités a été réalisée. Cette analyse présente le déroulement de la tâche, son but par rapport à notre continuum, les variables didactiques de l'activité et les conduites attendues des élèves (Artigue, 1990).

3.2.3.1. Déroulement de la séquence didactique

Dix rencontres d'une heure ont été planifiées pour cette séquence didactique. Au cours de chacune des activités, les élèves sont placés en équipe de deux afin de maximiser le développement de stratégies. Des discussions en grand groupe ont aussi lieu pour alimenter les réflexions des élèves et pour faire la synthèse de l'activité.

Les deux premières activités de la première rencontre de la séquence ciblent les deux premiers niveaux du continuum; ce sont des activités généralement facilement accessibles pour des élèves de deuxième année. Même si le niveau 1 du continuum est acquis (ou devrait l'être) pour les élèves de fin 2^{e} année et de début 3^{e} année, le concept de subitisation est abordé lors de la première rencontre. Leurs aptitudes de subitisation sont mises de l'avant comme levier pour le reste de la séquence. L'objectif est qu'ils réalisent le rôle de la subitisation, soit que lorsque les éléments sont bien placés, il est possible de compter plus vite. Le concept de groupitisation est par la suite exploité par les élèves. Travailler ces deux premiers niveaux du continuum permet aussi aux élèves de se familiariser avec l'environnement didactique qui est utilisé.

À partir de la deuxième période, les rencontres se déroulent de la même façon. Pour chaque période, 45 minutes sont accordées à une activité de résolution de problèmes ciblant les niveaux 3 à 5 du continuum, de façon progressive. Chacune des périodes inclut aussi une courte activité de quinze minutes liées au niveau 2. Cet entraînement cible progressivement les habiletés de calcul visuel des niveaux 4 et 5, appuyées sur la groupitisation et le reste des apprentissages réalisés aux niveaux 3 et 4, pour les trois dernières périodes de la séquence. Il y a donc deux progressions en parallèle, une pour l'activité centrale de la séquence, qui a lieu au début de la période, et une autre pour l'activité d'entraînement, qui termine la période. Tel que démontré dans notre cadre théorique, il semble y avoir un lien entre les habiletés de groupitisation et le groupement et il est aidant de travailler ces capacités pour maximiser les retombées des interventions auprès des élèves qui ont de la difficulté avec la numération. Les faibles performances des élèves par rapport aux habiletés du niveau 2 à la suite de la mise à l'essai de l'outil d'évaluation permettent aussi de penser qu'une consolidation des acquis est requise.

La séquence didactique est constituée d'activités développées en partie en collaboration avec Michel Lyons, conseiller pédagogique, auteur de collections mathématiques et concepteur de jeux et d'activités mathématiques depuis plus de 30 ans. Ces outils sont centralisés dans une ressource accessible en ligne, gratuite, *Les incontournables du nombre au primaire* (Lyons et Bisaillon, 2011). Cependant, la majorité des activités ont été adaptées par rapport au cadre théorique de la présente étude. Des précisions par rapport aux modifications réalisées aux activités seront apportées pour chacune d'entre elles. De plus, le fait de placer ces activités dans une séquence ayant pour objectif de développer des représentations mentales dynamiques et imagées à partir des habiletés de groupitisation est directement lié au cadre théorique de la présente étude et n'est pas proposé dans *Les Incontournables du nombre au primaire* (Lyons et Bisaillon, 2011). Une synthèse de ces activités est présentée dans le tableau 3.5. Elles seront décrites en détail plus loin dans la section 3.2.3.2.

Tableau 3.5
Séquence didactique

Période	Objectifs/Caractéristiques	Activité	Durée	Type d'animation	Matériel
Période 1	Introduction à la pertinence et à l'utilité de la groupitisation (N1)	Oisillons	45	Grand groupe et équipes de deux	Nids vides Jetons
	Utilisation de la groupitisation pour compter (N1 et N2)	Magie du 5 et du 10	15	Grand groupe et équipes de deux	Cartes à jouer vides Jetons
Période 2	Pertinence du groupement (N3) Utilisation des groupes pour compter	Joyaux (Intro)	45	Grand groupe et équipes de 2	Jetons
	Ancrage du 10 Introduction de la disposition triangulaire pour faire 10 (N2)	Pyramide du 10	15	Équipes de 2	Jeux de cartes ordinaires
Période 3	Utilisation des groupes pour compter (N3)	Joyaux (Activités)	45	Grand groupe et équipes de 2	Jetons
	Ancrage du 10 (N2)	Tomathina/ Boîtes de 10	15	Grand groupe	
Période 4	Flexibilité multiplicative (N3) Passage à la dizaine (N4)	Bergère 1	45	Équipes de 2	Matériel base dix triangulaire
	Utilisation de la groupitisation pour compter (N2)	Bataille avec les cartes de boîtes de 10	15	Équipes de 2	Jeux de cartes boîtes de dix
Période 5	Passage à la centaine (N4)	Bergère 2	45	Équipes de 2	Matériel base dix triangulaire
	Utilisation de la groupitisation pour compter (N2)	Tomathina/ Mémoire de 10	15	Grand groupe	
Période 6	Flexibilité multiplicative (N3)	Stationnement	45	Équipes de 2	
	Utilisation de la groupitisation pour compter (N2)	Bataille boîtes de 10, addition de deux cartes	15	Équipes de 2	Jeux de cartes boîtes de dix
Période 7	Passage à la centaine Flexibilité de représentation et d'équivalence (N4)	Tohubohus 1	40	Équipes de 2	Blocs base dix
	Utilisation de la groupitisation pour compter (N2)	Tomathina/ Super boîtes de 10, 2 boîtes	15	Grand groupe Mode compétition	

	Objectifs/Caractéristiques	Activité	Durée	Type d'animation	Matériel
Période 8	Flexibilité d'équivalence (N4)	Tohubohus 2	40	Équipes de 2	Blocs de base dix Compteur
	Flexibilité d'équivalence (N4)	Photos de nombres	15	Équipes de 2	Blocs de base dix Compteur

	Objectifs/Caractéristiques	Activité	Durée	Type d'animation	Matériel
Période 9	Flexibilité d'équivalence (représentations multiples) (N5)	Nombres magiques Additions	40	Équipes de deux	Blocs de base dix Compteur
	Flexibilité d'équivalence (représentations multiples) (N4) et compréhension de la valeur de position (N5)	Photos de nombres	15	Équipes de 2	Compteur

	Objectifs/Caractéristiques	Activité	Durée	Type d'animation	Matériel
Période 10	Flexibilité d'équivalence (représentations multiples) (N5)	Nombres magiques (+ et -)	40	Équipes de 2	Blocs de base dix
	Flexibilité d'équivalence (représentations multiples) (N4) et compréhension de la valeur de position (N5)	Photos de nombres	15	Équipes de 2	Compteur

Chacune de ces activités est détaillée dans la prochaine section. Une analyse a priori de chacune d'elles a été effectuée. Cette analyse est réalisée dans le but de planifier les activités en fonction du continuum établi et en fonction des orientations didactiques qui ont été établies dans la synthèse du cadre théorique. Il s'agit aussi d'anticiper les conduites des élèves pour s'assurer que les tâches sollicitent bien les connaissances visées.

3.2.3.2. Analyse a priori des activités

Dans cette section, l'analyse a priori de chacune des activités réalisées avec les élèves pour ce projet de recherche est présentée. Pour ce faire, le but de la tâche présentée aux élèves est d'abord brièvement décrit, en précisant le niveau du continuum ciblé par l'activité. Ensuite, l'activité est décrite. Cette description présente le thème qui sera exploité et le problème qui sera pris en charge par les élèves. Le déroulement de la tâche qui est soumise aux élèves est par la suite détaillé, en précisant ce qui sera réalisé avant l'activité, pendant et après. La présentation des notions mathématiques en jeu dans l'activité fait suite à la description de l'activité. En plus de faire des liens avec les connaissances et habiletés des différents niveaux du continuum, elles permettent de souligner certaines manifestations du sens du nombre qui sont travaillées dans l'activité. Les variables didactiques de l'activité, les contraintes, sont aussi détaillées. Elles apportent des précisions par rapport aux choix qui ont été effectués par rapport à certains éléments mathématiques de l'activité. Ces choix s'appuient sur les conditions favorisant le développement du sens du nombre et de la numération identifiés dans la synthèse du cadre théorique. Les connaissances et habiletés sollicitées par l'activité sont présentées, à la fois celles nécessaires pour démarrer l'activité et celles que nous anticipons (Artigue, 1990). Elles s'appuient sur les niveaux de développement du continuum. Elles mènent ensuite à la description des conduites des élèves : les conduites visées, les conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité et les conduites menant à une erreur que les élèves adoptent lors de chacune des activités sont ensuite détaillées[13].

Les activités sont présentées dans l'ordre de leur apparition dans la séquence didactique. Les activités qui seront d'abord détaillées sont donc celles de la période 1 de la séquence. Il s'agit de deux activités ciblant le niveau 2 du continuum, soit le développement des habiletés de groupitisation.

Période 1

Oisillons[14]

But de l'activité

Le but de cette activité est d'amener les élèves à voir la pertinence de grouper pour reproduire une quantité.

Description de l'activité

Cette activité est une activité de résolution de problème. Le contexte de cette activité est le suivant : « Une pie pleure sur le sort de ses petits : " *À chaque repas, c'est la même crise! S'il m'arrive de ne pas déposer exactement la même quantité de nourriture à chacun de mes oisillons, ils se*

[13] Afin d'éviter d'alourdir cette analyse a priori, ce qui pourrait être fait pour aider les élèves qui ne réussissaient par les activités, proposées à l'une ou l'autres des périodes, n'a pas été précisé. Il s'agit, dans tous les cas, d'activités permettant de développer davantage le niveau ciblé par l'activité ou d'aller retravailler un niveau inférieur. Le développement des habiletés visuo-spatiales pourrait aussi être envisagé.
[14] Les neufs premiers cas sélectionnés pour créer la présente tâche sont issus de quatre séries d'activités *Oisillons* disponibles sur le sur site des *Incontournables du sens du nombre*. Les deux derniers cas ont été créés spécialement pour la séquence didactique.

chamaillent, ils se bousculent. Un jour, certains vont finir par tomber du nid... Je ne sais quoi faire pour éviter ça. " » (Lyons et Bisaillon, 2011, p. 36). La consigne est la suivante : « *Aide maman Pie et ses petits qu'il faut nourrir. Observe le nid avec attention. Mets ça dans ta tête, pour t'en souvenir. Puis, place tes fruits dans la même position*». Des images représentant des oisillons dans un nid sont présentées sur le TNI durant deux secondes. La figure 3.3 présente les cas proposés aux élèves.

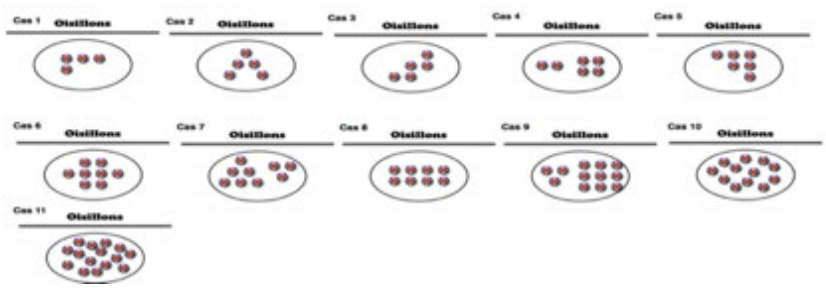


Figure 3.3
Cas de l'activité *Oisillons*

Les élèves doivent placer les jetons sur la reproduction du nid (voir figure 3.4) qu'ils ont devant eux, en respectant la disposition des oisillons vue à l'écran. Ils ont l'occasion d'explorer et de manipuler le matériel. Ils ont aussi l'occasion d'échanger avec leurs collègues par rapport aux stratégies utilisées.

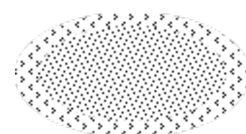


Figure 3.4
Reproduction de nid

Déroulement de l'activité

Avant l'activité :

Une petite vidéo présente la mise en situation aux élèves (sur le TNI). Une reproduction du nid et une vingtaine de jetons leur sont donnés. Ils n'ont pas de papier ni de crayon. Les élèves sont placés en équipe de deux afin de favoriser l'échange de stratégies. Le temps prévu pour cette activité est de 45 minutes.

Pendant l'activité :

Après la présentation du premier nid, les élèves se mettent en action et placent des jetons dans le nid. Ils doivent s'entendre à deux sur le nombre et la position des oisillons. Après chacun des cas, une discussion en grand groupe est amorcée par rapport à la confiance qu'ils ont dans leur réponse et par rapport aux stratégies qu'ils ont employées. Il est souhaité qu'éventuellement, lors des discussions, les élèves en viennent à décrire comment ils ont été capables de se faire une représentation mentale des oisillons pour reproduire leur disposition. Si les élèves éprouvent des difficultés, différentes stratégies sont proposées, par exemple, pour le cas 5 de la figure 3.3 ci-dessus, où il y a six oisillons, l'enseignant pourrait suggérer la formulation suivante : « j'ai vu trois, deux et un oisillons placés en escalier à l'envers ». Ensuite, la vérification de la disposition des jetons est faite à partir de l'image de départ présentée de nouveau sur le TNI.

Après l'activité :

Lors d'un retour en grand groupe, à la fin de l'activité, tous les nids sont montrés à l'écran et l'enseignant anime une discussion sur les cas plus faciles, ou plus difficiles.

Notions mathématiques[15]

Un but de cette activité est de développer le niveau 2 du continuum en amenant les élèves à se forger plusieurs représentations mentales imagées d'une quantité organisée en petites constellations. Ils réfléchissent sur les quantités et sont aussi appelés à composer et décomposer les représentations de ces quantités. Ils développent une flexibilité dans le traitement et la manipulation des quantités. Ils réfléchissent aussi sur la justesse de leurs réponses puisqu'ils sont appelés à vérifier comment ils ont disposé leurs jetons après chacun des cas. Un autre but est de les amener à constater l'importance de la groupitisation lorsque vient le temps de considérer des quantités de plus en plus grandes. Les cas 10 et 11 de la figure 3.3 mettent les élèves dans un état de déséquilibre provoquant une réflexion chez ces derniers quant à la pertinence de placer les éléments dans une position subitisable; ils mettent les élèves dans un état de déséquilibre. En effet, les oisillons sont volontairement placés de manière aléatoire, ce qui provoque une réaction chez les élèves. Ils acquièrent des connaissances utiles pour les activités du niveau 3.

Variables didactiques

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- le temps d'exposition aux différentes représentations des oisillons;
- le nombre d'oisillons;

[15] Toutes les activités de la séquence favorisent le développement des habiletés visuo-spatiales, sans en faire un objectif spécifique.

- la disposition des oisillons;
- le mode de représentation externe.

Le temps d'exposition aux différentes représentations des oisillons

Le temps d'exposition est limité. Les différentes représentations des nids défilent sur le TNI les unes après les autres. Chaque nid est présenté durant 2 secondes. Étant donné qu'il s'agit d'une activité d'apprentissage, il a été décidé d'accorder 1,3 seconde de plus que ce qui est accordé dans la tâche qui cible ce niveau dans l'outil d'évaluation. Nous voulons laisser du temps aux élèves pour qu'ils apprennent à se faire une représentation mentale de la quantité tout en les empêchant de compter un à un les oisillons à l'écran, le temps d'exposition de 2 secondes étant trop court.

Le nombre d'oisillons

La figure 3.3 présente les cas qui sont proposés aux élèves. Pour chacun des items, les limites de la subitisation perceptuelle sont respectées, c'est-à-dire qu'il n'y a jamais plus de 4 éléments alignés ou placés dans un groupe, sauf pour les deux derniers cas. En effet, ces derniers cas servent de conclusion à l'activité.

La disposition des oisillons

Diverses constellations ont été choisies, permettant de partir des aptitudes primitives de subitisation pour traiter des quantités de plus en plus grandes. Les constellations choisies ne sont pas prototypiques puisque le but est que les élèves constatent l'importance de bien placer les jetons pour mieux les compter et non qu'ils se réfèrent à des constellations connues. Pour les deux derniers cas, les oisillons sont placés dans une représentation qui n'est pas subitisable, c'est-à-dire qui n'est pas organisée en petits groupes perceptibles de 4 éléments ou moins. Le but est de provoquer une réaction chez les élèves et les amener à constater que lorsque les éléments à compter sont bien placés, il est plus facile de s'en faire une représentation mentale. Ce constat sera réinvesti dans les activités (*Joyaux Intro* et *Joyaux Activités*) en lien avec le niveau 3 du continuum (pensée multiplicative).

Les modes de représentation externe

L'activité propose les quantités dans des représentations externes imagées et concrètes : le mode imagé, puisque les élèves voient des images des différentes constellations, et le mode concret puisque les élèves placent les jetons sur leur nid selon la même configuration que celle qu'ils ont vue à l'écran. Ils ont donc l'occasion de manipuler les jetons. Le mode verbal entre aussi en jeu lorsqu'il est question de décrire la constellation.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs aptitudes du niveau 1 du continuum soit leur capacité de percevoir des petites numérosités pour réussir le premier cas, qui présente 4 oisillons. Pour les autres cas, ils ont besoin de leurs habiletés du niveau 2 soit leur capacité à recourir à la groupitisation. Étant donné que les dispositions ne sont pas prototypiques et que le temps est restreint, ils doivent parvenir à se faire une représentation mentale de la quantité et reproduire cette représentation mentale. Ils doivent aussi décomposer l'image en petits groupes subitisables d'éléments. Les élèves pourraient par exemple dire, pour le cas 6, : « j'ai vu le dessin du 6 sur le dé avec un oisillon de chaque côté ».

Conduites des élèves

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité :

- conduites visées :
  - pour les cas 1 à 9 : les élèves déterminent la quantité d'oisillons en ayant recours à leurs capacités de subitisation et de groupitisation et reproduisent la disposition des oisillons dans le nid. Il est possible de penser qu'ils se sont fait une représentation mentale de la quantité en la décomposant en petits groupes subitisables. Pour le cas 7, par exemple, ils pourraient dire qu'ils ont vu une première pyramide avec un, deux et trois et une deuxième pyramide, inversée, avec 2 et 1 »;
  - pour les cas 10 et 11 : les élèves réagissent parce que la disposition des oisillons rend la reproduction de la quantité très difficile. Certains élèves pourraient dire que ces deux cas sont plus difficiles, d'autres qu'ils sont moins bien placés ou moins bien organisés.
- conduites qui mènent à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
  - les élèves tentent d'établir la quantité d'oisillons en recourant au comptage un à un, stratégie qui pourrait être utilisable pour le premier cas. Pour les plus grandes quantités, elle a ses limites étant donné le temps limité d'exposition. Il est possible de penser qu'ils n'arrivent pas à se faire une représentation mentale de la disposition des oisillons.

- conduites qui mènent à une erreur :
    - les élèves font un mauvais comptage séquentiel;
    - ils font un mauvais comptage global, leur représentation mentale de la constellation n'est pas complète. Par exemple, ils font des liens avec des objets ou des formes connues, mais n'arrivent pas à les reproduire (ils pourraient dire qu'ils ont vu un « V » pour le cas 2 et pour le cas 3, un escalier;
    - ils ne disposent pas les oisillons tel que demandé;
    - ils donnent une réponse au hasard[16];
    - ils n'ont pas été attentifs.

Les élèves peuvent être surpris par ce type de tâche. En effet, les élèves sont habitués à des tâches de comptage ou de dénombrement dans lesquelles ils ont tout le temps nécessaire. Il se peut que les conduites qui mènent à une erreur soient attribuables à cette explication : « ça va trop vite ». Le contrat didactique dans lequel ils ont tout le temps nécessaire pour compter se trouve ici brisé. Dans tous les cas, une description de plus en plus précise soutenant la représentation imagée / concrète est demandée. Elle est sollicitée par le fait de vouloir bien nourrir les oisillons.

De plus, pour les deux derniers cas (oisillons disposés dans une représentation non subitisable), la réponse attendue est cette fois-ci le refus des élèves à réaliser la tâche ou encore le constat de l'impossibilité de l'effectuer : « c'était trop difficile, ils étaient mal placés », « je n'ai pas réussi à les mettre dans ma tête ». Si les élèves n'ont pas ce genre de réaction et qu'ils tentent, pour répondre à la consigne, de placer les oisillons malgré la mauvaise disposition des oisillons, ce pourrait être un indice qu'ils n'ont pas saisi le rôle d'une disposition subitisable pour compter rapidement des collections.

La prochaine activité est une activité qui cible le niveau 2 du continuum qui vise l'entraînement du recours aux habiletés de groupitisation pour se faire une représentation mentale des quantités.

[16] Ces deux dernières conduites, soit « ils donnent une réponse au hasard » et « ils n'ont pas été attentifs » sont possibles lors de la réalisation de chacune des activités de la séquence. Elles ne seront pas répétées dans les autres activités afin d'éviter d'alourdir le texte.

Magie[17]

But de l'activité

Cette activité a pour but de développer, chez les élèves, une flexibilité par rapport à la représentation de 5 et de 10 quantités (par exemple, 10 = 5 + 5 ou 6 + 4).

Description de l'activité

Cette activité est une activité d'entraînement. Sur une vidéo, on voit d'abord une carte à jouer ordinaire. Puis, la main d'un magicien voile la carte et fait disparaître quelques symboles. L'image de la figure 3.5 montre un cas où 5 carreaux ont été effacés sur une carte en contenant 10 au départ. Les consignes sont : « Où étaient placés les carreaux qui sont disparus? Il manque donc combien de carreaux? » (Lyons et Bisaillon, 2018). Les élèves doivent indiquer où se trouvaient les carreaux disparus et dire combien de carreaux ont été effacés. Ils montrent leur réponse, sur leur bureau, avec des jetons. Ils doivent donc non seulement trouver la quantité manquante, mais aussi refaire le modèle de la carte à jouer. Les activités Magie du 5 et du 10 sont proposées puisque ce sont des nombres importants dans notre système de numération en base dix.

Déroulement de l'activité

<u>Avant l'activité :</u>

Cette activité est présentée sur le TNI. Les élèves sont placés en équipe de deux, cela permet la discussion entre les élèves qui doivent se mettre d'accord. Ils doivent trouver le nombre manquant ensemble et placer les jetons en conséquence. Des jetons leur sont fournis. Des cartes à jouer « vides », assez grandes pour mettre les 10 jetons, pourraient aussi leur être données pour faciliter leur travail en leur fournissant un cadre dans lequel placer leurs jetons.

Figure 3.5
Exemple du jeu Magie
Lyons et Bisaillon, 2011

[17] Cette tâche a été élaborée à partir d'une sélection de cas issus des activités *Magie* des *Incontournables du sens du nombre*.

Pendant l'activité :

Il est demandé aux élèves de trouver le nombre de carreaux manquants et d'en retenir la disposition. Ils doivent expliquer à leur collègue comment ils ont fait pour y arriver.

Après l'activité :

À la fin de l'activité, l'enseignant anime une discussion pour connaître les cas que les élèves ont jugés plus faciles ou plus difficiles et pour leur permettre de partager les stratégies qu'ils ont employées. L'activité est prévue durer une quinzaine de minutes.

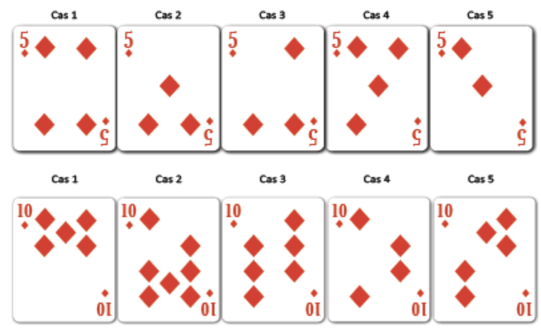


Figure 3.6
Cas pour la Magie du 5 et du 10
Lyons et Bisaillon, 2011

Notions mathématiques

Cette activité a pour but de développer, chez les élèves, une flexibilité par rapport à la représentation de 5 et de 10 quantités en présentant un autre type de constellation aux élèves, celui du jeu de cartes ordinaire. Il s'agit de les amener à développer leurs habiletés de groupitisation en recomposant des constellations. Cette activité donne aux élèves l'opportunité de reconnaître l'intérêt des constellations pour compter et pour se faire une représentation mentale des quantités manquantes. Elle développe leur flexibilité dans le traitement et la manipulation des quantités. Elle donne donc l'occasion aux élèves de réfléchir sur les quantités. Enfin, les élèves vont travailler les complémentaires de 5 et de 10.

Variables didactiques

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- les constellations;
- les modes de représentation externe.

Les constellations

Les constellations sont celles habituellement utilisées sur les cartes à jouer. Le but est de développer la flexibilité additive à partir d'une variété de dix décompositions de 5 et de dix décompositions de 10, comme le montre la figure 3.6. Certaines constellations de « ce qui reste » peuvent être plus difficiles que d'autres parce qu'elles ne se présentent pas dans la forme prototypique de cette quantité. Par exemple, le cas 2 de la *Magie* du 5 présente 3 carreaux restants qui ne sont pas placés comme le sont les 3 carreaux sur une carte de jeu classique. Ce cas peut être plus difficile que le cas 1 de la *Magie* du 5 qui lui présente 4 carreaux restants, placés de la façon classique pour le 4 sur un jeu de cartes ordinaire. Différentes stratégies seront ainsi sollicitées lors de cette activité permettant de développer de la flexibilité par rapport aux représentations des quantités, en s'appuyant sur une représentation imagée.

<u>Les modes de représentation externe</u>

Cette activité propose les quantités dans des représentations externes en mode imagé et concret. Le mode imagé est présent puisque les élèves verront des images des constellations de 5 et de dix sur le TNI. Le mode concret entre aussi en jeu puisque les élèves construiront les constellations avec des jetons. Ils pourront manipuler les jetons. Le mode verbal entrera aussi en jeu lorsque l'élève va décrire comment il est arrivé à la réponse.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs aptitudes du niveau 1 du continuum, soit leur capacité de percevoir des petites numérosités. Ils ont aussi besoin d'utiliser leurs habiletés du niveau 2 du continuum, soit leur pensée additive et leurs habiletés de groupitisation pour recomposer les quantités qui leur sont présentées. Les connaissances des complémentaires de 10 pourraient aussi être utilisées dans cette activité.

Conduites des élèves

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité:

- conduite visée :
    - les élèves déterminent la quantité de carreaux manquants en ayant recours à leurs capacités de subitisation et de groupitisation. Il est possible de penser qu'ils se sont fait une représentation mentale imagée et dynamique de la quantité initiale de la constellation, puisqu'ils doivent jouer avec la représentation des carreaux dans leur tête (en ajouter). Pour la figure 3.6, par exemple, un élève pourrait dire pour le cas 2 de la magie du 10 : « il en manque 3, parce que c'est la diagonale ici qui manque (en parlant de la diagonale du 3 manquante) »;

- les élèves déterminent la quantité de carreaux manquants, après avoir déterminé le nombre de carreaux qui restent à partir de leurs habiletés de groupitisation, en utilisant leur connaissance des faits numériques (ce qui fait 5 et ce qui fait 10).
- ils déterminent la quantité de carreaux manquants, après avoir déterminé le nombre de carreaux qui restent à partir de leurs habiletés de groupitisation, en faisant un surcomptage, c'est-à-dire en comptant à partir du nombre de carreaux restants jusqu'au nombre visé.
- les élèves déterminent les carreaux manquant en utilisant leurs connaissances des faits numériques (ce qui fait 10).

- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
  - les élèves déterminent les complémentaires en comptant sur leurs doigts. Il est possible de penser que leur représentation mentale de la constellation n'est pas complète.
- conduites qui mènent à une erreur :
  - les élèves font un mauvais comptage séquentiel;
  - ils font un mauvais comptage global en regroupant les mauvaises constellations, par exemple, en disant qu'il en manque 8 au cas 3, sans avoir compté les carreaux un à un. Il est possible de penser que leur représentation mentale de la constellation n'est pas complète.
  - ils font un mauvais comptage global du nombre de carreaux restant.

Les deux prochaines activités sont les activités proposées pour la deuxième période. L'activité principale, *Joyaux (Intro)*, vise le niveau 3 et l'activité d'entraînement, *Pyramide*, permet de continuer de développer les habiletés de groupitisation du niveau 2.

Période 2

***Joyaux (Intro)*[18]**

But de l'activité

Le but de cette activité est d'amener les élèves à prendre conscience de la pertinence du groupement pour compter des grandes quantités. Il s'agit aussi de les amener à tirer profit du développement

[18] Le scénario d'introduction est tiré de l'activité présente sur le site des *Incontournables du sens du nombre*. Le jeu de rôle est un ajout. Il favorise l'échange de stratégies entre les élèves.

de leurs habiletés de groupitisation dans les activités de niveau 2 pour constater l'utilité de placer les groupements dans une disposition subitisable.

Description de l'activité

Cette activité se déroule en deux parties. Cette première partie permet de présenter le contexte de l'activité et d'amorcer une discussion avec les élèves par rapport à leurs stratégies liées au niveau 3 (pensée multiplicative). La deuxième partie, travaillée lors de la troisième période, permet aux élèves de poursuivre la construction de représentations mentales de quantités.

La première partie est une activité de résolution de problèmes. Le contexte de l'activité est le suivant : « Gardevert et Gardebleu sont chargés de surveiller les joyaux du Royaume. Gardevert somnole souvent et quelque chose lui dit que son collègue en profite... Mais comment le prouver? Gardevert ne sait pas compter, mais il a bon œil... Il redispose les diamants : " Si ça bouge, je le saurai! " » (Lyons et Bisaillon, 2018). La figure 3.7 présente les deux dispositions de joyaux qui sont proposées aux élèves.

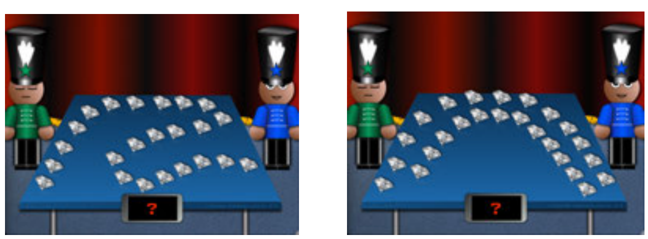


Figure 3.7
Les deux scénarios d'introduction du jeu Joyaux
Lyons et Bisaillon, 2018

Déroulement de l'activité

<u>Avant l'activité :</u>

Cette activité est présentée sur le TNI. Les élèves sont invités à aider Gardevert en lui proposant une autre stratégie, plus efficace et plus visuelle. Les élèves sont placés en équipe de deux. Une première discussion est animée, par l'enseignant, à propos des deux premières stratégies employées par Gardevert, soient de placer les jetons en lignes. Les élèves se placent ensuite en équipe de deux. Une quarantaine de jetons leur sont distribués.

Pendant l’activité :

Un jeu de rôle est proposé aux élèves. Ils sont à tour de rôle Gardebleu ou Gardevert. La consigne est : comment pourrais-tu aider Gardevert à placer ses jetons pour qu’il puisse voir du premier coup d’œil si Gardebleu a pris des joyaux? »

Après l’activité :

L’enseignant anime une discussion après le travail des élèves. Le but de cette discussion est de faire constater qu’un simple alignement des joyaux n’est pas une stratégie efficace (peu visuel et peu rapide). Il devient impossible de prouver que Gardebleu a volé des joyaux ; il s’agit d’une stratégie de nature additive (niveau 2), unidimensionnelle, qui ne permettra pas à Gardevert de contrôler sa collection. Ainsi, lorsqu’il y a de plus en plus d’éléments dans une collection, une disposition stratégique facilite la mémorisation de la quantité et permet de déterminer la quantité manquante plus rapidement. Une durée de 45 minutes est prévue pour cette activité.

Notions mathématiques

Cette activité conduit les élèves à réfléchir et constater le rôle du groupement en réinvestissant le constat fait dans les activités de groupitisation (niveau 2) : lorsque les quantités à compter sont bien placées, il est plus facile de s’en faire une représentation mentale. C’est utile pour comparer de grandes quantités et éventuellement les compter (même si le total n’est pas demandé ici). Cette activité introduit le niveau 3 du continuum, soit la reconnaissance de la pertinence du groupement.

Variables didactiques

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- la représentation des groupes et les constellations à l’intérieur des groupes;
- les modes de représentation externe.

La représentation des groupes et constellations à l’intérieur des groupes

La disposition des joyaux, dans les deux cas, n’est pas subitisable, ceci dans le but d’amener les élèves à constater les limites des stratégies employées par Gardervert et d’engager une discussion à propos de meilleures stratégies.

Les modes de représentation externe

L'activité propose les quantités dans des modes de représentations externes imagés et concrets. Le mode imagé entre en jeu puisque les élèves voient des images des joyaux sur le TNI. Le mode concret est utilisé puisque les élèves disposent les jetons sur leur bureau. Ils peuvent les manipuler. Elle permet aussi aux élèves de réaliser un travail sur des collections dont le groupement est accessible.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs habiletés du niveau 2 du continuum, soit leurs habiletés de groupitisation. Ils doivent en effet y recourir pour organiser la collection de jetons en petits groupes subitisables. Ils auront l'occasion de développer des habiletés du niveau 3 du continuum, liées à leur pensée multiplicative, en s'appuyant sur leurs habiletés de groupitisation pour former des groupes et des groupes de groupes placés de façon subitisable.

Conduites des élèves

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de la première partie de cette activité:

- conduites visées :
  - les élèves placent les jetons en formant des constellations et mettent la même quantité de jetons dans chaque groupe. Il est possible de penser qu'ils utilisent leurs habiletés de groupitisation pour placer les jetons;
  - ils placent les groupes créés dans une constellation de deuxième niveau (groupes de groupes). Il est possible de penser qu'ils utilisent leur pensée multiplicative en s'appuyant sur leurs habiletés de groupitisation.
- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
  - les élèves placent les jetons en formant des paquets « non subitisables ». Il est possible de penser qu'ils utilisent un comptage séquentiel pour les former et que leur pensée n'est pas encore multiplicative.
- conduites menant à une erreur :
  - les élèves placent les joyaux en ligne;
  - ils ne placent pas le même nombre de jetons dans les paquets;
  - ils placent les joyaux sans aucun ordre.

La prochaine activité est une activité d'entraînement du niveau 2 du continuum qui conduit à la construction de représentations mentales dynamiques et imagées des petites quantités.

***Pyramide*[19]**

But de l'activité

Cette activité est une activité d'entraînement visant à travailler les complémentaires de 10.

Description de l'activité

Cette activité est une activité d'entraînement. Elle propose un solitaire. Le but du jeu est de retirer toutes les cartes de la pyramide, deux à la fois, dans la mesure où elles sont « libres » et que leur somme est 10 (complémentaires). Une carte est libre si aucune autre carte à part son complément n'est placée par-dessus elle.

Déroulement de l'activité

Avant l'activité :

Les élèves sont placés en équipe de deux. Pour jouer à la Pyramide du 10, on a besoin d'un paquet de cartes à jouer dont on a retiré les figures, pour garder l'as au 9 dans toutes les sortes, soit 36 cartes au total. Les élèves doivent ensuite mêler les cartes et les disposer comme le montre la figure 3.8.

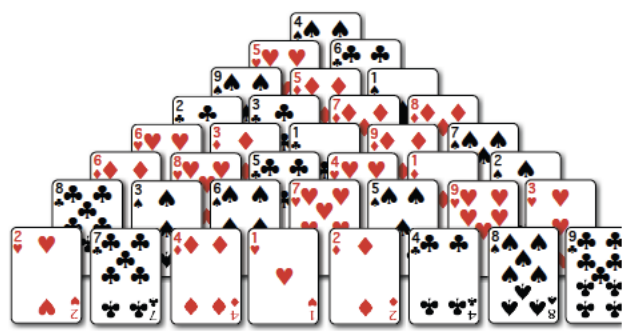


Figure 3.8
Démonstration du jeu Pyramide
Lyons et Bisaillon, 2011

Pendant l'activité :

Un élève joue en choisissant deux cartes à la fois et un autre l'observe, le but étant de retirer toutes les cartes de la pyramide. L'observateur peut aider dans la disposition des cartes ou dans le choix de cartes par exemple.

[19] Ce solitaire est issu des *Incontournables du sens du nombre*.

Après l'activité :

Il a été choisi de ne pas faire de discussion après cette activité puisqu'il s'agit d'une activité d'entraînement. La durée prévue pour l'activité est de 15 minutes.

Notions mathématiques

Le but de cette activité est de poursuivre le travail de réflexion par rapport à la reconnaissance de l'utilité des constellations. Cette activité permet aux élèves de réfléchir sur les nombres et de reconnaître la grandeur derrière les chiffres. Il s'agit d'une activité d'entraînement des complémentaires de 10 grâce au support imagé des constellations classiques du jeu de cartes. Cette mémorisation facilite la création de représentations mentales imagées des quantités. Ces représentations mentales seront utiles dans les activités des niveaux 3 et supérieurs qui demandent aux élèves de composer et décomposer des nombres organiser en groupes de 10 et en groupes de groupes de 10. Enfin, ils réfléchissent aux cartes à choisir en premier pour gagner, certains choix de cartes pourraient être plus intéressants que d'autres.

Cette activité permet aussi d'introduire la disposition triangulaire (la façon de disposer les cartes dans le solitaire). Certains élèves pourraient aussi mettre en œuvre des stratégies d'anticipations dans leur choix de cartes. Cette disposition sera réinvestie dans des activités du niveau 3 du continuum (*Joyaux*) et du niveau 4 du continuum (*Bergère 1 et 2*).

Variables didactiques

- les constellations;
- le mode de représentation externe.

Les constellations

Les constellations qui entrent en jeu dans cette activité sont les constellations classiques du jeu de cartes. Le fait d'avoir travaillé ces constellations préalablement dans l'activité *Magie* facilite l'entrée dans la présente activité.

Le mode de représentation externe

L'activité propose les quantités dans un mode de représentation externe imagé puisque les élèves travaillent à partir des constellations présentent sur le jeu de cartes ordinaires.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs habiletés du niveau 2 du continuum, soit leur pensée additive et leur capacité de groupitisation. Les connaissances acquises dans l'activité *Magie* par rapport à la constellation de 10 du jeu de cartes ordinaires leur permettront de jouer plus efficacement. Ils pourraient aussi faire un comptage séquentiel puisqu'il n'y a pas de contrainte de temps.

Conduites des élèves

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité:

- conduite visée :
    - les élèves déterminent les complémentaires de 10. Il est possible de penser qu'ils se sont fait une représentation mentale dynamique et imagée de la constellation de 10 des cartes à jouer. Par exemple, si on leur demandait pourquoi ils ont pris un 7 et un 3 pour faire 10, ils seraient capables de monter où, sur la carte du 7, ils iraient placer les 3 éléments de la deuxième carte;
    - les élèves déterminent les complémentaires en utilisant leurs connaissances des faits numériques (ce qui fait 10).
- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
    - les élèves déterminent les complémentaires en comptant sur leurs doigts, en comptant les deux cartes ou en ayant recours au surcomptage. Il est possible de penser que leur représentation mentale de la constellation n'est pas complète.
- conduites menant à une erreur :
    - les élèves font un mauvais comptage séquentiel;
    - ils font un mauvais comptage « global » en regroupant les mauvaises constellations, par exemple, en choisissant un 4 et le 7 pour faire 10, sans compter les éléments un à un.

Les prochaines activités sont celles qui sont proposées à la troisième période de la séquence. La première activité, *Joyaux (Activités),* poursuit le travail entamé avec l'activité *Joyaux (Intro)* par rapport à la perception de la pertinence du groupement du niveau 3. La deuxième activité, la *Tomathina (Boîtes)*, est une activité d'entraînement des habiletés de groupitisation du niveau 2.

Période 3

Joyaux (Activités)[20]

But de l'activité

Cette activité a pour but d'amener les élèves à utiliser les connaissances acquises dans l'activité Joyaux (Intro). Elle permet de développer le niveau 3 du continuum, soit la pensée multiplicative et plus particulièrement le sens de l'addition répétée.

Description de l'activité

Cette activité est la suite de l'activité Joyaux (Intro). Il s'agit d'une activité d'entraînement. Elle permet d'utiliser des connaissances apprises dans cette activité. En effet, les élèves ont maintenant l'occasion de travailler avec des représentations de joyaux placés en petits groupes. Tous les groupes contiennent le même nombre de joyaux et la représentation des joyaux est subitisable. La disposition des groupes est elle aussi subitisable. La figure 3.9 présente les cas qui sont utilisés avec les élèves.

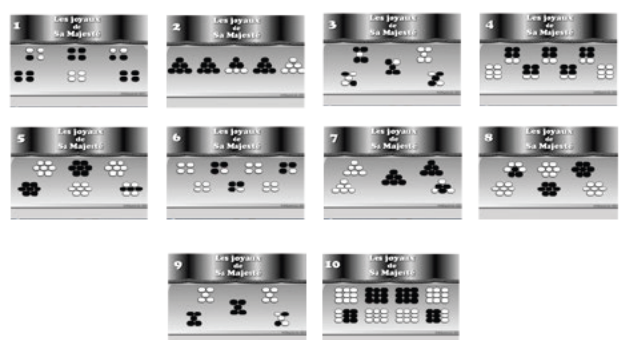


Figure 3.9
Cas de la deuxième partie de Joyaux
Lyons et Bisaillon, 2018

Déroulement de l'activité

Avant l'activité :

Les élèves sont placés en équipes de deux. Ils ont une cinquantaine de jetons.

[20] Cette tâche a été élaborée à partir d'une sélection de cas issus des activités *Joyaux* des *Incontournables du sens du nombre*.

Pendant l’activité :

Des représentations de joyaux sont présentées aux élèves sur le TNI durant 1,5 seconde (voir figure 3.9). Les ovales blancs sont les joyaux qui ont disparu et les ovales noirs les joyaux qui restent. La consigne est la suivante : « Pouvez-vous placer les joyaux manquants sur vos bureaux avec des jetons*?* Combien de joyaux sont manquants? » À partir du sixième cas, une feuille de notation est distribuée aux élèves. La quantité de joyaux augmentent, la feuille de notation vient les aider à garder des traces de la collection de départ. Il est demandé aux élèves de noter la quantité de joyaux au départ en tenant compte de leurs constellations et la quantité de joyaux manquants. Par exemple, pour le cas 6, ils écriraient qu’il y a « 7 ∷ »[21], ce qui signifie qu’il y a 7 paquets de 4 (voir l’annexe 3). Ils écriraient ensuite le nombre de joyaux manquants. Par exemple, pour le cas 6 ce serait « 4 ∷ 2 ▪ » ce qui signifie qu’il manque 4 paquets de 4 et 2 joyaux. Les élèves cherchent les réponses et discutent entre eux pour trouver le nombre de joyaux manquants. Ils ont l’occasion d’échanger sur les stratégies utilisées pour arriver à trouver la réponse. Même si le total des joyaux de départ n’est pas demandé, les élèves doivent tout de même retenir le nombre de paquets et le nombre de joyaux par paquets. La stratégie visée est le recours à la disposition des groupes et des joyaux dans les groupes.

Après l’activité :

En grand groupe, l’enseignant anime une discussion sur les cas qu’ils ont trouvé faciles ou difficiles et sur les stratégies qu’ils ont employées pour réaliser la tâche. Cette discussion permet de mettre en lumière l’importance de la disposition des éléments pour compter plus vite. Une durée de 45 minutes est prévue pour cette activité.

Notions mathématiques

Cette activité vise le développement de la flexibilité multiplicative en présentant des quantités groupées et en conduisant les élèves à se faire une représentation mentale des quantités groupées. Elle leur permet de réutiliser les connaissances acquises lors des activités précédentes, soit que le fait de placer les quantités en petits groupes subitisables permet de s’en faire une représentation mentale plus facilement. Cela permet d’appréhender le nombre d’éléments de la collection plus

[21] Les petits carrés représentent les joyaux.

rapidement. Au lieu d'énumérer le nombre de paquets de 9 dans le cas 10, il est possible de « voir » qu'il y en a 8, en s'appuyant par exemple sur la constellation du 8 dans un jeu de cartes. De la même façon, au lieu de compter un par un les éléments dans chacun de ces 8 paquets, il est possible de « voir » qu'il y en a 9, en s'appuyant sur une constellation classique du 9. Les élèves sont appelés à recomposer des quantités à partir de la représentation mentale qu'ils se sont construite.

Variables didactiques

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- la représentation des groupes et constellations à l'intérieur des groupes;
- le temps d'exposition aux représentations de départ des joyaux;
- les modes de représentation externe.

<u>La représentation des groupes et constellations à l'intérieur des groupes</u>

La disposition des joyaux dans chaque groupe est subitisable de même que la disposition des groupes entre eux. Une fois les joyaux disparus, il manque pour chacun des cas, au moins un groupe, de façon à porter l'attention des élèves sur la disposition des groupes et leur nombre, et au moins un joyau dans un groupe, pour cibler l'attention des élèves sur les constellations de chacun des groupes de joyaux. Les groupements proposés aux élèves dans cette activité sont apparents. Ce travail sur des collections groupées permettra l'évolution vers une représentation de plus en plus conventionnelle introduite dans les activités *Bergère 1 et 2.*

<u>Le temps d'exposition aux représentations de départ des joyaux</u>

Les différentes représentations des joyaux défilent sur le TNI les unes après les autres. Chaque représentation est présentée durant 2 secondes de façon à forcer les élèves à se faire une représentation de la quantité dans leur tête plutôt que de leur permettre de les compter un à la fois à l'écran.

<u>Les modes de représentation externe</u>

Trois modes de représentation externe sont exploités dans cette activité. Le mode imagé entre en jeu puisque les élèves voient des images des joyaux sur le TNI. Le mode concret est utilisé puisque les élèves disposent les jetons manquants sur leur bureau. Le mode symbolique est présent dans les derniers cas de l'activité lorsque l'élève note les joyaux de départ et les joyaux manquants. Le mode verbal est aussi utilisé lorsqu'il est question de décrire les dispositions des joyaux manquants.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs habiletés du niveau 2 du continuum, soit leurs habiletés de groupitisation pour faire un comptage global du nombre d'éléments dans chaque paquet et du nombre de paquets avant et après la disparition des joyaux. Au cours de l'activité, ils auront aussi recours à leurs habiletés du niveau 3 du continuum, leur pensée multiplicative, pour être capables d'établir la relation multiplicative entre le nombre de paquets et le nombre d'éléments dans chaque paquet, soit être capable de dire qu'il y a, par exemple, 8 paquets de 9 dans le cas 10.

Conduites des élèves

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de la deuxième partie de cette activité :

- conduite visée :
    - les élèves identifient la quantité de joyaux manquants en ayant recours à leurs habiletés de subitisation et de groupitisation (un groupe au complet ou à l'intérieur d'un groupe). Il est possible de penser qu'ils s'appuient sur leur représentation mentale dynamique et imagée de la disposition des groupes de joyaux et de la disposition des joyaux à l'intérieur des groupes pour reconstruire mentalement la collection initiale de joyaux et trouver le nombre de joyaux manquants. Ils peuvent, par exemple, déplacer mentalement des joyaux pour reconstituer un groupe.
- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
    - les élèves déterminent la quantité de joyaux manquants en tentant de recourir au comptage un à un ou à un surcompatge. Il est possible de penser qu'ils ne se sont pas fait une représentation mentale dynamique et imagée de la quantité;
    - ils trouvent le nombre de joyaux manquant en s'appuyant sur leurs connaissances des faits numériques.
- conduites menant à une erreur :
    - les élèves font une erreur de comptage séquentielle lorsqu'ils tentent de compter les joyaux manquants;

- ils font une erreur de comptage « global » en s'appuyant sur de mauvaises constellations des joyaux à l'intérieur des groupes ou sur de mauvaises constellations des groupes.

