

Université de Montréal

**Modélisation hybride du cycle d'activité solaire: évolution couplée du flux magnétique
photosphérique et de la dynamo interne**

par
Alexandre St-Laurent Lemerle

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures et postdoctorales
en vue de l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en physique

Août, 2017

© Alexandre St-Laurent Lemerle, 2017.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures et postdoctorales

Cette thèse intitulée:

Modélisation hybride du cycle d'activité solaire: évolution couplée du flux magnétique photosphérique et de la dynamo interne

présentée par:

Alexandre St-Laurent Lemerle

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

Pierre Bergeron,	président-rapporteur
Paul Charbonneau,	directeur de recherche
Patrick Dufour,	membre du jury
David Hathaway,	examineur externe
Jiri Patera,	représentant du doyen de la FESP

Thèse acceptée le: 16 janvier 2018

RÉSUMÉ

La dynamo magnétohydrodynamique (MHD) solaire requière un mécanisme de régénération cyclique du champ magnétique poloïdal global, que la force de Coriolis peut fournir, mais dont l'échelle spatiale et le lieu d'occurrence restent encore incertains malgré un siècle d'analyse théorique et quelques décennies de simulation numérique. Tandis que les modèles en champs moyens axisymétriques et certains modèles tridimensionnels (3D) globaux trouvent cette source dans un excès d'hélicité aux petites échelles convectives, les modèles de type Babcock–Leighton (BL) proposent plutôt que le mécanisme dominant soit directement dû à la torsion des boucles de flux ascendantes responsables de l'émergence des régions magnétiques bipolaires (BMR) (et de la formation des taches) à la surface du Soleil.

Nous optons ici pour cette seconde classe de modèles, en une approche plutôt phénoménologique permettant de reproduire au mieux les observations, dans une représentation fidèle et compréhensible des processus physiques en cause aux multiples échelles spatio-temporelles, mais tout en cherchant à conserver une efficacité d'exécution numérique qui permette des analyses poussées et répétées. D'une part, une modélisation bidimensionnelle (2D) de la surface solaire (simulation d'évolution du flux de surface ou SFT) est requise afin de rendre compte des observations de l'émergence, du transport et de la diffusion du flux magnétique photosphérique. D'autre part, les tendances globales du patron d'émergence indiquent une structure ordonnée, approximativement axisymétrique, du champ magnétique dans la zone convective, ce qui requière donc minimalement une modélisation dynamo 2D dans le plan méridien. En combinant directement ces deux configurations minimales requises, nous élaborons un nouveau modèle dynamo BL couplé $2 \times 2D$: l'émergence probabiliste des BMR à partir du champ magnétique interne fournissant le terme source à la SFT, et le résultat de la SFT servant de terme source à la dynamo interne.

Afin d'en faire un modèle le plus près possible du Soleil réel, une double calibration est effectuée, à l'aide d'un algorithme génétique, afin d'obtenir des valeurs optimales (avec barres d'incertitudes) pour 18 paramètres libres : (1) le résultat de la SFT est comparé à une carte magnétographique de surface (Lemerle et al. (2015) (Article I)), et (2) le résultat de la dynamo interne est comparé au "diagramme papillon" des BMR observées (Lemerle & Charbonneau (2017) (Article II)). Nous obtenons ainsi un modèle dynamo BL couplé $2 \times 2D$ qui sait reproduire plusieurs comportements solaires (voir Article II) : émergence de BMR aux basses latitudes respectant les statistiques observées, trainées magnétiques unipolaires aux moyennes latitudes, accumulation adéquate de flux aux pôles au minimum d'activité, fort couplage hémisphérique, corrélation à potentiel prédictif entre amplitude du dipôle en fin de cycle et amplitude du cycle d'activité suivant, fluctuations d'amplitude à long terme, phases d'arrêts tel le minimum de Maunder, etc. Le travail encore en cours au Groupe de Recherche en Physique

solaire (GRPS) montre que cette dynamo est hautement sujette aux fluctuations stochastiques dues à la spécificité de la série d'émergences, que, par ailleurs, ce sont de telles fluctuations qui parfois entraînent la dynamo vers une phase d'arrêt, qu'un mécanisme dynamo secondaire doit être présent pour subséquemment redémarrer le système, mais que, malgré cette stochasticité intrinsèque, un fort potentiel prédictif, éventuellement de l'ordre d'un cycle d'activité entier, est envisageable.

Mots clés : dynamo — Soleil : activité — Soleil : champs magnétiques — Soleil : général — Soleil : intérieur — Soleil : photosphère — Soleil : taches solaires

ABSTRACT

The solar magnetohydrodynamical (MHD) dynamo requires a mechanism of cyclic regeneration for the global poloidal magnetic field, that can be provided by the Coriolis force, but for which spatial scale and location remain uncertain despite a century of theoretical analysis and decades of numerical simulations. While axisymmetric mean fields and global 3D models find this source in an excess of helicity at small convective scales, Babcock–Leighton (BL)-type models rather suggest that the dominant mechanism is due to the torsion of rising flux loops ultimately responsible for the emergence of bipolar magnetic regions (BMRs) (and formation of sunspots) at the surface of the Sun.

We opt here for this second class of models, in a phenomenological approach that seeks to optimally reproduce observations, while accurately and intelligibly accounting for the physical processes that occur at multiple spatial and temporal scales, while also maintaining a numerical efficiency that allows for detailed and extended analyses. On one hand, a two-dimension (2D) modeling of the solar surface (namely surface flux transport (SFT)) is required to account for the observed emergence, transport, and diffusion of photospheric magnetic flux. On the other hand, the globally structured, roughly axisymmetric, magnetic fields in the convection zone, as inferred by the shape of the emergence patterns (the “butterfly diagram”), minimally require a 2D dynamo modeling in the meridional plane. Combining these two minimal configurations allows us to build a new coupled 2×2 D BL dynamo model, where the probabilistic emergence of BMRs from deep toroidal field provides a source for the SFT, and the output of the SFT in turn provides a source for the internal dynamo.

In order to make this model most closely solar-like, a double calibration is performed, through a genetic algorithm, to obtain optimal values (with error estimates) for 18 free parameters: (1) the SFT results are compared with magnetographic maps of the solar surface (Lemerle et al. (2015) (Paper I)), and (2) the internal dynamo results are compared with the observed “butterfly diagram” of BMRs (Lemerle & Charbonneau (2017) (Paper II)). We thus obtain a coupled 2×2 D BL dynamo model that consistently reproduces several solar features (see Paper II): low-latitude BMR emergences that follow observed statistics, mid-latitude unipolar flux strips, suitable polar cap flux at activity minima, strong hemispheric coupling, forecast-enabling correlations between amplitude of the axial dipole at cycle minima and amplitude of the subsequent cycle, long term amplitude fluctuations, occurrence of grand minima (like the Maunder minimum), etc. Work still in progress at the Groupe de Recherche en Physique solaire (GRPS) shows that this dynamo is highly subjected to stochastic fluctuations due to the specific realization of random emergence series, that it is these fluctuations that sometimes bring the dynamo into a descending phase toward a grand minimum, that a second order dynamo mechanism must exist to subsequently restart the system, but that, despite this inherent stochasticity,

the model provides a strong predictive capability, possibly of the order of a full activity cycle.

Keywords: dynamo — Sun: activity — Sun: general — Sun: interior — Sun: magnetic fields — Sun: photosphere — Sun: sunspots

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xv
LISTE DES ABRÉVIATIONS	xvii
REMERCIEMENTS	xix
DÉDICACE	xxi
CHAPITRE 1 :INTRODUCTION	1
1.1 Petite histoire de l'activité magnétique solaire	1
1.1.1 Le cycle d'activité magnétique du Soleil	1
1.1.2 Origine de l'activité magnétique solaire	3
1.2 Flux magnétique à la surface du Soleil : observations	5
1.2.1 Aux petites échelles : le réseau magnétique	6
1.2.2 Émergence de flux magnétique	8
1.2.3 Évolution du flux magnétique de surface aux grandes échelles	13
1.3 Flux magnétique à la surface du Soleil : modélisation SFT	16
1.3.1 Le mécanisme de Babcock–Leighton : en images	17
1.3.2 Modèles SFT basés sur le transport par marche aléatoire discrète	19
1.3.3 Modèles SFT basés sur l'advection–diffusion du champ magnétique	26
1.3.4 Évolution du flux magnétique de surface (SFT), en résumé	36
1.4 Modèles dynamo de type Babcock– Leighton (BL)	36
1.4.1 Régime cinématique	37
1.4.2 Axisymétrie	38
1.4.3 Conditions initiale et limites	39

1.4.4	Ingrédients	40
1.4.5	Différents modèles et termes sources	43
1.4.6	Résultats représentatifs et brève discussion	52
1.5	Plan de la thèse et contribution aux articles publiés	59

CHAPITRE 2 : A COUPLED 2×2 D BABCOCK–LEIGHTON SOLAR DYNAMO

	MODEL. I. SURFACE MAGNETIC FLUX EVOLUTION	63
2.0	Abstract	63
2.1	Introduction	64
2.2	Model	66
2.2.1	Meridional circulation	67
2.2.2	Differential rotation	69
2.2.3	Magnetic diffusivity	69
2.2.4	Numerical solution	69
2.2.5	Numerical optimization	70
2.3	Solar cycle 21 : a case study	72
2.3.1	Surface emergence database	72
2.3.2	Initial condition	74
2.3.3	Reference case	75
2.3.4	Optimal solution	77
2.3.5	Parameter Analysis	79
2.3.6	Variable meridional flow	87
2.4	Emergence-related variability	88
2.5	Conclusions	90
2.A	Synthetic database	92
2.A.1	Number of Emergences	93
2.A.2	Area distribution	94
2.A.3	Latitudinal distribution and cycle overlaps	96
2.A.4	Longitudinal distribution	98
2.A.5	Magnetic flux distribution	98
2.A.6	Magnetic bipole separations	100
2.A.7	Magnetic bipole tilts	101

CHAPITRE 3 : A COUPLED 2×2D BABCOCK–LEIGHTON SOLAR DYNAMO	
MODEL. II. REFERENCE DYNAMO SOLUTIONS	103
3.0 Abstract	103
3.1 Introduction	104
3.2 Model	107
3.2.1 Basic Ingredients	108
3.2.2 The Flux Transport Dynamo Equations	110
3.2.3 Surface Flux Transport	111
3.2.4 Numerical Solution and Coupling	112
3.3 Model Calibration	115
3.3.1 Validation with the Miesch & Dikpati (2014) (MD2014) model	115
3.3.2 Numerical Optimization	118
3.3.3 Genetic algorithm (GA) : PIKAIA	119
3.3.4 Choosing Parameter Ranges	119
3.3.5 Optimal Solution for Cycle 21	120
3.4 A Solar-like Dynamo Solution	124
3.4.1 Quasi-Linear Regime	124
3.4.2 Tilt-Quenching and Reference Dynamo Solutions	126
3.4.3 Long Term Variability	130
3.5 Discussion	132
3.6 Conclusions	135
CHAPITRE 4 : CONCLUSION	139
4.1 Résumé	139
4.2 Critique et perspectives d'améliorations	141
4.2.1 Profil de circulation méridienne	142
4.2.2 Rétroaction dynamique sur les écoulements	143
4.2.3 Écoulements convergents vers les régions actives	144
4.2.4 Évolution à long terme et redémarrage de la dynamo	144
4.3 Travaux en cours	145
4.3.1 Activité solaire à long terme : grands minima et maxima	145
4.3.2 Stochasticité, fluctuations d'amplitude et asymétries hémisphériques	147
4.3.3 Prédiction de l'activité solaire	150
4.4 Avenir et contexte professionnel	151

BIBLIOGRAPHIE 153

LISTE DES TABLEAUX

2.I	Optimal Parameter Values (Article I)	78
3.I	Optimal Parameter Values (Article II)	116

LISTE DES FIGURES

1.1	“Diagramme papillon” et évolution du nombre de taches solaires	2
1.2	Magnétogramme synoptique de la composante radiale du champ magnétique à la surface du Soleil	3
1.3	Images visible et magnétographique du disque solaire	6
1.4	Magnétogramme d’une région photosphérique tranquille	8
1.5	Mesures Doppler moyennes de circulation méridienne au cours des cycles solaires 22 et 23	15
1.6	Illustration schématique du mécanisme de Babcock–Leighton (BL)	18
1.7	Histogramme de la densité de flux et image magnétographique du réseau magnétique	23
1.8	Magnétogrammes synthétiques obtenus par modélisation en marche aléatoire . .	24
1.9	Instantané d’une simulation de l’évolution du flux magnétique à la surface du Soleil	30
1.10	Évolution temporelle du moment dipolaire axial	32
1.11	Champ magnétique polaire maximal accumulé au minimum d’activité	33
1.12	Magnétogrammes latitude–temps observé et synthétique pour le cycle 21	34
1.13	Distribution latitudinale du champ magnétique et évolution temporelle du champ magnétique polaire	35
1.14	Schématisation simplifiée du processus dynamo en champ moyen aux grandes échelles	39
1.15	Coupes méridionales d’un profil analytique de rotation différentielle et d’un champ de circulation méridienne	41
1.16	Profils magnétiques d’une émergence en double anneau	48
1.17	Exemple de perturbation du champ de vitesse permettant de générer une émergence bipolaire	49
1.18	Champ toroïdal, fonction d’émergence et densité d’émergences pour une solution dynamo BL couplée $2 \times 2D$ optimale	52
1.19	Champ magnétique toroïdal, radial et poloïdal pour une simulation dynamo BL de type effet- α délocalisé	55
1.20	Champs magnétiques poloïdal et radial pour une simulation à doubles anneaux .	56
1.21	Champs magnétiques toroïdal et radial pour une simulation BL 3D	57
1.22	Exemple de séquence temporelle obtenue d’une simulation dynamo BL couplée $2 \times 2D$	58
2.1	Sample profiles of surface meridional circulation	68

2.2	Magnetographic data and simulation results for the duration of cycle 21	73
2.3	Latitudinal distributions of B_R at activity minima	76
2.4	Fitness χ^{-2} as a function of parameter values	80
2.5	Distribution of solutions in the parameter space	82
2.6	Fitness χ^{-2} as a function of a combination of parameters q and v	83
2.7	Optimal meridional circulation surface profile, compared with observations . . .	83
2.8	Fitness χ^{-2} as a function of parameters u_0 and η_R	86
2.9	PDFs of axial dipole moment, time for polarity reversal and delay between hemispheres	89
2.10	Number of emergences, total area, monthly International Sunspot Number (SSN), and their temporal evolution	94
2.11	PDF of areas and log-normal best fit	95
2.12	Density plots of the number of emergences as a function of latitude and time . .	97
2.13	Distribution of areas, fluxes, separations, tilts for observed BMRs during cycle 21	99
3.1	Time–latitude contour plots of the toroidal magnetic field component, emergence fonction, and density of emerged BMRs, for different realizations of the $2 \times 2D$ dynamo model	118
3.2	Fitness C as a function of “emergence” parameter values	121
3.3	Synthetic “stability diagram” used as a mask on the toroidal magnetic field component	122
3.4	Fitness C as a function of model parameter values	123
3.5	Distribution of solutions in the parameter space	124
3.6	Model behavior as a function of dynamo number	125
3.7	A representative solar-like tilt-quenched $2 \times 2D$ dynamo solution	127
3.8	Correlations between axial dipole, cycle amplitude, and cycle length	129
3.9	Temporal power spectra of the solar SSN and simulated pseudo-SSN	131
3.10	Other solar-like tilt-quenched $2 \times 2D$ dynamo solutions	132
3.11	Observed and modeled latitudinal profiles of surface meridional flow	133
4.1	Cartes latitude–temps de la densité d’émérgences et du champ magnétique radial en surface, pour une simulation dynamo BL couplée $2 \times 2D$ augmentée d’un effet α secondaire	146
4.2	Effet du retrait d’une BMR marginale sur une simulation BL couplée $2 \times 2D$. .	149
4.3	Potentiel prédictif du modèle BL couplé $2 \times 2D$	150

LISTE DES ABRÉVIATIONS

2D deux dimensions

2D bidimensionnel

2D two-dimension

3D trois dimensions

3D tridimensionnels

3D three-dimension

Article I Lemerle et al. (2015)

Article II Lemerle & Charbonneau (2017)

BL Babcock–Leighton

BMR région magnétique bipolaire

BMR bipolar magnetic region

FTD flux transport dynamo

GA Genetic Algorithm

GRPS Groupe de Recherche en Physique solaire

MD2014 Miesch & Dikpati (2014)

MHD magnétohydrodynamique

MHD magnetohydrodynamics

Paper I Lemerle et al. (2015)

Paper II Lemerle & Charbonneau (2017)

PDF probability density function

SFT surface flux transport

SSN International Sunspot Number

WS1989 Wang & Sheeley (1989)

REMERCIEMENTS

Avec trois enfants en bas âge et un travail d'enseignant au cégep, la réalisation de cette thèse n'aurait pas été possible sans l'immense et sincère soutien quotidien, physique et moral, de ma partenaire de vie de ces quinze dernières années, Delphine Quievy. Merci d'être toujours là, merci de croire en moi, merci pour la grandeur de cette relation que nous avons ! Je remercie aussi mes enfants, Noélie, Viviane et Anaïs, d'avoir accepté de jouer et virevolter autour de moi durant mon travail, à des moments où vous auriez davantage eu besoin de mon attention.

Je remercie mes parents, beaux-parents, sœurs, grands-parents, amis, de la Gaspésie, de Montréal et du monde, de s'être occupés des enfants à de multiples reprises pendant que mon travail n'en finissait pas, même en "vacances", de s'enquérir continuellement et avec bienveillance de l'état d'avancement de cette thèse et, particulièrement, de l'état psychologique de celui qui en vivait les moments de satisfaction et d'insatisfaction.

Je remercie bien évidemment mon directeur de recherche, Paul Charbonneau, pour son professionnalisme, sa compétence profonde et humble en physique solaire, en physique en général, pour sa grande pédagogie, son amour de transmettre et, surtout, sa bienveillance dans la façon de traiter et comprendre les étudiants sous sa supervision, son sens profond de l'équilibre entre réalités professionnelle et familiale. Je n'aurais pu mieux tomber !

Je remercie mes collègues, collaborateurs et amis de l'Université de Montréal, qui m'ont accompagné au long de ce parcours, de réponses à mes questions, d'échanges, d'encouragements, de divertissements : Dorian Pirot, Antoine Strugarek, Julien Vandeportal, Corinne Simard, Patrice Beaudoin, Kim Thibault, Cassandra Bolduc, Jean-François Cossette, Roxane Barnabé, Caroline Dubé, Arnaud Carignan-Dugas, Deniz Olcek, François Labonville, Melinda Nagy.

Je remercie mes collègues du Collège de Bois-de-Boulogne pour leur souplesse, pour avoir jonglé avec des tâches plus compliquées dues à mes absences, pour avoir patienté gentiment depuis plusieurs années que je sois enfin plus disponible "quand j'aurai fini ma thèse"...

À Noélie, Viviane et Anaïs, nées avec cette thèse.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 PETITE HISTOIRE DE L'ACTIVITÉ MAGNÉTIQUE SOLAIRE

1.1.1 LE CYCLE D'ACTIVITÉ MAGNÉTIQUE DU SOLEIL

Les premiers pas vers la découverte du cycle d'activité du Soleil remontent au début du dix-septième siècle, avec les premières observations télescopiques systématiques des taches solaires, par Galilée et ses contemporains. À l'époque, l'explication de la nature même des taches reste bien sûr matière à débats, remettant particulièrement en cause l'idée conventionnelle d'un astre parfait. Comme premiers résultats intéressants tirés de ces observations : mesure de la rotation du Soleil en $\simeq 27$ jours, et inclinaison de son axe par $\simeq 7$ degrés. Il faut toutefois attendre plus de deux siècles, en 1843, avant la découverte par Schwabe du cycle de $\simeq 11$ ans dans le nombre moyen de taches observées (Figure 1.1, panneau du bas), puis quelques années de plus (Carrington, 1858) pour détecter un déplacement graduel de la zone d'émergence des taches vers l'équateur. Le "diagramme papillon" présenté à la Figure 1.1 (panneau du haut) illustre de façon élégante cette évolution du patron d'émergence des taches solaires.

De telles tendances spatiales et temporelles ne vont pas sans nécessiter une explication physique, et c'est avec la découverte de la nature magnétique des taches, au début du vingtième siècle, que peut enfin débiter l'investigation formelle des mécanismes responsables du cycle d'activité magnétique du Soleil. La raison d'être des taches sombres devient immédiatement plus claire : des champs magnétiques intenses doivent manifestement perturber le transport de la chaleur, conduisant à des températures locales plus faibles. En effet, la température du plasma au centre des taches est de l'ordre de 4000 °C (pic d'émission du corps noir dans l'infrarouge proche, vers les 800 nm), comparativement à $\simeq 6000\text{ °C}$ pour le reste de la photosphère (pic d'émission du corps noir vers les 500 nm , près du centre du spectre visible).

En 1908, G. E. Hale utilise la séparation spectrale de certaines raies par effet Zeeman et mesure des

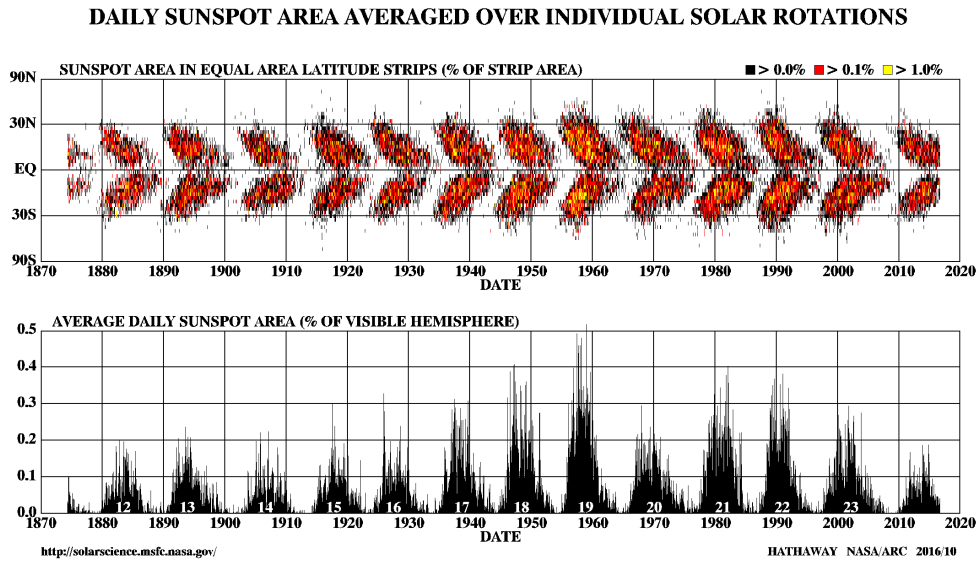


Figure 1.1 – Panneau du haut : “diagramme papillon” des taches solaires, c’est-à-dire la fraction de la surface en longitude couverte par des taches, à latitude donnée, en fonction du temps. Panneau du bas : fraction du disque solaire visible couvert par des taches (moyenne quotidienne). (<http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/bfly.gif>)

amplitudes de $\simeq 10^3 - 10^4$ G dans ces régions magnétiques actives. Il constate aussi que les groupes de taches émergent systématiquement par paires de polarité opposée. Ces dipôles ont tendance à être orientés est-ouest sur la surface solaire, de façon approximativement uniforme en longitude, ce qui suggère comme origine un champ magnétique interne toroïdal (azimutal) intense. La migration progressive vers l’équateur du lieu d’émergence de ces manifestations de surface serait associée à une migration équivalente du champ magnétique toroïdal au cours du cycle d’activité. En poursuivant ces travaux, Hale et al. (1919) découvrent mieux : ces régions magnétiques bipolaires (bipolar magnetic regions, BMR) sont organisées tel que (1) la polarité la plus à l’ouest (en aval du mouvement de rotation) est presque toujours du même signe dans un hémisphère donné ; (2) cet ordre est-ouest est inversé entre les deux hémisphères ; et (3) cet ordre est inversé d’un cycle de taches à l’autre. Ainsi, le champ magnétique toroïdal associé à ces émergences serait antisymétrique par rapport à l’équateur, et s’inverserait de façon cyclique sur une période de $\simeq 22$ ans.

Finalement, le travail patient d’un collègue de Hale, A. H. Joy, permet d’obtenir un autre résultat intéressant : la polarité “ouest” d’une BMR tend à être située légèrement plus près de l’équateur. En moyenne, l’axe des dipôles est donc incliné par rapport à la direction est-ouest, de $\simeq 0 - 4^\circ$ près de l’équateur à $\simeq 12 - 20^\circ$ aux latitudes maximales d’émergence ($\simeq 40^\circ$). Ainsi, chaque émergence bipolaire inclinée contribue à un moment dipolaire axial net, dans plus de 80% des cas opposé à celui accumulé au minimum d’activité précédent (voir Wang & Sheeley, 1989, ci-après WS1989). WS1989 montrent aussi que le moment dipolaire axial net émergé au cours du cycle 21 atteint presque 3 fois

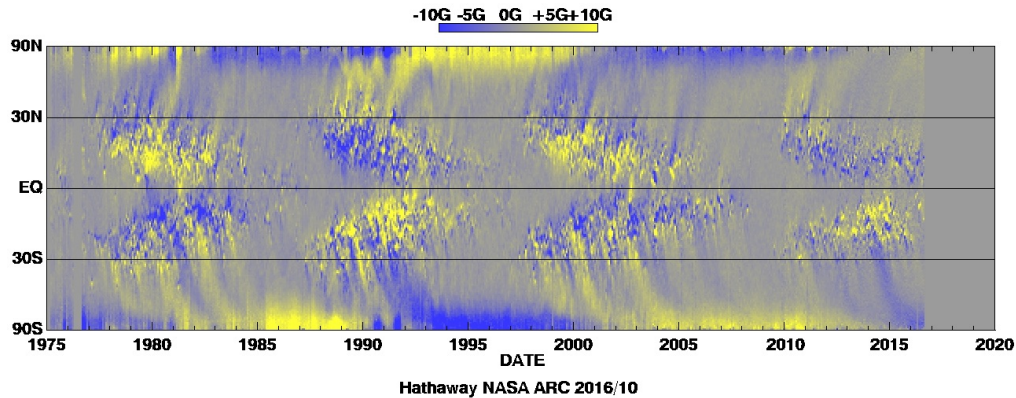


Figure 1.2 – Magnétogramme synoptique de la composante radiale du champ magnétique à la surface du Soleil. Le flux magnétique s’accumule aux pôles pour piquer au minimum d’activité des taches : un décalage d’un quart de cycle magnétique. (<http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/magbfly.jpg>)

la valeur requise pour inverser le précédent dipole (de l’ordre de $5 \text{ G} \cdot R^2$, où R est le rayon solaire). En terme de flux magnétique “absolu” (c’est-à-dire en valeur absolue, tous signes confondus, le flux magnétique net étant toujours nul sur l’ensemble de la surface solaire), c’est $\simeq 10^{19} \text{ Mx}^1$ à $\simeq 10^{23} \text{ Mx}$ par BMR, pour un total de $\simeq 10^{25} \text{ Mx}$ par cycle, soit 100 à 1000 le flux mesuré dans les calottes polaires au minimum d’activité ($\simeq 10^{22} - 10^{23} \text{ Mx}$). C’est donc tout un ensemble de processus de destruction, d’amplification et de transport du flux magnétique de surface qui semble responsable du champ magnétique, pratiquement dipolaire, bâti au minimum d’activité.

