

**Université de Montréal**

**Configurations centrales en toile d'araignée**

par

**Olivier Hénot**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques  
orientation mathématiques appliquées

3 octobre 2018



# SUMMARY

---

This thesis is dedicated to the study of a specific class of solutions for the  $N$ -body problem called central configurations. These configurations, especially in the planar case, are closely related to homographic solutions : at any time, the position of the bodies can be obtained by a rotation and/or a rescaling of the initial position.

Our aim is to prove the existence of spiderweb central configurations given by  $n \times \ell$  masses located at the intersection of  $n$  concentric circles with  $\ell$  concurrent half-lines, under the hypothesis that the  $\ell$  masses on the  $i$ -th circle are equal to a positive constant  $m_i$ ; we also discuss the case where we add a central mass  $m_0$  located at the intersection of the  $\ell$  half-lines. A first analytical method leads to the existence of these central configurations when  $n = 2,3,4$  and  $\ell$  arbitrary for any strictly positive values of  $m_1, \dots, m_n$ . A second analytical method yields the existence and uniqueness of such central configurations when we restrict  $\ell$  to be equal to  $2, \dots, 9$  and  $n$  arbitrary for any strictly positive values of  $m_1, \dots, m_n$ . In addition, we extend the result for  $\ell = 10, \dots, 18$  by requiring  $m_1 \geq \dots \geq m_n$  and bounding the value of  $n$  in each case.

Furthermore, for these two analytical methods, we demonstrate that the results hold for spiderweb configurations with  $N = n \times \ell + 1$  bodies, that is when we add a strictly positive mass at the center of mass.

Finally, we give an algorithm providing a rigorous proof of the existence and local uniqueness of such a central configuration with an arbitrary choice of  $n$ ,  $\ell$  and  $m_1, \dots, m_n$ . The algorithm is applied to all  $n \leq 100$  and all even values  $\ell \leq 200$  when  $m_1 = \dots = m_n = 1/\ell$ . This is enough to show the existence of spiderweb central configurations for all  $n \leq 100$ ,  $\ell \leq 200$  even and such that  $m_1 = \dots = m_n$  for any value strictly positive.

**Keywords:**  $N$ -body problem, central configuration, spiderweb configuration, computer-assisted proof.



# SOMMAIRE

---

Ce mémoire est consacré à une classe remarquable de solutions du problème des  $N$  corps appelées configurations centrales. Ces configurations, notamment pour des corps coplanaires, sont étroitement liées aux solutions homographiques : en tout temps, la position des corps est obtenue par homothétie et/ou rotation de la position initiale.

Notre objectif est d'étudier l'existence de configurations centrales en toile d'araignée données par  $n \times \ell$  masses disposées aux points d'intersection de  $n$  cercles concentriques avec  $\ell$  demi-droite concourante, sous l'hypothèse que les  $\ell$  masses du  $i^e$  cercle sont égales à une constante positive  $m_i$  ; nous discutons également le cas où nous ajoutons une masse centrale  $m_0$  au point de concours des  $\ell$  demi-droites. Une première méthode analytique amène à l'existence de ces configurations centrales lorsque  $n = 2,3,4$  et  $\ell$  arbitraire pour n'importe quelles valeurs strictement positives de  $m_1, \dots, m_n$ . Une seconde méthode analytique donne l'existence et l'unicité de telles configurations centrales lorsqu'on contraint  $\ell$  à être égal à  $2, \dots, 9$  et  $n$  arbitraire pour n'importe quelles valeurs strictement positives de  $m_1, \dots, m_n$ . De plus, nous étendons le résultat pour  $\ell = 10, \dots, 18$  en imposant  $m_1 \geq \dots \geq m_n$  et en bornant la valeur de  $n$  dans chaque cas.

En outre, pour ces deux méthodes analytiques, nous démontrons que les résultats restent vrais pour les configurations à  $N = n \times \ell + 1$  corps, c'est-à-dire lorsqu'on ajoute une masse strictement positive au centre de masse.

Enfin, nous donnons un algorithme permettant de prouver rigoureusement l'existence et l'unicité locale d'une telle configuration centrale avec un choix arbitraire de  $n, \ell$  et  $m_1, \dots, m_n$ . L'algorithme est appliqué à tous les  $n \leq 100$  et toutes les valeurs paires  $\ell \leq 200$  lorsque  $m_1 = \dots = m_n = 1/\ell$ . Ceci est suffisant pour montrer l'existence des configurations centrales en toile d'araignée pour tout  $n \leq 100, \ell \leq 200$  pair et telles que  $m_1 = \dots = m_n$  pour n'importe quelle valeur strictement positive.

**Mots clefs :** problème des  $N$  corps, configuration centrale, configuration en toile d'araignée, preuve assistée par ordinateur.



# TABLE DES MATIÈRES

---

|  |           |
|--|-----------|
| Summary .....  | iii       |
| Sommaire.....  | v         |
| Liste des tableaux.....  | ix        |
| Liste des figures.....   | xi        |
| Liste des sigles et des abréviations .....   | xiii      |
| Remerciements .....  | xv        |
| Introduction .....   | 1         |
| <b>Chapitre 1. Configurations centrales, trajectoires dans le plan et configurations en toile d'araignée .....</b> | <b>5</b>  |
| 1.1. Configurations centrales .....  | 5         |
| 1.2. Configurations dans le plan.....  | 6         |
| 1.3. Configurations en toile d'araignée.....   | 11        |
| <b>Chapitre 2. Existence pour un petit nombre de cercles.....</b>  | <b>13</b> |
| 2.1. Outils et premiers résultats .....  | 13        |
| 2.2. Existence pour un petit nombre de cercles .....   | 18        |
| 2.3. Toile d'araignée avec une masse située au centre de masse.....  | 23        |
| <b>Chapitre 3. Existence pour un nombre arbitraire de cercles .....</b>  | <b>25</b> |
| 3.1. Réécriture du problème.....   | 25        |
| 3.2. Problème restreint.....   | 26        |
| 3.3. Existence pour un nombre arbitraire de cercles.....   | 27        |
| 3.4. Existence pour un nombre majoré de cercles.....   | 31        |

|   |            |
|---|------------|
| 3.5. Toile d'araignée avec une masse située au centre de masse.....                       | 33         |
| <b>Chapitre 4. Preuve assistée par ordinateur.....</b>                                    | <b>35</b>  |
| 4.1. L'approche du polynôme des rayons.....   | 36         |
| 4.2. Application aux configurations en toile d'araignée.....                              | 38         |
| 4.2.1. Calcul des bornes.....   | 38         |
| 4.2.2. Preuves assistées par ordinateur.....  | 40         |
| 4.3. Géométrie des configurations centrales en toile d'araignée.....                      | 42         |
| 4.3.1. Répartition des rayons pour des cercles de masses égales.....                      | 42         |
| 4.3.2. Distribution de masse pour des cercles de masses égales.....                       | 45         |
| 4.3.3. Exemples de configurations centrales pour des cercles de masses<br>distinctes..... | 46         |
| <b>Conclusion.....</b>  | <b>49</b>  |
| <b>Références.....</b>  | <b>51</b>  |
| <b>Annexe A. Code - Approche du polynôme des rayons.....</b>                              | <b>A-i</b> |

# LISTE DES TABLEAUX

---

|      |   |    |
|------|---|----|
| 4. I | Résumé des cas où les configurations centrales en toile d'araignée, pour $m \in \mathbb{R}_{>0}^n$ satisfaisant $m_1 \geq \dots \geq m_n$ , existent ( $\bullet$ ) et sont uniques pour un $\lambda$ fixé ( $\bullet\bullet$ ). | 35 |
|------|---|----|



# LISTE DES FIGURES

---

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 0.1 | Exemple d'une configuration en toile d'araignée (obtenue via la méthode de Newton) pour $n = 4$ cercles et $\ell = 8$ masses unitaires par cercle. ....  | 2  |
| 1.1 | Exemple d'orbites suivies par les corps d'une solution homographique en toile d'araignée pour $n = 2$ cercles et $\ell = 4$ masses unitaires par cercle. ....  | 8  |
| 3.1 | Graphes des fonctions $h_\ell(x)$ sur $[0,1]$ pour $\ell = 5, \dots, 9$ . ....   | 30 |
| 3.2 | Graphes des fonctions $h_\ell(x)$ sur $[0,1]$ pour $\ell = 10, \dots, 18$ . ....   | 32 |
| 4.1 | Exemple de configurations centrales : (a) $\mathfrak{S}(100,2,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ , (b) $\mathfrak{S}(100,6,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ , (c) $\mathfrak{S}(100,100,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ et (d) $\mathfrak{S}(100,200,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ avec $\lambda = -1$ . ....    | 41 |
| 4.2 | Écart entre les cercles consécutifs pour (a) $\mathfrak{S}(100,2,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ , (b) $\mathfrak{S}(100,6,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ , (c) $\mathfrak{S}(100,100,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ et (d) $\mathfrak{S}(100,200,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ avec $\lambda = -1$ . .... | 43 |
| 4.3 | Évolution du rapport entre le rayon du dernier cercle et celui du premier en fonction du nombre $\ell$ de masses par cercle pour $n = 100$ . ....  | 44 |
| 4.4 | Distribution de masse $M(\eta)$ pour (a) $\mathfrak{S}(100,2,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ , (b) $\mathfrak{S}(100,6,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ , (c) $\mathfrak{S}(100,100,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ et (d) $\mathfrak{S}(100,200,\bar{r},(1/\ell, \dots, 1/\ell))$ avec $\lambda = -1$ . ....     | 45 |
| 4.5 | Graphe de la fonction $\kappa(x) = \left  \frac{\sin(21\pi(x-25))}{42 \sin\left(\frac{\pi(x-25)}{2}\right)} + \cos\left(\frac{\pi x}{25}\right) \right $ où $m_i = \kappa(i)$ avec $i = 1, \dots, 50$ (•). ....  | 46 |
| 4.6 | Configurations centrales (a) $\mathfrak{S}(100,200,\tilde{r},(1, \dots, 1/100))$ et (b) $\mathfrak{S}(50,200,\tilde{r},(\kappa(1), \dots, \kappa(50)))$ où (c)-(d) représentent l'écart entre les cercles successifs respectivement et (e)-(f) leur distribution de masses respective. ....                            | 48 |



# LISTE DES SIGLES ET DES ABRÉVIATIONS

---

$\mathfrak{S}(n,\ell,r,m)$  Configuration en toile d'araignée composée de  $n$  cercles de rayons  $r_1, \dots, r_n$  avec  $\ell$  masses égales  $m_1, \dots, m_n$  respectivement par cercle; où  $r = (r_1, \dots, r_n)$  et  $m = (m_1, \dots, m_n)$ .

$\mathcal{R}^n$  Sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  dont les éléments sont les rayons possibles d'une configuration centrale en toile d'araignée. Les composantes d'un élément sont strictement positives et rangées dans l'ordre croissant.



# REMERCIEMENTS

---

*En prélude de ce mémoire, je veux, par-delà l'usage, remercier sincèrement les deux personnes qui m'ont soutenu tout au long de ce parcours d'études.*

*Monsieur Jean-Philippe Lessard, je vous exprime ma franche gratitude pour vos conseils avisés et vos précieux commentaires. Fondées sur vos travaux, les preuves assistées par ordinateur supplémentent et enrichissent profondément les résultats présentés dans ce mémoire.*

*Madame Christiane Rousseau, je vous témoigne toute ma reconnaissance. Votre engagement permanent et nos nombreuses discussions ont sensiblement contribué à la qualité de mes études. Votre accompagnement exigeant a constitué un apport précieux dans l'accomplissement de mon travail.*

*Vos infailibles soutiens m'ouvrent des perspectives insoupçonnées et expriment à mon égard une marque de confiance pour de belles espérances d'avenir.*



# INTRODUCTION

---

EN mécanique newtonienne, et plus particulièrement en mécanique céleste, le *problème des  $N$  corps* consiste à prédire les positions  $\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)$  de  $N$  masses  $m_1, \dots, m_N$  soumises à la seule loi de la gravitation.

En invoquant la seconde loi de Newton, les équations du mouvement forment un système d'équations non-linéaires couplées, à savoir

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N, \quad (0.0.1)$$

pour lequel aucune solution analytique ne peut être obtenue dans le cas général. La quantité  $G$  correspond à la constante gravitationnelle d'unité  $m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$ .

Dans ce contexte, il est naturel d'étudier une classe de solutions remarquables appelées *configurations centrales*. Ces configurations surviennent lorsque l'accélération de chaque point matériel est proportionnelle à la position avec une constante de proportionnalité identique pour toutes les masses et en chaque temps  $t$ . Formellement, cela signifie que  $\ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \lambda(t) \mathbf{r}_i(t)$  pour  $i = 1, \dots, N$ .

En 1687, Isaac Newton découvrit la solution du problème des deux corps. On remarque aisément qu'en prenant le centre de masse à l'origine, c'est-à-dire  $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$ , on obtient  $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = m_i \lambda \mathbf{r}_i$  avec  $\lambda = -(m_1 + m_2)/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3$  pour  $i = 1, 2$ . Ainsi, toutes les solutions du problème des deux corps sont des configurations centrales. De plus, la solution de ces équations différentielles montre que chaque corps suit une trajectoire elliptique, parabolique ou hyperbolique par rapport au centre de masse en fonction de la vitesse initiale ; il s'agit des fameux *mouvements képlériens*.

Dans la seconde moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle, les configurations centrales du problème des trois corps ont été trouvées grâce aux travaux d'Euler (1767) et de Lagrange (1772). Elles prennent la forme soit d'un arrangement colinéaire spécifique des corps, soit d'un triangle équilatéral.

Plus de deux-cents ans plus tard, alors que l'homme part à la conquête spatiale, de nombreuses applications pour ces solutions surviennent. En effet, les configurations centrales dans le plan ont la particularité, sous condition de bonnes vitesses initiales, de préserver la géométrie de la disposition des corps à tout moment de leur trajectoire.

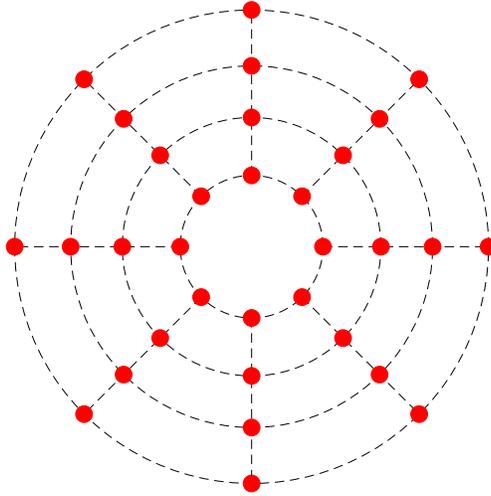


FIGURE 0.1. Exemple d'une configuration en toile d'araignée (obtenue via la méthode de Newton) pour  $n = 4$  cercles et  $\ell = 8$  masses unitaires par cercle.

Si on considère deux astres, on dénombre cinq positions, à un instant donné, pour un troisième corps telles que la configuration des trois corps soit centrale. Ces positions sont appelées *points de Lagrange*, ou encore *points de libration*, et fréquemment dénotées par les sigles  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5$ . Par convention, les trois premiers représentent les positions colinéaires, et les deux derniers les positions donnant un triangle équilatéral. En fonction de la masse du troisième corps, les emplacements colinéaires varient. Dans le cas propre où la troisième masse est négligeable (l'équation (0.0.1) est parfaitement bien définie dans la limite  $m_i = 0$ ), on parle alors du *problème restreint* des trois corps.

Ainsi, un satellite situé en un point de Lagrange, avec la bonne vitesse initiale, décrit un mouvement périodique elliptique autour du centre de masse, dont la période est égale à celle des deux astres. Le télescope James Webb, qui devrait être mis en service vers 2021, en est un bel exemple. Pour être suffisamment loin du Soleil et de ses radiations dans l'infrarouge, et pour que la Terre n'obstrue jamais son champ de vision, le satellite sera placé autour du point  $L_2$  du système Terre-Soleil, sur une orbite perpendiculaire au plan du système solaire.

D'autres idées ambitieuses pour le futur se profilent. Par exemple, le point  $L_1$  du système Terre-Lune se situe entre la Terre et la Lune. C'est alors un endroit propice pour y placer une « station-service » dans le but de motiver de plus lointain voyages spatiaux ; voire même un « centre de recyclage », pour régler le problème de la pollution spatiale engendrée par les nombreux débris spatiaux.

L'intérêt de ces configurations n'est pas que postérieur aux études théoriques. Quoi qu'on loue l'attrait simplement mathématique du problème, il n'est pas le seul motif pour leur recherche. En 1859, Maxwell a modélisé les anneaux de Saturne en représentant le problème

comme une collection de  $N$  points matériels placés sur un seul cercle avec une masse située au centre, le tout donnant lieu à une configuration centrale [4].

Par ailleurs, en choisissant des vitesses initiales nulles, les  $N$  points matériels ont une orbite homothétique et rentrent en collision simultanément, il s'agit d'une *collision totale*. Pour d'autres types d'orbites, si celles-ci résultent en une collision totale alors la configuration des corps tend vers celle d'une configuration centrale.

Récemment, dans le but de revoir l'approximation de la masse d'une galaxie, Saari a proposé une configuration centrale à  $N = n \times \ell$  corps en forme de toile d'araignée en prenant  $n$  cercles concentriques et en disposant à intervalles réguliers  $\ell$  masses égales  $m_1, \dots, m_n$  respectivement sur chaque cercle (cf. figure 0.1).

Dans un premier article, Saari donne uniquement la preuve de leur existence pour deux cercles [8]. Son second article ne présente pas non plus une preuve complète car il semble s'appuyer, sans en vérifier les hypothèses, sur le *théorème des fonctions implicites* [9].

Indépendamment, Moulton a présenté une preuve complète de l'existence d'une configuration centrale pour  $N$  masses quelconques disposées, dans n'importe quel ordre, sur une droite [6]; le cas  $\ell = 2$  de la configuration de Saari est alors un corollaire. Les auteurs Corbera, Delgado et Llibre fournissent une preuve de l'existence de configurations centrales en toile d'araignée pour  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et au moins des masses  $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$  positives [1]. Dans les deux cas, les preuves reposent sur le constat que si une configuration centrale en toile d'araignée existe pour  $n - 1$  cercles, alors il en est de même pour  $n$  cercles où la masse du dernier cercle est nulle. De là, l'objectif est de vérifier les hypothèses du *théorème des fonctions implicites* pour assurer l'existence de rayons  $r_1, \dots, r_n$  tel que  $f_i = \lambda r_i - \frac{F_i}{m_i} = 0$  pour  $i = 1, \dots, n$  lorsque nous augmentons continûment  $m_n$  jusqu'à n'importe quelle valeur positive.

En dépit du caractère local du *théorème des fonctions implicites*, Moulton a démontré, dans son raisonnement par récurrence, que la fonction donnant les zéros de  $f$  est définie pour tout  $m_n \geq 0$ . Les auteurs Corbera, Delgado et Llibre n'ont pu obtenir que la version locale du théorème.

L'objectif de ce mémoire est de tenter de compléter la preuve de Saari et d'explorer la géométrie des configurations centrales en toile d'araignée.