Il se peut que les premiers cas soient moins bien réussis. Les élèves doivent être rapides, le contrat didactique traditionnel est brisé, comme c'était le cas dans l'activité Oisillons par exemple.

La prochaine activité est une activité d'entraînement du niveau 2 du continuum qui conduit à la construction de représentations mentales dynamiques et imagées des petites quantités à partir de la boîte de 10.

***La Tomathina*[22]**

<u>Présentation générale de l'application</u>

Cette activité est une activité interactive; les élèves peuvent manipuler de façon virtuelle les éléments à mémoriser. Plusieurs types d'interaction sont possibles. Les activités peuvent être proposées en grand groupe, ce qui permet aux élèves de s'entraider en discutant de leurs stratégies ou des diverses façons de voir les quantités affichées. Ils peuvent aussi travailler en petites équipes ou seuls. Deux niveaux de compétition sont possibles : le mode alternance et le mode duel. Le mode alternance permet aux élèves de résoudre les problèmes les uns après les autres. Chaque bonne réponse donnera un point qu'il est possible d'ajouter sur le « tomathomètre ». Dans le mode duel, le même problème est présenté aux élèves et c'est le plus rapide qui a les points. Ces deux derniers modes de fonctionnement sont proposés lorsque les élèves ont compris le principe de l'activité. L'intention est alors d'augmenter leur vitesse de réaction. Il est aussi possible d'ajouter et d'enlever des tomates à tout moment lorsqu'elles sont visibles à l'écran. Ces fonctionnalités sont présentes pour tous les jeux de l'application.

Pour explorer les différentes facettes de la subitisation et de la groupitisation, cinq environnements sont proposés dans l'application *La Tomathina* : *Vrac, Boîtes, Mémoire, Superboîtes et Zone libre*. Dans les lignes qui suivent, nous faisons une analyse a priori de chacun de ces environnements, hormis ceux de Vrac et de la Zone libre qui ne sont pas exploités dans cette recherche.

[22] Les activités ont été choisies parmi plusieurs activités disponibles sur l'application de *la Tomathina*. Pour y accéder, il suffit de se créer un compte à partir d'une adresse de courriel et d'un mot de passe.

Boîtes de 10

But de l'activité

Cette activité vise à développer la flexibilité des habiletés de groupitisation à partir de la constellation de la boîte de 10.

Description de l'activité

Cette activité est une activité d'entraînement. Dans cette activité, les tomates sont placées dans des boîtes de 10. Ces cadrages rectangulaires de dimension 2 par 5 sont plus structurés; ils peuvent aider éventuellement à renforcer la perception de la dizaine (Losq, 2005). Une image de boîte de tomates est présentée durant une fraction de seconde.

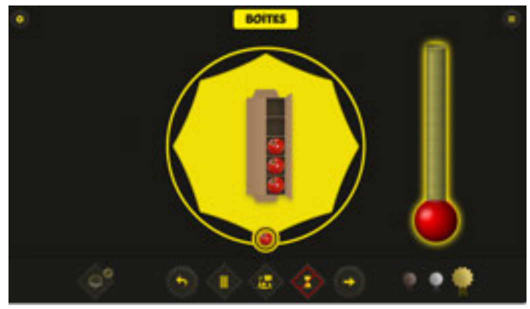


Figure 3.10
Boîte à demi fermée (colonne de 5 pleine)
Lyons, Bisaillon et Boisseau, 2018

Déroulement de l'activité

Avant l'activité :

Les élèves sont placés en grand groupe. L'activité est présentée sur le TNI.

Pendant l'activité :

Les élèves ont une fraction de seconde pour regarder la configuration de tomates et ensuite ils doivent décrire oralement ce qu'ils voient. Ils doivent répondre, à tour de rôle à des questions : « Qu'as-tu vu? Comment étaient placées les tomates? » Ensuite, on leur demande combien il y avait de tomates.

Après l'activité :

Un retour sur les différentes stratégies employées pour savoir le nombre de tomates dans la boîte de 10 est effectué. Il permet de souligner l'importance de la construction de la représentation mentale et permet aussi d'identifier des stratégies menant à cette construction.

Notions mathématiques

Le principal objectif de cette activité est d'amener les élèves à se faire une représentation mentale des quantités placées dans la boîte de dix pour accélérer leur capacité de traitement visuel des quantités. Ils sont appelés à jouer avec différentes décompositions de 10. Ils peuvent ainsi développer leurs capacités de comptage global à partir de leurs perceptions visuelles (niveau 2 du continuum). Un autre objectif lié à cette activité est que les élèves réinvestissent le constat fait dans l'activité des *Oisillons* : lorsque les quantités sont bien placées, il est plus facile de s'en construire une représentation mentale.

De façon plus spécifique, ils sont amenés à réfléchir sur les stratégies pouvant être utilisées pour faire un comptage global à partir de la boîte de 10. L'une de ces stratégies est la compensation. Il s'agit d'apprendre à utiliser les « cases vides » du cadrage de 5 ou de 10 (qui sert d'ancrage) pour découvrir le nombre de tomates, par exemple, dans la figure 3.10, il est possible de voir que 8 = 10 - 2 (stratégie de soustraction). La grandeur derrière le chiffre 10 est aussi travaillée dans cette activité.

Cette activité permet également de mettre en place la disposition rectangulaire (les cases représentent un rectangle dont les dimensions sont 2 X 5). Cette disposition est réinvestie dans l'activité *Stationnement* (niveau 3) et dans *Tohubohus* (niveau 4).

Variables didactiques :

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- le temps d'exposition aux différentes configurations de tomates;
- la disposition des tomates;
- les modes de représentation externe.

<u>Le temps d'exposition aux différentes configurations de tomates</u>

Le temps d'exposition est limité dans cette activité. Puisque l'un des buts de cette activité est d'amener les élèves à développer des habiletés mathématiques afin de pouvoir accélérer leur capacité de traitement visuel des quantités, les élèves ont peu de temps pour voir les configurations des tomates avant que ces dernières soient cachées. Cela les force aussi à se faire une représentation mentale de la boîte de 10 et à trouver la réponse à partir de cette représentation mentale. Au niveau bronze, 2 secondes sont accordées, soit le même temps que dans les *Oisillons*. Au niveau argent, 1 seconde et, au niveau or, 0,5 seconde. Rappelons que selon Starkey et McCandliss (2014), il faut 0,6 seconde à des élèves de 3^{e} année pour faire un comptage global des éléments lorsqu'ils sont groupés en petits groupes de 2 ou 3. Dans l'activité qui est proposée, les quantités sont organisées dans une boîte de dix, ce qui en facilite leur perception. De plus, il est possible de penser qu'un entraînement permettrait d'améliorer ce temps.

<u>La disposition des tomates</u>

Aux niveaux bronze et argent, les tomates sont disposées au hasard dans la boîte dans le but de développer la flexibilité des élèves (4 peut être représenté de différentes façons dans la boîte). Les stratégies de comptage visées sont à la fois des stratégies additives ou des stratégies de compensation. Les réponses attendues sont d'abord des décompositions additives, recourant aux complémentaires de 5 ou de 10. Au niveau or, les tomates sont systématiquement ordonnées selon la même séquence : de bas en haut et de gauche à droite, dans un souci d'efficacité (Losq, 2005).

<u>Les modes de représentation externe</u>

Les quantités sont proposées dans un mode de représentation externe imagé virtuel puisque les élèves voient des images des différentes constellations sur le TNI. Le mode oral entre aussi en jeu lorsqu'il est question de décrire la disposition des tomates dans les boîtes de dix.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs aptitudes du niveau 1 du continuum et du niveau 2 du continuum, soit leur capacité de percevoir des petites numérosités et leur pensée additive. La disposition aléatoire des tomates, au départ, permet de développer leur flexibilité additive. Ils doivent recomposer la quantité en faisant un comptage global des éléments de la constellation. La disposition systématique des tomates, ensuite, permet d'ancrer cette représentation de 10 afin de faciliter son utilisation ultérieure dans la réalisation de différentes tâches mathématiques.

Conduites des élèves

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité:

- conduite visée :
    - les élèves identifient la quantité de tomates en ayant recours à leurs capacités de subitisation et de groupitisation. Ils disent par exemple qu'il y en 2, 2 et 3 donc 7 (dans les cas où les tomates sont placées de façon aléatoire) ou qu'il y en a 7 parce qu'ils ont vu une ligne pleine et deux (dans les cas où les tomates sont placées de façon

systématique). Il est possible de penser qu'ils se sont fait une représentation mentale de la boîte de 10.

- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
    - les élèves tentent d'établir la quantité de tomates en recourant au comptage un à un;
    - les élèves nomment la bonne quantité de tomates, mais ne sont pas capables de décrire leur disposition. Il est possible de penser qu'ils n'ont pas été capables de se faire une représentation mentale de la quantité.
- conduites menant à une erreur :

    les élèves font un mauvais comptage.

Pour ce jeu, comme pour les *Oisillons*, les élèves peuvent être surpris par le type de tâche qui fait une rupture avec le type de contrat didactique habituel lors de situations de comptage ou de dénombrement. En effet, habituellement, ils ont tout le temps nécessaire pour compter et ici ils doivent traiter rapidement la quantité et la mettre dans leur tête. Au moment d'introduire le jeu, les élèves ont le temps de faire du comptage un à un ou encore de faire du surcomptage (compter et recompter ce qui a déjà été compté, par exemple dans la figure 3.10 compter 1, 2, 3 à droite et recommencer 1, 2, 3… jusqu'à 8 pour trouver le total de la boîte). Dans tous les cas, une description de plus en plus précise soutenant la représentation imagée est attendue de la part des élèves, pour qu'ils soient éventuellement capables de dire la quantité totale de tomates.

Les prochaines activités sont celles proposées à la quatrième période de la séquence. La première activité, *Bergère 1,* poursuit le travail entamé avec les *Joyaux* au niveau 3. La deuxième activité, *Bataille 1*, est une activité d'entraînement des habiletés du niveau 2.

Bergère, première partie [23]

But de l'activité

Le but de cette activité est d'amener les élèves à utiliser les connaissances acquises par rapport au niveau 3 du continuum, soit celles liées au groupement et à la pensée multiplicative pour

[23] Les activités *Bergère 1 et 2* ont été développées à travers la réalisation de la présente thèse. Elles sont aussi disponibles sur le site des *Incontournables du sens du nombre*.

s'approprier le niveau 4 du continuum, soit le passage à l'équivalence et à la capacité d'utiliser la dizaine pour traiter les quantités qui deviennent plus grandes.

Description de l'activité

Cette activité en est une de passage entre l'énumération et la numération. Une représentation recourant au principe d'énumération montre tous les éléments à dénombrer et il est toujours possible de les compter un à un. Une représentation recourant au principe de numération montre des unités d'ordre supérieur résultant des substitutions des différents groupes (comme les dizaines, les centaines…), ce qui ne permet plus un accès visuel direct à tous les éléments de l'ensemble à dénombrer (voir la figure 3.11 présentée plus bas). Cette activité se déroule en trois épisodes et se fait à partir d'un scénario qui est présenté aux élèves sur le TNI. Les deux premiers épisodes sont travaillés lors de cette période.

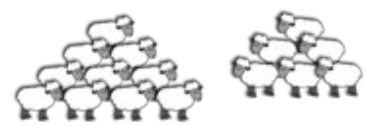


Figure 3.11
Disposition des moutons en paquets de 10
dans le jeu Bergère 1
Lyons et Bisaillon, 2020

<u>Épisode 1</u>

Ce premier épisode est une activité de résolution de problème. La bergère Bella est chargée de s'occuper des moutons du royaume et elle doit s'assurer de tous les ramener à la fin de l'hiver sinon l'empereur Malcommode sera très mécontent. Elle sait donc qu'elle devra compter les moutons chaque jour, mais ils bougent tout le temps (il y en a 16, soit un groupe de dix et six jetons). La question suivante est posée aux élèves : « Avez-vous des idées pour aider Bella à compter les moutons plus rapidement ? » Il s'agit d'un réinvestissement des connaissances acquises dans l'activité *Joyaux,* soit la pertinence de faire des groupes. La réponse attendue ici est de les placer (en groupe) pour pouvoir les compter plus facilement et pour qu'ils arrêtent de bouger. Astuzia, sa sœur la sorcière, vient à son secours en lui donnant une flûte magique qui justement suit ces recommandations. Lorsqu'elle joue de la flûte, les moutons se placent en groupe de dix et les moutons qui ne sont pas dans un groupe de dix se placent dans une constellation subitisable (voir figure 3.11). Ils restent immobiles le temps de les compter. Bella incarne les limites stratégiques de l'énumération et Astuzia permet de mettre en évidence les principes élémentaires du passage à la numération. Les élèves ont le temps de compter les dix moutons groupés un à un. Cet épisode permet d'introduire une sorte de groupes importante, les groupes de 10; il sert aussi d'introduction à l'épisode suivant.

Figure 3.12
Triangles de 10 et de 100 et notation mixte dans le jeu Bergère 1

Épisode 2

L'hiver venu, Bella ramène tous ses moutons à l'empereur Malcommode, qui est très satisfait. Il y a même deux nouveau-nés! Au printemps suivant, Bella est encore responsable des moutons, mais cette fois il y en a plus et malgré la flûte, elle n'arrive pas à compter les moutons parce qu'il y en a trop. La même question est posée aux élèves : « Avez-vous des idées pour aider Bella à compter les moutons plus rapidement ? » Il s'agit d'un réinvestissement des connaissances acquises dans l'activité *Joyaux*, soit l'utilité de compter avec des groupes sans compter tous les éléments un à un et l'idée de jouer de la flûte pour les placer en paquets de dix quelques instants. Astuzia arrive à la rescousse et va introduire le triangle de dix (dans lequel on ne voit plus les 10 moutons), une configuration non classique pour les groupes de dix. Elle va montrer à Bella qu'elle peut compter les groupes de dix (compter par bonds). Une notation mixte est aussi introduite pour permettre à Bella et aux élèves de garder la quantité de moutons en mémoire (voir figure 3.12). La fin de ce deuxième épisode mène à une activité dans laquelle les élèves sont appelés à s'entraîner à utiliser les connaissances acquises dans le premier et le deuxième épisode.

Déroulement de l'activité

Avant l'activité :

Avant l'activité, l'épisode 1 est présenté aux élèves sur le TNI. Il permet d'introduire les groupes de 10. Ils sont placés en grand groupe. Une courte discussion sur les stratégies pouvant aider Bella à compter ses moutons est animée par l'enseignant. À la suite de cette discussion, l'emploi de la stratégie de placer les moutons dans une position subitisable est utilisée par Bella. L'introduction de l'épisode 2 est ensuite présentée aux élèves. Cette fois-ci encore, il est demandé aux élèves d'aider Bella à compter ses moutons qui sont encore plus nombreux. Une discussion est animée par l'enseignant. L'idée d'utiliser « quelque chose » pour représenter 10 moutons est introduite aux élèves à la suite de cette discussion. Il s'agit de placer les moutons en triangle de 10. Les élèves se placent ensuite en équipe de 2. Des jetons, des triangles de 10 et la feuille de notation sont distribués.

Pendant l'activité :

Au début de l'activité, les moutons présents le matin se promènent à l'écran. Lorsque Bella joue de la flûte, les moutons se placent (voir figure 3.12). La consigne qui est donnée aux élèves est : « Compte tous tes moutons en début de journée. Vite, car le charme ne durera pas très longtemps ! » (Lyons et Bisaillon, 2020). Ils doivent trouver, à deux, une façon de retenir le nombre de moutons. Ensuite, les moutons se remettent à bouger, sans que l'on soit en mesure de voir si des moutons s'en vont. Belle rejoue de la flûte et les moutons se placent. À ce moment, la consigne est la suivante : « Y a-t-il des moutons qui manquent à l'appel ? Si oui, combien? » (Lyons et Bisaillon, 2020). Ils doivent trouver la réponse en discutant avec leur collègue. La feuille de notation est maintenant présentée aux élèves. Ils sont invités à noter, à l'aide de la notation mixte, le nombre de moutons au départ et le nombre de moutons manquants (voir la feuille de notation présentée à l'annexe 4).

Après l'activité :

À la fin de l'activité, une discussion est animée, par l'enseignant, en grand groupe avec les élèves pour identifier les difficultés rencontrées et tenter de nommer des stratégies utiles pour les surmonter. Une durée de 45 minutes est prévue pour cette activité.

Notions mathématiques

Le but de cette activité est que les élèves réinvestissent les fruits des apprentissages réalisés dans les activités qu'ils ont faits jusqu'à maintenant. Ils ont eu l'occasion de constater le rôle des constellations et leur utilité pour se faire une représentation mentale des quantités et pour compter globalement au lieu de séquentiellement. Ils auront à se servir de ces savoirs dans la présente activité qui fait le pont entre le niveau 3 du continuum et le niveau 4 en travaillant sur la dizaine et la centaine.

De façon plus précise, l'épisode 1 a pour but d'amener les élèves à avoir recours au principe qui veut que grouper permet de compter plus vite, exploré dans l'activité des *Joyaux* et d'installer le groupe de dix, soit la dizaine.

Dans l'épisode 2, l'élève développe ses habiletés à compter avec la « chaîne numérique groupée », c'est-à-dire de compter par bonds de 10. Encore une fois, c'est pour compter plus vite. L'élève apprend aussi un des rôles de l'écriture des nombres par des chiffres : garder une quantité en mémoire. Ici, une notation mixte, multiplicative et additive (un nombre de groupes de dix et un nombre d'unités sont additionnés) est proposée pour servir de tremplin à la notation positionnelle. Cette notation facilite la transition vers la notation positionnelle (Guitel, 1975; Ifrah, 1994). Dans cet épisode, il travaille aussi sa flexibilité dans le traitement et la manipulation des nombres puisqu'il doit recomposer des nombres.

Variables didactiques

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- les constellations;
- le temps durant lequel les moutons sont immobiles;
- le nombre de moutons (au départ et ceux qui sont partis se promener);
- les modes de représentation externe.

<u>Les constellations</u>

La pyramide de 10 a été choisie pour cette activité parce qu'elle est une configuration non classique. En effet, le but est toujours de développer de la flexibilité dans la représentation que les élèves se font des quantités. Aussi, cette représentation différente permet, éventuellement à un élève, qui a déjà entendu parler de dizaines et de centaines et qui pourrait être confus, de se faire une nouvelle représentation de ces concepts. Cette idée s'inspire des recommandations de Bednarz et Dufour-Janvier (1984b). Elles recommandaient de ne pas toujours présenter les représentations des nombres selon l'ordre conventionnel afin de permettre aux élèves de faire un réel travail sur les nombres et non d'associer simplement une position dans l'espace à un chiffre. Ici, il s'agit de proposer des représentations non conventionnelles pour leur permettre de se faire une autre représentation que celle des blocs de base 10.

Cette activité fait aussi appel à une collection groupée, dont les groupements sont d'abord apparents, dans l'épisode 1 et ne le sont plus dans l'épisode deux. Ce changement permet l'évolution vers une représentation de plus en plus conventionnelle.

Le temps durant lequel les moutons sont immobiles

Le temps d'exposition est limité pour favoriser la construction de représentations mentales. Les moutons sont immobiles durant 3 secondes, ce qui laisse le temps à Bella de compter les premiers moutons un par un, mais ce qui l'empêche de compter les plus grandes quantités de cette façon. Rappelons que selon Starkey et McCandliss (2014), les élèves de 2e année ont besoin de 3,5 secondes pour dénombrer 7 éléments non groupés et les élèves de 3e année ont besoin de 3 secondes. Dans cette activité, les moutons sont groupés en paquet de 10 et les élèves peuvent les compter un par un au début, mais les quantités augmentent rapidement et ils devront délaisser ce comptage un par un pour compter par groupes de 10. La contrainte de temps permet donc de partir de ce qu'ils sont capables de faire, mais de pousser les élèves à délaisser le comptage un à un pour compter par groupes.

Le nombre de moutons

Le nombre de moutons augmente avec chacun des épisodes afin d'amener l'élève à faire des groupes et des groupes de groupes. Dans l'épisode 1, le nombre est petit (moins de 20) parce qu'il s'agit ici de se servir de la constellation pour compter plus vite et d'arrêter notre choix sur le groupe de dix. Dans l'épisode 2, il y a toujours moins de 100 moutons. Le nombre de moutons le matin et le nombre de moutons le soir sont aussi des variables importantes. Dans les deux premiers cas, les élèves n'ont pas à décomposer un triangle de dix déjà plein. Par exemple, dans le cas 1, il y a 47 moutons le matin et il en reste 45 le soir. Il est possible d'enlever les 2 moutons à 47 sans avoir à décomposer une dizaine. Dans le cas 5, il y a 54 moutons le matin et 47 moutons le soir. Il faut donc enlever les 4 moutons « seuls », mais aussi « défaire » un triangle de 10 pour enlever les 3 autres moutons. Les élèves sont amenés à manipuler la dizaine en la décomposant (Jones, et coll., 1994; Reys, 1994). Dans les deux derniers cas, il manque plus de 10 moutons. Même s'il faut travailler sur les deux types de groupements, il ne faut pas défaire de triangle de 10, mais simplement en enlever un au complet ainsi que des moutons seuls.

Les modes de représentation externe

Les quantités sont proposées grâce à des représentations externes imagées et concrètes d'abord pour faciliter le passage vers le mode symbolique. Ainsi, trois modes de représentation externe sont exploités dans cette activité. Le mode imagé entre d'abord en jeu puisque les élèves voient des images des joyaux sur le TNI. Le scénario de chacun des épisodes est présenté sur le TNI, un peu comme un film. Le mode concret est utilisé puisque les élèves disposent les jetons et les triangles de 10 sur leur bureau. De plus, dans le tableau proposant la notation mixte, tous les moutons sont encore visibles dans le triangle de 10 alors que dans la représentation imagée, ils ne sont plus visibles. La notation symbolique est accompagnée d'une représentation imagée plus descriptive afin d'en faciliter l'appropriation.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs habiletés du niveau 2 du continuum, soit leurs habiletés de groupitisation. Elles leur permettent d'aider Bella à disposer ses moutons dans une disposition subitisable. Ils ont aussi particulièrement besoin de leurs habiletés du niveau 3 du continuum, leur pensée multiplicative. Ils auront en effet à compter des groupes et des groupes de groupes. Finalement, ils amorceront un travail sur le niveau 4. Ils auront l'occasion de constater le rôle de la dizaine pour compter plus efficacement lorsque les quantités sont importantes. Ils auront aussi l'occasion de la manipuler, soit de la composer et la décomposer.

Conduites des élèves

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de l'épisode 1:

- conduite visée :
    - les élèves réinvestissent leurs habiletés de groupitisation et de groupements en suggérant à Bella de disposer ses moutons de façon subitisable.
- conduite menant à une réussite, mais qui n'est pas celle visée par l'activité :
    - les élèves comptent les moutons sur leurs doigts, un à un. Il serait possible de penser qu'ils n'ont pas une représentation mentale adéquate de la quantité groupée.
- conduite menant à une erreur :
    - les élèves n'ont aucune idée de ce qu'ils pourraient faire pour aider Bella. Il serait possible de penser qu'ils n'ont pas une représentation mentale adéquate de la quantité groupée.

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de l'épisode 2 :

- conduites visées :

- les élèves identifient les moutons de départ en ayant recours à leur connaissance des groupements et en comptant par bons de dix (10 – 20 - 30…);
- ils utilisent adéquatement la chaîne groupée en comptant par bonds de dix;
- ils utilisent la notation mixte pour noter le nombre de triangles de 10 moutons et le nombre de moutons non groupés.

- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
  - les élèves comptent les moutons sur leurs doigts, un à un. Il serait possible de penser qu'ils n'ont pas une représentation mentale adéquate de la quantité groupée.
- conduites menant à une erreur :
  - les élèves font un mauvais comptage de la quantité de moutons de départ ou manquant. Il est possible de penser qu'ils ont tenté de compter les moutons un à un. Ils ont peut-être utilisé leur représentation mentale imagée et dynamique de la quantité groupée, mais celle-ci n'était pas adéquate.

La prochaine activité est une activité qui cible le niveau 2 du continuum, soit le développement des habiletés de groupitisation de la pensée additive.

***La bataille 1*[24]**

But de l'activité

Le but de ce jeu est de poursuivre la construction de la représentation interne de la boîte de 10 à travers une activité de comparaison.

Description de l'activité

Cette activité est une activité d'entraînement. Il s'agit d'une activité de comparaison. Ce jeu de cartes classique se joue à deux. Le gagnant est celui qui récolte toutes les cartes. Pour cette version du jeu, on utilisera un jeu de cartes ayant des boîtes de 10 pour représenter les quantités (voir figure 3.12). Le jeu de cartes est composé de 40 cartes. Les quantités vont de 0 à 10.

[24] Le jeu de cartes utilisé pour les activités Bataille 1 et 2 a été construit dans le cadre de la présente thèse.

Déroulement de l'activité

Avant l'activité :

Les élèves sont placés en équipe de deux. On distribue les cartes également entre les deux joueurs.

Pendant l'activité :

Les élèves doivent retourner une carte en même temps. Celui qui a la carte représentant la plus grande quantité remporte la mise. Si les deux joueurs tournent deux cartes de même valeur, il y a bataille. Dans ce cas, pour gagner la bataille, les joueurs déposent leur carte sur la table et retournent chacun une carte jusqu'à ce qu'un joueur tourne une carte de la même valeur que celle à l'origine de la bataille. Durant cette ronde spéciale, d'autres batailles peuvent survenir et elles donneront lieu à des rondes subséquentes.

Après l'activité :

Il n'y a pas de discussion prévue à la suite de cette activité, puisqu'il s'agit d'une activité réutilisant les boîtes de 10, déjà travaillées préalablement. La durée prévue pour cette activité est de 15 minutes.

Notions mathématiques en jeu

Cette activité d'entraînement permet aux élèves de s'exercer à utiliser leur représentation mentale de la boîte de 10. Ils continuent à réfléchir sur les nombres et à développer leur flexibilité de représentation de 10 en comparant les nombres. Ils vont avoir recours à cette représentation rectangulaire lors de l'activité *Stationnement* (niveau 3), de l'activité *Tohubohus* (niveau 4) et de l'activité *Visages de nombres* (niveau 4). Finalement, ce jeu permet aussi aux élèves d'utiliser les représentations des boîtes de 10 pour comparer des quantités.

Variables didactiques

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- les types de cartes (constellations, sans chiffres dans les coins);
- le mode de représentation externe.

Les types de cartes (constellations)

Pour donner suite au travail fait avec les boîtes de 10 dans la *Tomathina*, un jeu de cartes proposant les représentations des quantités dans des boîtes de 10 est utilisé, tel que présenté dans la figure 3.13. Quatre séries de dix cartes représentant les quantités de 0 à 10 ont été produites dans quatre couleurs différentes pour permettre différentes utilisations du jeu de cartes. Il n'y a pas de chiffres sur ces cartes pour orienter les stratégies des élèves sur l'utilisation des constellations. Une des séries de 0 à 10 est tout ouverte et pour les autres, dès qu'il y a 5 tomates dans une rangée, le rabat est fermé, comme le montre la figure 3.13. Cette contrainte a pour but de pousser les élèves à utiliser l'ancrage du 5 (de ne pas commencer à compter à 1, mais bien à 5 et de se servir de leur représentation mentale).

Le mode de représentation externe

Le mode de représentation externe exploité dans cette activité est le mode imagé puisque les élèves voient des images des quantités représentées dans les boîtes de 10 sur les cartes à jouer.

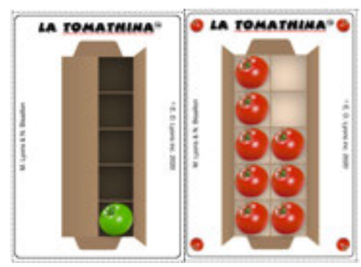


Figure 3.13
Exemple de cartes d'un jeu de cartes, avec des boîtes de 10

Connaissances sollicitées par cette activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs habiletés du niveau 2 du continuum, soit leur pensée additive. Ils doivent être capables de comparer rapidement des constellations de la boîte de 10.

Conduites des élèves

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité:

- conduite visée:
    - les élèves comparent les quantités de tomates en ayant recours à leurs capacités de subitisation et de groupitisation. Les raisonnements possibles sont nombreux. Ils peuvent par exemple, pour comparer 6 et 8 dire que 8 est plus grand parce qu'il ne manque que 2 tomates pour en avoir 10 ou que 6 en a seulement une de plus que 5 alors que 8 en a trois de plus que 5.
- conduites menant à la réussite, mais qui ne sont pas visées par cette activité :
    - les élèves déterminent la quantité de tomates en tentant de recourir au comptage un à un

et au surcomptage. Il est possible de penser que leur représentation mentale de la constellation n'est pas complète.

- conduites menant à une erreur :
  - les élèves font un mauvais comptage global;
  - ils font un mauvais comptage séquentiel.

Les prochaines activités sont celles prévues pour la période 5. La première activité, Bergère 2, est une activité visant le développement du niveau 4 du continuum en donnant l'occasion à l'élève de s'approprier la centaine. La deuxième activité est une activité d'entraînement des habiletés de groupitisation du niveau 2.

Période 5

Bergère, deuxième partie

But de l'activité

Le but de cette activité est d'amener les élèves à utiliser les connaissances acquises par rapport au niveau 4 du continuum, soit le passage à l'équivalence et à la capacité d'utiliser la dizaine pour être capable d'utiliser aussi la centaine pour traiter les quantités qui deviennent plus grandes.

Description de l'activité

Cette activité est la suite de l'activité Bergère 1. L'épisode 3 est maintenant proposé aux élèves. La présentation de l'épisode propose un nouveau problème à résoudre aux élèves. Ils seront par la suite invités à mettre en application la solution trouvée à ce problème.

<u>Épisode 3</u>

Encore une fois, Bella a bien fait son travail et l'empereur est content. Il lui demande de s'occuper des moutons au printemps suivant, mais il y a encore beaucoup plus de moutons. Il s'agit d'introduire un nouveau concept, soit le groupement récurrent, ou le groupe de groupes. Astuzia ne peut pas aider, sa magie ne peut faire plus. C'est Bella qui a l'idée de répéter ce qu'elle sait

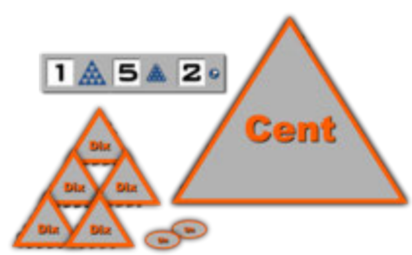


Figure 3.14
Triangles de 10 et notation mixte dans le jeu Bergère 2
Lyons et Bisaillon, 2020

déjà. Le triangle de cent est alors introduit et une nouvelle position pour la notation sera aussi ajoutée (voir figure 3.14).

Déroulement de l'activité

Avant l'activité :

L'introduction de l'épisode 3 leur est présentée. Une discussion en grand groupe sur ce que pourrait faire Bella est animée par l'enseignant. La question suivante est posée aux élèves : « Avez-vous des idées pour aider Bella à compter les moutons plus rapidement ? » La réponse attendue est qu'ils proposent de faire des groupes de groupes, comme dans l'activité *Joyaux*. Les élèves sont ensuite placés en équipe de deux. Des jetons, des triangles de 10 et de 100 sont distribués aux élèves. Une feuille de notation est présentée et distribuée aux élèves (annexe 4).

Pendant l'activité :

Un premier cas leur est présenté, sans préciser comment utiliser la notation mixte. La première consigne est : « Un premier charme a déjà groupé les moutons. Alors, répétons l'appel pour les grouper de nouveau. Note ce nombre sur Notation Épisode 3.PDF. Fais vite, car tu sais que le charme ne durera pas très longtemps. » (Lyons et Bisaillon, 2020). Les moutons se déplacent et certains s'en vont. Bella refait jouer de sa flûte pour grouper les moutons. Cette fois, la consigne est : « Y a-t-il des moutons qui manquent à l'appel ? Si oui, combien? » (Lyons et Bisaillon, 2020). Dans les six derniers cas de l'activité, les élèves doivent utiliser la notation positionnelle pour noter cette information. Les indices associés à la notation mixte, dessinés sur la feuille réponse, ne sont plus là.

Après l'activité :

À la fin de l'activité, une discussion est animée en grand groupe avec les élèves, par l'enseignant, pour identifier les difficultés rencontrées et tenter de nommer des stratégies utiles pour les surmonter. Une durée de 45 minutes est prévue pour cette activité.

Notions mathématiques

L'élève est appelé à réfléchir sur les nombres en réinvestissant les connaissances apprises dans les premiers épisodes. Il est amené à constater le rôle du groupement récurrent pour compter plus vite de grandes quantités (groupes de groupes) ; la centaine est introduite. Cette activité lui permet de constater la régularité des groupements de 10 dans notre système de numération. Il s'agit de connaissances du niveau 4. Il doit, en quelque sorte, trouver la réponse à des calculs élémentaires puisqu'il doit trouver le nombre de montons qui sont partis. Il travaille aussi sur la grandeur derrière les chiffres, c'est en effet dans cet épisode que la notation mixte laisse la place à la notation positionnelle (voir la feuille de notation placée à l'annexe 4).

Variables didactiques :

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- les constellations;
- le temps durant lequel les moutons sont immobiles;
- le nombre de moutons (au départ et ceux qui sont partis se promener);
- les modes de représentation externe.

<u>Les constellations</u>

Comme dans l'activité Bergère 1, la pyramide de 10 a été choisie pour cette activité parce qu'elle est une configuration non classique qui vise le développement de la flexibilité dans la représentation que les élèves se font des quantités. Les groupements ne sont plus apparents ni accessibles. Le travail sur cette collection groupée permet une évolution vers une représentation de plus en plus conventionnelle.

<u>Le temps durant lequel les moutons sont immobiles</u>

Le temps d'exposition est limité pour favoriser un travail à partir de la construction de la représentation mentale. Les moutons sont immobiles durant 3 secondes, ce qui laisse le temps à Bella de compter les premiers moutons un par un, mais ce qui l'empêche de compter les plus grandes quantités de cette façon. Rappelons que selon Starkey et McCandliss (2014), les élèves de 2e année ont besoin de 3,5 secondes pour dénombrer 7 éléments non groupés et les élèves de 3e année ont besoin de 3 secondes. Dans cette activité, les moutons sont groupés en paquets de 10 et les élèves peuvent les compter un par un au début, mais les quantités augmentent rapidement et ils devront délaisser ce comptage un par un pour compter par groupes de 10 et par groupes de 100. La contrainte de temps permet donc de partir de ce qu'ils sont capables de faire, mais de pousser les élèves à délaisser le comptage un à un pour compter par groupes.

<u>Le nombre de moutons</u>

Le nombre de moutons augmente avec chacun des épisodes afin d'amener l'élève à faire des groupes et des groupes de groupes. Il permet aussi d'introduire la pertinence de noter ce que l'on compte pour s'en souvenir. Dans l'épisode 1, le nombre est petit (moins de 20) parce qu'il s'agit ici de se servir de la constellation pour compter plus vite et d'arrêter notre choix sur le groupe de dix. Dans l'épisode 2, il y a toujours moins de 100 moutons. Dans l'épisode 3, il y a plus de 100 moutons dans tous les cas. Les cas pour chacun des épisodes ont été placés à l'annexe 4.

<u>Les modes de représentation externe</u>

Trois modes de représentation externe sont exploités dans cette activité. Le mode imagé entre en jeu puisque les élèves voient des images des joyaux sur le TNI. Le scénario de chacun des épisodes est présenté sur le TNI, un peu comme un film. Le mode concret est utilisé puisque les élèves disposent les jetons, les triangles de 10 et de 100 sur leur bureau. Le mode symbolique est présenté comme une solution pour retenir la quantité de moutons initiale qui devient de plus en plus importante. Cette introduction est progressive. Dans le tableau proposant la notation mixte, tous les moutons sont encore visibles dans le triangle de 10 et dans le triangle de 100 alors que dans la représentation imagée, ils ne sont plus visibles. La notation symbolique est accompagnée d'une représentation imagée plus descriptive afin d'en faciliter l'appropriation. Le mode symbolique, à l'oral, est aussi utilisé lorsqu'il est question de décrire les dispositions des moutons. L'activité fait appel à un travail sur des collections groupées, imagées et concrètes qui permettent une évolution vers une représentation de plus en plus conventionnelle.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs habiletés du niveau 2 du continuum, soit leurs habiletés de groupitisation; elles leur permettent de compter globalement les quantités de moutons. Ils ont aussi besoin de leurs habiletés du niveau 3 du continuum, leur pensée multiplicative pour comprendre le comptage par bonds de dix.

Conduites des élèves

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de l'épisode 3 :

- conduites visées :
  - les élèves identifient la quantité de moutons en ayant recours à leur connaissance du groupement et en utilisant la chaîne mixte (comptage par bonds de 100 et de 10, par exemple : 100 - 110 - 120 - 130…);
  - les élèves notent le nombre de triangles de 10 moutons et de 100 moutons et le nombre de moutons non groupés;
  - les élèves notent les quantités de moutons avec la notation positionnelle (font le transfert à partir de la notation mixte).
- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
  - les élèves tentent de faire un calcul comme s'ils effectuaient un calcul écrit (le nombre de moutons au départ moins le nombre de moutons restant).
- conduites menant à une erreur
  - les élèves font un mauvais comptage. Ils ont peut-être essayé de faire un comptage séquentiel, mais n'ont pas eu le temps de compter. Ils ont peut-être essayé de faire un comptage global, mais n'ont pas réussi à se faire une représentation mentale de la quantité initiale de moutons.

La prochaine activité est une activité d'entraînement des habiletés du niveau 2 du continuum.

Tomathina - Mémoire

But de l'activité

Cette activité a pour but de renforcer la perception visuelle des complémentaires de 10 et sa représentation mentale, chez les élèves tout en développant leur pensée additive (niveau 2 du continuum).

Description de l'activité

Cette activité est une activité d'entraînement. Le contexte de cette activité rappelle le jeu bien connu du même nom, à la différence qu'il faut ici associer deux quantités qui complètent une boîte de 10 et non trouver des boîtes contenant le même nombre.

Déroulement de l'activité

Avant l'activité :

Les élèves sont installés, en grand groupe, devant le TNI.

Pendant l'activité :

À tour de rôle, les élèves viennent jouer au jeu. La consigne suivante est donnée aux élèves : « Trouve deux boîtes pour faire 10 en tout. Si ça fait 10, pèse sur le rond du tomathomètre. Sinon, appuie sur la flèche pour jouer à nouveau. Souviens-toi bien des quantités de tomates qu'il y avait dans les boîtes que tu as ouvertes pour t'en servir le prochain coup! » (Lyons et Bisaillon, 2018).

Après l'activité :

Il n'y a pas de discussion prévue à la fin de cette activité d'entraînement. La durée prévue pour l'activité est de 15 minutes.

Notions mathématiques

Cette activité travaille sur la capacité de jouer avec les nombres, plus particulièrement avec la constellation de 10 de la boîte de 10, en la composant et la décomposant. Il s'agit d'augmenter la rapidité de calcul par rapport à ce qui fait 10 pour que ces connaissances s'automatisent. Encore ici, les élèves mettent à profit le constat fait dans l'activité *Oisillons* : lorsque les quantités sont bien placées, il est possible de compter plus rapidement et plus efficacement.

Cette activité permet aussi de mettre en place la disposition rectangulaire (les cases représentent un rectangle dont les dimensions sont 2 X 5). Cette disposition sera réinvestie dans des activités du niveau 3 du continuum (*Stationnement*) et du niveau 4 du continuum (*Tohubohus*).

Variables didactiques :

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- la disposition des tomates;
- les modes de représentation externe.

La disposition des tomates

Quatre séries de boîtes de 1 à 9 sont cachées. Toutes les boîtes présentent une disposition ordonnée des tomates, de bas en haut et de gauche à droite puisqu'il s'agit ici d'automatiser cette représentation de la boîte de dix.

Les modes de représentation externe

Le mode imagé virtuel est utilisé dans cette activité puisque les élèves voient les images des boîtes de dix sur le TNI. Le mode verbal entre aussi en jeu lorsqu'il est question de dire le nombre de tomates dans les boîtes de dix.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs habiletés du niveau 2 du continuum, soit leur pensée additive et leurs habiletés de groupitisation. En effet, il ne s'agit pas simplement de percevoir rapidement des petites quantités, mais bien d'additionner instantanément des petits groupes perçus, de faire un comptage global.

Conduites des élèves :

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité:

- conduites visées :
    - les élèves associent les boîtes de 10 en ayant recours à leurs capacités de subitisation et de groupitisation ; ils font un comptage global;
    - ils utilisent leurs connaissances des faits numériques.
- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
    - les élèves associent les boîtes de 10 en ayant recours au comptage un à un ou un surcomptage. Il est possible de penser que leur représentation mentale de la constellation n'est pas complète.
- conduites menant à une erreur :
    - les élèves associent de mauvaises boîtes de 10; ils font un mauvais surcomptage : par exemple, j'ai vu 5 auquel j'ajoute 4, l'élève dit 5, 6, 7, 8 au lieu de 6, 7, 8 et 9;
    - ils associent de mauvaises boîtes de 10; ils font un mauvais comptage global.

Les prochaines activités sont celles de la période 6. L'activité principale vise à travailler le niveau 3 du continuum en proposant l'arrangement rectangulaire pour représenter de grandes quantités. La deuxième activité est une activité d'entraînement des habiletés du niveau 2.

Période 6

***Stationnement*[25]**

But de l'activité

Le but de cette activité est d'amener les élèves à recourir à l'arrangement rectangulaire pour représenter des quantités de plus en plus grandes, une habileté qui peut être associée à la pensée multiplicative du niveau 4.

Figure 3.15
Exemple d'un cas pour l'activité Stationnement, Série 1
Lyons et Bisaillon, 2011

Description de l'activité

Cette activité se fait à partir d'un scénario qui est présenté aux élèves sur le TNI. Un certain nombre d'automobiles sont disposées en rangées et en colonnes; il s'agit du stationnement d'un concessionnaire automobile (voir les figures 3.15 et 3.16). Plusieurs automobiles sont vendues durant la journée et les élèves doivent indiquer où elles étaient stationnées. Deux séries de cinq cas sont proposées. Les premiers cas permettent une introduction en douceur de l'arrangement rectangulaire en donnant l'occasion aux élèves de réinvestir les constats faits dans les activités du niveau 2 du continuum : organiser les éléments à compter permet de compter plus rapidement, l'arrangement rectangulaire étant une organisation intéressante. Cette première série se veut une activité de résolution de problèmes. Dans la deuxième série, les élèves sont invités à s'entraîner à réinvestir les connaissances acquises.

Déroulement de l'activité

<u>Avant l'activité :</u>

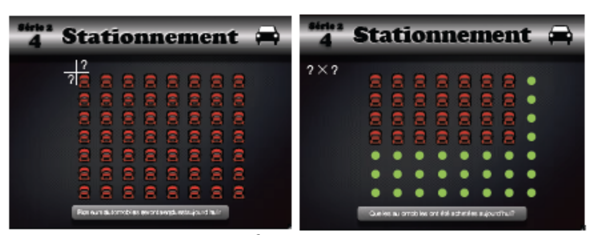


Figure 3.16
Exemple d'un cas pour l'activité Stationnement, Série 2
Lyons et Bisaillon, 2011

Pour la première série, les élèves sont placés en grand groupe devant le TNI. La consigne qui est donnée à l'élève est la suivante : « Où étaient placées les voitures qui ont été vendues durant la journée? » (Lyons et Bisaillon, 2018). Une

[25] Cette tâche a été élaborée à partir d'une sélection de cas issus des activités *Stationnement* des *Incontournables du sens du nombre*.

discussion sur les stratégies utilisées pour trouver l'emplacement des voitures vendues est animée par l'enseignant. Les élèves sont appelés à décrire ce qu'ils voient. Ils sont encouragés à parler de colonnes et de rangées ou à utiliser l'expression « par » qui est une expression multiplicative. Ils sont ensuite placés en équipe de deux et une feuille de notation leur est distribuée.

Pendant l'activité :

Pour la deuxième série, la consigne qui est donnée aux élèves est la même, à savoir : « Où étaient placées les voitures qui ont été vendues durant la journée? Combien de voitures ont été vendues durant la journée? » (Lyons et Bisaillon, 2018). Ils sont invités à discuter avec leur collègue et à noter leur réponse sur la feuille de notation.

Après l'activité :

Une discussion sur la réalisation de la deuxième série est animée par l'enseignant pour faire ressortir les stratégies qui ont été employées. La durée prévue pour cette activité est de 45 minutes.

Notions mathématiques

Cette activité travaille la capacité de réflexion sur les nombres et sur les quantités des élèves à partir de l'arrangement rectangulaire. Mémoriser uniquement les dimensions d'un arrangement rectangulaire est plus rapide et plus efficace que d'énumérer tous les éléments qui s'y trouvent. Elle favorise aussi la construction d'une représentation mentale dynamique et imagée à partir de ce sens de la multiplication. Elle donne l'occasion aux élèves de représenter les quantités d'une autre façon.

L'arrangement rectangulaire est aussi présent dans le matériel de manipulation avec les blocs de base dix. Elle sert donc de tremplin à l'activité *Tohubohus* qui met de l'avant les blocs de base dix pour travailler le passage à la centaine.

Variables didactiques :

- le nombre de voitures;
- la disposition des voitures;
- le temps d'exposition;
- le quadrillé pour la feuille de notation;

- les modes de représentation externe.

Le nombre de voitures

Deux séries sont proposées aux élèves. La première série contient au plus 6 voitures dans une rangée (voir un exemple à la figure 3.15). La limite subitisable est légèrement dépassée. La deuxième série, elle, en contient au plus 9 (voir un exemple à la figure 3.16). Cette activité mène donc l'élève aux limites de la représentation rectangulaire de la centaine (qui contient 10 rangées de 10 colonnes). Les cas proposés aux élèves se trouvent à l'annexe 5.

La disposition des voitures

L'arrangement rectangulaire a été choisi pour cette activité parce qu'il permet bien de travailler l'aspect simultané de la pensée multiplicative. En effet, l'élève doit considérer à la fois les colonnes et les rangées (Battista et coll., 1998; Mulligan et col. 2011) pour déterminer les voitures manquantes.

Le temps d'exposition

Les élèves ont tout le temps nécessaire pour se faire une représentation mentale de l'arrangement rectangulaire. Il s'agit de l'occasion, pour l'intervenant, de les accompagner dans ce nouvel apprentissage.