Le champ magnétique poloïdal (dans le plan méridien) aux grandes échelles maintenant associé à ce flux magnétique polaire s’inverserait donc aussi de façon cyclique sur une période de 22 ans, mais déphasé d’un quart de cycle avec le champ toroïdal. Des observations plus récentes des facules polaires (Muñoz-Jaramillo et al., 2013, Sheeley, 1991) ainsi que l’enregistrement systématique du champ magnétique sur l’ensemble de la photosphère (depuis $\simeq 1970$, voir <http://solarscience.msfc.nasa.gov>) et sa représentation sous forme de magnétogramme synoptique (voir Figure 1.2), confirment ce résultat.

1.1.2 ORIGINE DE L’ACTIVITÉ MAGNÉTIQUE SOLAIRE

Malgré l’apparence désordonnée des patrons magnétiques aux petites et moyennes échelles à la surface du Soleil, des tendances nettes sont observées aux grandes échelles, indiquant clairement une source “unique” pour l’ensemble de cette activité. Il est donc temps de se questionner sur l’origine de tels champs magnétiques intenses.

¹1 Mx (Maxwell) = $1 \text{ G cm}^2 = 10^{-8} \text{ T m}^2 = 10^{-8} \text{ Wb}$ (Weber)

L'idée d'un champ fossile, rémanent de la contraction gravitationnelle initiale du nuage proto-stellaire serait si simple... Le champ magnétique galactique dans l'environnement solaire ($\simeq \mu\text{G}$) aurait largement pu suffire, par conservation du flux, pour générer un champ de $\simeq 10^4 \text{ G}$ tel qu'actuellement prédit pour l'intérieur du Soleil. De plus, un modèle simple de l'évolution d'un champ magnétique axisymétrique, soumis exclusivement à une décroissance résistive, en l'absence d'écoulements, suggère un temps caractéristique de l'ordre de la dizaine de milliards d'années, ce qui autoriserait aisément le maintien du champ fossile jusqu'à ce jour. On croit d'ailleurs que certaines classes d'étoiles jeunes seraient le siège de tels champs magnétiques rémanents.

Le défi dans la modélisation du magnétisme solaire ne consiste donc pas à expliquer l'existence du champ magnétique, mais plutôt ses variations spatiales et temporelles bien spécifiques : quelle est l'origine des émergences magnétiques aux petites échelles, et comment obtenir une amplification cyclique aux grandes échelles ? Les observations décrites précédemment, soit l'existence d'un champ magnétique toroïdal interne modulé de façon cyclique sur une période de 22 ans, et déphasé par rapport à un champ magnétique poloïdal observable en surface, pointent naturellement vers l'idée d'un processus dynamo, animé par l'action inductive des différents écoulements du fluide solaire conducteur.

Dans un tel scénario, la première partie du problème semble relativement aisée : une composante toroïdale antisymétrique par rapport au plan équatorial découlerait tout naturellement du cisaillement, par la rotation différentielle solaire, d'un champ magnétique poloïdal axisymétrique (Cowling, 1953). Par contre, la régénération d'une nouvelle composante poloïdale opposée à celle du cycle précédent, est plus problématique. Le théorème de Cowling (T.G. Cowling, 1933) démontre comment un écoulement axisymétrique ne peut en aucun cas soutenir un champ magnétique axisymétrique contre la dissipation ohmique. Ainsi, la survie du processus doit nécessairement passer par une brisure de la symétrie du système. Cet élément manquant devient subséquemment la clef de voute de tout modèle dynamo du cycle d'activité solaire.

Une première classe de modèles, basée sur une approche électrodynamique de "champ moyen" est développée du milieu des années 1950 jusqu'au début des années 1980 (Krause & Raedler, 1980, Moffatt, 1978). Dans cette approche, la force de Coriolis joue le rôle recherché, en communiquant une torsion systématique, connue sous le nom "d'effet α ", aux éléments de fluide turbulent de la zone convective solaire. L'excès d'hélicité ainsi créé, opposé entre les deux hémisphères, aurait pour effet d'induire une densité de courant moyenne toroïdale, et de permettre la régénération du champ magnétique poloïdal recherché.

Toutefois, bien que quasi consensuelle durant presque trois décennies, cette théorie perd toute sa splendeur lorsque l'héliosismologie fait son entrée, au milieu des années 1980, en bousculant complètement ce qu'on présuait du profil interne de la rotation différentielle. Les profils mesurés montrent un cisaillement dominant sous la zone convective (voir, par exemple, Charbonneau et al., 1999), suggérant par le fait-même que cette région soit le siège principal de l'amplification du champ magnétique

toroïdal. De plus, des modèles montrent que pour reproduire, à partir de tubes de flux toroïdaux si profonds, des BMR émergentes en surface qui respectent loi de Joy et latitudes d'émergence, un intervalle très restreint d'amplitudes ($\simeq 0.6 - 1 \times 10^5$ G) est requis (voir Fan, 2009). Le hic, c'est qu'il est peu probable qu'un tel champ magnétique toroïdal se laisse tordre par la convection turbulente pour produire l'effet α .

D'autres classes de modèles tentent aujourd'hui de trouver solution au problème dynamo, par différentes approches. Une avenue très prometteuse est celle des modèles dits de Babcock–Leighton (BL), dont les prémices furent développées au début des années 1960 (Babcock, 1961, Leighton, 1964, 1969). Dans cette approche, la force de Coriolis joue toujours le rôle de briseur de symétrie, mais à plus grande échelle, directement sur les tubes de flux responsables de l'émergence des BMR. C'est le tilt systématique dans l'axe des dipôles, tel que décrit dans la section précédente, qui permet la régénération du champ magnétique poloïdal.

Avant d'en arriver au corps de cette thèse, et de préparer le terrain aux articles publiés, la suite de ce premier chapitre consistera à décrire de façon détaillée ce mécanisme de BL et de survoler les méthodes permettant son intégration à des modèles complets du cycle d'activité solaire. La tâche n'est pas mince : l'ensemble du processus de production, d'amplification et de dissipation du champ magnétique solaire s'étend sur de multiples ordres de grandeur, dans différentes zones du volume solaire, de la surface aux profondeurs de la zone convective, et dépend de certaines caractéristiques du milieu encore mal connues.

La Section 1.2 se voudra donc une description des observations faites de l'évolution du flux magnétique sur la photosphère solaire, aux multiples échelles spatiales en cause, ainsi que des écoulements mesurés à ces mêmes échelles. La Section 1.3 détaillera les résultats obtenus par des modèles de l'évolution de ce flux de surface, vers la production d'un moment dipolaire magnétique net. La Section 1.4 fera finalement une revue des modèles dynamo développés récemment qui intègrent ce mécanisme de BL comme moyen de régénération de la composante magnétique poloïdale du Soleil.

1.2 FLUX MAGNÉTIQUE À LA SURFACE DU SOLEIL : OBSERVATIONS

Lorsqu'on observe une image du Soleil dans le visible, les taches solaires sombres, et quelques facules plus brillantes autour, sont les seuls "défauts" de la surface qui sautent immédiatement aux yeux. Par contre, un magnétogramme du disque solaire au même moment paraît beaucoup plus actif (voir Figure 1.3). Non seulement les taches font place à de larges régions actives, mais en plus l'ensemble de la photosphère est recouverte d'une multitude de petits éléments magnétiques.

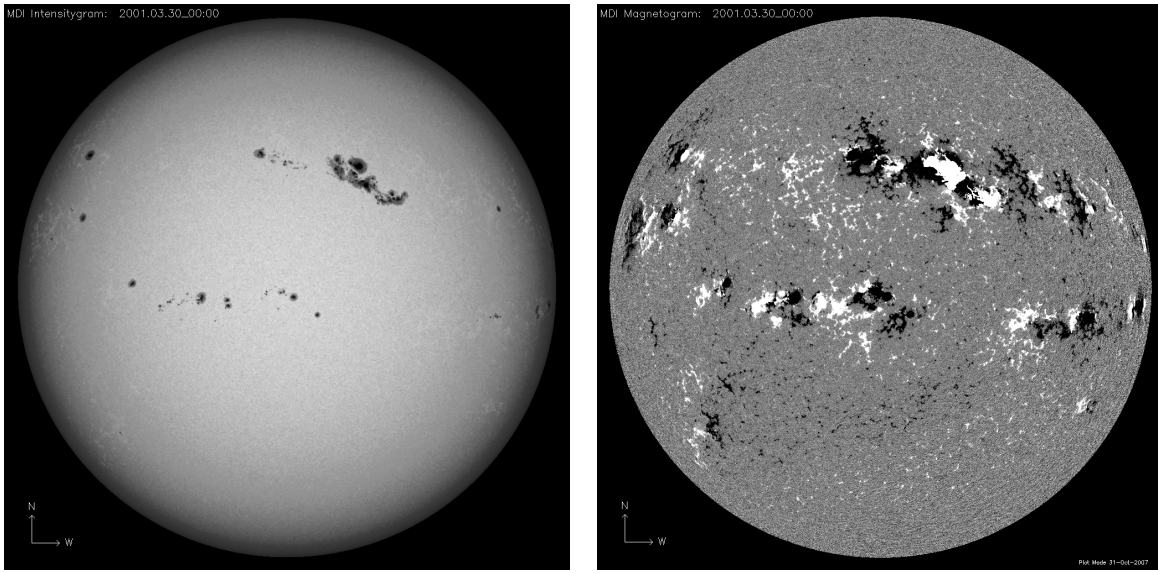


Figure 1.3 – À gauche, image visible du disque solaire. À droite, magnétogramme équivalent. Mesures acquises par l’instrument Michelson Doppler Imager (MDI) à bord du Solar and Heliospheric Observatory (SoHO), durant une période active du Soleil.

Aussi, à toutes les échelles, la haute conductivité du plasma solaire ($\sim 10^3\text{--}10^4 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$) assure que le champ magnétique dans le fluide aura tendance à y rester “accroché”. À la limite d’une conductivité électrique infinie, même, le théorème d’Alfvén (1942) spécifie comment les lignes de champ magnétique finissent “gelées” dans le plasma. Ainsi, minuscules tubes de flux, régions actives éphémères, facules, grandes régions actives (taches solaires) sont continuellement déformés, étirés, fragmentés, désagrégés par la convection et les autres écoulements. Une description complète de l’évolution du flux magnétique à la surface du Soleil passe donc nécessairement par un inventaire des écoulements observés aux échelles correspondantes. Ces deux aspects seront donc traités simultanément dans ce qui suit.

1.2.1 AUX PETITES ÉCHELLES : LE RÉSEAU MAGNÉTIQUE

La majorité de la surface solaire n’est pas couverte par des régions magnétiquement actives, en particulier au minimum du cycle d’activité. Mais cette photosphère dite tranquille regorge malgré tout de petits éléments de flux évoluant sur de courtes échelles temporelles, en conjonction avec les écoulements convectifs. La composante dominante de ce flux magnétique se retrouve sous forme de concentrations de quelques centaines de kilomètres de diamètre, avec des flux de $\simeq 10^{18} - 10^{19}$ Mx, et des champs magnétiques internes de l’ordre du kG. Des éléments beaucoup plus petits, jusqu’à $\simeq 10^{16}$ Mx sont aussi observables avec la résolution des instruments actuels, mais leur contribution au flux net reste négligeable. Finalement, l’ensemble de ces éléments de la photosphère tranquille fournit plus de la moitié du flux solaire absolu total au minimum du cycle d’activité ($\simeq 10^{23}$ Mx).

Ces concentrations magnétiques sont soumises à une superposition d'écoulements, sur une variété d'échelles spatiales et temporelles, en particulier celles du transport thermique convectif. Deux échelles dominantes ressortent des observations de la photosphère.

1.2.1.a Granulation

La granulation survient sur une échelle de l'ordre du mégamètre, avec une durée de vie de 5–10 minutes, et des vitesses de l'ordre du km/s. Grâce à de très bonnes contraintes observationnelles, et une structure reproduite fidèlement par les modèles numériques hydrodynamiques, la nature de cet écoulement est très bien comprise. Une nette corrélation entre profils d'écoulements verticaux et fluctuations en température l'associe sans équivoque au transport convectif. La turbulence granulaire constitue ainsi le principal vecteur d'énergie à la surface du Soleil.

1.2.1.b Supergranulation

Outre la granulation, la nature turbulente de la convection solaire devrait assurer un continu d'échelles observables. Toutefois, les analyses spectrales des champs d'écoulements de surface font ressortir un second schéma spécifique, avec une échelle de ~ 30 Mm et un temps caractéristique de l'ordre de la journée : la "supergranulation". Ce champ d'écoulement a été observé pour la première fois à la fin des années 1950 (Hart, 1956, Leighton et al., 1962), comme une fluctuation dans la signature Doppler des champs de vitesse horizontaux de la rotation différentielle. Une légère composante radiale et une très légère fluctuation en température permettraient de l'associer à une circulation convective peu profonde. Mais les fondements théoriques associés demeurent flous et sont loin de faire consensus, malgré plus de cinquante ans de travail sur la question (voir Rieutord & Rincon, 2010).

L'impact de ces écoulements sur l'évolution du flux magnétique est net. Les éléments de flux, bousculés, fragmentés, fusionnés par les champs de vitesse transitoires de la granulation, se retrouvent dispersés par la supergranulation, jusqu'à être confinés aux abords des "cellules" supergranulaires, pour former un "réseau" magnétique assez bien défini. La Figure 1.4 montre une région de la photosphère solaire tranquille, où l'on peut distinguer les cellules convectives de la granulation, les grandes cellules supergranulaires, et la distribution caractéristique du flux magnétique.

La nature non stationnaire de l'écoulement supergranulaire a aussi pour effet le déplacement aléatoire des concentrations de flux magnétique, mais sur des échelles plus substantielles que celles de la granulation. R.B. Leighton (1964) établit pour la première fois que la dispersion résultant de cette marche aléatoire pouvait être interprétée comme une diffusion du champ magnétique aux plus grandes échelles. Ainsi, l'évolution du flux magnétique à la surface du Soleil peut être traitée soit (1) comme une marche aléatoire de concentrations magnétiques discrètes, vers le réseau magnétique aux petites

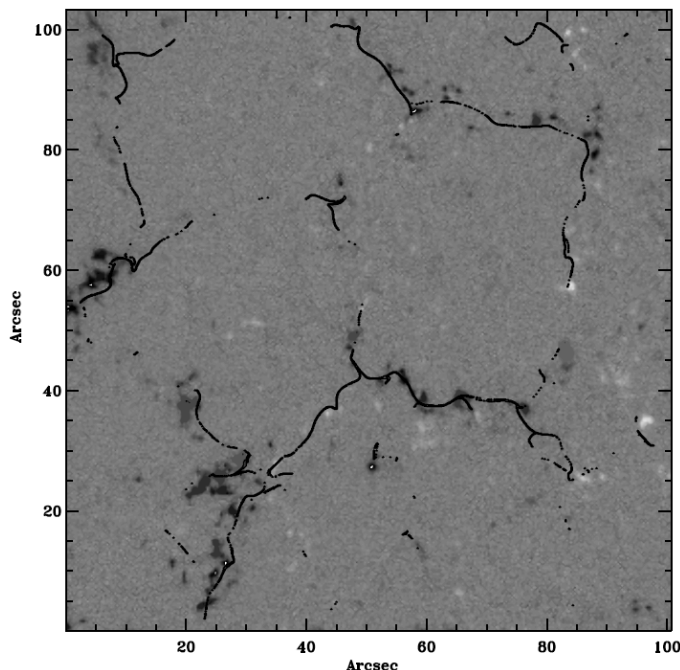


Figure 1.4 – Magnétogramme d'une région photosphérique tranquille. Les cellules granulaires sont visibles sous la forme de petites variations de tons de gris (dimensions de l'ordre de la seconde d'arc, ce qui correspond approximativement au mégamètre). Les traits noirs représentent les zones d'écoulement convergent de la surpergranulation. (Tiré de Roudier et al. 2009.)

échelles et vers la création de patrons unipolaires aux plus grandes échelles, associés au cycle d'activité; ou (2) comme la diffusion et l'advection d'un continu de champ magnétique. Ces deux approches numériques seront discutées à la Section 1.3.

1.2.2 ÉMERGENCE DE FLUX MAGNÉTIQUE

1.2.2.a BMR éphémères

Si l'on considère la fonction de distribution du flux des concentrations magnétiques décrites précédemment, on obtient une tendance statistique quasi exponentielle, mais avec un surplus d'éléments au-delà de $\simeq 10^{19}$ Mx. Cela indiquerait que la majorité du flux de la photosphère solaire tranquille serait continuellement renouvelé sur des échelles temporelles de quelques jours, par l'émergence des régions magnétiques éphémères (Schrijver et al., 1997). L'évolution subséquente de ce flux (fragmentation, agrégation), donnerait naissance à toute la gamme d'éléments observés aux échelles du réseau magnétique (voir Thibault, 2014).

L'émergence de ces BMR éphémères est observée sur l'ensemble de la photosphère solaire, tranquille et active. Leur durée de vie en tant que dipôles magnétiques serait de l'ordre de quelques heures, et leur flux absolu de l'ordre de 10^{19} Mx. Le taux d'injection du flux magnétique associé serait de

$\simeq 5 \times 10^{17} \text{ Mx s}^{-1}$ (en flux absolu, encore une fois, le flux net étant toujours nul) sur l'ensemble de la photosphère, au minimum du cycle d'activité, et d'environ deux fois plus au maximum du cycle (Harvey & Zwaan, 1993, Schrijver, 2001).

1.2.2.b BMR actives

La majorité du flux magnétique photosphérique émerge toutefois aux plus grandes échelles, sous la forme de régions magnétiques actives : typiquement des BMR plus grandes que la centaine de mégamètres carrés, soit $\simeq 10^{20} \text{ Mx}$. Le champ magnétique moyen n'y est pas forcément si intense, mais pique à des valeurs centrales de l'ordre du kilogauss, et peut atteindre la dizaine de kG (un Tesla !) par temps de très forte activité. Les zones de plus fort champ magnétique sont responsables de la création des taches solaires, et de toute la gamme d'instabilités associées, aux courtes échelles temporelles ("flares", éjections de masse coronale, etc.), mais dont nous ne parlerons pas ici.

Ces BMR actives participent pour moins de la moitié du flux total au minimum d'activité, mais la variation du nombre d'émergence au cours du cycle est manifestement beaucoup plus importante que pour les régions éphémères. Le flux émerge à un taux moyen de $\sim 5 \times 10^{18} \text{ Mx s}^{-1}$ au maximum d'activité. Sur l'ensemble d'un cycle, cela représente environ 10^{25} Mx (WS1989). À noter que ce flux est majoritairement radial à la surface du Soleil (Howard & Labonte 1981, mais voir cependant Tsuneta et al. 2008).

Afin d'incorporer ces émergences aux modèles d'évolution du flux magnétique de surface, l'idéal serait de connaître en détails le flux, la position et le temps d'émergence de BMR réelles observées au cours d'un ou plusieurs cycles. Cette démarche peut en pratique être appliquée aux quelques milliers de régions actives émergeant sur la durée d'un cycle (voir par exemple la base de données par WS1989 pour le cycle d'activité 21), mais pas pour les régions éphémères, beaucoup trop nombreuses et surtout de durée de vie trop courte. Dans ce cas, il faut se contenter d'analyser un échantillon d'émergences, et d'en déduire une distribution statistique (voir par exemple Harvey & Zwaan (1993)). Les sections suivantes feront un survol des caractéristiques typiques des BMR observées. Pour une analyse quantitative plus poussée, se référer à l'annexe A de Lemerle et al. (2015) (ci-après Article I), présentée à la Section 2.A du présent document.

1.2.2.c Distribution des aires et du flux magnétique des BMR

Dans ce genre d'analyse, le flux est généralement considéré proportionnel à l'aire des BMR. Cette relation de proportionnalité semble demeurer approximativement valide à la fois pour les régions actives que pour les très petites régions éphémères, la densité de flux se stabilisant autour de la centaine de gauss pour tous les types d'émergences (quoique voir Section 2.A.5 (Article I) pour une

variante).

L'analyse statistique de la fonction de distribution des aires (A) des BMR dépend de la méthode de discrétisation utilisée (en A ou $\log(A)$) et de l'intervalle d'aires considéré. Schrijver (2001) déterminent qu'une régression en double loi de puissance serait appropriée pour représenter à la fois la distribution des aires des BMR actives et éphémères :

$$f_A(A, t)dt = (f_{0,A,act}(t)A^{-1.9} + f_{0,A,éph}(t)A^{-2.9})dt, \quad (1.1)$$

où le taux d'émergence $f_{0,A,act}(t)$ varierait, pour les BMR actives, de ~ 8 BMR/deg²/jour/hémisphère au maximum d'activité à ~ 1 BMR/deg²/jour/hémisphère au minimum d'activité et, pour les BMR éphémères, de ~ 8 BMR/deg²/jour/hémisphère à ~ 4 BMR/deg²/jour/hémisphère. D'un autre côté, à la Section 2.A.2 (Article I), en accord avec les travaux de Bogdan et al. (1988), nous obtenons qu'une régression log-normale serait préférable pour représenter la distribution de $\log(A)$ sur l'intervalle considéré.

La forme précise de la fonction temporelle requière aussi une attention particulière. La variation de l'activité au cours d'un cycle n'est pas symétrique : elle est caractérisée par une montée rapide vers le maximum d'activité, à environ un tiers de la période, suivie d'une phase de décroissance plus graduelle. Les différentes paramétrisations utilisées par les modèles varient de la simple gaussienne bien symétrique, au suivi rigoureux du niveau d'activité par le décompte des taches solaires. Cette dernière approche est appliquée à la Section 2.A.1 (Article I).

1.2.2.d Distribution en latitude

Au cours du cycle d'activité, la latitude moyenne d'émergence des régions actives migre progressivement vers l'équateur, de façon approximativement simultanée dans les deux hémisphères des moyennes latitudes ($\simeq 30^\circ$) au début du cycle, vers les basses latitudes ($\simeq 5^\circ$) à la fin du cycle. Ces observations sont illustrées de façon frappante par le "diagramme papillon" des taches solaires déjà présenté à la Figure 1.1.

Les BMR émergent dans un intervalle substantiel en latitudes autour de la latitude moyenne, selon une dispersion approximativement gaussienne qui dépend de la phase temporelle du cycle (voir Section 2.A.3 (Article I)). D'après Schrijver (2001), la dispersion dépend aussi du flux des émergences, sa largeur caractéristique décroissant exponentiellement en fonction du flux. Les plus grosses BMR actives émergent donc plus près de la latitude moyenne et les petites BMR éphémères peuvent être observées jusqu'aux pôles.

Finalement, un certain chevauchement entre cycles successifs est observé, sur un intervalle qui peut atteindre 2 ans. C'est dire que pendant qu'un cycle est en train de disparaître aux basses latitudes, le cycle suivant (de polarité opposée) a déjà débuté aux mi-latitudes. Ceci peut être pris en compte

adéquatement par une caractérisation détaillée de la forme de la migration latitudinale en fonction de la phase du cycle (voir Section 2.A.3 (Article I)).

1.2.2.e Distribution en longitude

Plusieurs études statistiques (voir par exemple Harvey & Zwaan, 1993) démontrent que les BMR de tous types émergeraient préférentiellement ($\simeq 40\%$) dans des zones déjà actives de la photosphère solaire (les "plages", régions avec une densité de flux supérieure à $\simeq 50$ G). Cette tendance aurait pour effet de concentrer légèrement l'émergence de flux aux longitudes où des BMR existent déjà. Dans le cadre, cependant, de simulations dynamo du champ moyen, axisymétrique aux grandes échelles, il est justifié de négliger cet effet (voir Section 2.A.4 (Article I)).

1.2.2.f Orientation et séparation des dipôles

Par souci pédagogique, rappelons les lois de polarité de Hale (Hale et al., 1919), telles que déjà énoncées en début de chapitre : les BMR émergentes sont orientées tel que (1) la polarité la plus à l'ouest est presque toujours du même signe dans un hémisphère donné ; (2) cet ordre est-ouest est inversé entre les deux hémisphères ; et (3) cet ordre est inversé d'un cycle de taches à l'autre.

Rappelons aussi la loi de Joy (Hale et al., 1919) concernant l'inclinaison de l'axe des dipôles : la polarité "ouest" tend à être située légèrement plus près de l'équateur, et cette tendance est amplifiée avec la latitude. L'angle moyen d'inclinaison γ_0 par rapport à la ligne équatoriale varie de $\simeq 0 - 4^\circ$ près de l'équateur à $\simeq 12 - 20^\circ$ aux latitudes maximales d'émergence ($\lambda \simeq 40^\circ$). Plusieurs profils empiriques permettent de rendre compte de cette loi de Joy moyenne :

$$\sin \gamma_0 \simeq c_\gamma \sin \lambda , \quad (1.2a)$$

$$\gamma_0 \simeq c_\gamma \lambda , \quad (1.2b)$$

$$|\gamma_0| \simeq c_\gamma \sqrt{\lambda} , \quad (1.2c)$$

où λ est la latitude et c_γ un facteur qui serait, pour les deux premiers profils, de moins de 0.26 lorsqu'extrait d'observations des taches et plages en lumière blanche (McClintock & Norton, 2013), et jusqu'à 0.5 lorsque déterminé à partir de données magnétographiques (voir par exemple Li & Ulrich, 2012). Ce sont les faibles latitudes d'émergence ainsi que la grande dispersion des inclinaisons γ autour de l'inclinaison moyenne γ_0 qui rendent difficile le choix définitif du profil. En effet, dans l'analyse de leur base de données du cycle 21, WS1989 observent que $\simeq 20\%$ des BMR auraient une inclinaison inversée par rapport à la ligne équatoriale, et $\simeq 4\%$ seraient complètement inversées en longitude (voir aussi McClintock et al., 2014). Dans l'Article I, nous opterons simplement pour le profil (1.2b).

De plus, tandis que la loi de Joy moyenne ne semble pas dépendre du flux des BMR (Wang &

Sheeley, 1991), Harvey (1993) montre que l'étalement des angles d'inclinaison autour de γ_0 serait de type gaussien avec une plus grande dispersion pour les plus petites BMR. La dépendance au log du flux des BMR semble de type exponentielle décroissante (voir Section 2.A.7 (Article I)).