Le premier chapitre ouvre sur la présentation et les résultats fondamentaux des configurations centrales dans leur généralité. Dans le cas de  $N$  corps coplanaires, nous soulignons le lien entre les configurations centrales et les solutions homographiques, c'est-à-dire les solutions pour lesquelles la position des corps peut être obtenue par homothétie et/ou rotation de la position initiale, faisant valoir qu'une configuration centrale est unique à homothétie près. Nous terminons ces propos liminaires par l'introduction des configurations en toile d'araignée qui est le sujet central du mémoire.

Le deuxième chapitre reprend l'idée de Saari et donne une preuve de l'existence des configurations centrales en toile d'araignée pour certaines valeurs de  $n$ , à savoir  $n = 2, 3, 4$  cercles, et un nombre arbitraire  $\ell$  de masses strictement positives par cercle.

Au troisième chapitre, nous commençons par montrer que le problème restreint des  $N$  corps admet comme solution une configuration centrale en toile d'araignée, si la configuration composée seulement des cercles de masses strictement positives est centrale. Ce résultat permet non seulement d'agrandir, tout en préservant l'unicité si il y a lieu, les configurations centrales déjà existante en leur ajoutant des cercles de masse nulle, mais également de donner un point de départ pour l'application du *théorème des fonctions implicites*.

Grâce au formalisme utilisé, nous offrons une preuve plus simple que celle donnée par Corbera *et al.*. Puis, la généralisation du raisonnement de Moulton nous permet d'obtenir l'existence et l'unicité des configurations centrales en toile d'araignée pour des valeurs  $\ell = 2, \dots, 9$  de masses par cercle. Également, l'existence et l'unicité sont montrées pour  $\ell = 10, \dots, 18$  en imposant  $m_1 \geq \dots \geq m_n$  et en limitant le nombre maximal de cercles possibles dans chaque cas.

De surcroît, à la fin des chapitres 2 et 3, nous démontrons que leurs résultats respectifs sur l'existence des configurations centrales en toile d'araignée restent vrais lorsqu'une masse  $m_0$  strictement positive est ajoutée au centre de masse.

Finalement, le quatrième chapitre est dédié à l'élaboration de preuves assistées par ordinateur. Nous offrons un code permettant de démontrer l'existence des configurations centrales en toile d'araignée pour *a priori* n'importe quel choix de  $n$ ,  $\ell$  et de masses  $m_1, \dots, m_n$ . En particulier, nous exécutons l'algorithme pour  $n \leq n_0 = 100$ ,  $\ell \leq \ell_0 = 200$  pair et  $m_1 = \dots = m_n = 1/\ell$ , ce qui représentera 9201 cas supplémentaires. Or, ceci est suffisant pour obtenir l'existence des configurations centrales en toile d'araignée pour tout  $n \leq n_0 = 100$ ,  $\ell \leq \ell_0 = 200$  pair et telles que  $m_1 = \dots = m_n$  pour n'importe quelle valeur strictement positive. Ces multiples expérimentations numériques nous permettent de voir se dessiner des caractéristiques générales pour ces configurations. Le mémoire se clôt sur une discussion de celles-ci.

# Chapitre 1

---

## CONFIGURATIONS CENTRALES, TRAJECTOIRES DANS LE PLAN ET CONFIGURATIONS EN TOILE D'ARAIGNÉE

POUR permettre au lecteur de se familiariser avec les configurations centrales, nous présentons quelques unes de leurs propriétés. Dans l'optique de garder le mémoire clair et auto-suffisant, nous donnons également des preuves pour chacune d'entre elles. Au terme de ces notions, nous introduisons les configurations centrales en toile d'araignée.

### 1.1. CONFIGURATIONS CENTRALES

Le centre de masse  $\mathbf{R}$  de  $N$  points matériels est déterminé par une pondération de la position des corps avec leur masse,

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

En guise de rappel, le référentiel du centre de masse est inertiel puisque

$$\left( \sum_{i=1}^N m_i \right) \ddot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = 0.$$

Les lois de Newton sont alors applicables et, dans l'ensemble du mémoire, nous prenons le centre de masse comme origine.

Dans ce contexte, les configurations centrales peuvent être vues de différentes manières. Nous préférons davantage la définition physique du phénomène.

**Définition 1.1.1.** *La configuration de  $N$  corps à un temps  $t^*$  est dite centrale si, à ce temps  $t^*$ , l'accélération de chacun des corps est proportionnelle à la position, et ce pour une même constante de proportionnalité notée  $\lambda$ ; c'est-à-dire  $\ddot{\mathbf{r}}_i(t^*) = \lambda \mathbf{r}_i(t^*)$  pour  $i = 1, \dots, N$ .*

Une première propriété sur le signe de la constante de proportionnalité d'une configuration centrale découle de la seconde loi de Newton.

**Propriété 1.** *La constante de proportionnalité d'une configuration centrale est strictement négative.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\lambda$  la constante de proportionnalité associée à une configuration centrale de  $N$  points matériels. D'après les équations du mouvement (0.0.1), nous avons que  $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}(t^*)) = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t^*) = m_i \lambda \mathbf{r}_i(t^*)$  pour  $i = 1, \dots, N$  et un temps fixe  $t^*$ .

En prenant le produit scalaire de  $\mathbf{r}_i$  avec la relation précédente et en sommant sur  $i$ , on obtient

$$\lambda \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}_i.$$

Or, puisque  $m_i m_j$  et  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  sont symétriques sous échange d'indice, on a

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}_i = - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = U.$$

Ainsi, en notant  $I = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i$ , on obtient  $\lambda = U/I < 0$ .  $\square$

**Remarque 1.1.1.** *Dans la preuve précédente, les quantités  $U$  et  $I$  correspondent respectivement à l'énergie potentielle et à la notion de moment d'inertie en physique.*

Cette propriété donne lieu à une nouvelle caractérisation des configurations centrales, équivalente à la première définition. Nous la donnons ici uniquement à titre informatif et pour satisfaire la curiosité du lecteur.

**Proposition 1.1.1.** *La configuration de  $N$  corps à un temps  $t^*$  est centrale si et seulement si leur position  $(\mathbf{r}_1(t^*), \dots, \mathbf{r}_N(t^*))$  est un point critique de  $IU^2/2$ .*

DÉMONSTRATION. En se servant de la relation  $-\nabla U(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ , on a

$$\nabla \left( \frac{IU^2}{2} \right) = IU \left( \lambda \frac{\nabla I}{2} - \mathbf{F} \right),$$

où  $\lambda = U/I$  et  $\lambda \frac{\nabla I}{2} - \mathbf{F}$  correspond à la caractérisation d'une configuration centrale selon la définition 1.1.1 et la propriété 1.  $\square$

## 1.2. CONFIGURATIONS DANS LE PLAN

Nous nous intéressons tout particulièrement aux configurations centrales dans le plan. Dans ce qui suit, nous supposons que les positions  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  des  $N$  points matériels sont coplanaires et nous les représentons par les nombres complexes  $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_N$ .

Jusqu'à présent, nous avons considéré les  $N$  corps à un temps  $t$  fixe. Or, ceux-ci sont bel et bien en mouvement dans l'espace. Nous nous intéressons alors aux solutions de l'équation

du mouvement (0.0.1) satisfaisant en tout temps notre définition 1.1.1 d'une configuration centrale. Ces solutions sont dites *homographiques*.

**Définition 1.2.1.** *Une solution du problème des  $N$  corps est dite homographique si la configuration des points matériels à n'importe quel temps  $t$  peut être obtenu par une homothétie et/ou rotation de la configuration initiale. En d'autres termes, si  $\hat{r}_i(t) = z(t)\hat{r}_i(0)$ , avec  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , pour tout  $i = 1, \dots, N$ .*

Cette classe de solutions est directement liée à la notion de configuration centrale, nous mettons en évidence cette relation dans la propriété suivante.

**Propriété 2.** *Soit  $\hat{r}_1(0), \dots, \hat{r}_N(0)$  les positions de  $N$  points matériels formant une configuration centrale pour  $t = 0$ .*

*Dans un même plan, si  $\dot{\hat{r}}_i(0) = \dot{z}(0)\hat{r}_i(0)$ , où  $\dot{z}(0) \in \mathbb{C}$  pour  $i = 1, \dots, N$ , alors les trajectoires sont une solution homographique du problème des  $N$  corps et la configuration des corps est centrale tout au long du mouvement.*

**DÉMONSTRATION.** Tout d'abord, puisque la position et la vitesse initiale des points matériels sont dans le plan, l'accélération l'est aussi. Donc les points matériels restent dans le même plan en tout temps.

Nous pouvons décrire n'importe quelle trajectoire d'un point matériel dans le plan par une fonction  $z_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de sorte que  $\hat{r}_i(t) = z_i(t)\hat{r}_i(0)$ , où  $z_i(0) = 1$ , pour  $i = 1, \dots, N$ .

Par les équations du mouvement (0.0.1), on obtient

$$\ddot{\hat{r}}_i(t) = \ddot{z}_i(t)\hat{r}_i(0) = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_j(\hat{r}_i(t) - \hat{r}_j(t))}{|\hat{r}_i(t) - \hat{r}_j(t)|^3} = - \frac{z_i(t)}{|z_i(t)|^3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_j(\hat{r}_i(0) - \hat{r}_j(0))}{|\hat{r}_i(0) - \hat{r}_j(0)|^3}.$$

Or, puisque  $\hat{r}_1(0), \dots, \hat{r}_N(0)$  forment une configuration centrale, on a que

$$- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_j(\hat{r}_i(0) - \hat{r}_j(0))}{|\hat{r}_i(0) - \hat{r}_j(0)|^3} = \lambda_0 \hat{r}_i(0).$$

Ainsi, nous obtenons l'équation de Képler

$$\ddot{z}_i(t) = \frac{z_i(t)}{|z_i(t)|^3} \lambda_0.$$

Or,  $z_i(0) = 1$  et  $\dot{z}_i(0) = \dot{z}(0)$  pour  $i = 1, \dots, N$ . Donc,  $z_1(t) = \dots = z_N(t) = z(t)$  et on a bien  $\hat{r}_i(t) = z(t)\hat{r}_i(0)$ .

Enfin,

$$\ddot{\hat{r}}_i(t) = \ddot{z}(t)\hat{r}_i(0) = \frac{\ddot{z}(t)}{z(t)} \hat{r}_i(t)\hat{r}_i(t),$$

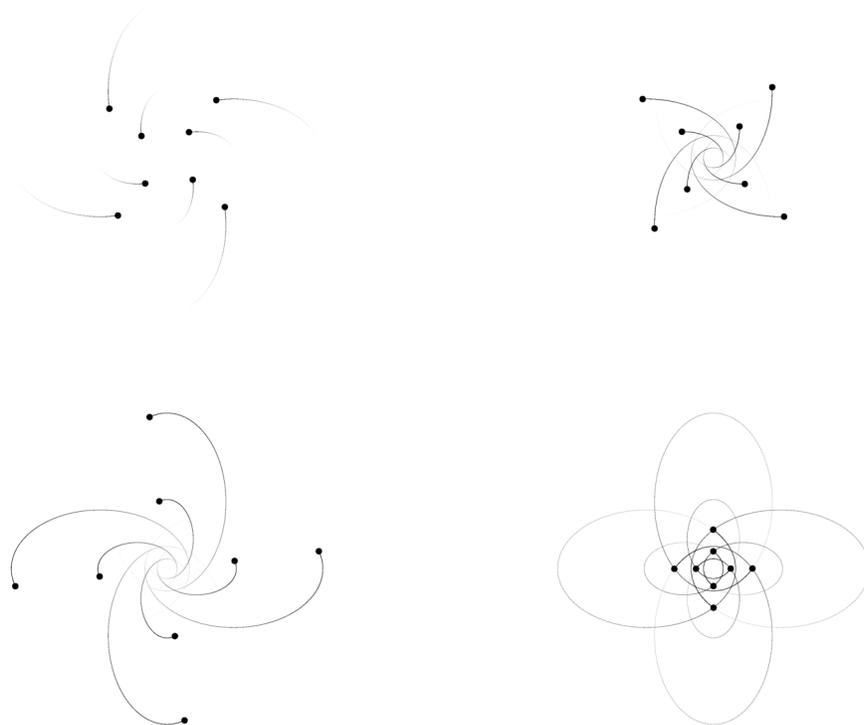


FIGURE 1.1. Exemple d'orbites suivies par les corps d'une solution homographique en toile d'araignée pour  $n = 2$  cercles et  $\ell = 4$  masses unitaires par cercle.

c'est-à-dire que la constante de proportionnalité associée à la configuration centrale en chaque temps  $t$  vaut  $\lambda(t) = \frac{\ddot{z}(t)}{z(t)}$ .  $\square$

**Remarque 1.2.1.** *Afférent, une configuration centrale est unique à homothétie et/ou rotation près. De plus, en combinant  $\lambda(t) = \ddot{z}(t)/z(t)$  et  $\ddot{z}(t) = z(t)\lambda_0/|z(t)|^3$ , on obtient que  $\lambda(t) = \lambda_0/|z(t)|^3$ ; en d'autres termes, la valeur de  $\lambda(t)$  ne varie que sous l'action de l'homothétie, ce qui est tout à fait cohérent puisque la force gravitationnelle est invariante sous rotation.*

Les configurations centrales jouent alors un rôle primordial dans le problème des  $N$  corps car elles sont à la fois génératrices de toute une classe de solutions et en sont une caractéristique intrinsèque.

Quand bien même il existe une infinité de solutions homographiques, la dynamique imposée par la deuxième loi de Newton contraint les corps à des mouvements bien spécifiques. Pour une première intuition, regardons le cas de l'équilibre relatif, c'est-à-dire celui où les corps sont en mouvement circulaire.

**Propriété 3.** Soit une solution homographique du problème des  $N$  corps. Les points matériels se déplacent sur des orbites circulaires de vitesse de rotation  $\omega$  si et seulement si  $\lambda = -\omega^2$  en tout temps.

DÉMONSTRATION. On a vu à la preuve précédente que pour une solution homographique

$$\lambda(t) = \frac{\ddot{z}(t)}{z(t)}, \quad \forall t,$$

et la fonction  $z(t) = e^{\pm i\omega t}$  est la solution de  $\ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t)$ .  $\square$

**Remarque 1.2.2.** Cette troisième propriété fait le lien avec un concept élémentaire de mécanique classique, à savoir le corps rigide.

Le champ des trajectoires permises est évidemment plus vaste que les orbites circulaires. Les équations du mouvement (0.0.1) révèlent que les autres trajectoires sont les orbites de Kepler (cf. figure 1.1).

**Propriété 4.** Soit le problème des  $N$  corps dans le plan. Les points matériels se déplacent sur les orbites de Kepler si et seulement si ils forment une solution homographique.

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà obtenu dans la preuve de la propriété 2 que

$$\ddot{z}(t) = \frac{z(t)}{|z(t)|^3} \lambda_0$$

dont les solutions donnent les mouvements képlériens.

En coordonnées polaires, on a  $z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$  et le membre de gauche donne

$$\ddot{z}(t) = \left[ \ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t) + i(2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)) \right] e^{i\theta(t)}.$$

Dès lors,

$$\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t) + i(2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)) = \frac{\lambda_0}{\rho^2(t)}.$$

Nous obtenons alors que

$$\begin{cases} \ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t) = \frac{\lambda_0}{\rho^2(t)}, \\ 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t) = 0. \end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par  $\rho(t)$  on obtient

$$\frac{d}{dt} (\rho^2(t)\dot{\theta}(t)) = 0 \quad \implies \quad \rho^2(t)\dot{\theta}(t) = C \equiv \text{constante}.$$

Alors, on peut écrire  $\dot{\theta}(t) = C/\rho^2(t)$  et la première équation du système précédent devient

$$\ddot{\rho}(t) - \frac{C^2}{\rho^3(t)} = \frac{\lambda_0}{\rho^2(t)}.$$

Écrivons l'opérateur différentiel  $d/dt$  en fonction de  $d/d\theta$ ,

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left( \dot{\theta}(t) \frac{d}{d\theta} \right) \left( \dot{\theta}(t) \frac{d}{d\theta} \right) = \left( \frac{C}{\rho^2(\theta)} \frac{d}{d\theta} \right) \left( \frac{C}{\rho^2(\theta)} \frac{d}{d\theta} \right).$$

Ainsi, en fonction de  $\theta$ ,

$$\ddot{\rho}(t) = \left( \frac{C}{\rho^2(\theta)} \frac{d}{d\theta} \right) \left( \frac{C}{\rho^2(\theta)} \frac{d\rho(\theta)}{d\theta} \right).$$

En substituant  $\rho = 1/u$ , on a que

$$u^2(\theta) \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{u(\theta)} \right) = -u'(\theta) \implies \ddot{\rho}(t) = -C^2 u^2(\theta) u''(\theta).$$

Par conséquent,

$$-C^2 u^2(\theta) u''(\theta) - C^2 u^3(\theta) = \lambda_0 u^2(\theta) \iff u''(\theta) + u(\theta) = -\frac{\lambda_0}{C^2}.$$

La solution générale de l'équation différentielle est  $u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta - \frac{\lambda_0}{C^2}$ . Bien entendu, on peut imposer que si  $\theta = \pi/2$ , alors  $u = -\lambda_0/C^2$ . De cette façon, on a  $u(\theta) = A \cos \theta - \frac{\lambda_0}{C^2}$ .

*In fine*, on trouve bien les orbites de Kepler

$$\rho(\theta) = \frac{-C^2/\lambda_0}{1 - \frac{AC^2}{\lambda_0} \cos \theta}.$$

Qui plus est, la loi des aires de Képler est également vérifiée puisqu'il s'agit d'une conséquence de  $\frac{d}{dt} (\rho^2(t) \dot{\theta}(t)) = 0$ . □

**Remarque 1.2.3.** *Nous avons obtenu que  $\rho^2(t) \dot{\theta}(t)$  est constant dans la preuve ci-dessus. En fait,  $m_i \rho^2(t) \dot{\theta}(t)$  représente le moment cinétique du  $i^e$  point matériel, c'est alors un résultat auquel nous pouvions nous attendre car la force est centripète dans une configuration centrale<sup>1</sup>.*

En somme, les *configurations centrales* sont une notion *a priori* de l'instant. Cependant, la dynamique des équations du mouvement (0.0.1) induit une correspondance entre cette caractéristique spontanée de l'arrangement des corps et une classe entière de solutions dites *homographiques* du problème des  $N$  corps. En outre, les mouvements des points matériels ne peuvent que correspondre à ceux bien connus des orbites de Kepler<sup>2</sup>.

---

1. Le moment cinétique  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  a pour dérivée  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .

2. Cf. [3] pour une animation.

### 1.3. CONFIGURATIONS EN TOILE D'ARAIGNÉE

Nous nous penchons sur les configurations formées par  $n \times \ell$  masses positives positionnées aux points d'intersection de  $n$  cercles concentriques avec  $\ell$  demi-droites  $[OM_k)$  d'angles  $\widehat{M_0OM_k} = 2\pi k/\ell$  pour  $k = 0, \dots, \ell - 1$ ; les masses appartenant à un même cercle sont égales mais peuvent être distinctes d'un cercle à l'autre. Ces configurations, dites *en toile d'araignée*, respectent les deux propriétés suivantes :

1. il est suffisant de résoudre le problème pour  $n$  points matériels sur l'axe des abscisses positifs puisque tous les corps d'un même cercle perçoivent la même attraction gravitationnelle.
2. la force gravitationnelle ressentie par un corps est radiale. En effet, la symétrie de la configuration implique que, pour une masse sur  $[OM_k)$ , la contribution non radiale de l'attraction gravitationnelle due aux corps situés de chaque côté de  $(OM_k)$  se compense.