Le quadrillé de la feuille de notation

Le choix de cette variable s'inspire des travaux de Battista et coll. (1998) par rapport à la structuration spatiale et à l'arrangement rectangulaire. Dans leurs travaux, ils demandaient aux élèves de compléter des arrangements rectangulaires dont les grilles étaient parfois vides, parfois entamées et parfois complètes. Pour l'activité *Stationnement,* il a été choisi de proposer une feuille de notation dans laquelle les cases étaient d'abord présentes, les élèves pouvant ainsi se servir de la grille pour indiquer les voitures manquantes. Dans les derniers cas des séries, la grille est retirée, les élèves doivent s'appuyer seulement sur leur représentation mentale pour indiquer les voitures manquantes.

Les modes de représentation externe

Trois modes de représentation externe sont exploités dans cette activité. Le mode imagé entre en jeu puisque les élèves voient des images du stationnement sur le TNI. Le mode imagé est aussi utilisé sur la feuille de notation. Il y a aussi une variable didactique dans le mode imagé de la feuille de notation. En effet, les premiers cas des deux séries présentent les cas dans une grille, afin d'aider les élèves à visualiser la disposition rectangulaire, tandis que les derniers cas n'ont pas cette grille afin de permettre aux élèves de faire le transfert (voir l'annexe 5). Le mode symbolique est présent lorsque les élèves utilisent la notation lors de la série 2; ils vont noter les dimensions de l'arrangement rectangulaire. Le mode verbal est aussi utilisé lorsqu'il est question de décrire les dispositions des voitures dans le stationnement.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs habiletés du niveau 2 du continuum, soit leurs habiletés de groupitisation. Ils ont aussi particulièrement besoin de leurs habiletés du niveau 3 du continuum, leur pensée multiplicative, puisqu'ils devront considérer simultanément deux informations, soit le nombre de colonnes et le nombre de rangées.

Conduites des élèves

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de la première partie de cette activité:

- conduites visées :
  - les élèves recréent l'arrangement rectangulaire en plaçant les voitures manquantes à la bonne place. Il est possible de penser qu'ils ont eu recours à leur représentation mentale de l'arrangement rectangulaire;
  - les élèves notent de façon symbolique l'arrangement rectangulaire.
- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
  - les élèves déterminent la quantité de voitures manquantes en recourant au comptage un à un, et les replacent dans la bonne disposition. Il est possible de penser qu'ils n'ont pas une représentation mentale adéquate de la quantité.
- conduites menant à une erreur :
  - les élèves déterminent la quantité de voitures manquantes en recourant au comptage un à un, mais ne sont pas capables de replacer les voitures manquantes dans la bonne

disposition;

- ils sont capables de décrire l'arrangement rectangulaire du départ et de dire le nombre de voitures manquantes, mais ils ne sont pas capables de reproduire l'arrangement rectangulaire;
- ils ont de la difficulté à gérer l'orientation de l'arrangement rectangulaire (les colonnes par rapport aux rangées).
- ils donnent une réponse au hasard.

Pour toutes les conduites menant à une erreur, il est possible de penser qu'ils n'ont pas une représentation mentale adéquate de la quantité.

La prochaine activité est une activité d'entraînement des habiletés du niveau 2.

La bataille 2

But du jeu :
Cette activité a pour but d'automatiser la représentation mentale de la boîte de 10 et d'amener les élèves à l'utiliser pour obtenir mentalement la réponse à des calculs élémentaires.

Description de l'activité
Cette activité est une activité d'entraînement. Dans cette deuxième version de l'activité *Bataille*, les joueurs devront tourner deux cartes à la fois. Le vainqueur est celui qui a la plus grande somme. Il y aura bataille lorsque les deux élèves arriveront à la même somme. La représentation avec la boîte de 10 devient intéressante parce qu'il s'agit d'une façon de fixer une image mentale facilitant l'addition et la soustraction, de l'automatiser.

Déroulement de l'activité
<u>Avant l'activité :</u>
La consigne est donnée aux élèves par rapport à la nouvelle variante du jeu, soit le fait qu'il faut tourner deux cartes chacun et que le gagnant est celui qui a la plus grande somme. Les élèves sont placés en équipe de deux. Les cartes sont distribuées.

Pendant l'activité :

Les élèves jouent. Le gagnant est celui qui a la plus grande somme. Les deux joueurs doivent se mettre d'accord pour déterminer le gagnant. S'il y a un désaccord, ils doivent s'organiser pour prouver à l'autre qu'ils ont raison.

Après l'activité :

Il n'y a pas de discussion de prévue à la suite de cette activité. La durée prévue pour l'activité est de 15 minutes.

Notions mathématiques

Ce jeu réutilise la représentation externe de la boîte de 10 proposée aux élèves dans le jeu de la *Tomathina* et vise à en automatiser sa représentation interne. Les élèves peuvent se resservir de cette représentation rectangulaire lors de l'activité *Stationnement* (niveau 3), de l'activité *Tohubohus* (niveau 4) et de l'activité *Visages de nombres* (niveau 4). Cette variante du jeu permet aussi aux élèves de développer de la flexibilité dans le traitement et la manipulation des nombres. Ils peuvent jouer avec l'emplacement des tomates dans leur tête pour trouver la somme de leurs deux cartes. Ils sont donc amenés à travailler avec différentes représentations des nombres, en jouant avec les nombres (composition et décomposition). Ils en viennent à être capables de calculer mentalement la réponse à des calculs élémentaires.

Variables didactiques

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- les types de cartes (constellations, sans chiffres dans les coins);
- le mode de représentation externe.

Les types de cartes (constellations)

Pour donner suite au travail fait avec les boîtes de 10 dans la *Tomathina*, un jeu de cartes proposant les représentations des quantités dans des boîtes de 10 est utilisé, tel que présenté dans la figure 3.11. Quatre séries de dix cartes représentant les quantités de 0 à 10 ont été produites dans quatre couleurs différentes pour permettre différentes utilisations du jeu de cartes. Il n'y a pas de chiffres sur ces cartes pour orienter les stratégies des élèves sur l'utilisation des constellations. Une des séries de 0 à 10 est tout ouverte et pour les autres, dès qu'il y a 5 tomates dans une rangée, le rabat est fermé, comme le montre la figure 3.12. Cette contrainte a pour but de pousser les élèves à utiliser l'ancrage du 5 (de ne pas commencer à compter à 1, mais bien à 5 et de se servir de leur représentation mentale).

<u>Le mode de représentation externe :</u>

Un mode de représentation externe est exploité dans cette activité : le mode imagé puisque les élèves voient des images des quantités représentées dans les boîtes de 10 sur les cartes à jouer.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin d'utiliser leurs habiletés du niveau 2 du continuum, soit leur pensée additive, plus particulièrement leur connaissance de la boîte de 10.

Conduites des élèves

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité :

- conduites visées :
    - les élèves déterminent la quantité de tomates en ayant recours à leurs capacités de subitisation et de groupitisation. Il est possible de penser qu'ils s'appuient sur leur représentation mentale de la boîte de 10 en complétant par exemple, pour 7 + 6 une boîte de dix qui a 7 tomates par 3 éléments de l'autre boîte qui en a 6, ce qui fait 10 et ils ajoutent ceux qui restent, ici ce serait 3. Ils ont donc 10 + 3, ce qui donne 13;
    - ils utilisent leur connaissance des faits numériques.
- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
    - les élèves déterminent la quantité de tomates en tentant de recourir au comptage un à un et au surcomptage. Il est possible de penser qu'ils n'ont pas une représentation mentale adéquate de la quantité.
- conduites menant à une erreur :
    - les élèves font un mauvais comptage global;
    - ils font un mauvais comptage séquentiel.

Il se peut que cette variante, dans laquelle ils doivent additionner deux cartes, soit plus difficile lors des premières parties puisque les quantités à traiter sont plus grandes (jusqu'à 20) et que leur expérience de comptage à partir de représentations imagées est moins grande. Leur performance devrait s'améliorer en jouant.

Figure 3.17
Exemple d'un cas Tohubohus 1
Lyons et Bisaillon, 2018

Les prochaines activités présentées sont celles de la période 7. L'activité principale est une activité qui permet de développer de la flexibilité par rapport aux habiletés du niveau 4, soit par rapport à l'usage de la centaine (*Tohubohus 1*). La deuxième activité vise l'automatisation des habiletés du niveau 2 (*La Tomathina, Super boîtes*).

Période 7

***Tohubohus 1*[26]**

But de l'activité

Le but est de permettre aux élèves de se construire une représentation imagée de la quantité organisée en groupes de dix et en groupes de cent (niveau 4).

Description de l'activité

Le contexte de cette activité s'inspire du réel fonctionnement de l'armée romaine. En effet, les soldats, appelés légionnaires, étaient organisés selon différents groupements. Un groupe de dix légionnaires portait le nom de la décurie (c'est-à-dire un groupe de 10 soldats) et le responsable de la décurie s'appelait le décurion. Cent légionnaires regroupés dans un arrangement carré formaient une centurie; le chef d'une centurie était le centurion. Les élèves sont invités à commenter les diverses situations de problèmes avec ce vocabulaire qui s'approche beaucoup de celui qui est utilisé dans le système de numération afin d'ajouter une image aux mots dizaines et centaines qui sont utilisés généralement; ces mots peuvent être vides de sens pour certains élèves.

[26] Les deux activités de Tohubohus ont été élaborées à partir d'une sélection de cas issus des *Incontournables du sens du nombre*.

Déroulement de l'activité

Avant l'activité :

L'activité est introduite par une petite mise en scène présentée sur le TNI. C'est le chaos dans la légion de Tohubohus. Les légionnaires de ce camp romain sont très indisciplinés. « Chaque matin, Tohubohus voit s'élancer ses braves soldats. Au retour, impossible de savoir combien manquent à l'appel. La pauvre légion romaine de Tohubohus est hors de contrôle. Appelé à la rescousse, le sage Numérius va transformer la légion de Tohubohus en y mettant un peu d'ordre » (Lyons et Bisaillon, 2018). Une discussion est amorcée par l'enseignant, à ce moment avec les élèves, pour faire ressortir leurs idées pour mettre un peu d'ordre dans cette légion. Les élèves sont appelés à résoudre le problème de Tohubohus. Il est souhaité qu'ils fassent des liens avec les activités réalisées préalablement et qu'ils mentionnent l'idée de bien placer les soldats (niveau 2), en groupes (niveau 3), et éventuellement en dispositions rectangulaires (niveau 3). C'est Numérius qui proposera de former des décuries et ensuite des centuries. Ainsi, lorsque Tohubohus appellera le rassemblement, les légionnaires vont se placer de façon à former des décuries et des centuries bien faciles à compter et qui auront une allure très proche de celle des blocs de base dix. Deux activités autour de ce thème sont proposées aux élèves, une dans la présente période et une autre dans la période 8, pour leur permettre de réutiliser les connaissances acquises.

Dans cette première activité, une centurie part affronter ses adversaires, mais au retour c'est encore le chaos. Les élèves doivent utiliser leur matériel pour dire combien de légionnaires ne sont pas encore rentrés au camp. Ils peuvent ensuite valider leur réponse puisque l'on voit les retardataires arriver par la suite. Éventuellement, deux centuries partiront affronter leurs adversaires. Un exemple est présenté à la figure 3.17. Dans ce numéro, il y avait une centurie au départ qui se prépare à aller affronter le village gaulois.

Les élèves sont placés en équipe de deux. Du matériel de base dix est distribué aux équipes. La feuille de notation est présentée et distribuée aux élèves.

Pendant l'activité :

La question qui est posée aux élèves pendant l'activité est : « Combien de légionnaires tardent à rentrer au camp? Utilise ton matériel romain pour montrer ta réponse. » (Lyons et Bisaillon, 2018).

Ils doivent donc, à deux, disposer le matériel sur leur bureau. Ils doivent tous les deux être d'accord avec leur réponse. Ils auront donc à échanger sur leurs stratégies.

Après l'activité :

Une discussion en grand groupe est animée par l'enseignant afin de faire ressortir les stratégies utilisées.

Notions mathématiques

Cette activité vise à développer la flexibilité d'équivalence des élèves par rapport à ce qui constitue une centaine, habileté du niveau 4. Les liens faits avec le monde réel facilitent ce développement de flexibilité en permettant aux élèves de reconnaître la grandeur derrière les chiffres. Le fait de nommer une dizaine « décurie » et une centaine une « centurie » aide les élèves à se représenter cette quantité dans leur tête; ce n'est pas seulement un mot, mais bien quelque chose qui représente une quantité. Ils sont aussi appelés à jouer avec les nombres puisqu'ils doivent les recomposer.

Variables didactiques :

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- le nombre de soldats au total et en retard;
- les modes de représentation externe.

Le nombre de soldats au total et en retard

Dans l'activité À tes risques! il y a cent soldats au départ pour les cinq premiers cas et deux cents pour les cinq derniers cas. Les soldats sont placés en centuries dans lesquelles les légionnaires sont encore visibles (matériel aux groupements apparents). Dans les cinq premiers cas, il faut décomposer la dizaine et la centaine. Pour les cinq derniers cas le travail est réalisé à partir de deux centaines. Il manque au départ une centaine complète et des dizaines et ensuite ça varie sur les trois niveaux (centaines, dizaines et unités). La feuille de notation avec les solutions, déposée à l'annexe 6, permet de voir ces détails.

Les modes de représentation externe

Quatre modes de représentation externe sont exploités dans cette activité. Le mode imagé entre en jeu puisque les élèves voient des images sur le TNI. Le mode imagé est aussi utilisé sur la feuille de notation. En effet, les premiers cas des deux activités sont sous la forme de la notation mixte (voir l'annexe 6) afin de faciliter le passage vers la notation positionnelle. Le mode concret intervient aussi puisque les élèves utilisent leurs blocs de base dix. Ce matériel présente les groupements de manière apparente, mais non accessible, c'est-à-dire que l'on voit les dix unités dans la dizaine et les cent unités dans la centaine, mais qu'elles ne sont pas directement accessibles. Il faudra faire un échange pour y accéder. Le matériel joue un rôle de support à la compréhension de la représentation symbolique. Le mode symbolique est présent dans les derniers cas sur la feuille de notation puisqu'ils sont sous la forme positionnelle. Le mode verbal est aussi utilisé lorsqu'il est question de décrire les dispositions des légionnaires dans le camp.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont particulièrement besoin de leurs habiletés du niveau 3 du continuum, leur pensée multiplicative, puisque les légionnaires sont placés en groupes de 10 et de 100. Ils auront l'occasion de développer leurs habiletés du niveau 4, soit la flexibilité dans le traitement et la manipulation de la dizaine et de la centaine.

Conduites des élèves :

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité:

- conduites visées :
  - les élèves reconstituent les dizaines et les centaines;
  - ils placent leur matériel de base dix en respectant les règles de la subitisation pour mieux voir et compter plus vite;
  - ils font preuve de flexibilité dans la représentation d'une centaine et d'une dizaine (ils voient rapidement que 12 dizaines sont équivalentes à une centaine et deux dizaines);
  - ils utilisent adéquatement la notation mixte;
  - ils utilisent adéquatement la notation positionnelle.
- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
  - les élèves comptent les légionnaires un à un. Il est possible de penser qu'ils n'ont pas une représentation mentale adéquate de la quantité.
- conduites menant à une erreur :
  - les élèves ne sont pas capables d'attribuer la valeur de 10 à la décurie ou de 100 à la

centurie. Ils tentent de compter les légionnaires un à un;

- ils font une erreur de calcul un à un en reconstituant la dizaine ou la centaine;
- ils font une erreur de calcul « global » (à partir de la représentation imagée ou concrète de la dizaine ou de la centaine) en reconstituant la dizaine ou la centaine.

La prochaine activité est une activité d'entraînement du niveau 2 du continuum.

Super Boîtes

But de l'activité

Cette activité vise aussi à automatiser le traitement visuel que les élèves se font des représentations des boîtes de dix (habileté du niveau 2).

Description de l'activité

Cette activité est une activité d'entraînement. Il s'agit du même jeu que *Boîtes*, sauf que cette version vise à automatiser les habiletés mathématiques qui permettront d'augmenter la rapidité de la reconnaissance des configurations de tomates. Il est aussi possible de travailler avec deux boîtes de dix, augmentant ainsi le niveau de difficulté puisque les élèves ont à additionner le contenu de deux boîtes. Le travail proposé ressemble alors au travail réalisé dans l'activité Bataille 2. La différence avec cette activité est que la limite du temps d'exposition force les élèves à se servir de leur représentation mentale.

Déroulement de l'activité

Avant l'activité :

Les élèves sont installés, en grand groupe, devant le TNI.

Pendant l'activité :

À tout de rôle, les élèves viennent jouer au jeu. Les questions posées à ce niveau de jeu sont : « Combien il y avait de tomates? Comment as-tu fait pour les compter? » (Lyons et Bisaillon, 2018).

Après l'activité :

Une discussion est animée par l'enseignant afin de faire ressortir les stratégies employées par les élèves pour compter le nombre de tomates, malgré le temps d'exposition limité. Une durée de 15 minutes est prévue pour cette activité.

Notions mathématiques

L'activité *Super Boîtes* vise à exploiter davantage le cadre imagé des boîtes de dix pour renforcer cette représentation de l'addition. Elle développe de la flexibilité dans le traitement et la manipulation des nombres. Elle permet aux élèves d'inventer leurs procédures de comptage. Elle permet aussi aux élèves de composer et de décomposer des nombres. Finalement, elle donne l'occasion aux élèves de reconnaître la grandeur derrière les chiffres (voir figure 3.18).

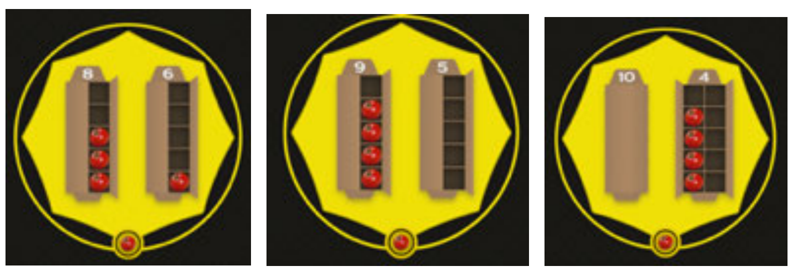


Figure 3.18
Jeu Super Boîtes de la Tomathina, un exemple de manipulations de tomates pour passer de 8 + 6 à 10 + 4
Lyons, Bisaillon et Boisseau, 2018

Cette activité permet aussi de continuer à mettre en place la disposition rectangulaire (les cases représentent un rectangle dont les dimensions sont 2 X 5).

Variables didactiques :

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- le temps d'exposition aux différentes configurations de tomates;
- la disposition des tomates;
- le mode de représentation externe.

Le temps d'exposition aux différentes configurations de tomates

Étant donné qu'un des buts de cette activité est d'accélérer le traitement visuel que les élèves font des représentations des boîtes de dix, le temps alloué pour traiter les représentations externes des tomates est de plus en plus court. Dans la première variante du jeu, avec une boîte de dix, au niveau bronze, les élèves auront 1 seconde pour voir les boîtes de dix. Au niveau argent, ils auront 0,75 seconde et au niveau or, 0,5 seconde. Pour la deuxième variante, avec deux boîtes, ils auront 2 secondes au niveau bronze, 1,5 seconde au niveau argent et 1 seconde au niveau or. Encore une fois, ces délais s'appuient sur les recherches Starkey et McCandliss (2014), soit qu'il faut 0,6 seconde à des élèves de 3e année pour percevoir des petites quantités groupées. Ainsi, ils ont plus de temps dans les deux premiers niveaux et un peu moins dans le troisième niveau puisqu'il est possible de penser que l'organisation des tomates dans la boîte de 10 facilite leur perception. De plus, les élèves auront eu l'occasion d'apprendre à se représenter cette boîte de 10 dans leur tête.

La disposition des tomates

Dans la première variante du jeu, les élèves doivent de nouveau déterminer le nombre de tomates placées dans une boîte de 10. Dorénavant, lorsqu'il y aura une pleine colonne de 5 tomates, elle sera toujours recouverte par un rabat (voir la figure 3.18); un rabat peut toujours être ouvert manuellement pour montrer les tomates qu'il recouvre.

Dans la deuxième variante du jeu, on présente deux boîtes de 10. La réponse attendue ici est la somme exacte des quantités affichées. L'activité permet aux élèves d'établir une image mentale servant de support à la table d'addition. Aux niveaux argent et or, les sommes sont de plus en plus grandes. La dernière variante du jeu vise à initier les élèves aux tables d'addition, cette fois en affichant symboliquement l'opération. Dans cette variante, ouvrir l'obturateur permet d'associer l'expression symbolique à la représentation imagée correspondante.

Le mode de représentation externe

Le mode imagé virtuel est utilisé dans cette activité (images des boîtes de dix sur le TNI).

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour jouer à ce jeu, les élèves ont besoin de leurs habiletés du niveau 2 du continuum ce qui leur permet de faire un comptage global à partir de leur représentation mentale dynamique et imagée de la boîte de 10.

Conduites des élèves :

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité:

- conduites visées :
  - les élèves identifient la quantité de tomates en ayant recours à leurs habiletés de groupitisation et en s'appuyant sur la représentation mentale qu'ils ont développée de la boîte de 10. Ils sont capables de manipuler les quantités, décomposer et recomposer les nombres. Par exemple, le cas 8 + 6 peut devenir 9 + 5 et ensuite 10 + 4 en transférant manuellement des tomates de la boîte située à droite dans la figure 3.18 vers celle qui est placée à gauche. L'élève pourrait aussi voir 2 X 5, ce qui donne dix et ajouter le 3 et le 1 pour trouver 14;
  - ils ont recours à leur connaissance des complémentaires de 10.
- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
  - les élèves déterminent la quantité de tomates en tentant de recourir au comptage un à un. Il est possible de penser qu'ils n'ont pas une représentation mentale adéquate de la quantité.
- conduites menant à une erreur :
  - les élèves font un mauvais comptage global;
  - ils font un mauvais comptage global;
  - ils font une erreur de calcul (mauvaise connaissance des complémentaires de 10).

La prochaine période propose deux activités du niveau 4. La première permet aux élèves de peaufiner leur représentation mentale de la centaine (*Tohubohus 2*) et la deuxième leur permet de s'entraîner à y avoir recours pour calculer (*Photos de nombres*).

Période 8

Tohubohus 2

But de l'activité

Cette activité vise le développement de la flexibilité du niveau 4, soit la capacité de traiter et de représenter une centaine de différentes façons.

Description de l'activité

Cette activité en est une d'entraînement. Elle fait suite à l'activité *Tohubohus 1* présentée à la période précédente. C'est un moment de détente au camp et les élèves doivent prédire à quoi ressemblera le rassemblement de légionnaires appelé par Tohubohus. Une image est présentée aux élèves sur laquelle il y a des décuries et des légionnaires éparpillés. Un exemple est présenté à la figure 3.19.

Figure 3.19
Exemple d'un cas pour l'activité Tohubohus 2
Lyons et Bisaillon, 2018

Déroulement de l'activité

Avant l'activité :

Les élèves sont placés en équipe de deux. Du matériel de base dix est distribué aux équipes. La feuille de notation est présentée et distribuée aux élèves.

Pendant l'activité :

La consigne qui leur est donnée est la suivante : « *Décris l'ensemble des légionnaires de Tohubohus, comme ils sont répartis dans leur camp, actuellement.* » Un tableau avec une notation mixte apparaît et écrit le nombre de décuries et de légionnaires que l'on voit à l'écran, par exemple : 12 décuries et 5 légionnaires. La consigne suivante est ensuite proposée aux élèves : « Prédis la formation lors du rassemblement qui va suivre. Combien de légionnaires peut-on facilement compter? Utilise ton matériel pour faire ta prédiction. » (Lyons et Bisaillon, 2018). Finalement, on leur demande : « Combien de légionnaires peut-on facilement compter ? » Ils doivent donc, à deux, disposer le matériel sur leur bureau. Ils doivent tous les deux être d'accord avec leur réponse. Ils auront donc à échanger sur leurs stratégies.

Après l'activité :

Une discussion en grand groupe est animée par l'enseignant afin de faire ressortir les stratégies utilisées. Une durée de 45 minutes est prévue pour cette activité.

Notions mathématiques

Cette activité permet de poursuivre le développement de la flexibilité d'équivalence en permettant aux élèves de faire des liens graduellement entre les modes de représentations concrets et imagés et le mode de représentation symbolique. Elle sert de tremplin au calcul mental. Les élèves apprennent qu'un nombre peut se représenter de différentes façons. Elle fait réfléchir les élèves sur les nombres et leur permet de reconnaître la grandeur derrière les chiffres, en leur permettant, entre autres, de faire des liens entre les mathématiques et le monde réel (les légionnaires, les décuries et les centuries). Elle leur permet de jouer avec les nombres en les composant et les décomposant.

Variables didactiques :

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- le nombre total de soldats;
- la disposition des soldats avant le rassemblement;
- les modes de représentation externe.

<u>Le nombre total de soldats</u>

Dans les trois premiers cas, de façon à travailler la formation de la centaine, il y a plus de dix dizaines. Par la suite, il y a à la fois plus de dix dizaines et plus de dix unités, de façon à travailler sur les deux niveaux de groupements.

<u>La disposition des soldats avant le rassemblement</u>

Dans les images proposées à l'écran, il est difficile de compter les légionnaires un à un. Cette contrainte encourage les élèves à bien placer les légionnaires sur leur bureau pour pouvoir compter plus vite. Cela permet aussi l'utilisation des connaissances acquises dans les activités préalables. Lors de la vérification des prédictions, les décuries sont placées en groupes de quatre afin que ce soit plus facile à voir à l'écran.

<u>Les modes de représentation externe</u>

Quatre modes de représentation externe sont exploités dans cette activité. Le mode imagé entre en jeu puisque les élèves voient des images sur le TNI. Le mode imagé est aussi utilisé sur la feuille de notation. En effet, les premiers cas des deux activités sont sous la forme de la notation mixte (voir l'annexe 6), ce qui facilite le passage vers la notation symbolique positionnelle. Le mode concret intervient aussi puisque les élèves utilisent leurs blocs de base dix. Le matériel vient supporter l'élève dans le développement de sa compréhension du système de numération. Le mode symbolique est présent dans les derniers cas sur la feuille de notation puisqu'ils sont sous la forme positionnelle. Le mode verbal est aussi utilisé lorsqu'il est question de décrire les dispositions des légionnaires dans le camp.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin de leurs habiletés du niveau 3 du continuum, leur pensée multiplicative, puisque les légionnaires sont placés en groupes de 10 et de 100. Ils aussi besoin de leurs habiletés du niveau 4, soit la flexibilité dans le traitement et la manipulation de la dizaine et de la centaine.

Conduites des élèves :

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité:

- conduites visées :
    - les élèves reconstituent les dizaines et les centaines. Ils sont capables de dire, par exemple, que 14d + 24u = 164;
    - ils placent leur matériel de base dix en respectant les règles de la subitisation pour mieux voir et compter plus vite;
    - ils font preuve de flexibilité dans la représentation d'une centaine et d'une dizaine (ils voient rapidement que 12 dizaines sont équivalentes à une centaine et deux dizaines);
    - ils utilisent adéquatement la notation mixte;
    - ils utilisent adéquatement la notation positionnelle.
- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
    - les élèves comptent les légionnaires un à un. Il est possible de penser qu'ils n'ont pas une représentation mentale adéquate de la quantité.
- conduites menant à une erreur :
    - les élèves ne sont pas capables d'attribuer la valeur de 10 à la décurie ou de 100 à la centurie;
    - ils font une erreur de calcul un à un en reconstituant la dizaine ou la centaine;
    - ils font une erreur de calcul « global » (à partir de la représentation imagée ou concrète de la dizaine ou de la centaine) en reconstituant mal la dizaine ou la centaine.

La prochaine activité est une activité d'entraînement du niveau 4 du continuum.

***Photos de nombres*[27]**

But de l'activité

Le but de cette activité est de travailler le niveau 5 du continuum, la capacité de l'élève à manipuler les nombres et leurs multiples représentations.

Description de l'activité

Cette activité est une activité d'entraînement. Des blocs de base dix s'affichent à l'écran et les élèves doivent calculer le nombre qu'ils représentent.

Déroulement de l'activité

<u>Avant l'activité :</u>

Les élèves sont placés en équipe de deux. Un compteur leur est distribué. Plusieurs types de compteurs peuvent être utilisés (voir figure 3.20).

Figure 3.20
Suggestions de compteurs

<u>Pendant l'activité :</u>

La consigne qui leur est donnée est la suivante : « Des blocs de base dix vont s'afficher durant 8 secondes. Note sur ton compteur le nombre le plus précis possible. » (Lyons et Bisaillon, 2018). Ils doivent s'entendre dans leur équipe et écrire leur résultat sur un compteur.

<u>Après l'activité</u>

Une courte discussion est animée par l'enseignant après cette activité afin de permettre aux élèves d'échanger sur les stratégies qu'ils ont employées. La durée prévue de cette activité est de 15 minutes.

[27] L'activité *Photo de nombre* a été élaborée à partir d'une sélection de cas issus des *Incontournables du sens du nombre*.

Notions mathématiques

Le premier objectif est de développer la flexibilité de représentation qui permet de reconnaître un nombre sous différents « visages ». Le deuxième objectif est d'amener l'élève à réinvestir les connaissances acquises dans la séquence d'activités : bien placer les blocs permet d'augmenter l'efficacité en calcul global et éventuellement en calcul mental. Ils pourraient aussi avoir recours à l'estimation, plus le temps d'exposition est court, s'ils n'ont pas le temps de tout calculer.

Variables didactiques :

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- la disposition des blocs de base dix;
- les décompositions des nombres;
- le temps d'exposition;
- les modes de représentation externe.

<u>La disposition des blocs de bas dix</u>

Les blocs de base dix sont placés dans une position qui est subitisable, c'est-à-dire qu'ils sont percevables en un coup d'œil. La disposition proposée pour les dizaines permet de voir rapidement qu'il y a cinq dizaines. Elle peut être nouvelle pour certains élèves. De plus, les centaines sont placées en haut, suivi des dizaines et des unités, ce qui permet de les disposer plus facilement sur l'écran. La figure 3.21 en donne un exemple. Cette activité n'est pas une activité d'apprentissage, mais une activité d'entraînement à faire du calcul « global », d'où l'importance de disposer les éléments dans une position subitisable.

<u>Les décompositions de nombres</u>

Dans tous les cas présentés dans cette activité, les élèves doivent recomposer au moins une dizaine ou au moins une centaine, afin de tirer profit de la flexibilité de représentation des nombres développée par l'élève.

<u>Le temps d'exposition</u>

Puisqu'un des buts est de travailler des stratégies pour libérer la mémoire, chacun des cas est chronométré. Le temps est d'abord de

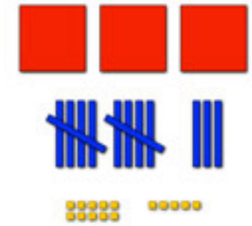


Figure 3.21
Disposition subitisable des blocs de base dix

8 secondes, ensuite de 6 secondes et finalement de 4 secondes. Nous reprenons le même délai que celui qui est accordé lors de l'outil d'évaluation et pensons que les élèves pourront améliorer leur performance parce qu'ils auront eu l'occasion de développer leur sens du nombre et leur compréhension du système de numération au cours de cette séquence. Il s'agit aussi d'une façon de s'entraîner à faire du calcul mental.

<u>Les modes de représentation externe</u>

Trois modes de représentation externe sont exploités dans cette activité. Le mode imagé entre en jeu puisque les élèves voient des images sur le TNI. Le mode symbolique est présent lorsque les élèves notent leur réponse sur le compteur, sous la forme positionnelle ou encore lorsque la notation mixte leur est présentée à l'écran. Le mode verbal est aussi utilisé lorsqu'il est question de décrire les décompositions.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin de leurs habiletés du niveau 4 du continuum, soit la flexibilité dans le traitement et la manipulation de la dizaine et de la centaine.

Conduites des élèves :

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité:

- conduites visées :
    - les élèves reconstituent les dizaines et les centaines. Ils sont capables de dire, par exemple pour la figure 3.21, qu'ils ont vu 3c + 13d + 15u et que ça donne 300 + 130 + 15 donc 445;
    - ils font preuve de flexibilité dans la représentation d'une centaine et d'une dizaine (ils voient rapidement que 13 dizaines sont équivalentes à une centaine et trois dizaines) ;
    - ils utilisent adéquatement la notation positionnelle.
- conduites menant à une erreur[28] :
    - les élèves ne sont pas capables d'attribuer la valeur de 10 à la dizaine ou de 100 à la centaine. Il est possible de penser qu'ils n'ont pas une représentation mentale adéquate

[28] Dans cette activité, étant donne le court temps d'exposition, il n'y a pas de conduites menant à une réussite mais qui ne sont pas celles visées par l'activité.

de la quantité. Ils ne sont pas capables de réaliser l'activité;

- ils font une erreur de calcul un à un en reconstituant la dizaine ou la centaine;
  ils font une erreur de calcul « global » (à partir de la représentation imagée ou concrète de la dizaine ou de la centaine) en reconstituant mal la dizaine ou la centaine.

La prochaine période donne l'occasion aux élèves de continuer à développer leurs habiletés du niveau 5 du continuum, soit la flexibilité dans le traitement et la manipulation des nombres dans leur représentation symbolique.

Période 9
Nombres magiques[29]

But de l'activité

Le but de cette activité est de développer les habiletés du niveau 5 du continuum, soit la compréhension de la numération de position, à partir de représentations concrètes et imagées des quantités (blocs de base dix).

Description de l'activité

Cette activité est une activité d'entraînement. Une suite d'opérations se déroulent sous les yeux des élèves. Les blocs de base dix apparaissent et vont se cacher dans le chapeau. Les élèves doivent faire la même chose au fur et à mesure avec leurs blocs de base dix. Éventuellement, on demandera aux élèves de suivre le déroulement et de donner la réponse au problème sans leurs blocs de base dix. Pour l'addition, les blocs de base dix vont se cacher dans un chapeau de magicien. Pour les soustractions, c'est le même principe appliqué à l'inverse. Un ensemble de blocs entre dans le chapeau et d'autres en ressortent.

Déroulement de l'activité

<u>Avant l'activité :</u>

L'activité se déroule sur le TNI, les élèves sont placés en équipes de 2 et ont leurs blocs de base dix devant eux ainsi qu'un compteur.

[29] L'activité *Nombres magiques* a été élaborée à partir d'une sélection de cas issus des *Incontournables du sens du nombre*.

Pendant l'activité :

La consigne qui est donnée aux élèves est : « Utilise ton matériel pour afficher le nombre. » (Lyons et Bisaillon, 2018). À deux, ils doivent placer le matériel et s'entendre par rapport à la réponse à écrire sur le compteur.

Après l'activité :

Une discussion est animée par l'enseignant pour faire ressortir les stratégies employées par les élèves. La durée prévue de cette activité est de 45 minutes.

Notions mathématiques

Cette activité permet de poursuivre le développement de la flexibilité de représentation visuelle qui permet de reconnaître un nombre selon différentes représentations. Elle favorise l'apprentissage du calcul global, visuel (le calcul est fait à partir des blocs de base qui sont vus) pour l'addition et la soustraction, en vue du calcul mental.

Variables didactiques :

Les variables didactiques suivantes sont considérées dans cette activité :

- la disposition des blocs de base dix;
- les compostions et les décompositions des nombres;
- les modes de représentation externe.

La disposition des blocs de bas dix

Les blocs de base dix sont placés dans une position qui est subitisable, c'est-à-dire qu'ils sont percevables en un coup d'œil (voir figure 3.16 pour un exemple de disposition subitisable).

Les compositions et les décompositions de nombres

Dans les trois premiers cas de l'addition et dans les deux premiers cas de la soustraction, les élèves n'ont pas de groupement à composer ou à décomposer. Pour tous les autres cas, les élèves doivent recomposer ou décomposer au moins une dizaine ou au moins une centaine, afin de tirer profit de la flexibilité de représentation des nombres développée par l'élève.

Les modes de représentation externe

Quatre modes de représentation externe sont exploités dans cette activité. Le mode imagé est présent puisque les élèves voient des images sur le TNI. Le mode concret intervient puisque les élèves utilisent leurs blocs de base dix. Le mode symbolique survient lorsque les élèves notent leur réponse sur le compteur, sous la forme positionnelle ou encore lorsque la notation mixte leur est présentée à l'écran. Le mode verbal est aussi utilisé au moment de décrire les décompositions.

Connaissances sollicitées par l'activité

Pour commencer à jouer à ce jeu, les élèves ont besoin de leurs habiletés du niveau 4 du continuum, soit la flexibilité dans le traitement et la manipulation de la dizaine et de la centaine.

Conduites des élèves :

Voici les conduites que peuvent avoir les élèves lors de cette activité:

- conduites visées :
    - les élèves reconstituent les dizaines et les centaines. Ils sont capables de dire, par exemple pour un cas tel que 3c + 12d + 3u ils sont capables de noter 423;
    - les élèves placent leur matériel de base dix en respectant les règles de la subitisation pour mieux voir et compter plus vite;
    - ils font preuve de flexibilité dans la représentation d'une centaine et d'une dizaine (ils voient rapidement que 12 dizaines sont équivalentes à une centaine et deux dizaines);
    - ils utilisent adéquatement la notation positionnelle.
- conduites menant à une réussite, mais qui ne sont pas celles visées par l'activité :
    - les élèves ne placent leur matériel de base dix en respectant les règles de la subitisation et doivent recomptent tout de façon séquentielle;
- conduites menant à une erreur :
    - les élèves ne sont pas capables d'attribuer la valeur de 10 à la dizaine ou de 100 à la centaine. Ils ne sont pas capables de réaliser l'activité;
    - ils font une erreur de calcul un à un en reconstituant la dizaine ou la centaine;
    - ils font une erreur de calcul « global » (à partir de la représentation imagée ou concrète de la dizaine ou de la centaine) en reconstituant mal la dizaine ou la centaine.

Cette activité est la dernière de notre séquence didactique.

En plus de suivre la progression des niveaux du continuum, un maillage a été établi entre les activités de la séquence didactique. Il permet aux élèves de reconnaître l'utilité des habiletés qu'ils développent et des représentations mentales qu'ils se construisent. Ils ont aussi l'occasion de s'en resservir dans une activité de niveau supérieur. La figure 3.22 présente ce maillage. La période à laquelle a lieu l'activité est rappelée dans un petit carré noir à côté du nom de l'activité.

L'activité *Oisillons* est une activité d'entrée dans la séquence. Elle demande à l'élève de percevoir le rôle de la groupitisation pour mieux compter et compter plus vite. Ce constat est à la base de toutes les activités de la séquence. L'activité *Magie* dont l'enjeu est d'installer des habiletés de groupitisation qui sont réinvesties dans l'activité *Joyaux*, une activité liée à la pensée multiplicative qui demande à l'élève de percevoir la pertinence du groupement à partir du développement de ses habiletés de groupitisation. Les élèves vont en effet réinvestir leur capacité à se faire une représentation mentale pour un petit groupe d'éléments bien organisés dans une activité au cours de laquelle ils devront se représenter mentalement des groupes et des groupes de groupes d'éléments structurés. L'activité *Pyramide* cible la groupitisation en introduisant, entre autres, la disposition triangulaire. Cette disposition est réinvestie dans les activités *Bergères*. Enfin, les activités de groupitisation de la *Bataille* et de la *Tomathina* présentent les quantités organisées dans une disposition rectangulaire, la boîte de dix. La disposition rectangulaire est réinvestie dans l'activité *Stationnement*, une activité visant le développement de la pensée multiplicative à travers l'arrangement rectangulaire. Elle est aussi utilisée dans l'activité *Tohubohus* qui introduit l'utilisation des blocs de base dix qui eux sont des arrangements rectangulaires de 10 et de 100. Elle est utilisée dans l'activité des visages de nombres qui utilise elle aussi les blocs de base dix.

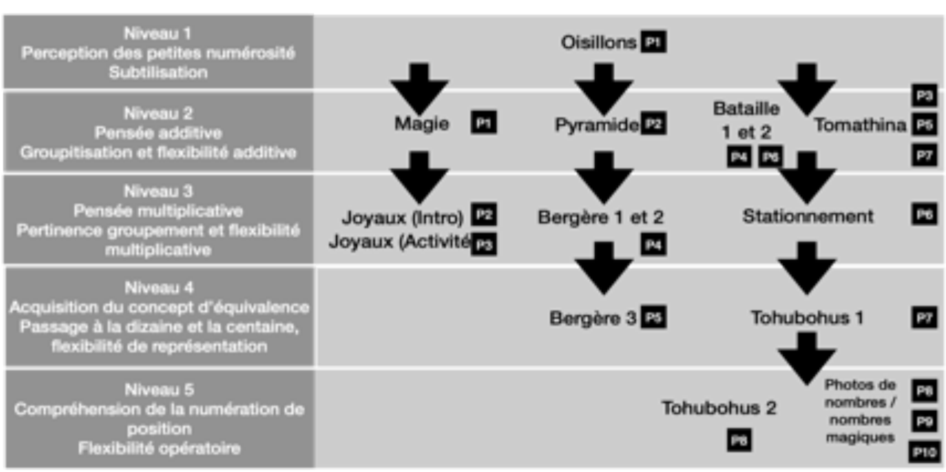


Figure 3.22
Maillage entre les activités de la séquence

La prochaine section présente les participants de la présente étude.

3.3 Participants

Afin de vérifier la viabilité des instruments en contexte, des professionnels du milieu de l'enseignement ont été sollicités. Selon Loiselle et Havrey (2007), « la constitution d'une équipe regroupant le chercheur-développeur et des gens du milieu paraît souhaitable afin d'assurer une meilleure adéquation entre le produit développé et les besoins du milieu » (p. 52). Cette vérification permet, entre autres, d'identifier les améliorations à apporter aux instruments avant de les mettre à l'essai auprès des élèves.

Puisque les instruments créés pour cette étude peuvent être utilisés auprès de différentes populations d'élèves (en langue première, en langue seconde, en contexte régulier, en contexte d'adaptation scolaire, etc.), même si les instruments visent principalement à être utilisés après d'élèves de fin 2^e^ année et de début 3^e^ année, différents professionnels de l'éducation ont été sollicités. Plus spécifiquement, vingt professionnels de l'éducation œuvrant au primaire et au secondaire ont été sollicités et treize ont accepté de participer, soit des enseignants, des orthopédagogues et des conseillers pédagogiques, travaillant avec une clientèle ordinaire ou en adaptation scolaire. Des enseignants et des orthopédagogues ont été sélectionnés puisque ce seraient eux les premiers utilisateurs. Des conseillers pédagogiques ont aussi été approchés en raison de leur expertise par rapport à la didactique et aux pratiques pédagogiques. Il a été choisi de travailler avec des gens qui œuvrent en classe ordinaire et en adaptation scolaire parce que les instruments devraient permettre de cibler les élèves à risque et les élèves qui ont des difficultés en mathématiques et les aider à surmonter ces difficultés dans l'apprentissage des concepts liés à la numération. Enfin, des intervenants en adaptation scolaire au secondaire ont été sollicités parce que la compréhension du concept de numération est une des difficultés qui est encore présente chez ces élèves. Même s'ils sont conçus pour des élèves du primaire, ces instruments pourraient être utilisés avec cette clientèle.

Treize professionnels dont six enseignants, quatre orthopédagogues et trois conseillers pédagogiques ont accepté de participer à notre projet (le formulaire de consentement a été placé à l'annexe 9). Les enseignants et trois des orthopédagogues travaillent auprès d'élèves de la première à la quatrième année. Le choix de ces professionnels est justifié par rapport à leur connaissance des élèves de fin 2e année, début 3e année. En effet, un enseignant de 1re année sait aussi ce que les élèves de 2e année apprennent puisqu'il prépare ses élèves à ces apprentissages. De même, un enseignant de 4e année a conscience des apprentissages des élèves de 2e année ou de 3e année puisqu'il y a généralement, dans sa classe des élèves qui éprouvent des difficultés avec des concepts et connaissances travaillés en 2e année. Une des orthopédagogues travaille auprès d'élèves ayant une déficience visuelle et ayant des difficultés d'apprentissage au secondaire. Cette participante a été retenue parce que les élèves avec lesquels elle travaille ont des difficultés avec les concepts mathématiques liés à la numération qui sont ciblés dans notre travail. Une des conseillères pédagogiques travaille auprès d'élèves TSA du secondaire. Nous l'avons retenue parce qu'elle aussi travaille avec des enseignants qui ont dans leur classe des élèves qui jonglent difficilement avec les concepts de numération. Une autre est conseillère pédagogique œuvre en mathématiques auprès d'élèves du primaire et du secondaire. Cette participante a été sollicitée pour son expertise par rapport à la matière. Le détail de l'expertise et de l'expérience de chacun des participants est présenté à l'annexe 10.

Certains participants sollicités font partie du réseau de professionnels avec lesquels l'auteure de cette thèse a collaboré ou collabore toujours. Cette dernière ayant donné un grand nombre de formations en milieu scolaire, elle a eu recours au bassin de professionnels auquel elle avait accès. Il faut aussi préciser que dix participants ont mis à l'essai dans leur classe ou avec les élèves auprès desquels ils interviennent certaines des activités incluses dans les instruments qui sont au cœur de cette thèse. Leurs commentaires lors de la vérification de la viabilité en contexte des instruments peuvent donc être teintés de cette expérience. Dans certains cas, ce type de situation peut constituer un biais de recherche ; ils pourraient avoir un parti pris favorable. Nous croyons cependant qu'au contraire leur connaissance de certains des contenus de l'outil a permis un approfondissement de la démarche de validation dont les conséquences peuvent être bénéfiques à la création de la version finale des instruments.

La prochaine section présente les instruments de collecte des données.

3.4 Collecte de données

Deux instruments de collecte de données ont été retenus : un questionnaire écrit et une entrevue semi-dirigée liée à ce questionnaire. Les participants ont reçu le questionnaire et le lien internet les menant à la séquence d'activités deux semaines avant l'entrevue. Pour chaque activité, on retrouvait sur le site internet une courte présentation de l'activité dans un document PDF mentionnant la durée l'activité, son but ainsi que son déroulement. Les liens avec le continuum ont été volontairement omis afin de solliciter l'expertise des participants sans les influencer. L'activité en tant que telle se trouvait aussi sur le site internet, sous forme de vidéo[30], et du matériel reproductible ou des feuilles de notation étaient fournis.

Le questionnaire visait essentiellement à permettre aux participants de se préparer à l'entrevue qui a eu lieu de manière individuelle. Ce sont les réponses recueillies lors des entrevues, complétées parfois avec les réponses au questionnaire qui constituent les données traitées et dont les résultats sont présentés au prochain chapitre. Nous avons voulu recueillir les propos des participants par une entrevue parce que l'entrevue permet de « savoir ce que la personne pense et d'apprendre des choses qu'on ne peut pas observer directement » (Deslaurirers, 1987), ce qui est plus difficile à recueillir avec seulement la réponse à un questionnaire.

Le questionnaire utilisé pour guider l'entrevue est détaillé dans la section suivante.