Une dépendance similaire est observée pour ce qui est de la séparation angulaire δ des deux polarités en fonction du flux du dipôle. À la Section 2.A.6 (Article I), nous présentons comment le log de la séparation angulaire dépend linéairement du log du flux magnétique, avec une certaine dispersion gaussienne autour de cette tendance.

L'ensemble de ces observations est tout à fait compatible avec l'idée que l'inclinaison des dipôles soit causée par la force de Coriolis sur les boucles magnétiques ascendantes, et que la turbulence perturbe davantage l'émergence des petits flux (voir Fan, 2009). La forte dispersion observée pour les petites BMR est peu susceptible d'influencer le bon fonctionnement du mécanisme de BL, puisque ce sont les grosses BMR qui dominent l'émergence de moment magnétique dipolaire axial (voir par exemple Wang & Sheeley, 1991).

1.2.2.g Modulation du cycle d'activité

Un des objectifs de la modélisation de l'évolution du flux magnétique à la surface du Soleil est de reproduire le comportement de l'activité magnétique au cours des décennies et siècles précédents. En entrée à ces modèles, les statistiques précédentes suffisent, excepté pour ce qui est de l'amplitude et de la durée de chaque cycle. En effet, des mesures directes du champ magnétique solaire ne sont malheureusement disponibles que pour les dernières décennies (voir Figure 1.2). Fort heureusement, le simple décompte du nombre de taches solaires (International Sunspot Number (SSN)) nous donne une très bonne idée du niveau d'activité depuis le début du dix-septième siècle (voir Figure 1.1, panneau du bas, et analyse de la Section 2.A.1 (Article I)). D'autres méthodes indirectes, tel la mesure des dépôts d'isotopes cosmogéniques dans les calottes glaciaires (^{10}Be) terrestres ou dans les anneaux de croissance des arbres (^{14}C), influencés par le niveau du flux magnétique héliosphérique, permettent d'obtenir une idée du niveau d'activité solaire bien au-delà dans le temps, mais impliquent beaucoup plus de suppositions.

En se concentrant sur quatre siècles d'enregistrement des taches, l'amplitude des cycles observés varie considérablement, de plus d'un facteur trois. Une telle augmentation, assez régulière, est d'ailleurs observée du début du vingtième siècle (cycle 14) jusqu'aux années 1960 (cycle 19). À l'inverse, certaines périodes appelées "grands minima" semblent indiquer que l'activité solaire peut demeurer presque nulle pendant une longue période. L'exemple connu le plus flagrant est le minimum de Maunder, cinquante ans (1645 à 1705) pendant lesquels le Soleil est resté presque immaculé. Certains minima d'activité réguliers sont aussi particulièrement faibles, comme celui duquel nous venons de sortir, de 2008 à 2010.

La durée du cycle des taches, elle, varie de 8 à 15 ans environ, avec une moyenne de 11.2 ans. La

forme caractéristique de l'évolution de chaque cycle n'est pas symétrique, avec une montée relativement rapide vers le maximum d'activité, et une diminution subséquente plus lente. Cette tendance est encore plus forte pour les cycles d'activité plus intenses.

1.2.3 ÉVOLUTION DU FLUX MAGNÉTIQUE DE SURFACE AUX GRANDES ÉCHELLES

L'évolution du flux magnétique aux petites échelles dans la photosphère tranquille, influencée par l'émergence des BMR éphémères, a été décrite à la Section 1.2.1. Aux plus grandes échelles, c'est l'évolution des BMR actives les plus grandes qui domine sur les magnétogrammes. En plus d'être tranquillement dispersées par l'effet diffusif de l'écoulement supergranulaire, ces régions actives sont étirées et déplacées par les grands écoulements, soit la rotation différentielle, la circulation méridienne et, quoique à un moindre niveau peut-être, les écoulements convergents observés dans les zones actives de la photosphère. La modélisation de l'évolution du flux magnétique de surface doit donc tenir compte d'une paramétrisation adéquate pour ces écoulements.

1.2.3.a Rotation différentielle de surface

Le Soleil n'étant pas un corps solide, l'ensemble de sa masse n'est pas forcée de tourner à la même vitesse angulaire. Le processus d'accrétion initial, ainsi qu'une redistribution du moment angulaire par la convection dans les parties externes du Soleil, l'ont mené vers son état actuel de rotation, soit une vitesse angulaire en surface plus rapide à l'équateur (période de $\simeq 25$ jours) qu'aux pôles (période de $\simeq 34$ jours), et un coeur tournant à la même vitesse que les moyennes latitudes en surface, soit environ 27 jours.

Le profil de la rotation différentielle de surface peut être obtenu par des mesures d'effet Doppler horizontal ou par un suivi rigoureux du mouvement de structures magnétiques de surface. Par cette dernière méthode, Snodgrass (1983) obtient la paramétrisation suivante :

$$\Omega(R, \theta) = \Omega_0 (1 + a_2 \cos^2 \theta + a_4 \cos^4 \theta) , \quad (1.3)$$

avec R le rayon solaire, θ la colatitude, $a_2 \simeq 0.16$, $a_4 \simeq 0.12$ et $\Omega_0 \simeq 2.9 \mu\text{rad s}^{-1}$. Indépendamment, Charbonneau et al. (1999) obtiennent une paramétrisation très similaire à partir de l'inversion des profils héliosismiques tridimensionnels (3D) de l'intérieur solaire (voir Section 2.2.2 (Article I)).

Finalement, quoique la paramétrisation ci-dessus semble relativement robuste, quelques variations temporelles sont observables. Snodgrass (1991) identifie une très légère oscillation dans le patron de rotation magnétique, qui serait en phase avec le cycle d'activité. D'autres auteurs identifient des variations, en partie similaires, dans les profils Doppler. Une revue détaillée des observations héliosismiques

de la rotation interne du Soleil et des ses variations temporelles est présentée par Howe (2009). Nous introduirons la paramétrisation 3D de rotation différentielle à la Section 1.4.4.a.

1.2.3.b Circulation méridienne de surface

Écoulement à grande échelle vers les pôles, la circulation méridienne a été observée pour la première fois vers la fin des années 1970, comme résidu dans les signaux Doppler de surface. Ses vitesses caractéristiques sont très lentes, de l'ordre de 10 à 30 m/s, passant par un maximum vers les moyennes latitudes. Ses causes exactes sont mal comprises. Des variations temporelles importantes, en phase avec le cycle d'activité ont aussi été mesurées. Snodgrass & Dailey (1996) argumentent que ces fluctuations pourraient être dues à la rétroaction du champ magnétique sur l'écoulement, sous différentes formes, et par ailleurs que les fluctuations décrites plus haut dans le profil de rotation différentielle pourraient être un artefact de la circulation méridienne elle-même.

Des modèles cinématiques détaillés de l'évolution du flux magnétique de surface devraient éventuellement tenir compte de ces fluctuations temporelles. Cependant, en première approximation, un profil constant permet de reproduire les observations de façon adéquate, avec pour plus simpliste paramétrisation (par exemple Dikpati & Charbonneau, 1999) un écoulement piquant aux latitudes de $\pm 45^\circ$:

$$u_\theta(R, \theta) = -\frac{u_0}{u_0^*} \sin \theta \cos \theta , \quad (1.4a)$$

avec u_0^* un facteur de normalisation (ici $u_0^* = 2$) tel que u_0 est la vitesse maximale de l'écoulement, de 10 à 20 m s⁻¹ selon les observations. Dans une analyse Doppler méticuleuse, Ulrich (2010) obtient des profils de circulation méridienne annuels pour les années 1986 à 2009 (cycles 22 et 23). En moyenne, l'écoulement pique vers les 16 m s⁻¹, à latitude plus faible que 45° et selon une forme asymétrique (voir Figure 1.5). Afin de tenir compte de profils éventuels plus variés, nous introduirons donc à la Section 2.2.1 (Article I) une paramétrisation plus polyvalente, de la forme

$$u_\theta(R, \theta) = -\frac{u_0}{u_0^*} \operatorname{erf}^q(v \sin \theta) \operatorname{erf}^n(w \cos \theta) , \quad (1.4b)$$

avec $q \simeq 7$, $n = 1$, $v \simeq 2$ et $w \simeq 8$ des paramètres ajustables que nous pourrions contraindre à l'aide du modèle d'évolution du flux magnétique de surface (voir Tableau 2.I (Article I)).

1.2.3.c Écoulements convergents vers les régions actives et rétroactions non linéaires

Les précédentes distributions d'émergences et profils d'écoulements, si considérés constants, supposent une évolution passive (linéaire) du flux magnétique de surface. Cependant, comme il sera montré à la Section 1.3 traitant de la modélisation de cette activité de surface, des sources de rétroactions non linéaires du champ magnétique sur les écoulements sont nécessaires afin de prévenir l'amplification

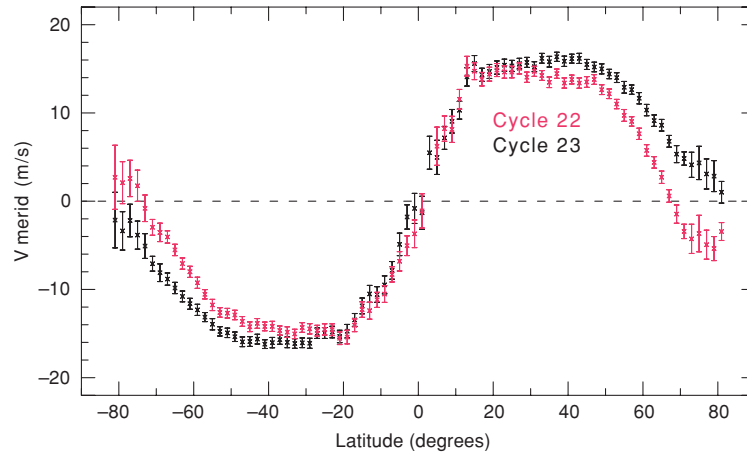


Figure 1.5 – Mesures Doppler moyennes de circulation méridienne au cours des cycles solaires 22 et 23 (Ulrich, 2010).

excessive et la trop grande “mémoire” du système (voir par exemple Schrijver et al., 2002).

Comme mécanismes possibles de rétroaction, on peut noter les oscillations torsionnelles (modulations de la rotation différentielle) dans la zone convective (Beaudoin et al., 2013, Howard & Labonte, 1980) une modulation dynamique des inclinaisons des BMR (Cameron et al., 2010, Dasi-Espuig et al., 2010), ou une modulation du transport de surface. Concernant ce dernier aspect, Schrijver et al. (2002) et Baumann et al. (2006) considèrent la présence d’un mécanisme de dissipation exponentielle du champ magnétique, équivalent à une diffusion radiale (ou submergence) du champ magnétique. Alternativement, Wang et al. (2002a) incluent une modulation globale de la circulation méridienne afin de maintenir une oscillation magnétique stable comparable aux cycles observés. D’un autre côté, Cameron & Schüssler démontrent que les écoulements convergents observés vers les régions actives de la photosphère (Gizon, 2004) permettraient d’expliquer les fluctuations apparentes de la circulation méridienne au cours d’un cycle (Cameron & Schüssler, 2010) et suffiraient comme mécanisme d’inhibition du transport de flux en temps de forte activité (Cameron & Schüssler, 2012). Ces écoulements convergents atteindraient des valeurs comparables et même supérieures à l’écoulement méridien moyen (jusqu’à $\simeq 50 \text{ m s}^{-1}$). Upton & Hathaway (2014) modélisent plutôt ces écoulements en traitant explicitement la convection supergranulaire et en modulant l’intensité de cette convection en fonction du flux magnétique local.

1.2.3.d Migration du flux vers les pôles

Un simple coup d’œil au magnétogramme synoptique présenté à la Figure 1.2 suffit pour remarquer les grandes trainées magnétiques qui semblent “s’écouler” des mi-latitudes actives vers les régions polaires. Ces trainées, de polarité opposée au flux magnétique accumulé aux pôles lors du cycle pré-

cédent, débutent dès les premières émergences d’un nouveau cycle et semblent être responsables de l’inversion de polarité du flux polaire aux environs du maximum d’activité. Il s’agit là d’un indicateur clair du fonctionnement du mécanisme de BL : puisque les BMR émergentes sont systématiquement inclinées par rapport à la direction est–ouest, la polarité “ouest” du flux magnétique est davantage diffusée et détruite près de l’équateur, laissant un surplus de la polarité “est” migrer vers les pôles. Une description plus détaillée du processus sera faite à la Section 1.3.1.

1.2.3.e Champ magnétique observé au minimum du cycle d’activité

Pendant que les trainées de polarité “est” migrent vers les pôles, le flux magnétique dans les calottes polaires diminue progressivement pendant la première moitié du cycle, inverse sa polarité au maximum d’activité, puis un nouveau réservoir de la polarité opposée se forme progressivement, pour atteindre une amplitude maximale au minimum du cycle d’activité. Lorsque le taux d’émergence des régions actives aux basses latitudes atteint son minimum, presque tout le flux magnétique est regroupé près des pôles, dans une calotte étroite limitée à $10 - 15^\circ$ en latitude. Cela confère une élégante configuration dipolaire au champ magnétique à l’échelle globale du Soleil. Le flux absolu total emmagasiné aux pôles est alors de $10^{22} - 10^{23}$ Mx, pour un champ magnétique moyen de l’ordre de 5 G et piqué à $\simeq 12$ G. Cela correspond à $0.1 - 1$ % du flux absolu émergé sous forme de BMR sur toute la durée du cycle.

Ce flux magnétique est fortement concentré sur les pôles, probablement dû à la circulation méridienne, et est donc caractérisé par un très fort gradient latitudinal. Sur la base d’observations, Svalgaard et al. (1978) proposent le profil suivant pour représenter cette distribution :

$$B_R(\theta) = B_0 |\cos \theta|^7 \cos \theta \quad (1.5)$$

où B_R est la composante radiale du champ magnétique à la surface du Soleil ($r = R$) et $B_0 \simeq 10$ G l’amplitude du champ aux pôles. Aux Sections 1.3.2 et 1.3.3 qui suivent, ainsi qu’à la Section 2.3.2 (Article I), nous décrivons comment nous utilisons cette distribution simple comme condition initiale au modèle d’évolution du flux de surface (surface flux transport (SFT)).

1.3 FLUX MAGNÉTIQUE À LA SURFACE DU SOLEIL : MODÉLISATION SFT

Le premier objectif de tout modèle SFT sera, bien évidemment, de reproduire les observations décrites au chapitre précédent, tel la formation de trainées magnétiques des latitudes actives vers les pôles, et l’accumulation d’une quantité suffisante de flux aux pôles. Pour cela, les simulations requièrent

la connaissance détaillée de trois processus principaux : (1) la façon dont le flux émerge à la surface, (2) les modes de dispersion de ce flux, et (3) la façon dont le flux disparaît de la surface.

Tel que décrit en début de Section 1.2, le flux semble systématiquement émerger sous la forme de régions magnétiques bipolaires sur une vaste gamme d'échelles (BMR éphémères et actives). La dispersion aux petites échelles est dominée par les champs d'écoulement granulaire et supergranulaire, mais nous montrerons dans les sections suivantes que leur effet net est l'équivalent d'une diffusion du champ magnétique aux grandes échelles. Les régions magnétiques sont ensuite déformées, étirées, transportées par la rotation différentielle, la circulation méridienne et les écoulements convergents. Finalement, le flux est autorisé à disparaître de la surface lorsque des régions magnétiques de polarité opposée entrent en contact, ou par submergence des éléments de flux par la convection, ou encore par lente décroissance résistive.

Typiquement, deux approches sont utilisées pour simuler l'ensemble de cette évolution. L'une consiste à considérer le flux photosphérique comme constitué de petits éléments magnétiques, tels ceux observés dans le réseau magnétique tranquille. Chacun de ces éléments est ensuite traqué dans sa marche aléatoire, au fil des écoulements qu'il subit, autorisé à se fragmenter en plus petits éléments, ou à s'agglomérer avec d'autres. Dans cette approche, le champ magnétique n'évolue pas comme tel, c'est la simple cinématique des "particules" magnétiques qui est considérée (voir Thibault et al. 2014 et références ci-inclues).

La seconde approche considère le champ magnétique comme une fonction continue, jusqu'aux limites de résolution de la simulation, soit généralement à des échelles bien supérieures à celles du réseau magnétique. Ce champ magnétique est accroché au plasma qui le soutient, et subit les effets d'induction et de dissipation qui sont associés à ses écoulements. Un formalisme magnétohydrodynamique (MHD) est alors nécessaire.

1.3.1 LE MÉCANISME DE Babcock–Leighton : EN IMAGES

Avant de débiter l'étude quantitative qui nous mènera progressivement vers la simulation numérique du mécanisme de BL, rappelons un instant les origines du modèle. On l'a dit plus tôt, le problème de la dynamo solaire réside principalement dans la difficulté à trouver un mécanisme qui permette la régénération d'un champ magnétique poloïdal à partir de la composante toroïdale interne. Babcock (1961) suggère pour la première fois que ce mécanisme pourrait bien trouver sa source juste devant nos yeux, à la surface du Soleil.

Il propose un modèle complet de la dynamo solaire. (1) Un champ magnétique initialement dipolaire au minimum d'activité ($\simeq 10^{22}$ Mx) est d'abord cisailé et entortillé par la rotation différentielle pour produire deux tores magnétiques de polarité opposée sous la surface solaire (facteur d'amplification de l'ordre de 50). (2) Ce champ toroïdal atteint des amplitudes critiques, dont les instabilités génèrent des

tubes de flux plus intenses, qui sont alors expulsés vers la surface par flottaison, pour produire les BMR bien connues. Suffisamment de tubes de flux sont produits pour générer les quelques milliers de BMR observés pour chaque cycle d'activité. La migration des latitudes d'émergence vers l'équateur doit être associée à une migration équivalente du champ toroïdal sous-jacent. (3) La force de Coriolis imprime le mouvement de torsion nécessaire pour incliner l'axe des dipôles selon la loi de Joy. (4) Tout ce flux nouvellement émergé se disperse progressivement sur la surface. (5) Les parties "ouest" des BMR étant plus près de l'équateur, elles voient, davantage que leur contrepartie "est", leur flux détruit par leurs opposées de l'autre hémisphère. (6) Le flux magnétique des parties "est" migre préférentiellement vers les pôles, pour neutraliser et enfin renverser la polarité du dipôle initial. La Figure 1.6 illustre de façon très schématique ces trois dernières étapes, et les "reconnexions" de lignes de champ magnétique associées. Ces reconnexions ont lieu dans le plasma ténu extérieur à la photosphère, conduisant ainsi à l'éjection d'une certaine quantité d'énergie magnétique vers la couronne solaire. La dissipation de cette énergie hors de la photosphère ne pose toutefois pas de problème au bon fonctionnement du mécanisme de BL, puisque, comme mentionné plus tôt, moins de 1 % du flux absolu émergé requière de se rendre aux pôles.

Bien sûr, plusieurs détails manquent à ce modèle qualitatif de Babcock : la forme du profil de rotation différentielle et conséquemment le lieux d'amplification du champ magnétique toroïdal, la façon dont les irrégularités responsables de générer les tubes de flux se forment, les modes de dispersion

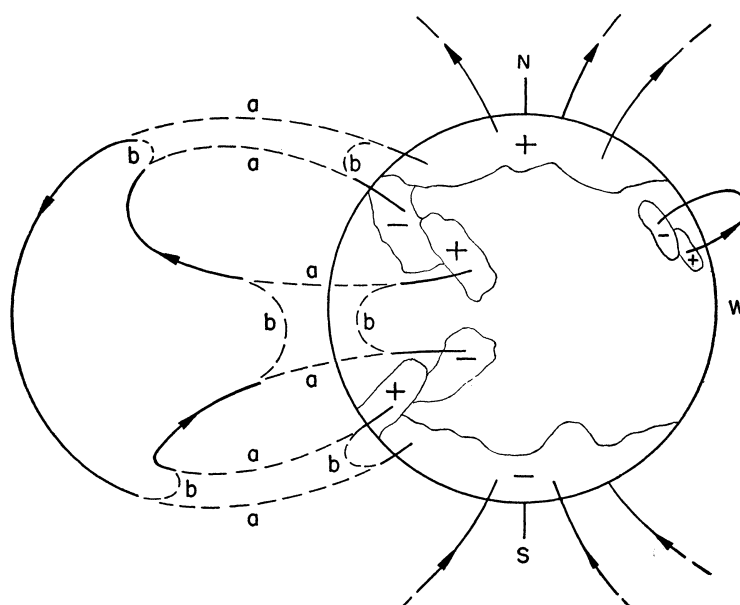


Figure 1.6 – Illustration schématique du mécanisme de Babcock–Leighton (BL) : remplacement du flux magnétique polaire par la migration préférentielle de la polarité “est” des émergences bipolaires vers les pôles. Au cours du processus, les lignes de champ *a* sont progressivement remplacées par les lignes *b*. (Tiré de Babcock 1961. Voir aussi la Figure 1.14, page 39, pour une vue d’ensemble plus complète du mécanisme.)

du flux de surface, l'écoulement méridien responsable de concentrer le nouveau flux aux pôles, etc. Reste donc à tenter de quantifier adéquatement ces processus, ce qui a été fait en partie aux sections précédentes, pour espérer produire une simulation cohérente et réaliste du cycle d'activité solaire. Le premier modèle quantitatif à avoir accompli cette tâche est celui de Leighton (1964), d'où le nom de mécanisme de BL.

Les deux prochaines sections décrirons en détails deux approches quantitatives possibles dans la construction de telles simulations d'évolution du flux magnétique de surface, ainsi que le pont conceptuel à faire entre les deux. Les étapes internes de la dynamo "à la Babcock" seront présentées à la Section 1.4.

1.3.2 MODÈLES SFT BASÉS SUR LE TRANSPORT PAR MARCHE ALÉATOIRE DISCRÈTE

On l'a dit, les observations de la surface du Soleil, aux petites échelles, montrent que le flux magnétique reste concentré dans de petits tubes, lesquels semblent se déplacer de façon passive et aléatoire au gré des écoulements granulaire et supergranulaire non stationnaires. Une approche possible de modélisation consiste donc à représenter réseau magnétique, émergences et grandes régions unipolaires par une distribution d'éléments magnétiques ponctuels, dont la marche sera suivie par simulation numérique.

1.3.2.a Émergence de flux : fonction source

En entrée des modèles, le flux est injecté dans la photosphère sous forme de BMR (éphémères et actives) tirées des fonctions de distribution statistiques (aire, latitude, longitude, inclinaison séparation) décrites brièvement à la Section 1.2.2 et plus en détails à la Section 2.A (annexe A de l'Article I). Typiquement, chaque BMR peut être représentée par deux régions circulaires de polarité opposée, lesquelles sont constituées d'un ensemble d'éléments magnétiques discrets, dont le flux est extrait d'une distribution normale centrée sur $\Phi_0 = 1.5 \times 10^{19}$ Mx et d'écart-type $\sigma_\Phi = \sqrt{\Phi_0}$ (Schrijver, 2001). Ces éléments se retrouvent donc à "nourrir" l'extrême supérieure de la fonction de distribution des éléments magnétiques observés dans la photosphère tranquille (voir la Section 1.3.2.d). Le nombre d'éléments dans chaque BMR est déterminé à partir de l'aire de la région, de telle sorte que la densité de flux absolue moyenne soit de l'ordre de 150 G, tel qu'observé chez tous les types d'émergences. Une distribution uniforme en rayon assure toutefois une concentration des éléments vers le centre des régions circulaires, ce qui permet, entre autres, la formation de taches pour les régions actives suffisamment grandes.

1.3.2.b Dispersion des éléments de flux : marche aléatoire et coefficient de diffusion

Les dizaines de milliers à millions d'éléments ainsi générés sont sujets à une marche aléatoire, superposée à la circulation méridienne, la rotation différentielle et éventuellement les écoulements convergents. Ainsi, à chaque pas de temps, les éléments magnétiques subissent chacun un déplacement

$$\Delta \mathbf{r}(\theta, \beta) = \mathbf{u}(R, \theta) \Delta t + \Delta r_D (\cos \beta \hat{\mathbf{e}}_\phi + \sin \beta \hat{\mathbf{e}}_\theta) , \quad (1.6)$$

où

$$\mathbf{u}(R, \theta) = R \sin \theta \Omega(R, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi + u_\theta(R, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \mathbf{u}_{\text{conv}}(R, \theta, \phi) ,$$

avec $\Omega(R, \theta)$, $u_\theta(R, \theta)$ et $\mathbf{u}_{\text{conv}}(R, \theta, \phi)$ les profils de rotation différentielle, d'écoulement méridien et d'écoulements convergents décrits aux Section 1.2.3.a à 1.2.3.c, R le rayon solaire, θ la colatitude et ϕ la longitude. Δr_D et β sont respectivement la grandeur et l'orientation (par rapport à la direction est-ouest) du pas aléatoire suivi par l'élément. Reste maintenant à préciser de quelle façon les écoulements granulaire et supergranulaire produisent cette petite promenade aléatoire.

R.B. Leighton (1964) décrit que pour un écoulement de durée de vie caractéristique τ et d'échelle spatiale caractéristique L , le déplacement effectué, après un temps τ , par un élément fixé au fluide est $\Delta r_D(\tau) \simeq L$. Pour des champs d'écoulement non stationnaires, les pas successifs se font dans des directions aléatoires, et le déplacement moyen après un temps t devient $\Delta r_D(t) \simeq L \sqrt{t/\tau}$. Cela revient à dire que, après un temps t , la majorité des éléments magnétiques émergés à un endroit donné au temps 0 sont dispersés sur une aire de plus en plus grande $A(t) \simeq \pi \Delta r^2 \simeq \pi L^2 t / \tau$, d'où un taux de dispersion $dA/dt \simeq \pi L^2 / \tau$.

Parallèlement, on sait que tout phénomène de marche aléatoire d'éléments discrets, dans la limite d'un nombre suffisant d'éléments, peut être écrit de façon équivalente comme la diffusion d'une quantité continue représentant la densité $n(\theta, \phi, t)$ de ces éléments :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{C} = -\nabla \cdot (-\eta_D \nabla n) = \eta_D \nabla^2 n , \quad (1.7)$$

où \mathbf{C} le "courant" d'éléments dans la direction du gradient négatif de concentration. Cela s'applique autant à des molécules de gaz diffusant vers les zones de concentrations plus faibles, qu'à des "éléments" d'énergie thermique diffusant dans la direction du gradient de température. Leighton (1964) applique pour la première fois cette idée aux éléments de flux magnétique, argumentant que la grande conductivité électrique du plasma solaire justifie que le champ magnétique y reste gelé (Alfvén, 1942). Ainsi, dans une logique similaire à la description du taux de dispersion dA/dt décrit précédemment, un coefficient de "diffusion" (ou de "mélange") peut prendre la forme

$$\eta_D = \frac{1}{2} L^2 / \tau . \quad (1.8)$$

Pour les échelles caractéristiques de la granulation ($L \simeq 10^8$ cm, $\tau \simeq 5 \times 10^2$ s) et de la supergranulation ($L \simeq 15 \times 10^8$ cm, $\tau \simeq 10^5$ s), cela donne un même taux de diffusion de l'ordre 10^{13} cm² s⁻¹. Leighton (1964) argumente toutefois que seule la supergranulation devrait avoir un effet dispersif net sur les grandes régions magnétiques, car ancrée plus profondément, et ainsi mieux couplée avec le champ magnétique (tel que suggéré par la présence du réseau magnétique supergranulaire et non granulaire). Un résultat similaire serait obtenu par une simple analyse dimensionnelle $\eta_D \simeq L u \simeq 10^{13}$ cm² s⁻¹, avec L et u les échelles caractéristiques de longueur et de vitesse pour la supergranulation.