En réarrangeant les termes et en utilisant 1., 2. dans l'équation du mouvement (0.0.1), nous obtenons

$$\ddot{r}_i = \frac{F_i(r)}{m_i} = - \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{m_i}{2^{3/2} r_i^2 (1 - \cos \theta_k)^{1/2}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{m_j (r_i - r_j \cos \theta_k)}{(r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta_k)^{3/2}}, \quad (1.3.1)$$

pour  $i = 1, \dots, n$ , avec  $\theta_k = \frac{2\pi k}{\ell}$  et où  $r = (r_1, \dots, r_n)$  représentent le rayon du  $i^e$  cercle.

**Remarque 1.3.1.** Dans l'équation (1.3.1), nous avons normalisé, par un changement d'unité, la constante gravitationnelle  $G$  de sorte que  $G = 1$ .

Nous introduisons la notation  $\mathfrak{S}(n, \ell, r, m)$  pour désigner une configuration en toile d'araignée composée de  $n$  cercles, de rayons  $r_1, \dots, r_n$ , avec  $\ell$  masses non négatives  $m_1, \dots, m_n$  respectivement par cercle. On définit également l'ensemble

$$\mathcal{R}^n = \{r \in \mathbb{R}_{>0}^n : r_1 < \dots < r_n\} .$$



# Chapitre 2

---

## EXISTENCE POUR UN PETIT NOMBRE DE CERCLES

LA méthode développée dans ce deuxième chapitre est inspirée de la preuve proposée par Saari [9].

Considérons une configuration en toile d'araignée composée de  $n$  cercles. Pour chacun des  $n$  cercles, on attribue la quantité  $\lambda_i = \frac{F_i}{m_i r_i}$ . Dès lors, on cherche un arrangement des rayons  $r_1, \dots, r_n$  afin d'obtenir l'égalité  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ . L'idée consiste de fait à étudier les variations des  $\lambda_i$  afin de montrer qu'ils concourent en un point commun.

### 2.1. OUTILS ET PREMIERS RÉSULTATS

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et  $\mathfrak{S}(n, \ell, r, m)$  pour un  $r \in \mathcal{R}^n$  et  $m \in \mathbb{R}_{>0}^n$ . D'après l'équation (1.3.1), la contribution de la force gravitationnelle sur la masse située en  $(r_i, 0)$  due au  $j^e$  cercle est donnée par

$$\frac{F_{ij}(r_i, r_j)}{m_i} = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{m_i}{2^{3/2} r_i^2 (1 - \cos \theta_k)^{1/2}}, & j = i, \\ -\sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{m_j (r_i - r_j \cos \theta_k)}{(r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta_k)^{3/2}}, & j \neq i, \end{cases}$$

de sorte que  $F_i(r) = \sum_{j=1}^n F_{ij}(r_i, r_j)$ .

Posons

$$\zeta_\ell = \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{1}{(1 - \cos \theta_k)^{1/2}}. \quad (2.1.1)$$

En termes des variables

$$\begin{cases} x_j = r_i / r_j, & \text{si } j > i, \\ y_j = r_j / r_i, & \text{si } j < i, \end{cases}$$

$F_{ij}(r_i, r_j) / m_i$  s'écrit

$$\frac{F_{ij}}{m_i} = \begin{cases} -\frac{m_i}{2^{3/2}r_i^2}\zeta_\ell, & j = i, \\ -\frac{m_j}{r_i^2} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1 - y_j \cos \theta_k}{(1 + y_j^2 - 2y_j \cos \theta_k)^{3/2}}, & j < i, \\ -\frac{m_j x_j^2}{r_i^2} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{x_j - \cos \theta_k}{(1 + x_j^2 - 2x_j \cos \theta_k)^{3/2}}, & j > i. \end{cases}$$

Introduisons

$$\phi_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{d_k^\nu(x)}, \quad d_k(x) = (1 + x^2 - 2x \cos \theta_k)^{1/2}.$$

Nous avons que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{x_j - \cos \theta_k}{(1 + x_j^2 - 2x_j \cos \theta_k)^{3/2}} &= -\phi_1'(x_j), \\ \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1 - y_j \cos \theta_k}{(1 + y_j^2 - 2y_j \cos \theta_k)^{3/2}} &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(1 + y_j^2 - 2y_j \cos \theta_k) - y_j^2 + y_j \cos \theta_k}{(1 + y_j^2 - 2y_j \cos \theta_k)^{3/2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{(1 + y_j^2 - 2y_j \cos \theta_k)^{1/2}} + y_j \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{\cos \theta_k - y_j}{(1 + y_j^2 - 2y_j \cos \theta_k)^{3/2}} \\ &= \phi_1(y_j) + y_j \phi_1'(y_j), \end{aligned}$$

et nous obtenons l'expression

$$\frac{F_{ij}}{m_i} = \begin{cases} -\frac{m_i}{2^{3/2}r_i^2}\zeta_\ell, & j = i, \\ -\frac{m_j}{r_i^2} (\phi_1(y_j) + y_j \phi_1'(y_j)), & j < i, \\ \frac{m_j x_j^2}{r_i^2} \phi_1'(x_j), & j > i. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Nous invoquons un lemme prouvé dans l'article de Moeckel et Simó qui nous permet de manipuler les sommes sur les angles [5].

**Lemme 2.1.1** (Moeckel and Simó, 1995). *Soit  $\phi_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\ell-1} 1/d_k^\nu(x)$  avec  $d_k(x) = (1 + x^2 - 2x \cos \theta_k)^{1/2}$  et  $\nu > 0$ . Alors, pour  $-1 < x < 1$ ,  $\phi_\nu(x)$  est analytique et tous les coefficients de son développement en série sont positifs. En particulier, pour  $0 < x < 1$ ,  $\phi_1(x)$  est analytique et toutes ses dérivées sont positives.*

Le lemme suivant résume les informations nécessaires sur les variations des quantités

$$\lambda_i = \frac{F_i}{m_i r_i}.$$

**Lemme 2.1.2.** *Soient  $F_{ij}$  défini par (2.1.2) et*

$$\lambda_{ij} = \frac{F_{ij}}{m_i r_i},$$

tel que  $\lambda_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Nous avons les quatre propriétés suivantes :

1.

$$F_{ij} \begin{cases} > 0, & i < j, \\ < 0, & i \geq j. \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda_{ij} \begin{cases} > 0, & i < j, \\ < 0, & i \geq j. \end{cases}$$

2.  $\partial_{r_j} \lambda_i < 0$  pour tout  $i \neq j$ .

3.  $\partial_{r_i} \lambda_i > 0$  pour tout  $i$ .

4.  $0 > \partial_{r_k} \lambda_{ik} > \partial_{r_k} \lambda_{jk}$  pour tout  $i < j < k$ .

5.  $\partial_{r_k} \lambda_{jk} < \partial_{r_k} \lambda_{ik} < 0$  pour tout  $k < j < i$ .

DÉMONSTRATION. 1. Selon l'équation (2.1.2), les inégalités sont une conséquence immédiate du lemme 2.1.1.

2. Nous avons

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} -\frac{m_j}{r_i^3} (\phi_1(y_j) + y\phi_1'(y_j)), & j < i, \\ \frac{m_j}{r_i^3} x_j^2 \phi_1'(x_j), & j > i, \end{cases}$$

et par la dérivée en chaîne

$$\partial_{r_j} \lambda_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial y_j}{\partial r_j} \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial y_j} = \frac{1}{r_i} \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial y_j} < 0, & j < i, \\ \frac{\partial x_j}{\partial r_j} \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{r_i}{r_j^2} \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_j} < 0, & j > i, \end{cases}$$

par le lemme 2.1.1.

3. Lorsque  $i = j$ , nous avons  $\lambda_{ii} = -\frac{m_i}{2^{3/2} r_i^3} \zeta_\ell$  qui est croissante en  $r_i$ .

Lorsque  $j < i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial r_i} &= m_j \left( \frac{3}{r_i^4} (\phi_1(y_j) + y\phi_1'(y_j)) - \frac{1}{r_i^3} \frac{\partial y_j}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial y_j} (\phi_1(y_j) + y\phi_1'(y_j)) \right) \\ &= m_j \left( \frac{3}{r_i^4} (\phi_1(y_j) + y\phi_1'(y_j)) + \frac{r_j}{r_i^5} \frac{\partial}{\partial y_j} (\phi_1(y_j) + y\phi_1'(y_j)) \right) \end{aligned}$$

qui est strictement positif car  $\phi_1(y_j) + y\phi_1'(y_j) > 0$  et  $\frac{\partial}{\partial y_j} (\phi_1(y_j) + y\phi_1'(y_j)) > 0$  selon le lemme 2.1.1.

Lorsque  $j > i$ , nous avons  $\lambda_{ij} = \frac{m_j}{r_i^3} x_j^2 \phi_1'(x_j) = \frac{m_j}{r_j^3} \frac{\phi_1'(x_j)}{x_j}$  et en dérivant selon  $r_i$  on obtient

$$\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial r_i} = \frac{m_j}{r_j^3} \frac{\partial x_j}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\phi'_1(x_j)}{x_j} \right) = \frac{m_j}{r_j^4} \frac{x_j \phi''_1(x_j) - \phi'_1(x_j)}{x_j^2}.$$

Par le lemme 2.1.1,  $\phi_1(x)$  est analytique sur  $(0,1)$  alors  $\phi_1(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  avec  $a_n \geq 0$ .

Or,  $\sum_{k=0}^{\ell-1} e^{i\theta_k} = (1 - e^{i2\pi}) / (1 - e^{i\theta_1}) = 0$ , donc  $\phi'_1(0) = \sum_{k=0}^{\ell-1} \cos \theta_k = 0$  et  $a_1 = 0$ .

Donc, pour  $0 < x < 1$ ,

$$x \phi''_1(x) - \phi'_1(x) = \sum_{n \geq 2} a_n n(n-1) x^{n-1} - \sum_{n \geq 1} a_n n x^{n-1} = \sum_{n \geq 2} a_n n(n-2) x^{n-1} > 0,$$

d'où on déduit que  $\partial_{r_i} \lambda_{ij} > 0$ .

4. Soient  $k > j > i$  et  $x_s = r_s / r_k$  pour  $s = i, j$ . Comme vu au point 2, nous avons  $\lambda_{sk} = \frac{m_k}{r_s^3} x_s^2 \phi'_1(x_s)$  et la dérivée selon  $r_k$  vaut

$$\frac{\partial \lambda_{sk}}{\partial r_k} = \frac{m_k}{r_s^3} \frac{\partial x_s}{\partial r_k} \frac{\partial}{\partial x_s} (x_s^2 \phi'_1(x_s)) = -\frac{m_k}{r_k^4} \frac{x_s \phi''_1(x_s) + 2\phi'_1(x_s)}{x_s} < 0.$$

Or,  $\phi_1(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  avec  $a_n \geq 0$  et  $a_1 = 0$  sur  $(-1,1)$ . Dès lors, pour  $0 < x < 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{x \phi''_1(x) + 2\phi'_1(x)}{x} &= \frac{\sum_{n \geq 2} a_n n(n-1) x^{n-1} + 2 \sum_{n \geq 1} a_n n x^{n-1}}{x} \\ &= \sum_{n \geq 2} a_n n(n+1) x^{n-2}, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $(x \phi''_1(x) + 2\phi'_1(x))/x$  est strictement positif et croissant. Puisque  $x_i < x_j$ , on en déduit que  $0 > \partial_{r_k} \lambda_{ik} > \partial_{r_k} \lambda_{jk}$ .

5. Soient  $k < j < i$  et  $y_s = r_k / r_s$  pour  $s = i, j$ . Comme vu au point 2, nous avons  $\lambda_{sk} = -\frac{m_k}{r_s^3} (\phi_1(y_s) + y_s \phi'_1(y_s))$  et la dérivée selon  $r_k$  vaut

$$\frac{\partial \lambda_{sk}}{\partial r_k} = -\frac{m_k}{r_s^4} (2\phi'_1(y_s) + y_s \phi''_1(y_s)) < 0.$$

Or,  $y \phi''_1(y) + 2\phi'_1(y)$  est strictement positive et croissante pour  $0 < x < 1$ . Puisque  $y_j < y_i$ , on a  $\partial_{r_k} \lambda_{ik} < \partial_{r_k} \lambda_{jk} < 0$ .

□

Afin d'établir l'égalité  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$  pour un  $r \in \mathcal{R}^n$ , nous étudions le problème équivalent  $\lambda_i(r) - \lambda_{i+1}(r) = 0$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ .

**Corollaire 2.1.1.** *Soit  $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  avec*

$$\Lambda_i(r) = \lambda_i(r) - \lambda_{i+1}(r), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

*Nous avons les quatre propriétés suivantes :*

1.  $\partial_{r_i}\Lambda_i > 0$  pour tout  $i$ .
2.  $\partial_{r_{i+1}}\Lambda_i < 0$  pour tout  $i$ .
3.  $\partial_{r_j}\Lambda_i > 0$  pour tout  $j > i + 1$ .
4.  $\partial_{r_j}\Lambda_i < 0$  pour tout  $j < i$ .

DÉMONSTRATION. C'est immédiat grâce au lemme 2.1.2. Plus précisément, les points 1 et 2 sont une conséquence des points 2 et 3 du lemme 2.1.2. Quant aux points 3 et 4, ils suivent des points 4 et 5 du lemme 2.1.2 respectivement.  $\square$

Par ailleurs, on définit une relation d'ordre partiel entre deux vecteurs.

**Définition 2.1.1.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ,

$$u \preceq v \iff u_j \leq v_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\},$$

et il en est de même pour l'inégalité stricte.

Finalement, le dernier élément essentiel est notre choix initial pour les rayons de configurations en toile d'araignée.

**Lemme 2.1.3.** Soient  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et  $m \in \mathbb{R}_{>0}^n$ . Il existe  $p \in \mathcal{R}^n$ , tel que la configuration  $\mathfrak{S}(n, \ell, p, m)$  respecte

$$\Lambda(p) \prec 0.$$

De plus, dans le cas  $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ , soit  $i \in \{1, \dots, n - 3\}$ , on peut choisir  $(p_{i+2}, \dots, p_n)$  tel que, pour tout  $r_{i+1} \in (p_i, p_{i+1}]$ ,

$$(\Lambda_{i+2}, \dots, \Lambda_{n-1})(p_1, \dots, p_i, r_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_n) \prec 0.$$

DÉMONSTRATION. Nous raisonnons par récurrence pour prouver les deux parties du lemme ensemble, donc l'initialisation doit être faite pour  $n = 2$  et  $n = 4$ .

**Initialisation 1 :** Le cas  $n = 2$  est immédiat car on a  $\lambda_1(r_1, +\infty) < \lambda_2(r_1, +\infty) = 0$  pour tout  $r_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ . En utilisant le point 4 du lemme 2.1.2, cette inégalité est préservée lorsque  $r_2$  diminue et le résultat suit.

**Initialisation 2 :** On suppose que jusqu'au rang  $n = 3$ , il existe  $p \in \mathcal{R}^n$ , tel que

$$\lambda_1(p) < \lambda_2(p) < \lambda_3(p).$$

Nous plaçons un quatrième cercle en  $r_4 = +\infty$ . Cette nouvelle configuration est équivalente à celle à 3 cercles de sorte que

$$\Lambda(p, +\infty) = (\Lambda_1(p, +\infty), \Lambda_2(p, +\infty), \Lambda_3(p, +\infty)) \prec 0.$$

Selon les points 1 et 3 du corollaire 2.1.1, l'inégalité est préservée lorsque  $r_4$  diminue. Ainsi, il existe  $p_4 \in (p_3, +\infty)$  tel que

$$\Lambda(p, p_4) < 0.$$

Par ailleurs, le rayon  $p_4$  peut être pris suffisamment grand de sorte que, pour tout  $r_2 \in (p_1, p_2]$ ,

$$\Lambda_3(p_1, r_2, p_3, p_4) = \lambda_3(p_1, r_2, p_3, p_4) - \lambda_4(p_1, r_2, p_3, p_4) < 0.$$

**Hérédité :** Supposons que jusqu'à un rang  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , il existe  $p \in \mathcal{R}^n$  tel que

$$\lambda_1(p) < \dots < \lambda_n(p),$$

et, si  $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ , pour tout  $r_{i+1} \in (p_i, p_{i+1}]$ , on a

$$\lambda_{i+2}(p_1, \dots, p_i, r_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_n) < \dots < \lambda_n(p_1, \dots, p_i, r_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_n),$$

pour un  $i \in \{1, \dots, n-3\}$ .

On place un  $(n+1)^e$  cercle en  $r_{n+1} = +\infty$ . On a alors  $\lambda_{n+1}(p, +\infty) = 0$  et on conserve l'inégalité  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ . De plus, par le point 4 du lemme 2.1.2 cette inégalité est préservée lorsque  $r_{n+1}$  diminue. Donc, il existe  $p_{n+1} \in (p_n, +\infty)$  tel que

$$\Lambda(p, p_{n+1}) < 0.$$

Par ailleurs, le rayon  $p_{n+1}$  peut être pris suffisamment grand de sorte que, pour tout  $r_{i+1} \in (p_i, p_{i+1}]$ ,

$$\Lambda_n(p_1, \dots, p_i, r_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{n+1}) < 0.$$

□

## 2.2. EXISTENCE POUR UN PETIT NOMBRE DE CERCLES

Tout d'abord, dans une configuration en toile d'araignée, nous prouvons que le groupement de deux cercles consécutifs respecte la définition d'une configuration centrale.

**Théorème 2.2.1.** *Soient  $\mathcal{N} \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et  $m \in \mathbb{R}_{>0}^n$ . Pour n'importe quel choix de  $i \in \{1, \dots, \mathcal{N}-1\}$ , supposons qu'il existe  $p \in \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$  tel que  $\mathfrak{S}(\mathcal{N}, \ell, p, m)$  respecte  $\Lambda_i(p) < 0$ . Alors, il existe un unique  $r_{i+1}^{sol} \in (p_i, p_{i+1})$  tel que  $\mathfrak{S}(\mathcal{N}, \ell, (p_1, \dots, p_i, r_{i+1}^{sol}, p_{i+2}, \dots, p_{\mathcal{N}}), m)$  satisfait à*

$$\Lambda_i(p_1, \dots, p_i, r_{i+1}^{sol}, p_{i+2}, \dots, p_{\mathcal{N}}) = 0.$$

En particulier, pour un  $\lambda < 0$  fixé, il existe un unique  $r \in \mathcal{R}^2$  tel que la configuration  $\mathfrak{S}(2, \ell, r, m)$  soit centrale.

DÉMONSTRATION. Fixons  $i \in \{1, \dots, \mathcal{N} - 1\}$ .

Par le lemme 2.1.3, nous avons l'existence d'un  $p \in \mathcal{R}^{\mathcal{N}}$  tel que  $\Lambda_i(p) < 0$ . De plus, le point 2 du corollaire 2.1.1 implique que  $\lim_{r_{i+1} \searrow p_i} \Lambda_i(p + (r_{i+1} - p_{i+1})e_{i+1}) = +\infty$  et  $\Lambda_i$  est monotone continue. Donc, la fonction  $\Lambda_i$  possède un unique zéro.  $\square$

Nous démontrons maintenant qu'une configuration centrale en toile d'araignée existe pour  $n = 3$  et un nombre arbitraire  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  de masses égales quelconques strictement positives par cercle.