3.4.1 Questionnaire

Le questionnaire visait à vérifier la pertinence, la viabilité, la clarté et la cohérence des instruments construits. Il était précédé d'une présentation de l'étude et de la justification théorique de la séquence d'activités. Les questions étaient des questions ouvertes ou des questions qui demandaient d'expliquer la réponse. Le questionnaire était divisé en trois sections.

La première section servait à vérifier le rôle de dépistage de l'outil d'évaluation. Les questions ont été choisies par rapport à la viabilité de cet outil en contexte, c'est-à-dire pour vérifier si les

[30] Ces vidéos sont des animations crées à partir du logiciel *Keynote* et transformées par la suite en vidéo. Elles contiennent les questions à poser aux élèves de mêmes que tous ces items des activités. Les pauses sont préprogrammées pour permettre à l'enseignant de lire les questions au besoin ou de discuter avec les élèves de leurs stratégies.

professionnels de l'éducation jugent que cet outil permettrait de dresser un portrait du niveau de développement du sens du nombre et de la numération par rapport au continuum et éventuellement par rapport aux activités de la séquence didactique. Ils ont pris connaissance du continuum dans les documents qui leur ont été remis.

La deuxième section portait sur la séquence didactique. Les dix mêmes questions ont été posées à propos de chacune des activités de la séquence didactique. Parmi ces questions, cinq étaient en lien avec la viabilité des activités en contexte, soit la clarté des consignes, le temps alloué, la facilité à réaliser cette activité, le matériel, le travail individuel ou en équipe. Il y avait deux autres questions qui concernaient les conduites des élèves, les stratégies qu'ils pouvaient employer et les erreurs qu'ils pouvaient commettre. Ces questions ont été posées dans le but de préciser les conduites ressorties dans l'analyse a priori de chacune des activités. Une question a permis aux participants de se prononcer sur la pertinence de l'activité par rapport au continuum et à la séquence didactique, permettant aussi d'améliorer l'analyse a priori, particulièrement par rapport à l'identification des notions mathématiques. Une question a été posée par rapport à la pertinence des variables didactiques choisies pour l'activité, permettant de préciser ces variables dans l'analyse a priori. Une dernière question par rapport à l'engagement que pourrait susciter cette activité chez les élèves a été posée. Elle permet de documenter un autre élément de la viabilité d'une activité en contexte, la motivation que les élèves ont à la réaliser.

La troisième section portait sur la séquence didactique en général et comportait sept questions. La première question demandait aux participants s'ils pensaient que cette séquence s'adressait bien à des élèves de fin 2^{e} année, début 3^{e} année. Ensuite, les questions portaient sur les activités, leur choix, leur nombre et le nombre de périodes de la séquence didactique. Enfin, avons aussi demandé aux participants s'ils pensaient que cette séquence permettrait aux élèves d'avoir une meilleure compréhension du sens du nombre et de la numération et s'ils pensaient qu'elle permettrait aussi aux élèves de développer une représentation mentale dynamique et imagée des quantités. Le questionnaire est placé à l'annexe 1.

Une entrevue a été organisée pour recueillir les propos des participants par rapport aux questions. Les conditions mises en place pour son déroulement sont décrites à la section suivante.

3.4.2 Entrevue

Le canevas de l'entrevue respectait l'ordre des questions posées dans le questionnaire qui a été remis aux participants. Des rencontres d'environ une heure trente minutes par participants ont eu lieu grâce à la plate-forme Zoom. Chacune des questions a été posée oralement. Les participants pouvaient lire leur réponse ou s'en inspirer pour répondre aux questions. Les entrevues ont été enregistrées et transcrites afin de faciliter le traitement des données. Des notes ont aussi été prises par la chercheuse pour garder des traces des entrevues. Grâce aux échanges, la chercheuse a pu relancer les participants afin de leur demander de préciser leurs réponses ou de donner des exemples pouvant illustrer leur point de vue.

La prochaine section présente de quelle façon les données ont été traitées et analysées afin de permettre de répondre aux objectifs de la présente recherche et d'ainsi améliorer les instruments.

3.5. Traitement et analyse des données

Pour analyser les résultats de la recherche et pouvoir répondre aux objectifs spécifiques, la méthode générale pour le traitement des données a été l'analyse de contenu. L'objectif poursuivi par la consultation des professionnels de l'éducation est d'abord d'améliorer les instruments en bénéficiant de leur expertise et de leur expérience par rapport au sens du nombre et par rapport à la faisabilité d'activités mathématiques en classe. Le but est aussi de définir les conditions à mettre en place pour favoriser son développement. L'analyse de contenu consiste à regrouper en catégories ou en thèmes tous les énoncés qui se rejoignent par le sens (Blais et Martineau, 2007). Les données recueillies sont des données descriptives, soit les réponses au questionnaire et les paroles des personnes lors de l'entrevue. Cette méthodologie permet de traiter de manière systématique ce type de données qui présentent un certain degré de profondeur et de complexité (Miles et Huberman, 1994 ; Samson et coll., 2004). Selon Blais et Martineau (2007, p. 2), une telle démarche est utile pour le chercheur qui tente de « donner un sens à un corpus de données brutes, mais complexes. » Il s'agit de décrire, classer et transformer les données qualitatives brutes en fonction d'une grille d'analyse. La construction de cette grille aide à mettre en relation des éléments codifiés et la problématique soulevée par la recherche (Miles et Huberman, 1994; Samson et coll., 2004).

Les étapes qui ont été mises en place pour l'analyse des données sont les suivantes (Blais et Martineau, 2007; Deslauriers, 1987; Samson et coll., 2004) :

1) retranscription des données sous forme de verbatim et fusion des verbatim avec les réponses aux questionnaires;
2) identification des segments significatifs énoncés par les participants;
3) classement des segments à une catégorie;
4) récupération de l'ensemble des énoncés significatifs associés à un code afin d'assurer la validité interne de chacune des catégories. Cette étape a été répétée plusieurs fois afin de s'assurer que l'ensemble des segments de chacune des catégories étaient mutuellement exclusives, pour en arriver à une saturation et au nombre de catégories.

Deux grilles de codages ont émergé des données, une pour permettre d'évaluer l'outil d'évaluation et une pour permettre d'évaluer la séquence didactique. Les deux grilles sont présentées dans les sections suivantes.

3.5.1 Grille de codes pour évaluer l'outil d'évaluation

Pour vérifier la viabilité de l'outil d'évaluation en contexte, la grille de code présentée à l'annexe 11 a été utilisée. Dans la grille, nous avons écrit les codes, leurs abréviations, la définition de chaque code et un exemple de commentaire pour chaque code.

Puisque cette vérification est celle d'instruments didactiques, le triangle didactique (Charnay et Mante, 1995) sert de cadre de méthodologique pour la construction des grilles. Ainsi, trois grandes catégories de codes ont été identifiées : le contenu, l'élève et l'enseignant. Une quatrième grande catégorie a été ajoutée pour analyser les paramètres de l'outil d'évaluation.

Pour le contenu, il s'agit d'un contenu mathématique. Il a été divisé en deux. La première sous-catégorie regroupe les commentaires en lien avec des concepts mathématiques, éléments centraux des instruments. La deuxième concerne l'enchaînement de concepts mathématiques dans la tâche proposée à l'élève, autre élément important puisque l'outil d'évaluation doit permettre de situer l'élève sur un continuum du développement du sens du nombre (proposé à la section 2.2.5.6). Les tâches doivent donc s'enchaîner les unes aux autres.

Pour l'élève, les commentaires ont été analysés selon deux composantes liées au processus d'apprentissage (Cartier, 2007) : les aspects psychoaffectifs et cognitifs. Pour les aspects psychoaffectifs, des commentaires en lien avec l'anxiété et la motivation ont été colligés, deux éléments qui entrent en jeu lorsque l'élève est en situation d'évaluation. Pour l'aspect cognitif, des commentaires en lien avec les représentations mentales ont été analysés, puisque la création de représentations mentales est un des objectifs des instruments. Les commentaires en lien avec les habiletés ou les difficultés potentielles des élèves à résoudre les tâches proposées ont aussi été retenus.

Pour l'enseignant, les commentaires portant sur la planification des interventions mises en place à la suite de l'administration de cette épreuve ont d'abord été analysés. Ensuite, des commentaires en lien avec les besoins d'accompagnement dans l'utilisation de l'outil ont été colligés.

Enfin, la quantième grande catégorie, liée aux paramètres de l'outil d'évaluation, a permis d'analyser les commentaires se rapportant à l'administration de l'épreuve, son déroulement, la validité de son construit, le format et le temps d'exposition de chacun des items. Ce sont toutes des composantes clés de l'outil d'évaluation.

L'analyse des données en lien avec la séquence didactique s'est réalisée selon les mêmes étapes, mais une grille de codes différente a émergé du corpus. Elle est présentée à la section suivante.

3.5.2 Grille de codes pour évaluer la séquence didactique

Pour vérifier la viabilité de la séquence didactique en contexte, la grille de code présentée à l'annexe 12 a été utilisée.

Puisqu'un des buts de cette démarche est de vérifier la viabilité en contexte d'instruments didactiques, le triangle didactique sert encore ici de cadre méthodologique pour construire la grille de code. Ainsi, les trois catégories principales de codes sont en lien avec le contenu, l'élève et l'enseignant. Une quatrième catégorie, en lien avec le déroulement de la séquence, a été ajoutée.
Le contenu a été divisé en deux sous-catégories et comprend les commentaires portant sur les variables didactiques, soit les conditions favorisant le développement du sens du nombre, et ceux sur la pertinence de la séquence et de ses activités, soit le développement du sens du nombre chez

l'élève. Pour les variables didactiques, des sous-catégories permettant de préciser l'analyse et de faire des liens avec l'analyse a priori effectuée dans le chapitre méthodologique ont été faites. Les variables suivantes ont été identifiées : le temps d'exposition, le nombre d'éléments que l'élève doit compter, la disposition de ces éléments et le mode de représentation. Les commentaires portant sur la pertinence de la séquence et de ses activités ont d'abord été analysés par rapport à l'apprentissage qui est souhaité par ces activités. La pertinence dans l'enchaînement des concepts a aussi été étudiée puisqu'un des objectifs de cette séquence est de permettre à l'élève de progresser dans le continuum du sens du nombre et de la numération. Les concepts des activités doivent donc s'enchaîner. Le niveau de difficulté de l'activité ainsi que le thème de l'activité sont les deux derniers codes en lien avec la pertinence.

Pour l'élève, les deux principales catégories utilisées pour l'analyse de l'outil d'évaluation ont été reprises (aspects psychoaffectifs et cognitifs). Pour les aspects psychoaffectifs, l'anxiété et la motivation ont été ciblées. Une catégorie est venue compléter les aspects psychoaffectifs, elle porte sur les habiletés sociales des élèves, soit celles liées au travail en équipe.

Pour ce qui est des aspects cognitifs, la représentation mentale a été ciblée puisqu'il s'agit d'un des objectifs de cette séquence. L'attention nécessaire pour réaliser les tâches a aussi été considérée. Le court temps d'exposition des éléments dans les tâches est un défi qui sollicite l'attention des élèves. Une catégorie portant sur les conduites des élèves vient compléter les aspects cognitifs, pour permettre de faire des liens avec l'analyse a priori effectuée dans le chapitre méthodologique. Il s'agit aussi d'identifier ce que l'élève est susceptible d'apprendre à travers la réalisation des activités. Ainsi, des commentaires mentionnant que l'élève se réfère à quelque chose de connu comme une constellation, un objet ou une forme géométrique pour traiter les quantités ont été colligés. Les commentaires mentionnant que l'élève peut dénombrer, compter les groupes ou les bonds ou simplement reproduire l'arrangement ont aussi été analysés. Le fait de décomposer les nombres ou d'avoir recours au calcul mental ont été des conduites retenues. Enfin, il a été question du recours à la mémoire, de la confusion ou du fait d'agir trop rapidement, conduites pouvant entraîner des erreurs dans les réponses des élèves, comme ce fut le cas dans l'analyse a priori.

Pour l'enseignant, les commentaires portant sur le type d'intervention ont été distingués de ceux portant l'organisation des services. Dans le type d'intervention, les commentaires ont été classés selon qu'ils portaient sur l'enseignement formel, sur l'enseignement par résolution de problèmes, sur la mise de l'avant du partage de stratégies ou sur les activités d'entraînement. Ces pratiques sont utilisées dans l'enseignement des mathématiques, à différents moments de l'apprentissage, comme il en a été question dans l'introduction du cadre conceptuel. Pour l'organisation des services, il s'agit tout comme dans la grille précédente, de commentaires en lien ce qui peut se faire en classe ou en orthopédagogie.

Enfin, pour choisir les codes par rapport au déroulement de la séquence, les différents moments de la réalisation d'une activité ont servi de cadre de référence (Daigle et Berthiaume, 2021). Les commentaires en lien avec ce qui se passe avant la tâche ont été distingués de ceux qui se passent pendant la tâche. Aucun commentaire par rapport à ce qui se passe après la tâche n'a été colligé, le code n'a donc pas été retenu. Pour la catégorie avant la tâche, trois sous-catégories ont été créées. La première concerne les commentaires portant sur les consignes, si elles convenaient ou si les participants suggéraient des reformulations. La deuxième s'intéresse au matériel, s'il était adéquat ou si les participants proposaient un autre type de matériel. La dernière sous-catégorie se penche sur le nombre de périodes, s'il était propice ou non. Pour la catégorie pendant la tâche, trois sous-catégories ont été identifiées. La première regroupe les commentaires portant sur la durée de l'activité, si elle était pertinente ou si les participants proposaient une autre durée. La deuxième se penchait sur le réalisme de l'activité pour déterminer si l'activité était réalisable en classe, donc si elle convenait ou si les participants avaient des suggestions pour que ce soit plus réaliste en classe. Enfin, les commentaires portant sur le type de regroupement à privilégier pour réaliser les activités de la séquence (en grand groupe, en équipes, individuellement).

3.6. Synthèse de la méthodologie

Afin de répondre aux objectifs spécifiques de recherche le plus précisément possible, ce troisième chapitre a permis de présenter les dispositifs méthodologiques mis en place dans le cadre de cette recherche. Les instruments, composés d'un outil d'évaluation permettant de dépister les élèves et d'une séquence didactique incluant une analyse a priori de chacune des activités ont été élaborés et décrits par la suite. Ces instruments ont été construits en fonction d'un continuum du développement du sens du nombre issu des recherches présentées dans le cadre théorique. Les participants sélectionnés pour vérifier la viabilité en contexte de ces instruments ont aussi été présentés, de même que la démarche permettant de collecter leurs rétroactions. Ces rétroactions, recueillies lors d'une entrevue, constituent les données de cette recherche. La dernière partie de ce chapitre a précisé la manière dont les données ont été traitées. Le prochain chapitre présente les résultats obtenus à la suite de l'analyse des données de la présente recherche.

4. Présentation des résultats

Dans ce chapitre, les résultats obtenus à la suite de la collecte des données sont décrits. Rappelons que les objectifs de cette étude sont de :

1. concevoir un outil d'évaluation du développement du sens du nombre et de la numération ainsi qu'une séquence didactique, appuyés sur un continuum du développement cognitif du sens du nombre. Ces instruments s'adressent à des élèves de 7-8 ans. C'est en effet à cet âge que les élèves sont amenés à comprendre la numération. Ces instruments ont pour but de :
   - dépister les élèves susceptibles d'être à risque au moment d'entamer leur 3e année primaire sur le plan des apprentissages en arithmétique;
   - permettre aux élèves de développer une meilleure compréhension du sens du nombre et de la numération en leur donnant l'occasion de développer des représentations mentales dynamiques et imagées tirant profit de leurs habiletés de groupitisation et touchant à différentes facettes de la numération, en leur donnant l'occasion de vivre des activités liées leur niveau de développement du sens du nombre;
2. vérifier la viabilité en contexte de l'outil d'évaluation et de la séquence didactique grâce aux commentaires, critiques et suggestions de professionnels de l'éducation dans la perspective de pouvoir utiliser cet outil et cette séquence en contexte réel de classe;
3. améliorer ces deux instruments suite à la vérification de la viabilité en contexte effectuée par les professionnels de l'éducation.

Pour arriver à répondre à ces objectifs, nous avons eu recours à un projet de recherche-développement. Dans un premier temps, un outil d'évaluation permettant d'évaluer les représentations des élèves et leurs connaissances du sens du nombre et une séquence didactique permettant aux élèves de développer leur sens du nombre ont été créés. Cela a permis de répondre au premier objectif de la présente recherche. Dans un deuxième temps, treize professionnels ont été rencontrés dans le cadre d'entretiens individuels afin de vérifier la viabilité en contexte de ces deux instruments. Les commentaires ainsi recueillis ont été utiles pour bonifier le dispositif didactique dont la version finale pourrait être l'objet d'une étude ultérieure. Cette vérification de la viabilité en contexte a permis de répondre au deuxième objectif. Elle a aussi conduit à l'amélioration des instruments, ce qui a permis de répondre au troisième objectif.

Ce chapitre est divisé en deux parties. En premier, il est question des résultats liés à l'outil d'évaluation créé afin de dépister les élèves ayant des besoins spécifiques. Ensuite, les résultats liés à la vérification de la viabilité en contexte de la séquence didactique sont présentés. Les analyses qui ont été menées permettront d'expliciter, d'étayer et de nuancer les décisions prises menant à la révision des propositions initiales associées à l'outil d'évaluation et à la séquence didactique dans une perspective de recherche-développement (Loiselle et Harvey, 2007).

4.1 Résultats de la vérification de la viabilité en contexte de l'outil d'évaluation

Afin de nous aider à déterminer si l'outil d'évaluation permet aux enseignants de faire un bilan des apprentissages des élèves à la fin de la 2e année et de dépister les élèves susceptibles d'être à risque au moment d'entreprendre leur 3e année du primaire sur le plan des apprentissages en arithmétique, les participants devaient répondre à deux questions fermées. Ils étaient appelés à commenter leurs réponses. Les réponses à ces deux questions seront d'abord présentées. Ensuite, les résultats de l'analyse des commentaires des participants seront détaillés. Plusieurs commentaires pour un même code peuvent avoir été traités pour un même participant. Les professionnels de l'éducation avaient les questions à l'avance et, même s'ils ont répondu distinctement aux deux questions, ils ont commenté les deux questions en même temps. Pour analyser les commentaires portant sur l'outil d'évaluation, la grille de codes présentée à la section 3.5.1 a été utilisée.

Rappelons d'abord les deux questions auxquelles les participants devaient répondre. La première question (PPTQ1) était : « Trouvez-vous que l'outil d'évaluation est en lien avec les activités de la séquence didactique, pourquoi? » Cette question permettait d'établir la fiabilité de l'outil en s'assurant que les concepts évalués par celui-ci étaient bien travaillés dans la séquence didactique par la suite. Les questions de l'outil d'évaluation devraient être en lien avec les activités de la séquence puisque le but de la séquence est de travailler sur les concepts qui auront été moins bien compris des élèves en fonction de l'outil d'évaluation.

La deuxième question (PPTQ2) qui a été posée aux participants par rapport à l'outil d'évaluation leur demandait s'il jugeait que l'outil leur permettrait d'identifier les difficultés des élèves par rapport au sens du nombre et à la numération. Un outil de dépistage doit permettre d'évaluer les connaissances des élèves à un moment précis de leur cheminement académique. L'outil que qui a été construit s'adresse à des élèves qui terminent leur 2e année au primaire, mais aussi aux élèves qui débutent leur 3e année au primaire. À la fin de la 2e année, l'outil sert à évaluer les acquis des élèves. Au début de la 3e année, il sert aussi à évaluer ce que les élèves maîtrisent, mais il vise surtout le dépistage des élèves qui auraient des besoins spécifiques.

À la question PPTQ1, tous les participants ont trouvé que l'outil d'évaluation est en lien avec les activités de la séquence didactique. À la question PPTQ2, dix participants sur treize ont trouvé que l'outil permettrait d'identifier les élèves qui auraient besoin d'interventions supplémentaires. Ces réponses ont été accompagnées, la plupart du temps, par des commentaires. Les prochaines sections présentent l'analyse de ces commentaires à partir des catégories utilisées dans la grille de codes. Le tableau 4.1 présente la synthèse des commentaires des participants à la suite de l'analyse. Ces résultats seront commentés par la suite. Quatre-vingt-huit commentaires ont été analysés. Les résultats ont été transférés en pourcentage pour en faciliter l'analyse.

Tableau 4.1
Synthèse des commentaires des participants par rapport à l'outil d'évaluation

Codes			**Code**	**Nbre de comm.**	**Résultats en %**
Contenu	Mathématique	Concepts	CMC	2	2
		Activités	CMA	4	5
		Enchaînement des concepts	CME	4	5
	TOTAL CONTENU			10	12
Élève	Aspects psychoaffectifs	Anxiété	ÉPA	2	2
		Motivation	ÉPM	2	2
	Aspects cognitifs	Représentation mentale	ÉCR	2	2
		Habiletés et difficultés potentielles de l'élève	ÉCH	20	23
	TOTAL ÉLÈVE			26	29
Enseignant	Intervention	Objet de l'intervention	EI	3	3
		Organisation des services	ES	5	6
	Besoin d'accompagnement		EB	1	1
	TOTAL ENSEIGNANT			9	10
Paramètres de l'outil d'évaluation	Administration de l'épreuve		PA	14	16
	Validité de construit		PV	12	13,5
	Temps d'exposition		PT	5	6
	Format		PF	12	13,5
	TOTAL PARAMÈTRES			43	49
TOTAL				88	100

Comme le montre le tableau 4.1, sur les quatre-vingt-huit commentaires portant sur l'aspect dépistage de l'outil d'évaluation 10 (12 %) se rapportent au contenu, 26 (29 %) sont en lien avec l'élève, 9 (10 %) avec l'enseignant et 43 (49 %) portent sur les paramètres de l'outil d'évaluation. Ce tableau sera expliqué dans les prochains paragraphes en proposant quelques exemples pour mieux comprendre les commentaires qui ont été recueillis. Un retour sur tous les commentaires proposant des suggestions de modifications de l'outil ou encore menant à une réflexion sur l'évaluation ou l'apprentissage du sens du nombre et de la numération sera réalisé dans le chapitre 5, le chapitre de discussion.

La prochaine section présente l'analyse des commentaires se rapportant au contenu.

4.1.1 Analyse des commentaires se rapportant au contenu

La première grande catégorie de commentaires regroupe les commentaires portant sur le contenu. Elle est divisée en trois sous-catégories : les concepts mathématiques, les activités mathématiques vécues en classe et l'enchaînement des concepts dans l'outil d'évaluation.

Concepts mathématiques

Deux (2 %) commentaires sont en lien avec les concepts mathématiques. Un commentaire propose l'ajout d'une question portant sur un concept qui n'est pas évalué dans l'outil d'évaluation:

> « J'aurais pensé qu'il y aurait quelque chose sur le principe de cardinalité » (P[31] 13).

L'autre commentaire souligne des liens entre les questions de l'outil et les contenus proposés dans la Progression des apprentissages (2009), comme pour la question 2 qui évalue la pensée multiplicative à travers la disposition rectangulaire. Le P13 précise que cette dernière est travaillée en 3e et en 4e année selon la Progression des apprentissages (2009).

Activités mathématiques

Quatre (5 %) commentaires sont en lien avec le type d'activités mathématiques vécues en classe. Ils mentionnent que ces dernières peuvent être différentes de ce que la recherche recommande et donc différentes de ce que l'outil évalue. Le commentaire du P9 résume cette situation :

> « Ce n'est pas travaillé de cette façon en classe ».

[31] Le mot « participant » sera remplacé par P, suivi du numéro du participant afin d'alléger la lecture de ce chapitre.

Les commentaires du P7 viennent la préciser :

> « À l'école, on passe très vite au symbolisme. On laisse de côté les représentations concrètes et imagées » et « actuellement, on travaille les tables, c'est du " par cœur " ».

Enchaînement des concepts

Pour ce qui est des quatre (5 %) commentaires portant sur l'enchaînement des concepts, ils indiquent qu'un ordre dans l'enchaînement des concepts doit être respecté lorsqu'il est question d'évaluation parce qu'il y a une progression de la compréhension de ces concepts chez les élèves. Ils précisent que l'outil respecte un tel ordre. Le commentaire du P2 le souligne en comparant la première et la deuxième question :

> « Un élève qui n'aurait pas acquis la groupitisation serait en difficulté pour aborder les étapes incontournables suivantes (pensée multiplicative) ».

La prochaine section présente l'analyse des commentaires se rapportant à l'élève.

4.1.2 Analyse des commentaires se rapportant à l'élève

La deuxième grande catégorie de commentaires regroupe les 26 (29 %) commentaires liés à l'élève qui réalise l'épreuve. Ils ont été analysés selon deux sous-catégories : les aspects psychoaffectifs et les aspects cognitifs.

Aspects psychoaffectifs

Parmi tous les commentaires, quatre (4 %) sont en lien avec les aspects psychoaffectifs. La moitié des commentaires de nature psychoaffective souligne que les élèves peuvent ressentir de l'anxiété en réalisant cette épreuve. Le commentaire du P12 va dans ce sens :

> « Certains élèves seront anxieux puisque les activités sont chronométrées ».

L'autre moitié des commentaires de nature psychoaffective mentionnent que l'épreuve est motivante, comme dans le commentaire du P4 :

> « Ça va chercher l'intérêt des enfants. Ce n'est même pas l'activité et déjà tu le sais que ça va être amusant ».

Aspects cognitifs

Toujours dans la catégorie « élève », 22 (25 %) commentaires concernent les aspects cognitifs. Parmi ces commentaires, deux (2 %) mentionnent que l'outil évalue la capacité que les élèves ont à se faire des représentations mentales des concepts mathématiques, comme le commentaire du P10 :

> « On les incite, par ce test, à prouver leurs capacités à gérer des représentations mentales imagées qui sont en lien avec la numération. »

Les 20 (23%) autres commentaires par rapport à l'élève sont en lien avec les habiletés des élèves et les difficultés potentielles qu'ils pourraient avoir en réalisant cette épreuve. Parmi ces commentaires, près de la moitié mentionnent que l'outil d'évaluation permet de cibler les grandes étapes de l'apprentissage de la numération et de dépister les difficultés des élèves par rapport à des concepts importants, ce qui est le but de l'outil, comme en témoigne ce commentaire du P9 *:*

> « Je crois que les résultats de ce test offriraient un portrait assez juste des capacités de l'enfant. Il permettrait de situer l'élève relativement aux différentes étapes de l'acquisition du nombre au primaire. »

L'autre moitié des commentaires mentionnent que l'épreuve est difficile. Le commentaire du P9 est représentatif de ces commentaires :

> « Je pense qu'au départ, s'ils non pas travaillé dans ce sens-là, il y en aurait 90 % qui échoueraient ».

Le commentaire du P7 ajoute, en parlant de la deuxième question de l'épreuve qui porte sur la pensée multiplicative, que « *même les enseignants n'étaient pas capables* ».

Finalement, un commentaire mentionne que la première question de l'épreuve est peut-être un peu facile :

> « Le début est très facile en 3e année, il est plus pertinent pour 1^{re}- 2^{e} » (P2).

La prochaine section présente l'analyse des commentaires se rapportant à l'enseignant.

4.1.3 Analyse des commentaires se rapportant à l'enseignant

La troisième grande catégorie de commentaires regroupe les commentaires liés à l'enseignant et à l'administration de l'épreuve à ses élèves et compte neuf (10 %) commentaires. Ils ont été analysés selon deux sous-catégories : l'intervention et les besoins d'accompagnement.

Intervention

Huit (9 %) commentaires sont en lien avec l'enseignant et l'intervention que mettra en place ce dernier. Ces commentaires portent soit sur l'objet de l'intervention, c'est le cas de trois (3 %) d'entre eux ou sur l'organisation des services, soit le contexte dans lequel pourrait se dérouler l'intervention (en classe, en récupération ou en orthopédagogie). C'est le cas de cinq (6 %) d'entre eux. Les commentaires qui traitent de l'objet de l'intervention vont dans le même sens que le commentaire du P5 à savoir que les résultats des élèves pourraient influencer la planification des activités :

> « J'imagine que les résultats à ce test pourraient grandement pister les interventions ultérieures ».

L'autre aspect de l'intervention est l'organisation des services. Ainsi, les commentaires des participants mentionnent que l'outil d'évaluation pourrait aider à déterminer le type d'intervention approprié pour l'élève selon sa performance à l'épreuve :

> « Je trouve intéressant d'aller vérifier de « grandes étapes » afin de cibler certains élèves pour qui il faudra porter une attention plus particulière » (P12).

Besoins d'accompagnement

Finalement, toujours en lien avec l'enseignant, un (1 %) commentaire porte sur l'accompagnement qui pourrait être fourni aux enseignants qui utilisent cet outil. Le commentaire du P10 est un bon exemple :

> « Il manque une partie qui accompagnerait l'enseignant dans la mise en place de l'outil ».

La prochaine section présente l'analyse des commentaires se rapportant aux paramètres de l'outil d'évaluation.

4.1.4 Analyse des commentaires se rapportant aux paramètres de l'outil d'évaluation

La quatrième grande catégorie de commentaires regroupe 43 (49 %) commentaires en lien avec l'outil d'évaluation. Ils concernent les paramètres de ce dernier. Quatre sous-catégories ont été utilisées : l'administration de l'épreuve, la validité de construit, le temps d'exposition et le format.

Administration de l'épreuve

Les commentaires par rapport à l'administration de l'épreuve correspondent à 14 (16 %) commentaires. Quatre (5 %) commentaires mentionnent que l'outil est bien construit, comme le montre le commentaire du P8 : « C'est assez rapide dans une classe, je trouve ça génial ».

Les autres commentaires sont plutôt en lien avec le guide qui est destiné à l'enseignant qui administre cette épreuve et proposent des modifications :

- cinq (6 %) commentaires demandent de détailler la planification à faire avant l'épreuve comme les commentaires du P10 :

  > « Qu'est-ce que je dois imprimer? » ou « Ce serait bien de tout mettre ça dans un tableau avec le temps prévu pour la réalisation ».

- trois (3 %) commentaires proposent de préciser les questions qui sont posées à l'élève. Le commentaire du P9 va dans ce sens :

  > « Il faudrait ajouter des indications sur ce qui est recherché, des sous-questions, ce qu'il faut dire ou ne pas dire, jusqu'où accompagner les élèves ».

- deux (2 %) des commentaires suggèrent d'ajouter des informations par rapport à l'interprétation des réponses. Le commentaire du P13 est un bon exemple :

  > « Cela pourrait être intéressant d'ajouter comment interpréter les réponses des enfants ».

Validité de construit

Douze (13,5 %) commentaires sont en lien avec la validité du construit. Ils vont tous dans le même sens que le commentaire du P10, à savoir que l'outil va chercher les différentes notions travaillées dans la séquence ou qu'il cible les mêmes objectifs que ceux poursuivis par la séquence :

> « Il est en lien avec la séquence, car on y vérifie des savoirs que l'on retrouve par la suite dans des activités différentes, mais similaires, qui visent les mêmes concepts, connaissances ou compétences. »

Temps d'exposition

Cinq (6 %) commentaires traitent du temps d'exposition et stipulent que le temps d'exposition durant lequel sont présentés les items est trop court, particulièrement pour la question 1 et la question 4 de l'outil d'évaluation. Les commentaires des P 9 et 12 sont de bons exemples :

> « Il faudrait modifier les délais (P9) » ou « si tu le reprenais avec juste un peu plus de lenteur, tu pourrais voir quand même un jeune qui dénombre (P12) ».

Format de l'épreuve

La dernière sous-catégorie de commentaires en lien avec les paramètres de l'épreuve regroupe les commentaires portant sur le format de l'épreuve et représente 12 commentaires (13,5%). Deux commentaires mentionnent que la facture visuelle de l'épreuve est belle, comme le commentaire du P4 : « *les dessins sont beaux* ». Certains commentaires apportent des suggestions de modification :

- deux proposent d'agrandir les cases de la question 1, sur la feuille réponse;
- trois suggèrent de mettre, pour la question 2, une case sur la feuille réponse pour permettre à l'élève de noter la réponse à l'exemple;
- trois proposent d'ajouter une case pour noter la réponse de l'exemple de la question 3;
- un suggère d'ajouter un exemple à la question 4 et d'ajouter aussi une case pour permettre à l'élève de noter la réponse de l'exemple sur la feuille réponse.

Les résultats pour la fonction évaluation-dépistage des instruments viennent d'être présentés de façon détaillée. La prochaine section présente une synthèse de ces résultats.

4.1.5 Synthèse des résultats pour la vérification de la viabilité en contexte de l'outil d'évaluation

La synthèse des résultats se présente selon l'ordre qui a été établi dans le tableau 4.1. De façon générale, les participants ont répondu que cet outil d'évaluation pourrait permettre le dépistage des élèves susceptibles d'être à risque, ce qui est la première fonction des instruments. Un retour sur tous les commentaires proposant des suggestions de modifications de l'outil d'évaluation ou encore menant à une réflexion sur l'évaluation ou l'apprentissage du sens du nombre et de la numération sera réalisé dans le chapitre 5.

Par rapport au contenu, il a été suggéré par un participant d'ajouter une question sur la cardinalité, cette suggestion sera retenue. Les commentaires des participants, par rapport à l'enchaînement des concepts, mentionnaient que c'était adéquat.

Par rapport à l'élève et à l'aspect psychoaffectif, puisqu'il s'agit d'une évaluation et qu'il y a du temps pour réaliser chacune des tâches, certains participants ont mentionné que l'épreuve pouvait être stressante. D'autres commentaires mentionnent que la tâche est motivante pour les élèves, même s'il s'agit d'une tâche d'évaluation. Par rapport à l'élève et à l'aspect cognitif, certains commentaires soulignent que l'outil évalue les représentations mentales des élèves et qu'il cible les grandes étapes du développement du sens du nombre et de la numération. Cela correspond aux deux aspects clés ciblés par l'outil. Toujours du côté cognitif, d'autres commentaires mettent de l'avant que l'épreuve est trop difficile et donc qu'elle ne permettrait pas de dépister les élèves en difficulté. Certains participants trouvent que la première question est trop facile.
En ce qui concerne l'enseignant, nous retenons que certains participants ont souligné que ce qui était évalué dans l'épreuve n'était pas ce qui était travaillé dans leur classe. Les autres commentaires en lien avec l'enseignant mentionnaient que la passation de l'épreuve leur permettrait de déterminer les interventions à mettre en place et de préciser le niveau d'intervention adéquat.

Enfin, dans la quatrième catégorie de commentaires, les commentaires en lien avec l'administration de l'épreuve, nous retenons que certains participants ont précisé que l'outil était bien construit et facile d'utilisation. Des participants ont suggéré de mieux expliquer comment administrer l'épreuve en passant par la préparation du matériel jusqu'à l'interprétation des réponses des élèves. Un des aspects de l'épreuve qui a suscité des réactions divergentes est le temps d'exposition des items ; certains l'ont jugé trop court, d'autres ont dit que le temps était adéquat. Pour ce qui est de la validité du construit, la majorité des commentaires indiquent que l'épreuve évalue bien ce qu'elle doit évaluer. Finalement, des participants ont trouvé que le format de l'épreuve était approprié et d'autres ont suggéré d'agrandir ou d'ajouter des cases dans la feuille réponse.

La première partie de la vérification de la viabilité en contexte de l'outil d'évaluation est complétée. La section suivante présente la deuxième partie de la vérification de la viabilité en contexte, soit celle de la séquence didactique.

4.2 Résultats de la vérification de la viabilité en contexte de la séquence didactique

Afin de déterminer si la séquence didactique permet aux élèves de développer une meilleure compréhension du sens du nombre et de la numération, en leur donnant l'occasion de développer des représentations mentales dynamiques et imagées touchant à différentes facettes de la numération, les participants devaient répondre à dix questions portant sur chacune des vingt activités et à sept questions sur la séquence didactique en général. Parmi les dix questions portant sur les activités, quatre étaient ouvertes et six étaient fermées. Les sept questions sur la séquence en général étaient fermées. Les participants étaient invités à commenter leur réponse lorsqu'il s'agissait de questions fermées.

Quatre sous-sections constituent cette section, chacune liée aux catégories principales que nous avons utilisées pour analyser les résultats. La grille de codes utilisés est présentée à la section 3.5.2[32]. Une partie de l'analyse correspond aux questions auxquelles les participants ont répondu pour chacune des activités de la séquence didactique. Une autre est en lien avec différents thèmes qui ressortent des préoccupations dont ont parlé les participants. Le type de données sera précisé dans le texte.

Le tableau synthèse 4.2 présente le pourcentage de commentaires lié à chacun des codes pour l'ensemble des activités de la séquence didactique. Au total, 2 767commentaires ont été recueillis. Deux tableaux présentant le nombre de commentaires attribué à chacun des codes pour chacune des activités ont été placés à l'annexe 13.

Tableau 4.2
Synthèse des commentaires des participants par rapport à la séquence didactique

Codes	**Nbre de commentaires**	**%**
Contenu	744	28
Élève	669	25
Enseignant	76	3
Déroulement de l'activité	1181	44
TOTAL	**2670**	**100**

[32] Les liens entre chacune des questions posées aux participants et chacun des codes utilisés pour l'analyse seront exposés dans la présentation détaillée des résultats.

Comme le montre le tableau 4.2, sur les 2 670 commentaires portant sur la séquence didactique, 744 (28 %) se rapportent au contenu, 669 (25 %) sont en lien avec l'élève, 76 (3 %) avec l'enseignant et 1181 (44 %) portent sur le déroulement de l'activité. Étant donné le nombre important de commentaires analysés et de catégories, nous avons divisé ce tableau selon les quatre catégories principales pour que la présentation des résultats soit plus révélatrice. Ces tableaux seront présentés dans les prochaines sections. Pour décrire les résultats de ces tableaux, quelques exemples représentatifs de l'ensemble des commentaires qui ont été recueillis sont proposés, selon les catégories. Un retour sur tous les commentaires proposant des suggestions de modifications de la séquence ou encore menant à une réflexion sur l'évaluation ou l'apprentissage du sens du nombre et de la numération sera effectué dans la section 5.5.

La prochaine section présente l'analyse des commentaires se rapportant au contenu.

4.2.1 Analyse des commentaires se rapportant au contenu

La première grande catégorie de commentaires regroupe les 744 commentaires portant sur le contenu, soit 28 % des 2670 commentaires. Les commentaires liés au contenu ont été analysés selon deux sous-catégories : les variables didactiques et la pertinence. Chacune de ces catégories a elle aussi été divisée de nouveau. Ces divisions seront présentées dans les prochains paragraphes. Le tableau 4.3 présente le nombre de commentaires pour cette première catégorie.

Tableau 4.3
Synthèse des commentaires des participants par rapport aux commentaires liés au contenu dans la séquence didactique

Codes		Abr.	Nbr	%
Variables didactiques	Temps d'exposition	CVT	69	9
	Nombre d'éléments	CVN	47	6
	Disposition des éléments	CVD	149	20
	Mode de représentation	CVM	12	2
TOTAL VARIABLES DIDACTIQUES			277	37
Pertinence	Apprentissage souhaité	CPA	256	34
	Enchaînement des concepts	CPP	126	17
	Niveau de difficulté des activités	CPD	75	10
	Thème de l'activité	CPT	10	2
TOTAL PERTINENCE			467	63
TOTAL			744	100

4.2.1.1 Analyse des commentaires par rapport aux variables didactiques

La première sous-catégorie liée au contenu concerne les variables didactiques et représente 277 commentaires (37 %) . Quatre variables didactiques ont été analysées : le temps d'exposition, le nombre d'éléments, la disposition des éléments et le mode de représentation. La question qui était posée est : « Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi? »

Temps d'exposition

69 (9 %) commentaires ont été recueillis par rapport au temps d'exposition. Il a été demandé aux participants s'ils jugeaient que le temps d'exposition aux objets à traiter est approprié. En général (51 commentaires sur 69), les participants considèrent que c'est le cas. L'exemple du P5 pour l'activité *Oisillons* l'illustre bien :

> « Pour atteindre l'objectif de flexibilité en maths, il faut que l'élève puisse réussir un bon nombre de questions, mais aussi qu'il soit un peu " bousculé" dans le temps ».

Certains cependant croient que le temps est trop court (17 commentaires sur 69), comme le souligne le P7 pour l'activité *Photos de nombres* :

> « Écoute, pour les 4 secondes, les élèves seraient même des fois mieux que moi. »

Un seul commentaire mentionne que le temps est trop long et c'est pour l'activité *Stationnement*. Un détail a été souligné pour les activités de la *Tomathina* à savoir qu'il était possible, dans les paramètres de l'application, d'ajuster le temps d'exposition ou de faire rejouer le cas.

Nombre d'éléments à compter ou à calculer

Il a ensuite été demandé aux participants si le nombre d'éléments à compter ou à calculer dans les activités convenait. 47 commentaires, soit 6 % des commentaires en lien avec le contenu ont été recueillis. La majorité des commentaires (41 commentaires sur 47) stipulent que c'est le cas. Le commentaire du P11 est un bon exemple, lorsqu'il parle de l'activité *Tohubohus* :

> « Le choix des quantités de soldats est approprié, le but étant de voir la pertinence de regrouper des groupes pour compter vite et représenter de manières différentes les nombres. »

Quelques commentaires (6 commentaires sur 47) mentionnent cependant que les éléments à traiter sont trop nombreux, spécifiquement pour l'activité *Photos de nombres*, comme l'explique le P9 :
« Les blocs sont très nombreux pour des élèves de fin 2^{e}. »

Disposition des éléments

La troisième variable didactique sur laquelle les participants devaient se prononcer est la disposition des éléments. 149 commentaires, soit 20 % des commentaires par rapport au contenu sont en lien avec cette variable. La presque totalité des commentaires (147 commentaires sur 149) énonce que la disposition des éléments convient, qu'elle est intéressante et diversifiée. Cette diversité est soulignée par le P7 lorsqu'il parle des activités de la *Bergère* :

> « C'est intéressant que le 10 soit à partir d'un triangle contrairement aux blocs de base dix, c'est une autre façon de représenter 10 ».

Le commentaire du P2 par rapport à *Oisillon* est aussi un bon exemple :

> « C'est excellent que ce ne soit pas toujours des constellations classiques ».

Deux commentaires, faits par le P7, mentionnent que la disposition pourrait être améliorée pour les activités *Stationnement* et *Tohubohus* :

> « C'est difficile à subitiser, il faut compter un à un les autos de la colonne et de la rangée ».
>
> « Peut-être comme dans la *Tomathina*, faire des petits paquets de 2-3 pour que ce soit plus facile à capter pour que l'élève puisse compter par petits groupes ».

Modes de représentation externe

La quatrième et dernière variable didactique porte sur le mode de représentation utilisé dans les activités, soit le mode concret, le mode imagé, le mode symbolique ou le mode verbal. Les participants n'ont pas été questionnés directement sur les modes de représentations, mais en ont parlé dans la section des questions générales. Douze commentaires, soit 2 % des commentaires par rapport au contenu sont en lien avec les modes de représentation. Des 12 commentaires faits, 8 font mention que les représentations concrètes et imagées proposées dans les activités permettent aux élèves de se faire des représentations mentales imagées. Le commentaire du P4 est un bon exemple :

> « Ce sont des activités très imagées de ce qui se passe derrière les nombres, de quoi ils sont formés et comment ».

Un commentaire ajoute que c'est intéressant d'utiliser différents modes de représentation parce que l'on peut rejoindre des élèves qui sont à différents niveaux de compréhension :

> « Cela offre des supports concrets et imagés dans la plupart des cas permettant de rejoindre tous les niveaux d'élèves dans une classe » (P9).

Enfin, 3 des 12 commentaires mentionnent que l'utilisation de matériel concret et d'images permet de développer la flexibilité de représentation chez les élèves, le commentaire du P5 représente bien ces deux commentaires :

> « Le fait de varier les représentations et les groupements favorise certainement la flexibilité mentale des portraits des nombres ».

4.2.1.2 Analyse des commentaires par rapport à la pertinence de la séquence didactique et de ses activités

La deuxième sous-catégorie liée au contenu concerne la pertinence. 467 commentaires, soit 63 % des commentaires par rapport au contenu sont en lien avec cette catégorie. Quatre aspects rattachés à la pertinence de la séquence didactique et de ses activités ont été étudiés : la pertinence de l'activité par rapport à l'apprentissage annoncé, la pertinence dans l'enchaînement des concepts, la pertinence par rapport au niveau de difficulté de l'activité et la pertinence du thème de l'activité. Ces informations ont été recueillies à partir de la réponse des participants à différentes questions, ces questions sont précisées pour chacun des codes.

Apprentissage annoncé

Les participants ont été questionnés par rapport à l'apprentissage que ciblaient les activités. Pour ce faire, ils ont dû répondre à ces questions : « Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité) ? Pourquoi? Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi? ». Les réponses des participants à cette question représentent 256 commentaires, soit 34 % des commentaires liés au contenu. Tous les commentaires analysés mentionnent que oui les activités permettent d'atteindre les cibles d'apprentissage visées.

Enchaînement des concepts

Pour savoir si les activités étaient situées à la bonne place dans la séquence didactique, la question suivante a été posée aux participants : « Trouvez-vous que l'ordre des activités est pertinent, pourquoi? » Leurs réponses représentent 126 commentaires, soit 17 % des commentaires liés au contenu. Les réponses sont nuancées par rapport à cet aspect. Pour mieux analyser ces commentaires, les activités ont été classées en deux catégories. La première catégorie concerne les activités d'entraînement à la subitisation et la groupitisation (*Oisillons, Magie, Pyramide, les activités de la Tomathina et Bataille 1 et 2*) et représente 49 des 126 commentaires. La deuxième catégorie regroupe les activités ciblant les concepts centraux rattachés au développement du sens du nombre (*Joyaux, Bergère, Stationnement, Tohubohus, Photos de nombres et Visages de nombres*), soit les activités centrales ou principales et représente 77 des 126 commentaires.

25 des 49 commentaires par rapport aux activités d'entraînement à la subitisation et la groupitisation les perçoivent comme des retours en arrière par rapport à la progression des activités dans la séquence, progression appuyée sur le continuum proposé dans cette recherche. Elles ne sont donc pas bien placées selon ces commentaires. Le commentaire du P12 par rapport à l'activité *Bataille 1* est un bon exemple :

> « Je me questionne sur le retour périodique vers ce que je considère du plus simple ».

Aussi, 12 commentaires sur 49 mentionnent qu'elles sont bien placées, comme le commentaire du P5 par rapport à *Tomathina Mémoire* :

> « Non seulement elle est pertinente, mais j'aime qu'on revienne sur les complémentaires du 10 après avoir fait différentes activités ».

Enfin, quelques autres commentaires précisent que les deux premières activités, qui sont des activités d'entraînement à la subitisation et la groupitisation, sont à la bonne place dans la séquence (12 commentaires sur 49).

Pour les activités ciblant les concepts centraux, la majorité des commentaires (69 commentaires sur 77) mentionnent que la séquence est pertinente et qu'elle permet aux élèves de réinvestir ce qu'ils ont appris d'une activité à l'autre, comme le montrent les commentaires du P12 à propos des activités de la *Bergère* :

> « J'ai comme vu le lien entre la Bergère et les Joyaux. J'ai vu les marches qu'il y avait entre les activités ».