Finalement, pour combiner le tout, il suffit d'exprimer le déplacement effectué à chaque pas de temps Δt de la marche aléatoire, en fonction du coefficient de diffusion η_D :

$$\Delta r_D = \sqrt{2\eta_D \Delta t}, \quad (1.9)$$

et l'Équation (1.6), ci-haut, décrit maintenant de façon totalement explicite le déplacement des éléments magnétiques que l'on désire traquer.

Quant à la valeur exacte de η_D , elle sera désormais considérée comme paramètre libre dans la majorité des modèles, puisque difficile à contraindre précisément par les observations. Nous discuterons plus tard des différents résultats obtenus, et des raisons qui puissent justifier ces écarts. Mais dans la majorité des cas, le coefficient de diffusion sera considéré uniforme sur toute la photosphère. Cela, intégré aux équations précédentes, reviendra à supposer que les éléments magnétiques subissent passivement l'effet des écoulements dispersifs (approche dite cinématique).

Pour une simulation SFT plus adéquate, pourtant, il est clair que l'écoulement du fluide semble partiellement dépendre de l'intensité du flux magnétique : un "couplage magnétoconvectif". Par exemple, les régions actives, quels que soit leur âge et leur dimension, semblent toutes se relaxer vers un état de "plages", où la densité de flux stagne autour de 100 à 150 G (Schrijver & Harvey, 1994). Comme décrit brièvement à la Section 1.2.3.c, il est possible de mimer certains effets dynamiques en modulant l'intensité des écoulements, ici de la dispersion. Dans les modèles à marche aléatoire discrète, une approche consiste donc à simplement ralentir la marche des éléments magnétiques dans les régions de plus haute densité de flux (ou, de façon similaire, à directement ralentir la progression des plus gros éléments de flux). Schrijver (2001) évalue que des coefficients de diffusion $\eta_D \simeq 2.5 \times 10^{12}$ cm² s⁻¹ dans les régions tranquilles et $\simeq 1.1 \times 10^{12}$ cm² s⁻¹ dans les plages reproduiraient adéquatement les observations.

1.3.2.c Fragmentation et collision des éléments de flux

Au gré de la marche aléatoire que l'on vient de décrire, certains éléments magnétiques entrent inévitablement en "collision" avec d'autres. On peut dire qu'il y a collision dès que deux éléments sont

suffisamment près l'un de l'autre. Selon une analyse statistique détaillée du comportement des éléments magnétiques dans le réseau photosphérique tranquille (Schrijver et al., 1997), une distance critique $\delta \simeq 4$ Mm imposerait un taux de collisions adéquat pour reproduire les fonctions de distribution observées. Cela revient à dire que deux éléments de flux Φ_1 et Φ_2 s'approchant à moins de δ l'un de l'autre sont fusionnés en un seul élément de flux $\Phi_1 + \Phi_2$. Si les flux initiaux étaient de même polarité, il en résulte un élément plus gros, mais s'ils étaient de polarité opposée, une partie voire la totalité du flux se trouve supprimée.

Outre ces collisions, les éléments peuvent aussi subir une fragmentation à un certain moment de leur évolution, en deux éléments plus petits. Schrijver et al. (1997) déterminent, à quelques détails près, qu'une probabilité de fragmentation proportionnelle au flux, du type $P(\Phi) = k_0\Phi$, avec $k_0 \simeq 0.5 \times 10^{-24}$ fragmentation/Mx/s, reproduirait adéquatement les distributions statistiques d'éléments dans la photosphère tranquille. Cela correspond à une durée de vie typique de l'ordre de quelques jours pour un élément de flux moyen ($\simeq 5 \times 10^{18}$ Mx).

1.3.2.d D'un côté : vers l'état stable de la photosphère tranquille

Une caractéristique particulièrement intéressante de l'approche par marche aléatoire, c'est la possibilité de suivre l'évolution des éléments magnétiques à toutes les échelles. Le fait d'étudier avant tout le comportement du flux magnétique dans le réseau photosphérique tranquille est d'ailleurs un grand atout pour la modélisation à l'échelle globale, puisqu'il permet de contraindre plusieurs des paramètres caractéristiques de l'émergence, du transport et de l'annihilation du flux (Schrijver et al., 1997, Simon et al., 2001, Thibault et al., 2012).

Aux petites échelles, le patron du réseau magnétique évolue de façon dynamique avec les écoulements turbulents. Par contre, on observe que la fonction de distribution du flux, elle, reste relativement stable, ne variant que très progressivement au cours d'un cycle d'activité. Ainsi, tout le flux magnétique supprimé par collisions entre éléments de polarité opposée, de toutes les grosseurs, doit continuellement être remplacé par un flux émergent équivalent. La Figure 1.7(haut) montre les résultats du modèle de Schrijver (2001), appliqué à différents moments du cycle d'activité. La distribution au maximum d'activité correspond à $\simeq 5\%$ près aux observations, tandis que quelques imprécisions dans la distribution au minimum d'activité pourraient être expliquées par l'incertitude dans la paramétrisation de l'émergence des régions éphémères. Malgré cela, la qualité de ces résultats en comparaison à ceux d'autres modèles permet de confirmer l'importance d'inclure certains mécanismes de modulation du transport en fonction du flux pour mimer, au moins en partie, les rétroactions dynamiques du champ magnétique sur les écoulements.

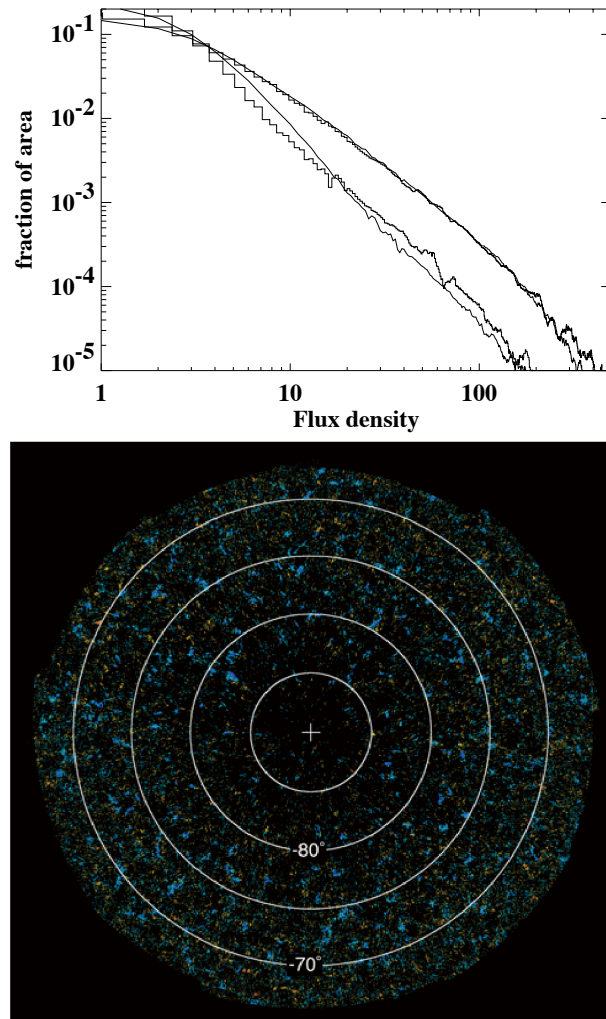


Figure 1.7 – (Haut) Histogramme de la densité de flux (en G) au maximum (courbes du haut) et au minimum (courbes du bas) d’activité. Les traits continus présentent les observations au maximum de 1980 et au minimum de 1975 et les traits saccadés les résultats du modèle de marche aléatoire correspondant (tiré de Schrijver 2001). (Bas) Exemple de magnétogramme vectoriel de la zone polaire nord du Soleil, tel que capturé par le satellite Hinode (http://hinode.nao.ac.jp/uploads/science_discovery00.png).

1.3.2.e De l’autre côté : évolution vers les grandes échelles et modulations cycliques de l’activité

Vers les plus grandes échelles, les collisions entre éléments de même polarité permettent la génération d’éléments de plus en plus importants, jusqu’à un maximum de l’ordre de 10^{22} Mx. La fragmentation assure qu’aucun élément individuel ne durera plus de quelques jours. Les grandes régions unipolaires observées à la surface du Soleil, comme les trainées vers les pôles et les calottes polaires magnétiques, sont donc formées d’un ensemble d’éléments de même polarité qui évoluent de façon très dynamique. Leur flux se voit continuellement renouvelé par l’émergence de nouvelles BMR éphémères. Ces régions unipolaires restent donc toujours parsemées de petits éléments de la polarité opposée.

Au départ le flux des régions unipolaires doit provenir de l'émergence des BMR actives. À chaque émergence, les multiples éléments composant chacun des deux pôles de la BMR commencent leur évolution. Les deux régions s'agrandissent par marche aléatoire (diffusion) des éléments en périphérie, une partie du flux est progressivement supprimé par les collisions entre éléments à la frontière des deux polarités. La même chose se produit lorsque les régions unipolaires de BMR différentes se rencontrent. Sur des échelles de temps suffisantes, tous ces ensembles d'éléments sont dispersés dans la photosphère par marche aléatoire, déformés en longitude par la rotation différentielle et tirés vers les pôles par la circulation méridienne. Des trainées d'éléments magnétiques de chaque polarité se forment, dominées par la polarité "est" des BMR initiales, la polarité "ouest" ayant été détruite davantage à l'équateur. Ces éléments (et leurs successeurs après fragmentation, collisions, etc.) se retrouvent finalement aux pôles.

Ce qui est particulier à cette modélisation du mécanisme de BL par marche aléatoire, c'est le fait que le flux magnétique de polarité opposée à la polarité dominante reste toujours présent, partout dans la photosphère. Ceci correspond bel et bien à l'état de la photosphère solaire active mixée au réseau magnétique tranquille, tel qu'observé par les magnétomètres vectoriels à haute résolution du satellite Hinode (voir Figure 1.7(bas) et Tsuneta et al. 2008). La thèse de doctorat de Thibault (2014) fournit par ailleurs une revue détaillée des caractéristiques propres à ces modèles.

La Figure 1.8 (panneau de gauche) présente un magnétogramme synthétique obtenu par Schrijver (2001). On y voit, entre autres, une grande région active nouvellement émergée, des trainées magnétiques unipolaires glissant vers les pôles, un léger surplus de polarité "noire" aux hautes latitudes nord et, inversement, de polarité "blanche" aux hautes latitudes sud, et finalement le reste de

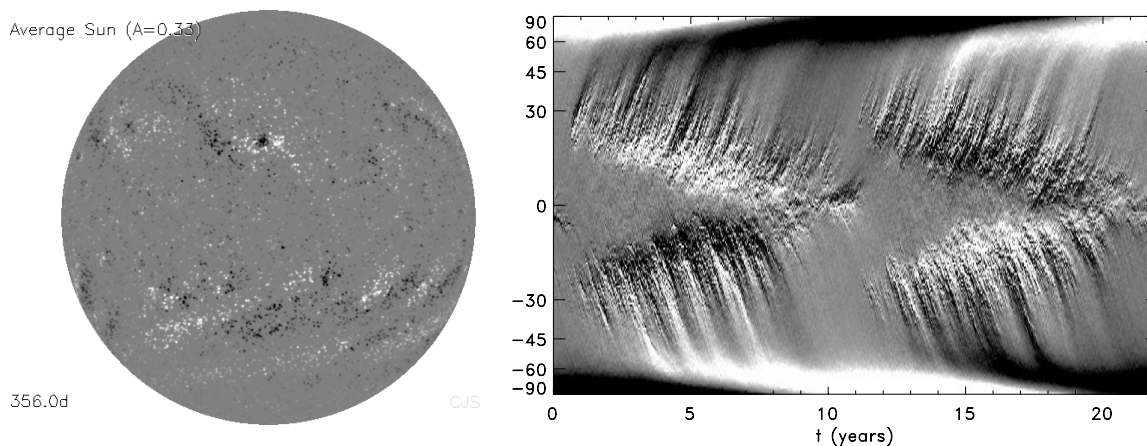


Figure 1.8 – À gauche, exemple de magnétogramme synthétique obtenu par modélisation de la marche aléatoire d'éléments de flux sur l'ensemble de la surface solaire, pour un niveau d'activité moyen (tiré de Schrijver 2001). À droite, magnétogramme synoptique, construit à partir des magnétogrammes successifs comme celui de gauche, moyennés en longitude et tracés en fonction du temps ; l'échelle de gris sature à ± 4 G (polarité noire/blanche) (tiré de Schrijver & Title 2001).

la photosphère, tranquille, couvert par un réseau magnétique mixte. De façon plus quantitative, le flux absolu total pour cette photosphère moyennement active donne $\simeq 5 \times 10^{23}$ Mx. Des simulations équivalentes au minimum et au maximum d’activité donnent des flux absolus totaux de $\simeq 3 \times 10^{23}$ Mx et $\simeq 1 \times 10^{24}$ Mx respectivement. Ces trois valeurs sont en accord à une dizaine de pour cent près avec les observations.

Lorsqu’on exécute une telle simulation sur la durée d’un ou plusieurs cycles, la variabilité temporelle dans l’émergence des BMR actives devient clé. Pour reproduire un cycle d’activité de type solaire, les statistiques d’émergence décrites à la Section 1.2, en particulier la latitude en fonction du temps (le “diagramme papillon”), doivent être connues au mieux possible. C’est d’ailleurs ce qui justifie l’étude détaillée que nous présentons à la Section 2.A (annexe A de l’Article I). De plus, avant d’obtenir une inversion cyclique de l’activité magnétique observée aux pôles solaires, un état initial représentatif doit être imposé en début de simulation. Une distribution analytique simple au minimum d’activité, tel que celle présentée à la Section 1.2.3.e, permettra à la simulation de stabiliser rapidement.

La Figure 1.8 (panneau de droite) présente le résultat d’une simulation de Schrijver & Title (2001), pour deux cycles typiques (voir aussi Thibault et al., 2014). Tel que souhaité, des trainées d’éléments magnétiques de la bonne polarité migrent des latitudes d’émergence vers les pôles, jusqu’à inverser, vers le maximum d’activité, la polarité déjà présente dans la calotte polaire. Non seulement la forme des cycles obtenus semble appropriée, mais les résultats numériques aussi : un champ magnétique moyen piquant à $\simeq 15$ G aux pôles et un flux absolu total de $\simeq 1 \times 10^{23}$ Mx au minimum d’activité.

De ce résultat, toutefois, peut être identifié un important problème, caractéristique de ce type de modèles : la quantité de flux magnétique accumulée à un certain minimum d’activité, après le simple remplacement du flux polaire par la migration de nouveaux éléments de flux de polarité opposée, impose une trop grande dépendance sur l’historique d’activité des cycles précédents. Cela conduit naturellement à une très grande “mémoire” du système, bien au-delà de ce qui est observé à long terme sur le Soleil (indirectement, par dépôt de ^{10}Be dans la glace terrestre). Par exemple, les simulations de Schrijver et al. (2002) montrent qu’une série de cycles “négatifs” trop importants par rapport aux cycles “positifs” intermédiaires pourrait avoir pour effet de pousser la valeur moyenne de l’oscillation vers les “négatifs”, au point d’empêcher une inversion de polarité. Ils argumentent donc qu’un mécanisme d’auto-régulation doit empêcher une série de cycles de trop dévier de l’oscillation relativement stable autour du zéro. Tel que décrit à la Section 1.2.3.c, une modulation adéquate des écoulements ou des statistiques d’émergence en fonction de l’activité magnétique pourrait corriger la situation. Cependant, malgré quelques observations récentes (voir par exemple Dasi-Espuig et al., 2010), les mécanismes en cause ne font pas consensus. Comme alternative à l’inclusion de mécanismes de rétroaction dynamique physiquement contraints, Schrijver et al. (2002) imposent une simple dissipation exponentielle du flux accumulé dans les grandes régions unipolaires. L’échelle de temps τ_R de cette décroissance doit être suffisante pour permettre la migration du flux vers les pôles et un maintien suffisant de la calotte

unipolaire jusqu’au cycle d’activité suivant. Ils obtiennent qu’un $\tau_R \simeq 5 - 10$ ans serait idéal pour reproduire adéquatement l’inversion de polarité de 1999–2000, le flux polaire mesuré pour les cycles 21 et 22 et l’ensemble du flux photosphérique déduit pour toute la période de 1700 à aujourd’hui. Finalement, une explication théoriquement intéressante par Baumann et al. (2006) vient appuyer ce résultat, justifiant que la décroissance exponentielle serait l’équivalent d’une diffusion radiale du champ magnétique (ou submergence des éléments de flux).

1.3.3 MODÈLES SFT BASÉS SUR L’ADVECTION–DIFFUSION DU CHAMP MAGNÉTIQUE

Les modèles précédents, basés sur la marche aléatoire d’éléments de flux magnétique discrets, semblent assez bien reproduire les observations. Toutefois, le défaut fondamental de cette approche, c’est l’obligation d’imposer “à bras” dans le modèle (sans justification physique formelle) toute nouvelle contrainte (par exemple le ralentissement de la dispersion des éléments dans les plages magnétiques). Pour cause, ces modèles ne traitent pas l’évolution du champ magnétique proprement dit, et sont donc bloqués au stade de la cinématique de particules magnétiques ponctuelles. Le champ magnétique à l’intérieur des éléments reste fixe, et c’est la modulation de la densité d’éléments par dispersion, collision et fragmentation, qui imite les changements dans la distribution du flux magnétique.

Lorsqu’il est question de rétroaction du champ magnétique local sur la dispersion des éléments, il serait préférable, plutôt que d’imposer un coefficient de diffusion variable paramétrisé de façon arbitraire, de calculer proprement la force de Lorentz et son effet sur les écoulements. Sans dire que nous ferons ce calcul immédiatement, l’approche advection–diffusion du champ magnétique nous conduit naturellement dans la bonne direction, lorsque viendra le temps de s’en donner la peine.

De plus, le champ magnétique à l’intérieur des éléments discrets de la marche aléatoire est supposé purement radial. Les observations montrent effectivement une composante magnétique radiale bien supérieure à ses contreparties horizontales dans la majorité de la photosphère solaire. Cependant, lorsque l’on en viendra à un niveau de précision requérant de tenir compte de ces autres composantes, un formalisme complet d’advection, de diffusion, d’induction et de rétroaction dynamique, permettant de traiter de l’évolution vectorielle du champ magnétique, deviendra indispensable.

1.3.3.a Équation d’induction MHD

On veut décrire l’évolution du champ magnétique dans un fluide conducteur. La loi d’Ohm nous donne le courant électrique associé aux champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} dans un écoulement \mathbf{u} . En retour, la loi d’Ampère spécifie comment ce courant engendre un champ magnétique, et la loi d’induction de Faraday comment le rotationnel du champ électrique est associé à une variation temporelle du champ magnétique. Dans un plasma stellaire, l’absence de densité de charge nette et de mécanisme

de séparation de charges permet de combiner le tout pour obtenir l'équation d'induction MHD :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta_e \nabla \times \mathbf{B}), \quad (1.10)$$

avec $\eta_e = c^2/4\pi\sigma_e$ (unités CGS) la diffusivité magnétique et σ_e la conductivité électrique.

D'après cette équation, l'écoulement \mathbf{u} du fluide conducteur peut soutenir le champ magnétique contre la dissipation ohmique ou le détruire, selon sa configuration. Bien sûr, cet écoulement n'a pas à être stationnaire. Son évolution peut être décrite par l'équation de Navier–Stokes habituelle (conservation de la quantité de mouvement), augmentée d'une force de Lorentz pour tenir compte de l'effet rétroactif du champ magnétique. Pour compléter le tableau, les principes de conservation de la masse et de l'énergie doivent être respectés, ainsi qu'une équation d'état pour le plasma. Finalement, à ne pas oublier, les monopôles magnétiques n'existent pas ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$).

Si l'objectif était de décrire l'évolution tridimensionnelle du champ magnétique dans le plasma solaire le plus rigoureusement possible, une douzaine d'équations devraient donc être résolues simultanément. Cependant, l'on réalise vite que cette rigueur n'est pas toujours requise. Il vaut parfois mieux simplifier et tester la validité, pour ensuite ajouter progressivement de la complexité en cas de besoin. Ainsi, en première approximation, nous considérerons un fluide incompressible. Les équations de conservation de la masse et de l'énergie se découpleront alors aisément du reste. Comme seconde approximation, importante, qui nous rapprochera du traitement cinématique que nous avons fait avec la marche aléatoire, nous traiterons les écoulements comme stationnaires, sans faire appel à l'équation de Navier–Stokes pour calculer leurs accélérations, d'où le caractère “cinématique” de la présente classe de modèles. Finalement, pour resserrer davantage sur la situation qui nous intéresse, nous supposerons une diffusivité magnétique η uniforme sur la surface solaire (approximation 3), un champ magnétique parfaitement radial ($B_\theta = B_\phi = 0$, approximation 4) et un champ d'écoulement parfaitement horizontal ($u_r = 0$).

Après cette série de simplifications, l'Équation d'induction MHD (1.10) se simplifie rapidement en une équation d'induction (“d'advection–diffusion”) pour la composante radiale du champ magnétique $B_R = B_r(R, \theta, \phi, t)$ à la surface du Soleil :

$$\frac{\partial B_R}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) B_R + \eta_e \nabla^2 B_R. \quad (1.11)$$

Un œil averti remarquera la similarité entre cette équation et celle de diffusion de la densité d'éléments magnétiques proposée par Leighton (1964) (Équation (1.7)), à laquelle s'est ajouté un terme d'advection. En quoi est-ce logique ? Puisque chaque élément est caractérisé par un flux, le nombre d'éléments par unité de surface $n(\theta, \phi, t)$ donne la densité de flux, c'est-à-dire le champ magnétique diffus local. La densité $n(\theta, \phi, t)$ est donc équivalente à $B_R(\theta, \phi, t)$, un des avantages de la présente approche étant

d'avoir pris pleinement conscience des approximations nécessaires pour arriver à ce résultat. Reste cependant un détail important : le coefficient de diffusion η_D proposé par Leighton provenait de la dispersion supergranulaire, tandis que la diffusivité η_e dans l'Équation (1.11) est de nature purement résistive. La démonstration de Leighton demeurant valide dans l'approche actuelle, il convient de combiner la diffusivité magnétique microscopique à l'effet dispersif macroscopique de la supergranulation : $\eta_R = \eta_e + \eta_D$. On réalisera rapidement que le second effet ($\eta_D \simeq 10^{12} - 10^{13} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$) est bien plus important que le premier ($\eta_e \simeq 10^6 - 10^8 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$).

Finalement, un développement de l'Équation (1.11) en coordonnées sphériques nous donne :

$$\frac{\partial B_R}{\partial t} = - \underbrace{\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta u_\theta(R, \theta) B_R] - \Omega(R, \theta) \frac{\partial B_R}{\partial \phi}}_{\text{advection}} + \underbrace{\frac{\eta_R}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial B_R}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 B_R}{\partial \phi^2} \right]}_{\text{diffusion}}, \quad (1.12)$$

avec $\Omega(R, \theta)$ et $u_\theta(R, \theta)$ les profils de rotation différentielle et d'écoulement méridien fournis aux Équations (1.3) et (1.4). Nous avons choisi, pour le moment, de ne pas inclure de profil pour les écoulements convergents décrits à la section 1.2.3.c. Cette équation pourra être résolue sur l'ensemble de la surface solaire en deux dimensions ($r = R$, $\theta \in [0 - 180]^\circ$, $\phi \in [0 - 360]^\circ$), à l'aide de la méthode numérique désirée (voir Section 2.2 (Article I) pour plus de détails).

1.3.3.b Émergence des BMR et premières constatations

Le fait de ne plus modéliser l'évolution des éléments de flux individuels nous oblige maintenant à considérer des échelles au minimum plus grandes que celles du réseau magnétique supergranulaire. En effet, pour considérer la densité d'éléments comme équivalente à un champ magnétique diffus, chaque maille d'une simulation doit contenir un nombre suffisant d'éléments.

Ce qui tombe bien, c'est que la majorité du flux magnétique émerge à la surface du Soleil sous forme de BMR actives, dont les dimensions sont bien supérieures à la limite requise. Pour modéliser l'évolution du flux vers les grandes échelles et obtenir des patrons comparables aux observations, on choisira de ne plus tenir compte des BMR éphémères, puisque leurs orientations quasi-aléatoires ne semblent pas avoir d'autre effet net que le maintien de la mixité du flux aux petites échelles. Pour les BMR actives, le flux sera injecté dans la photosphère selon une distribution en latitude, longitude et temps qui respecte les statistiques décrites brièvement à la Section 1.2.2 et plus en détails à la Section 2.A (Article I). Chaque BMR peut être représentée par deux cloches gaussiennes de polarité opposée, dont l'amplitude dépendra du flux. Ce processus prendra la forme d'une fonction source $S_{\text{BMR}}(\theta, \phi, t)$ ajoutée à l'Équation (1.12).

À l'émergence d'une BMR, l'inclinaison quasi-systématique du dipôle par rapport à la direction équatoriale lui confère une composante dipolaire alignée sur l'axe de rotation du Soleil (moment dipole

laire axial, de l'ordre de $10^{-3} - 10^{-4} \text{ G} \cdot R^2$ pour une BMR typique), opposée au dipôle magnétique axial global déjà accumulé (aux pôles). Si ce n'était que de l'accumulation de ces milliers de composantes dipolaires axiales émergentes, sans transport du flux, le moment dipolaire axial net aurait tôt fait d'être renversé, et cela beaucoup trop intensément. Par exemple, si l'on cumule l'ensemble des composantes axiales pour les $\simeq 3000$ BMR émergées au cours du cycle 21 (1976–1986), on obtient un dipôle de $\simeq 10 \text{ G} \cdot R^2$ (Wang & Sheeley, 1991), lequel renverserait abusivement le dipôle opposé de $\simeq 3.5 \text{ G} \cdot R^2$ accumulé au minimum d'activité de 1976. En terme de flux, ce sont $\simeq 3 \times 10^{25} \text{ Mx}$ qui ont émergé au cours du cycle 21, mais à peine 0.3 % ($\simeq 8 \times 10^{22} \text{ Mx}$) qui ont été transportés aux pôles au cours du cycle.