**Théorème 2.2.2.** *Soient  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et  $m \in \mathbb{R}_{>0}^3$ . Supposons qu'il existe  $p \in \mathcal{R}^3$  tel que  $\mathfrak{S}(3, \ell, p, m)$  respecte  $\Lambda(p) < 0$ . Alors, il existe  $(r_2^{sol}, r_3^{sol}) \in (p_1, p_2) \times (r_2^{sol}, p_3)$  tel que la configuration  $\mathfrak{S}(3, \ell, (p_1, r_2^{sol}, r_3^{sol}), m)$  soit centrale.*

DÉMONSTRATION. La preuve est en quatre étapes. L'idée est d'utiliser le *théorème des fonctions implicites* afin de prolonger la solution de  $\Lambda_2 = 0$  dont nous connaissons l'existence et l'unicité par le théorème 2.2.1.

**Étape 1 :** Par le lemme 2.1.3, nous avons l'existence d'un  $p \in \mathcal{R}^3$  tel que

$$\Lambda(p) < 0.$$

Pour mettre en évidence les rayons que nous varions, nous notons

$$\lambda_k(r_2, r_3) := \lambda_k(p_1, r_2, r_3), \quad k = 1, 2, 3,$$

et idem pour  $\Lambda$ .

**Étape 2 :** Par le théorème 2.2.1, nous avons l'existence d'un unique  $r_3^* \in (p_2, p_3)$  tel que  $\Lambda_2(p_2, r_3^*) = 0$ . De plus, d'après le point 3 du corollaire 2.1.1, nous avons

$$\Lambda_1(p_2, r_3^*) < 0.$$

Selon le point 2 du corollaire 2.1.1,  $\partial_{r_3} \Lambda_2 < 0$  pour tout  $(r_2, r_3)$  et le *théorème des fonctions implicites* donne l'existence d'une fonction  $r_3 = r_3(r_2)$ , définie sur un voisinage  $V$  de  $r_2 = p_2$ , telle que

$$r_3^* = r_3(p_2) \quad \text{et} \quad \Lambda_2(r_2, r_3(r_2)) = 0, \quad \forall r_2 \in V.$$

**Étape 3 :** D'une part, l'inégalité  $\partial_{r_3}\Lambda_2(r_2, r_3) < 0$  est globale.

D'autre part, puisque pour tout  $r_2 \in (p_1, p_2]$  nous avons  $\Lambda_2(r_2, p_3) < 0$ , nous pouvons invoquer le théorème 2.2.1 pour la variable  $r_3$  et obtenir un unique zéro  $\tilde{r}_3 \in (r_2, p_3)$  de la fonction  $\Lambda_2$ .

Ces deux faits nous permettent de prolonger cette courbe pour tout  $r_2 \in (p_1, p_2]$ . Par construction,  $r_3(r_2) \in (r_2, p_3)$  pour tout  $r_2 \in (p_1, p_2)$ , et le fait que  $r_3^*$  soit unique, entraîne que  $r_3(r_2)$  est unique.

**Étape 4 :** En outre, la fonction  $r_3(r_2)$  est strictement croissante car

$$r_3'(r_2) = -\frac{\partial_{r_2}\Lambda_2}{\partial_{r_3}\Lambda_2} > 0$$

selon le corollaire 2.1.1. Ce qui implique, avec le point 2 du lemme 2.1.2, la limite monotone

$$\lim_{r_2 \searrow p_1} \lambda_1(r_2, r_3(r_2)) = +\infty,$$

D'après le point 1 du lemme 2.1.2, on a

$$\lambda_3(r_2, r_3(r_2)) < 0, \quad \forall r_2 \in (p_1, p_2],$$

où l'inégalité est stricte puisque  $r_3(r_2)$  est borné pour tout  $r_2 \in (p_1, p_2]$ .

Or, à l'étape 2 nous avons établi que  $\lambda_1(p_2, r_3(p_2)) < \lambda_2(p_2, r_3(p_2)) = \lambda_3(p_2, r_3(p_2))$ .

Ainsi, il existe un  $r_2^{sol} \in (p_1, p_2)$  tel que  $\lambda_1(r_2^{sol}, r_3(r_2^{sol})) = \lambda_2(r_2^{sol}, r_3(r_2^{sol}))$ . Dès lors, on a  $r_3^{sol} = r_3(r_2^{sol}) \in (r_2^{sol}, p_3)$  et

$$\Lambda(r_2^{sol}, r_3^{sol}) = 0.$$

□

**Remarque 2.2.1.** Ce théorème ne garantit pas l'unicité de la configuration centrale en toile d'araignée à  $n = 3$  cercles. L'unicité nous échappe car nous ne parvenons pas à contrôler la taille des variations des fonctions  $\lambda_2(r_2, r_3(r_2))$  et  $\lambda_3(r_2, r_3(r_2))$ . Dès lors, nous ne contrôlons pas la variation de  $\Lambda_1(r_2, r_3(r_2))$ . Ainsi, pour montrer l'unicité, il faut établir

$$\frac{d}{dr_2}\Lambda_1(r_2, r_3(r_2)) \neq 0 \iff \partial_{r_2}\Lambda_1\partial_{r_3}\Lambda_2 - \partial_{r_2}\Lambda_2\partial_{r_3}\Lambda_1 \neq 0.$$

Enfin, les configurations en toile d'araignée composées de quatre cercles existent pour un nombre arbitraire  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  de masses masses égales quelconques strictement positives par cercle.

**Théorème 2.2.3.** Soient  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et  $m \in \mathbb{R}_{>0}^4$ . Supposons qu'il existe  $p \in \mathcal{R}^4$  tel que  $\mathfrak{S}(4, \ell, p, m)$  respecte  $\Lambda(p) \prec 0$ . Alors, il existe  $(r_2^{sol}, r_3^{sol}, r_4^{sol}) \in (p_1, p_2) \times (r_2^{sol}, p_3) \times (r_3^{sol}, p_4)$  tel que la configuration  $\mathfrak{S}(4, \ell, (p_1, r_2^{sol}, r_3^{sol}, r_4^{sol}), m)$  soit centrale.

DÉMONSTRATION. L'idée est similaire à la preuve du théorème 2.2.2. Nous montrons qu'il est possible d'obtenir  $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4$ , puis, grâce au *théorème des fonctions implicites*, nous changeons l'inégalité en une égalité.

**Étape 1 :** Par le lemme 2.1.3, nous avons l'existence d'un  $p \in \mathcal{R}^4$  tel que

$$\Lambda(p) \prec 0.$$

À nouveau, nous employons la notation

$$\lambda_k(r_2, r_3, r_4) := \lambda_k(p_1, r_2, r_3, r_4), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

et idem pour  $\Lambda$ .

**Étape 2 :** Par le théorème 2.2.1, nous avons l'existence d'un unique  $r_4^* \in (p_3, p_4)$  tel que  $\Lambda_3(p_2, p_3, r_4^*) = 0$ . De plus, d'après le point 3 du corollaire 2.1.1, nous avons

$$(\Lambda_1(p_2, p_3, r_4^*), \Lambda_2(p_2, p_3, r_4^*)) \prec 0.$$

Le point 2 du corollaire 2.1.1 assure l'inégalité  $\partial_{r_4} \Lambda_3 < 0$  pour tout  $(r_2, r_3, r_4)$ , et, par le *théorème des fonctions implicites*, il existe une fonction  $r_4 = z(r_2, r_3)$ , définie sur un voisinage  $V$  de  $(r_2, r_3) = (p_2, p_3)$ , telle que

$$z(p_2, p_3) = r_4^* \quad \text{et} \quad \Lambda_3(r_2, r_3, z(r_2, r_3)) = 0, \quad \forall (r_2, r_3) \in V.$$

**Étape 3 :** D'après le point 1 du corollaire 2.1.1 et la seconde partie du lemme 2.1.3, nous savons que  $\Lambda_3(r_2, r_3, p_4) < 0$  pour tout  $(r_2, r_3) \in (p_1, p_2] \times (r_2, p_3]$ . Donc, nous pouvons invoquer le théorème 2.2.1 pour la variable  $r_4$  pour obtenir un unique zéro  $\tilde{r}_4 \in (r_3, p_4)$  de la fonction  $\Lambda_3$ .

Puisque l'inégalité  $\partial_{r_4} \Lambda_3 < 0$  est globale et  $(p_2, p_3, r_4^*)$  est unique, la fonction  $z(r_2, r_3)$  est unique et peut être uniquement prolongée pour tout  $(r_2, r_3) \in (p_1, p_2] \times (r_2, p_3]$ . Par construction,  $r_4 = z(r_2, r_3) \in (r_3, p_4)$  pour tout  $(r_2, r_3) \in (p_1, p_2] \times (r_2, p_3]$ .

**Étape 4 :** D'après le corollaire 2.1.1, nous avons que

$$\frac{d}{dr_2} z(r_2, p_3) = -\frac{\partial_{r_2} \Lambda_3}{\partial_{r_4} \Lambda_3} < 0,$$

et on obtient

$$\frac{d}{dr_2}\lambda_2(r_2,p_3,z(r_2,p_3)) = \partial_{r_2}\lambda_2 + \left(\frac{d}{dr_2}z(r_2,p_3)\right)\partial_{r_4}\lambda_2 > 0,$$

$$\frac{d}{dr_2}\lambda_4(r_2,p_3,z(r_2,p_3)) = \partial_{r_2}\lambda_4 + \left(\frac{d}{dr_2}z(r_2,p_3)\right)\partial_{r_4}\lambda_4 < 0.$$

Puisque  $\lambda_3(r_2,p_3,z(r_2,p_3)) = \lambda_4(r_2,p_3,z(r_2,p_3))$ , on a que  $\frac{d}{dr_2}\Lambda_2(r_2,p_3,z(r_2,p_3)) > 0$ .

De plus, le fait que  $\frac{d}{dr_2}z(r_2,p_3)$  soit strictement négatif impose, par les points 2 et 3 du corollaire 2.1.1, que  $\Lambda_1$  est monotone croissante vers  $+\infty$  lorsque  $r_2$  décroît vers  $p_1$ .

Ainsi, puisque  $(\Lambda_1(p_2,p_3,z(p_2,p_3)), \Lambda_2(p_2,p_3,z(p_2,p_3))) < 0$ , il existe un unique  $\hat{r}_2 \in (p_1, p_2)$ , tel que nous ayons l'inégalité

$$\lambda_1(\nu, z(\nu)) = \lambda_2(\nu, z(\nu)) < \lambda_3(\nu, z(\nu)) = \lambda_4(\nu, z(\nu)),$$

où  $\nu = (\hat{r}_2, p_3)$ .

Le point  $(\hat{r}_2, p_3)$  est donc un zéro de la fonction  $\mathcal{L}(r_2, r_3, r_4) = (\Lambda_1, \Lambda_3)$  dont le jacobien selon  $(r_3, r_4)$  vaut

$$\left|D_{(r_3, r_4)}\mathcal{L}\right| = \left|\begin{pmatrix} \partial_{r_3}\Lambda_1 & \partial_{r_4}\Lambda_1 \\ \partial_{r_3}\Lambda_3 & \partial_{r_4}\Lambda_3 \end{pmatrix}\right| < 0$$

car, d'après le corollaire 2.1.1, tous les termes sont strictement positifs à l'exception de  $\partial_{r_4}\Lambda_3$  pour tout  $(r_2, r_3, r_4)$ .

Par le *théorème des fonctions implicites*, nous avons l'existence d'une fonction  $(r_3, r_4) = (r_3(r_2), r_4(r_2)) = \psi(r_2)$ , définie sur un voisinage  $V'$  de  $r_2 = \hat{r}_2$ , telle que

$$\psi(\hat{r}_2) = (p_3, z(\hat{r}_2, p_3)) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(r_2, \psi(r_2)) = 0, \quad \forall r_2 \in V'.$$

Or, nous avons que

$$\psi'(r_2) = \begin{pmatrix} r_3'(r_2) \\ r_4'(r_2) \end{pmatrix} = \frac{-1}{|D_{(r_3, r_4)}\mathcal{L}|} \begin{pmatrix} \partial_{r_4}\Lambda_3 & -\partial_{r_4}\Lambda_1 \\ -\partial_{r_3}\Lambda_3 & \partial_{r_3}\Lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{r_2}\Lambda_1 \\ \partial_{r_2}\Lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Une simple étude de signe, en se servant du corollaire 2.1.1, montre que  $r_3'(r_2) > 0$ . D'où, pour n'importe quel  $r_2 \in V' \cap (p_1, \hat{r}_2]$ , nous obtenons  $r_3(r_2) \in (r_2, p_3]$ . Puisque  $z(r_2, r_3)$  est un graphe et qu'il est unique, nous pouvons alors conclure que  $r_4(r_2) \in (r_3(r_2), p_4)$  et

$$(V', \psi(V')) \subset \Sigma = \left\{ (r_2, r_3, r_4) \in \mathcal{R}^3 : r_4 = z(r_2, r_3), \right. \\ \left. \forall (r_2, r_3) \in (p_1, p_2] \times (r_2, p_3] \right\}.$$

Par ailleurs, les rayons du troisième et quatrième cercle, donnés par  $\psi(r_2)$ , ne peuvent pas tendre vers la même limite lorsque  $r_2 \rightarrow \inf V'$ , avec  $\inf V' > p_i$ . En effet, par construction, pour tout  $s \in \Sigma$ ,  $s \in \mathcal{R}^3$ .

Ainsi, puisque le signe du jacobien est global, la fonction  $\psi(r_2)$  peut être uniquement étendue pour tout  $r_2 \in (p_1, p_2]$ . Notons que  $\psi$  est unique puisque  $\hat{r}_2$  est unique.

**Étape 5 :** Quelle que soit la variation de  $r_4(r_2)$ , le lemme 2.1.2 donne la limite

$$\lim_{r_2 \searrow p_1} \lambda_1(r_2, \psi(r_2)) = +\infty.$$

En effet, si  $r_4(r_2) > 0$  on applique directement le point 2 du lemme 2.1.2. Dans le cas contraire, on a  $\frac{d}{dr_2} \lambda_{14}(r_2, \psi(r_2)) < 0$  par le point 2 lemme 2.1.2, mais  $\lambda_{14}$  est toujours positif par le point 1 du lemme 2.1.2 alors  $\lim_{r_2 \searrow p_1} \lambda_{12}(r_2, \psi(r_2)) = +\infty$ .

Par ailleurs, par le point 1 du lemme 2.1.2, on a

$$\lambda_4(r_2, \psi(r_2)) < 0, \quad \forall r_2 \in (p_1, \hat{r}_2],$$

où l'inégalité est stricte car  $r_4(r_2)$  est borné pour tout  $r_2 \in (p_1, \hat{r}_2]$ .

Or, nous avons vu que  $\lambda_1(\hat{r}_2, \psi(\hat{r}_2)) = \lambda_2(\hat{r}_2, \psi(\hat{r}_2)) < \lambda_3(\hat{r}_2, \psi(\hat{r}_2)) = \lambda_4(\hat{r}_2, \psi(\hat{r}_2))$ . Par conséquent, il existe  $\check{r}_2 \in (p_i, \hat{r}_2)$  tel que nous ayons l'inégalité

$$\lambda_3(\check{r}_2, \psi(\check{r}_2)) = \lambda_4(\check{r}_2, \psi(\check{r}_2)) < 0 < \lambda_1(\check{r}_2, \psi(\check{r}_2)) = \lambda_2(\check{r}_2, \psi(\check{r}_2))$$

et par le *théorème de la valeur intermédiaire*, il existe  $r_2^{sol} \in (p_i, p_2)$  tel que

$$\Lambda(r_2^{sol}, \psi(r_2^{sol})) = 0,$$

avec  $\psi(r_2^{sol}) \in (r_2^{sol}, p_3) \times (r_3^{sol}, p_4)$ .

□

**Remarque 2.2.2.** *Tout comme pour le théorème 2.2.2, nous n'avons pas l'unicité de la configuration centrale en toile d'araignée à  $n = 4$  cercles. La première difficulté est de déterminer les variations de  $r_4(r_2)$ , ce qui revient à quantifier*

$$\partial_{r_3} \Lambda_1 \partial_{r_2} \Lambda_3 - \partial_{r_3} \Lambda_3 \partial_{r_2} \Lambda_1.$$

### 2.3. TOILE D'ARAIGNÉE AVEC UNE MASSE SITUÉE AU CENTRE DE MASSE

En dernier lieu, considérons la généralisation naturelle de la configuration de Maxwell [4] qui revient à une configuration en toile d'araignée avec une masse  $m_0$  placée au centre de masse.

**Théorème 2.3.1.** *Les théorèmes 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3, restent vrais si on ajoute une masse  $m_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  au centre de masse.*

DÉMONSTRATION. Par symétrie, la force gravitationnelle ressentie par le point matériel placé au centre de masse, qui est l'origine du référentiel, est nulle et par conséquent cette masse vérifie  $\vec{r}_0 = \lambda r_0$  pour n'importe quel  $\lambda < 0$ .

En outre, nous avons le nouveau terme

$$\frac{F_{i0}}{m_i} = -\frac{m_0}{r_i^2}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Évidemment,  $F_{i0}/m_i$  a le même signe que  $F_{ii}/m_i$  et de même pour  $\lambda_{i0}$  et  $\lambda_{ii}$ . Aussi, puisque  $\lambda_{i0}$  est indépendant de  $j$  pour  $j \neq i$ , ce nouveau terme ne change pas les variations de  $\lambda_i$  en fonction de  $r_j$  pour  $j \neq i$ . Enfin, on a  $\partial_{r_i} \lambda_{i0} > 0$  d'où  $\partial_{r_i} \lambda_i > 0$ .

Ceci prouve que le lemme 2.1.2 reste vrai pour une configuration en toile d'araignée avec une masse  $m_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  située au centre de masse.

Puisque tous les résultats du chapitre ne dépendent que de la véracité du lemme 2.1.2, la preuve est terminée. □

# Chapitre 3

---

## EXISTENCE POUR UN NOMBRE ARBITRAIRE DE CERCLES

DANS ce troisième chapitre, nous généralisons la preuve de Moulton pour démontrer l'existence et l'unicité des configurations centrales en toile d'araignée pour certaines valeurs de  $\ell$ .

### 3.1. RÉÉCRITURE DU PROBLÈME

Soit  $\lambda < 0$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , on définit l'application  $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  par

$$\begin{aligned} f_i(r_i, y_1, \dots, y_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, m_n) &= \lambda r_i - \frac{F_i(r_i, y_1, \dots, y_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, m_n)}{m_i} \\ &= \lambda r_i + \frac{m_i}{2^{3/2} r_i^2} \zeta_\ell + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_j}{r_i^2} (\phi_1(y_j) + y_j \phi_1'(y_j)) - \sum_{j=i+1}^n \frac{m_j x_j^2}{r_i^2} \phi_1'(x_j) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

où  $F_i/m_i$  est donné par (2.1.2).