Quelques commentaires (5 commentaires sur 77) stipulent que les deux dernières activités de la séquence sont trop difficiles et qu'elles ne devraient pas être là. Enfin, 3 commentaires sur les 77 associés à l'enchaînement des concepts mentionnent que l'activité *Stationnement* devrait être faite avant les activités *des Joyaux*. Les trois sont faits par le participant 13. Il précise que, selon lui, *Stationnement* est une activité plus facile que *Joyaux*.

Le niveau de difficulté des activités

Pour connaître l'opinion des participants par rapport au niveau de difficulté des tâches la question suivante leur était posée : « Trouvez-vous que les activités de la séquence s'adressent à des élèves de fin 2e année ou début 3e année, pourquoi? ». 75 commentaires, soit 10 % des commentaires par rapport au contenu sont en lien avec cette catégorie. Pour mieux analyser les réponses des participants, les commentaires ont été classés selon le type d'activité, soit des activités d'entraînement de subitisation et de groupitisation ou des activités visant les concepts centraux de la séquence. 42 commentaires sur 75 concernent les activités d'entraînement à la subitisation et la groupitisation. La majorité des participants (34 commentaires sur 75) ont mentionné que les activités étaient faciles, comme le présente le P5 lorsqu'il parle de l'activité *Magie* :

> « L'activité est même un peu trop facile à cette période de l'année » (on était au printemps et ce participant est un enseignant de 2e année).

Alors que 8 commentaires sur 75 mentionnent qu'elles offrent un niveau de difficulté adéquat.

D'un autre côté, 33 commentaires sur 75 concernent les autres activités centrales de la séquence, celles présentées en première partie de la période. 27 commentaires sur 75 disent qu'elles constituent des défis intéressants. Les commentaires des P1 et P2 par rapport aux activités de la *Bergère1 et 2* sont de bons exemples :

> « Le défi semble bon, car il présente des situations différentes et variées dans le choix des nombres, dans un contexte connu » (P1).
>
> « Il y a quand même un niveau de difficulté supérieur » (P2).

Pour les deux dernières activités soit les *Photos de nombres* et les *Visages de nombres*, 6 des 75 commentaires liés au niveau de difficulté de l'activité mentionnent que le défi est grand dans ces activités pour des élèves de 3e année. Ces commentaires représentent 6 des 75 commentaires liés au niveau de difficulté de l'activité.

Thème de l'activité

Le dernier élément associé à la pertinence de la séquence et de ses activités sur lequel les participants se sont prononcés est le thème de l'activité. Ce code est ressorti de l'analyse générale des commentaires. 10 commentaires, soit 2 % des commentaires par rapport au contenu sont liés au thème des activités proposées. Tous mentionnent que les thèmes ont été bien choisis. Le commentaire du P4 est un bon exemple :

> « Elles vont chercher des thèmes intéressants pour les enfants et qui peuvent être exploités dans les autres matières (chevalier, moutons, bergère…). »

Les résultats en lien avec le contenu viennent d'être présentés, en abordant les variables didactiques ainsi que la pertinence de la séquence et de ses activités, à travers trois sous-catégories. La prochaine section présente l'analyse des commentaires se rapportant à l'élève et ses différentes sous-catégories.

4.2.2 Analyse des commentaires se rapportant à l'élève

La deuxième grande catégorie de commentaires regroupe les commentaires portant sur l'élève. Il s'agit de 669 commentaires, 25 % des 2670 commentaires. Les commentaires liés à l'élève ont été analysés selon deux sous-catégories, les aspects psychoaffectifs et les aspects cognitifs. Chacune de ces catégories a elle aussi été divisée de nouveau. Ces divisions seront détaillées dans les prochains paragraphes. Le tableau 4.4 présente le nombre de commentaires pour cette deuxième catégorie.

Tableau 4.4
Synthèse des commentaires des participants par rapport aux commentaires liés à l'élève dans la séquence didactique

Codes			Abr.	Nbr	%
Aspects psychoaffectifs	Anxiété		ÉPA	9	1,3
	Motivation		ÉPM	271	40,4
	Habiletés de coopération		ÉPC	2	0,3
TOTAL ASPECTS PSYCHOAFFECTIFS				282	42
Aspects cognitifs	Représentation mentale		ÉPR	36	5
	Attention		ÉPT	6	1
	Conduites de l'élève	Référé à quelque chose de connu	ÉCCR	37	6
		Dénombrer	ÉCCD	99	15
		Compter les groupes ou par bonds	ÉCCB	42	6
		Reproduire ou faire un arrangement	ÉCCA	96	14
		Décomposer	ÉCCDC	19	3
		Calcul mental	ÉCCT	13	2
		Mémoriser	ÉCCM	10	1
		Confondre	ÉCCC	25	4
		Agir trop vite	ÉCCV	4	1
TOTAL ASPECTS COGNITIFS				387	58
TOTAL				669	100

4.2.2.1 Analyse des commentaires par rapport aux aspects psychoaffectifs

Les commentaires liés aux aspects psychoaffectifs représentent 282 commentaires, soit 42 % des commentaires liés à l'élève. Trois sous-catégories liées à ces aspects ont été analysées : l'anxiété, la motivation et les habiletés de coopération. Toutes ces catégories sont ressorties des commentaires généraux des participants, sauf la motivation qui, elle, est la réponse à une question spécifique.

Anxiété

Le premier aspect psychoaffectif analysé est l'anxiété. Neuf (1,3 %) commentaires par rapport à l'élève sont en lien avec cet aspect. Un peu moins de la moitié des commentaires (4 commentaires sur 9) soulignent que les thèmes des activités sont des éléments sécurisants, comme l'explique le P2 lorsqu'il parle de l'activité *Pyramide* :

> « Le travail avec des cartes à jouer place l'élève en situation de confiance ».

Un peu plus que la moitié des commentaires (5 commentaires sur 9) mentionnent qu'il y a des éléments anxiogènes dans cette séquence : son côté nouveau et les temps d'exposition. Le commentaire du P5 par rapport à *Oisillons* est un bon exemple :

> « Les moins habiles en flexibilité mentale seront stressés par les dispositions variées et les nombres impossibles à anticiper ».

Motivation et intérêt des élèves

Le deuxième aspect psychoaffectif évalué est la motivation et l'intérêt qu'ils ont à faire ces activités. 271 commentaires, 40,4 % des commentaires liés à l'élève sont en lien avec ce code. Ils ont été recueillis suite à la question : « Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante? » et au travers d'autres commentaires généraux qui sont ressortis au cours de l'entrevue. Les commentaires mentionnant que l'activité était ludique, que les élèves auraient du plaisir à la réaliser ont été distingués des commentaires précisant que l'activité présentait un défi stimulant pour les élèves. D'abord, plusieurs commentaires analysés (147 commentaires sur 271) disent que les activités de cette séquence sont motivantes, amusantes, interactives et que les participants ont envie de les essayer avec leurs élèves. Certains commentaires précisent que le thème choisi pour les activités capte l'intérêt des élèves, de même que la facture visuelle et le fait que l'activité soit présentée sous forme de jeu. Le P4 fait un commentaire dans ce sens par rapport à l'activité *Oisillons* :

> « Le visuel est bon et le contexte donne une bonne motivation et un intérêt pour les enfants ».

Le P1 fait lui un commentaire par rapport à l'activité *Magie* :

> « C'est une activité très dynamique, les élèves aiment la magie donc ça, c'est gagnant, assurément. »

Un autre aspect qui ressort de l'analyse de ces commentaires est que les activités proposent des défis raisonnables, des problèmes à résoudre à la hauteur des capacités de l'enfant, ce qui suscite l'engagement des élèves (124 sur 271 commentaires). Le commentaire du P12 par rapport à l'activité *Joyaux* est un bon exemple :

> « C'est un défi puisque nous passons à de plus grandes quantités, il y a donc un niveau de difficulté engageant (vraiment impossible de compter un par un!) »

Le commentaire du P1 résume bien les aspects motivants et engageants de cette séquence :

> « Puis, au niveau de la motivation, les enfants sont mobilisés. Avec ces activités-là, ils se sentent concernés. Ils veulent participer, ils veulent échanger puis ça amène justement une énergie qui est très positive à l'apprentissage ».

Habiletés de coopération

Le troisième aspect psychoaffectif évalué concerne les habiletés de coopération. Deux commentaires, soit 0,3 % des commentaires par rapport à l'élève portent sur ce sujet. Les deux commentaires ont été faits par le P5 à propos de l'activité *Oisillons* et mentionnent que les élèves pourraient avoir besoin de soutien pour bien travailler en équipe :

> « À cet âge, les habiletés de coopération ne sont pas pleinement développées. Les conflits d'idées entre coéquipiers pourraient nuire à l'atteinte de l'objectif visé ».

4.2.2.2 Analyse des commentaires par rapport aux aspects cognitifs

Les commentaires liés aux aspects cognitifs seront maintenant rapportés. 387 commentaires, soit 58 % de commentaires par rapport à l'élève concernent les aspects cognitifs. Trois sous-catégories ont été analysées : la représentation mentale, l'attention et les conduites de l'élève. Les commentaires recueillis sont principalement associés à des questions qui ont été posées directement aux participants, elles seront présentées dans chacune des sous-catégories.

Représentation mentale

La première sous-catégorie concerne la représentation mentale. 36 commentaires, soit 5 % des commentaires liés à l'élève touchent cette catégorie. Une question dans les questions générales portait sur cet aspect : « Pensez-vous que vos élèves développeraient une représentation mentale dynamique et imagée des quantités utiles à leurs apprentissages? » La majorité des commentaires analysés (32 commentaires sur 36) disent que oui et soulignent que cette séquence donne l'occasion aux élèves de se construire une telle représentation mentale. Les commentaires du P4 et du P9 les résument bien :

> « C'est toujours un peu l'espèce d'image ou de représentation qui est là dans toutes les activités, qu'on le veuille ou non, il y a un impact sur l'apprentissage » (P4).
>
> « Je pense que la variété d'activités permet effectivement de développer une flexibilité mentale par rapport aux quantités et aux groupements du système décimal » (P9).

Un commentaire, fait par le P12, apporte un questionnement sur la construction des représentations mentales :

> « Je me demande cependant à quel point ils vont recourir aux constellations visuelles sur les cartes puisque ce n'est pas possible de bouger les arrangements. »

Enfin, trois commentaires ont été identifiés, même s'ils ne concernent pas directement les élèves. Ils ont souligné que les enseignants n'ont pas eu l'opportunité de se construire ces représentations mentales et que la séquence leur donnerait, à eux aussi, l'occasion de se construire des représentations mentales pour pouvoir mieux aider leurs élèves par la suite. Le P4 l'explique :

> « Souvent, les profs on reste dans les images que nous, nous avons eues. »

Attention

Le deuxième aspect cognitif évalué est l'attention. Six commentaires, soit 1 % des commentaires par rapport à l'élève portent sur ce sujet. L'importance d'être attentif lors de la réalisation de ces activités et le fait que les activités stimulent la concentration est ce qui ressort de l'analyse de tous les commentaires en lien avec cet aspect. Le commentaire du P2 est un bon exemple : « C'est important d'être vigilant, de mettre la *switch* à *on* qui trop souvent est à *off* ».

Conduites de l'élève

Toujours dans les aspects cognitifs, 345 commentaires, soit 52 % des commentaires par rapport à l'élève sont en lien avec les conduites. Neuf conduites, issues de la compilation « naturelle » des commentaires, ont été analysées : se référer à quelque chose de connu, dénombrer, compter par groupes ou par bonds, reproduire ou faire un arrangement, décomposer, faire du calcul mental, mémoriser, confondre, agir trop vite. Les réponses des participants à deux questions sont analysées dans cette catégorie. Les questions étaient : « Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité? » et « Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves? » Les commentaires des participants seront comparés à ce qui avait été anticipé dans l'analyse a priori de ces activités.

Se référer à quelque chose de connu

Le premier élément analysé dans les conduites est le fait de se référer à quelque chose de connu pour compter les quantités présentées. 37 commentaires, soit 6 % de commentaires par rapport à l'élève sont en lien avec cette conduite. Selon 15 des 37 commentaires recueillis, ce quelque chose de connu peut être une forme géométrique ou une constellation. Pour 15 autres des 37 commentaires, il peut s'agir de faits numériques. 5 autres commentaires sur les 37 mentionnent que la mauvaise mémorisation des faits numériques peut être une cause d'erreur. Enfin, 2 des 37 commentaires soulignent que ce quelque chose de connu peut être un élément appris dans une activité antérieure de la séquence, comme l'explique le P11 :

> « Les élèves peuvent réutiliser des groupements comme ça, des arrangements comme ça ou des constellations, comme ceux qu'ils ont vus dans l'activité *Oisillons* ».

Cette idée de se référer à un apprentissage antérieur avait été mise de l'avant dans l'analyse a priori.

Dénombrer

Le deuxième élément analysé dans les conduites est le fait de dénombrer. Ce code regroupe tous les commentaires se rapportant à un comptage un à un. 99 commentaires, soit 14 % des commentaires par rapport à l'élève concernent cette catégorie. Trois types de commentaires sont ressortis. Le premier type regroupe des commentaires mentionnant simplement que dénombrer est une conduite utilisée dans cette activité (42 commentaires sur 99). Le deuxième type cible des commentaires mentionnant que dénombrer n'est pas un bon choix de stratégie (35 commentaires du 99). Le troisième type concerne les commentaires disant que les élèves peuvent faire des erreurs en dénombrant, en faisant un mauvais comptage un à un (22 commentaires sur 99). Pour le deuxième type, soit que le fait de dénombrer n'est pas une bonne stratégie pour réaliser ces activités, le commentaire des P9 et 11 par rapport à *Joyaux Activité* sont de bons exemples :

> « Certains élèves plus rigides demeureraient accrochés au fait qu'il suffit de les compter » (P9).
>
> « L'élève pourrait compter un à un les jetons ce qui le placerait dans une situation où les risques d'erreurs et de perte de temps sont importants » (P11).

Ces conduites avaient été identifiées dans l'analyse a priori.

<u>Compter par bonds ou par groupes</u>

Le troisième élément analysé dans les conduites est le fait de compter par bonds ou par groupes. 42 commentaires, soit 6 % des commentaires par rapport à l'élève sont en lien avec cette catégorie. Deux types de commentaires sont ressortis : des commentaires mentionnant simplement que compter par bonds ou par groupe pouvait être une conduite utilisée dans les activités (25 commentaires sur 42) et des commentaires mentionnant que l'élève pourrait avoir de la difficulté à compter par bonds ou par groupes (17 commentaires sur 42). Le commentaire du P12 est un bon exemple de ces 17 commentaires :

> « Il y en a peut-être qui ne connaissent pas leurs bonds, qui vont dénombrer le paquet de 10 ».

Le comptage par bonds est une conduite qui est mentionnée dans l'analyse a priori, de même que les erreurs que les élèves commettent lorsqu'ils l'utilisent.

<u>Reproduire un arrangement</u>

Le quatrième élément analysé dans les conduites est le fait de reproduire un arrangement ou de faire un nouvel arrangement pour trouver la quantité cherchée dans un problème. 96 commentaires, soit 14 % des commentaires par rapport à l'élève sont en lien avec cette catégorie. Deux conduites adéquates ont été mentionnées : se référer à l'arrangement et au groupement pour trouver la réponse aux problèmes (56 commentaires sur 96) et s'appuyer sur les capacités de subitisation et de groupitisation pour reproduire cet arrangement (11 commentaires sur 96). Le commentaire du P11 est un bon exemple de la conduite qui est la plus identifiée dans les commentaires, soit le fait de se référer à un arrangement pour trouver la réponse :

> « Ils pourraient recourir au groupement pour mieux " réaliser " et se souvenir de l'ensemble d'éléments du tableau présenté ».

Certains participants mentionnent que reproduire un arrangement pourrait occasionner des difficultés à certains élèves (29 commentaires sur 96). Ils se justifient en relevant trois types d'erreurs que les élèves pourraient faire. Le premier type concerne le fait que les élèves pourraient mettre le bon nombre de voitures, sans respecter leur disposition (7 des 29 commentaires). Un commentaire du P1 va dans ce sens :

> « Les élèves pourraient ne se concentrer que sur la quantité globale en oubliant la disposition des groupements ».

Le deuxième type d'erreur concerne la possibilité que les élèves puissent avoir de la difficulté à gérer l'orientation de l'arrangement en mélangeant les colonnes et les rangées par exemple, à se situer dans l'espace ou à organiser leur matériel (18 des 29 commentaires). Enfin, le troisième type d'erreur se rapporte au fait que certains élèves pourraient ne pas utiliser d'arrangement, mais plutôt disposer les éléments à compter dans une ligne (4 des 25 commentaires).

L'erreur d'orientation de l'arrangement n'était pas présente dans l'analyse a priori, tous les autres éléments y étaient.

<u>Décomposer les nombres</u>

Le cinquième élément analysé dans les conduites est le fait de décomposer les nombres pour mieux calculer. 19 commentaires, soit 3 % de commentaires par rapport à l'élève sont en lien avec cette catégorie. Deux types de conduites sont ressortis de l'analyse de ces commentaires : certains mentionnent simplement qu'il s'agit d'une stratégie que les élèves peuvent utiliser (8 commentaires sur 19) et d'autres font allusion à l'utilisation de la compensation pour décomposer les nombres (4 commentaires sur 19). Le commentaire du P3 par rapport à la *Tomathina Boîtes* est un bon exemple, de même que celui du P13 par rapport à *Tohubohus 1*.

> « 9 d'un côté et 8 de l'autre. Ils vont dire j'en prends 1 de 8 et je le mets à 9 et là j'ai 10 » (P3).
>
> « Pour faire les soustractions, ils pourraient compléter le nombre » (P13).

L'erreur qui est mentionnée par les participants par rapport à la décomposition est le fait de mal recomposer les nombres (7 commentaires sur 19), soit de simplement additionner le nombre de dizaines et d’unités, sans tenir compte de leur valeur. Le commentaire du P1 par rapport à la *Bergère 1 et 2* est un bon exemple :

> « L’élève va additionner les dizaines et les unités : 3 d + 4 u = 7 ».

L’erreur de la mauvaise recomposition n’avait pas été identifiée dans l’analyse a priori. Les autres éléments sont présents.

<u>Calcul mental</u>

Le sixième élément analysé dans les conduites est le fait d’avoir recours au calcul mental pour trouver les réponses aux problèmes proposés. 13 commentaires, soit 2 % de commentaires par rapport à l’élève sont en lien avec cette catégorie. Deux conduites liées au calcul mental ont été identifiées dans les commentaires. Les élèves pourraient avoir recours à l’estimation et à leurs stratégies de calcul mental pour réaliser les activités (7 des 13 commentaires). Les autres commentaires (6 des 13 commentaires) mettent de l’avant que les activités de la séquence sont des occasions pour les élèves de développer leurs habiletés de calcul mental, comme le commentaire du P13 par rapport à les *Photos de nombres* :

> « Ce n’est pas avec des chiffres, des opérations, mais je pense que c’en est du calcul mental ».

Ces conduites sont identifiées dans l’analyse a priori.

<u>Mémoire</u>

Le septième élément analysé dans les conduites est la mémoire pour mieux trouver la réponse aux problèmes proposés. 10 commentaires, soit 1 % des commentaires par rapport à l’élève sont en lien avec cette catégorie. Les 10 commentaires mentionnent simplement que les élèves pourraient parfois utiliser leur mémoire pour réaliser les activités. Le commentaire du P11 est un bon exemple :

> « Les élèves pourraient mémoriser instantanément les petites numérosités ».

Cette conduite est présente dans l’analyse a priori.

<u>Confondre</u>

Le huitième élément analysé dans les conduites concerne les confusions, autres que les erreurs déjà mentionnées. 25 commentaires, soit 4 % de commentaires par rapport à l’élève sont en lien avec cette catégorie. Les causes de confusions qui ressortent de l'analyse, en ce qui concerne les élèves, se rapportent à la nouveauté de la tâche (4 commentaires sur 25) et à l'organisation du matériel (21 commentaires du 25). Le commentaire du P12 pour l'activité *Visages de nombres* est un exemple de confusion due à la mauvaise manipulation du matériel:

> « Certains vont se tromper, car l'utilisation du matériel amène parfois des erreurs en lien avec l'organisation du matériel ».

Ces conduites avaient été nommées dans l'analyse a priori.

Aller trop vite

Le neuvième élément analysé dans les conduites concerne le fait d'aller trop vite dans la recherche de solution, ce qui occasionnerait des erreurs. 4 commentaires, soit 1 % de commentaires par rapport à l'élève sont en lien avec cette catégorie. Les 4 commentaires indiquent que les élèves pourraient aller trop vite, ce qui leur occasionnerait des erreurs de comptage. Cette conduite avait été identifiée dans l'analyse a priori.

Les résultats par rapport à l'élève, en les analysant selon les aspects psychoaffectifs et cognitifs, viennent d'être présentés. La prochaine section propose l'analyse des commentaires se rapportant à l'enseignant et ses sous-catégories.

4.2.3 Analyse des commentaires se rapportant à l'enseignant

La troisième grande catégorie de commentaire regroupe les commentaires portant sur l'enseignant. Il s'agit de 76 commentaires, soit 3 % des 2670 commentaires. Les commentaires liés à l'enseignant ont été analysés selon deux sous-catégories : l'intervention et l'organisation des services. La catégorie intervention a été divisée de nouveau en trois catégories : l'enseignement formel, l'enseignement par résolution de problèmes et la mise en place d'un partage de stratégies entre les élèves. Le tableau 4.5 présente le nombre de commentaires pour cette deuxième catégorie.

Tableau 4.5
Synthèse des commentaires des participants par rapport aux commentaires liés à l'enseignant dans la séquence didactique

Codes		Abr.	Nbr	%
Intervention	Enseignement formel	EITF	11	15
	Enseignement par résolution de problèmes	EITR	14	18
	Partage de stratégies	EITP	38	50
TOTAL INTERVENTION			63	83
Organisation des services		EIS	13	17
TOTAL			76	100

4.2.3.1 Analyse des commentaires par rapport à l'intervention

Les commentaires liés à l'intervention représentent 63 commentaires, soit 83 % des commentaires énoncés par rapport l'enseignant. Ils sont partagés dans trois catégories. Ces commentaires ont été recueillis à travers les commentaires généraux que les participants ont faits au cours de l'entrevue.

Enseignement formel

La première catégorie liée à l'intervention est en lien avec l'enseignement formel et représente 11 commentaires, soit 15 % de commentaires par rapport à l'enseignant. La majorité des commentaires mentionnent que l'enseignement formel actuel met de l'avant la mémorisation et l'apprentissage de techniques au détriment de la compréhension (7 commentaires sur 11). Les deux commentaires des P7 et 4 vont dans ce sens :

> « À mon avis, dans ce que je vois en ce moment dans les classes, on est dans du " par cœur " » (P7).
>
> « Ben c'est la perception des maths. C'est quoi faire des maths? C'est additionner, multiplier, diviser et soustraire » (P7).
>
> « À l'école, on apprend les procédés pour les procédés » (P4).

Les autres commentaires (4 commentaires sur 11) soulignent que le calcul visuel (calcul qui est fait à partir de matériel de numération, comme les blocs de base dix ou abaques) et le calcul mental ne sont pas quelque chose qui est valorisé actuellement dans l'enseignement formel. Le commentaire du P9 est un bon exemple :

> « Travailler avec les yeux, on ne le fait pas traditionnellement ».

Enseignement par résolution de problèmes

La deuxième catégorie liée à l'intervention est en lien avec l'enseignement par résolution de problèmes. 14 commentaires, soit 18 % des commentaires par rapport à l'enseignant sont en lien avec cette catégorie. La majorité des commentaires (12 commentaires sur 14) mentionnent qu'apprendre par la résolution de problème est ce qui est mis de l'avant par cette séquence. Le commentaire du P11 est une belle synthèse par rapport à ce type d'enseignement :

> « Cette séquence s'inscrit dans une démarche qui présente aux jeunes des défis. Un climat de challenge avec les jeunes s'installe et je trouve que c'est bien amusant ».

Les deux autres commentaires soulignent que l'enseignement par résolution de problèmes mis de l'avant dans cette séquence est une façon intéressante de travailler les mathématiques. Le commentaire du participant 8 est un bon exemple :

> « Ça pourrait être bien intéressant qu'il y en ait plus qui travaillent avec ça ».

Partage de stratégies

La dernière catégorie liée à l'intervention est en lien avec l'importance du partage de stratégies par les élèves en classe et elle concerne 38 commentaires, soit 50 % des commentaires liés à l'enseignant. Ces 38 commentaires soulignent l'importance d'amener les élèves à partager leurs stratégies lors de la réalisation des activités afin que tous puissent en tirer profit. Ils précisent que cet élément n'est pas assez mis de l'avant dans la séquence. Un commentaire du P5 par rapport à l'activité *Oisillon* explique pourquoi ces échanges sont féconds :

> « Un partage des stratégies utilisées doit être fait à la suite de l'activité. Là, les conflits d'idées peuvent devenir très riches pour les apprentissages de certains élèves. »

de même qu'un commentaire du P9 :

> « Ajouter à la flexibilité de perception, au développement de la capacité à expliquer son raisonnement, les bénéfices apportés par les interventions multiples, donnent l'occasion aux élèves plus à risque d'entendre plusieurs façons de faire ».

4.2.3.2 Analyse des commentaires par rapport à l'organisation des services

Les commentaires en lien avec l'organisation des services, qui correspondent à 13 commentaires, soit 17 % des commentaires par rapport à l'enseignant, seront maintenant abordés. Ces commentaires ont été émis sans répondre à des questions spécifiques par les participants. Deux thèmes sont ressortis de cette analyse. D'abord, la majorité des commentaires (7 commentaires sur 13) soulignent que les activités permettent de faire un bon portrait des élèves et donc de bien planifier les interventions à mettre en place selon ce portrait. Le commentaire du P4 est un bon exemple :

> « Si tu as des enfants qui ne sont pas capables de faire la base, en partant, ça te donne un message de te réajuster, d'enseigner de nouveau certaines notions ».

Ensuite, un peu moins que la moitié des commentaires (6 commentaires sur 13) mentionnent que ce portrait, de même que la nature des activités qui sont proposées aux élèves, permettent de mettre en place rapidement des interventions supplémentaires pour les élèves. Le commentaire du P11, qui parle de *Joyaux Intro*, est un bon exemple :

> « Mettons que c'est la prof qui fait la première activité et qu'elle se rend compte que pour deux élèves c'est encore difficile. Ces deux élèves-là auront de la difficulté pour la deuxième période avec les *Joyaux,* c'est pratiquement certain ».

Les résultats par rapport à l'enseignant viennent d'être présentés en analysant différents types d'interventions mis de l'avant dans la séquence et en regardant les effets de cette séquence sur l'organisation des services. La prochaine et dernière section présente l'analyse des commentaires se rapportant au déroulement de l'activité.

4.2.4 Analyse des commentaires se rapportant au déroulement de l'activité

La cinquième grande catégorie de commentaires regroupe les commentaires portant sur le déroulement de l'activité. Il s'agit de 1181 commentaires, soit 44 % des 2670 commentaires. Ces commentaires ont été analysés selon deux sous-catégories, ce qui se passe avant la tâche et ce qui se passe pendant la tâche. Aucun commentaire en lien avec ce qui se passe après la tâche n'a été fait par les participants. Chacune de ces catégories a elle aussi été divisée de nouveau. Ces catégories seront présentées dans les prochains paragraphes. Les participants devaient répondre à des questions directement en lien avec chacune de ces catégories. Le tableau 4.6 présente le nombre de commentaires pour cette deuxième catégorie.

Tableau 4.6
Synthèse des commentaires des participants par rapport aux commentaires liés au déroulement des activités dans la séquence didactique

Codes			Abr.	Nbr	%
Avant la tâche	Consignes	Convient	DACC	176	15
		Suggestion	DACS	91	8
	TOTAL CONSIGNES			267	23
	Matériel	Convient	DAMC	168	14
		Suggestion	DAMS	49	4
	TOTAL MATÉRIEL			217	18
	Nombre de périodes	Convient	DAPC	6	0,5
		Suggestion	DAPS	5	0,5
	TOTAL NOMBRE DE PÉRIODES			11	1
TOTAL AVANT LA TÂCHE				495	42
Pendant la tâche	Durée	Convient	DPDC	154	13
		Suggestion	DPDS	62	5
	TOTAL DURÉE			216	18
	Réaliste	Convient	DPRC	182	16
		Suggestion	DPRS	25	2
	TOTAL RÉALISTE			207	18
	Type de regroupement	Grand groupe	DPTG	54	5
		Équipes	DPTE	82	7
		Individuel	DPTI	39	3
		Variable	DPTV	88	7
	TOTAL TYPE DE REGROUPEMENT			263	22
TOTAL PENDANT LA TÂCHE				686	58
TOTAL				1181	100

4.2.4.1 Analyse des commentaires par rapport à ce qui se passe avant la tâche

Les commentaires qui sont en lien avec ce qui se passe avant la tâche représentent 495 commentaires, soit 42 % des commentaires liés au déroulement des activités. Trois caractéristiques ont été analysées : les consignes, le matériel et le nombre de périodes.

Consignes

La première catégorie par rapport à ce qui se passe avant la tâche est en lien avec les consignes et représente 267 commentaires, soit 23 % des commentaires par rapport au déroulement des activités. Les participants devaient répondre à la question suivante : « Est-ce que les consignes sont claires? Sinon, comment devrait-on reformuler les consignes? » La majorité des commentaires liés aux consignes (176 sur 267) sont en accord avec les consignes actuelles. Plusieurs participants (91 commentaires sur 267) font cependant des suggestions de modifications ou des remarques pour pointer certains éléments de la consigne. Parmi ces commentaires, la majorité (57 commentaires sur 91) souligne que les consignes doivent être plus détaillées quant aux questions à poser aux élèves et aux comportements attendus. Le commentaire fait par le P9 est un bon exemple :

> « Une introduction et des suggestions précises de questions à utiliser permettraient d'assurer le développement de cette flexibilité puisque les élèves ne peuvent devenir plus flexibles mentalement que leur enseignant ».

Quelques commentaires (16 commentaires sur 91) proposent d'ajouter des précisions sur ce qu'il faut faire lorsque les élèves ne réussissent pas les activités. Voici les interrogations du P12 :

> « Comment traiter l'erreur? Comment tu vas gérer ton activité suivante? Est-ce que tu vas lui faire faire des choses entre les deux? »

Enfin d'autres commentaires (18 commentaires sur 91) ajoutent qu'il serait bien de préciser davantage le but de la séquence et des activités. Ils proposent aussi de faire une capsule vidéo pour présenter les activités. Le commentaire du participant 11 est un bon exemple :

> « Quelqu'un qui veut utiliser ça, il faudrait quand même une présentation sur le but de ça. C'est sûr, tu dois observer les élèves pour savoir comment il pense et pourquoi il est bloqué là ».

Matériel

La deuxième catégorie de commentaires en lien avec les réflexions à tenir avant de mettre les activités en place se rapporte au matériel à utiliser et elle représente 217 commentaires, soit 18 % des commentaires par rapport au déroulement de l'activité. La majorité des commentaires (168 sur 217) sont en accord avec le matériel proposé dans la séquence. 4 % des commentaires (49 sur 217) font des suggestions de matériel qui n'avait pas été anticipé pour les activités de la séquence : un tableau blanc effaçable, un crayon à encre sèche, des triangles de 10 et de 100 pour les activités de la *Bergère* ou encore d'utiliser du papier et un crayon.

Nombre de périodes

La troisième et dernière catégorie par rapport à ce qui se passe avant la tâche est en lien avec le nombre de périodes et représente 11 commentaires, soit 1 % des commentaires par rapport au déroulement des activités. Les participants devaient répondre à la question : « Trouvez-vous que le nombre d'activités est adéquat, pourquoi? » 6 des 11 commentaires de cette catégorie sont en accord avec le nombre de périodes proposé et 5 des 11 commentaires font des suggestions de modifications. Le commentaire du P5 est représentatif des suggestions de modifications. Il propose de mettre de la souplesse dans la séquence pour faire les activités à différents moments, au lieu de les faire les unes après les autres :

> « Au début, je trouvais que c'était beaucoup en lisant le document, mais je réalise que plusieurs d'entre elles peuvent être reprises à différents moments dans la semaine, dans l'étape et peut-être aussi qu'elles pourraient être exploitées tout au long de l'année ».

Le P11 est un autre bon exemple. Il suggère, lui, d'ajouter des périodes au besoin :

> « Le nombre convient, à part pour une ou deux activités où on pourrait considérer l'ajout de périodes au besoin ».

4.2.4.2 Analyse des commentaires par rapport à ce qui se passe pendant la tâche

Les commentaires en lien avec ce qui se passe pendant la tâche et qui représente 686 commentaires, soit 58 % des commentaires liés au déroulement de l'activité seront maintenant abordés. Trois caractéristiques ont été analysées : la durée de l'activité, le fait qu'elle soit réaliste et facilement réalisable en classe et le type de regroupement d'élèves qui serait à privilégier pour la réalisation de l'activité.

Durée de l'activité

La première catégorie par rapport à ce qui se passe pendant l'activité est sa durée et concerne 216 commentaires, soit 18 % des commentaires en lien avec le déroulement de l'activité. Les participants devaient répondre à la question : « Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste? Sinon, quel temps devrait être alloué? » La majorité des commentaires de cette catégorie (154 commentaires sur 216) sont en accord avec la durée proposée pour l'activité et 62 indiquent que la durée prévue pour les activités est trop courte.

Parmi les 62 commentaires qui mentionnent que le temps alloué est trop court, 34 concernent les activités qui ciblent le développement d'un concept (*Joyaux-Intro, Joyaux Activité, Bergère,* *Tohubohus et Visages de nombres*). 45 minutes étaient prévues pour ces activités et ces commentaires soulignent que ce n'est pas assez. Le commentaire du P9 par rapport à l'activité *Joyaux-Intro* est un bon exemple :

> « 45 minutes sont insuffisantes si l'on veut vraiment effectuer un dialogue pédagogique avec les élèves ».

Les 28 autres commentaires mettent de l'avant que la durée prévue (15 minutes) pour les activités d'entraînement aux capacités de subitisation et de groupitisation (*Magie, Pyramide, Bataille, Tomathina*), est aussi trop courte, particulièrement lorsque c'est la première fois que les élèves vivent l'activité. L'exemple suivant illustre ce résultat :

> « Si tu veux que les élèves partagent leur stratégie, le 15 minutes c'est peut-être court » (P12).

Activités réalistes

Il a été demandé aux participants s'ils trouvaient que les activités étaient facilement réalisables en classe. Leurs réponses représentent 207 commentaires, soit 18 % des commentaires liés au déroulement des activités. 182 des 207 commentaires par rapport à cette catégorie indiquent que les activités sont facilement réalisables parce qu'elles nécessitent peu de matériel et peu de déplacement. 25 commentaires révèlent que les participants expriment des inquiétudes ou des suggestions à proposer par rapport au réalisme des activités. La majorité des commentaires (18 commentaires sur 25) se préoccupent de l'implication de tous les élèves lors de la réalisation des activités. Le commentaire du P13 est un bon exemple :

> « Il faudrait trouver une façon d'impliquer tous les enfants dans l'activité, il me semble qu'un seul peut faire le travail ».

Les 7 autres commentaires suggèrent que certaines activités comme les activités d'entraînement à la subitisation et la groupitisation se fassent à la maison. Il s'agirait aussi, selon ces commentaires, d'une occasion de sensibiliser les parents sur ce type d'habileté.

Voici deux commentaires qui illustrent bien ces résultats :

> « Ça peut être même en fin de journée, on ressort notre jeu » (P2).
>
> « C'est vaste, mais c'est certain que tu pourrais en faire, et en refaire » (P12).

Type de regroupement

La troisième et dernière catégorie par rapport à ce qui se passe pendant l'activité concerne le type de regroupement à favoriser pour le déroulement des activités et représente 263 commentaires, soit 22 % des commentaires liés au déroulement des activités. La question suivante leur a été posée : « Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi? » 54 des 263 commentaires recueillis concernant le regroupement des élèves indiquent que l'activité devrait se faire en grand groupe. 82 des 263 commentaires mentionnent qu'elles devraient se réaliser en équipes. Le commentaire du P11 est un bon exemple :

> « Si, pour les élèves, le but recherché est de provoquer une réaction pour les amener à constater que les éléments bien placés sont plus faciles à compter, il me semble souhaitable de faire travailler les élèves en petits groupes de manière à ce qu'ils puissent se nourrir l'un et l'autre, des observations de chacun ».

De plus, 39 des 263 commentaires suggèrent que les activités devraient être réalisées de manière individuelle. Le commentaire du P11 est un bon exemple :

> « Faire l'activité en individuel pourrait permettre de vérifier la compréhension de chacun ».

Enfin, 88 des 263 commentaires suggèrent que le regroupement pourrait être variable. Ces derniers commentaires suggèrent de commencer l'activité en grand groupe pour présenter l'activité et permettre le dialogue pédagogique et ensuite en petites équipes pour faire les cas présentés. Le P9 l'explique bien lorsqu'il parle de l'activité Magie :

> « En grand groupe pour la discussion. Ils pourraient ensuite travailler en dyades avec un canevas vide de carte à jouer. Un élève place le nombre de jetons à sa façon et fait ensuite disparaître des jetons que l'autre élève doit identifier ».

Les résultats par rapport au déroulement de la séquence viennent d'être présentés. Cette analyse termine l'analyse de tous les résultats de la présente recherche par rapport à la séquence didactique. La prochaine section présente une synthèse de ces résultats.

4.3 Synthèse des résultats pour la vérification de la viabilité en contexte de la séquence didactique

Cette section fait la synthèse des résultats pour la vérification de la viabilité en contexte de la séquence didactique. Un retour sur tous les commentaires proposant des suggestions de modifications de la séquence ou encore menant à une réflexion sur l'évaluation ou l'apprentissage du sens du nombre et de la numération sera réalisé dans le prochain chapitre.

4.3.1 Synthèse par rapport au contenu

Concernant le contenu, les commentaires des participants ont d'abord été analysés par rapport à quatre variables didactiques : le temps d'exposition, le nombre d'éléments, la disposition des éléments et le mode de représentation. La majorité des commentaires trouvent que les variables didactiques sont pertinentes et qu'elles offrent des défis intéressants. Quelques éléments seront à discuter dans le prochain chapitre :

- le temps d'exposition est jugé un peu court pour les activités *Joyaux Activités* et *Photos de nombres*;
- le nombre d'éléments à compter ou à calculer semble être un peu trop élevé pour les élèves qui terminent la 2e année ou qui débutent la 3e année pour les dernières activités de la séquence, soit *Photos de nombres* et les *Visages de nombres*;
  la disposition des voitures ou des légionnaires à l'écran les rend difficiles à compter (dans *Stationnement* et *Tohubohus)*.

Toujours par rapport au contenu, les commentaires ont ensuite été analysés selon la pertinence accordée à la séquence didactique et à ses activités. De façon plus spécifique, les participants ont été appelés à se prononcer par rapport à l'enchaînement des concepts, l'apprentissage souhaité par les activités et le thème des activités. Selon les commentaires des participants, la séquence didactique est pertinente d'abord parce qu'elle respecte le continuum du sens du nombre proposé dans ce projet. Ensuite, toujours selon les commentaires des participants, les activités permettraient aux élèves de faire les apprentissages annoncés et de développer de la flexibilité dans la représentation des nombres. Enfin, les thèmes sont intéressants et accrocheurs. Un élément ressorti de l'analyse par rapport à la pertinence de l'enchaînement des concepts devra cependant être discuté dans le prochain chapitre; certains participants mentionnent qu'il ne devrait pas y avoir d'activités d'entraînement à la subitisation et la groupitisation à chacune des périodes parce qu'il s'agit d'un retour en arrière. Ces activités devraient seulement être exploitées au début de la séquence.

Ensuite, il semble que le niveau de difficulté de certaines activités de la séquence ne soit pas adéquat. Selon certains participants, les premières activités de la séquence semblent trop faciles pour des élèves de fin 2e année et début 3e année, de même que les activités qui visent le développement des capacités de subitisation et de groupitisation alors que les dernières activités de *Photos de nombres* et de *Visages de nombres* seraient trop difficiles.

4.3.2 Synthèse par rapport à l'élève

Par rapport à l'élève, les commentaires ont été analysés selon deux aspects : les psychoaffectifs et les cognitifs.

En ce qui concerne les aspects psychoaffectifs, les quelques commentaires recueillis par rapport à l'anxiété mentionne que la séquence ne serait pas anxiogène. De plus, selon l'avis des participants, elle serait très motivante pour les élèves, le défi qu'elle propose leur permettrait de s'engager dans leurs apprentissages. Les professionnels de l'éducation ont fait preuve de beaucoup d'enthousiasme à essayer ces activités avec leurs élèves. Enfin, très peu de commentaires soulignent que les travaux en équipe pourraient occasionner quelques difficultés entre les élèves.

En ce qui concerne les aspects cognitifs, les commentaires soulignent que les activités permettraient aux élèves de se construire des représentations mentales (du nombre et de la numération) imagées et dynamiques. De plus, les élèves pourraient s'appuyer sur les premières représentations ainsi construites pour réaliser d'autres activités. Enfin ces commentaires mentionnent que ces représentations mentales conduiraient les élèves vers une plus grande compréhension du sens du nombre et de la numération, ce qui est le but annoncé ce cette séquence. Quelques commentaires soulignent que des enseignants pourraient ne pas avoir développé ces représentations mentales et que ce serait un élément à considérer dans la mise en place de la séquence didactique et l'accompagnement qui pourrait être offert aux enseignants.

Enfin, le dernier aspect cognitif analysé correspond aux conduites des élèves lors de la réalisation des activités. En tout, neuf conduites sont ressorties de l'analyse : se référer à quelque chose de connu, dénombrer, compter par bonds ou par groupes, reproduire ou faire un arrangement, décomposer, faire du calcul mental, mémoriser, confondre et agir trop vite. En comparant ce qui ressort de l'analyse des commentaires et ce qui a été identifié comme conduite dans l'analyse a priori présentée dans la section 3.2.3.2, deux conduites n'avaient pas été identifiées au départ : la mauvaise orientation possible d'un arrangement lorsque l'élève doit le reproduire et le fait de coller simplement les chiffres pour donner une réponse (ne pas faire les échanges), dans l'activité des *Photos de nombres*, par exemple. Il ressort aussi que le comptage un à un est une conduite qui peut mener les élèves en erreur. Les commentaires mentionnent que les élèves devraient plutôt privilégier un comptage en se référant à un arrangement ou utiliser un comptage par bonds ou par groupes ou encore des stratégies de calcul mental pour réaliser ces tâches.

4.3.3 Synthèse par rapport à l'enseignant

Par rapport à l'enseignant, les commentaires ont été analysés selon deux aspects : l'intervention et l'organisation des services.

En ce qui concerne l'intervention, il ressort de l'analyse des commentaires que l'enseignement formel, actuellement présent dans les classes, met l'accent sur l'apprentissage des techniques de calcul écrit et sur la mémorisation. Les commentaires soulignent que ce n'est pas ce type d'enseignement qui est privilégié dans la séquence, mais plutôt l'enseignement par résolution de problèmes. Selon les commentaires, l'apprentissage par résolution de problèmes serait pertinent parce qu'il propose des défis aux élèves. Enfin, toujours par rapport au type d'intervention, il ressort de l'analyse de commentaires que le partage des stratégies n'est pas assez mis de l'avant dans la séquence.

En ce qui concerne l'organisation des services, les commentaires mentionnent que les activités permettraient d'avoir de bons portraits des habiletés des élèves, donnant ainsi l'occasion de mettre rapidement en place des interventions supplémentaires, au lieu d'attendre à la fin de la séquence.

4.3.4 Synthèse par rapport au déroulement des activités

Par rapport au déroulement des activités, les commentaires ont été analysés selon ce qui se passe avant l'activité et ce qui se passe pendant l'activité.

En ce qui concerne ce qui se passe avant l'activité, les participants se sont prononcés sur la clarté des consignes, le matériel et le nombre de périodes de la séquence. La majorité des commentaires mentionnent que les consignes conviennent, mais des suggestions ont été formulées :

- préciser les sous-questions que les enseignants pourraient poser aux élèves de même que les réponses attendues;
- préciser ce qu'il faut faire lorsque l'élève fait des erreurs;
- faire des tutoriels pour présenter les activités;

Pour le matériel, ce qui est indiqué dans les commentaires correspond à ce que nous avions anticipé. Quelques suggestions ont été faites cependant :

- utiliser un papier et un crayon de plomb;
- utiliser un tableau blanc effaçable et un crayon effaçable;
- utiliser des triangles cartonnés de 10 et de 100.

Par rapport au nombre de périodes, il semble adéquat selon la majorité des commentaires. Deux suggestions ont été faites :

- proposer certaines des activités d'entraînement à la subitisation et la groupitisation en devoir à la maison;
- faire ces activités à différents moments de la journée, mais pas nécessairement tout de suite après l'activité principale.

En ce qui concerne ce qui se passe pendant l'activité, les participants ont été questionnés sur la durée des activités, le réalisme des activités et le type de regroupement à privilégier. Pour la durée, la majorité des commentaires précisent que la durée prévue conviendrait, mais certains commentaires soulignent que si plus de temps est accordé au dialogue pédagogique, le temps prévu deviendrait trop court. Des commentaires mentionnent aussi que la première fois que des élèves réalisent une activité, même si c'est une courte activité comme *Pyramide*, ils pourraient avoir besoin de plus de temps.

La majorité des commentaires mentionnent que les activités sont réalistes.

Enfin, une organisation de travail en sous-groupe ou en grand groupe semble être l'idéal selon les commentaires. Le type de groupe et la dynamique du groupe sont deux éléments à prendre en considération pour déterminer selon quelle modalité le travail sera réalisé. Ce qui ressort cependant est d'introduire l'activité en grand groupe et de faire quelques cas pour permettre aux élèves de partager leurs stratégies. Ensuite, un travail en petites équipes ou seul semble être à privilégier, avec un retour en groupe pour permettre, encore une, fois le partage de stratégies.

Il ressort de l'analyse des commentaires, de façon générale, que les instruments pourraient atteindre les deux objectifs qui leur étaient fixés. En effet, selon les commentaires des participants, l'outil d'évaluation semble permettre l'établissement d'un portrait des capacités des élèves de fin 2^{e} année et début 3^{e} année par rapport au sens du nombre. De plus, la séquence favoriserait la construction de représentations mentales dynamiques et imagées des quantités tout en permettant aux élèves de développer leur sens du nombre et de la numération et donc de mieux les comprendre. Dans le prochain chapitre, les éléments qui sont ressortis de cette analyse seront discutés. Les modifications qui devront être apportées aux instruments seront aussi présentées.