A première vue, ces constatations semblent indiquer qu'il est aisé que la principale contribution au moment dipolaire axial net du Soleil provienne directement du moment dipolaire axial intrinsèque des BMR. Avec l'appui d'une démonstration [relativement] formelle par Cameron & Schüssler (2015), ceci semble précisément valider le principe de base du mécanisme de BL : l'émergence des BMR serait le mécanisme dynamo principal opérant sur le Soleil. Une discussion plus détaillée à ce sujet, en comparaison aux autres mécanismes dynamo proposés dans différents modèles, sera faite à la Section 1.4.

Par ailleurs, cela démontre aussi comment les paramètres d'émergence (latitude, inclinaison, séparation, flux, voir Section 2.A) peuvent être critiques. En particulier, Cameron et al. (2014) démontrent comment une seule BMR, bien placée à cheval sur l'équateur, peut influencer l'entièreté du cycle d'activité. En conclusion de cet ouvrage, nous décrirons aussi un travail en cours où nous démontrons la nécessité probable d'injecter, au cours d'une simulation qui se voudrait le plus réaliste possible, les quelques BMR critiques observées au cours d'un cycle.

1.3.3.c Transport : un équilibre entre diffusion et écoulement méridien

S'il n'y a aucun doute sur la capacité du moment dipolaire des BMR à renverser la polarité du cycle magnétique, la subtilité du processus réside dans la façon de transporter une fraction de ce moment dipolaire vers les pôles, afin de reproduire les observations au minimum du cycle d'activité. Les mécanismes responsables de ce transport doivent donc interagir d'une façon bien précise.

D'abord, comme premier mécanisme, la rotation différentielle tend à étirer en longitude les BMR émergentes. Pour une BMR donnée, l'étirement simultané des deux régions de polarité opposée génère deux trainées parallèles s'enroulant sur le globe, et légèrement inclinées à cause de la circulation méridienne (voir, à la Figure 1.9, plusieurs exemples de telles trainées parallèles). Cette structure spirale, dominée par la désintégration des plus grosses émergences, est directement observée sur les magnétogrammes à basse résolution. Combiné à la diffusion, cet enroulement tend à rapprocher les régions de polarité opposée, dont le flux est alors mutuellement détruit, et la composante dipolaire

longitudinale peut presque disparaître (Wang & Sheeley, 1991). Une rotation différentielle rapide peut donc réduire le flux photosphérique total (Baumann et al., 2004), mais sans affecter la composante dipolaire axiale et l’accumulation nette de flux aux pôles.

Ainsi, c’est au niveau de la diffusion, de l’écoulement méridien et des écoulements convergents que doit se produire l’équilibre souhaité. Si ce n’était que de la diffusion, la composante dipolaire axiale résultante devrait décroître exponentiellement sur un temps caractéristique $R^2/2\eta_R$, soit $\simeq 13$ ans pour $\eta_R = 6 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ (Leighton, 1964). D’un autre côté, un écoulement méridien sans diffusion transporterait indistinctement les deux polarités vers les hautes latitudes, diminuant le moment dipolaire axial proportionnellement à $\sin \theta$ et annulant ainsi toute contribution nette à l’atteinte des pôles.

Si le flux d’une seule polarité (“est”) doit de façon prédominante migrer vers les hautes latitudes, on l’a dit, c’est que l’autre (“ouest”) doit être davantage supprimé. L’équilibre à atteindre pour permettre cette séparation des polarités est donc le suivant : la diffusion doit être suffisante pour mener ce flux “ouest” des latitudes d’émergence vers l’équateur, où se produira une suppression transéquatoriale avec sa contrepartie de l’autre hémisphère ; et l’écoulement méridien doit être suffisamment lent pour laisser le temps à la diffusion d’agir, avec un gradient $\frac{du_\theta}{d\theta}$ positif permettant d’accélérer la séparation. En revanche, un écoulement trop lent ou un taux de diffusion trop rapide engendreront trop de suppression des deux polarités, ce qui ne laissera alors pas assez de flux pour renverser le champ magnétique des pôles. Quant aux écoulements convergents observés vers les régions actives, leur effet serait plutôt de réduire la séparation des polarités magnétiques, ce qui nuirait localement à l’efficacité du mécanisme (Cameron & Schüssler, 2012). Quoi qu’il en soit, un équilibre complexe doit donc s’installer entre ces

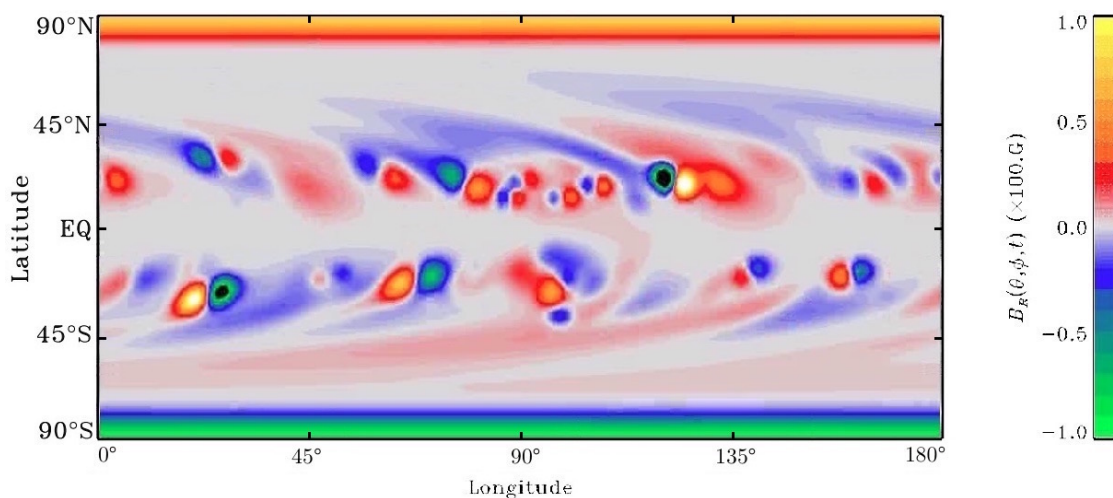


Figure 1.9 – Instantané d’une simulation de l’évolution du flux magnétique à la surface du Soleil (telle que décrite au Chapitre 2 (Article I)), à un temps t près du quart de la durée du cycle, avant l’atteinte du maximum d’activité.

quelques mécanismes de transport.

La Figure 1.9 présente un état instantané d’une simulation SFT réaliste, environ au quart de la durée du cycle, lorsque le dipole n’a pas encore été renversé. L’effet de suppression transéquatoriale du flux “ouest” (ici, positif (rouge) dans l’hémisphère nord, négatif (bleu) dans l’hémisphère sud) est manifeste. Il en résulte que la polarité “est” (négative (bleue) dans l’hémisphère nord, positive (rouge) dans l’hémisphère sud) domine progressivement les trainées aux moyennes à hautes latitudes, ce qui entrainera sous peu le renversement du flux présent aux pôles depuis le précédent minimum d’activité.

Au vu de cet équilibre délicat, un objectif fondamental des simulations SFT aux grandes échelles est de contraindre les amplitudes mal connues des différents paramètres libres du modèle, en particulier du coefficient de diffusion (η_R) et de l’écoulement méridien (u_0). Pour obtenir une estimation de η_R , une première approche simple consiste à comparer le taux d’expansion simulé et observé pour des régions magnétiques individuelles bien définies. Par cette méthode, Mosher (1977) obtient un coefficient de diffusion de $2 - 4 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et Wang et al. (1989b) obtiennent $(6 \pm 2) \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

Pour contraindre simultanément le taux de diffusion et la circulation méridienne, mieux vaut considérer l’évolution du flux sur l’ensemble de la surface, et pour un cycle d’activité entier. Comme condition initiale, les simulations peuvent, par exemple, prendre en entrée une distribution du champ magnétique polaire à la Svalgaard et al. (1978) (Équation (1.5)) pour le minimum d’activité. Puis, on laisse le champ magnétique évoluer selon l’Équation de transport (1.12) en injectant les BMR dans le terme source à mesure qu’elles émergent. Puisque le transport d’intérêt se fait dans la direction latitudinale, une moyenne en longitude permettra de supprimer les effets visuels de la rotation et de produire des cartes latitude–temps qui donneront un meilleur cliché de l’évolution à étudier.

Comme premier résultat, Leighton (1964) trouve $7.7 - 15.4 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ pour reproduire les inversions de polarité, mais sans circulation méridienne. C’est donc que le mécanisme de BL peut fonctionner sans cet écoulement. Cependant, la configuration finale du champ est alors loin du gradient abrupt observé aux pôles. Wang et al. (1989b) poursuivent la démarche en comparant leurs simulations à l’évolution du moment dipolaire axial, ainsi qu’à la distribution en latitude du champ magnétique observé au minimum d’activité. Ils obtiennent $\eta_R = (6 \pm 2) \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et $u_0 = 10 \pm 3 \text{ m s}^{-1}$. Wang & Sheeley (1991) analysent de façon rigoureuse la contribution au moment dipolaire axial de BMR individuelles, en fonction du taux de diffusion, de l’écoulement méridien et de la latitude d’émergence. Leurs résultats illustrent comment l’équilibre entre diffusion et écoulement méridien est délicat. Pour une émergence près de l’équateur (Figure 1.10(a)), avec inclinaison moyenne, et un taux de diffusion de $6 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, c’est une amplitude de l’écoulement méridien de 10 m s^{-1} qui amplifie la composante axiale de façon maximale, une vitesse de 5 m s^{-1} laissant trop de temps à l’annihilation de faire son effet sur les deux polarités, tandis qu’une vitesse de 20 m s^{-1} transporte trop vite les deux polarités vers le pôle. Si on dépose une BMR à une latitude de 15°N (Figure 1.10(b)), seule une vitesse de 5 m s^{-1} permet une amplification du dipôle, tandis qu’une vitesse de 20 m s^{-1}

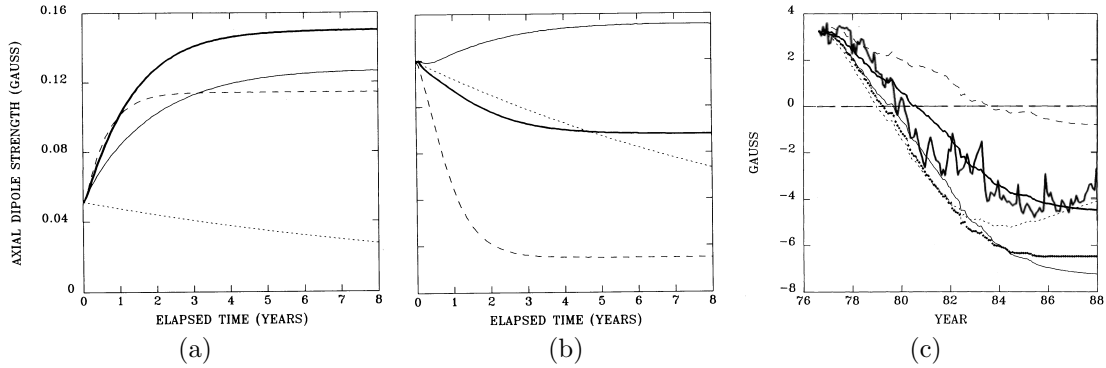


Figure 1.10 – (a) et (b) Évolution de la composante magnétique dipolaire axiale pour une BMR de 2×10^{22} Mx déposée à 7°N et 15°N , respectivement. (c) Évolution de l’amplitude du dipôle axial total au cours du cycle d’activité 21 (valeur observée en trait épais fluctuant). Simulations avec $\eta_R = 0$ et $u_0 = 0$ (points noirs), $\eta = 6 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et $u_0 = 0$ (pointillé), $\eta = 6 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et $u_0 = 5 \text{ m s}^{-1}$ (trait fin), $\eta = 6 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et $u_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ (trait épais), et $\eta = 6 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et $u_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$ (tirets). (Tiré de Wang & Sheeley 1991.)

fait bien pire que la simple décroissance exponentielle, en amenant tout le flux vers les pôles.

En combinant cette démarche pour tout un cycle, le résultat est similaire à celui pour une BMR injectée à $\simeq 15^\circ\text{N}$, puisque la latitude moyenne d’émergence pour ce cycle est de 16.6°N . En l’absence d’écoulement vers les pôles, le moment dipolaire axial s’inverse trop tôt, en plus d’atteindre une amplitude trop grande, similaire à celle obtenue en l’absence de tout transport (voir Figure 1.10(c)). Puis, avant la fin du cycle, le dipôle se met à décroître exponentiellement par absence de mécanisme de séparation entre les deux polarités. Avec un écoulement à 5 m s^{-1} , un dipôle final trop intense est atteint (trop de flux “ouest” détruit à l’équateur). À 20 m s^{-1} , c’est l’inverse, beaucoup trop de polarité “ouest” est transportée aux pôles, et il en résulte une inversion tardive et une amplitude beaucoup trop faible. Encore une fois, un écoulement à 10 m s^{-1} semble être idéal pour reproduire un dipôle final d’une amplitude similaire au dipôle initial, mais de polarité opposée.

Une étude plus systématique, par Baumann et al. (2004), propose de tester sur des intervalles substantiels l’effet des différents paramètres. De $\eta_R = 5 \times 10^{11}$ à $5 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, le flux polaire diminue à cause d’une trop grande suppression du flux photosphérique total, puis pour $\eta_R \gtrsim 5 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ la tendance est renversée à cause de la suppression suffisante à l’équateur (voir Figure 1.11(a)). Le flux aux pôles augmente aussi avec la croissance du transport méridien de $u_0 = 0$ à 8 m s^{-1} , mais, comme expliqué précédemment, diminue considérablement de 8 à 30 m s^{-1} en empêchant une suppression suffisante de la polarité “ouest” à l’équateur (voir Figure 1.11(b)). Au bout du compte, $6 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et 11 m s^{-1} semblent représenter de façon idéale les observations, avec un flux polaire atteignant $\simeq 6 \text{ G}$ au minimum d’activité.

Au Chapitre 2 (Article I), nous poussons ce même genre de démarche systématique, par une optimisation formelle du modèle d’évolution de flux de surface sur la base des observations du cycle

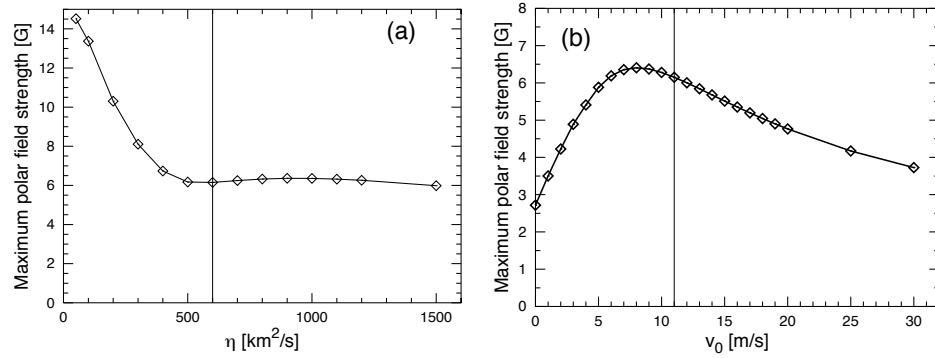


Figure 1.11 – Champ magnétique polaire maximal accumulé au minimum d’activité, (a) en fonction de la diffusivité η_R (avec $u_0 = 11 \text{ m s}^{-1}$) et (b) en fonction de la vitesse maximale de l’écoulement méridien u_0 (avec $\eta_R = 6 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$). (Tiré de Baumann et al. 2004.)

21, afin de déterminer de façon rigoureuse les valeurs optimales pour tous les paramètres libres du modèle, affublées d’intervalles d’incertitude de type Monte Carlo. Plus spécifiquement, une condition initiale, un taux de décroissance et un profil précis de circulation méridienne sont extraits de l’optimisation, pour finalement fournir un intervalle de confiance définitif pour les deux paramètres usuels, en plus d’une importante corrélation linéaire entre u_0 et $\log \eta_R$: $u_0 = 12 \pm \frac{4}{2} \text{ m s}^{-1}$ et $\eta_R = (3.5 \pm 0.7) \times 10^{12+0.037(u_0-12)} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ (voir Tableau 2.I et Figure 2.8). Ces résultats sont compatibles avec ce qui a été décrit précédemment. La Figure 1.12 illustre le résultat d’une telle simulation optimale, sous la forme d’une carte magnétique latitude–temps. Une comparaison avec le magnétogramme observé permet de constater la reproduction, en bonne approximation, de la distribution de flux aux latitudes d’émergence, de la majorité des importantes trainées magnétiques aux mi-latitudes et de la distribution du flux aux pôles.

1.3.3.d Structure du flux magnétique polaire

Au vu des simulations précédentes, il devient évident que la circulation méridienne joue un rôle déterminant dans l’endigement du flux aux pôles, empêchant ainsi toute dissipation au delà d’un certain moment dans l’évolution du cycle. À la Figure 1.10, on a vu que la composante dipolaire axiale d’une BMR donnée atteignait rapidement un plateau dans son évolution. Cela se produit dès que le flux net est suffisamment concentré près des pôles pour que les deux polarités soient définitivement séparées l’une de l’autre et qu’un équilibre entre diffusion vers l’équateur et écoulement vers les pôles soit atteint. Plus l’écoulement méridien est intense, plus vite ce plateau est atteint.

À la Figure 1.13(a), on constate que tant l’absence d’écoulement méridien, qui autorise une diffusion continue du flux, qu’un taux de diffusion trop faible, qui empêche une destruction suffisante de la polarité “ouest” à l’équateur, ne permettent d’obtenir le fort gradient de champ magnétique vers les pôles observé au minimum d’activité.

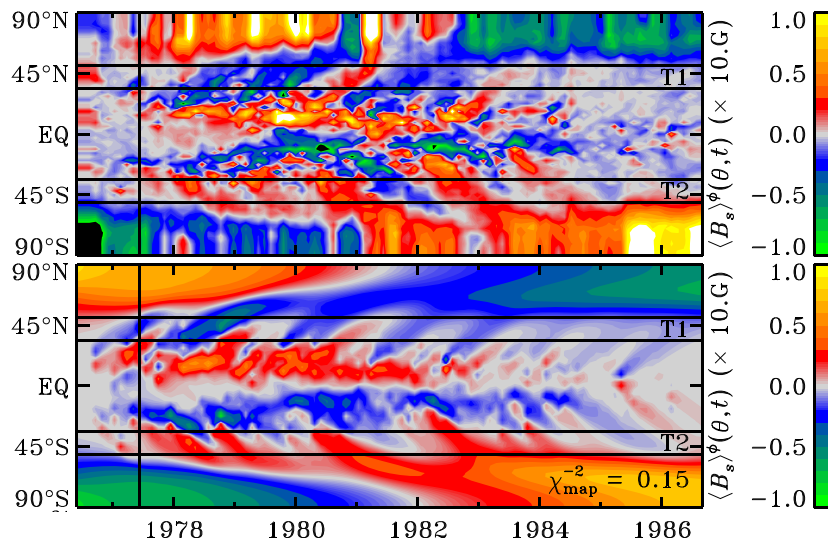


Figure 1.12 – Haut : magnétogramme latitude–temps observé pour le cycle 21, extrait des données de Hathaway (2010) (portion de la Figure 1.2). Bas : magnétogramme latitude–temps synthétique produit pour la simulation SFT optimale de Lemerle et al. (2015).

De plus, d’importantes fluctuations sont observées dans l’évolution temporelle du flux magnétique polaire. Une analyse des magnétogrammes synoptiques montre que ces fluctuations sont associés avec l’arrivée des trainées magnétiques provenant des latitudes actives, en particulier lorsqu’il arrive qu’elles soient de la “mauvaise” polarité. Par exemple, on a vu une telle trainée venir perturber l’accumulation du nouveau flux magnétique au pôle nord juste après l’inversion de polarité du cycle 21, en 1980–1981. Cette trainée (rouge) est clairement visible sur le magnétogramme latitude–temps présenté à la Figure 1.12 (panneau du haut). Malheureusement, la simulation présentée, même optimisée, n’a su reproduire cette trainée, pour des raisons éventuelles de mauvaise paramétrisation de certaines BMR spécifiques ou de manque de certaines variations ou rétroactions dynamiques dans les écoulements. Par exemple, Wang et al. (1989b, 2002b) démontrent la nécessité d’une augmentation de la circulation méridienne au maximum d’activité pour s’ajuster aux fluctuations du champ polaire observées (voir Figure 1.13(b)).

1.3.3.e Évolution de l’activité à plus long terme

Après avoir réussi à reproduire l’évolution du flux magnétique pour un cycle d’activité typique, des émergences à l’accumulation aux pôles, la suite logique est de tester les modèles pour des niveaux d’activité différents, représentatifs de l’évolution à plus long terme. Puisque nous n’avons qu’une idée incomplète de l’activité au cours des derniers siècles, Baumann et al. (2004) proposent de tester de façon systématique l’effet de différents paramètres d’activité.

D’abord, une variation du niveau d’activité (nombre d’émergences), de 0.2 à 10 fois la valeur

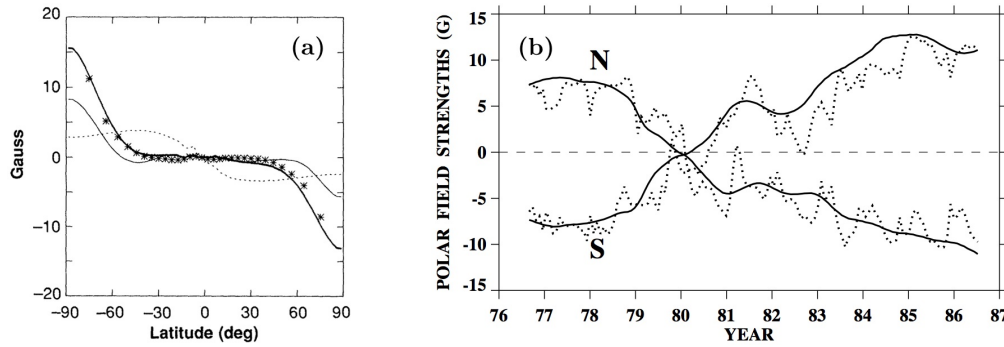


Figure 1.13 – (a) Distribution en latitude du champ magnétique observé (diamants noirs) vers la fin du cycle d’activité solaire 21 et simulés avec $\eta_R = 6 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et $u_0 = 0$ (trait pointillé), $\eta_R = 3 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et $u_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ (trait fin), et $\eta_R = 6 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et $u_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ (trait épais) (tiré de Wang et al. 1989b). (b) Amplitude du champ magnétique aux pôles nord et sud en fonction du temps (observations en pointillé et simulation en trait plein) (tiré de Wang et al. 2002b).

moyenne observée, montre une tendance moins que linéaire pour l’augmentation du flux photosphérique en fonction de l’activité, cela dû au fait qu’une plus grande proximité des émergences implique aussi davantage de suppression de flux. L’accumulation du flux polaire augmente toutefois de façon linéaire, puisqu’un seule polarité est alors impliquée.

Pour une variation de la durée du cycle de 4 à 20 ans, le champ magnétique polaire maximal augmente quasi-linéairement avec la durée du cycle, car davantage de flux a le temps d’atteindre les pôles. Cependant, un plus long cycle voudra aussi dire une plus longue période d’inactivité pendant laquelle le flux aura la chance de diffuser plus que la normale (à moins qu’un écoulement méridien particulièrement intense ne l’en empêche). Ceci pourrait expliquer pourquoi les cycles longs sont souvent suivis de cycles moins actifs.

Les mêmes auteurs testent aussi l’impact de différents paramètres des émergences, tel une augmentation de l’inclinaison des BMR et une variation de la latitude moyenne d’émergence. Dans le premier cas, l’effet est assez évident : une augmentation linéaire du flux photosphérique total. Pour le second test, toutefois, une diminution de 5° des latitudes d’émergence augmente l’accumulation de flux polaire car davantage de suppression peut avoir lieu à l’équateur, et une augmentation de 5 à 20° de la latitude augmente aussi l’accumulation de flux net, car le transport vers les pôles se fait plus rapidement et que l’inclinaison plus importante due à la loi de Joy permet la suppression équatoriale requise. La latitude moyenne d’émergence des BMR solaires typiques ne serait donc pas optimale.

Finalement, tel que décrit précédemment, Wang et al. (2002a) déterminent qu’un écoulement méridien variable pourrait effectivement être nécessaire pour reproduire les inversions de polarité pour les différents niveaux d’activité observés. Une variation de l’ordre de $\pm 6 \text{ m s}^{-1}$, avec un écoulement légèrement plus rapide pour les cycles plus actifs que pour les cycles plus faibles, serait d’ailleurs tout à fait compatible avec le fait observé que les cycles actifs sont aussi plus courts.

1.3.4 ÉVOLUTION DU FLUX MAGNÉTIQUE DE SURFACE (SFT), EN RÉSUMÉ

Pour récapituler, les modèles SFT par marche aléatoire d'éléments magnétiques ont pour principal avantage la possibilité de tenir compte de toutes les échelles, jusqu'au réseau magnétique mixte. Dans les phases jeunes de l'évolution des BMR, la marche aléatoire a alors toutes les chances d'être plus précise pour décrire la dispersion du flux. Ce traitement implique toutefois l'incorporation détaillée des petites BMR, incluant les régions éphémères, dont les paramètres d'émergence sont malheureusement mal connus. Aussi, le mode de dispersion des éléments individuels a l'avantage de permettre facilement l'ajout de corrections à la marche aléatoire, en fonction du flux par exemple, afin de mieux s'accorder aux observations. Ces corrections ont toutefois le défaut d'être difficiles à justifier physiquement.

Du côté SFT par advection–diffusion, l'approche théorique est a priori plus fondamentale, et les modèles ont l'avantage d'être beaucoup plus faciles à interpréter en terme des trois processus du transport, soit la rotation différentielle, la circulation méridienne, et la diffusion supergranulaire. Ces modèles semblent très bien fonctionner aux grandes échelles, ce qui justifie sans hésiter leur utilisation. Le fait qu'ils simulent directement l'évolution d'un champ diffus permet aussi l'assimilation directe d'observations magnétographiques de la surface solaire. Dans ce domaine, probablement aucun modèle SFT ne fait mieux à reproduire les détails de l'activité solaire réelle que celui de Upton & Hathaway (2014), capable de prédire l'évolution du flux de surface jusqu'à trois ans avant la fin du cycle. D'un autre côté, notre modèle présenté au Chapitre 2 (Article I) atteint une reproduction optimale de l'activité de surface observée au cours du cycle 21, mais par l'inclusion seulement des BMR observées au cours du cycle. Les modèles SFT par advection–diffusion ont aussi le potentiel important de pouvoir être améliorés considérablement, par exemple, par l'ajout des composantes vectorielles du champ magnétique, par un traitement dynamique de l'ensemble des équations MHD, etc. Finalement, puisqu'ils appliquent les principes de base de la MHD, ils auront ultimement la possibilité d'être intégrés directement à des codes dynamo 3D de l'intérieur solaire.