Les zéros de cette application donnent une configuration centrale pour  $\mathfrak{S}(n, \ell, r, m)$  avec ce  $\lambda$ . En vue de la preuve sur l'existence des configurations centrales en toile d'araignée, nous aurons besoin de connaître les dérivées partielles de  $f_i$ . Pour alléger l'écriture, on note

$$\partial_k = \frac{\partial}{\partial r_k}.$$

Ainsi,

$$\partial_k x_j = \begin{cases} \frac{x_j}{r_i}, & \text{si } k = i, \\ -\frac{x_j^2}{r_i}, & \text{si } k = j, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \partial_k y_j = \begin{cases} -\frac{y_j}{r_i}, & \text{si } k = i, \\ \frac{1}{r_i}, & \text{si } k = j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\partial_j f_i = \begin{cases} \lambda - \frac{m_i}{r_i^3 \sqrt{2}} \zeta_\ell - \frac{1}{r_i^3} \sum_{j=1}^{i-1} m_j \left( 2\phi_1(y_j) + 4y_j \phi_1'(y_j) + y_j^2 \phi_1''(y_j) \right) - \sum_{j=i+1}^n \frac{m_j x_j^3}{r_i^3} \phi_1''(x_j), & \text{si } j = i, \\ \frac{m_j}{r_i^3} \left( 2\phi_1'(y_j) + y_j \phi_1''(y_j) \right), & \text{si } j < i, \\ \frac{m_j x_j^3}{r_i^3} \left( 2\phi_1'(x_j) + x_j \phi_1''(x_j) \right), & \text{si } j > i. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

### 3.2. PROBLÈME RESTREINT

Le problème des  $N$  corps *restreint* signifie que les masses de  $N' < N$  corps sont nulles. Les configurations centrales en toile d'araignée pour le problème restreint existent et la position des cercles de masses nulles est unique.

**Proposition 3.2.1.** *Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et  $m \in \mathbb{R}_{>0}^n$ . Supposons qu'il existe  $r \in \mathcal{R}^n$  tel que  $\mathfrak{S}(n, \ell, r, m)$  soit une configuration centrale. Pour n'importe quel  $i \in \{1, \dots, n\}$ , si  $m_{n+1} = 0$ , alors il existe un unique*

$$r_{n+1} \in \begin{cases} (r_i, r_{i+1}), & \text{si } i < n, \\ (r_n, +\infty), & \text{si } i = n, \end{cases}$$

tel que  $\mathfrak{S}(n+1, \ell, (r, r_{n+1}), (m, 0))$  soit une configuration centrale.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, il existe  $r \in \mathcal{R}^n$  tel que la configuration  $\mathfrak{S}(n, \ell, r, m)$  soit centrale. D'après la propriété 1, le  $\lambda$  associé à la configuration centrale est nécessairement négatif.

Fixons  $i \in \{1, \dots, n\}$  et ajoutons un  $(n+1)^e$  cercle de masse nulle de rayon

$$r_{n+1} \in \begin{cases} (r_i, r_{i+1}), & \text{si } i < n, \\ (r_n, +\infty), & \text{si } i = n, \end{cases}$$

Considérons, comme au deuxième chapitre, la fonction

$$\lambda_j(r, r_{n+1}) = \frac{F_j(r, r_{n+1})}{m_j r_j}, \quad j = 1, \dots, n+1,$$

qui, par (2.1.2), est parfaitement bien définie lorsque  $m_{n+1} = 0$ .

D'une part, l'ajout de particules de masse négligeable n'a aucune incidence sur la force ressentie par les particules des  $n$  cercles initiaux, c'est-à-dire  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda (< 0)$ .

D'autre part, nous avons les variations monotones

$$\lim_{\substack{r_{n+1} \nearrow r_i \\ r_{n+1} \searrow r_i}} \lambda_{n+1}(r, r_{n+1}) = -\infty, \quad \begin{cases} \lim_{r_{n+1} \nearrow r_{i+1}} \lambda_{n+1}(r, r_{n+1}) = +\infty, & \text{si } i < n+1, \\ \lim_{r_{n+1} \rightarrow +\infty} \lambda_{n+1}(r, r_{n+1}) = 0^-, & \text{si } i = n, \end{cases}$$

par le lemme 2.1.2. Ainsi, il existe un unique  $r_{n+1}$  dans chaque cas tel que  $\lambda_{n+1} = \lambda$ .

Remarquez qu'il n'est pas possible de placer un cercle avant le premier cercle. En effet, par l'équation (2.1.2) et le lemme 2.1.1 on a

$$\lambda_{n+1}(r, r_{n+1}) = \lambda_{n+1}(x_1, \dots, x_n, r_{n+1}) = \sum_{j=1}^n \frac{m_j x_j^2}{r_{n+1}^2} \phi_1'(x_j) > 0, \quad \text{où } x_j = r_{n+1}/r_j,$$

pour tout  $r_{n+1} \in (0, r_1)$  et  $r \in \mathcal{R}^n$ . □

Grâce à la proposition 3.2.1, il est permis d'ajouter autant de cercles de masses nulles à une configuration centrale en toile d'araignée, tout en conservant une configuration centrale.

### 3.3. EXISTENCE POUR UN NOMBRE ARBITRAIRE DE CERCLES

Tous les outils nécessaires aux objectifs du chapitre ont été énoncés et nous avons alors le théorème suivant.

**Théorème 3.3.1.** *Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Il existe un  $r \in \mathcal{R}^n$  tel que  $\mathfrak{S}(n, \ell, r, m)$  soit une configuration centrale pour des masses  $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_n$  strictement positives.*

**Remarque 3.3.1.** *Ce résultat est prouvé dans [1], nous offrons ici une preuve plus simple.*

**DÉMONSTRATION.** Considérons la matrice jacobienne  $D_r f \in M_n(\mathbb{R})$ . Nous allons montrer par récurrence que le jacobien est non nul à condition de se restreindre à des masses toujours plus petites.

Si  $n = 1$  et pour n'importe quel  $m_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ , selon l'équation (3.1.1), il existe un unique zéro de  $f(r_1) = 0$  et la dérivée est non nulle par le lemme 2.1.1.

Soit  $n \geq 2$  et supposons que le jacobien  $|D_{(r_1, \dots, r_{n-1})} f|$  est inversible pour  $n - 1$  cercles avec  $m_1 \gg \dots \gg m_{n-1}$ . On place alors un  $n^e$  cercle avec  $m_n = 0$  et, par la proposition 3.2.1, il existe un unique  $r(0) = (r_1, \dots, r_{n-1}, r_n) \in \mathcal{R}^n$  tel que  $\mathfrak{S}(n, \ell, r(0), (m_1, \dots, m_{n-1}, 0))$  soit une configuration centrale.

En utilisant l'expression (3.1.2), le jacobien vaut

$$|D_r f(r(0))| = \left| \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \partial_1 f_n(r(0)) & \dots & \partial_{n-1} f_n(r(0)) & \partial_n f_n(r(0)) \end{array} \right| \neq 0,$$

car  $\partial_n f_n(r(0)) < 0$  par le lemme 2.1.1 et  $|D_{(r_1, \dots, r_{n-1})} f(r(0))| \neq 0$  par hypothèse.

Le *théorème des fonctions implicites* nous donne alors un voisinage  $V$  de  $m_n = 0$  tel que la fonction  $r(m_n)$  soit un zéro de  $f$  pour tout  $m_n \in V$ . Donc, pour  $m_n \ll m_{n-1}$  nous sommes assurés que  $\mathfrak{S}(n, \ell, r(m_n), (m_1, \dots, m_n))$  soit une configuration centrale.  $\square$

Pour certaines valeurs de  $\ell$ , il est possible de considérer les masses  $m_1, \dots, m_n$  quelconques.

**Théorème 3.3.2.** *Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \{2, \dots, 9\}$  et  $m \in \mathbb{R}_{>0}^n$ . Pour un  $\lambda < 0$  fixé, il existe un unique  $r \in \mathcal{R}^n$  tel que  $\mathfrak{S}(n, \ell, r, m)$  soit une configuration centrale pour ce  $\lambda$ .*

**Remarque 3.3.2.** *Le cas  $\ell = 2$  est prouvé dans [6].*

DÉMONSTRATION. Lorsque  $n = 1$ , la configuration est un  $\ell$ -gône régulier et donc il existe bien un unique  $r_1 \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que les  $\ell$  masses forment une configuration centrale pour  $\lambda$  (cf. l'équation (3.1.1) pour le voir explicitement).

Supposons que pour  $n - 1$  cercles, avec  $(m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{R}_{>0}^{n-1}$ , il existe un unique  $(r_1, \dots, r_{n-1}) \in \mathcal{R}^{n-1}$  tel que les  $(n - 1) \times \ell$  points matériels forment une configuration centrale en toile d'araignée pour  $\lambda$ . Par la proposition 3.2.1, il existe un unique  $r(0) = (r_1, \dots, r_{n-1}, r_n) \in \mathcal{R}^n$  tel que  $\mathfrak{S}(n, \ell, r(0), (m_1, \dots, m_{n-1}, 0))$  soit une configuration centrale pour ce même  $\lambda$ .

**L'idée :** Nous souhaitons utiliser le *théorème des fonctions implicites* pour obtenir une fonction  $r(m_n)$  telle que  $f(r(m_n), m_n) = 0$  pour n'importe quelle valeur de  $m_n$  non négative. Nous devons alors montrer les trois affirmations suivantes :

1. La matrice jacobienne  $D_r f \in M_n(\mathbb{R})$ , dont les entrées sont données par (3.1.2), est non singulière pour tout  $r \in \mathcal{R}^n$  et  $m_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .
2. Tous les rayons restent bornés pour tout  $m_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .
3. Tous les rayons restent distincts pour tout  $m_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Affirmation 1 :** Un critère suffisant pour qu'une matrice soit inversible est qu'elle soit à diagonale dominante stricte<sup>1</sup>. Nous savons que  $\zeta_\ell$  est strictement positif et, par le lemme 2.1.1, que  $\partial_i f_i < 0$  et  $\partial_j f_i > 0$  pour  $j \neq i$ . Ainsi, nous devons montrer que

$$-\partial_i f_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \partial_j f_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Maintenant, si on réécrit  $f_i$  uniquement en terme de  $x_j$  nous obtenons

$$-\partial_i f_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \partial_j f_i = -\lambda + \frac{m_i}{r_i^3 \sqrt{2}} \zeta_\ell + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j x_j^3}{r_i^3} (\phi_1''(x_j)(1 - x_j) - 2\phi_1'(x_j)).$$

---

1. C'est-à-dire  $|M_{ii}| > |\sum_{j=1, j \neq i}^n M_{ij}|$  pour  $i = 1, \dots, n$  et  $M \in M_n(\mathbb{R})$ .

Or,

$$\begin{aligned}\phi_1'(x_j) &= \frac{d}{dx_j} \left( \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)^{1/2}} \right) = - \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{x_j - \cos \theta_k}{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)^{3/2}}, \\ \phi_1''(x_j) &= \frac{d}{dx_j} \left( - \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{x_j - \cos \theta_k}{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)^{3/2}} \right) = - \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k - 3(x_j - \cos \theta_k)^2}{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)^{5/2}},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\phi_1''(x_j)(1-x_j) - 2\phi_1'(x_j) &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k - 3(x_j - \cos \theta_k)^2}{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)^{5/2}} (1-x_j) + 2 \frac{x_j - \cos \theta_k}{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)^{3/2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k - 3(x_j - \cos \theta_k)^2)(1-x_j) + 2(x_j - \cos \theta_k)(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)}{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)^{5/2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)(3x_j - 1 - 2 \cos \theta_k) + 3(x_j - \cos \theta_k)^2(1-x_j)}{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)^{5/2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(1 - \cos \theta_k)(2x_j^2 + x_j(3 - \cos \theta_k) - 1 - 3 \cos \theta_k)}{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)^{5/2}}.\end{aligned}$$

Puisque le terme en  $k = 0$  est nul, on a

$$- \partial_i f_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \partial_j f_i = -\lambda + \frac{m_i}{r_i^3 \sqrt{2}} \zeta_\ell + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j x_j^3}{r_i^3} h_\ell(x_j), \quad (3.3.1)$$

avec

$$h_\ell(x_j) = \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{(1 - \cos \theta_k)(2x_j^2 + x_j(3 - \cos \theta_k) - 1 - 3 \cos \theta_k)}{(1+x_j^2-2x_j \cos \theta_k)^{5/2}}.$$

Puisque  $\lambda < 0$  par la propriété 1 et que  $\zeta_\ell$  est strictement positif, l'expression (3.3.1) est positive si  $h_\ell(x_j)$  est positif. Or, le signe de ce dernier dépend du polynôme  $2x^2 + x(3 - \cos \theta_k) - 1 - 3 \cos \theta_k$ . Notons que pour  $x > 1$  nous avons

$$2x^2 + x(3 - \cos \theta_k) - 1 - 3 \cos \theta_k > 2(x^2 + x) - 4 > 0.$$

Ainsi, il est suffisant de montrer que le signe de  $h_\ell(x_j)$  est strictement positif dans le cas  $x_j \in (0,1)$ , c'est-à-dire lorsque  $j > i$ .

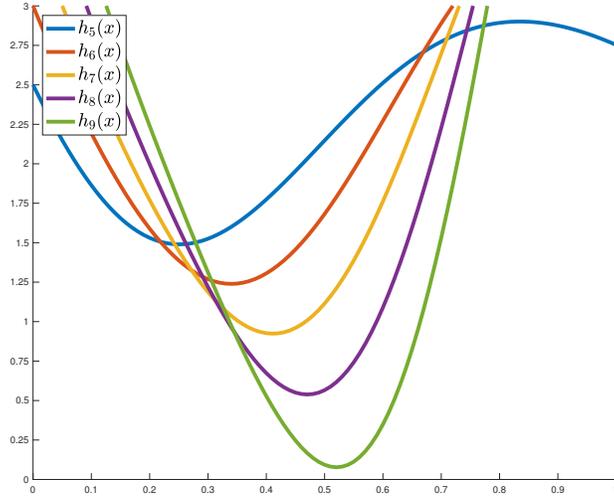


FIGURE 3.1. Graphes des fonctions  $h_\ell(x)$  sur  $[0,1]$  pour  $\ell = 5, \dots, 9$ .

**Cas  $\ell \in \{2,3,4\}$  :** Pour  $\ell = 2,3$ , nous avons immédiatement que

$$h_2(x_j) = \frac{4}{(1+x_j)^3} > 0 \quad \text{pour tout } x_j \in (0,1),$$

$$h_3(x_j) = \frac{3(\frac{1}{2} + \frac{7}{2}x + 2x^2)}{(1+x_j+x_j^2)^{5/2}} > 0 \quad \text{pour tout } x_j \in (0,1).$$

Pour  $\ell = 4$ , on a

$$h_4(x_j) = \frac{4}{(1+x_j)^3} + 2\frac{2x_j^2 + 3x_j - 1}{(1+x_j^2)^{5/2}}.$$

Il est suffisant de montrer que  $v(x) = (1+x)^3 h_4(x)$  est strictement positif pour  $x \in (0,1)$ . La dérivée est  $v'(x) = \frac{6x(1+x)^2(7-3x^2)}{(1+x^2)^{7/2}}$  dont la seule racine positive vaut  $x = \sqrt{7/3} > 1$ . Donc,  $v(x)$  est strictement croissante sur  $(0,1)$  et  $v(0) > 0$ , *a fortiori*  $v(x) > 0$  pour tout  $x \in (0,1)$ .

**Cas  $\ell \in \{5, \dots, 9\}$  :** L'approche analytique devenant fastidieuse et purement technique, nous proposons une petite preuve assistée par ordinateur.

Nous cherchons d'abord à borner  $|h'_\ell(x)|$  supérieurement. Il est clair que cette borne existe puisque  $h_\ell \in C^\infty([0,1])$  pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Soit  $M > 0$  tel que  $|h'_\ell(x)| < M$  pour tout  $x \in [0,1]$ .

Considérons la partition régulière de l'intervalle  $[0,1]$  donnée par  $s_q = q/p$  pour  $q = 0, \dots, p$ . Pour tout  $s \in [s_q, s_{q+1}]$ , on a  $|h_\ell(s) - h_\ell(s_{q+1})| < M/p \Rightarrow h_\ell(s) > -M/p + h_\ell(s_{q+1})$ .

Graphiquement, nous estimons une borne inférieure  $m > 0$  de sorte que  $h_\ell(x) > m$  pour tout  $x \in [0,1]$ . On choisit alors  $p$  tel que  $M/p < m$ . À l'aide de l'arithmétique des intervalles [7], nous vérifions rigoureusement que  $h_\ell(s_{q+1})$ , pour  $q = 0, \dots, p-1$ , est strictement plus grand que  $m$ . Par conséquent, on obtient que  $h_\ell(s) > -M/p + h_\ell(s_{q+1}) > 0$  pour tout  $s \in [s_q, s_{q+1}]$  et  $q = 0, \dots, p-1$  (cf. figure 3.1).

Par conséquent,  $-\partial_i f_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \partial_j f_i$  est une somme de termes positifs, ce qui termine la preuve de cette affirmation.

L'affirmation 1 nous permet d'utiliser le *théorème des fonctions implicites* de sorte qu'il existe une fonction  $r(m_n)$  tel que  $f(r(m_n), m_n) = 0$  pour tout  $m_n$  positif dans un voisinage  $V$  de  $m_n = 0$ .

**Affirmation 2 :** Soit  $\{a_k\}_{k \geq 1}$  une suite dans  $V$  telle que  $a_k \geq 0$  pour tout  $k \geq 1$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \sup V$ .

Supposons que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_i(a_k) = +\infty$  pour un certain indice  $i$ . Alors, il est nécessaire que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_j(a_k) = +\infty$  pour  $j < i$  car  $f_i(r(a_k), a_k) = 0$ . De même, si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_j(a_k) = +\infty$  alors nous avons que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_{j'}(a_k) = +\infty$ , avec  $j' < j$ , pour respecter  $f_j(r(a_k), a_k) = 0$ . Ainsi, on en conclut que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_1(a_k) = +\infty$  entraînant  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_1(r(a_k), a_k) = -\infty$ , ce qui est une contradiction.

**Affirmation 3 :** Soit  $\{a_k\}_{k \geq 1}$  une suite dans  $V$  telle que  $a_k \geq 0$  pour tout  $k \geq 1$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \sup V$ . Sans perte de généralité, supposons que pour un indice  $i$  on ait  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_i(a_k)/r_j(a_k) = 1$  avec  $j > i$ . Pour conserver l'égalité  $f_i(r(a_k), a_k) = 0$ , l'équation (3.1.1) implique que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_{j'}(a_k)/r_i(a_k) = 1$  avec  $j' < i$ . À nouveau, pour avoir  $f_{j'}(r(a_k), a_k) = 0$  il faut que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_{j''}(a_k)/r_{j'}(a_k) = 1$  avec  $j'' < j'$ . En répétant ceci suffisamment de fois, on arrive à  $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_1(a_k)/r_2(a_k) = 1$  impliquant que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_1(r(a_k), a_k) = -\infty$ , ce qui est une contradiction.

Par les deux affirmations précédentes, la fonction  $r(m_n)$  admet un unique prolongement pour tout  $m_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  et respecte  $r(m_n) \in \mathcal{R}^n$ .