5. Discussion

Le développement du sens du nombre et de la numération est un des piliers de l'apprentissage de l'arithmétique (Jones, 1994). Rappelons qu'il s'agit d'une capacité à réfléchir sur les nombres. Celle-ci se manifeste par une flexibilité dans le traitement et la manipulation des nombres et dans le choix des stratégies opératoires (Reys et Yang, 1998). Le sens du nombre va au-delà de l'application d'algorithmes ou de procédés techniques et de la mémorisation de définitions (Greeno, 1991; Howden, 1989; McIntosh et Dole, 2000). Encore aujourd'hui, peu d'études se sont intéressées à son développement, en partant de la petite enfance jusqu'à la compréhension de la numération. Par ailleurs, peu de recherches ont eu comme but de mieux outiller les enseignants et les orthopédagogues dans leur accompagnement des élèves qui développent leur sens du nombre (Dyson et coll. 2015; Jordan 2010; Jordan et coll. 2016). De plus, les quelques recherches qui ont été menées ont eu peu d'impacts sur les pratiques des enseignants ou sur la création de matériel pouvant être utilisé en classe (Bednarz et Janvier-Dufour, 1986; Templier, 2013). Conséquemment, ces quelques études ne semblent pas avoir eu un effet sur la réussite des élèves (Koudogbo, 2013, 2017). En fait, encore aujourd'hui, le sens du nombre est encore peu connu des professionnels de l'éducation (Hinton et coll., 2013). L'étude de dispositifs didactiques visant à mettre de l'avant le développement du sens du nombre et de la numération est donc très pertinente.

La présente étude s'est intéressée à ce développement du sens du nombre et de la numération, de la petite enfance jusqu'à l'âge de 8 ans. Elle s'est aussi intéressée aux conditions à mettre en place pour favoriser son développement. Ces préoccupations ont mené à la conception et à la vérification de la viabilité en contexte d'instruments visant le développement du sens du nombre et de la numération. Cette recherche constitue donc une recherche-développement. Trois objectifs spécifiques de recherche ont dirigé cette étude. Le premier objectif de cette recherche était de concevoir des instruments didactiques, appuyés sur un continuum du sens du nombre et de la numération, permettant de dresser un portrait du niveau de développement des élèves de la fin de la 2^{e} année et du début de la 3^{e} année afin de mettre en place des interventions pour favoriser le développement de leur sens du nombre et de la numération. Ces instruments comprenaient un outil d'évaluation ainsi qu'une séquence didactique. Le deuxième objectif était de vérifier la viabilité en contexte de ces instruments auprès de professionnels de l'éducation. Cette étape était une étape importante dans la phase de la mise à l'essai, incluse dans la phase d'opérationnalisation de la recherche-développement de Harvey et Loiselle (2009). Elle permettra de rendre les instruments plus facilement utilisables par les enseignants et les orthopédagogues. Le troisième objectif était d'améliorer les instruments à la suite de cette vérification.

Pour atteindre les objectifs de recherche, un continuum du sens du nombre et de la numération a été élaboré, appuyé sur la recension des écrits. Deux fonctions à remplir par les instruments ont été déterminées. La première fonction était de permettre le dépistage des élèves susceptibles d'être à risque sur le plan des apprentissages mathématiques, au moment d'entamer leur 3e année au primaire. Pour que les instruments puissent remplir cette première fonction, un outil d'évaluation attribuant une question à chacun des niveaux du continuum a été construit. La deuxième fonction des instruments était de permettre à ces mêmes élèves de développer une meilleure compréhension du sens du nombre et de la numération, en ayant de meilleures représentations mentales des différentes facettes de la numération. Une séquence didactique formée de 18 activités a été conçue. Les activités de la séquence s'appuient sur les niveaux du continuum et les abordent de façon progressive. Ces activités s'appuient aussi sur les conditions à mettre en place pour favoriser le développement du sens du nombre identifiées dans le cadre conceptuel.

Pour atteindre le deuxième objectif de la recherche, soit la vérification de la viabilité en contexte des instruments, treize professionnels de l'éducation ont été consultés. Le continuum et les instruments leur ont été présentés. Ces professionnels ont dû répondre à un questionnaire et prendre part à une entrevue individuelle par rapport à ces instruments.

L'analyse des commentaires des participants a permis aussi d'atteindre le troisième objectif, soit l'amélioration des instruments à la suite de la vérification de la viabilité en contexte effectuée par les professionnels de l'éducation. Ces modifications sont présentées à la section 5.5.

Les objectifs de la recherche ont donc été atteints. Un continuum du sens du nombre a été établi. Des instruments, s'appuyant sur ce continuum, ont été réalisés et leur viabilité en contexte a été vérifiée ce qui a permis d'améliorer les instruments. Selon l'analyse des résultats, les instruments rempliraient leurs deux fonctions. Ils permettraient d'identifier les élèves qui ont des difficultés avec le sens du nombre et leur donneraient l'occasion de le développer.

Dans ce chapitre, les principaux résultats de la recherche seront d'abord rappelés et confrontés à ceux des études présentées dans le cadre conceptuel. En deuxième lieu, l'apport de cette recherche à l'avancement des connaissances en didactique et en orthodidactique des mathématiques sera discuté. En troisième lieu, il sera question de la contribution de nos résultats à l'état actuel de la recherche tel que présenté dans le cadre conceptuel à travers le rappel des principaux travaux empiriques menés dans le domaine. En quatrième lieu, les retombées pratiques possibles seront discutées, de manière à pouvoir apporter des éléments de réponse à la situation énoncée dans le chapitre de problématique. En cinquième lieu, les modifications apportées aux instruments seront présentées. Pour conclure, les limites de ce travail seront énoncées de manière à dégager les aspects à approfondir dans de futures recherches et, par le fait même, à identifier des pistes d'interventions didactiques et orthodidactiques à privilégier.

5.1 Rappel des résultats les plus saillants

La synthèse des résultats saillants tirés de cette recherche sera présentée en deux temps. Il sera d'abord question des résultats par rapport à l'outil d'évaluation et, ensuite, de ceux liés à la séquence didactique.

5.1.1 Discussion des résultats saillants par rapport à la vérification de la viabilité en contexte de l'outil d'évaluation

L'analyse des commentaires des participants conduit à penser que l'outil d'évaluation construit devrait permettre le dépistage des élèves à risque, en fonction du continuum établi dans la section 2.2.5.6. Nous discuterons de ces conclusions dans la présente section en revenant sur le niveau de difficulté de l'outil et sur le temps d'exposition des différents items.

Rappelons d'abord que ce continuum est constitué de 5 niveaux de développement correspondant à l'évolution du sens du nombre de la petite enfance jusqu'à l'âge de 8 ans. En s'appuyant sur ce continuum, l'outil d'évaluation devrait permettre, selon les commentaires, de dresser un bon portrait du niveau de développement du sens du nombre des élèves. Il permettrait, par ricochet, d'évaluer les représentations mentales des quantités que les élèves sont capables de se faire.

Si, de manière générale, les commentaires des participants sont favorables à l'outil créé, ils laissent aussi entrevoir des zones de questionnement. C'est notamment le cas lorsqu'on les interroge quant au niveau de difficulté de l'épreuve d'évaluation. De manière générale, les participants ont trouvé le niveau de difficulté des items du test approprié. Cependant, certains l'ont trouvé trop difficile. D'autres ont trouvé la question 1 (Q1), celle qui évalue les habiletés de groupitisation, trop facile.

Lorsque l'on observe les résultats obtenus lors de la mise à l'essai de l'épreuve et rappelés au tableau 5.1, on constate les faibles performances des élèves aux différentes questions. Cependant, ces questions s'appuient sur le continuum établi qui lui s'appuie sur plusieurs recherches (Battista et coll. 1998; Bednarz et Dufour-Janvier, 1984a, 1986; Clark et Kamii, 1996; Fuson, 1990; Gelman et Gallistel, 1978; Jones et coll., 1994; Piaget, 1947; Starkey et McCandliss, 2014; Wynn, 1992a, 1992b) et sur l'élaboration et la mise à l'essai d'activités de façon empirique en lien avec les niveaux du continuum.

Tableau 5.1
Résultats de la mise à l'essai de l'outil d'évaluation

	2e (N=23)	3e (N=21)	4e (N=23)
Q1	33 %	68 %	67 %
Q2	10 %	30 %	79 %
Q3	11 %	23 %	48 %
Q4	11 %	20 %	38 %

La première question (Q1) évalue les habiletés de groupitisation des élèves. À notre connaissance, aucune étude n'évalue ces habiletés chez les élèves de 4 ans et plus. Cependant, elles tirent profit des aptitudes de subitisation, qui elles ont fait l'objet de quelques études (Clements, 1999; Dehaene, 2001, 2003; Starkey et Cooper, 1980; Wynn, 1992a, 1992b). On sait que le très jeune enfant est capable de recourir à la subitisation pour des quantités de 1 à 3 (Clements, 1999). Dehaene (2003) mentionne que pour percevoir 3 éléments ou moins, il ne faut pas beaucoup plus qu'une demi-seconde (650 ms pour 3 éléments) et le taux d'exactitude est pratiquement de 100 %. De plus, Brissiaud (2005) précise que l'habileté à composer et décomposer une quantité se développe à partir de 4 ans et demi. Il est donc possible de penser que la groupitisation, qui s'appuie sur la subitisation et sur le fait de composer et décomposer des quantités, devrait être maîtrisée par des élèves de 2e année, surtout si elle est travaillée à l'école. Les résultats obtenus sont donc inférieurs à ce qu'il serait logique d'attendre, et ce pour tous les niveaux. Certains participants mentionnent que cette question ne devrait pas se trouver dans un outil de dépistage s'adressant à des élèves de fin 2e année puisqu'elle évalue des habiletés qui devraient déjà être maîtrisées par les élèves d'âge préscolaire (Brissiaud, 1995; Clements, 1999; Starkey et Cooper, 1980; Wynn, 1992a ; Wynn, 1992b). Leurs commentaires sont cohérents par rapport à ce que nous dit la recherche. Cependant, à la lumière des résultats obtenus, la subitisation et la groupitisation demeurent des défis pour les élèves de 2e, 3e et 4e année. Cette première question sera maintenue dans l'outil d'évaluation.

La deuxième question (Q2) évalue la pensée multiplicative des élèves. Selon les résultats de Clark et Kamii (1996), cette pensée, essentielle pour la compréhension du système de numération, est présente chez seulement 45 % des élèves de 2e année. De plus, seulement 49 % des élèves de 5e année ont une pensée multiplicative bien installée. Les résultats obtenus dans notre expérimentation sont un peu plus faibles que ceux obtenus par ces chercheurs pour les élèves de 2e année, mais supérieurs pour les élèves de 4e année. Le niveau de difficulté de la question est assez cohérent par rapport aux résultats de Clark et Kamii (1996).

La troisième question (Q3) cible la compréhension du passage à la dizaine et à la centaine. Les recherches de Jones et coll. (1994) montrent qu'un élève sur cinq ne l'atteint pas à la fin de la 2e année. De plus, selon l'étude menée par Koudogbo et coll. (2017) et présentée dans la problématique, 22 % des élèves de 3e année n'arrivent pas à décomposer un nombre à trois chiffres (par exemple 234) pour faire une opération de soustraction, ce qui fait aussi appel à la compréhension de la dizaine et de la centaine. On pourrait en conclure qu'ils n'ont pas maîtrisé ce passage. Les résultats que nous avons sont similaires aux résultats recueillis lors de ces deux études. Cette question présente un niveau de difficulté cohérent selon ces études.

La quatrième question (Q4) évalue la compréhension de la valeur de position du système de numération. Selon Jones et coll. (1994) ce niveau représente encore un défi pour les élèves de 2e année. En comparant les résultats des élèves de 2e année que nous avons obtenus avec ceux de Jones et coll. (1994), nos résultats sont cohérents, quoiqu'ils soient un peu plus faibles. Il serait cependant raisonnable de s'attendre à une plus grande performance chez les élèves de 4e année, ce qui n'est pas le cas ici.

Hormis le niveau de difficulté de la première question qui serait effectivement trop facile si les élèves avaient eu l'occasion de développer leurs capacités de subitisation et de groupitisation dès le préscolaire, le niveau de difficulté des autres questions est assez cohérent avec les données des recherches que nous avons consultées. Il nous apparaît cependant évident que les études portant sur les outils permettant d'évaluer le développement du sens du nombre chez les élèves du primaire sont peu nombreuses, ce qui ajoute de la pertinence à la présente étude. De plus, une mise à l'essai de l'outil d'évaluation auprès d'un échantillon d'élèves plus important sera nécessaire pour le valider.

En analysant les commentaires des participants qui ont jugé l'outil d'évaluation trop difficile, on constate aussi qu'ils mentionnent que ce qui est évalué dans l'épreuve n'est pas ce qui est généralement travaillé en classe. Selon eux, les élèves réussiraient moins bien parce qu'ils n'ont pas appris de cette façon. Il semblerait donc que l'outil évalue un volet négligé du sens du nombre, soit la capacité qu'ont les élèves à manipuler mentalement les quantités. En classe, selon les commentaires des participants, on semble plutôt vérifier une application correcte des procédés techniques. Le même genre de commentaire ressort par rapport à la séquence didactique, à savoir que cette séquence vise le développement du sens du nombre alors que l'enseignement actuel, selon les participants, cible davantage l'apprentissage de techniques de calcul. Ce constat permet d'expliquer, en partie, les résultats des élèves à la mise à l'essai de l'outil d'évaluation, surtout les résultats à la première question (Q1) qui évalue les habiletés de groupitisation et peut-être ceux des élèves de 4^{e} année pour la dernière question (Q4) qui évalue la compréhension de la numération positionnelle.

Enfin, selon plusieurs commentaires, les temps d'exposition dans les évaluations sont jugés trop courts. Cependant, ces temps ont été déterminés en fonction des données de la recherche (Starkey et McCandliss, 2014; Wynn, 1992a, 1992b). Bien entendu, l'expérimentation de l'outil d'évaluation auprès des élèves permettra de confirmer ou non que les temps d'exposition à ces items sont adéquats. De plus, allonger le temps d'exposition pourrait dénaturer l'épreuve. En effet, les élèves auraient plus de temps pour compter les éléments un à un. Il s'agit donc de proposer une tâche dans laquelle la stratégie de comptage un à un est inopérante, de manière à en solliciter une autre. Ici il s'agirait du recours à un comptage global, appuyé sur la construction de représentations mentales des quantités. L'évaluation permettrait de voir si cette deuxième stratégie de comptage est mise en œuvre. En effet, la contrainte de temps empêche les élèves d'utiliser le comptage un à un pour recourir à leurs représentations mentales des quantités (Yackel et Wheatley, 1990). Le temps d'exposition ne sera donc pas augmenté.

Enfin, des suggestions d'améliorations de l'outil d'évaluation ont été formulées et nous y reviendrons dans la section 5.5.

5.1.2 Discussion des résultats saillants par rapport à la vérification de la viabilité en contexte de la séquence didactique

L'analyse des commentaires des participants permet de dire que la séquence didactique, appuyée sur le continuum du sens du nombre et de la numération décrit dans le cadre théorique, semble offrir aux élèves la possibilité de développer leurs représentations mentales imagées et dynamiques des différents aspects de la numération et donc de développer leur sens du nombre et de la numération (Thomas et coll. 2002). Il ressort aussi que cette séquence mise sur l'enseignement par résolution de problèmes en proposant des défis aux élèves, défis qui susciteraient un élargissement du domaine de la validité de la stratégie mise de l'avant par la tâche. Cette approche est jugée fort pertinente pour assurer le développement des habiletés mathématiques des élèves (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986, 1988; Hiebert et Wearne, 1992). Dans cette section, certaines des variables didactiques seront premièrement discutées. Deuxièmement, un regard sera porté sur les commentaires liés à la pertinence de cette séquence didactique en ce qui concerne l'enchaînement des concepts et les apprentissages souhaités. Troisièmement, un retour sera fait sur les commentaires des participants portant sur certains aspects psychoaffectifs et cognitifs. Enfin, des constats faits à partir des commentaires portant sur l'organisation de la classe et l'organisation des services seront présentés.

Revenons d'abord sur les variables didactiques proposées dans cette séquence (temps d'exposition, nombre d'éléments, disposition des éléments ainsi que mode de représentation). Selon les commentaires, les choix faits par rapport à ces variables sont pertinents, sauf pour les deux premières variables. Les commentaires sont en effet un peu plus nuancés en ce qui concerne le temps d'exposition et le nombre d'éléments. D'abord, le temps d'exposition semble trop court pour deux activités soit les *Joyaux Activités* et *Photos de nombres.* De plus, les éléments semblent trop nombreux pour les *Photos de nombres* et les *Visages de nombres*.

Selon les commentaires des participants, le temps d'exposition de deux activités de la séquence est jugé trop court. Pour les *Joyaux Activités* le temps d'exposition est de 2 secondes et pour les *Photos de nombres* les élèves ont d'abord 8 secondes pour compter avant que les items disparaissent et les temps sont ensuite diminués à 6 secondes et 4 secondes. Ces temps d'expositions sont des extrapolations des recherches de Starkey et McCandliss (2014) et Wynn, (1992a, 1992b), mais aucune étude, à notre connaissance, ne précise le temps approprié pour permettre à des élèves de 2e, 3e et 4e année de répondre à ce genre de question. Ils sont rapides, mais le but est de permettre aux élèves de créer leurs représentations mentales des quantités et de les aider à s'en servir pour faire le calcul (Yackel et Whealty, 1990). Il s'agit aussi de développer leur efficacité dans le recours à ces représentations mentales. Si les temps d'exposition étaient augmentés, les élèves pourraient employer la stratégie de comptage un à un, ce qui n'est pas approprié pour la réalisation des activités. De plus, des commentaires soulignent que ce genre de stratégie pourrait occasionner des erreurs aux élèves. La contrainte de temps empêche les élèves d'y recourir. En attendant de pouvoir expérimenter la séquence pour déterminer les temps d'exposition appropriés, il n'y aura pas de changement.

En ce qui concerne le nombre d'éléments contenus dans les *Photos de nombres* et les *Visages de nombres*, certains participants le trouvent trop important. Les nombres d'éléments choisis sont entre 100 et 1000. D'abord, selon la Progression des apprentissages (2009), les élèves de 2e année devraient maîtriser le sens des nombres et des opérations pour les nombres de 0 à 1000. De plus, ces activités évaluent la compréhension de la valeur de position de la numération (Jones et coll. 1994). Il est normal de penser que les nombres qui seront utilisés sont des nombres plus grands, ce qui demande une plus grande compréhension de la part des élèves. En diminuant le nombre d'éléments à compter, ces activités deviendraient des activités visant le niveau 4 du continuum, soit le passage à la dizaine et à la centaine, ce qui n'est pas le but visé. Les commentaires semblent dire en fait que des élèves de fin 2e année et début 3e année ne pourraient peut-être pas réaliser ces activités. Par contre, nous avons demandé aux participants qui mentionnaient que ces dernières activités de la séquence étaient difficiles s'ils pensaient que les élèves arriveraient à les réaliser après avoir vécu les activités de la séquence. Tous ont répondu que ce serait le cas. Il faudra donc expérimenter cette séquence pour déterminer si des élèves de fin 2e année et début 3e année, qui ont eu l'occasion de se développer des représentations mentales dynamiques et imagées et de réfléchir sur le nombre pourront réaliser ces activités.

En ce qui concerne la pertinence de la séquence construite, le premier aspect abordé est en lien avec l'enchaînement des concepts. Les participants se questionnent par rapport aux activités d'entraînement de subitisation et de groupitisation qui reviennent à toutes les périodes de la séquence. Dans la structure de départ de la séquence, il y avait une activité d'entraînement de 15 minutes à la fin de chacune des périodes pour permettre aux élèves de continuer de développer ces habiletés qui sont jugées essentielles pour le développement du sens du nombre (Bergeron, 2003; Jordan et coll., 2003; Gunderson et coll., 2012; Starkey et McCandliss, 2014; Wender et Rothkegel, 2000) et qui ne sont que peu prises en compte formellement à l'école. Plusieurs participants ont trouvé qu'elles n'avaient plus leur place à partir de la deuxième rencontre puisque les concepts ciblés par les activités centrales étaient de niveau plus élevé. Les activités de subitisation et de groupitisation sont en effet jugées trop faciles par certains. Cependant, des activités ciblant le développement des capacités de subitisation et de groupitisation sont toujours nécessaires, car les élèves de fin 2e année et début 3e année d'aujourd'hui ne semblent pas les maîtriser, comme en attestent les résultats rappelés plus haut (Bergeron, 2003 ; Jordan et coll., 2003; Gunderson et coll., 2012; Starkey et McCandliss, 2014; Wender et Rothkegel, 2000). Il serait possible de penser que ces activités ne seraient pas requises si, dès le préscolaire, on mettait de l'avant l'importance des représentations concrètes et imagées, appuyées sur la subitisation et la groupitisation, pour développer des représentations mentales dynamiques et variées. Or, cela ne semble pas être le cas. Nous reviendrons sur cette question dans la section 5.5.

Par ailleurs, selon les commentaires, la séquence établie serait pertinente et intéressante par rapport aux activités principales et en fonction du continuum établi. En effet, les activités ciblent toutes un concept identifié dans le continuum et les concepts sont abordés de façon progressive. Les élèves devraient avoir l'occasion de développer des représentations mentales pour mieux comprendre les concepts abordés dans les activités. Ils pourraient réutiliser ces représentations mentales dans les activités suivantes. On pourrait reprendre les mots de Conne (1999) et dire qu'elles deviennent des « connaissances utiles » acquises lors de ces activités.

En ce qui concerne les apprentissages souhaités, tous les commentaires vont dans le même sens : les buts annoncés pour les activités correspondent bien à ce qui est travaillé dans les activités.

L'analyse des commentaires en lien avec l'élève nous permet de dégager des aspects positifs de la séquence. D'abord, en ce qui concerne les aspects psychoaffectifs touchant les élèves, il ressort des commentaires des participants que la séquence didactique semble motivante et engageante. Ces deux éléments sont essentiels pour permettre aux élèves de réaliser des apprentissages (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b; Cartier, 2007). Quant aux aspects cognitifs, toujours selon les commentaires, la séquence donnerait l'occasion aux élèves de développer des représentations mentales pertinentes, ce qui est la clé de la compréhension (Thomas et coll. 2013). Enfin, les conduites des élèves lors de la réalisation des activités mentionnées par les participants correspondent, dans l'ensemble, à ce qui avait été anticipé dans l'analyse a priori.

Du côté de l'enseignement, il ressort de l'analyse des commentaires que l'enseignement par résolution de problèmes est mis de l'avant dans cette séquence, ce qui est en lien avec le Programme de formation de l'école québécoise (2001) et le développement des compétences des élèves. Ce type d'enseignement est aussi ce que recommandent Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b) et Hiebert et Wearne (1992) dans les conclusions de leurs études. Selon les commentaires obtenus, cette séquence offre une perspective d'enseignement différente de ce qui semble se faire dans l'enseignement formel actuel. La séquence vise, à travers la résolution de problèmes, le développement du sens du nombre. L'enseignement actuel pourrait-il expliquer, en partie, le peu d'amélioration dans la compréhension de la numération des élèves ? D'ailleurs Koudogbo (2013) avait constaté, dans son étude, ce peu d'amélioration. D'autres études devront être menées afin de mieux cerner la situation.

Quant à l'organisation de la classe et des tâches pour que tous les élèves soient investis dans l'activité et au travail en grand-groupe ou en sous-groupe, les commentaires sont assez variables. En fait, l'importance n'est pas mise sur le type d'organisation, mais bien sur la place à accorder au partage de stratégies. L'organisation de la classe doit permettre ce partage. Il est effectivement un élément clé de l'apprentissage par résolution de problèmes (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986, 1988; Hiebert et Wearne, 1992). Ainsi, les commentaires tendent à dire que ce serait intéressant d'introduire les activités en grand groupe et de faire quelques cas pour permettre aux élèves de partager leurs stratégies. Un travail en petites équipes ou seul serait à privilégier, avec un retour en grand groupe pour permettre, encore une, fois le partage de stratégies. Ces commentaires seront pris en considération dans la version révisée de la séquence, présentée à la section 5.5.

Enfin, en ce qui a trait à l'organisation des services, il semblerait, selon les commentaires, que les activités proposent aux élèves de faire des apprentissages sur des concepts importants du nombre et de la numération et permettraient d'évaluer la compréhension des élèves à propos des activités prévues en classe. Cette évaluation permettrait d'intervenir tôt, avant que les difficultés ne deviennent trop graves.

Finalement, en ce qui concerne le déroulement des activités, des suggestions d'améliorations de la séquence didactique ont été formulées et nous y reviendrons dans la section 5.5.

Le continuum a été créé pour permettre d'identifier les concepts importants associés au développement du sens du nombre et de la numération. Les instruments ont été développés pour, d'une part, situer les élèves, puis, grâce à la séquence didactique d'autre part, soutenir les élèves dans leur construction du sens du nombre. Dans les prochaines sections, la contribution des résultats obtenus aux construits théoriques liés à la didactique et à l'orthodidactique des mathématiques seront d'abord discutés. La contribution des résultats aux conclusions disponibles issues de la recherche, ainsi qu'aux pratiques de classe actuelles sera ensuite traitée. Cela permettra d'examiner en quoi ces résultats apportent des solutions à la problématique de départ. Enfin, les modifications apportées à la séquence à la suite des commentaires recueillis seront exposées.

5.2 Contribution des résultats à l'avancement des connaissances en didactique et en orthodidactique des mathématiques

Les résultats de cette étude contribuent à l'avancement des connaissances en didactique et en orthodidactique des mathématiques sur trois plans. D'abord, la présente recherche tire profit des travaux menés en didactique et en sciences cognitives, comme nous l'abordons au paragraphe suivant. Cette contribution a ensuite permis de faire ressortir le rôle de la subitisation et de la groupitisation, à travers un continuum de développement du sens du nombre menant à la compréhension de la numération. Enfin, la présente recherche propose des pistes de solution pour permettre la construction de représentations mentales imagées et dynamiques, éléments clés de la compréhension des concepts mathématiques.

Le domaine des sciences cognitives et la didactique des mathématiques sont deux domaines en interrelation qui devraient, selon Fayol (2012), s'enrichir l'un et l'autre. La principale contribution de cette recherche à l'avancement des connaissances en didactique et en orthodidactique est qu'elle s'inscrit justement à l'intersection de ces deux disciplines. En effet, nous avons mis de l'avant des recherches issues des sciences cognitives pour mieux comprendre les capacités de subitisation et de groupitisation des enfants (Starkey et McCandliss, 2014; Whynn, 1992a, 1992b). Nous avons aussi considéré des recherches en didactique lorsqu'il a été question de la compréhension du système de numération et de son enseignement (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986; Clark et Kamii, 1996; Dyson et coll. 2015; Hiebert et Wearne, 1992; Jones et coll., 1994, 1996; Jordan 2010; Jordan et coll. 2016; Thomas et coll., 2002). En tenant compte de ce croisement, il a été possible de créer un continuum du développement du sens du nombre et de la numération sur lequel s'appuient les instruments construits dans cette étude. À notre connaissance, un tel continuum n'existe pas actuellement dans la littérature scientifique, ni en sciences cognitives, ni en didactique des mathématiques. Il existe seulement des recherches qui s'intéressent à certains moments du développement du sens du nombre sans en avoir une vue d'ensemble; elles ont été présentées dans le cadre théorique. Or, un tel continuum est nécessaire pour poser des hypothèses quant au développement du sens du nombre et, éventuellement, guider les travaux à venir portant sur cette question.

De plus, la recherche en didactique des mathématiques porte généralement son attention sur la tâche, sur les variables didactiques de la tâche, sur les conditions à mettre en place au cours de l'enseignement et sur les conduites que l'élève pourrait adopter durant la tâche. La préoccupation des didacticiens est de permettre à l'élève de faire des apprentissages féconds et significatifs (Brousseau, 1980). Les sciences cognitives portent davantage leur attention sur le développement du cerveau de l'enfant, sur les processus d'apprentissage et sur les dysfonctionnements prévisibles (Dehaene, 2003; Houdé, 2004). Les instruments créés dans la présente recherche endossent ces deux préoccupations. D'abord, ils proposent des activités s'appuyant sur les principes didactiques énoncés en synthèse du cadre conceptuel. Ces principes mettent de l'avant le recours à des situations de résolution de problèmes pour permettre aux élèves de faire des apprentissages mathématiques. Ils proposent ensuite des situations permettant aux élèves de s'entraîner à utiliser les connaissances acquises. Ces tâches doivent laisser les élèves explorer et manipuler. Ainsi, le matériel joue un rôle de support à la compréhension. Les situations doivent aussi faire appel à un travail sur des collections et sur des collections groupées pour permettre l'évolution vers une représentation de plus en plus conventionnelle et symbolique. Les groupements de ces collections doivent d'abord être apparents et accessibles. Les situations doivent aussi favoriser la composition et la décomposition des nombres en visant le développement d'une pensée flexible. La mise en place de discussions par l'enseignant permet aux élèves d'échanger sur leurs stratégies et de les améliorer.

Ainsi, selon l'analyse des commentaires, les enseignants et les orthopédagogues pourraient offrir aux élèves des interventions de qualité, permettant à ces derniers de développer leur compréhension du sens du nombre. De plus, les instruments ont été construits dans le but de mieux comprendre la façon dont l'enfant apprend, de ce qui se passe dans sa tête. Selon l'analyse des commentaires des participants, il semble que les enseignants et les orthopédagogues pourraient déterminer, grâce aux instruments qui ont été créés dans le cadre de cette recherche, le niveau de développement de compréhension du sens du nombre et de la numération de l'élève en s'appuyant sur le continuum établi. Ces instruments tirent donc profit de ces deux disciplines.

La contribution des sciences cognitives à la didactique dans la présente recherche a aussi permis de mieux comprendre l'émergence des premières traces du sens du nombre, associées à la subitisation suivie de la groupitisation (Starkey et McCandliss, 2014; Whynn, 1992a, 1992b). Cette contribution permet surtout d'identifier le rôle de chacune de ces habiletés dans la compréhension de la numération et dans la construction de représentations mentales imagées et dynamiques, notamment en s'inspirant des travaux de Gunderson et coll. (2012) et de Yackel et Whealty (1990) qui se sont intéressés au rôle des habiletés spatiales dans la réussite en mathématiques. Ces représentations mentales, plus imagées, favoriseraient une meilleure compréhension du rôle du groupement dans notre système de numération et permettraient éventuellement d'accéder plus facilement au calcul mental. L'analyse des commentaires des participants au sujet de la séquence permet de dire que cette dernière favoriserait le développement des capacités de subitisation et de groupitisation des élèves et que ceux-ci tireraient profit de ces capacités pour percevoir le rôle du groupement dans la numération au moment de s'attaquer aux activités de niveau supérieur. En effet, des élèves ayant appris à organiser en constellation des petites quantités pour compter « avec leurs yeux » pourraient appliquer cette stratégie au moment de compter de plus grandes quantités et ainsi organiser leur collection en petites constellations et en constellations de constellations. Au contraire, des élèves qui n'auraient appris qu'à faire un comptage un à un n'auraient pas tendance à regrouper visuellement leur collection pour mieux compter (Twomey et Dolk, 2011). Ils risquent davantage de continuer à recourir au comptage un à un. Dans l'analyse des commentaires des participants, ce type de comptage est d'ailleurs ressorti comme étant une stratégie non féconde pour réaliser les tâches proposées dans la séquence didactique. Ce comportement de comptage un à un, dans les tâches qui font appel au groupement et qui sont proposées dans la séquence, pourrait démontrer que les élèves n'ont pas saisi la pertinence de recourir au groupement pour organiser leurs connaissances de notre système de numération, comme l'ont souligné Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) dans leurs travaux.

Enfin, une dernière contribution de cette recherche aux domaines de la didactique et de l'orthodidactique des mathématiques se rapporte à l'importance des représentations imagées et dynamiques chez les élèves et aux conditions à mettre en place pour les valoriser en classe. Rappelons que, selon Thomas et coll. (2002), la construction de représentations mentales imagées et dynamiques est un élément clé menant à la compréhension du système de numération. Au regard de l'analyse des commentaires obtenus, il semble que la séquence didactique permette la création de telles représentions mentales parce que les tâches proposent d'abord les quantités dans une représentation externe concrète ou imagée du concept à l'élève avant d'aborder le mode symbolique (Bruner,1966; Lyons 1982). Le thème de l'activité est aussi un élément facilitant la création des représentations mentales.

En plus d'apporter des contributions aux construits théoriques liés à la didactique et à l'orthodidactique des mathématiques, la présente étude vient enrichir les connaissances empiriques liées à la didactique et à l'orthodidactique des mathématiques. C'est ce qui sera abordé dans la prochaine section.

5.3 Contribution des résultats aux études empiriques

Les résultats obtenus s'inscrivent dans le cadre de ceux d'études empiriques présentées dans le cadre théorique. Les recherches dont il est question sont particulièrement celles qui s'intéressent au développement du sens du nombre et de la numération et aux conditions à mettre en place pour favoriser le développement du sens du nombre et de la numération. Ces préoccupations rejoignent ainsi la question générale de la présente étude.

Comme il a été mentionné dans le cadre théorique, peu de recherches empiriques portent actuellement sur le développement du sens du nombre, de la petite enfance jusqu'à l'apprentissage de la numération. Plus spécifiquement, il a été mentionné que le sens du nombre est un facteur important de prédiction de la réussite scolaire en mathématiques et dans d'autres matières (Mazzocco et Thompson, 2005; Pagani et al., 2011). Il est aussi le pilier de l'apprentissage de notions mathématiques complexes associées au calcul mental ainsi qu'à la résolution de problèmes (Jordan, 2010). Il est donc important que des recherches empiriques s'intéressent aux conditions à mettre en place pour favoriser le développement du sens du nombre. La recherche de Jordan et Dyson (2016) montre que les élèves qui ont eu l'occasion de réaliser des activités visant le sens du nombre ont mieux progressé que les élèves qui ont reçu un enseignement traditionnel. Les auteures retiennent l'importance du « sous-sol » de ce sens du nombre. En effet, les premières activités présentées aux élèves exploitaient les aptitudes de subitisation. De plus, les activités utilisées mettaient de l'avant des représentations imagées des quantités. Cependant, l'orientation de cette recherche visait la mise en place de la représentation symbolique des quantités plutôt que la construction de représentations mentales dynamiques et imagées. La présente recherche-développement vient enrichir ces conclusions en proposant des instruments qui tirent eux aussi profit des aptitudes de subitisation des élèves, mais qui vont aussi plus loin en mettant de l'avant les habiletés de groupitisation. Ces instruments s'appuient aussi sur un continuum de développement du sens du nombre et permettent de le mettre en œuvre. De plus, selon les commentaires des participants, la séquence didactique permettrait aux élèves de développer leur sens du nombre à travers des tâches de résolution de problèmes et d'entraînement les exposant à des représentations externes concrètes et imagées. Ainsi, les élèves auraient l'occasion de se construire des représentations mentales imagées et dynamiques, ce qui est la clé de la compréhension de numération (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984b; Hiebert et Wearne, 1992; Thomas et coll., 2002).

Dans un autre ordre d'idées, les élèves ciblés par les instruments créés dans le cadre de cette étude pourraient avoir besoin d'interventions supplémentaires pour les aider dans le développement de leur sens du nombre et de la numération. Or, actuellement, peu d'interventions orthopédagogiques sont mises en place pour les élèves qui ont des difficultés à apprendre les mathématiques (Giroux, 2021). L'analyse des commentaires des participants montre que l'outil d'évaluation permettrait d'identifier des élèves à risque à la fin de la 2e année et au début de la 3e année par rapport à leur apprentissage en arithmétique. Il semble aussi que la séquence permettrait cette identification des élèves chez qui le sens du nombre et de la numération n'est pas assez développé puisqu'elle donne l'occasion aux enseignants et aux orthopédagogues de situer la compréhension des élèves par rapport aux concepts du continuum. La séquence, ainsi que la gestion qui en est faite par l'enseignant, permettrait donc à certains élèves de profiter rapidement d'interventions supplémentaires de qualité, puisque ces interventions seraient mises en place par l'enseignant dans des périodes de récupération par exemple. Ces interventions cibleraient aussi les concepts du continuum et viseraient le développement du sens du nombre. Ainsi, on pourrait penser que la mise en place de tels instruments pourrait contribuer à la réduction du nombre d'élèves qui ont besoin des services en orthopédagogie en mathématiques. En effet, la vérification de la viabilité en contexte des instruments est importante par rapport aux recherches qui portent sur le développement du sens du nombre pour faciliter la mise en place des recommandations issues de ces recherches.

La présente étude contribue aussi à la problématique de départ tout en ayant des retombées sur le plan pratique. Ces éléments sont présentés dans la prochaine section.

5.4 Retombées pratiques et contributions à la problématique de départ

Pour permettre de poursuivre la description des contributions de la présente étude, un rappel de la problématique sera d'abord énoncé. Les retombées de la création du continuum seront ensuite discutées. Puis, les retombées de la réalisation des instruments seront présentées. Finalement, l'analyse des commentaires a permis de faire des constats par rapport à la perception que les enseignants ont de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques à l'école, plus particulièrement de l'apprentissage du nombre et de la numération. Ces constats seront exposés.

La problématique a permis de montrer l'importance du sens du nombre et de la numération dans les apprentissages mathématiques. La recherche menée durant les années 1980 par Bednarz et Janvier-Dufour (1984a, 1984b, 1986) a été présentée. Cette recherche mettait en lumière le fait que les élèves de 3e année avaient encore beaucoup de difficulté à comprendre la numération et particulièrement la perception de la pertinence du principe de groupement dans le système de numération. Plus récemment, Kudogbo et ses collègues (2013, 2017) ont repris les travaux de Bednarz et Janvier-Dufour pour mesurer si les performances des élèves de 3e année d'aujourd'hui étaient comparables à celles des élèves des années 1980. Les résultats des élèves de 3e année, rencontrés par Koudogbo et ses collègues (2013, 2017) ne sont pas meilleurs que ceux des élèves des années 1980.

Pour tenter d'aider les élèves de 3e année à mieux comprendre la numération, nous nous sommes intéressée à ce qui mène à cette compréhension et à ce qu'elle signifie. Ces explorations ont mené à la création d'un continuum du sens du nombre et de la numération permettant d'identifier les concepts clés de son développement. Ce continuum constitue lui-même une source de retombées. Les commentaires analysés dans cette étude l'appuient, en quelque sorte; il semble pertinent et cohérent[33]. Il permettrait de tracer un itinéraire cognitif qui place les concepts mathématiques en réseaux de concepts, ce qui permettrait aux enseignants et aux orthopédagogues de réagir plus facilement aux forces et aux difficultés des élèves (Mary et Suqalli, 2021). Ainsi, si les enseignants utilisaient un tel continuum pour planifier leurs activités d'enseignement et les tâches qu'ils proposent aux élèves, dès le préscolaire, leurs activités seraient graduées et permettraient d'aborder

[33] Une étude empirique est cependant nécessaire pour le valider.

chacun des concepts, dans le bon ordre. Les élèves auraient ainsi la chance de développer leur sens du nombre et des représentations mentales dynamiques et imagées essentielles à leur compréhension. Les élèves auraient plus de chances d'apprendre (Mary et Suqalli, 2021; Thomas et coll. 2002). De plus, les enseignants et les orthopédagogues seraient davantage en mesure de construire des épreuves d'évaluation ciblant les éléments précis et incontournables dans le développement du sens du nombre, tout en tenant compte des apprentissages préalables. Ainsi, il serait possible d'identifier rapidement les élèves qui ont des difficultés avec les concepts à apprendre, permettant ainsi à l'enseignant de mettre en place des interventions pour corriger la situation. Il serait possible de penser qu'un moins grand nombre d'élèves de fin 2e année ou de début 3e année seraient marqués par des difficultés à jongler avec les concepts de la numération.

Les instruments créés dans le cadre de cette étude accordent une place de choix aux modes de représentations externes concrets et imagés. Dans le cadre théorique, il a été souligné qu'une trop grande insistance, trop tôt dans le développement de l'élève, sur le mode de représentation externe symbolique nuit à sa compréhension (Bruner,1966; Lyons 1982). Il a également été mentionné que des contextes et des tâches d'apprentissage riches dans lesquels l'élève est appelé à réfléchir, à raisonner et à chercher (Mary et Squalli, 2021) sont essentiels pour mener les élèves à la compréhension (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984b; Hiebert et Wearne, 1992; Thomas et coll., 2002). Or, l'analyse des commentaires obtenus dans la présente recherche semble dire que l'enseignement actuel est centré sur l'apprentissage de faits numériques mémorisés et de techniques de calcul, plaçant ainsi le mode de représentation externe symbolique au premier plan. Les retombées de cette recherche sur le plan des pratiques en enseignement des mathématiques au primaire sont donc importantes puisque les instruments créés respectent les recommandations de l'enseignement du sens du nombre et de la numération, émises et précisées depuis les années 1980 (Bednarz et Janvier-Dufour, 1984a, 1984b, 1986; Hiebert et Wearne, 1992). L'analyse des commentaires permet effectivement de dire que les modes concrets et imagés sont mis de l'avant dans les tâches, ce qui aide les élèves à mieux comprendre les concepts mathématiques. De plus, les tâches, c'est-à-dire des situations problèmes riches, favorisent la manipulation et le support visuel. Certains commentaires précisent même que le passage à la représentation symbolique se fait en douceur. Ces instruments semblent donc respecter les recommandations de l'enseignement de la numération et offrir une occasion pour les enseignants de se familiariser avec ces recommandations. Pour reprendre l'expression de quelques participants, les instruments qui sont proposés constituent un « clé en main » pour un enseignement approprié du sens du nombre, ce qui peut faciliter, pour certains enseignants, la mise en place d'activités favorisant ce développement. Cela peut aussi les inciter à développer leurs propres outils. Les instruments offrent l'occasion de se familiariser avec cette idée de construction de concepts mathématiques, de liens entre les différents concepts et de tirer profit des apprentissages antérieurs pour en faire de plus complexes, idée que déjà Piaget (1947) mettait de l'avant.

Dans un autre ordre d'idée, il nous faut rappeler qu'à travers la réalisation de ce travail, nous avons constaté que, malgré l'importance du sens du nombre dans la réussite des élèves en mathématiques, l'enseignement actuel cible davantage l'apprentissage de procédés techniques ou de définitions des concepts mathématiques (Hiebert et Wearne, 1992). Le peu de place est accordé au sens du nombre dans l'enseignement formel actuel et dans les publications officielles au Québec est un constat important qui ressort de la présente étude. Rappelons que ce concept est le pilier qui soutient l'apprentissage de notions mathématiques complexes associées au calcul mental ainsi qu'à la résolution de problèmes. Il est au cœur de l'apprentissage en arithmétique (Brown, 2007; Devlin, 2017; Gersten et Chard, 1999; Jordan, 2010; Van de Walle et Lovin, 2007). Le Programme de formation de l'école québécoise (PFÉQ) (2001) fait référence au sens du nombre dans une seule phrase au début de la Progression des apprentissages en mathématiques (2009). Les sous-titres de la section « Arithmétique » sont bien « Sens du nombre » et « Sens des opérations » mais aucune indication sur les façons de favoriser leur développement chez les élèves n'est spécifiée. À noter aussi qu'il n'est pas fait mention du sens du nombre dans l'ancien programme de l'enseignement préscolaire (Gouvernement du Québec, 2001), ni dans le tout nouveau programme du préscolaire (Gouvernement du Québec, 2020), alors qu'il s'agit d'un prédicteur de réussite important en mathématiques (Mazzocco et Thompson, 2005; Pagani et al., 2011). Le PFÉQ vise le développement de compétences, ce qui ne peut que converger vers le développement du sens du nombre. Cette absence dans la documentation officielle québécoise pourrait expliquer, en partie, pourquoi les enseignants ne connaissent pas le concept du sens du nombre et ne favorisent pas nécessairement son développement dans l'enseignement formel actuel. Cette recherche, grâce à l'identification d'un continuum de développement du sens du nombre et à la création d'un outil d'évaluation et d'une séquence didactique, accorde une place importante au sens du nombre et à son développement. Les résultats de cette recherche permettent de croire que les enseignants auraient avantage à se familiariser avec le concept du sens du nombre afin qu'ils puissent mieux aider les élèves à réaliser leurs apprentissages mathématiques, particulièrement les élèves qui ont des difficultés à apprendre ces concepts.

Cette étude permet donc d'identifier les conditions qui favorisent le développement du sens du nombre, pour éventuellement amoindrir les difficultés que les élèves ont à comprendre le système de numération. Elle donne aussi l'occasion de relever quelques éléments qui influencent la perception qu'ont les enseignants de l'enseignement des mathématiques et le type d'enseignement qu'ils mettent en place.

Finalement, en tenant compte des commentaires des participants à cette étude, une nouvelle version des instruments a été conçue. Elle constitue, elle aussi, une retombée de cette étude. Les modifications apportées aux instruments sont présentées dans la prochaine section.

5.5 Modifications des instruments

Au regard de l'analyse des commentaires des participants, quelques modifications ont été apportées aux instruments. Étant donné que les tâches de l'outil d'évaluation et de la séquence didactique sont présentées à l'écran, il est difficile de les aborder en format papier. La deuxième version des instruments est disponible à l'adresse suivante : https://videos.defimath.ca/these/, le mot de passe est UdeM.

En ce qui concerne l'outil d'évaluation, les suggestions d'enlever la question 1 (Q1) portant sur la subitisation et la groupitisation n'ont pas été retenues, puisque, comme nous en avons parlé plus tôt dans ce chapitre, il s'agit encore aujourd'hui d'un défi pour les élèves de fin de 2^{e} année et de début de 3^{e} année, s'ils n'ont pas eu l'occasion de développer ces habiletés. De plus, les temps d'exposition n'ont pas été augmentés. Il s'agit d'un outil d'évaluation et le but est de savoir si l'élève est capable de réussir la tâche qui, elle, s'appuie sur les données de la recherche en ce qui concerne son niveau de difficulté (Mandler et Shebo, 1982; Starkey et McCandliss, 2014). Toutes les autres suggestions ont été retenues puisqu'elles permettront d'améliorer la présentation des questions et des consignes. Nous les détaillons dans les prochains paragraphes.

Une première suggestion retenue est d'ajouter une question sur la cardinalité. Elle a été prise en compte parce que, même si la séquence ne cible pas le développement de cette habileté, il peut être intéressant, dans un portait de classe, de repérer des élèves en fin 2^{e} année ou début 3^{e} année qui n'auraient toujours pas maîtrisé ce concept. En effet, le concept de cardinalité devrait être maîtrisé par les élèves dès leur 1re année au primaire. Des élèves qui ne le maîtriseraient pas à la fin de la 2^{e} année du primaire auraient besoin d'interventions supplémentaires. Par contre, aucune activité travaillant la cardinalité n'a été ajoutée dans la séquence puisque la séquence s'adresse aux élèves qui ont ou devraient avoir acquis ce concept.

La question sur la cardinalité a été insérée entre la première et la deuxième question de l'épreuve, puisque la cardinalité s'installe avant la pensée multiplicative dans le développement du sens du nombre (Gelaman et Gallistel, 1978). Elle a pour but d'évaluer si l'élève a atteint ce niveau de compréhension du nombre, qui est essentiel pour comprendre le niveau 3. L'épreuve ainsi modifiée est décrite sur le site internet (voir adresse plus haut).