1.4 MODÈLES DYNAMO DE TYPE BABCOCK–LEIGHTON (BL)

Après description des observations et modélisation de l'évolution du flux magnétique à la surface du Soleil, vient enfin le moment de tenter de comprendre les mécanismes internes sous-jacents : l'ensemble des processus dynamo responsables de la régénération cyclique de l'activité magnétique solaire. On l'a dit, deux étapes fondamentales à ce processus : la génération d'une composante magnétique toroïdal intense à l'intérieur du Soleil à partir d'un champ magnétique poloïdal, ce qui est obtenu ai-

sément du cisaillement par la rotation différentielle, puis la régénération d'un champ poloïdal opposé à son prédécesseur à partir du champ toroïdal interne. La seconde partie du problème étant la plus hasardeuse, aucun consensus n'existe encore sur la façon dont elle se produit. Pour une revue détaillée des différentes classes de modèles existantes, consulter Charbonneau (2010).

Une classe de modèles est celle dite de BL, dont les prémices lancés par Babcock (1961) ont été décrits à la Section 1.3. Au risque de se répéter, cette approche suggère que la régénération du champ magnétique poloïdal soit dominée par les processus de surface décrits précédemment (émergence des BMR et transport du flux). C'est donc le flux magnétique accumulé aux pôles à la fin de chaque cycle d'activité, sous la forme d'un dipôle axial, qui doit être transporté vers l'intérieur du Soleil, pour être cisailé par la rotation différentielle et générer un champ toroïdal diffus antisymétrique par rapport à l'équateur, qui s'intensifiera par endroits pour former d'intenses tubes de flux, instables à la flottaison magnétique et qui se verront tordre par la force de Coriolis lors de leur ascension, ce qui leur donnera une composante dipolaire axiale opposée au champ déjà présent aux pôles, qui pourra finalement y être transportée pour renverser le dipôle initial.

Les étapes de génération des instabilités toroïdales au bas de la zone convective, d'ascension des tubes de flux jusqu'à la surface et de torsion par la force de Coriolis ne seront pas traitées ici, car complexes, partiellement mal comprises, et non nécessaires au fonctionnement des modèles décrits. Il n'est donc pas question de modéliser les fluctuations du champ magnétique interne aux petites échelles, mais bien l'évolution du champ global moyen et axisymétrique responsable de gouverner le cycle d'activité. L'objectif de cette section est de revoir en détails la façon dont le mécanisme de surface de BL, décrit de manière extensive à la Section 1.3, est intégré dans les différents modèles dynamo, comme moyen de régénération de la composante magnétique poloïdale du Soleil.

1.4.1 RÉGIME CINÉMATIQUE

On l'a décrit à la Section 1.3.3.a, dans le contexte d'un plasma solaire thermalisé, non relativiste et électriquement neutre, les lois d'Ampère, Faraday et Ohm peuvent être combinées en une équation unique pour l'évolution du champ magnétique \mathbf{B} dans un champ d'écoulement \mathbf{u} : l'équation d'induction MHD (Équation (1.10)).

Encore une fois, un traitement rigoureux de l'interaction du champ magnétique avec les écoulements convectifs turbulents, sur la variété d'échelles temporelles et spatiales en cause, requerrait la résolution couplée de l'ensemble des équations MHD, incluant l'équation de Navier–Stokes pour l'évolution de l'écoulement \mathbf{u} . La complexité de tels modèles MHD complets de la zone convective solaire (voir Ghizaru et al., 2010, Nelson et al., 2013) rend leur résolution numérique et leur analyse très exigeantes. En particulier, de telles simulations ne peuvent encore raisonnablement atteindre la résolution spatiale et temporelle nécessaire pour capturer les mécanismes de formation des tubes de flux toroïdaux au

bas de la zone convective et leur déstabilisation, ascension et torsion subséquente (mais voir Nelson et al., 2014). Dans ce cas, si l'objectif principal est d'en arriver à un modèle de type BL, capable de traiter l'émergence des BMR en surface comme terme source prédominant de la dynamo, il vaut mieux, pour l'instant, simplifier radicalement le système à solutionner et se contenter d'oeuvrer dans le régime cinématique en spécifiant un écoulement \mathbf{u} stationnaire. Les modèles dynamo dont il sera question ici se contenteront donc de résoudre l'équation d'induction MHD seule.

1.4.2 AXISYMETRIE

Même si l'objectif est de capturer les mécanismes de déstabilisation et torsion du flux magnétique aux petites échelles, nous verrons que la prise en compte de leur effet global n'est pas obligée de requérir une modélisation exacte en trois dimensions (3D). Nous en viendrons donc à une résolution numérique bidimensionnelle (2D) dans le plan méridien seulement, pour des champ magnétique et écoulement axisymétriques. La spécificité de chaque modèle résidera dans la façon dont le mécanisme de BL est intégré aux équations.

Négligeant toute dépendance azimutale du champ magnétique moyen aux grandes échelles, on commence par une décomposition en coordonnées sphériques de la forme

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = B_\phi(r, \theta, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi + \nabla \times (A_\phi(r, \theta, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi). \quad (1.13)$$

Cette formulation a l'avantage d'imposer intrinsèquement la condition $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, en plus de séparer les composantes toroïdale B_ϕ et poloïdale $\mathbf{B}_P = \nabla \times (A_\phi(r, \theta, t)\hat{\mathbf{e}}_\phi)$ du champ magnétique. On peut considérer une décomposition similaire pour le champ d'écoulements à grande échelle, lui indépendant du temps :

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \varpi\Omega(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_\phi + \mathbf{u}_p(r, \theta), \quad (1.14)$$

avec $\varpi = r \sin \theta$, et $\Omega(r, \theta)$ et $\mathbf{u}_p(r, \theta)$ les profils de rotation et de circulation méridienne qui seront décrits plus bas. Il devient alors possible de découpler les composantes toroïdale et poloïdale (avec jauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) de l'équation d'induction MHD en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\phi}{\partial t} &= \underbrace{-\varpi(\mathbf{u}_p \cdot \nabla) \left(\frac{B_\phi}{\varpi} \right)}_{\text{advection}} + \underbrace{\eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B_\phi}_{\text{diffusion}} - \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{u}_p) B_\phi}_{\text{compression}} + \underbrace{\frac{1}{\varpi} \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial (\varpi B_\phi)}{\partial r}}_{\text{transport diamagnétique}} + \underbrace{\varpi \mathbf{B}_P \cdot \nabla \Omega}_{\text{cisaillement}}, \\ \frac{\partial A_\phi}{\partial t} &= \underbrace{-\frac{1}{\varpi} (\mathbf{u}_p \cdot \nabla) (\varpi A_\phi)}_{\text{advection}} + \underbrace{\eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A_\phi}_{\text{diffusion}}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

avec $\eta(r)$ le profil radial de diffusivité, lui supposé constant et indépendant de la latitude.

On en revient ici au problème dynamo de départ, énoncé rigoureusement par Cowling (1933), à sa-

voir qu'un champ magnétique axisymétrique dans un écoulement axisymétrique ne peut en aucun cas amplifier ni même soutenir une dynamo. En effet, la paire d'Équations (1.15) montre que le "cisaillement" du champ magnétique poloïdal peut amplifier le champ toroïdal B_ϕ (effet Ω , voir Figure 1.14), qu'un gradient de diffusivité ("transport diamagnétique") ou une "compression" (ou expansion) du milieu peuvent amplifier ou détruire le champ toroïdal local, mais qu'aucun terme source n'est présent pour maintenir le champ poloïdal (A_ϕ) contre la dissipation diffusive. Comme déjà énoncé, c'est l'identification de mécanismes non axisymétrique de régénération de ce champ poloïdal qui pose donc défi. Le traditionnel effet α , produisant théoriquement un excès d'hélicité aux petites échelles, en serait une source possible (voir Simard 2017, § 1.2.4, pour une description détaillée du formalisme requis). Le mécanisme de BL, que nous traiterons ici, est un autre exemple de tel mécanisme non axisymétrique, mais à plus grande échelle (voir Figure 1.14). Dans tous les cas, la régénération du champ poloïdal devra se faire via l'insertion d'un terme source supplémentaire $S_A(r, \theta; B_\phi)$ dans l'Équation (1.15) poloïdale.

1.4.3 CONDITIONS INITIALE ET LIMITES

De façon tout à fait générale, un coeur radiatif ($\mathbf{u}_P = 0$) considéré parfaitement conducteur ($\eta = 0$) permettra d'imposer $B_\phi = A_\phi = 0$ à la limite inférieure R_i du domaine. Pour $r \geq R$, l'espace "vide" ne peut soutenir de courant électrique, et on a donc $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + \nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)) = 0$, ce qui implique $B_\phi = 0$ et A_ϕ qui décroît comme un potentiel typique à l'extérieur de sa source :

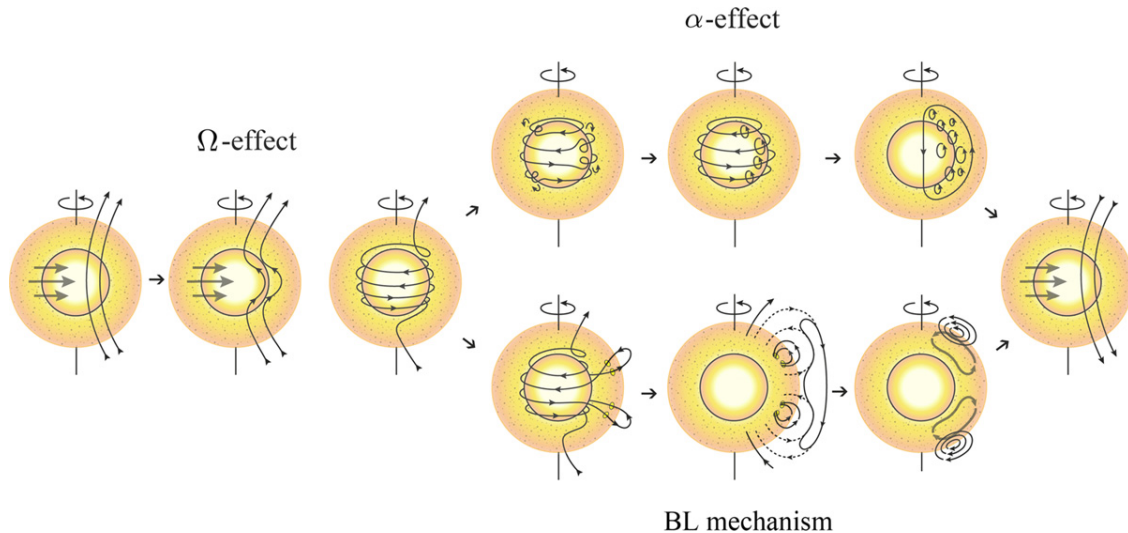


Figure 1.14 – Schématisation simplifiée du processus dynamo en champ moyen aux grandes échelles : d'abord conversion du champ poloïdal en champ toroïdal (effet Ω), puis conversion du champ toroïdal en champ poloïdal, d'une part via l'effet α interne, aux petites échelles, d'autre part via le mécanisme de BL, dû à l'émergence de grandes BMR en surface (voir aussi Figure 1.6). (Tiré de Sanchez et al. 2014.)

$(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2}) A_\phi = 0$. Aussi, la simple contrainte de la géométrie sphérique impose $B_\phi = A_\phi = 0$ à $\theta = 0$ et π .

Comme condition initiale à l’entrée des simulations, deux choix relativement simples : soit représenter un minimum d’activité par un simple dipôle axial et un champ toroïdal nul, soit un maximum d’activité approximatif par un champ toroïdal antisymétrique au bas de la zone convective (du type $B_\phi(r, \theta, 0) = B_0 \sin(2\theta)$) et un champ poloïdal nul. Dans tous les cas, ces conditions approximatives obligent à laisser rouler les simulations suffisamment longtemps pour s’en extraire et atteindre un état dynamo stabilisé.

1.4.4 INGRÉDIENTS

Une simulation numérique complète de l’évolution du champ magnétique dans l’ensemble de la zone convective solaire requière la connaissance préalable de certains ingrédients de base. Bien sûr, des mesures directes manquent, et il faut donc se contenter d’évaluations indirectes ou approximatives. Pour résoudre le système d’Équations (1.15) dans un régime cinématique, nous devons fournir un profil de rotation différentielle, un profil de circulation méridienne et un profil radial pour la diffusivité. Seules les tendances aux grandes échelles sont considérées, sans tenir compte explicitement des fluctuations turbulentes aux petites échelles, qui elles sont plutôt contenues implicitement dans le processus global de diffusion.

1.4.4.a Rotation différentielle

À l’époque de Leighton (1969), et jusqu’à fin des années 1980, le profil exact de la rotation différentielle à l’intérieur du Soleil était très spéculatif. Pendant longtemps, les modèles ont supposé que l’écoulement aux grandes échelles dans la zone convective était contrôlé par la force de Coriolis, bien au devant de la viscosité et de l’inertie. De par le théorème de Taylor–Proudman, il en résultait un profil de rotation “cylindrique”, avec cisaillement maximal dans les couches très externes de la zone convective. L’avènement de l’héliosismologie a permis de rectifier le tir, en réalisant que le cisaillement radial maximal se produisait plutôt au bas de la zone convective (voir Figure 1.15), imposant d’ailleurs des amplitudes du champ magnétique toroïdal beaucoup plus importantes que prévu.

Un profil analytique, basé sur les résultats d’une inversion de mesures héliosismiques obtenue par Charbonneau et al. (1999), est proposé par Dikpati & Charbonneau (1999) :

$$\Omega(r, \theta) = \Omega_c + \frac{\Omega(R, \theta) - \Omega_c}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{r - R_c}{\delta_c/2} \right) \right], \quad (1.16)$$

avec $R_c \simeq 0.7R$ le rayon du coeur radiatif, $\delta_c \simeq 0.05R$ l’épaisseur caractéristique de la zone de transition (tachocline) entre rotation rigide du coeur ($\Omega_c \simeq 2.7 \mu\text{rad s}^{-1}$) et rotation différentielle des

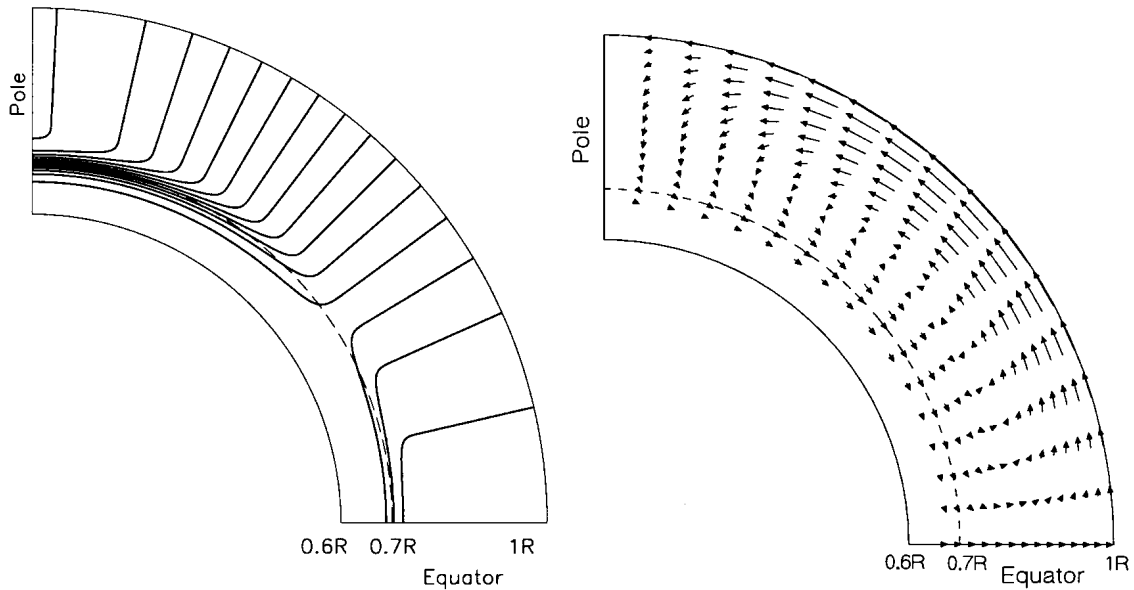


Figure 1.15 – À gauche, coupe méridionale d’un profil analytique de rotation différentielle. Le taux de rotation en surface à l’équateur est $2.9 \mu\text{rad s}^{-1}$, et les isocontours sont séparés de $0.06 \mu\text{rad s}^{-1}$. À droite, champ de vitesse approximatif d’une circulation méridienne unicellulaire. (Tiré de Dikpati & Charbonneau 1999.)

couches externes, et $\Omega(R, \theta)$ le profil de rotation différentielle en surface (Équation (1.3)).

1.4.4.b Circulation méridienne

Déjà que le profil et l’amplitude de l’écoulement $u_\theta(R, \theta)$ à la surface du Soleil sont difficiles à contraindre (voir Section 1.2.3.b), encore plus d’incertitude règne quant à la structure interne de cette circulation méridienne. À la limite de détection de l’héliosismologie, quelques mesures indiquent que le profil de surface serait maintenu dans la partie externe de la zone convective, au moins les premiers $\simeq 5\%$ du rayon solaire (Schou & Bogart, 1998), mais même possiblement davantage (Braun & Fan, 1998). Des analyses héliosismiques plus récentes suggéreraient même la présence de multiples cellules de circulation à différentes profondeurs de la zone convective (Schad et al., 2013, Zhao et al., 2013), mais ces résultats restent encore dépendant des méthodes d’analyse (Rajaguru & Antia, 2015).

Quoi qu’il en soit, on sait avec certitude qu’un écoulement de retour, quelque part à l’intérieur du Soleil, est nécessaire pour contrebalancer le mouvement net de masse vers les pôles en surface, quoique plus lent vu la géométrie sphérique. Hazra et al. (2014a) démontrent par ailleurs qu’un tel écoulement vers l’équateur, présent aux profondeurs d’amplification maximale du champ magnétique toroïdal, est requis pour expliquer la migration équatoriale des émergences au cours du cycle d’activité. De plus, il est probable que l’écoulement descendant associé aux régions polaires permette le transport du flux poloïdal accumulé en surface, vers la zone de cisaillement maximal au bas de la zone convective.

Les modèles actuels semblent aussi montrer que la vitesse de l'écoulement méridien est un facteur déterminant de la période du cycle d'activité. Cet aspect sera traité plus loin.

Ainsi, tout est là pour suggérer l'importance de la circulation méridienne sur l'ensemble du processus dynamo solaire. Leighton (1969) réussit à obtenir sans circulation méridienne un cycle d'activité stable avec une migration équatoriale des émergences, mais cela grâce à un profil de rotation différentiel erroné. Les modèles modernes requièrent une paramétrisation plus adéquate. Se basant sur les résultats de simulations numériques de convection thermique turbulente (par exemple Miesch 1998), Dikpati & Charbonneau (1999) se contentent d'une cellule de circulation unique et utilisent la paramétrisation suivante, proposée initialement par van Ballegoijen & Choudhuri (1988), où l'utilisation d'une fonction d'écoulement $\Psi(r, \theta)$ permet d'assurer la conservation de la masse (dans un profil de densité $\rho(r) = \rho_0 \xi^m$, avec $\xi(r) = (R/r) - 1$ et $m = 1.5$, l'indice polytropique pour une stratification adiabatique) :

$$\mathbf{u}_P(r, \theta) = \frac{R}{\rho(r)/\rho_0} \nabla \times (\Psi(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi), \quad (1.17a)$$

avec

$$\Psi(r, \theta) = u_\theta(R, \theta) \frac{R}{r} \left[-\frac{\xi^{m+1}}{m+1} + \frac{c_1 \xi^{2m+1}}{2m+1} - \frac{c_2 \xi^{2m+p+1}}{2m+p+1} \right], \quad (1.17b)$$

et

$$c_1 = \frac{(2m+1)(m+p)}{(m+1)p} \xi_b^{-m}, \quad c_2 = \frac{(2m+p+1)m}{(m+1)p} \xi_b^{-(m+p)}$$

et $\xi_b = (R/R_b) - 1$. Les paramètres $p \simeq 0.2$ et $m = 1.5$ déterminent les profondeur et concentration de l'écoulement de retour, jusqu'à $r = R_b \simeq 0.6$. Ces paramètres demeureront ajustables dans le cadre de notre modèle présenté au Chapitre 3 (Lemerle & Charbonneau (2017), ci-après Article I, voir Tableau 3.I). Le résultat a la forme du champ de vitesse présenté à la Figure 1.15.

Nous verrons toutefois à la Section 3.5 qu'une incompatibilité semble subsister entre nos optimisations du profil de circulation méridienne en surface (Article I) et du profil de circulation interne (Article II). Ceci pourrait précisément pointer à l'avantage d'un profil radial de circulation plus complexe, éventuellement multicellulaire. Il s'agit donc d'une situation à perfectionner dans le cadre de travail à venir.

1.4.4.c Diffusion

Vient le moment de s'interroger sur les propriétés du plasma responsable de soutenir le champ magnétique que nous tentons de modéliser. Les densités associées au plasma parfaitement ionisé de la zone convective permettent d'évaluer une diffusivité purement magnétique (ohmique) $\eta_e \simeq 10^2 - 10^4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, ce qui n'aurait d'effet sur les champs magnétiques aux échelles concernées que sur des temps caractéristiques de millions à milliards d'années. Quant à la diffusivité supergranulaire utilisée pour les modèles de surface, elle n'a par sa nature aucune raison d'être valide pour l'inté-

rieur du Soleil. C'est donc au niveau de la turbulence, qui génère des écoulements à des échelles de beaucoup inférieures à la supergranulation, que le champ magnétique se voit perturbé. Cette diffusivité “turbulente” est considérée à peu près constante dans l'ensemble de la zone convective ($\eta_t \simeq 10^{10} - 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, à préciser), mais doit retomber brusquement dès l'atteinte du coeur non convectif ($\eta_c \simeq 10^8 - 10^9 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$). Un profil de la forme suivante pourra être adopté :

$$\eta(r) = \eta_c + \frac{\eta_t}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{r - R_c}{\delta_c/2} \right) \right], \quad (1.18)$$

additionné d'une discontinuité vers $\eta_R \simeq 10^{12} - 10^{13} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ à $r = R$, avec R_c et δ_c prenant les mêmes valeurs que pour la rotation différentielle. Les valeurs de η_c , η_t et η_R seront aussi considérées comme ajustables dans le cadre de l'optimisation de notre modèle (Chapitre 3 (Article II)).

1.4.5 DIFFÉRENTS MODÈLES ET TERMES SOURCES

Nous voilà maintenant à l'élaboration d'un terme source capable de capturer les effets non axisymétriques à grande échelle, pour permettre la régénération toroïdal \rightarrow poloïdal dans l'Équation (1.15).

1.4.5.a Modèles en “champ moyen” de type $\alpha\Omega$

Une idée simple serait un terme de la forme $S_A(r, \theta; B_\phi) = \alpha B_\phi(r, \theta, t)$, directement proportionnel au champ toroïdal local, avec α positif pour imposer le renversement de polarité du champ magnétique poloïdal. C'est précisément le résultat que l'on obtient par une analyse bien connue des champs moyens axisymétriques. En résumé, si le champ magnétique et l'écoulement sont décomposés en une partie axisymétrique (\mathbf{B} et \mathbf{u} , tels que décrits plus haut) et une partie non axisymétrique (\mathbf{B}' et \mathbf{u}'), on peut montrer qu'une force électromotrice $\boldsymbol{\xi}$ axisymétrique (terme supplémentaire $\nabla \times \boldsymbol{\xi}$ à l'équation d'induction MHD (1.10)) nait du produit des parties fluctuantes ($\mathbf{B}' \times \mathbf{u}'$). Ce tenseur $\boldsymbol{\xi}$ peut alors être décomposé en fonction de \mathbf{B} et de ses dérivées, le terme $\boldsymbol{\xi} \simeq \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}$ pouvant agir directement comme terme source à la composante poloïdale de l'Équation (1.15) (voir Simard 2017, § 1.2.4, pour une description plus détaillée). Lorsqu'on ne considère que la composante $\alpha = \alpha_{\phi\phi}$ de ce tenseur, on obtient la relation de simple proportionnalité caractéristique de l'effet α des classiques dynamos de type $\alpha\Omega$. Interprété physiquement, cet effet α est directement lié à l'excès d'hélicité généré aux petites échelles par la force de Coriolis sur les éléments convectifs turbulents, un peu partout dans la zone convective (Ω étant l'effet de cisaillement décrit plus tôt, permettant l'induction poloïdal \rightarrow toroïdal). Comme on l'a dit plus haut, un problème de cet effet α local, cependant, c'est qu'un champ toroïdal intense risque de ne pas se laisser tordre (typiquement $\alpha \propto [1 + (B_\phi/B_0)^2]^{-1}$, avec $B_0 \simeq 10^5 \text{ G}$ le champ magnétique en “équipartition” avec l'énergie cinétique ambiante).

L'idée de base du mécanisme de BL, c'est donc de remplacer la torsion aux petites échelles, dans

l'ensemble de la zone convective, par une torsion du champ magnétique aux grandes échelles, en lien avec son ascension vers la surface sous forme de BMR. L'effet n'est donc clairement plus local.

1.4.5.b Modèles dynamos BL axisymétriques à “effet α ” délocalisé

Une première approche consiste à considérer un terme source de la forme $S_A(r, \theta; B_\phi) = \alpha B_\phi(R_c, \theta, t)$, avec R_c la position du bas de la zone convective. Pour cela, Dikpati & Charbonneau (1999) se basent sur les résultats de simulations d'ascension des tubes de flux toroïdaux (voir par exemple Fan et al. 1993 et Fan 2009 pour une revue étendue sur le sujet).

D'abord, le temps d'ascension ($\simeq 1$ mois $\simeq 10^6$ s) étant beaucoup plus court que les temps de simulation, le terme source peut simplement être synchronisé avec B_ϕ . Aussi, le potentiel A_ϕ émergent est confiné dans une couche mince immédiatement sous la surface ($R_\alpha < r < R$, $R_\alpha \simeq 0.95R$), imitant ainsi l'émergence de boucles de flux fermées. Puisque la conversion toroïdal à poloïdal implique une torsion par la force de Coriolis, une dépendance adéquate en latitude doit être ajoutée. Finalement, un terme non linéaire en B_ϕ assure que la source décroisse rapidement pour les flux toroïdaux trop intenses ($B_\phi \gtrsim B_0 \simeq 10^5$ G), reflétant une certaine dépendance inverse observée entre flux émergent et inclinaison des BMR, plus précisément une loi de Joy plus stricte pour les grandes BMR (voir Section 2.A.7). Voici donc un premier terme source :

$$S_A(r, \theta; B_\phi) = \alpha_0 \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{r - R_\alpha}{\delta_r} \right) \right] \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{r - R}{\delta_r} \right) \right] \frac{\sin \theta \cos \theta B_\phi(R_c, \theta, t)}{[1 + (B_\phi(R_c, \theta, t)/B_0)^2]}, \quad (1.19)$$

où $\delta_r \simeq 0.01R$ et α_0 reste typiquement un paramètre libre représentant l'efficacité du processus.