*Quid* de l'unicité? Rappelons que  $r(0)$  était unique. Par ce qui précède, s'il existe une autre fonction  $\psi(m_n)$  telle que  $f(\psi(m_n), m_n) = 0$ , alors elle peut être étendue sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  tout entier et en particulier  $\psi(0) = r(0)$  et donc  $\psi(m_n)$  et  $r(m_n)$  sont confondues.  $\square$

### 3.4. EXISTENCE POUR UN NOMBRE MAJORÉ DE CERCLES

Malheureusement, comme le suggère la figure 3.2, pour  $\ell \geq 10$  la fonction  $h_\ell(x)$  n'est plus strictement positive pour tout  $x \in (0,1)$ . La répartition des cercles rentre alors en jeu puisque la contribution négative pourrait éventuellement dominer la contribution positive et rendre

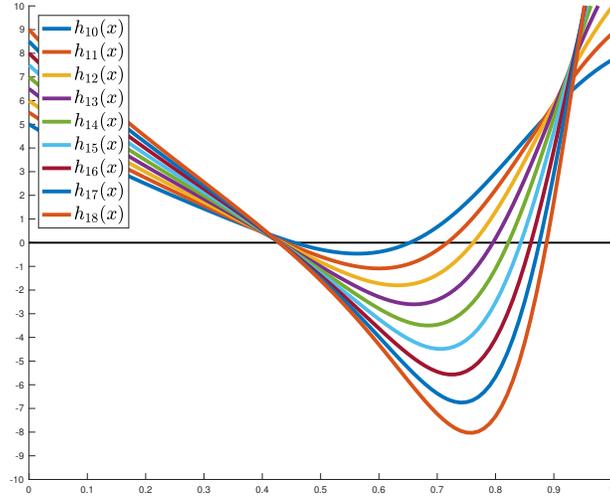


FIGURE 3.2. Graphes des fonctions  $h_\ell(x)$  sur  $[0,1]$  pour  $\ell = 10, \dots, 18$ .

l'équation (3.3.1) négative. Ainsi, notre critère suffisant, à savoir que la matrice jacobienne  $D_r f$  est à *diagonale dominante stricte*, n'est plus garanti. Néanmoins, nous relevons quelques cas pertinents contournant cette difficulté.

**Théorème 3.4.1.** *Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et  $m \in \mathbb{R}_{>0}^n$  satisfaisant  $m_1 \geq \dots \geq m_n$ . Pour un  $\lambda < 0$  fixé, il existe un unique  $r \in \mathcal{R}^n$  tel que  $\mathfrak{S}(n, \ell, r, m)$  soit une configuration centrale pour ce  $\lambda$ , si*

1.  $\ell = 10$  et  $n \leq 17$ .
2.  $\ell = 11$  et  $n \leq 9$ .
3.  $\ell = 12$  et  $n \leq 6$ .
4.  $\ell = 13$  et  $n \leq 5$ .
5.  $\ell = 14, 15$  et  $n \leq 4$ .
6.  $\ell = 16, 17, 18$  et  $n \leq 3$ .

**DÉMONSTRATION.** La preuve suit la même idée que celle du théorème 3.3.2 et remarquez que les affirmations 2 et 3 resteront valables si l'affirmation 1 est vérifiée. Ainsi, nous devons montrer que l'équation (3.3.1) est strictement positive.

Par la preuve du théorème 3.3.2, nous savons que pour  $x_j > 1$  la fonction  $h_\ell(x_j)$  est strictement positive alors il suffit de considérer le cas  $x_j < 1$ .

Or,  $m_1 \geq \dots \geq m_n$  et nous avons au pire que tous les  $j \in \{i+1, \dots, n\}$  donnent  $h_\ell(x_j) < 0$ , d'où

$$\frac{m_i}{r_i^3 \sqrt{2}} \zeta_\ell + \sum_{j=i+1}^n \frac{m_j x_j^3}{r_i^3} h_\ell(x_j) > \frac{m_i}{r_i^3 \sqrt{2}} \left( \zeta_\ell + \sqrt{2}(n-1) \min_{x \in [0,1]} h_\ell(x) \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

dont il faut montrer que le membre de droite est positif.

$$\zeta_\ell \geq \begin{cases} 10.9, & \ell = 10, \\ 12.45, & \ell = 11, \\ 14, & \ell = 12, \\ 15.74, & \ell = 13, \\ 17, & \ell = 14, \\ 19.13, & \ell = 15, \\ 20.8, & \ell = 16, \\ 22, & \ell = 17, \\ 24, & \ell = 18, \end{cases} \quad \text{et} \quad h_\ell(x) > \begin{cases} -0.48, & \ell = 10, \\ -1.1, & \ell = 11, \\ -1.82, & \ell = 12, \\ -2.61, & \ell = 13, \\ -4, & \ell = 14, \\ -4.5, & \ell = 15, \\ -5.6, & \ell = 16, \\ -7, & \ell = 17, \\ -8.2, & \ell = 18, \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

On trouve alors que  $n$  peut être au plus égal à 17,9,6,5,4,4,3,3,3 pour  $\ell = 10, \dots, 18$  respectivement dans cet ordre.  $\square$

**Remarque 3.4.1.** *Les cas  $\ell = 14, \dots, 18$  tombent dans le spectre des résultats du chapitre suivant puisqu'on permet au plus  $n = 3$ . Toutefois, cette preuve fournit un élément supplémentaire qui est l'unicité de la solution.*

### 3.5. TOILE D'ARAIGNÉE AVEC UNE MASSE SITUÉE AU CENTRE DE MASSE

De manière analogue au chapitre 2, les résultats obtenus dans ce chapitre restent vrais pour des configurations centrales en toile d'araignée où l'on ajoute une masse strictement positive au centre de masse.

**Corollaire 3.5.1.** *Pour une configuration centrale en toile d'araignée à  $n \times \ell + 1$  corps, où une masse  $m_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  est située au centre de masse, la proposition 3.2.1 et les théorèmes 3.3.1, 3.3.2 et 3.4.1 restent valides.*

*De plus, il existe une unique position dans l'intervalle  $(0, r_1)$  pour placer un  $(n+1)^e$  cercle de masse nulle tout en conservant une configuration centrale.*

**DÉMONSTRATION.** Nous avons vu dans la preuve du théorème 2.3.1 que :

- le point matériel de masse  $m_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  placé au centre de masse vérifie  $\ddot{r}_0 = \lambda r_0$  pour n'importe quel  $\lambda < 0$ .
- le lemme 2.1.2 reste valide lorsqu'on ajoute une masse  $m_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  au centre de masse.

Puisque les preuves de la proposition 3.2.1 et du théorème 3.3.1 ne reposent que sur le lemme 2.1.2, il est clair que la proposition et le théorème restent valides si on ajoute une masse  $m_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  au centre de masse.

En outre, l'application  $f$  définie par l'expression (3.1.1) admet le nouveau terme

$$\frac{F_{i0}}{m_i} = -\frac{m_0}{r_i^2}.$$

Puisque ce terme est indépendant de  $j$ , cela revient à ajouter un terme positif à l'équation (3.3.1). Ainsi, les théorèmes 3.3.2 et 3.4.1 restent valides lorsqu'on ajoute une masse  $m_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  au centre de masse.

De plus, pour  $r_{n+1} \in (0, r_1)$ , on a désormais

$$\lambda_{n+1}(r, r_{n+1}) = \lambda_{n+1}(x_1, \dots, x_n, r_{n+1}) = -m_0/r_{n+1}^2 + \sum_{j=1}^n \frac{m_j x_j^2}{r_{n+1}^2} \phi_1'(x_j), \quad \text{où } x_j = r_{n+1}/r_j.$$

Par le lemme 2.1.2, les variations de  $\lambda_{n+1}$  lorsque  $r_{n+1} \searrow 0$  et  $r_{n+1} \nearrow r_1$  montrent l'existence d'un unique  $r_{n+1} \in (0, r_1)$  donnant une configuration centrale en toile d'araignée avec une masse  $m_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  située au centre de masse.  $\square$

# Chapitre 4

## PREUVE ASSISTÉE PAR ORDINATEUR

CE quatrième et dernier chapitre se veut complémentaire des chapitres 2 et 3. Les difficultés éprouvées pour généraliser les résultats analytiques nous poussent à utiliser des outils numériques afin de supplémer les cas d'existence des configurations centrales en toile d'araignée.

| $\ell \backslash n$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | ... |     |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| 2                   | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | ••  | ... |
| 3                   | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | ••  | ... |
| 4                   | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | ••  | ... |
| 5                   | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | ••  | ... |
| 6                   | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | ••  | ... |
| 7                   | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | ••  | ... |
| 8                   | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | ••  | ... |
| 9                   | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | ••  | ... |
| 10                  | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | ••  | ... |
| 11                  | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• | •• |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | ... |
| 12                  | •• | •• | •• | •• | •• | •• |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | ... |
| 13                  | •• | •• | •• | •• | •• |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | ... |
| 14                  | •• | •• | •• | •• |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | ... |
| 15                  | •• | •• | •• | •• |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | ... |
| 16                  | •• | •• | •• | •  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | ... |
| 17                  | •• | •• | •• | •  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | ... |
| 18                  | •• | •• | •• | •  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | ... |
| 19                  | •• | •• | •  | •  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | ... |
| 20                  | •• | •• | •  | •  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | ... |
| ⋮                   | ⋮  | ⋮  | ⋮  | ⋮  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | ... |

TABLEAU 4. I. Résumé des cas où les configurations centrales en toile d'araignée, pour  $m \in \mathbb{R}_{>0}^n$  satisfaisant  $m_1 \geq \dots \geq m_n$ , existent (•) et sont uniques pour un  $\lambda$  fixé (••).

Le tableau 4. I est un récapitulatif des résultats obtenus aux chapitres 2 et 3 lorsque  $m \in \mathbb{R}_{>0}^n$  satisfaisant à  $m_1 \geq \dots \geq m_n$  (*nota bene* : rappelons que selon la proposition 3.2.1 les configurations centrales peuvent être augmentées de manière unique en ajoutant au plus

un cercle de masse nulle derrière autant de cercles de masses strictement positives que la configuration centrale contient). Il est clair que la vaste majorité des cas reste à être étudiée. En utilisant l’*approche du polynôme des rayons*, nous démontrons l’existence et l’unicité locale de la configuration centrale en toile d’araignée pour tout  $n \leq 100$  et  $\ell \leq 200$  pair masses  $m_1 = \dots = m_n$  par cercle.

#### 4.1. L’APPROCHE DU POLYNÔME DES RAYONS

Cette section est dédiée à l’outil fondamental de notre preuve. Soient un espace vectoriel topologique  $X$ , une application linéaire  $A : X \rightarrow X$  et  $f : U \rightarrow V$  avec  $U, V$  deux ouverts de  $X$ . On considère l’opérateur  $T : U \rightarrow X$  défini par  $T(x) := x - Af(x)$ .

Si  $A$  est inversible, alors évidemment  $T(x) = x$  implique  $f(x) = 0$ . Ainsi, pour obtenir les zéros de  $f$ , on cherche les points fixes de  $T$ . Le *théorème du polynôme des rayons* donne des bornes de sorte que  $T$  respecte le *théorème du point fixe de Banach* et  $A$  soit inversible.

L’application  $f$  dont nous cherchons les zéros dépend de la force gravitationnelle qui possède des singularités, notamment en  $r_i = r_j$  pour  $i \neq j$ . Nous présentons donc une version locale du *théorème du polynôme des rayons* [2].

**Théorème 4.1.1** (Polynôme des rayons). *Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$ . Soient  $\bar{x} \in U$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Soit  $\rho_* > 0$  tel que  $\overline{B_{\rho_*}(\bar{x})} \subset U$ . Soient  $Y_0, Z_0 \in \mathbb{R}$ , et  $Z_2 : (0, \rho_*] \rightarrow [0, \infty)$  satisfaisant à*

$$\begin{aligned} \|Af(\bar{x})\| &\leq Y_0, \\ \|Id - AD_x f(\bar{x})\| &\leq Z_0, \\ \|A[D_x f(c) - D_x f(\bar{x})]\| &\leq Z_2(\rho)\rho, \quad \forall c \in \overline{B_\rho(\bar{x})} \text{ et } \rho \in (0, \rho_*]. \end{aligned}$$

Définissons le polynôme des rayons par

$$p(\rho) := Z_2(\rho)\rho^2 - (1 - Z_0)\rho + Y_0 \tag{4.1.1}$$

Si il existe  $\rho_0 \in (0, \rho_*]$  tel que  $p(\rho_0) < 0$ , alors la matrice  $A$  est inversible et il existe un unique  $\tilde{x} \in \overline{B_{\rho_0}(\bar{x})}$  satisfaisant  $f(\tilde{x}) = 0$ .

DÉMONSTRATION. La preuve est directe. Considérons  $T(x) = x - Af(x)$ . Le fait qu’il existe  $\rho_0 \in (0, \rho_*]$  tel que  $p(\rho_0) < 0$  implique que  $\|DT(c)\| < 1$  pour  $c \in \overline{B_{\rho_0}(\bar{x})}$ . D’où, par l’inégalité triangulaire  $\|I - ADf(\bar{x})\| < 1$ . Donc,  $ADf(\bar{x})$  est inversible, et alors  $A$  ne peut pas être singulière. En outre, on peut montrer que  $T$  est une contraction et alors que  $T : \overline{B_{\rho_0}(\bar{x})} \rightarrow \overline{B_{\rho_0}(\bar{x})}$ .

Par le *théorème du point fixe de Banach* et l’inversibilité de  $A$ , on a l’existence d’une unique solution  $\tilde{x} \in \overline{B_{\rho_0}(\bar{x})}$  de  $f(x) = 0$ . □

**Remarque 4.1.1.** *Le choix de  $\rho_*$  est relativement arbitraire, on fait un choix heuristique et on s'assure a posteriori qu'il est valide. Plus précisément, si il existe  $\rho_0$  tel que  $p(\rho_0) < 0$  alors il est nécessaire que  $\rho_0 < \rho_*$ . Dans le cas contraire, il faut augmenter la valeur de  $\rho_*$ .*

Pour la norme infinie, il est possible d'obtenir une expression générale pour la borne  $Z_2$ .

**Lemme 4.1.1.**

$$Z_2 = \sup_{b \in \overline{B_{\rho_*}(\bar{x})}} \left( \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k, m \leq n} \left| \sum_{1 \leq j \leq n} A_{ij} \partial_{km}^2 f_j(b) \right| \right).$$

DÉMONSTRATION. Par le *théorème de la valeur moyenne*, il existe  $\xi \in [0,1]$  tel que  $b = \bar{x} + \xi(c - \bar{x}) \in \overline{B_{\rho_*}(\bar{x})}$  et

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \partial_{km}^2 f_j(b) (c - \bar{x})_k = \partial_m f_j(c) - \partial_m f_j(\bar{x}).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (A[D_x f(c) - D_x f(\bar{x})])_{im} &= \sum_{1 \leq j \leq n} A_{ij} [\partial_m f_j(c) - \partial_m f_j(\bar{x})] \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} A_{ij} \partial_{km}^2 f_j(b) (c - \bar{x})_k. \end{aligned}$$

En prenant la norme infinie,

$$\begin{aligned} \|A[D_x f(c) - D_x f(\bar{x})]\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq m \leq n} |(A[D_x f(c) - D_x f(\bar{x})])_{im}| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq m \leq n} \left| \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} A_{ij} \partial_{km}^2 f_j(b) (c - \bar{x})_k \right| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq m \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{1 \leq j \leq n} A_{ij} \partial_{km}^2 f_j(b) (c - \bar{x})_k \right| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k, m \leq n} |(c - \bar{x})_k| \left| \sum_{1 \leq j \leq n} A_{ij} \partial_{km}^2 f_j(b) \right| \\ &\leq \left( \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k, m \leq n} \left| \sum_{1 \leq j \leq n} A_{ij} \partial_{km}^2 f_j(b) \right| \right) \rho, \end{aligned}$$

car  $c - \bar{x} \in \overline{B_\rho(0)}$ . En majorant par le supremum sur  $b \in \overline{B_{\rho_*}(\bar{x})}$  on trouve le résultat.  $\square$

**Remarque 4.1.2.** *Par le lemme 4.1.1, on peut prendre  $Z_2$  constant et alors  $p(\rho)$  est un polynôme de degré deux. Ainsi, si il existe deux racines réelles  $\rho_-, \rho_+$ , nous savons que  $p(\rho) < 0$  sur l'intervalle  $(\rho_-, \rho_+) \cap [0, \rho_*]$ . Par convention, cet intervalle est appelé intervalle d'existence et dénoté par*

El( $p$ ).

## 4.2. APPLICATION AUX CONFIGURATIONS EN TOILE D'ARAIGNÉE

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et  $\mathfrak{S}(n, \ell, r, m)$  pour un  $r \in \mathcal{R}^n$  et  $m \in \mathbb{R}_{>0}^n$ . Considérons l'application  $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ , déjà introduite sous une forme légèrement différente au chapitre 3, définie par  $f_i(r) = \lambda r_i - \frac{F_i(r)}{m_i}$  pour un  $\lambda < 0$ . Plus précisément, l'équation (1.3.1) nous donne

$$f_i(r) = \lambda r_i + \frac{m_i}{2^{3/2} r_i^2} \zeta_\ell + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{m_j (r_i - r_j \cos \theta_k)}{(r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta_k)^{3/2}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

où  $\zeta_\ell$  a été défini en (2.1.1).

Ainsi, obtenir les rayons donnant une configuration centrale revient à trouver les zéros de  $f$ . La matrice jacobienne  $D_r f$  de  $f$  est donnée par

$$\partial_j f_i = \begin{cases} \lambda - \frac{m_i}{r_i^3 \sqrt{2}} \zeta_\ell - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_j}{2} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{4r_i^2 + r_j^2 - 8r_i r_j \cos \theta_k + 3r_j^2 \cos 2\theta_k}{(r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta_k)^{5/2}}, & j = i, \\ -\frac{m_j}{2} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{-4(r_i^2 + r_j^2) \cos \theta_k + r_i r_j (7 + \cos 2\theta_k)}{(r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta_k)^{5/2}}, & j \neq i. \end{cases}$$

Considérons la méthode de Newton

$$T(r) = r - (D_r f(r))^{-1} f(r),$$

ce qui donne les itérations

$$r^{k+1} = r^k - (D_r f(r^k))^{-1} f(r^k).$$

Nous prenons une tolérance de  $10^{-9}$  de sorte que le critère de convergence est  $\|f(r)\|_\infty < 10^{-9}$  et on note

$$\bar{r} = \text{valeur numérique du zéro de } f.$$

### 4.2.1. Calcul des bornes

D'après le théorème 4.1.1, on cherche les zéros de

$$p(\rho) = Z_2(\rho)\rho^2 - (1 - Z_0)\rho + Y_0.$$

On prend  $A$  comme étant l'inverse numérique de  $D_r f(\bar{r})$ . Pour garantir que le calcul numérique de  $Y_0, Z_0, Z_2$  est rigoureux, nous prenons le maximum d'un intervalle contenant la

vraie valeur de la borne. Nous recourons à l'arithmétique des intervalles pour identifier ledit encadrement [7]<sup>1</sup>.