D'autres modifications liées à l'administration de l'épreuve ont aussi été faites. D'abord, dans la présentation de l'outil d'évaluation, il est mentionné que le climat dans lequel se déroule l'évaluation doit être un climat détendu. En effet, il ne s'agit pas d'une évaluation pour noter les performances des élèves, mais pour situer leur niveau de compréhension et ainsi mieux les aider à réaliser leurs apprentissages en mathématiques. Ensuite, une rubrique concernant le matériel à préparer a été ajoutée. Enfin, une section proposant des interprétations des réponses des élèves à chacune des questions a été ajoutée afin de permettre aux enseignants de mieux évaluer la compréhension des élèves. Cette section avait été volontairement omise lors de la présentation de l'outil d'évaluation aux participants puisque nous voulions qu'ils suggèrent des interprétations des réponses des élèves, plutôt que simplement donner leur avis par rapport à ce que nous avions identifié. Nous avions déjà précisé l'interprétation des réponses des élèves à chacun des items dans la présentation de l'outil d'évaluation dans la section méthodologique.

En ce qui concerne la séquence didactique, il y a eu un ajustement relatif aux activités d'entraînement à la subitisation et de la groupitisation. Plusieurs commentaires analysés mentionnaient que ces activités n'avaient plus leur place dans la progression de la séquence, à partir de la deuxième rencontre. Cependant, étant donné l'état actuel des capacités de subitisation et de groupitisation des élèves et l'importance que nous leur accordons dans le développement du sens du nombre, les activités ont été conservées. En effet, il ne suffit pas d'une seule activité pour arriver à se représenter mentalement les petites quantités et pour se servir de ces représentations mentales pour réaliser une autre tâche dans laquelle les quantités sont plus nombreuses. Par contre, au lieu de faire une activité de ce type après chaque activité principale, il est maintenant suggéré d'en faire trois la première semaine, puis de poursuivre les semaines suivantes selon les besoins des élèves. Il s'agissait d'ailleurs d'une suggestion de plusieurs participants, à savoir de réaliser ces activités en fin de journée, dans les temps perdus ou encore à la maison.

Un autre ajustement concerne le temps accordé à l'activité principale. Il a été allongé de 15 minutes pour correspondre à des périodes de 60 minutes au lieu de 45 minutes. En proposant de faire les activités d'entraînement à la subitisation et à la groupitisation à d'autres moments durant la semaine, cela laisse en effet toute la période pour travailler l'activité principale. Ce changement va dans le même sens que les commentaires des participants indiquant qu'une période de 45 minutes semblait insuffisante. De plus, cet ajout de temps permettra de mettre en place un dialogue pédagogique au moment d'introduire les activités, une suggestion qui est revenue dans plusieurs commentaires. Ce dialogue pédagogique est en fait un partage des stratégies utilisées par les élèves au cours de la réalisation des activités. Selon notre expérience, les interventions multiples des élèves leur donnent l'occasion d'entendre plusieurs façons de faire et de développer leur propre bagage de stratégies. Les partages d'idées peuvent être très riches pour les apprentissages des élèves.

Enfin, concernant la présentation des activités de la séquence, des modifications ont été apportées, suivant les recommandations colligées dans cette étude. D'abord, le matériel à prévoir pour la réalisation de chacune des activités a été précisé. Il avait été intentionnellement omis dans la présentation de l'activité aux participants parce que nous voulions aller chercher leurs suggestions et pas seulement leur approbation par rapport à ce que nous avions prévu. Les conduites anticipées des élèves de même que l'interprétation de ces conduites ont aussi été ajoutées, en s'appuyant sur l'analyse a priori de chacune des activités qui a été faite dans la section 3.2.3.2. Elles avaient elles aussi été volontairement omises.

De plus, quelques commentaires mentionnaient qu'il était difficile de compter les éléments à l'écran dans *Stationnement* et *Tohubohus*. Pour *Stationnement*, aucun changement ne sera apporté. Le but de l'activité est que les élèves se familiarisent avec la disposition rectangulaire. Pour ce faire, ils doivent compter le nombre de colonnes et le nombre de rangées. L'ajout de repère visuel, comme des couleurs de voitures différentes ou des espaces, viendrait dénaturer la tâche en en faisant une activité qui fait plutôt appel à la groupitisation au lieu de faire appel à la multiplication. Pour *Tohubohus 1 et 2*, les élèves doivent compter le nombre de légionnaires qui est à l'écran, placer le même nombre sur leur bureau avec leurs blocs de base dix pour ensuite être capables de dire combien il en manque. En ce moment, les légionnaires sont éparpillés de façon aléatoire sur la page. Dans la nouvelle version, ils ont été placés en respectant les règles de la groupitisation, à savoir en petits groupes de 3 ou de 4 éléments, au lieu d'être éparpillés.

À la lumière de l'analyse de nos résultats, ces instruments permettent le développement du sens du nombre, selon le continuum identifié, et accordent une grande importance à la construction de représentations mentales dynamiques et imagées, à travers des activités variées et stimulantes proposant des défis aux élèves. Les ajustements présentés dans cette section permettront de bonifier les instruments et de les rendre encore plus intéressants.

Malgré les résultats positifs obtenus dans cette étude, celle-ci comporte quelques limites qui sont présentées dans la section suivante.

5.6 Limites de la recherche

Les limites de ce travail sont exposées de manière à dégager les aspects à approfondir dans de futures recherches et, par le fait même, à identifier des pistes d'interventions didactiques et orthodidactiques à privilégier. Une première limite concerne le recours à un petit échantillon de participants. De plus, ces participants sont des volontaires, ils ne sont donc pas représentatifs de la population professionnelle du Québec. De plus, la majorité d'entre eux étaient déjà familiers avec quelques-unes des activités, sans les avoir expérimentées à la suite de leur modification pour la séquence. Ils ne les ont pas non plus expérimentées dans une séquence. Il s'agit d'une limite parce que leur regard a pu être un peu moins critique. Il s'agit aussi d'un avantage. Étant donné qu'ils connaissaient un peu les activités, leurs commentaires sont probablement plus riches. Les résultats de la recherche ont donc été interprétés avec prudence, en évitant les généralisations abusives.

Une troisième limite concerne la mise à l'essai de l'outil d'évaluation. Elle a été réalisée auprès d'un nombre relativement restreint d'élèves, soit de 67 élèves. Il s'agit d'un nombre trop petit pour considérer que les résultats à l'épreuve soient représentatifs des comportements des élèves. De plus, les élèves sont tous de la même école. L'échantillon n'est donc pas représentatif de tous les milieux scolaires caractérisant le contexte québécois. Malgré tout, avec 67 participants, les résultats permettent la formulation d'hypothèses qu'il sera possible de confirmer lors d'une réelle mise à l'essai des produits de cette thèse.

Une dernière limite, mais non la moindre, touche les conditions de réalisation du projet et l'absence de mise à l'essai des instruments auprès d'élèves. La situation de la COVID-19 a empêché la mise à l'essai des instruments. Cette phase de la recherche-développement n'a pas pu être réalisée. Il s'agit cependant d'une perspective de recherche intéressante à mettre en place, dès que la situation sanitaire le permettra. Nous en parlons dans la section suivante.

5.7 Perspectives de recherche

Cette recherche-développement doit être considérée comme une recherche exploratoire, qui, nous l'espérons, ouvrira les portes à de nouvelles recherches.

La première de ces recherches serait, comme nous venons de le souligner, la mise à l'essai des instruments afin d'en mesurer les effets sur le développement du sens du nombre et sur la création de représentations mentales imagées et dynamiques chez les élèves. Cette mise à l'essai constituerait une contribution importante pour l'avancement de la recherche dans le domaine, mais aussi des pratiques de classe.

Il serait aussi intéressant de poursuivre la réflexion autour du continuum qui a été établi pour le préciser davantage et mieux situer le rôle de la subitisation et de la groupitisation dans le développement du sens du nombre. Une étude sur son rôle dans sa mise en enseignement serait aussi d'un grand intérêt.

Enfin, des recherches sur les façons d'amener les enseignants à adopter ce changement de paradigme semble de mise. Dès les années 1980, Bednarz et Janvier-Dufour, (1984a, 1984b, 1986, 1988) ont mentionné qu'enseigner les concepts mathématiques en commençant par les définitions et la symbolisation est une pratique à proscrire alors que cette pratique semble encore populaire dans les classes de mathématiques. Il serait donc intéressant de mettre en place une recherche s'intéressant aux moyens de former et d'accompagner les enseignants dans ce changement de paradigme.

6. Conclusion

Cette recherche propose un continuum du sens du nombre et de la numération qui a conduit à la conception de deux instruments didactiques, soit un outil d'évaluation et d'une séquence didactique. L'outil d'évaluation a pour but de dépister les élèves susceptibles d'être à risque au moment d'entreprendre leur 3e année sur le plan de leurs apprentissages en arithmétique. L'objectif de la séquence didactique est de fournir l'occasion à ces élèves de développer toutes les facettes de leur sens du nombre et de la numération pour avoir une meilleure compréhension de ces concepts. La construction de représentations mentales imagées et dynamiques est particulièrement mise de l'avant de même que le rôle des capacités de subitisation et de groupitisation dans la construction de ces mêmes représentations.

L'implantation de ces instruments par les enseignants dans les classes auprès des élèves de 2e ou de 3e année permettrait de valoriser l'importance du développement du sens du nombre et de la numération pour les élèves du primaire. Le rôle des représentations mentales imagées et dynamiques dans la compréhension de ces concepts serait aussi mis en lumière.

Finalement, cette implantation confirmerait que des interventions permettant la construction de représentations mentales variées, en s'appuyant, entre autres, sur les capacités de subitisation et de groupitisation, et ce dès le préscolaire, contribueraient à la réduction du nombre d'élèves qui ont des difficultés avec leur sens du nombre et de la numération. Dans la présente recherche, il est question des élèves de 3e année, mais les retombées possibles des présents instruments concernent tous les élèves du primaire.

Références bibliographiques

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique en mathématiques. *Publications mathématiques et informatiques de Rennes*, *5*(2), 1-22.

Baillargeon, R. (2002). Les langages du cerveau. Dans E. Dupoux (Éd.), *Les connaissances des nourrissons en physique* (p. 343-363). Odile Jacob.

Baillargeon, R., Spelke, E. S., et Wasserman, S. (1985). Object permanence in five-month-old infants. *Cognition*, *20*, 191-208.

Baruk, S. (1992). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Éditions du Seuil.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., et Caroline Van Auken Borrow. (1998). Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(5), 503-532. JSTOR. https://doi.org/10.2307/749731

Bednarz, N., et Janvier-Dufour, B. (1984a). La numération : Les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*, *33*, 1-11.

Bednarz, N., et Janvier-Dufour, B. (1984b). La numération : Une stratégie didactique cherchant à favoriser une meilleure compréhension. *Grand N*, *34*, 1-17.

Bednarz, N., et Janvier-Dufour, B. (1986). Une étude des conceptions inappropriées développées par les enfants dans l'apprentissage de la numération au primaire. *European Journal of Psychology of Education*, *1*, 17-33.

Bednarz, N., et Janvier-Dufour, B. (1988). A Constructivist Approach to Numeration in Primary School : Results of a Three Year Intervention with the Same Group of Children. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(3), 299-331.

Bergeron, J.-L. (2003). Les cartes à points : Pour une meilleure perception des nombres. *Les revues pédagogiques de la Mission laïque française*, *50*, 11-20.

Bideaud, J. L. (2004). *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant*. Septentrion.

Blais, M., et Martineau, S. (2007). L'analyse indcutive générale : Description d'une démarche visant à donner un sens à des données brutes. *Recherches qualitatives*, *26*, 1-18.

Bobis. (2007). From here to there : The path to computational fluency with multi-digit multiplication. *Mathematics : Essentiel for learning, Essentiel for life*, 53-59.

Braconne-Michoux, A., et Marchand, P. (2021). La géométrie dans l'espace : Une piste d'intervention aurpès des élèves en difficulté? Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier, et C. Bisson (Éds.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté* (p. 155-174). Les Éditions JDF inc.

Brissiaud, R. (2005). *Comment les enfants apprennent à calculer*. RETZ.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*, 164-198.

Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Harvard University Press.

Cartier, S. C. (2007). *Apprendre en lisant, au primaire et au secondaire*. Les Éditions CEC inc.

Case, R. et Okonato, Y. (1996). *The role of central conceptual structures in the development of choldren's thought*, Monographs of the Society for Research in Child Development, 61(1-2).

Charnay, R., et Mante, M. (1995). *Concours de professeurs des écoles mathématiques, Qu'est-ce que la didactique*. Hatier.

Claessens, A., Duncan, G. J., et Egel, M. (2009). Kindergarten skills and fifth-grade achievement : Evidence from the ECLS-K. *Economic of Education Review*, *28*(4), 415-427.

Clark, F. B., et Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 41-51.

Clements, D. H. (1999). Subitizing : What is it ? Why teach it? *Teaching Children Mathematics*, *5*(7), 400-405.

Clements, D. H., et Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. Dans D. A. Grouws (Éd.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (Mcmillan, p. 420-464).

Conne, F. (1999). Faire des maths. Faire faire des maths. Regarder ce que ça donne. Dans *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 31-70). Les Presses de l'Université de Montréal.

CSE - Conseil supérieur de l'éducation. (2008). *Plan stratégique 2007-2011*. Gouvernement du Québec.

Daigle, D., et Berthiaume, R. (2021). *L'apprentissage de la lecture et de l'écriture – Décomposer les objets d'enseignement en microtâches pour les rendre accessibles à tous les élèves* (Chenelière Éducation).

DeBlois, L. (1995). Le développement de l'écriture des nombres chez Christine. *Revue des sciences de l'éducation*, *21*(2), 331-351.

Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & Language*, *16*(1), 16-26.

Dehaene, S. (2003). *La Bosse des maths*. Odile Jacob poche.

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L., et Wilson, A. (2004). Arithmetic and the brain. *Current Opinion in Neurobiology*, *14*, 218-224. https://doi.org/DOI 10.1016/j.conb.2004.03.008

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L., et Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : Un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des Sciences de l'éducation*, *27*(1), 33-64.

Deshaies, I., Miron, J.-M., et Masson, S. (2020). Mieux préparer les élèves du préscolaire à l'apprentissage de l'arithmétique : Une recension des études proposant des programmes d'intervention s'appuyant sur les neurosciences. *Neuroéducation*, *6*(1), 37-48.

Deslaurirers, J.-P. (1987). L'analyse en recherche qualitative. *L'autre sociologie : approches qualitatives de la réalité sociale*, *5*(2), 145-152.

Devlin, K. (2017). Number Sense : The most important mathematical conceptd in the 21st Century K12 education. *Huffington Post*. http://www.huffingtonpost.com/entry/number-sense-the-most-important-mathematical-concept_us_58695887e4b068764965c2e0

Dionne, J. (2007). L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école au Québec : Une cohérence à vivre dans une nécessaire cohésion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *7*(1), 6-27. https://doi.org/10.1080/14926150709556717

Dorier, J.-L. (2021). Intoduction. Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier, et C. Bisson (Éds.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élvèes en difficulté* (p. 7-10). Les Éditions JDF inc.

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., Pagani, L. S., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., Sexton, H., Duckworth, K., et Japel, C. (2007). School Readiness and Later Achievement. *Developmental Psychology*, *43*(6), 1428-1446.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *16*(3), 349-382.

Fayol, M. (2012). *L'acquisition du nombre*. Que sais-je?

Fuson, K. C. (1990). Issues in Place-Value and Multidigit Addition and Substraction Learning and Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(4), 273-280.

Fuson, K. C. (1991). Relations entre comptage et cardinalité. Dans J. L. Bideaud, C. Meljac, et J.-P. Fisher, *Les chemins du nombre* (p. 159-179). Presses universitaires de Lille.

Gagné, P. P., Leblanc, N., et Rousseau, A. (2009). *Apprendre... Une question de stratégies*. Chenelière Éducation.

Garcia Coll, C., Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., et Japel, C. (2007). School Readiness and Later Achievement. *Developmental Psychology*, *43*(6), 1428-1446.

Geary, D. C. (2000). From infancy to adulthood : the development of numerical abilities. *European Child & Adolescent Psychiatry*, *9*, II/11-II/16.

Gelman, R., et Gallistel, C. R. (1978). *The child's Understanding of Number*. Harvard University Press.

Gersten, R., et Chard, D. (1999). Number Sense : Rethinking Arithmetic Instruction for Students with Mathematical Disabilities. *The Journal of Special Education*, *33*(1), 18-28.

Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement / apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Éducation et didactique*, *7*(1), 59-86.

Giroux, J. (2021). Cadre et proecessus interprétatif pour l,évaluation des connaissances en mathématiques d'élèves en difficultés scolaire : Un projet de rercherche-action. Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier, et C. Bisson (Éds.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté, Quels enjeux et quelles perspectives?,* p. 85-109*,* Les Éditions JDF inc.

Giroux, J. (2010). *Pour une différenciation de la dyscalculie et des difficultés d'apprentissage en mathématiques*. 148-158.

Giroux, J., et Ste-Marie, A. (2007). Maillage de situations didactiques faisant appel à des environnement informatisés et conventionnel dans des classes d'adaptation scolaire. Dans *Difficultés d'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* (Éditions Bande didactique, p. 35-63). J. Giroux et D. Gauthier.

Gouvernement de l'Ontario. (2014). *Document d'appui de Mettre l'accent sur le raisonnement spatial, M-12*. Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Gouvernement du Québec. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise, éducation préscolaire, enseignement primaire*. Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (2009). *Progression des apprentissages, Mathématique*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gouvernement du Québec. (2017). *Politique de la réussite éducative*. Éducation et enseignement supérieur. http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/PSG/politiques_orientations/tableau-synoptique_politique-reussite.pdf

Gouvernement du Québec. (2019). *Référentiel d'intervention en mathématique*. Bibliothèque et Archives nationales du Québec.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 170-218.

Guedj, D. (1996). *L'empire des nombres*. Gallimard.

Guitel, G. (1975). *Histoire comparée des numérations écrites*. Flammarion Éditeur.

Gunderson, E. A., Ramirez, G., Beilock, S. L., et Levine, S. C. (2012). The Relation Between Spatial Skill and Early Number Knowledge : The Role of the Linear Number Line. *Developmental Psychology*, *48*(5), 1229-1241.

Harvey, S., et Loiselle, J. (2009). Proposition d'un modèle de recherche développement. *Recherches qualitatives*, *28*(2), 95-117.

Hawes, Z., Moss, J., Caswell, B., Seo, J., et Ansari, D. (2009). Relations between numerical, spatial, and executive function skills and mathematics achievement : A latent-variable approach. *Cognitive Psychology*, *109*, 68-90.

Hiebert, J., et Wearne, D. (1992). Links between Teaching and Learning Place Value with Understanding in First Grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(2), 98-122.

Hinton, V., Flores, M. M., et Shippen, M. (2013). Response to Intervention and Math Instruction. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *1*(3), 190-201.

Houdé, O. (2004). *La psychologie de l'enfant*. Presses universitaires de France.

Houdé, O., Pineau, A., Leroux, G., Poirel, N., Perchey, G., Lanoë, C., Lubin, A., Turbelin, M.-R., Rossi, S., Simon, G., Delacroix, N., Lamberton, F., Vigneau, M., Wisniewski, G., Vicet, J.-R., et Mazoyer, B. (2011). Functional magnetic resonance imaging study of Piaget's conservation-of-number task in preschool and school-age children : A neo-Piagetian approach. *Journal of Experimental Child Psychology*, *110*, 332-346.

Howden, H. (1989). Teaching Number Sense. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 6-11.

Ifrah, G. (1985). *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention*. Robert Laffont.

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres* (Vol. 1). Robert Laffont.

Jones, G. A., Thornton, C. A., et Putt, I. J. (1994). A model for Nurturing and Assessing Multidigit Number Sens among First Grade Children. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(2), 117-143.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Putt, I. J., Hill, K. M., Mogill, T., Rich, B. S., et Van Zoest, L. R. (1996). Multidigit Number Sense : A Framework for Instruction and Assessment. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 310-336.

Jordan, N. C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, *20*, 7. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.07.004

Jordan, N. C., et Dyson, N. (2016). Catching Math Problems Early : Findings From the Number Sens Intervention Project. Dans *Continuous Issues in Numerical Cognition* (p. 59-79). Elsevier Inc.

Jordan, N. C., Hanich, L., et Kaplan, D. (2003). Arithmetic fact mastery in young children : A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology*, *82*(2), 103-119.

Jordan, N. C., et Levine, S. C. (2009). Socioeconomic Variation, Number Competence, and Mathematics Learning Difficulties in Young Children. *Developmental Disabilities Research Reviews*, *15*, 60-68.

Kayler, H. (2003). Grouper pour compter ou « Diviser pour régner ». *Bulletin AMQ*, *43*, 6.

Koudogbo, J. (2013). *Portrait actuel des connaissances d'élèves de troisième année de l'ordre primaire et de situations d'enseignement sur la numération de position décimale*. Université du Québec à Montréal.

Koudogbo, J., Giroux, J., et René de Cotret, S. (2017). La numération de position : Où en sont les connaissances d'élèves québécois? *Canadian journal of science, mathematics and technology education*, *17*(3), 199-218.

Legendre, M.-F. (2004). Cognitivisme et socioconstructivisme, Des fondements théoriques à leur utilisation dans l'élaboration et la mise en œuvre du nouveau programme de formation, dans P. Jonnaert et A. M'Batika (Éds.), Les réformes curriculaires, Regards croisés, Presses de l'Université du Québec.

Lemoyne, G. (2004). Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. *Revue des Sciences de l'éducation*, *30*(4).

Loiselle, J., et Harvey, S. (2007). La recherche développement en éducation : Fondements, apports et limites. *Recherches qualitatives*, *27*(1), 40-59.

Losq, C. S. (2005). Number Concepts and Special Needs Students : The Power of Ten-Frame Tiles. *Teaching Children Mathematics*, *11*(6), 310-315.

Lyons, M. (1982). *Un modèle pour la compréhension des équations* [Maîtrise]. Université de Montréal.

Lyons, M., et Bisaillon, N. (2011). *Les incontournables du nombre au primaire*. L'ADOQ.

Lyons, M., et Bisaillon, N. (2018). *Les étapes incontournables*. Expertises didactiques Lyons inc. https://defi-math.ca/incontournables/

Lyons, M., et Bisaillon, N. (2020). *Les étapes incontournables*. Expertises didactiques Lyons inc. https://defi-math.ca/incontournables/

Mandler, G., et Shebo, B. J. (1982). Subitizing : An analysis of its component process. *Journal of Experimental Psychology: General*, *111*, 1-21.

Marchand, P. (2020). Quelques assises pour valoriser le développement des connaissances spatiales à l'école primaire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *40*(2), 135-178.

Mary, C., et Squalli, H. (2021). Miser sur le potentiel mathématique des élèves en difficulté : Fondements épistémologiques et didactiques. Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier, et C. Bisson (Éds.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté, Quels enjeux et quelles perspectives?,* p. 14-30, Les Éditions JDF inc.

Mathieu, P., de Champlain, D., et Tessier, H. (1990). *Petit lexique mathématique*. Modulo Éditeur.

Mazzocco M. M., M., et Thompson E., R. (2005). Kindergarten Predictors of Math Learning Disability. *Learning Disabilities Reseacrh & Practice*, *20*(3), 142-155.

McIntosh, A., et Dole, S. (2000). Number sense and mental computation : Implications for numeracy. *Improving Numeracy Learning: What Does the Research Tell Us*, 34-37.

Miles, M. B., et Huberman, M. A. (1994). *Qualitative Data Analysis*. SAGE Publications.

Moss, J., Bobis, J., et Bruce, C. D. (2016). Young children's access to powerful mathematics ideas. Dans L. English et D. Kirshner (Éds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3e éd., p. 153-190). Taylor & Francis.

Mounier, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP, Vers de* *nouvelles pistes* [Université Diderot]. http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/63/69/12/PDF/These_Mounier_pour_edition_2011.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2006). *Learning to Think Spatially*. The National Academies Press.

Newcombe, N. S. (2010). Picture this: Increasing math and science learning by improving spatial thinking, *American Educator*, 43, 29-35.

Noël, M.-P. (2005). *La dyscalculie, trouble du développement numérique de l'enfant*.

Noirefalise, A., et Matheron, Y. (2005). *Enseigner les mathématiques à l'école primaire*. Vuibert.

Northcore, M., et McIntosh, A. (1999). What Mathematics Do Adults Really Do in Everyday Life? *Australian Primary Mathematics Classroom*, *4*(1), 19-21.

Oakes, L. M. (2010). Using Habituation of Looking Time to Assess Mental Processes in Infancy. *Journal of Cognitiv Developpment*, *11*(3), 255-268. https://doi.org/10.1080/15248371003699977

ORGANISATION DE COOPÉRATION ET DE DÉVELOPPEMENT ÉCONOMIQUES (OCDE). (2010). *Résultats du PISA 2009 : Synthèse*.

ORGANISATION DE COOPÉRATION ET DE DÉVELOPPEMENT ÉCONOMIQUES (OCDE). (2007). *PISA 2006. Les compétences en sciences, un atout pour réussir. Volume 1 – Analyse des résultats*.

Pagani, L. S., Fitzpatrick, C., Belleau, L., et Janosz, M. (2011). Prédire la réussite scolaire des enfants en quatrième année à partir de leurs habiletés cognitives, comportementales et motrices à la maternelle. *Institut de la statistique du Québec*, *6*(1), 12.

Paillé, P. (2007). La méthodologie de recherche dans un contexte de recherche professionnalisante : Douze devis méthodologiques exemplaires. *Recherches qualitatives*, *27*(2), 133-151.

Patnaude, P., et Mathieu, P. (2019). *Lexique de mathématique*. Netmath. https://lexique.netmath.ca/systeme-de-numeration/

Perrenoud, P. (1995). Enseigner des savoirs ou développer des compétences : L'école entre deux paradigmes. Dans *Savoirs et savoir-faire* (Nathan, p. 73-88). A. Bentolia. http://www.unige.ch/fapse /SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1995/1995_02.html

Piaget, J. (1947). *La représentation du monde chez l'enfant*, PUF.

Piaget, J., et Szeminska, A. (1941). *La Genèse du nombre chez l'enfant*. PUF.

Poirier, L. (2001). *Enseigner les maths au primaire. Notes didactiques* (ERPI).

Polya, G. (1957). *How to solve it?*, Princeton University Press.

Racicot, J. (2008). *J'apprends à penser, je réussis mieux*. CHU Sainte-Justine.

Reys, B. J. (1994). Promoting Number Sense in the Middle Grades. *Mathematics Teaching* *in the Middle School*, *1*(22), 114-120.

Reys, R. E., et Yang, D.-C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 225-237.

Rocheleau, J. (2009). *Les théories cognitivistes de l'apprentissage*. https://oraprdnt.uqtr.uquebec.ca/pls/public/docs/GSC332/F766183874_Approche_cognitiviste_apprentissage2009_10_05.pdf

Rodriguez, A. (2009). *Un projet pour enseigner le calcul mental réfléchi* (Delagrave).

Roegiers, X. (1998). *Les mathématiques à l'école élémentaire* (Vol. 1). De Boeck.

Samson, G., Toussaint, R., et Pallascio, R. (2004). Instruments de collecte et outils d'analyse qualitatifs : Un défi pour évaluer la capacité à transférer. *Recherches qualitatives*, *24*, 84-102.

Sierpinska, A. (1999). Interaction des perspectives épistémologique, cognitive et didactique. Dans *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 151-176). Les Presses de l'Université de Montréal.

Starkey, G. S., et McCandliss, B. D. (2014). The emergence of ''groupitizing'' in children's numerical cognition. *Journal of Experimental Child Psychology*, *126*, 120-137.

Starkey, P., et Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, *210*, 1033-1035.

Sullivan, P. (2018). *Challenging mathematical tasks : Unlocking the potentiel of all students*. Oxford University Press.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Paris-Diderot - Paris VII.

Thomas, N. D., et Mulligan, J. (1995). Dynamic Imagery in Children's Representation of Number. *Mathematics Education Research Journal*, *7*(1), 5-25.

Thomas, N. D., Mulligan, J. T., et Goldin, G. A. (2002). Children's representation and structural development of counting sequence 1—100. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 117-133.

Tsao, Y.-L. (2004). Exploring The Connections Among Number Sense, Mental Computation Performance, And The Written Computation Performance Of Elementary Preservice School Teachers. *Journal of College Teaching & Learning*, *1*(12), 71-90.

Twomey, C., et Dolk, M. (2011). *Jeunes mathématiciens en action, construire la multiplication et la division* (Vol. 2). Chenelière Éducation.

Van de Walle, J. A., et Lovin, L. H. (2007). *L'enseignement des mathématiques, L'élève au centre de son apprentissage*. ERPI.

Van Der Maren, J.-M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. De Boeck Université; Université de Montréal.

Van Luit, J. E. H., et Schopman, E. A. M. (2000). Improving Early Numeracy of Young Children with Special Educational Needs. *Remedial and special education*, *21*(1), 27-40.

Wender, K. F., et Rothkegel, R. (2000). Subitizing and its subprocesses. *Psychological Research*, *64*, 81-92.

Witzel, B. S., Ferguson, C. J., et Brown, D. S. (2007). Developing Early Number Sense for Students with Disabilities. *LD Online*. http://www.ldonline.org/article/14618/

Wynn, K. (1992a). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*, 749-750.

Wynn, K. (1992b). Children's Acquisition of the Number Words and the Counting System. *Cognitive Psychology*, *24*, 220-251. https://doi.org/10.1016/0010-0285(92)90008-P

Yackel, E., et Wheatley, G. H. (1990). PROMOTING VISUAL IMAGERY IN YOUNG PUPILS. *The Arithmetic Teacher*, *37*(6), 52-58. JSTOR.

Annexe 1

Questionnaire remis aux participants

**Développement du sens du nombre et de la numération :
conception d'un dispositif[34]**

Projet de recherche (thèse de doctorat)
Nathalie Bisaillon

En acceptant de participer à cette recherche, vous aurez à :

- lire le court préambule qui présente un résumé du cadre conceptuel de cette recherche et explique les objectifs de la séquence didactique et la séquence elle-même (dans ce document) ;
- analyser cette séquence et préparer les réponses (qui n'ont pas à être remises par écrit). Les mêmes questions reviennent pour chacune des activités. Les réponses attendues sont des réponses généralement courtes. Ce travail devrait prendre entre deux et trois heures de votre temps. Les activités sont présentées par période, ce qui facilite votre analyse ;
    - Les activités de la séquence didactique sont disponibles à l'adresse suivante : https://videos.defimath.ca/these/ . Le mot de passe est : thèse
    - Pour chacune des activités, vous retrouverez :
        - ✓ un document PDF contenant la présentation de l'activité et les consignes données à l'élève ;
        - ✓ la vidéo de l'activité (ou un lien internet vers la vidéo de l'activité, selon les cas);
        - ✓ une feuille de notation (selon les cas).
- participer à un entretien enregistré d'environ une heure afin que je puisse analyser vos réactions et commentaires. Les questions de l'entretien seront celles qui auront été remises pour analyser la séquence. Les entretiens seront retranscrits et les participants ne pourront être identifiés d'aucune façon.

Pour faciliter votre analyse, je vous recommande de lire d'abord la présentation du dispositif didactique (dans ce document). Par la suite, je vous propose d'aller une période à la fois, lire la courte présentation de chacune des activités, regarder la vidéo de l'activité s'il y a lieu et penser à vos réponses par rapport à l'activité en prenant quelques notes dans le questionnaire pour faciliter notre discussion (dans ce document).

Encore merci pour votre participation à ce projet !

---

[34] Il s'agit ici du questionnaire qui a été remis aux participants avant les corrections apportés aux instruments et les corrections apportées à la thèse elle-même.

Description du projet de recherche

Depuis 2001, le Québec s'est doté d'un programme de formation basé sur le développement de compétences. En contexte d'apprentissage des mathématiques, cette orientation du programme vise, entre autres, le développement du sens du nombre et de la numération, des concepts qui permettent de comprendre les nombres et leurs relations. Les principes sous-jacents du système de numération posent des difficultés de compréhension chez certains élèves de 3e année. Des recherches montrent que la compréhension des concepts associée au sens du nombre et à la numération s'appuie principalement sur la construction par les élèves de représentations mentales dynamiques et imagées. De plus, les élèves qui bénéficient d'un enseignement plus systématique des concepts de base du sens du nombre augmentent leurs performances dans des tâches mathématiques liées à la numération.

D'autres études doivent être menées pour confirmer ces résultats, mais aussi pour mieux documenter comment se développent ces concepts en début de scolarisation et pour déterminer quelles représentations mentales permettent la compréhension du rôle du groupement dans le système de numération. Plus globalement, il importe d'établir à quel point la compréhension du système de numération lui-même s'appuie sur les habiletés numériques précoces des tout-petits, soit la subitisation[35] et la groupitisation[36].

Mon analyse plus théorique des concepts en jeu m'a permis de développer les éléments clés d'un continuum du sens du nombre[37], à partir des aptitudes des tout-petits jusqu'à la pleine compréhension de la numération. Le continuum élaboré pour la présente étude sert de fondation à la mise en place d'un dispositif didactique dans le cadre de l'approche RAI. Il est présenté dans le tableau ci-dessous.

---

[35] La subitisation est la capacité de percevoir instantanément une quantité inférieure à 4 éléments, que la collection soit organisée ou non.

[36] La groupitisation est la capacité à compter plus rapidement les quantités lorsqu'elles sont organisées en petits groupes de 2, 3 ou 4 éléments.

[37] Ce continuum fait écho au modèle des Étapes incontournables du sens du nombre (Lyons et Bisaillon, 2008, 2011).

Tableau synthèse du continuum du sens du nombre et de la numération, créé à partir de la recension des écrits

Niveaux du continuum	Âge normal d'acquisition	Évolution du sens du nombre	Manifestations observables
1	Avant 4 ans	Perception de petites numérosités	L'élève utilise la subitisation perceptuelle.
2	5-6 ans	Pensée additive	L'élève effectue un comptage séquentiel. L'élève a recours à la groupitisation.
3	6-7 ans	Pensée multiplicative Pré-valeur de position	L'élève réussit l'inclusion des classes. L'élève fait un comptage par bonds. L'élève reconnaît la pertinence du groupement.
4	7-8 ans	Passage à la dizaine	L'élève reconnaît l'intérêt de faire des groupes de dix pour faciliter le dénombrement. L'élève recourt au groupement. L'élève fait un comptage mixte.
5	7-8 ans	Passage à la centaine	L'élève comprend le rôle de la centaine ; il est capable de manipuler ce groupe de groupe. L'élève comprend le groupement récurrent.
6	8 ans	Pleine compréhension	L'élève manipule les nombres et leurs multiples représentations (flexibilité).

Objectif général du projet de recherche

L'objectif spécifique de cette recherche est de valider et de critiquer un dispositif didactique, appuyé sur un continuum du sens du nombre en répondant principalement aux deux questions suivantes :

- Ce dispositif permet-il de dépister les élèves susceptibles d'être à risque au moment d'entamer leur 3e année primaire sur le plan des apprentissages en arithmétique?
- Ce dispositif permet-il aux élèves de développer une meilleure compréhension du sens du nombre et de la numération en leur donnant l'occasion de développer des représentations mentales dynamiques et imagées touchant à différentes facettes de la numération?

Objectifs spécifiques de la séquence didactique

Cette séquence didactique est un dispositif didactique s'adressant à des élèves de fin 2e année, début 3e année. Dans une approche de la réponse à l'intervention, de dispositif permettrait de déterminer, à l'aide d'intervention de qualité du palier 1, si les élèves sont prêts à entamer leur 3e année et s'ils ont développé la flexibilité nécessaire par rapport au sens du nombre et de la numération. Ce serait aussi une façon de leur donner la chance d'apprendre des concepts clés incontournables qui pourraient ne pas avoir été travaillés préalablement ou ne seraient toujours pas bien acquis par les élèves.

Lorsqu'il est question d'opportunité d'apprendre, il s'agit de permettre aux élèves de mieux comprendre le sens du nombre en se construisant une représentation mentale imagée et dynamique de la quantité. Comme mentionné préalablement, cette représentation s'appuie sur les habiletés de subitisation et de groupitisation présentes chez les tout-petits et soutien par la suite la perception de la pertinence du groupement et la pensée multiplicative et la compréhension du système de numération.

Dans le cas où un élève ne répondrait pas à ces interventions, des interventions du palier 2 seraient nécessaires.

Contenu de la séquence didactique

La première partie de la séquence didactique est un outil d'évaluation [38] de quatre questions qui permet de :

- dépister les élèves à risques avant la séquence didactique afin de mieux les accompagner lors de la séquence (outil d'évaluation);
- dépister les élèves qui ne répondent pas aux interventions de la séquence (outil d'évaluation).

La deuxième partie du dispositif didactique concerne les activités d'apprentissage. Il s'agit d'une sélection et d'une adaptation de dix activités[39]. Elles tiennent comptent des pratiques gagnantes en mathématiques. Premièrement, des représentations concrètes et/ou imagées des concepts en jeux seront présentées aux élèves pour faciliter le passage vers les représentations symboliques. Deuxièmement, l'apprentissage par résolution de problèmes est privilégié ; l'enseignant propose la tâche à l'élève et se fait ensuite discret. La séquence fait en sorte que les élèves développent des habiletés, des compétences qui seront réinvesties dans d'autres activités. Elle est d'une durée de 10 périodes de 55 minutes chacune. Deux activités par période sont prévues. La première a une durée de 40 minutes et la seconde de 15 minutes. Le tableau ci-dessous présente les activités sélectionnées.

[38] Il s'agit d'une adaptation de l'outil « Portrait de ma classe » disponible sur la page des Étapes incontournables du nombre (Lyons et Bisaillon, 2011).
[39] Les activités sont des adaptations de certaines des activités issues des Étapes incontournables du nombre.

Période	Activité 1 (40 minutes)	Activité 2 (15 minutes)
1	Oisillons	Magie du 5 et du 10
2	Joyaux/Intro	Pyramide du 10
3	Joyaux Acticités	Tomathina/Boîtes de 10
4	Bergère et sorcière – Épisodes 1 et 2	Bataille avec les cartes de boîtes de 10
5	Bergère et sorcière – Épisode 3	Tomathina/Mémoire de 10
6	Stationnement	Bataille avec les cartes de boîtes de 10, addition de deux cartes
7	Tohubohus/À tes risques	Tomathina/Super boîtes de 10, deux boîtes
8	Tohubohus /Rassemblement	Visages de nombres – Photos de nombres
9	Visages de nombres – Nombres magiques Additions	Visages de nombres – Photos de nombres
10	Visages de nombres – Nombres magiques Additions et soustractions	Visages de nombres – Photos de nombres

Questionnaire

Nom : ____

Profession :

Enseignant ❑	Niveau scolaire : __________________
Orthopédagogue ❑	Clientèle : _______________________
Conseiller pédagogique ❑	Dossiers : ________________________

Courte description du milieu dans lequel vous travaillez :

Courte description de votre expérience scolaire :

Analyse de l'outil d'évaluation

- 1. Trouvez-vous que l'outil d'évaluation est en lien avec les activités de la séquence didactique, pourquoi?

- 2. Pensez-vous que l'outil d'évaluation permettrait d'identifier les élèves qui auraient besoin d'intervention supplémentaire, qui correspondraient au palier 2 de la RAI, par rapport au sens du nombre et de la numération?

Analyse des activités

Période 1

1.1 <u>Oisillons</u>

- 1.1.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 1.1.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 1.1.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 1.1.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 1.1.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 1.1.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 1.1.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 1.1.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 1.1.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 1.1.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - le temps d'exposition des oisillons
  - le nombre d'oisillons
  - la disposition des oisillons

1.2 Magie

- 1.2.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 1.2.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 1.2.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 1.2.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 1.2.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 1.2.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 1.2.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 1.2.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 1.2.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 1.2.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - les constellations des quantités manquantes
  - les constellations des quantités restantes

Période 2

2.1 Les joyaux de l'empereur - Intro

- 2.1.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 2.1.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 2.1.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 2.1.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 2.1.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 2.1.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 2.1.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 2.1.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 2.1.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 2.1.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - le temps d'expositions aux différentes configurations de joyaux
  - les constellations des groupes et à l'intérieur des groupes
  - la disposition des joyaux restants
  - l'utilisation de la feuille de notation

2.2 Pyramide

- 2.2.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 2.2.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 2.2.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 2.2.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 2.2.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 2.2.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 2.2.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 2.2.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 2.2.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

Période 3

3.1.<u>Les joyaux de l'empereur – Activité</u>

- 3.1.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 3.1.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 3.1.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 3.1.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 3.1.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 3.1.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 3.1.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 3.1.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 3.1.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 3.1.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - le temps d'expositions aux différentes configurations de joyaux
  - les constellations des groupes et à l'intérieur des groupes
  - la disposition des joyaux restants
  - l'utilisation de la feuille de notation

3.2 <u>Tomathina (Boîtes)</u>

- 3.2.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 3.2.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 3.2.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 3.2.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 3.2.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 3.2.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 3.2.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 3.2.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 3.2.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 3.2.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - le temps d'expositions aux différentes configurations de tomates
  - la disposition des tomates (aléatoire ou non)
  - le rabat transparent

Période 4

4.1 <u>Bergère… Sorcière – Épisodes 1 et 2</u>

- 4.1.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 4.1.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 4.1.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 4.1.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 4.1.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 4.1.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 4.1.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 4.1.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 4.1.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 4.1.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - le choix de la pyramide de 10 comme constellation de départ
  - le temps durant lequel les moutons sont immobiles
  - le nombre de moutons (ceux au départ et ceux partis)
  - le choix des quantités de mouton
  - l'utilisation de la feuille de notation

4.2 Bataille (une carte)

- 4.2.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 4.2.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 4.2.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 4.2.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 4.2.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 4.2.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 4.2.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 4.2.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 4.2.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 4.2.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - les représentations des boîtes de 10
  - le fait qu'il n'y ait pas de chiffres dans les coins

Période 5

5.1 Bergère… Sorcière – Épisode 3

- 5.1.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 5.1.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 5.1.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 5.1.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 5.1.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 5.1.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 5.1.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 5.1.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 5.1.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 5.1.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - le choix de la pyramide de 10 comme constellation de départ
  - le temps durant lequel les moutons sont immobiles
  - le nombre de moutons (ceux au départ et ceux partis)
  - le choix des quantités de mouton
  - l'utilisation de la feuille de notation

5.2 <u>Tomathina (Mémoire – boîtes de 10)</u>

- 5.2.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 5.2.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 5.2.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 5.2.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 5.2.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 5.2.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 5.2.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 5.2.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 5.2.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 5.2.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - le temps d'expositions aux différentes configurations de tomates
  - la disposition des tomates (aléatoire ou non)
  - le rabat transparent

Période 6

6.1.<u>Stationnement</u>

- 6.1.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 6.1.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 6.1.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 6.1.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 6.1.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 6.1.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 6.1.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 6.1.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 6.1.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 6.1.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - le nombre de voitures
  - l'emplacement des voitures manquantes
  - l'utilisation du quadrillé de la feuille de notation
  - l'utilisation de la feuille de notation

6.2 <u>Bataille (addition de deux cartes)</u>

- 6.2.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 6.2.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 6.2.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 6.2.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 6.2.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 6.2.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 6.2.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 6.2.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 6.2.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 6.2.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - les représentations des boîtes de 10
  - le fait qu'il n'y ait pas de chiffres dans les coins

Période 7

7.1.<u>La légion de Tohubohus – À tes risques!</u>

- 7.1.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 7.1.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 7.1.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 7.1.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 7.1.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 7.1.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 7.1.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 7.1.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 7.1.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 7.1.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - la disposition des soldats avant et après le rassemblement
  - le passage de la notation mixte à la notation positionnelle
  - le choix des quantités de soldats
  - l'utilisation de la feuille de notation

7.2. Tomathina (Super boîtes – 2 boîtes)

- 7.2.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 7.2.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 7.2.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 7.2.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 7.2.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 7.2.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 7.2.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 7.2.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 7.2.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 7.2.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - le temps d'expositions aux différentes configurations de tomates
  - la disposition des tomates (aléatoire ou non)
  - le rabat transparent

Période 8

8.1.<u>La légion de Tohubohus – Rassemblement!</u>

- 8.1.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 8.1.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 8.1.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 8.1.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 8.1.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 8.1.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 8.1.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 8.1.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 8.1.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 8.1.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - la disposition des soldats avant et après le rassemblement
  - le passage de la notation mixte à la notation positionnelle
  - le choix des quantités de soldats
  - l'utilisation de la feuille de notation

8.2. Les visages de nombres - Nombres magiques – (photogénie numérique – 8 secondes)

- 8.2.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 8.2.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 8.2.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 8.2.4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 8.2.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 8.2.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 8.2.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 8.2.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 8.2.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 8.2.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - la disposition des blocs de base dix
  - l'utilisation de blocs de base dix aux groupements non apparents et non accessibles

Périodes 9 et 10

9.1. <u>Les visages de nombres – Nombres magiques (additions et soustraction) et Photos de nombre (6 et 4 secondes)</u>

- 9.1.1 Est-ce que les consignes sont claires?
  ❑ Oui
  ❑ Non : comment devrait-on reformuler les consignes?

- 9.1.2 Est-ce que le temps alloué à l'activité est réaliste?
  ❑ Oui
  ❑ Non : quel temps devrait être alloué?

- 9.1.3 Trouvez-vous que cette activité est facilement réalisable en classe?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

- 9.1..4 Quelles pourraient être les stratégies et procédures utilisées par vos élèves lors de la réalisation de cette activité?

- 9.1.5 Quelles pourraient être les erreurs de vos élèves?

- 9.1.6 De quel matériel vos élèves auraient-ils besoin pour réaliser cette activité?

- 9.1.7 Serait-il préférable de les faire travailler en grand groupe, en petites équipes (de combien) ou seuls selon vous? Et pourquoi?

- 9.1.8 Trouvez-vous que le but de cette activité est pertinent par rapport à cette séquence didactique (voir la présentation de l'activité). Trouvez-vous que l'activité est en lien avec le but annoncé, pourquoi?

- 9.1.9 Pensez-vous que vos élèves trouveraient cette activité amusante?
  ❑ Oui
  ❑ Non
  Pourquoi?