À noter que, quoiqu'il tienne compte des caractéristiques d'ascension des tubes de flux, ce modèle ne simule pas l'émergence de BMR individuelles, mais simplement la naissance d'un champ poloïdal diffus près de la surface, spatialement et temporellement continu. (Voir les modèles similaires de Charbonneau et al. 2005, Guerrero & de Gouveia Dal Pino 2008, Guerrero & Muñoz 2004.)

1.4.5.c Modèles dynamos BL axisymétriques à “effet α ” près de la surface

Plutôt que de considérer un terme source dépendant d'un champ toroïdal non local, une autre approche consiste à simuler un effet α plus formel ($S_A(r, \theta; B_\phi) = \alpha B_\phi(r, \theta, t)$), mais localisé dans une couche mince juste sous la surface (voir, par exemple, Chatterjee et al., 2004, Choudhuri et al., 1995, Nandy & Choudhuri, 2001) :

$$S_A(r, \theta; B_\phi) = \alpha_0 \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{r - R_\alpha}{\delta_r} \right) \right] \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{r - R}{\delta_r} \right) \right] \frac{\cos \theta B_\phi(r, \theta, t)}{[1 + (B_\phi(r, \theta, t)/B_0)^2]}, \quad (1.20)$$

avec $\delta_r \simeq 0.025R$. Toutefois, le champ $B_\phi(r, \theta, t)$ local au haut de la zone convective est généralement trop faible. Puisqu'on est sensés chercher un équivalent à l'émergence de tubes de flux depuis le bas de

la zone convective, il faut modéliser d’une façon ou d’une autre l’ascension de ce flux. Comme approche simple, les modèles supposent que le champ magnétique toroïdal au bas de la zone convective devient “instable” dès l’atteinte d’une valeur critique ($B_0 \simeq 10^5$ G). Ainsi, à intervalles réguliers τ (temps caractéristique d’ascension des tubes de flux $\simeq 10^6$ s), la simulation recherche tout champ magnétique $B_\phi(r, \theta, t) > B_0$, pour $R_c < r < R_c + \delta_c$. Puis, une fraction ϵ (mesure de l’efficacité du phénomène de flottaison magnétique : $\simeq 0.05 - 0.5$ semblent donner les résultats escomptés, voir Nandy & Choudhuri 2001) de ce flux toroïdal est alors retiré de la couche inférieure et injecté juste sous la surface (soit dans la dernière maille radiale de la simulation, soit dans un intervalle $R_\alpha < r < R$), aux latitudes correspondantes, et en prenant bien soin d’assurer la conservation du flux. Ce processus prend la forme d’un terme source supplémentaire $S_{B_\phi}(r, \theta, t_\tau)$, mais dans l’Équation (1.15) toroïdale cette fois.

À noter, toutefois, le fait de retirer du flux toroïdal du bas de la zone convective pour l’ajouter en haut est assez discutable. En réalité, pour représenter correctement le champ magnétique associé à une boucle de flux ascendante, il faudrait soit tenir compte d’un champ radial intense associé aux tubes montant et descendant, soit considérer une reconnexion du tube et conséquemment une boucle toroïdale–radiale fermée dans la couche de surface et un flux inchangé en profondeur. À moins que le flux n’émerge réellement sur 360° en longitude (voir Parker, 1984)...

Quoiqu’il en soit, l’axisymétrisation faisant fi de ces considérations, les modèles de ce type semblent fonctionner, et ils ont l’avantage d’imiter l’émergence de flux poloïdal sur un intervalle en latitude représentatif des observations, tout en réconciliant partiellement modèles de types “champ moyen” et BL.

1.4.5.d Modèles dynamos BL axisymétriques à doubles anneaux

Il faut réaliser que les modèles précédents ne simulent pas directement le mécanisme de BL, à savoir l’émergence et le transport de BMR individuelles sur la surface solaire. Pourtant, comme il a été discuté à la Section 1.3.3, les détails du transport (et suppression du flux magnétique) en surface semblent critiques pour déterminer la partie du moment dipolaire émergé qui finira sa course aux pôles. Il vaut donc la peine de s’en rapprocher davantage. Dans le formalisme axisymétrique, chaque émergence dipolaire peut être représentée par deux anneaux longitudinaux de polarité opposée. Muñoz-Jaramillo et al. (2010) montrent que cette représentation reproduit à 1 % près l’évolution du flux magnétique des BMR équivalentes en deux dimensions (2D).

Le premier modèle à utiliser cette représentation remonte à Leighton (1969). À l’époque, n’étant ni au courant du profil interne de rotation différentielle ni de l’existence de la circulation méridienne, Leighton se contente de considérer l’évolution du champ magnétique dans une fine couche de cisaillement sous la surface ($R - \delta_r < r < R$), avec dépendance temporelle et latitudinale seulement (1D). Wang et al. (1991) améliorent le modèle de Leighton en y ajoutant la circulation méridienne, ainsi

qu'une seconde couche, interne ($R_c < r < R_c + \delta_c$), où le champ toroïdal est amplifié par cisaillement. À la surface, le champ radial $B_r(R, \theta, t)$ domine, régulièrement régénéré par l'émergence d'anneaux, et transporté par la diffusion supergranulaire et l'écoulement méridien.

Le terme source pour B_r considère l'émergence à colatitude θ_0 , dans une couche d'épaisseur δ_r et de largeur latitudinale σ_θ , d'une fraction ϵ du flux toroïdal $\Phi_\phi(\simeq R_c, \theta_0)$ sous-jacent. Ce flux est alors transformé en flux radial, sous la forme d'un doublet d'anneaux, l'un représentant la polarité "est" (+), à colatitude $\theta_0 + \frac{\delta_\theta}{2}$, et l'autre la polarité "ouest" (-), à $\theta_0 - \frac{\delta_\theta}{2}$. Par conservation du flux, le champ $B_r(R, \theta_0)$ moyen dans les anneaux est

$$B_r(R, \theta_0)_\pm = \pm \frac{\epsilon \Phi_\phi(\simeq R_c, \theta_0)}{2\pi R^2 \sigma_\theta \sin(\theta_0 \mp \frac{\delta_\theta}{2})}, \quad (1.21)$$

où σ_θ est l'étendue latitudinale de chaque anneau et δ_θ la séparation latitudinale entre le centre des anneaux.

Leighton (1969) et Wang et al. (1991) considèrent une émergence du nouveau flux radial continue dans le temps. Puisque le temps caractéristique associé à une émergence donnée est τ , le taux d'émergence de nouveau flux à une colatitude θ à l'intérieur d'un anneau positif donné est

$$\left[\frac{\partial B_r(R, \theta; \theta_0)}{\partial t} \right]_+ = \frac{1}{\tau} \frac{\epsilon \Phi_\phi(\simeq R_c, \theta_0)}{2\pi R^2 \sigma_\theta \sin \theta}. \quad (1.22)$$

Et puisqu'une émergence continue de flux se produit à toutes les colatitudes θ pour lesquelles $B_\phi(\simeq R_c, \theta) > B_0$, le flux à chaque point sera la somme des émergences comprises dans l'intervalle $(\theta - \frac{\delta_\theta}{2} - \frac{\sigma_\theta}{2})$ à $(\theta + \frac{\delta_\theta}{2} + \frac{\sigma_\theta}{2})$. Le bilan sera la différence entre $\left[\frac{\partial B_r(R, \theta; \theta_0)}{\partial t} \right]_+$ et $\left[\frac{\partial B_r(R, \theta; \theta_0 - \delta_\theta)}{\partial t} \right]_-$, associée à la superposition de deux anneaux de polarité opposée, et qui dépendra donc de la variation du flux $\Delta \Phi_\phi = \Phi_\phi(\simeq R_c, \theta_0) - \Phi_\phi(\simeq R_c, \theta_0 - \delta_\theta) \simeq \frac{\partial \Phi_\phi}{\partial \theta} \delta_\theta$. Avec $\Phi_\phi(\simeq R_c, \theta_0) \simeq \delta_c R_c \sigma_\theta B_\phi(R_c, \theta_0)$, on obtient finalement un terme source formel pour $B_r(R, \theta)$:

$$\left[\frac{\partial B_r}{\partial t} \right]_{R, \theta} = \frac{\epsilon \delta_c R_c}{2\pi R^2 \tau} \frac{\delta_\theta}{\sin \theta} \left[\frac{\partial B_\phi}{\partial \theta} \right]_{R_c, \theta}, \quad (1.23)$$

avec la séparation latitudinale δ_θ pouvant être exprimée en fonction de la séparation angulaire héliocentrique δ entre les polarités des BMR représentées, et de leur inclinaison γ : $\delta_\theta = \delta \sin \gamma$. Et il ne reste plus qu'à utiliser une distribution pour δ et γ qui respectent les statistiques des émergences observées à la surface du Soleil (voir Section 1.2.2 et Section 2.A (annexe A de l'Article I)).

Cette représentation a plusieurs défauts. D'abord, quoique l'idée des émergences dipolaires soit respectée par la structure en anneaux, le flux est injecté en continu à la surface, toutes latitudes actives confondues, ce qui ne correspond pas aux observations d'émergences ponctuelles. De plus, si on exprime le terme source (1.23) sous la forme d'un terme source pour le potentiel vecteur A_ϕ dans

l'Équation (1.15), sachant que

$$A_\phi(r, \theta, t) = \frac{r}{\sin \theta} \int_0^\theta \sin \theta' B_r(r, \theta, t) d\theta' , \quad (1.24)$$

car $B_\theta(\simeq R, \theta, t) \simeq 0$, on obtiendra :

$$S_A(R, \theta; B_\phi) = \left[\frac{\partial A_\phi}{\partial t} \right]_R = \frac{\epsilon \delta_c R_c \delta_\theta}{2\pi R \tau} \frac{B_\phi(R_c, \theta, t)}{\sin \theta} , \quad (1.25)$$

un terme source proportionnel à B_ϕ , c'est-à-dire encore une sorte d'effet α délocalisé. . .

Ne baissons toutefois pas les bras, l'idée d'intégrer des émergences dipolaires en surface sous forme d'anneaux est prometteuse. D'abord, il vaudrait mieux tenter de modéliser des éruptions ponctuelles de flux, à latitude et temps donnés, d'une façon à reproduire les observations de surface. Pour cela, une partie de l'idée d'ascension des tubes de flux utilisée par les modèles à effet α délocalisé est reprise. C'est-à-dire qu'à intervalles réguliers, on recherche si une valeur de champ magnétique $B_\phi(r, \theta)$ au bas de la zone convective ($R_c < r < R_c + \delta_c$) dépasse le seuil d'instabilité B_0 . Différence flagrante, toutefois, au lieu de transporter ce flux toroïdal en surface pour toutes les latitudes correspondantes, on choisit un lieu d'émergence spécifique. Durney (1995, 1996, 1997) et Nandy & Choudhuri (2001) laissent la simulation choisir seule son "diagramme papillon", en cueillant le flux là où $B_\phi(R_c, \theta)$ est maximal. Muñoz-Jaramillo et al. (2010) choisissent plutôt une latitude au hasard, tirée d'une distribution de probabilité correspondant d'avance aux latitudes actives observées. Nous voilà maintenant arrivés à une approche probabiliste des émergences à la surface du Soleil!

Dans les modèles à la Durney, le flux toroïdal prélevé au bas de la zone convective à latitude θ_0 est déposé sous forme de B_r juste sous la surface (par exemple $0.96R \lesssim r \lesssim 0.99R$), de sorte que les lignes de champ puissent se refermer en B_θ à l'intérieur du domaine, et ainsi éviter d'avoir à soustraire une partie du flux toroïdal du bas de la zone convective. En latitude, le flux radial est déposé sur deux anneaux de largeur σ_θ et de polarité opposée, à $\theta_0 + \frac{\delta_\theta}{2}$ et $\theta_0 - \frac{\delta_\theta}{2}$. Dans ces boîtes rectangulaires, B_r est considéré uniforme et prend la valeur donnée à l'Équation (1.21). Le terme source $S_A(r, \theta; B_\phi)$ est fabriqué à partir de l'expression (1.24) pour le potentiel vecteur, à la profondeur centrale de l'émergence, et injecté ponctuellement sur des intervalles de temps τ dans l'Équation d'induction (1.15) pour le champ poloïdal.

Muñoz-Jaramillo et al. (2010) utilisent une approche similaire, mais, sous l'argument d'une trop forte dépendance des simulations précédentes à leur résolution spatiale, choisissent d'éviter les discontinuités dans la définition de la fonction source. La distribution latitudinale de leur B_r émergent en surface est présentée à la Figure 1.16(a) et la distribution complète du champ poloïdal dans une coupe méridienne partielle à la Figure 1.16(b). À ajouter aussi que les auteurs utilisent une paramé-

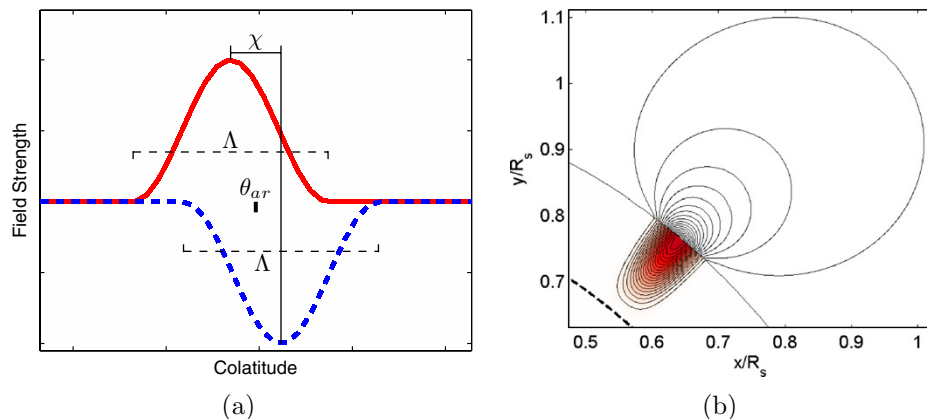


Figure 1.16 – (a) Champ magnétique radial en surface en fonction de la colatitude et paramètres spatiaux utilisés ($\delta_\theta = \chi$, $\sigma_\theta = \Lambda$, $\theta_0 = \theta_{ar}$). (b) Lignes de champ poloïdal associées à l’émergence d’un double anneau et extrapolation du potentiel vecteur à l’extérieur du domaine. (Tiré de Muñoz-Jaramillo et al. 2010.)

trisation plus sophistiquée de la séparation angulaire δ_θ entre les deux anneaux, entre autres pour tenir compte d’une dépendance approximativement inverse de l’inclinaison γ des BMR sur le champ toroïdal concerné.

1.4.5.e Modèles dynamos BL tridimensionnels

Les modèles précédents diffèrent dans leur façon d’incorporer le mécanisme de BL, lui fondamentalement non axisymétrique, à une simulation dynamo axisymétrique. Ces modèles permettent tous de reproduire les grandes lignes de l’évolution de l’activité solaire, mais ne peuvent en aucun cas être comparés directement aux données magnétographiques du disque solaire. Qui plus est, il est de plus en plus clair que l’assimilation directe des magnétogrammes comme condition initiale et séquentielle aux simulations numériques (voir Hathaway & Upton, 2016, Upton & Hathaway, 2014), ou du moins l’inclusion stratégique dans les simulations de l’émergence et du transport de BMR bien spécifiques, aux temps, positions, tailles, inclinaisons observés (Cameron et al., 2014, Nagy et al., 2017), seraient requis afin de prétendre à une calibration adéquate des modèles aux fins de prédiction de l’activité solaire. Dans tous les cas, une représentation géométrique 2D complète de la surface solaire est manifestement requise. À première vue, ceci semble donc exclure la validité de modèles dynamos axisymétriques et requérir une modélisation dynamo 3D...

Ainsi donc, en s’extrayant du formalisme axisymétrique décrit plus haut pour en revenir à une résolution directe de l’équation d’induction MHD (Équation (1.10)), il est possible de construire un modèle dynamo 3D complet, quoique toujours en régime cinématique. Sans rétroaction dynamique (pas de force de Lorentz, pas d’équation de Navier–Stokes), il serait insensé d’attendre la formation spontanée de tubes de flux magnétique denses et instables au bas de la zone convective, que les modèles dynamiques supposent capables d’émerger ensuite sous forme de BMR (Fan, 2009). De plus,

la résolution spatiale de la présente simulation 3D ne permettrait pas de résoudre de tels processus de déstabilisation magnétique aux petites échelles. Il faut donc, encore ici, user d’astuces pour mimer les conséquences de ces phénomènes, aux grandes échelles.

Pour entraîner le mécanisme de BL, par l’émergence de BMR maintenant en 2D à la surface, deux approches explorées à ce jour. Yeates & Muñoz-Jaramillo (2013) imposent des perturbations spontanées et localisées aux écoulements dans la zone convective (voir Figure 1.17) pour déclencher l’éruption de régions actives à partir du champ toroïdal. Tout en demeurant une perturbation sans fondement physique explicite, les auteurs argumentent que l’approche est plus cohérente qu’une simple technique de dépôt de flux en surface, comme les modèles des sections précédentes utilisaient.

À l’inverse, Miesch & Dikpati (2014) (ci-après MD2014) et Miesch & Teweldebirhan (2016) persistent justement à utiliser une méthode de dépôt de flux pour les BMR, argumentant que la modélisation complète de la formation et de l’éruption des régions actives est bien au-delà des capacités actuelles d’un modèle dynamo unique, et qu’il est donc préférable de s’en tenir à une méthode empirique basée sur les observations. Leur algorithme “spotmaker” génère l’émergence de BMR sur la base de distributions statistiques similaires, quoique simplifiées, à celles présentées aux Sections 1.2.2 et 2.A (annexe A de l’Article I), en particulier une inclinaison respectant la loi de Joy. Le flux de chaque BMR n’est quant à lui pas tiré de la distribution statistique observée, mais plutôt déterminé directement par l’amplitude du champ toroïdal sous-jacent. À chaque pas de temps, les longitude et latitude d’émergence sont choisies au hasard sur l’ensemble des régions du bas de la zone convective ($r^* \simeq 0.705R$) où une “fonction masque” F_B , basée sur l’amplitude du champ toroïdal, dépasse une certaine valeur seuil $B^* \simeq 1$ kG. La fonction F_B est définie comme

$$F_B(\theta, \phi, t) = F_0 \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{1 + \exp(-30(\theta - \pi/4))} B_\phi(\simeq r^*, \theta, \phi, t), \quad (1.26)$$

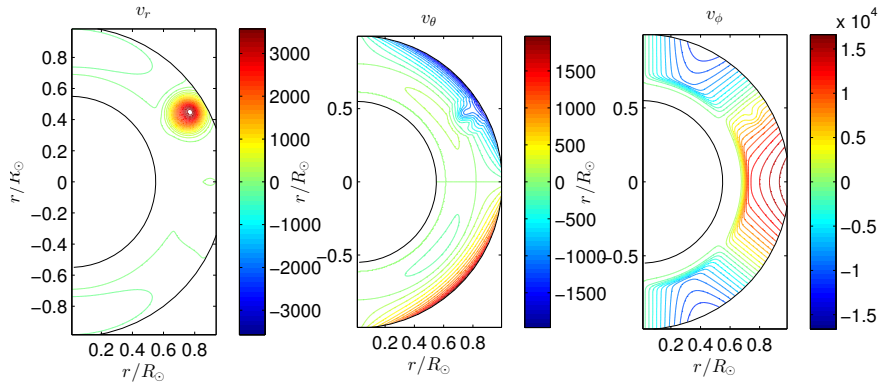


Figure 1.17 – Exemple de perturbation du champ de vitesse imposé par Yeates & Muñoz-Jaramillo (2013) pour une émergence à latitude 30°N , échelle de couleurs en cm s^{-1} .

avec F_0 un facteur de normalisation du masque. Le masque latitudinal empêche ainsi toute émergence au-delà de $\simeq 45 - 50^\circ$ de latitude, tandis que la distribution des émergences en-deçà dépend partiellement de la distribution du champ toroïdal sous-jacent. Des résultats représentatifs des deux précédents modèles seront présentés à la Section 1.4.6.

1.4.5.f Modèle dynamo BL axisymétrique couplé à un modèle SFT bidimensionnel

Les modèles dynamo BL tout juste décrits ont le mérite indéniable de représenter le phénomène d'émergence, non-axisymétrique, en 3D dans l'ensemble de la zone convective. Cependant, leurs résolutions spatiale et temporelle et leur temps de calcul en souffrent. Par exemple, aux résolutions jugées numériquement stables pour leur modèle (comparables à ce qui sera décrit ci-dessous dans le nôtre), Yeates & Muñoz-Jaramillo (2013) indiquent que la simulation présentée, d'une durée d'un cycle d'activité, requière environ 300 heures-coeur de calcul (6.25 heures avec parallélisation sur 48 coeurs). Malheureusement, si l'objectif est d'étudier, entre autres, le comportement à long terme de la dynamo solaire en simulant de longues séquences temporelles de dizaines de cycles d'activité, ce temps de calcul exploserait rapidement à des centaines de jours-coeur, ou du moins à des centaines d'heures avec parallélisation adéquate. Par ailleurs, nous expliquons à la Section 2.2 (Article I) que de hautes résolutions spatiale et temporelle, de l'ordre de deux fois supérieures en espace et dix fois en temps à celle de la dynamo interne, sont nécessaires dans une simulation SFT afin de bien rendre compte de la conservation du flux magnétique et d'obtenir des solutions numériquement convergentes. En effet, rappelons que le processus de transport de flux (de moment dipolaire axial) aux pôles requière une efficacité de seulement 0.1 – 1 %. De faibles erreurs numériques affectant le flux net par 10^{-4} pourraient, par exemple, perturber le résultat du transport de flux jusqu'à 10 %. Il est donc primordial de minimiser ces erreurs numériques par le choix d'une grille spatio-temporelle suffisamment dense. Finalement, un des préalable à l'utilisation de telles simulations numériques pour prétendre interpréter les comportements de la dynamo solaire réelle est, justement, une calibration adéquate sur la base des observations du Soleil. À cette fin, il est nécessaire de pouvoir évaluer les résultats de multiples simulations différentes, voire de plusieurs milliers de simulations afin de parvenir à une optimisation formelle des paramètres ajustables du modèle (voir Sections 2.2.5 et 3.3.2), ce qui n'est pas raisonnablement possible dans le cas des modèles 3D ci-dessus.

Afin de rendre compte adéquatement du mécanisme de BL, tout en conservant une approche numériquement moins exigeante, nous proposons donc une stratégie alternative à la modélisation 3D de la zone convective. Précisément, nous proposons de nous en tenir formellement à l'algorithme de base du mécanisme proposé initialement par Babcock : (1) l'émergence et le transport de flux en surface se produisent manifestement en 2D, de façon fortement non axisymétrique, et peuvent être modélisés façon très fidèle par une simulation SFT classique, qui pourra être comparée directement aux observa-

tions magnétographiques (Section 1.3.3); (2) le processus de cisaillement du champ poloïdal vers un champ toroïdal interne peut être considéré axisymétrique aux grandes échelles et traité adéquatement par une simulation 2D dans le plan méridien (Section 1.4.1). L’approche que nous préconisons dans ce cas est donc celle d’un couplage entre ces deux simulations bidimensionnelles, pour créer un modèle “ $2 \times 2D$ ” de la zone convective et de la surface solaire. Ce modèle sera l’objet principal de cette thèse, décrit en détails à l’Article II, présenté au Chapitre 3.

Pour la dynamo dans le plan méridien, le même formalisme est utilisé que pour les autres modèles axisymétriques décrits ci-dessus. C’est au niveau de la source de régénération du champ poloïdal que la différence est majeure : il n’y a pas de terme source dans la zone convective à proprement parler. Contrairement à Yeates & Muñoz-Jaramillo (2013) et MD2014, les BMR sont injectées uniquement comme terme source en champ radial dans la simulation SFT 2D, sans effet immédiat sur la simulation dynamo interne. C’est le champ magnétique radial $B_R(\theta, \phi, t)$ de la SFT, moyenné en longitude à chaque pas de temps, qui est intégré pour recréer le potentiel vecteur correspondant dans la dynamo, à $r = R$ selon l’Équation (1.24), et injecté continuellement comme condition limite supérieure au domaine de la dynamo axisymétrique. Le distribution de champ magnétique initiale de la BMR est subséquentement diffusée et transportée par les deux simulations, simultanément.

Les nouvelles BMR émergentes en surface sont tirées des distributions statistiques présentées aux Sections 1.2.2 et 2.A (annexe A de l’Article I) pour l’inclinaison et la séparation angulaire, mais aussi pour le flux magnétique. Le déclenchement d’une émergence se fait d’une manière plus probabiliste que chez MD2014 : la probabilité d’émergence à latitude et temps donnés est directement proportionnelle à une distribution de probabilité $F_B(\theta, t)$ calculée au bas de la zone convective. Cette “fonction d’émergence” F_B peut dépendre à la fois des champs toroïdal et poloïdal au bas de la zone convective ($|B_{\text{mix}}| = |B_\phi(r^*, \theta, t)|^b |A_\phi(r^*, \theta, t)|^a$, à $r^* \simeq 0.70R$, un paramètre ajustable), selon des proportions ajustables par les exposants a et b :

$$|F_B(\theta, t)| = \frac{F_0}{4} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{|B_{\text{mix}}| - B^*}{\delta B^*} \right) \right) \left| \frac{B_{\text{mix}}}{\max |B_{\text{mix}}|} \right|^c \left((1 - \mu_\ell) \frac{|\ell|}{90} + \mu_\ell \right) \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{|\ell| - \ell^*}{\delta \ell^*} \right) \right), \quad (1.27)$$

avec ℓ la latitude, F_0 un facteur qui détermine le nombre absolu d’émergences, et donc l’amplitude générale de la dynamo, et B^* un champ magnétique seuil, δB^* , c , μ_ℓ , ℓ^* une latitude maximale d’émergence et $\delta \ell^*$, tous des paramètres ajustables. En particulier, contrairement à MD2014, nous n’imposons pas de limite supérieure à la latitude d’émergence des BMR ($\simeq 45 - 50^\circ$), mais nous fions plutôt aux résultats physiques de calculs de diagrammes d’instabilité par Ferriz-Mas et al. (1994), pour un $\ell^* \gtrsim 65^\circ$. Ce sera aux paramètres optimisés de la simulation de produire un “diagramme papillon” des émergences qui corresponde à la réalité observée sur le Soleil. La Figure 1.18 illustre ce passage d’un champ toroïdal $B_\phi(r^*, \theta, t)$ vers la distribution de probabilité d’émergence $F_B(\theta, t)$, pour une simulation optimale en terme de forme du “diagramme papillon” latitude–temps du cycle

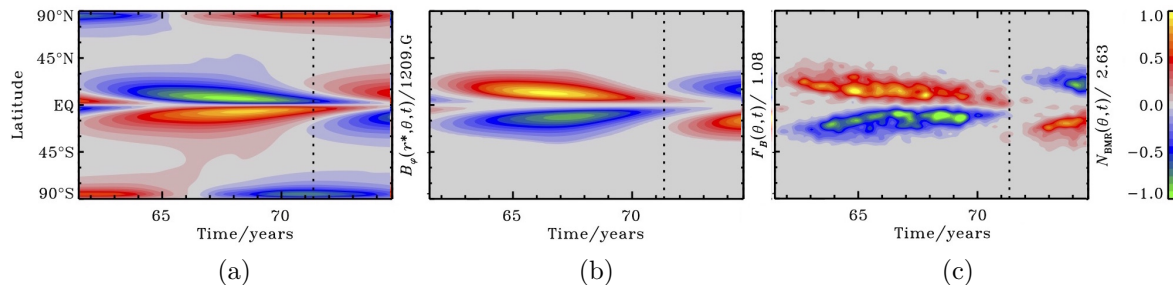


Figure 1.18 – Pour une solution dynamo BL couplée $2 \times 2D$ optimale (voir Figure 3.1, Chapitre 3 (Article II)) : (a) isocontours du champ toroidal $B_\phi(r^*, \theta, t)$ en latitude–temps au bas de la zone convective ($r^* = 0.68R$) ; (b) isocontours de la fonction probabiliste d’émergence $F_B(\theta, t)$ correspondante, optimisée sur la base du (c) “diagramme papillon” de la densité des émergences $N_{\text{BMR}}(\theta, t)$ pour le cycle d’activité 21.

d’activité 21.