○ **Borne**  $Y_0$  :

$$Y_0 = \|Af(\bar{r})\|_\infty.$$

○ **Borne**  $Z_0$  :

$$Z_0 = \|I - AD_r f(\bar{r})\|_\infty.$$

○ **Borne**  $Z_2$  :

Pour calculer la borne  $Z_2$ , nous utilisons le lemme 4.1.1. Les dérivées secondes de  $f$  sont

$$\partial_{lj}^2 f_i = \begin{cases} \frac{3m_i}{\sqrt{2}r_i^4} \zeta_\ell + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{3m_j}{2} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(r_i - r_j \cos \theta_k)(4r_i^2 - r_j^2 - 8r_i r_j \cos \theta_k + 5r_j^2 \cos 2\theta_k)}{(r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta_k)^{7/2}}, & l = j = i, \\ -\frac{3m_j}{4} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(r_i(8r_j^2 + 23r_i^2) \cos \theta_k - r_j(20r_i^2 + 2r_j^2 + (4r_i^2 + 6r_j^2) \cos 2\theta_k - r_i r_j \cos 3\theta_k))}{(r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta_k)^{7/2}}, & l \neq j = i \text{ ou } j \neq l = i, \\ -\frac{3m_j}{4} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(r_j(8r_j^2 + 23r_i^2) \cos \theta_k - r_i(20r_j^2 + 2r_i^2 + (4r_j^2 + 6r_i^2) \cos 2\theta_k - r_i r_j \cos 3\theta_k))}{(r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta_k)^{7/2}}, & l = j \neq i, \\ 0, & l \neq j \neq i. \end{cases}$$

Les termes  $\partial_{lj}^2 f_i$  représentent les composantes de  $D_r^2 f$  qui est un tenseur de rang 3. En pratique, puisque Matlab est optimisé pour les opérations vectorielles, nous déplaçons le tenseur judicieusement en une matrice par blocs  $B(b) = (B_1(b), \dots, B_n(b))$  avec, pour  $i = 1, \dots, n$ ,

$$B_i = \begin{pmatrix} -\partial_{1i}^2 \frac{F_1(b)}{m_1} & \cdots & -\partial_{ji}^2 \frac{F_1(b)}{m_1} & \cdots & -\partial_{ni}^2 \frac{F_1(b)}{m_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\partial_{1i}^2 \frac{F_k(b)}{m_k} & \cdots & -\partial_{ji}^2 \frac{F_k(b)}{m_k} & \cdots & -\partial_{ni}^2 \frac{F_k(b)}{m_k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -\partial_{1i}^2 \frac{F_n(b)}{m_n} & \cdots & -\partial_{ji}^2 \frac{F_n(b)}{m_n} & \cdots & -\partial_{ni}^2 \frac{F_n(b)}{m_n} \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k, m \leq n} \left| \sum_{1 \leq j \leq n} A_{ij} \partial_{km}^2 f_j(b) \right| = \|AB(b)\|_\infty.$$

Ainsi,

1. Cf. Appendice A pour le code Matlab.

$$Z_2 = \sup_{b \in B_{\rho_*}(\bar{r})} \|AB(b)\|_\infty.$$

#### 4.2.2. Preuves assistées par ordinateur

La formulation d'une preuve assistée par ordinateur nécessite de choisir  $n, \ell$  et  $m_1, \dots, m_n$ . L'existence de la configuration centrale en toile d'araignée se retrouve limitée à ces paramètres. Toutefois, dans le problème général des  $N$  corps, prouver l'existence d'une configuration centrale pour un certain choix de masse  $m = (m_1, \dots, m_N)$  est suffisant pour prouver l'existence d'une configuration centrale pour n'importe quel multiple strictement positif de  $m$ .

**Lemme 4.2.1.** *Si les positions  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  de  $N$  corps de masses respectives  $m_1, \dots, m_N$  forment une configuration centrale de constante  $\lambda$ , alors, pour tout  $\mathcal{M} > 0$ , les positions  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  de  $N$  corps de masses respectives  $\mathcal{M}m_1, \dots, \mathcal{M}m_N$  forment une configuration centrale de constante  $\mathcal{M}\lambda$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $m' = \mathcal{M}m$  avec  $\mathcal{M} > 0$ . Par l'équation du mouvement (0.0.1) et la définition d'une configuration centrale, nous avons que

$$m'_i \ddot{\mathbf{r}}'_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm'_i m'_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} = -\mathcal{M}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} = \mathcal{M}^2 m_i \lambda \mathbf{r}_i = m'_i (\mathcal{M}\lambda) \mathbf{r}_i.$$

□

Choisissons

$$\rho_* = 10^{-5},$$

pour le rayon maximal et désignons par  $p^{n,\ell}$  le polynôme des rayons associé à une configuration composée de  $n$  cercles et  $\ell$  masses  $m_1 = \dots = m_n = 1/\ell$  par cercle.

Pour tout  $n \leq n_0$ ,  $\ell \leq \ell_0$  et  $\lambda = -1$ , nous invoquons le théorème 4.1.1 pour montrer l'existence d'un  $\tilde{r} \in \mathcal{R}^n$  tel que la configuration  $\mathfrak{S}(n, \ell, \tilde{r}, (1/\ell, \dots, 1/\ell))$  soit centrale. Ensuite, par le lemme 4.2.1 nous savons qu'il existe une configuration centrale en toile d'araignée pour n'importe quel choix de masse strictement positif tel que  $m_1 = \dots = m_n$ .

Nous optons pour  $n_0 = 100$  et  $\ell_0 = 200$  en raison des contraintes de mémoire et de temps de calcul. Essentiellement, cela provient du calcul de  $D_r^2 f$  qui bâtit une matrice  $\ell \times n^2$  selon la démarche expliquée précédemment pour calculer la borne  $Z_2$ <sup>2</sup>. Indéniablement, il s'agit de l'opération la plus coûteuse. Une réécriture astucieuse du code peut permettre

2. En réalité,  $D_r^2 f$  est construit comme une matrice creuse en se servant de la fonctionnalité `sparse` de Matlab.

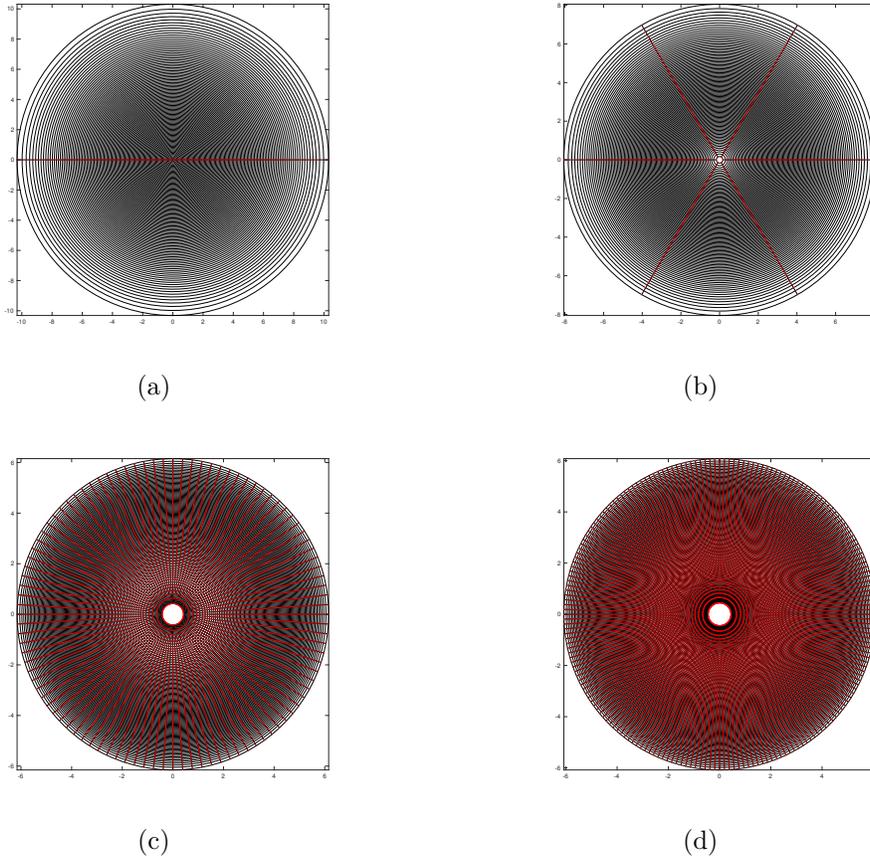


FIGURE 4.1. Exemple de configurations centrales : (a)  $\mathfrak{S}(100,2,\bar{r},(1/\ell,\dots,1/\ell))$ , (b)  $\mathfrak{S}(100,6,\bar{r},(1/\ell,\dots,1/\ell))$ , (c)  $\mathfrak{S}(100,100,\bar{r},(1/\ell,\dots,1/\ell))$  et (d)  $\mathfrak{S}(100,200,\bar{r},(1/\ell,\dots,1/\ell))$  avec  $\lambda = -1$ .

d'optimiser la performance, toutefois l'algorithme actuel fonctionne parfaitement pour des valeurs « raisonnables » de  $n_0$  et  $\ell_0$ .

Nous nous intéressons aux valeurs de  $\ell \leq \ell_0$  paires. Selon les théorèmes 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 3.3.2 et 3.4.1, nous pouvons démarrer les preuves numériques à  $n = 18$  lorsque  $\ell = 10$ ,  $n = 7$  lorsque  $\ell = 12$  et  $n = 5$  lorsque  $\ell \geq 14$ . Au total cela correspond à 9 201 preuves assistées par ordinateur<sup>3</sup> parmi lesquelles nous en citons seulement deux explicitement.

1. Pour  $n = 100$  et  $\ell = 100$  (cf. figure 4.1(c)), l'approche du polynôme des rayons nous donne l'intervalle

$$[1.177499 \times 10^{-13}, 3.212048 \times 10^{-7}] \subset \text{El}(p^{100,100}).$$

Ainsi, il existe un unique  $\tilde{r}$  tel que

3. Cf. [3] pour la liste exhaustive des résultats et l'ensemble des codes Matlab.

$$\|\tilde{r} - \bar{r}\|_\infty \leq 1.177499 \times 10^{-13} \quad \text{et} \quad f(\tilde{r}) = 0.$$

2. Pour  $n = 100$  et  $\ell = 200$  (cf. figure 4.1(d)), l'approche du polynôme des rayons nous donne l'intervalle

$$[1.746518 \times 10^{-13}, 4.972371 \times 10^{-7}] \subset \text{El}(p^{100,200}).$$

Ainsi, il existe un unique  $\tilde{r}$  tel que

$$\|\tilde{r} - \bar{r}\|_\infty \leq 1.746518 \times 10^{-13} \quad \text{et} \quad f(\tilde{r}) = 0.$$

**Remarque 4.2.1.** *Le théorème 4.1.1 n'offre pas l'unicité de la solution dans  $\mathbb{R}_{>0}^n$  tout entier. Néanmoins, les multiples expériences numériques semblent renforcer la conjecture de Saari selon laquelle les configurations centrales en toile d'araignée sont uniques.*

## 4.3. GÉOMÉTRIE DES CONFIGURATIONS CENTRALES EN TOILE D'ARAIGNÉE

### 4.3.1. Répartition des rayons pour des cercles de masses égales

L'approche numérique a aussi l'avantage de fournir des renseignements quantitatifs sur les configurations centrales en toile d'araignée.

Avant d'entamer ces discussions, rappelons que nous pouvons transformer par homothétie  $r \mapsto \gamma r$ , avec  $\gamma > 0$ , toute configuration centrale  $\mathfrak{S}(n, \ell, r, m)$  de constante  $\lambda$  en une nouvelle configuration centrale en toile d'araignée (cf. propriété 2 et lemme 4.2.1).

*De facto*, nous nous intéressons à des quantités invariantes sous homothéties pour tirer des observations les plus générales possibles.

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et les suites  $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$  et  $\{b_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$  définies par

$$a_i = (r_{i+1} - r_i)/r_1 \quad \text{et} \quad b_\ell = r_n(\ell)/r_1(\ell).$$

Considérons des configurations avec des cercles peu denses, par exemple  $\ell = 2$  et  $\ell = 6$ . Par le théorème 3.3.2, les configurations centrales pour de telles valeurs de  $\ell$  existent et sont uniques, modulo  $\lambda$ . Toutefois, pour nous assurer que la convergence numérique est bien correspond bien à une approximation numérique de la véritable solution, nous montrons leur existence numériquement grâce au théorème 4.1.1.

- Pour  $n = 100$  et  $\ell = 2$  (cf. figure 4.1(a)), l'approche du polynôme des rayons nous donne l'intervalle

$$[7.745618 \times 10^{-14}, 3.403633 \times 10^{-7}] \subset \text{El}(p^{100,2}).$$

Ainsi, il existe un unique  $\tilde{r}$  tel que

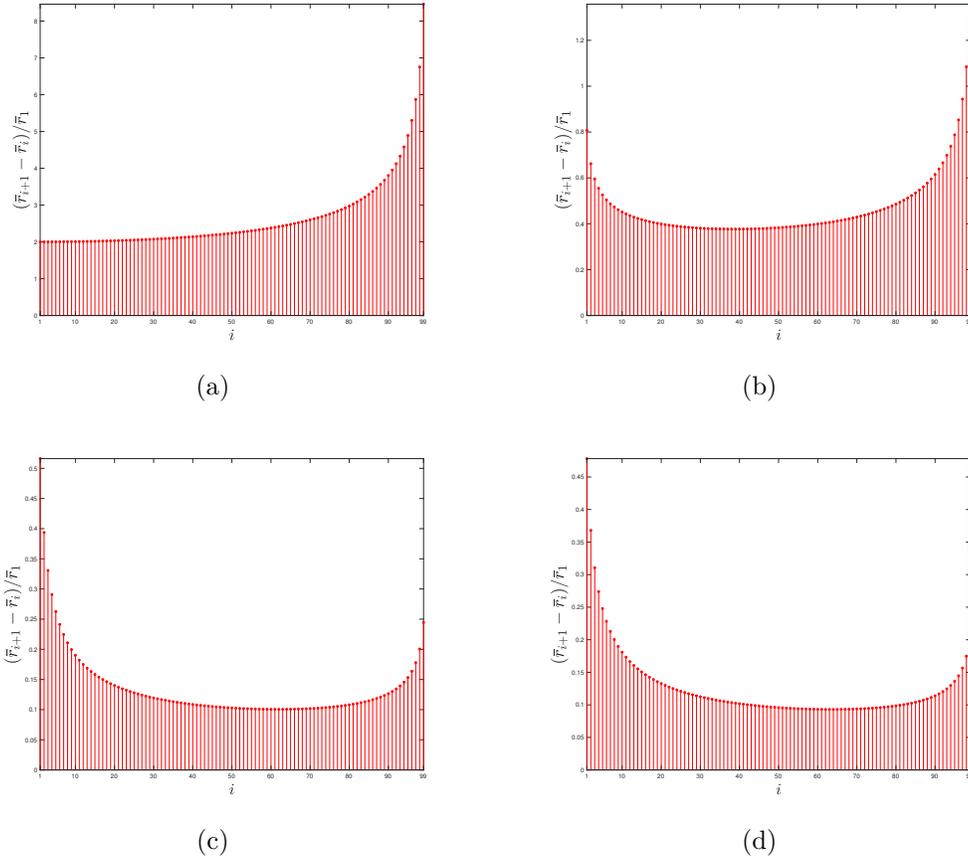


FIGURE 4.2. Écart entre les cercles consécutifs pour (a)  $\mathfrak{S}(100, 2, \bar{r}, (1/\ell, \dots, 1/\ell))$ , (b)  $\mathfrak{S}(100, 6, \bar{r}, (1/\ell, \dots, 1/\ell))$ , (c)  $\mathfrak{S}(100, 100, \bar{r}, (1/\ell, \dots, 1/\ell))$  et (d)  $\mathfrak{S}(100, 200, \bar{r}, (1/\ell, \dots, 1/\ell))$  avec  $\lambda = -1$ .

$$\|\tilde{r} - \bar{r}\|_\infty \leq 7.745618 \times 10^{-14} \quad \text{et} \quad f(\tilde{r}) = 0.$$

— Pour  $n = 100$  et  $\ell = 6$  (cf. figure 4.1(b)), l'approche du polynôme des rayons nous donne l'intervalle

$$[9.476262 \times 10^{-14}, 2.733169 \times 10^{-7}] \subset \text{EI}(p^{100,6}).$$

Ainsi, il existe un unique  $\tilde{r}$  tel que

$$\|\tilde{r} - \bar{r}\|_\infty \leq 9.476262 \times 10^{-14} \quad \text{et} \quad f(\tilde{r}) = 0.$$

Selon la figure 4.2, pour la configuration de Moulton  $\ell = 2$ , l'écart entre les cercles successifs est strictement croissant. Dans tous les autres cas, cet écart semble former une suite convexe. De plus, la plus grande distance entre les cercles successifs correspond à celle

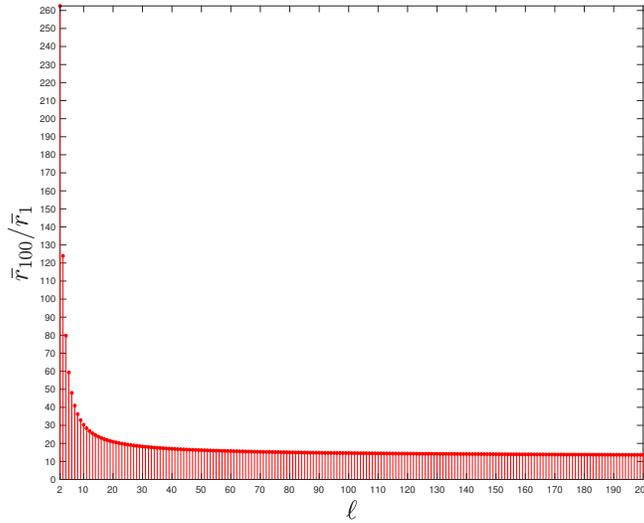


FIGURE 4.3. Évolution du rapport entre le rayon du dernier cercle et celui du premier en fonction du nombre  $\ell$  de masses par cercle pour  $n = 100$ .

des deux premiers cercles pour  $\ell = 6$ . Inversement, pour  $\ell = 100, 200$ , la distance entre les deux derniers cercles est la plus grande au sein de la configuration centrale.

Ceci nous amène aux conjectures suivantes qui sont vérifiées pour toutes les valeurs de  $n$  et de  $\ell$  que nous avons testées.

**Conjecture 1.** *Pour n'importe quelle valeur de  $n \in \mathbb{N}$  et  $\ell = 2$ , lorsque les masses sont identiques pour tous les cercles, la suite  $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$  est strictement croissant.*

**Conjecture 2.** *Pour n'importe quelle valeur de  $n \in \mathbb{N}$  et  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , lorsque les masses sont identiques pour tous les cercles, la suite  $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$  est convexe.*

**Conjecture 3.** *Lorsque les masses sont identiques pour tous les cercles, on a*

$$\arg \max_{1 \leq i \leq n-1} a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell \geq n, \\ n-1 & \text{si } \ell \text{ suffisamment petit par rapport à } n, \end{cases}$$

où  $\arg \max$  est défini comme étant l'argument du maximum, c'est-à-dire  $a_{\arg \max_{1 \leq i \leq n-1}} = \max_{1 \leq i \leq n-1} a_i$ .

Pour un nombre fixé de cercles  $n$ , on s'interroge sur l'évolution des configurations centrales en toile d'araignée en fonction du nombre  $\ell$  de masses par cercle. La figure 4.3, nous suggère que les configurations centrales tendent vers une structure finie. Dans la limite où  $\ell$  tend vers l'infini, nous nous attendons à ce qu'elles donnent lieu à leur homologue continue, à savoir des configurations centrales formées par des cercles concentriques de masse uniformément distribuée.