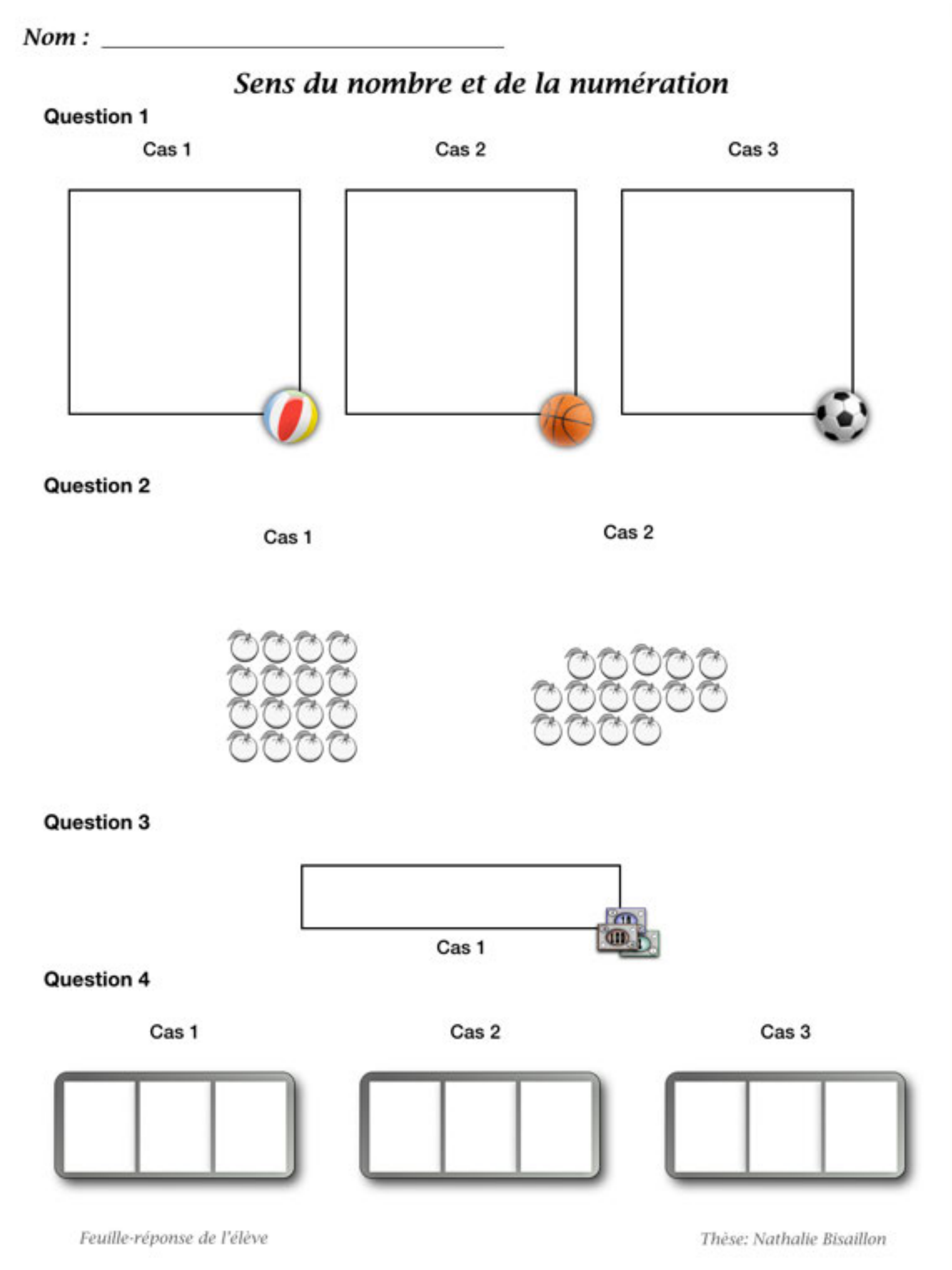
- 9.1.10 Trouvez-vous que les éléments suivants de l'activité offrent un défi raisonnable à vos élèves? Pourquoi?
  - la disposition des blocs de base dix
  - l'utilisation de blocs de base dix aux groupements non apparents et non accessibles

Analyse de la séquence didactique en général

- 1. Trouvez-vous que les activités de la séquence s'adressent à des élèves de fin 2e année ou début 3e année, pourquoi?
- 2. Trouvez-vous que l'ordre des activités est pertinent, pourquoi?
- 3. Trouvez-vous que le choix des activités est intéressant, pourquoi?
- 4. Trouvez-vous que le nombre d'activités est adéquat, pourquoi?
- 5. Trouvez-vous que le nombre de périodes est réaliste, pourquoi?
- 6. Pensez-vous que vos élèves auraient une meilleure compréhension du sens du nombre et de la numération après avoir réalisé les activités de cette séquence didactique, pourquoi?
- Pensez-vous que vos élèves développeraient une représentation mentale dynamique et imagée des quantités utile à leurs apprentissages?

Annexe 2

Feuille réponse pour l'outil d'évaluation



Nom : ______________________________

Sens du nombre et de la numération

Question 1

Cas 1 Cas 2 Cas 3

Question 2

Cas 1 Cas 2

Question 3

Cas 1

Question 4

Cas 1 Cas 2 Cas 3

Feuille-réponse de l'élève *Thèse: Nathalie Bisaillon*

Annexe 3

Feuille de notation avec les réponses pour la deuxième partie de l'activité Joyaux

Joyaux - Notation - Réponses

	AVANT	DISPARUS
6	7	4 3
7	5	2 3
8	6	3 4
9	5	2 3
10	8	4 6

Nathalie Bisaillon et Michel Lyons, EDL inc. 2018

Annexe 4

Feuille de notation avec les réponses pour les épisodes 2 et 3 de Bergère… Sorcière et cas proposés aux élèves pour les épisodes 2 et 3

Solutions

Bergère… sorcière - Série 2

	MATIN	SOIR	IL EN MANQUE
6	$\boxed{5}$ $\boxed{4}$.	$\boxed{4}$ $\boxed{9}$.	5
7	$\boxed{6}$ $\boxed{3}$.	$\boxed{6}$ $\boxed{4}$.	Bébé!
8	$\boxed{7}$ $\boxed{1}$.	$\boxed{6}$ $\boxed{1}$.	10
9	$\boxed{6}$ $\boxed{8}$.	$\boxed{5}$ $\boxed{7}$.	11
10	$\boxed{7}$ $\boxed{3}$.	$\boxed{6}$ $\boxed{0}$.	13

Nathalie Bisaillon et Michel Lyons, EDL inc. 2018

Cas Bergère… Sorcière – Épisode 2

cas	Matin	Soir	Manquants
1	47	45	2
2	38	37	1
3	40	36	4
4	51	47	4
5	54	47	7
cas	Matin	Soir	Manquants
6	54	49	5
7	63	64	Bébé!
8	71	61	10
9	68	57	11
10	73	60	13

Cas Bergère… Sorcière – Épisode 3

cas	Nombre		
1	1	2	3
2	1	4	6
3	0	9	6
4	1	7	4
5	2	1	3

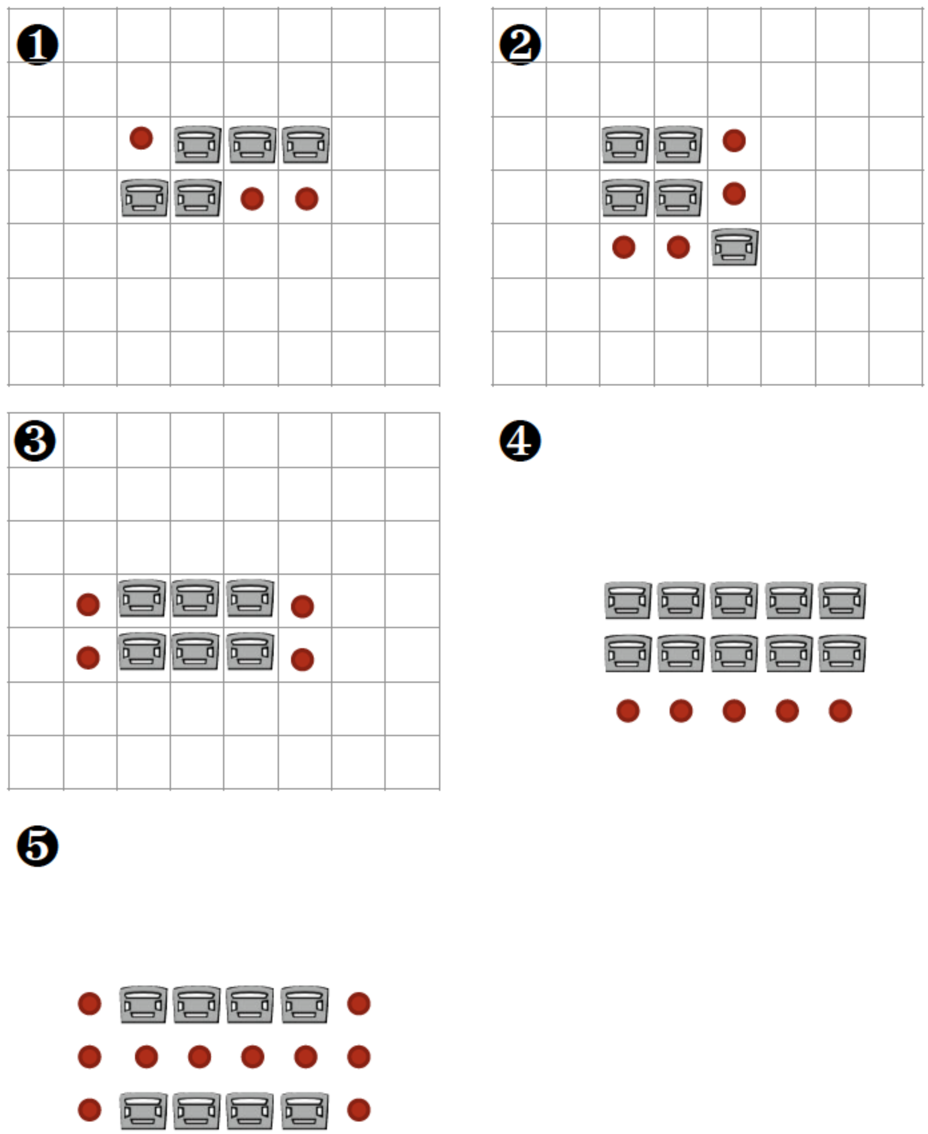
Annexe 5

Feuille de notation avec les réponses pour la série 1 et la série 2 de Stationnement

Nom : ______________________________ **CORRIGÉ**

Stationnement – Série 1

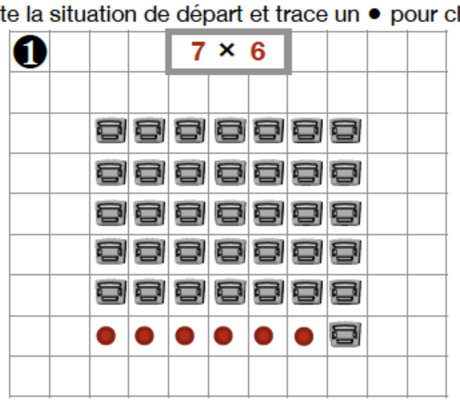
Trace un ● pour chaque auto qui a été vendue aujourd'hui.

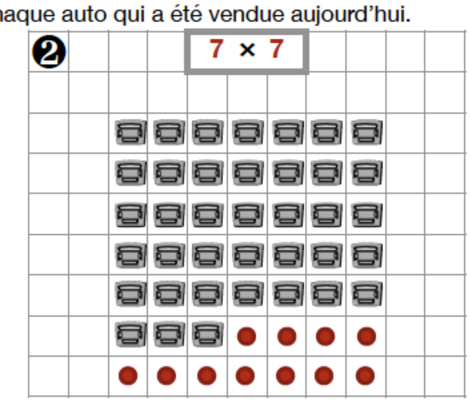


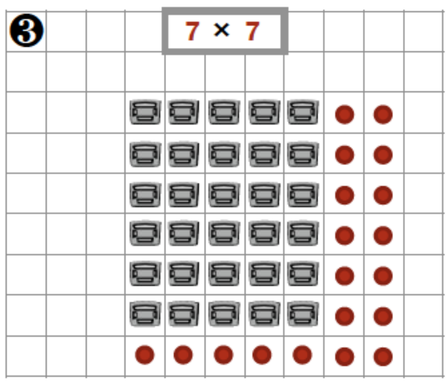
CORRIGÉ

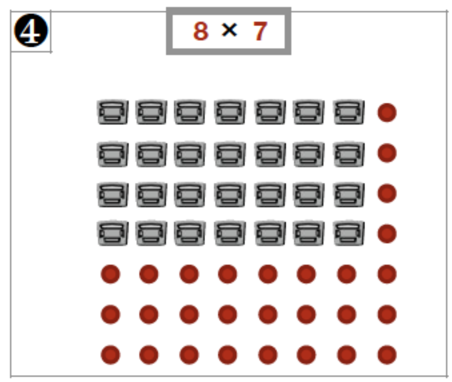
Stationnement – Série 2

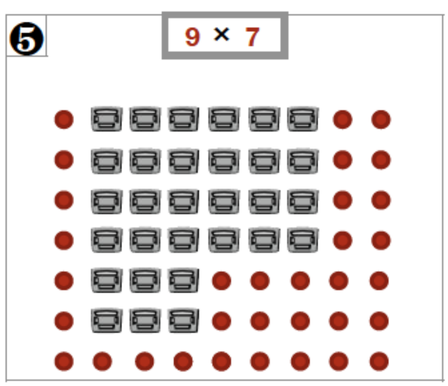
Note la situation de départ et trace un ● pour chaque auto qui a été vendue aujourd'hui.











Annexe 6

Feuille de notation avec les réponses pour l'activité À tes risques! et l'activité Rassemblement de Tohubohu

À tes risques! - Notation - Corrigé

	DE RETOUR	EN RETARD...
1	9 4	0 6
2	8 0	2 0
3	5 8	4 2
4	4 5	5 5
5	1 7	8 3
6	0 7 0	1 3 0
7	1 0 6	0 9 4
8	1 2 2	0 7 8
9	0 7 7	1 2 3
10	0 3 6	1 6 4

Nathalie Bisaillon et Michel Lyons, EDL inc. 2017

Rassemblement! - Notation - Corrigé

	EN DÉTENTE			EN RASSEMBLEMENT		
1	0	12	5	1	2	5
2	1	14	3	2	4	3
3	0	21	8	2	1	8
4	2	15	11	3	6	1
5	2	8	24	3	0	4
6	1	23	20	3	5	0

	EN RASSEMBLEMENT			NOMBRE		
7	4	15	15	5	6	5
8	4	20	20	6	2	0
9	4	29	17	7	0	7
10	5	28	35	8	1	5

Annexe 7

Cas pour l'activité Photos de nombres

	Photogénie numérique
1	3c + 13d +15u
2	4c + 25d + 2u
3	5c + 16d + 24u
4	6c + 20d + 13u
5	7c + 23d + 26u
6	6c + 17d + 34u
7	3c + 29d + 25u
8	6c + 25d + 47u
9	4c + 39d + 33u
10	6c + 36d +39u
11	4c + 12d +18u
12	3c + 24d + 8u
13	6c + 14d + 23u
14	5c + 20d + 17u
15	7c + 21d + 24u
16	5c + 17d + 32u
17	6c + 28d + 35u
18	4c + 26d + 36u
19	5c + 38d + 38u
20	7c + 27d +27u
21	6c + 15d +15u
22	3c + 27d + 7u
23	4c + 16d + 26u
24	7c + 20d + 14u
25	6c + 23d + 23u
26	7c + 18d + 28u
27	4c + 29d + 25u
28	3c + 26d + 38u
29	4c + 38d + 36u
30	6c + 37d + 34u

Annexe 8

Cas pour l'activité Nombres magiques

Nombres magiques	
Ex.	3c + 1d + 12u
1	4c + 5u + 3d
2	4u + 5d + 2c
3	9u + 5c
4	3c + 13d + 8u
5	1c + 15d
6	6d + 12u + 4c
7	7d + 14u
8	2c + 13u + 11d
9	3c + 7d + 2c + 8u + 2d
10	4d + 3c + 7u + 8d + 4u
11	4c + 5d – 2c + 6u – 4d
12	5c – 3d
13	3c + 5u + 8d – 9u
14	2u + 5d + 2c – 6d
15	3c – 3u
16	14u + 6c + 15d + 6c – 1c – 7u
17	4d + 6u + 5c – 12d + 6u
18	6c – 25
19	4c – 11d + 13u
20	5c – 15d – 15u

Annexe 9

Formulaire d'information et de consentement

Université de Montréal

Faculté des sciences de l'éducation, Département de didactique

FORMULAIRE D'INFORMATION ET DE CONSENTEMENT

« Outil d'évaluation-intervention portant sur le sens du nombre et de la numération permettant de dépister les élèves à risque d'entamer une 3e année en mathématiques au primaire »

Chercheuse étudiante :	Nathalie Bisaillon, étudiante au doctorat, [redacted]
Directrice de recherche :	Louise Poirier, professeur titulaire, [redacted]

Vous êtes invité à participer à un projet de recherche. Votre participation est volontaire. Avant d'accepter, veuillez prendre le temps de lire ce document présentant les conditions de participation au projet. N'hésitez pas à poser toutes les questions que vous jugerez utiles à la personne qui vous présente ce document.

A. RENSEIGNEMENTS AUX PARTICIPANTS

1. Objectifs du projet de recherche

La recherche portant sur le développement du sens du nombre vise à mieux comprendre les difficultés auxquelles les élèves peuvent faire face en mathématiques. Ce projet a pour objectif principal de valider un outil d'intervention-évaluation appuyé sur continuum du développement du sens du nombre pour faciliter le dépistage des élèves à risques ou des élèves qui ont des difficultés avec certains concepts mathématiques chez les élèves de fin 2e année ou début 3e année. Cette démarche contribuera à une meilleure compréhension de la numération chez ces élèves. J'aimerais solliciter votre participation au présent projet de recherche. Vos réponses permettront de bonifier cet outil et de mieux documenter comment se développent les concepts associés au sens du nombre et de la numération. Les résultats seront publiés dans ma thèse de doctorat et éventuellement dans des revues scientifiques et professionnelles.

2. Participation à la recherche

Vous êtes sollicité pour participer à ce projet, car vous êtes enseignant, orthopédagogue ou conseiller pédagogique au primaire.

Votre participation au projet de recherche est entièrement volontaire. Si vous y consentez, votre participation consiste à :

- lire un court préambule qui présente le résumé du cadre conceptuel de cette recherche et explique les objectifs de la séquence didactique et son déroulement ;
- analyser cette séquence et préparer les réponses (qui n'ont pas à être remises par écrit). Les mêmes questions reviennent pour chacune des activités. Ce travail devrait prendre entre deux et trois heures de votre temps ;

Ce projet a été approuvé par le Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie de l'Université de Montréal. Projet no CEREP-20-019-D en date du 3 mars 2020. Page 1 sur 5

- participer à un entretien vidéo d'environ une heure avec la chercheuse étudiante, à un moment de votre choix. Les questions de l'entretien seront celles qui auront été remises pour analyser la séquence. Cette entrevue sera enregistrée sur vidéo ou audio, à votre convenance. Les entretiens seront retranscrits et vous ne pourrez être identifiés d'aucune façon.

Dans le cadre du projet, la chercheuse étudiante recueillera et conservera dans un dossier de recherche les informations recueillies. Ces données seront nécessaires pour répondre aux objectifs scientifiques de la recherche.

3. Avantages et bénéfices

Il n'y a pas d'avantage particulier à participer au projet de recherche. Votre participation permettra de mieux comprendre comment peut se développer le sens du nombre et de la numération chez les enfants et qu'elles sont les conditions à mettre en place pour assurer ce développement.

4. Risques et inconvénients

À notre connaissance, il n'y a pas de risque particulier associé à votre participation à ce projet. Cependant, il est possible que certaines questions puissent susciter des réflexions ou raviver des souvenirs liés à une expérience désagréable. Vous pourrez à tout moment refuser de répondre à une question ou même mettre fin à l'entrevue. En cas de besoin, le chercheur pourra vous recommander à une personne-ressource pour vous aider à surmonter ces inconvénients et vous remettre une liste de ressources locales.

5. Confidentialité et anonymat

L'étudiante chercheuse prendra les moyens nécessaires afin que les renseignements personnels que vous nous donnerez demeurent confidentiels. Ces moyens sont les suivants :

- Les formulaires d'information et de consentement signés et le dossier de recherche demeureront confidentiels, de la collecte des données jusqu'à la publication des résultats de recherche. En aucun temps, votre identité ne sera dévoilée.
- Le dossier de recherche comportera le présent formulaire, des enregistrements vidéo ou audio, des transcriptions et des notes prises lors des entrevues.
- Il sera conservé dans un classeur fermé à clé et dans un local également fermé à clé à l'Université de Montréal. Les fichiers informatiques seront enregistrés sur l'ordinateur sécurisé de la chercheuse principale.

Seuls la chercheuse étudiante et ses directeurs de recherche connaitront l'identité des participants. Chaque participant à la recherche se verra attribuer un code qui liera les formulaires d'information et de consentement et les données de recherche. Seuls la chercheuse étudiante et ses directeurs de recherche conserveront la liste associant le code des participants à leur nom ce qui permet de procéder au retrait des données, au besoin.

Les renseignements et données de recherche seront conservés à l'Université de Montréal dans un classeur et dans un local, tous deux fermés à clé. Tous les renseignements personnels seront détruits 7 ans après la fin du projet. Seules les données ne permettant pas de vous identifier seront conservées après cette date, le temps nécessaire à leur utilisation en contexte de formation des enseignants.

6. Compensation

Pour compenser le temps que vous nous avez accordé, vous recevrez une carte-cadeau de 20 $ à la fin de l'entrevue. Vous recevrez aussi la séquence didactique que vous pourrez utiliser dans votre milieu.

7. Transmission des résultats aux participants

La thèse de doctorat dans laquelle il sera impossible de vous identifier sera disponible sur le site internet de l'Université de Montréal. Il me fera aussi plaisir de vous communiquer les résultats de la recherche obtenus grâce à votre participation. Dans ce but seulement, vous pouvez nous indiquer une adresse courriel afin que nous puissions vous faire parvenir un résumé des principaux résultats de recherche. Votre adresse courriel sera consignée dans un document indépendant des données de recherche. Un résumé du projet sera aussi disponible.

8. Droit de retrait

Votre participation à ce projet est entièrement volontaire et vous pouvez à tout moment vous retirer de la recherche sur simple avis verbal et sans devoir justifier votre décision, sans conséquence pour vous. Si vous décidez de vous retirer de la recherche, veuillez communiquer avec le chercheur ou le chercheur étudiant au numéro de téléphone ou à l'adresse courriel indiqué ci-dessous. À votre demande, tous les renseignements personnels et les données déjà collectées pourront être détruits. Cependant, après le déclenchement du processus de publication, il sera impossible de détruire les analyses et les résultats portant sur vos données.

9. Utilisation des données de recherche

Les données de recherche ne seront utilisées qu'aux fins de la présente recherche. Toutefois, avec votre consentement, elles pourraient être utilisées dans le cadre d'autres recherches. Ces projets seront placés sous la responsabilité de la chercheuse principale et seront autorisés par un comité d'éthique de la recherche. La chercheuse principale s'engage à maintenir et à protéger la confidentialité des données qui concernent votre enfant, aux conditions énoncées dans le présent formulaire. Une demande de consentement est prévue à la fin du présent formulaire.

En espérant que vous accepterez de participer à ce projet de recherche, veuillez accepter, nos salutations distinguées.

Nathalie Bisaillon, doctorante

[redacted]

Louise Poirier, professeure

[redacted]

B. DÉCLARATION DU PARTICIPANT

- Je reconnais qu'on m'a expliqué clairement la nature de ma participation à la recherche.
- Je comprends que je peux prendre mon temps pour réfléchir avant de donner mon consentement à participer à la recherche aux conditions énoncées dans le présent formulaire.
- Je peux poser des questions au chercheur et exiger des réponses satisfaisantes.
- Je comprends qu'en participant à ce projet de recherche, je ne renonce à aucun de mes droits ni ne dégage le chercheur de ses responsabilités.

C. DEMANDE DE CONSENTEMENT

J'ai pris connaissance du présent formulaire d'information et de consentement et, en posant ma signature, je consens à participer aux activités de recherche présentées dans la rubrique « Participation à la recherche ».

- Je consens à être recontacté pour recevoir un résumé des résultats de la recherche :
  □ Oui □ Non
  Si oui, je souhaite être joint par le chercheur à l'adresse courriel suivante : ____________________________ .
- Je consens à ce que l'entrevue soit enregistrée sur support vidéo ou audio afin d'en faciliter l'analyse : □ Oui □ Non

Utilisation secondaire des données
Je consens à ce que le chercheur utilise, ou autorise des étudiants placés sous sa direction à utiliser, les données dépersonnalisées pour d'autres projets de recherche de même nature, conditionnellement à leur approbation éthique et dans le respect des mêmes principes de confidentialité et de protection des informations.
□ Oui □ Non

Signature du participant : __________________________ Date : ______________________

Nom : ___________________________________ Prénom : ______________________

D. ENGAGEMENT DE L'ÉTUDIANTE CHERCHEUSE

- J'ai expliqué au participant les conditions de sa participation au projet de recherche.
- J'ai répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées et je me suis assuré de la compréhension du participant.
- Je m'engage à respecter ce qui a été convenu au présent formulaire d'information et de consentement.
- Je certifie que je remettrai au participant une copie signée et datée du présent formulaire.

Signature (du chercheur principal ou du chercheur étudiant) :_[redacted]

Date : 19 mai 2020

Nom : Bisaillon Prénom : Nathalie

VEUILLEZ RETOURNER CET EXEMPLAIRE DU FORMULAIRE DE CONSENTEMENT PAR COURRIEL À L'ADRESSE SUIVANTE : [redacted]

Ce projet a été approuvé par le Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie de l'Université de Montréal. Projet no CEREP-20-019-D en date du 3 mars 2020.

E. PERSONNES-RESSOURCES

Pour toute question relative à l'étude, ou pour vous retirer de la recherche, veuillez communiquer avec Nathalie Bisaillon [redacted]

Pour toute préoccupation sur vos droits ou sur les responsabilités des chercheurs concernant votre participation à ce projet, vous pouvez contacter le Comité d'éthique de la recherche en éducation et en psychologie [redacted]

Toute plainte relative à votre participation à cette recherche peut être adressée à l'ombudsman de l'Université de Montréal en appelant [redacted]

Annexe 10

Expérience professionnelle des participants

Code	Tâche actuelle	Expérience professionnelle	Clientèle	Relation professionnelle
CO.EN.R.1	Enseignant en 4^{e} année Milieu multiethnique aisé	Enseignant de 6^{e} année durant 6 ans Enseignant de 2^{e} année durant 7 ans Enseignant de 4^{e} année depuis 4 ans	Ordinaire	Oui
CO.EN.R.2	Enseignant en 4^{e} année Milieu multiethnique aisé	Enseignant en 6^{e} année, au préscolaire et en 2^{e} année Co-auteur de l'activité La Tomathina	Ordinaire	Oui
CO.EN.R.3	Enseignant en 1ère-2^{e} École Alternative	Enseignant de musique durant 8 ans Enseignant depuis 24 ans	Ordinaire	Oui
CO.EN.N.4	Enseignante en 2^{e} année Milieu moyennement favorisé avec soutien à la maison Travail à partir de matériel-école	Enseigne principalement au premier cycle Enseignant depuis 15 ans	Ordinaire	Non
CO.EN.N.5	Enseignante en 2^{e} année Milieu socio-économique moyen	Enseignante en 2^{e}, 3^{e} et 4^{e} année Co-enseignement avec CO.EN.N.6 depuis 19 ans Enseignante depuis 27 ans	Ordinaire	Non
CO.EN.N.6	Enseignante en 2^{e} année Milieu socio-économique moyen	Co-enseignement avec CO.EN.N.5 depuis 19 ans Enseignante depuis 20 ans	Ordinaire	Non
CO.CP.R.7	Conseillère pédagogique en mathématique 13 écoles	Conseillère pédagogique depuis 20 ans Libération de 3 ans et demi pour le MELS – pour travailler sur l'évaluation 4 charges de cours à l'UdeM et 1 à l'UQTR	Ordinaire	Oui

AS.OR.R.8	Orthopédagogue au secondaire en déficience visuelle	Enseignante depuis 30 ans en adaptation scolaire au secondaire, dont 25 en déficience visuelle en mathématique	Adaptation scolaire Orthopédagogie	Oui
AS.OR.R.9	Orthopédagogue École en milieu défavorisé	Dépistage en 6^{e} année Interventions ciblées au 2^{e} et au 3^{e} cycle Enseignante depuis 1999 Orthopédagogue depuis 3 ans	Adaptation scolaire Orthopédagogie	Oui
AS.OR.R10	Orthopédagogue et enseignante au premier et au deuxième cycle Milieu moyennement favorisé 1/3 des élèves sont bilingues ou anglophones	Orthopédagogue depuis 20 ans	Adaptation scolaire Orthopédagogie	Oui
AS.OR.R.11	Orthopédagogue en pratique privée au primaire	Orthopédagogue en pratique privée depuis 2014 Orthopédagogue au primaire depuis 1986	Adaptation scolaire Orthopédagogie	Oui
AS.CP.R.12	Conseillère pédagogique, dossier TSA, DA, TDL au secondaire Accompagnement auprès des enseignants de pratiques efficaces en mathématiques	Enseignante durant 8 ans en adaptation scolaire auprès de la clientèle TSA Conseillère pédagogique en adaptation scolaire au primaire et au secondaire auprès de la clientèle TSA, DA et TDL	Adaptation scolaire TSA	Oui
AS.CP.R.13	Conseillère pédagogique, dossier difficulté d'apprentissage	Orthopédagogue depuis 20 ans Conseillère pédagogique depuis 3 ans	Adaptation scolaire	Oui

Légende :
CO : classe ordinaire
AS : adaptation scolaire
EN : enseignant
CP : conseiller pédagogique
OR : orthopédagogue
R : Relation professionnelle
N : pas de relation professionnelle

Annexe 11

Grille de codes pour évaluation l'outil d'évaluation

Codes			**Code**	**Définition**	**Exemple**
Contenu	Mathématique	Concepts	CMC	Tout commentaire en lien avec un concept mathématique.	13 : « *J'aurais pensé quelque chose sur le principe de cardinalité.* »
		Activités	CMA	Tout commentaire en lien avec activités mathématiques réalisées en classe.	7 : « *À l'école, on passe très vite au symbolisme et on laisse de côté les représentations concrètes et imagées.* »
		Enchaînement des concepts	CME	Tout commentaire portant sur l'enchaînement des concepts menant au développement du sens du nombre.	12 : « *Je trouve que le saut entre « compléter des arrangements rectangulaires (qui pourraient être uniquement une habileté visuelle non conceptualisée) » et le « passage à la dizaine et la centaine » est grand.*»
Élève	Aspects psychoaffectifs	Anxiété	ÉPA	Tout commentaire mentionnant que l'épreuve peut entraîner du stress chez l'élève.	12 : « *Certains élèves seront anxieux puisque les activités sont chronométrées.* »
		Motivation	ÉPM	Tout commentaire portant sur l'aspect motivant de l'épreuve.	4 : « Ça va chercher l'intérêt des enfants. »
	Aspects cognitifs	Représentation mentale	ÉCR	Tout commentaire mentionnant que l'épreuve évalue si l'élève est capable de se faire une représentation mentale des quantités ou d'utiliser des stratégies.	11 : « *Il les incite, par ce test, à prouver leurs capacités à gérer des représentations mentales imagées qui sont en lien avec la numération.* »

		Habiletés et difficultés potentielles de l'élève	ÉCH	Tout commentaire portant sur le niveau de compétence de l'élève, sur sa compréhension du sens du nombre et de la numération.	9 : « Je crois que les résultats de ce test offriraient un portrait assez juste des capacités de l'enfant. »
Enseignant	Planification des interventions		EI	Tout commentaire faisant un lien entre le résultat de l'épreuve est des interventions futures.	5 : « *J'imagine que les résultats à ce test pourraient grandement pister les interventions ultérieures*. »
	Organisation des services		ES	Tout commentaire faisant un lien entre les résultats de l'épreuve et l'organisation des services.	5 : Les résultats de l'épreuve « *pourraient servir à trancher entre le besoin d'interventions de niveau 1, 2 ou 3 lorsque l'offre de suivi aux niveaux 2 et/ou 3 est limitée.* »
	Besoin d'accompagnement		EB	Tout commentaire mentionnant que les enseignants auraient besoin d'accompagnement dans l'utilisation de cette épreuve.	10 : « *Il manque une partie accompagnement de l'enseignant.* »
Paramètres de l'outil d'évaluation	Administration de l'épreuve		PA	Tout commentaire en lien avec l'administration de l'épreuve par l'enseignant (le matériel à préparer, les consignes à donner, etc.)	4 : « *C'est assez rapide dans une classe, je trouve ça génial*. »
	Validité de construit		PV	Tout commentaire mentionnant que l'épreuve évalue bien ce qu'elle veut évaluer.	4 *: « Il va chercher les différentes notions travaillées dans la séquence. »*

	Temps d’exposition	PT	Tout commentaire en lien avec le temps d’exposition (trop court, trop long, le fait que ce soit minuté) de chacun des items de l’épreuve.	12 : « *Si tu le reprenais avec juste un peu plus de lenteur, tu pourrais voir quand même un jeune qui dénombre.* »
	Format	PF	Tout commentaire en lien avec le format de l’épreuve (le contenu de la feuille réponse, le choix des images pour les questions, etc.).	10 : « Il n’y a pas de cases pour les exemples, c’est mélangeant. »

Annexe 12

Grille de codes pour évaluer la séquence didactique

Codes			Abr.	Définition	Exemple
Contenu	Variables didactiques	Temps d'exposition	CVT	Tout commentaire en lien avec le temps d'exposition (trop court, trop long, le fait que ce soit minuté) de chacun des items de la séquence.	4 : « *Il convient et on peut l'ajuster selon l'âge des élèves.* »
		Nombre d'éléments	CVN	Tout commentaire en lien avec le nombre d'éléments que l'élève doit compter ou calculer.	2 : « Il faudrait peut-être augmenter le nombre d'oisillons. »
		Disposition des éléments	CVD	Tout commentaire en lien avec la façon dont sont disposés les éléments à compter ou à calculer.	2 : « *C'est excellent ça que ce ne soit pas toujours des constellations classiques.* »
		Mode de représentation	CVM	Tout commentaire en lien avec le mode de représentation choisi pour l'activité.	12 : « *J'aime qu'on s'appuie beaucoup sur le visuel, ceci sera aidant pour les élèves présentant des difficultés en langage.* »
	Pertinence	Apprentissage souhaité	CPA	Tout commentaire mentionnant que l'activité travaille le concept ciblé	1 : « *Cible précisément ce qu'on veut observer.* »
		Enchaînement des concepts	CPP	Tout commentaire mentionnant que l'activité est à la bonne place dans l'enchaînement des concepts permettant le développement du sens du nombre.	12 : « *Oui c'était très bien amené, je trouvais qu'on naviguait, une bouchée à la fois.* »
		Niveau de difficulté de l'activité	CPD	Tout commentaire portant sur le niveau de compétence de l'élève, sur sa compréhension du sens du nombre et de la numération.	4 : « *Un peu facile pour les élèves de 4e année.* »
		Thème de l'activité	CPT	Tout commentaire par rapport à l'âge des élèves ciblés par le thème de l'activité.	8 : « *C'est certain qu'elle était plus bébé pour moi…* »
ÉI	Aspects psychoaffectifs	Anxiété	ÉPA	Tout commentaire mentionnant que l'élève peut vivre du stress.	8 : « *Des fois, ils ont peur d'être en échec.* »

		Motivation		ÉPM	Tout commentaire portant sur l'aspect motivant de la séquence.	13 : « *Les enfants, ils adorent ça.* »
		Habiletés de coopération		ÉPC	Tout commentaire en lien avec les aptitudes nécessaires pour menant à bien un travail d'équipe.	5 : « *À cet âge, les aptitudes de coopération ne sont pas pleinement développées.* »
	Aspects cognitifs	Représentation mentale		ÉCR	Tout commentaire mentionnant l'élève se fait une représentation mentale des quantités ou d'utiliser des stratégies.	13 : « *Les élèves peuvent visualiser la forme en disant ce qu'ils voient.* »
		Attention		ÉPT	Tout commentaire portant sur l'engagement de l'élève dans la tâche ou son attention.	2 : « *C'est un muscle qui est souvent endormi. Je trouve que ça apporte ça. C'est important d'être vigilant, de mettre la « switch à on » qui trop souvent « à off ».* »
		Conduites de l'élève	Référé à quelque chose de connu	ÉCCR	Tout commentaire exprimant que l'élève pourrait se référer à quelque chose qu'il connaît pour faire sa représentation mentale (un objet, la subitisation, une constellation, faits numériques, etc.). Tout commentaire faisant référence à la flexibilité (plus l'élève connaît de choses, plus il est flexible).	*8 : Ils donnent des références à quelque chose, un escalier, 3, 2, 1, un rectangle.*
			Dénombrer	ÉCCD	Tout commentaire qui mentionne que l'élève pourrait dénombrer, ou compter les éléments (unités ou groupes) un à un, pour trouver la réponse.	11 : « *Ils pourraient aussi tenter de compter les oisillons.* »
			Compter les groupes ou par bonds	ÉCCB	Tout commentaire qui mentionne que l'élève pourrait compter les groupes ou par bonds.	5 : « *Compter d'abord un groupement de 10, puis généraliser le 10 à la présentation triangulaire des moutons. »*
			Reproduire ou faire un arrangement	ÉCCA	Tout commentaire mentionnant que l'élève pourrait vouloir reproduire l'arrangement qu'il a vu pour donner sa réponse.	12 : *« Certains vont vouloir reproduire l'arrangement visuellement, d'autres non.* »
			Décomposer	ÉCCDC	Tout commentaire mentionnant que l'élève décompose les quantités à compter, qu'il fait des échanges, pour trouver la réponse.	7 : « *L'élève pourrait décomposer la quantité totale en petite quantité.* »

			Calcul mental	ÉCCT	Tout commentaire portant sur l'utilisation du calcul mental par l'élève.	7 : « *L'élève pourrait appliquer ses stratégies de calcul mental* »
			Mémoriser	ÉCCM	Tout commentaire faisant référence à l'utilisation que l'élève pourrait faire de sa mémoire pour trouver la réponse.	11 : « *Les élèves pourraient mémoriser instantanément les petites numérosités.* »
			Confondre	ÉCCC	Tout commentaire faisant référence aux confusions que l'élève pourrait avoir.	12 : « *Des fois ils deviennent confus aussi. C'est pour ça, la carte, le 5, c'est vraiment un début, c'est l'fun.* »
			Agir trop vite	ÉCCV	Tout commentaire mentionnant que l'élève pourrait vouloir agir rapidement pour trouver la réponse.	5 : « *Connaissant certains élèves plus anxieux, je pense qu'ils pourraient avoir envie de placer les jetons ou de tracer pendant que l'image est affichée au tableau blanc.* »
Enseignant	Intervention	Enseignement formel		EITF	Tout commentaire en lien avec l'enseignement formel et ses composantes.	7 : « *Je pense qu'à mon avis dans ce que je vois, on est dans du par cœur.* »
		Enseignement par résolution de problèmes		EITR	Tout commentaire en lien avec l'enseignement par résolution de problèmes et ses composantes.	4 : « *Tu mets dans le contexte, rapidement, bref, puis tout de suite ça commence et tous les effets.* »
		Partage de stratégies		EITP	Tout commentaire en lien avec la place à laisser au partage de stratégies par les élèves lors de la réalisation de l'activité.	5 : « *Par contre, un partage des stratégies utilisées doit être fait à la suite de l'activité.* »
	Organisation des services			EIS	Tout commentaire faisant un lien avec l'organisation des services.	2 : « *Ça peut être vu de deux façons : soit en réhabilitation, avec un enfant quatrième année, on est quand même ailleurs. Ils ont touché à ça, mais un pour enfant en difficulté, ce serait intéressant de repartir à zéro. Et de là de voir l'importance de regrouper. Donc, oui elle est pertinente.* »
Dé	Avant la tâche	Consignes	Convient	DACC	Tout commentaire mentionnant que les consignes conviennent.	9 : « Consignes simples et faciles à suivre. »

			Suggestion	DACS	Tout commentaire faisant des suggestions pour la formulation des consignes.	13 : « *Préciser qu'il faut attendre que le nid soit disparu avant de placer leurs jetons.* »
		Matériel	Convient	DAMC	Tout commentaire mentionnant que le matériel proposé dans l'activité convient.	11 : « *Cette activité est réalisable en classe. Facilement? Oui, si le matériel concret offert aux élèves pour représenter le nid et les oisillons est aisément manipulable.* »
			Suggestion	DAMS	Tout commentaire faisant des suggestions pour le matériel a utilisé lors de la réalisation de l'activité.	3 : « *Ce serait bien de plastifier le nid et de fournir un crayon effaçable.* »
		Nombre de périodes	Convient	DAPC	Tout commentaire mentionnant que le nombre de périodes prévues pour l'activité convient.	4 : « *Il est important d'y passer plusieurs périodes.* »
			Suggestion	DAPS	Tout commentaire mentionnant que le nombre de périodes prévues pour l'activité ne convient pas.	5 : « *Honnêtement, cela fait beaucoup de temps consacré à la séquence.* »
	Pendant la tâche	Durée	Convient	DPDC	Tout commentaire mentionnant que la durée prévue pour l'activité convient.	11 : « *Le temps alloué à l'activité me semble réaliste si l'activité est effectuée seul ou en équipes de deux ou trois élèves.* »
			Suggestion	DPDS	Tout commentaire faisant des suggestions par rapport à la durée prévue pour la réalisation de l'activité.	7 : « *Le temps, j'ai tout mis oui, mais j'ai beaucoup de difficulté. Il faut l'essayer et ça dépend du groupe que tu as devant toi.* »
		Réaliste	Convient	DPRC	Tout commentaire mentionnant que l'activité est facilement réalisable en classe.	9 : « *Oui parce qu'il y a peu de matériel et pas de déplacement.* »
			Suggestion	DPRS	Tout commentaire faisant des suggestions pour rendre l'activité plus facile à vivre en classe.	10 : « *À mon avis, cela serait possible pour l'enseignant de recevoir une aide en classe ce qui lui permettrait de prendre que la moitié du groupe, je crois que cela serait plus réaliste.* »
		Type de regroupement	Grand groupe	DPTG	Tout commentaire mentionnant que l'activité devrait se vivre en grand groupe.	1 : « *Moi je ferais l'activité, l'animation en grand groupe.* »

			Équipes	DPTE	Tout commentaire mentionnant que l'activité devrait se vivre en équipe.	11 : « *Il me semble souhaitable de faire travailler les élèves en petits groupes de manière à ce qu'ils puissent se nourrir l'un et l'autre, des observations de chacun.* »
			Individuel	DPTI	Tout commentaire mentionnant que l'activité devrait se vivre en individuel.	5 : « *Le travail serait mieux seul.* »
			Variable	DPTV	Tout commentaire mentionnant que l'activité pourrait se vivre selon différentes modalités.	12 : « *Selon la taille du grand groupe (classe régulière ou adaptée).* »

ANNEXE 13

Tableau synthèse des commentaires en lien avec la séquence didactique du dispositif didactique

					Oisillons	Magie	Joyaux Intro	Pyramide	Joyaux Activité	Tomathina Boîtes	Bergères (1 et 2)	Bataille 1	Bergère (3)	Tomathina Mémoire	Stationnement	Bataille 2	Tohubohus 1	Tomathina Super Boîtes	Tohubohus 2	Photogénie 8 secondes	Visages de nombres	Général	TOTAL
Contenu	Variables didactiques	Temps d'exposition		CVT	10	0	1	0	9	11	8	0	8	0	1	0	0	7	0	8	4	2	69
		Nombre d'éléments		CVN	3	0	0	0	0	1	10	0	10	1	4	0	4	0	4	1	0	2	40
		Disposition des éléments		CVD	9	6	0	0	10	11	11	13	6	11	3	11	11	17	6	15	9	0	149
		Mode de représentation		CVM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	12
	Pertinence	Enchaînement des concepts		CPP	6	6	4	3	13	6	4	5	4	2	2	8	9	7	3	9	7	28	126
		Niveau de difficulté de l'activité		CPD	5	16	1	5	1	0	3	5	4	1	1	6	5	5	4	3	3	7	75
		Apprentissage souhaité		CPA	14	17	16	14	11	24	14	10	18	11	15	12	18	8	14	11	9	20	256
		Thème de l'activité		CPT	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	126
Élève	Aspects psychoaffectifs	Anxiété		ÉPA	2	2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	1	10
		Motivation		ÉPM	17	12	17	16	19	15	19	19	16	12	14	9	20	16	12	15	11	12	217
		Attention		ÉPT	2	1	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	6
		Habiletés de coopération		ÉPC	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
	Aspects cognitifs	Représentation mentale		ÉCR	3	0	0	2	2	2	0	0	1	2	0	1	0	1	0	0	0	22	36
		Conduites de l'élève	Référé à quelque chose de connu	ÉCCR	7	2	2	4	0	3	4	2	0	7	1	3	0	2	0	0	0	0	37
			Dénombrer	ÉCCD	8	5	7	9	7	7	4	10	9	3	6	7	1	7	4	5	0	0	99
			Compter les groupes ou par bonds	ÉCCB	0	0	0	0	9	0	9	0	7	0	3	0	8	0	1	5	0	0	42
			Reproduire ou faire un arrangement	ÉCCA	6	9	19	0	1	12	4	11	1	3	6	5	5	8	8	2	2	0	96

			Décomposer	ÉCCDC	4	0	0	0	0	3	1	0	0	1	1	0	3	0	1	4	1	0	19
			Calcul mental	ÉCCT	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	4	4	1	13
			Mémoriser	ÉCCM	4	1	3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
			Confondre	ÉCCC	2	2	0	10	3	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	4	0	25
			Agir trop vite	ÉCCV	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	4
Enseignant	Intervention	Enseignement formel		EITF	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	10
		Enseignement par résolution de problèmes		EITR	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	14
		Partage de stratégies		EITP	16	0	0	0	0	2	0	0	0	1	1	1	3	0	3	6	2	3	38
	Organisation des services			EIS	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	13
0Déroulement de l' activité	Avant la tâche	Consignes	Convient	DACC	11	9	12	11	10	11	10	10	11	8	12	10	10	12	10	11	7	0	176
			Suggestion	DACS	5	13	15	6	6	2	8	4	3	3	0	0	1	1	1	0	1	7	91
		Matériel	Convient	DAMC	13	15	21	13	12	12	15	12	13	8	12	10	10	12	10	16	12	0	148
			Suggestion	DAMS	3	7	6	4	4	1	3	2	1	3	0	0	1	1	1	3	3	0	49
		Nombre de périodes	Convient	DAPC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6
			Suggestion	DAPS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	5
	Pendant la tâche	Durée	Convient	DPDC	3	9	10	12	10	10	10	10	11	9	9	9	10	9	9	7	6	1	154
			Suggestion	DPDS	14	7	4	3	3	3	1	1	2	2	2	2	1	2	1	4	4	6	62
		Réaliste	Convient	DPRC	7	9	15	13	9	9	12	12	10	11	11	12	11	11	10	8	7	5	182
			Suggestion	DPRS	1	2	3	0	1	2	1	3	1	1	3	1	1	1	1	2	0	1	25
		Type de regroupement	Grand groupe	DPTG	3	0	8	2	1	1	5	5	2	3	3	0	3	4	5	5	4	0	54
			Équipes	DPTE	4	2	12	4	7	7	6	6	5	5	1	9	0	4	3	1	5	1	82
			Individuel	DPTI	6	2	1	5	3	3	1	1	1	3	1	0	1	1	3	5	2	0	39
			Variable	DPTV	5	6	0	5	8	8	10	10	6	1	5	3	10	6	0	0	3	2	88