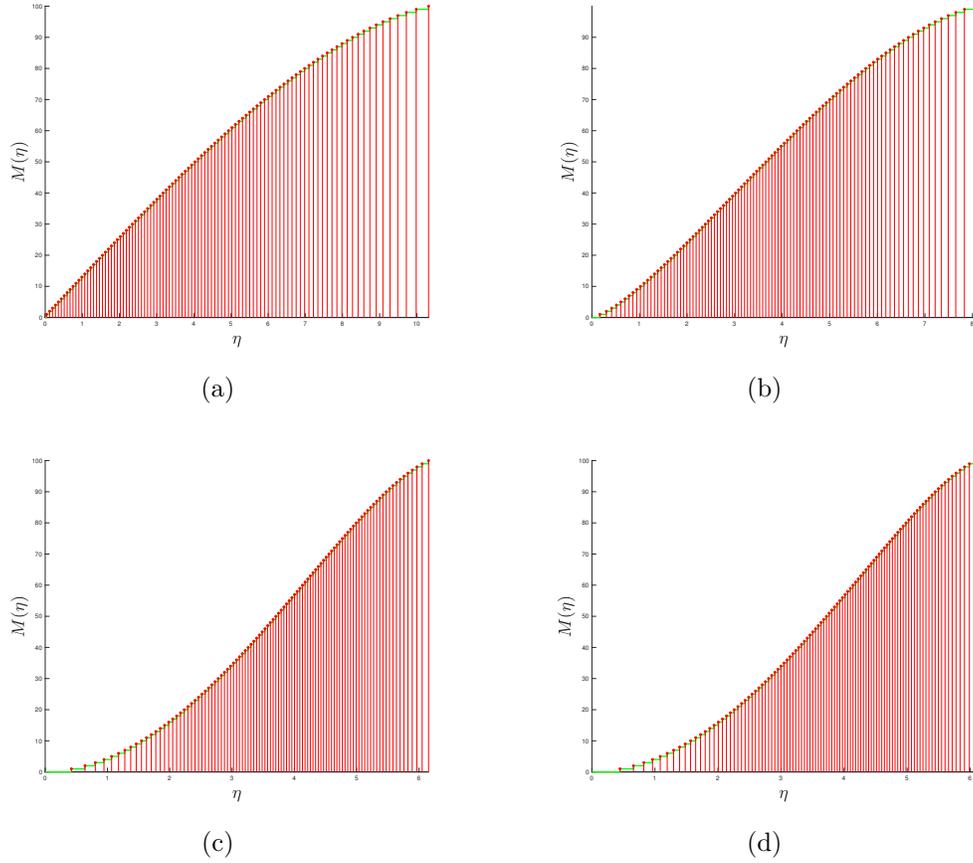


FIGURE 4.4. Distribution de masse  $M(\eta)$  pour (a)  $\mathfrak{S}(100, 2, \bar{r}, (1/\ell, \dots, 1/\ell))$ , (b)  $\mathfrak{S}(100, 6, \bar{r}, (1/\ell, \dots, 1/\ell))$ , (c)  $\mathfrak{S}(100, 100, \bar{r}, (1/\ell, \dots, 1/\ell))$  et (d)  $\mathfrak{S}(100, 200, \bar{r}, (1/\ell, \dots, 1/\ell))$  avec  $\lambda = -1$ .

**Conjecture 4.** Lorsque les masses sont identiques pour tous les cercles, et pour n'importe quelle valeur de  $n \in \mathbb{N}$ , la suite  $\{b_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$  est strictement décroissante et

$$1 = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{r_1(\ell)}{r_1(\ell)} < \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{r_2(\ell)}{r_1(\ell)} < \dots < \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{r_n(\ell)}{r_1(\ell)} = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} b_\ell < +\infty.$$

### 4.3.2. Distribution de masse pour des cercles de masses égales

La distribution de masse d'une configuration en toile d'araignée, avec  $n$  cercles et  $\ell$  masses égales  $m_1, \dots, m_n$  par cercle, est donnée par

$$M(\eta) = \ell \sum_{i=1}^{\chi(\eta)} m_i, \quad \chi(\eta) = \#\{j \in \{1, \dots, n\} : r_j \leq \eta\}.$$

Par la définition de  $\chi(\eta)$ , n'importe quelle homothétie  $r \mapsto \gamma r$  ou un changement dans la masse altère sensiblement la distribution de masse. La distribution de masse est alors

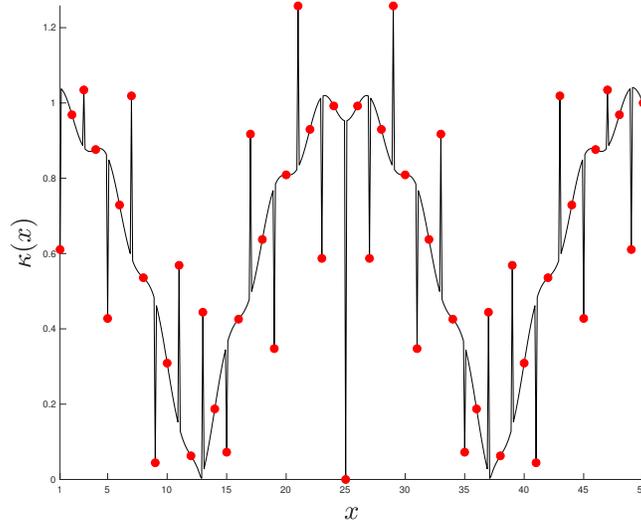


FIGURE 4.5. Graphe de la fonction  $\kappa(x) = \left| \frac{\sin(21\pi(x-25))}{42 \sin\left(\frac{\pi(x-25)}{2}\right)} + \cos\left(\frac{\pi x}{25}\right) \right|$  où  $m_i = \kappa(i)$  avec  $i = 1, \dots, 50$  ( $\bullet$ ).

inhérente à la configuration centrale choisie, dans la mesure où elle n'est donnée que pour les valeurs de  $m$  et de  $\lambda$  préalablement choisies..

D'après la figure 4.4, au coeur de la structure l'accroissement de la masse semble presque linéaire et la pente apparaît nettement supérieure à 1. En prenant  $M(r) = \beta r^\alpha$ , on a  $\log M(r) = \alpha \log r + \log \beta$  et avec la méthode des moindres carrés nous pouvons identifier  $\alpha$  et  $\log \beta$ . Avec Matlab, nous trouvons bel et bien pour les quatre cas de la figure 4.4 que  $\alpha \geq 1$  et  $\beta > 1$ .

**Conjecture 5.** Lorsque  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ,  $\lambda = -1$  et  $m_i = 1/\ell$  pour  $i = 1, \dots, n$ , la distribution de masse est de la forme  $M(r) \approx \beta r^\alpha$  avec  $\beta > 1$  et  $\alpha \geq 1$ .

### 4.3.3. Exemples de configurations centrales pour des cercles de masses distinctes

Un changement dans le choix des masses  $m_i$  devrait engendrer une distribution des cercles différente. Intuitivement, pour des masses décroissantes, les cercles devraient avoir tendance à se rapprocher les uns des autres pour compenser le déficit de masse. Inversement, si les masses sont croissantes nous nous attendons à observer une augmentation de l'écart entre les cercles consécutifs.

Nous illustrons notre propos à l'aide de deux exemples pour lesquels les cercles ont des masses distinctes.

**Exemple 1 :** Soient  $n = 100$ ,  $\ell = 200$ ,  $\lambda = -1$  et  $m_i = 1/i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . L'approche de polynôme des rayons donne l'intervalle

$$[4.417045 \times 10^{-13}, 1.558883 \times 10^{-10}] \subset \text{EI}(p^{100,200}),$$

d'où l'existence de la configuration centrale  $\mathfrak{S}(100,200,\tilde{r},(1,\dots,1/100))$  avec  $\lambda = -1$  pour  $\|\tilde{r} - \bar{r}\|_\infty \leq 4.417045 \times 10^{-13}$ .

**Exemple 2 :** Soient  $n = 50$ ,  $\ell = 200$  et  $m_i = \kappa(i)$  (cf. figure 4.5) pour  $i = 1, \dots, 50$ , où

$$\kappa(x) = \left| \frac{\sin(21\pi(x-25))}{42 \sin\left(\frac{\pi(x-25)}{2}\right)} + \cos\left(\frac{\pi x}{25}\right) \right|.$$

L'approche du polynôme des rayons donne l'intervalle

$$[5.407770 \times 10^{-13}, \rho_*] \subset \text{EI}(p^{50,200})$$

et nous sommes assurés qu'il existe une configuration centrale  $\mathfrak{S}(50,200,\tilde{r},(\kappa(1), \dots, \kappa(50)))$  avec  $\lambda = -1$  pour  $\|\tilde{r} - \bar{r}\|_\infty \leq 5.407770 \times 10^{-13}$ .

Pour le premier exemple, la figure 4.6(c) confirme partiellement nos attentes. En effet, nous observons une augmentation de la distance consécutive entre les cercles à la fin de la configuration centrale. Il s'avère que sous le choix plus drastique  $m_i = e^{-i}$  pour  $i = 1, \dots, n$ , ce phénomène ne semble plus se produire et les distances consécutives entre les cercles sont strictement décroissantes.

Dans les deux exemples, l'allure de  $M(\eta)$  est semblable aux distributions de masses lorsque les cercles étaient de masses égales (cf. figure 4.4). Les cercles voisins ont tendance à se rapprocher lorsqu'un cercle est de masse plus faible, de sorte qu'ils compensent la « perte de masse ».

**Conjecture 6.** *L'allure générale de la distribution de masse est intrinsèque aux configurations centrales en toile d'araignée.*

Cette dernière suggère de nombreuses recherches intéressantes sur la quantification de la forme de la distribution de masse. À première vue, une fonction cubique pourrait être une bonne approximation de  $M(\eta)$ .

Enfin, il serait intéressant d'identifier les paramètres essentiels qui contrôlent sa forme. Par la conjecture 4 et la figure 4.4, la densité des cercles, représentée par  $\ell$ , en est un.

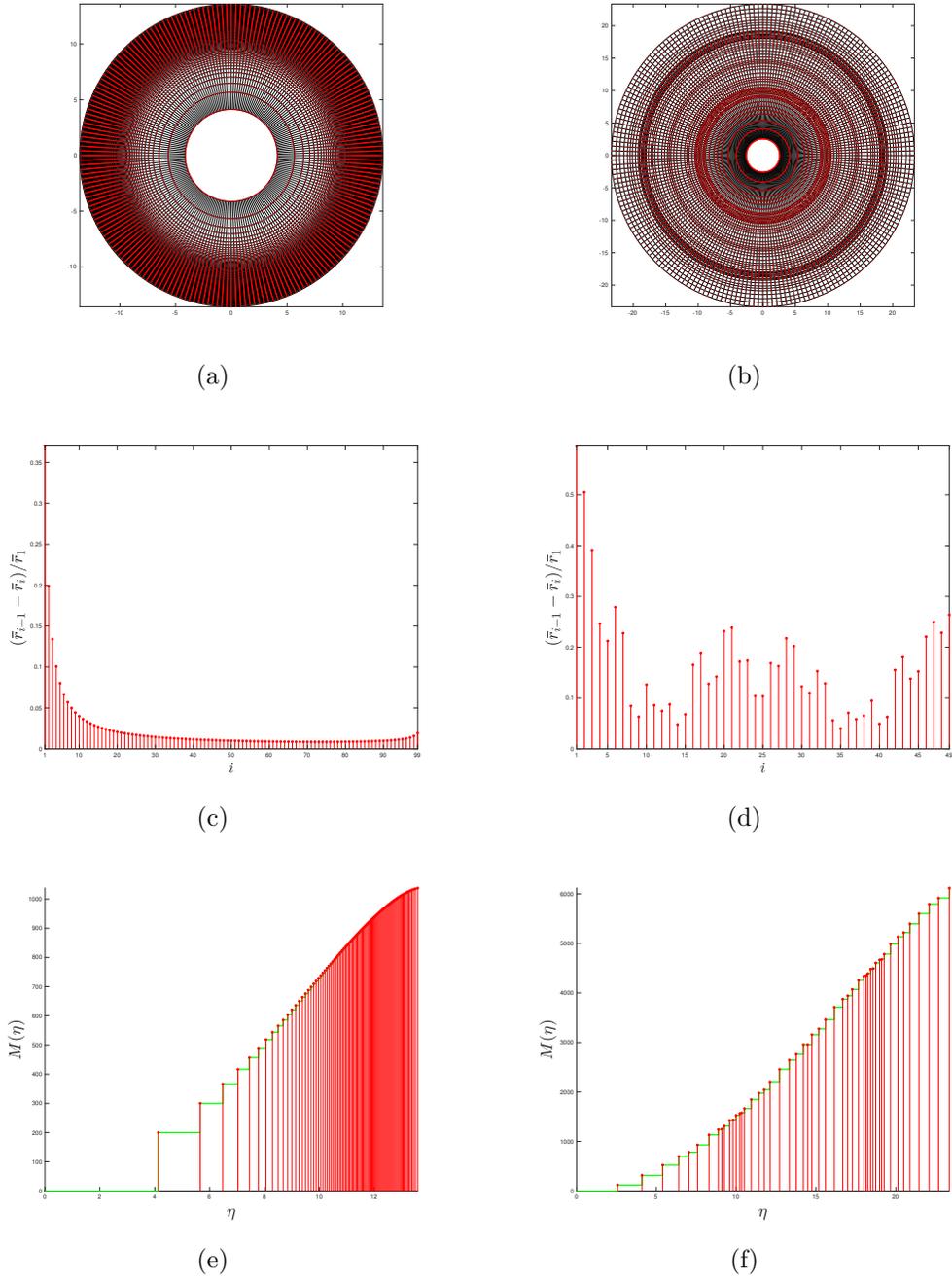


FIGURE 4.6. Configurations centrales (a)  $\mathfrak{S}(100,200,\tilde{r},(1,\dots,1/100))$  et (b)  $\mathfrak{S}(50,200,\tilde{r},(\kappa(1),\dots,\kappa(50)))$  où (c)-(d) représentent l'écart entre les cercles successifs respectivement et (e)-(f) leur distribution de masses respective.

# CONCLUSION

---

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence des configurations centrales en toile d'araignée à travers deux méthodes analytiques et une méthode numérique.

Plus précisément, leur existence a été démontrée pour  $n = 2, 3, 4$  cercles et un nombre arbitraire  $\ell$  de masses strictement positives par cercle. En outre, l'existence et l'unicité, modulo  $\lambda$ , de ces configurations centrales ont été obtenues pour un nombre arbitraire  $n$  de cercles et  $\ell = 2, \dots, 9$  masses strictement positives par cercle. Ce résultat a pu être étendu dans les cas  $\ell = 10, \dots, 18$  en bornant le nombre de cercles  $n$  dans chacun des cas.

Par ailleurs, nous avons également montré l'ensemble des résultats précédents pour les configurations centrales en toile d'araignée avec une masse strictement positive située au centre de masse.

Néanmoins, devant les difficultés rencontrées dans les méthodes analytiques, nous nous sommes intéressés à l'élaboration d'une preuve assistée par ordinateur. Nous avons fourni un algorithme utilisable pour n'importe quel choix de  $n$ ,  $\ell$  (dans les limites de l'UCT et de la RAM de l'appareil) et de masses positives. Le programme détermine rigoureusement un intervalle d'existence délimitant un voisinage de la solution numérique, calculée en amont, et dans lequel la véritable solution analytique se trouve. Toutes les valeurs de  $n$ ,  $\ell$  et de masses positives testées nous ont conduit à l'existence d'une solution. En particulier, nous avons prouvé l'existence des configurations centrales en toile d'araignée pour tout  $n \leq 100$ ,  $\ell \leq 200$  pair et n'importe quel choix de masses strictement positives tel que  $m_1 = \dots = m_n$ . Ceci renforce la conjecture de Saari que de telles configurations centrales existent pour n'importe quel choix de  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  et de masses positives.

Cette dernière démarche a également permis de fournir des renseignements quantitatifs sur ces configurations centrales. Le profil des rayons et la distribution de masses semblent obéir à des lois mathématiques qu'il vaut la peine d'explorer.



## Références

---

- [1] Corbera, M., J. Delgado et J. Llibre. 2009, «On the existence of central configurations of  $p$  nested  $n$ -gons», *Qual. Theory Dyn. Syst.*, vol. 8, n° 2, doi :10.1007/s12346-010-0004-y, p. 255–265, ISSN 1575-5460. URL <https://doi.org/10.1007/s12346-010-0004-y>.
- [2] Hungria, A., J.-P. Lessard et J. D. Mireles James. 2016, «Rigorous numerics for analytic solutions of differential equations : the radii polynomial approach», *Math. Comp.*, vol. 85, n° 299, doi : 10.1090/mcom/3046, p. 1427–1459, ISSN 0025-5718. URL <https://doi.org/10.1090/mcom/3046>.
- [3] Hénot, O. 2018, «Preuves et animation pour les configurations en toile d'araignée», <http://www.dms.umontreal.ca/~henoto>.
- [4] Maxwell, J. C. 1859, «On the stability of the motion of saturn's ring», Macmillan and Co.
- [5] Moeckel, R. et C. Simó. 1995, «Bifurcation of spatial central configurations from planar ones», *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 26, n° 4, doi :10.1137/S0036141093248414, p. 978–998, ISSN 0036-1410. URL <https://doi.org/10.1137/S0036141093248414>.
- [6] Moulton, F. R. 1910, «The straight line solutions of the problem of  $n$  bodies», *Annals of Mathematics*, vol. 12, n° 1, doi :10.2307/2007159, p. 1–17.
- [7] Rump, S. M. 1999, «INTLAB - INTerval LABoratory», In Tibor Csendes, editor, *Developments in Reliable Computing*, 77–104 p.. URL <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump>.
- [8] Saari, D. G. 2015, «Mathematics and the "dark matter" puzzle», *The American Mathematical Monthly*, vol. 122, n° 5, doi :10.4169/amer.math.monthly.122.5.407, p. 407–423.
- [9] Saari, D. G. 2015, «N-body solutions and computing galactic masses», *The Astronomical Journal*, doi :10.1088/0004-6256/149/5/174, p. 149–174.





```

25 % Z0 %
26 %%%%%%%%%%
27
28 Z0 = sup(norm(eye(n)-iA*iDF, inf));
29
30 %%%%%%%%%%
31 % Z2 %
32 %%%%%%%%%%
33
34 r_star = 1e-5;
35 ixr = infsup(x-r_star, x+r_star);
36
37 iDDF = iDDF_radii(ixr, im, n, l);
38
39 Z2 = sup(norm((iA*iDDF), inf));
40
41 p=[Z2 -(1-Z0) Y0];
42
43 r = sort(roots(p));
44
45 % check that p(r-)<0 and p(r+)<0 with r- =1.1*root- and r+=0.9*
    root+
46 irm=intval('1.1')*intval(r(1));
47 irp=intval('0.9')*intval(r(2));
48
49 verifm = Z2*irm^2 + (Z0-1)*irm + Y0;
50 verifp = Z2*irp^2 + (Z0-1)*irp + Y0;
51
52
53 if (verifm < 0) && (verifp < 0) && (r(1) < r_star)
54     fprintf('SUCCESS FOR S(%g,%g,r,m): ',n,l)
55     fprintf('EI = [%0.6e , %0.6e]\n',r(1),min(r_star,r(2)))
56 else
57     fprintf('FAILURE !\n')
58     fprintf('This DOES NOT necessarily mean we cannot\n')

```

```
59     fprintf('enclose the true solution.\n')
60     fprintf('Consider altering r_* and try again.\n')
61 end
```