Une telle simulation dynamo BL couplée $2 \times 2D$, aux résolutions requises pour la convergence numérique ($N_r \times N_\theta = 96 \times 128$ en rayon–latitude et $N_t = 100$ pas de temps par cycle pour la dynamo interne, et $N_\phi \times N_\theta = 512 \times 256$ en longitude–latitude et $N_t = 1000$ pas de temps par cycle pour la SFT), requière un temps de calcul de quelques minutes–coeur pour la durée d’un cycle d’activité. Comparativement aux simulations 3D précédentes, cela correspond à un facteur de l’ordre de 1000 fois plus rapide, ce qui nous permet de rouler ce genre de simulation sans problème sur la durée de centaines de cycles d’activité. De plus, nous décrivons aux Chapitres 2 (Article I) et 3 (Article II) le processus d’optimisation formel qui nous permet d’obtenir des valeurs optimales pour tous les paramètres ajustables du modèle, avec barres d’incertitude de type Monte-Carlo, à l’aide d’un algorithme génétique requérant l’exécution des simulations jusqu’à $\simeq 200000$ fois. Mieux vaut alors adopter une simulation numériquement efficace comme celle-ci.

1.4.6 RÉSULTATS REPRÉSENTATIFS ET BRÈVE DISCUSSION

Afin de prétendre découvrir, interpréter et comprendre adéquatement les comportements internes du Soleil sur le base des résultats de modèles dynamo, qu’ils soient simplifiés comme ceux décrits ci-dessus (cinématiques, axisymétriques. . .) ou très complets (magnétohydrodynamiques. . .), ces modèles doivent avant tout reproduire les caractéristiques observées du cycle d’activité solaire, la majorité étant celles de surface décrites à la Section 1.2. Pour en refaire l’inventaire rapide, il s’agit de :

- un cycle d’activité globale d’une période de $\simeq 11$ ans (cycle magnétique d’une période de $\simeq 22$ ans), avant tout marqué par une variation importante du nombre de taches visibles à la surface du Soleil ;
- l’émergence de ces taches vers les $20 - 40^\circ$ de latitude au début du cycle d’activité, puis progressivement vers les $0 - 20^\circ$ à la fin du cycle (le “diagramme papillon”) ;

- la nature magnétique de ces tâches, semblant émerger de l’intérieur sous la forme de régions magnétiques bipolaires (BMR) ;
- une inclinaison quasi-systématique de ces dipôles magnétiques par rapport à la direction est-ouest ;
- des tendances statistiques nettes concernant les inclinaisons, séparations, flux magnétique de ces BMR (voir Sections 1.2.2 et 2.A (annexe A de l’Article I)) ;
- la formation de trainées magnétiques unipolaires, des latitudes d’émergences vers les pôles, amenant des fluctuations du flux accumulé à la calotte polaire ;
- une calotte magnétique quasi-unipolaire aux pôles de rotation, avec un champ magnétique de l’ordre de 10 G, pour un flux total de $\simeq 10^{22} - 10^{23}$ Mx au minimum d’activité ;
- le tout correspondant à une composante dipolaire axiale de $\simeq 5 \text{ G} \cdot R^2$ dominante au minimum du cycle d’activité, et une antisymétrie équatoriale de l’ensemble de ces caractéristiques magnétiques ;
- une synchronisation relativement stable entre les deux hémisphères, marquée de certaines asymétrie hémisphériques en amplitude ;
- des fluctuations d’amplitude d’un cycle à l’autre, dont une corrélation inverse entre durée et amplitude d’un cycle donné, et une alternance entre cycles plus et moins intenses ;
- une corrélation nette entre l’intensité du dipôle axial à la fin d’un cycle d’activité et l’amplitude du cycle d’activité suivant ;
- des variations d’amplitude à plus long terme, de l’ordre du siècle et plus, avec entre autres de longues périodes d’absence d’activité magnétique pendant plusieurs décennies (tel le minimum de Maunder).

De ces observations de surface, on peut déduire le comportement requis du champ magnétique interne, à savoir, entre autres :

- une migration vers l’équateur, au cours du cycle, de la zone d’intensité maximale du champ toroïdal responsable des émergences ;
- des amplitudes suffisantes ($\simeq 10^4 - 10^5$ G) pour générer les tubes de flux ascendants qui émergeront en surface ;
- une antisymétrie du champ magnétique toroïdal par rapport à l’équateur ;
- un déphasage d’un quart de cycle avec l’amplitude maximale du champ poloïdal.

Pour évaluer le niveau de fiabilité des modèles décrits précédemment, il convient donc de vérifier comment chacun répond adéquatement à ces caractéristiques prérequis.

Dans un premier temps, il vaut la peine de rappeler le mérite du modèle initial de Leighton (1969), malgré sa grande simplicité. Certaines caractéristiques essentielles de la dynamo α sont en effet reproduites. Une oscillation appropriée du champ toroïdal est obtenue, à partir du cisaillement du champ poloïdal. Les latitudes actives migrent progressivement vers l'équateur, avec une dominance au milieu du cycle. La ligne d'inversion de polarité du champ poloïdal migre vers les pôles, directement influencée par le taux de diffusion supergranulaire. La période du cycle obtenue est du bon ordre de grandeur, avec une dépendance sur le taux de diffusion et sur le taux d'émergence. Par ailleurs, Leighton réussit à reproduire la relation inverse entre période et amplitude du cycle.

Bien sûr, les résultats sont loin d'être parfaits. D'abord, le champ toroïdal, situé juste sous la surface, montre des amplitudes du même ordre de grandeur que le champ poloïdal, ce qui est peu susceptible de permettre la déstabilisation et l'émergence de flux sous forme de BMR. Aussi, dû à l'absence de circulation méridienne, l'obtention d'oscillations stables et d'une migration vers l'équateur requière un taux de rotation différentielle croissant avec la profondeur, ce qui correspondrait à l'observation actuelle de la bien connue couche de cisaillement sous-surface, mais moins susceptible de soutenir une dynamo que la bien plus importante couche de cisaillement observée au bas de la zone convective. Finalement, le manque de mesures de champ magnétique sur l'ensemble de la surface du Soleil et sur des périodes suffisantes (voir magnétogramme de la Figure 1.2 à partir de 1975) ne permet pas encore à Leighton de réaliser que son champ poloïdal n'est pas suffisamment concentré aux pôles. Pour cela, il manque définitivement la circulation méridienne.

En ajoutant un profil de rotation différentielle et une circulation méridienne en deux couches, l'une près de la surface et l'autre au bas de la zone convective, Wang et al. (1991) obtiennent une propagation du champ toroïdal vers l'équateur et un transport de flux adéquat vers les pôles, mais à très faible résolution et sans dépendance radiale.

L'importance de la circulation méridienne dans le processus dynamo est très clair, et il vaut donc la peine de s'y attarder. Choudhuri et al. (1995), dans une simulation à effet α près de la surface, et Nandy & Choudhuri (2001), dans une simulation de type double anneaux, montrent qu'en l'absence d'écoulement vers l'équateur au bas de la zone convective, l'onde dynamo aurait tendance à se propager vers les pôles, ce qui est tout à fait contraire aux observations. De même, après les observations récentes suggérant la présence de multiples cellules de circulation méridienne à différentes profondeurs de la zone convective (Schad et al., 2013, Zhao et al., 2013), Hazra et al. (2014a) démontrent formellement, à l'aide d'une simulation BL à effet α délocalisé, la nécessité d'un écoulement équatorial à basses latitudes au bas de la zone convective, peu importe la complexité de la structure sus-jacente. Dans tous les cas, une circulation méridienne suffisamment intense doit donc transporter le champ magnétique toroïdal vers l'équateur.

Aussi, les dynamos BL, contrairement aux modèles de type "champ moyen", se voient généralement

dominées par la circulation méridienne, et cela se reflète directement dans leur période d'oscillation. D'une analyse paramétrique détaillée, Dikpati & Charbonneau (1999) obtiennent une période

$$T = 56.8 \text{ ans } u_0^{-0.89} \alpha_0^{-0.13} \eta_t^{0.22} \text{ (CGS)}, \quad (1.28)$$

avec u_0 l'amplitude de l'écoulement (entre 2 et 30 m/s), α_0 l'intensité du terme source (voir Équation (1.19)) et η_t la diffusivité turbulente. Cette dépendance inverse entre vitesse de l'écoulement méridien et période du cycle est tout à fait cohérente avec la corrélation positive obtenue des modèles SFT entre vitesse de l'écoulement et amplitude des cycles. En effet, les observations montrent que les cycles courts sont généralement (les moins longs!) les plus intenses.

Nous voici enfin à la présentation visuelle de quelques résultats représentatifs. Par exemple, le modèle BL à effet α délocalisé de Dikpati & Charbonneau (1999) (et Charbonneau et al. 2005) donne les résultats présentés aux Figures 1.19(a) pour l'évolution du champ toroïdal au bas de la zone convective et (b) pour le champ radial en surface. L'amplitude de l'écoulement méridien utilisé est de 15 m s^{-1} , ce qui donne des oscillations sur une demi-période adéquate de $\simeq 10$ ans. Les diagrammes parlent d'eux-mêmes : on constate une propagation vers l'équateur du champ toroïdal, aux basses latitudes, avec des amplitudes appropriées ($\simeq 10^4 \text{ G}$) ; et une migration de la majorité du flux radial vers le pôle, maximal au minimum de l'activité toroïdale, et concentré adéquatement au pôle. Le défaut majeur de ce résultat réside dans l'obtention d'un champ magnétique polaire trop intense d'un facteur dix ($\simeq 150 \text{ G}$), une difficulté généralement rencontrée par les modèles dynamo de type BL, dû justement à une circulation méridienne intense.

Le modèle précédent, comme les modèles BL à effet α près de la surface, ont aussi l'inconvénient

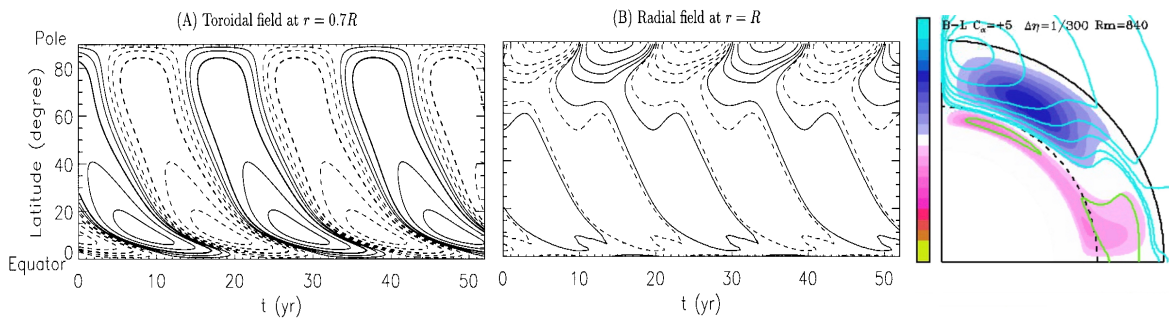


Figure 1.19 – Isocontours latitude–temps pour une simulation dynamo BL de type effet- α délocalisé, par Dikpati & Charbonneau (1999) : (a) champ magnétique toroïdal au bas de la zone convective, d’amplitude maximale 10 kG, et (b) champ magnétique radial en surface, d’amplitude maximale 140 G. Les isocontours suivent une échelle logarithmique avec trois isocontours par décade, et les pointillés représentent des valeurs négatives. (c) Lignes de champ poloïdal (positif en bleu, négatif en vert) et isocontours pour le champ toroïdal (positif en bleu, négatif en rose–rouge), pour une simulation équivalente par Charbonneau et al. (2005).

de générer un champ poloïdal lisse sur de trop grandes échelles comparativement aux observations. Pour mieux reproduire la mixité de polarités observée à la surface du Soleil aux “moyennes” échelles, la meilleure façon reste de reproduire des émergences ponctuelles de flux. La Figure 1.20(a), obtenue du modèle à doubles anneaux de Muñoz-Jaramillo et al. (2010), illustre bien comment le champ poloïdal est affecté par plusieurs petites structures, en comparaison au diagramme équivalent de Charbonneau et al. (2005) (Figure 1.19(c)). Pour se convaincre de l’importance de générer ces fluctuations aux “moyennes” échelles dans un modèle dynamo, il suffit de comparer les “diagrammes papillon” magnétiques de surface pour ces deux modèles. D’un côté, le diagramme de la Figure 1.20(b) présente une distribution d’émergences aux mi-latitudes, avec une mixité de polarités, et dont une partie est préférentiellement transportée aux pôles sous forme de trainées denses et détachées les unes des autres. La stochasticité intégrée au phénomène d’émergence des BMR permet la présence d’éléments ponctuels hors norme qui, entre autres, génèrent certaines trainées de polarité opposée à la tendance générale, qui sont responsables de fluctuations dans le transport et l’accumulation du flux polaire. De l’autre, la Figure 1.19(b) montre simplement un bloc de champ radial diffus émergeant aux mi-latitudes et se rapprochant doucement vers l’équateur, pendant que la polarité opposée s’accumule en bloc au pôle.

Un autre défaut des modèles BL à effet α diffus (près de la surface ou délocalisé), c’est l’obtention d’une corrélation positive entre amplitude de la circulation méridienne et intensité du flux accumulé aux pôles au minimum d’activité. D’après Muñoz-Jaramillo et al. (2010), cela serait dû à une trop grande séparation effective des deux polarités émergentes, ce qui permettrait à la circulation méridienne de transporter d’abord la polarité “est” (émergée plus au nord), de bien la concentrer aux pôles pour générer d’importantes amplitudes, avant même que la polarité opposée n’ait le temps d’y parvenir. Pourtant, les observations et simulations du flux de surface montrent bien que l’émergence

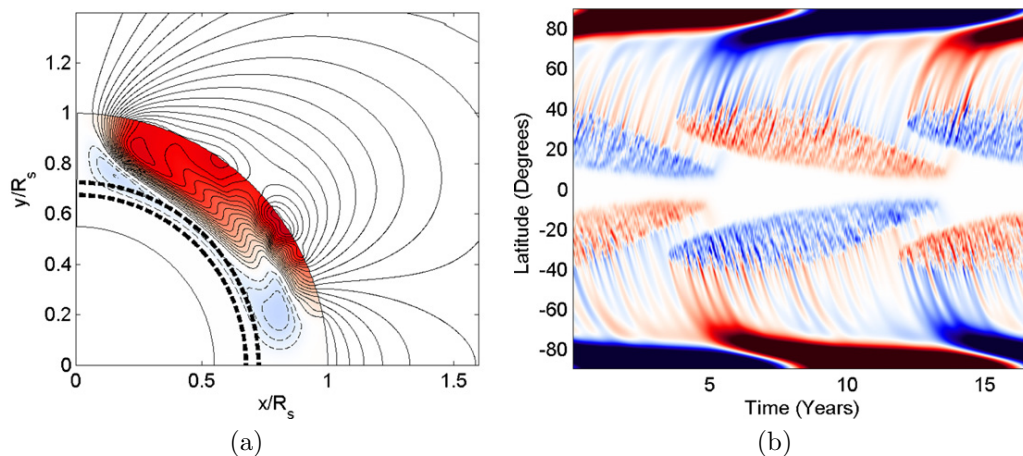


Figure 1.20 – (a) Lignes de champ et amplitudes du champ poloïdal dans le plan méridien et (b) “diagramme papillon” de la composante radiale de surface, pour le modèle à doubles anneaux de Muñoz-Jaramillo et al. (2010). Les deux polarités sont représentées respectivement par les couleurs bleu et rouge (échelle non spécifiée).

rapprochée des deux régions unipolaires d’une BMR donnée a tendance à transporter leur flux simultanément vers les pôles pour un écoulement méridien trop intense, sans laisser le temps à la “mauvaise” polarité de diffuser vers l’équateur, ce qui conduit à un plus faible flux polaire final (voir, par exemple, l’analyse paramétrique de Baumann et al. 2004). C’est donc bien une circulation méridienne un peu moins intense qui devrait permettre d’accumuler davantage de flux aux pôles, tel qu’observé. Et comme décrit en détails à la Section 1.3.3.c, il s’agit là de tout un équilibre entre diffusion et amplitude et gradient latitudinal de la circulation méridienne. Justement, avec des BMR représentées aux bonnes échelles par des anneaux, et avec une résolution suffisante pour bien simuler le comportement à ces échelles (ce que les premières simulations de Durney (1995) n’avaient pas), Muñoz-Jaramillo et al. (2010) obtiennent la tendance adéquate.

Les modèles plus récents, 3D et $2 \times 2D$ décrits ci-dessus, réussissent encore mieux à ces tests de comparaison aux observations. Par exemple, la Figure 1.21 illustre le résultat, au maximum d’activité du cycle, d’une simulation BL 3D de Yeates & Muñoz-Jaramillo (2013). On y constate la présence d’un champ magnétique toroïdal relativement diffus mais capable de générer une structure complexe de champ radial sous et à la surface solaire. Les émergences, ponctuelles en temps, latitude et longitude permettent de générer bon nombre de fluctuations aux latitudes d’émergence et jusqu’à l’accumulation du flux aux pôles, ce qui correspond davantage aux observations que le résultat des doubles anneaux de la Figure 1.20(b).

Comme décrit précédemment, notre modèle BL couplé $2 \times 2D$ nous permet d’aller encore plus loin dans la calibration avec les observations, puisque beaucoup plus léger numériquement. À la Figure 1.12, nous avons présenté le résultat de la simulation SFT optimisée sur la base du magnétogramme observé pour la durée du cycle 21. L’ajustement en terme de flux émergé, de trainées magnétiques vers les pôles, de moment d’inversion du dipôle, d’amplitude du champ magnétique polaire ($\simeq 10$ G), de quantité de

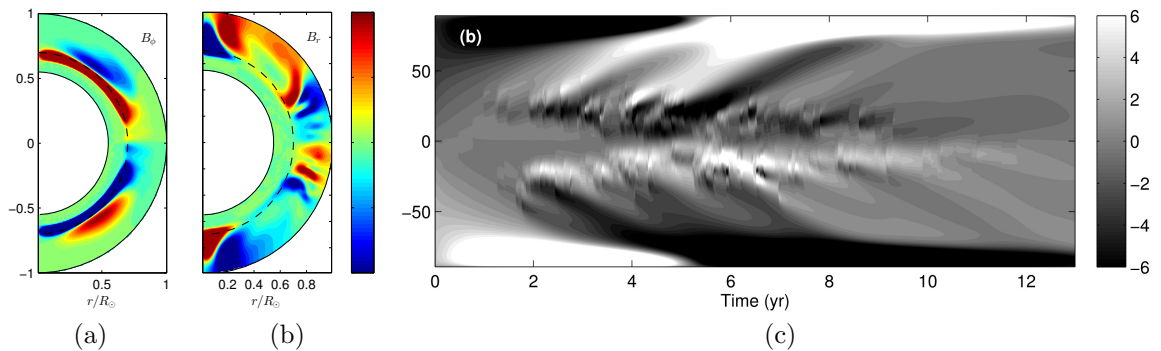


Figure 1.21 – (a) Isocontours du champ magnétique toroïdal (amplitude de 500 G pour l’échelle de couleur) et (b) du champ radial (amplitude de 10 G) dans une coupe méridionale et (c) isocontours du champ radial dans une coupe latitude–temps, tels que produits au maximum d’activité par le modèle BL 3D de Yeates & Muñoz-Jaramillo (2013).

flux accumulé au minimum d'activité, etc. est optimal. À la Figure 1.18, nous avons aussi présenté le fonction probabiliste d'émergence, calculée à partir du champ magnétique toroïdal et optimisée formellement pour correspondre à la forme du "diagramme papillon" des émergences du cycle 21. Le résultat final est un modèle dynamo optimal en terme de correspondance aux observations énumérées au début de cette section. La Figure 1.22 présente un exemple de séquence temporelle obtenue à partir de ce modèle. Après les calibrations précédentes, une atténuation des inclinaisons des BMR est ajoutée en fonction de l'intensité globale de l'activité, afin de mimer les effets de rétroaction dynamique du champ magnétique sur les écoulements. Il est alors possible d'obtenir une dynamo cohérente, capable de durer sur plusieurs dizaines de cycles d'activité, avec des cycles de durée escomptée, des alternances de cycles intenses et plus faibles, des modulations d'amplitude à plus long terme, visibles dans le décompte du nombre de "taches", etc. Ce résultats et d'autres seront décrits en grands détails au Chapitre 3 (Article II).

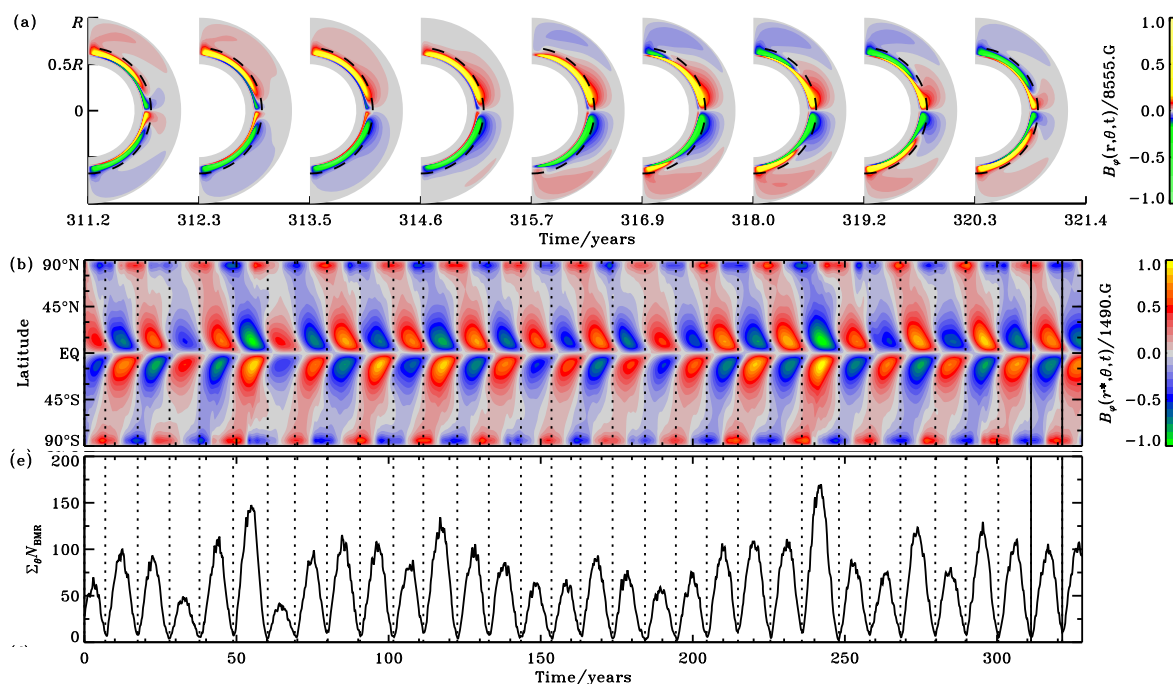


Figure 1.22 – Exemple de séquence temporelle obtenue d’une simulation dynamo BL couplée $2 \times 2D$ (voir Figure 3.1, Chapitre 3 (Article II)) : (a) coupes méridionales du champ toroïdal $B_\phi(r, \theta, t)$ au cours d’un cycle d’activité ; (b) isocontours du champ toroïdal $B_\phi(r^*, \theta, t)$ en latitude–temps au bas de la zone convective ($r^* = 0.68R$) et (c) séquence temporelle correspondante du nombre mensuel de BMR émergées, pour une série d’environ 32 cycles.

1.5 PLAN DE LA THÈSE ET CONTRIBUTION AUX ARTICLES PUBLIÉS

L'idée de base de la création d'un modèle dynamo BL couplé $2 \times 2D$ est venue de Paul Charbonneau, à la suite de la publication de l'article Dikpati & Charbonneau (1999). Une preuve sommaire de fonctionnement du concept au titre de modèle BL a été faite lors d'un stage d'été par Cédric St-Jean.

Lors de mes débuts à titre d'étudiant au doctorat dans le Groupe de Recherche en Physique solaire (GRPS) de l'Université de Montréal, en septembre 2010, l'idée m'a immédiatement paru attrayante car directement ancrée sur un algorithme conceptuel proposé un demi-siècle plus tôt (Babcock, 1961), mais jamais testé explicitement. Existait depuis longtemps des modèles en "champ moyen" à effet- α aux petites échelles, des modèles de type BL approximatifs par effet- α délocalisé, des modèles de type BL à émergences axisymétriques (anneaux), même depuis peu des modèles MHD complets capables de générer des cycles d'activité de type solaire sur la seule base de l'application brute des lois physiques fondamentales. Mais aucun modèle ne testait réellement l'effet potentiel des si évidentes taches solaires, signatures de l'émergence de régions magnétiques bipolaires (BMR), de leur diffusion et de leur transport, en 2D à la surface du Soleil. Pouvait-on prétendre que la cyclicité de la dynamo prenait sa source, ou du moins une importante partie de cette source, dans ces manifestations si évidentes du magnétisme solaire, directement visibles sous nos yeux? Pouvait-on dans ce cas espérer comprendre une partie fondamentale du fonctionnement interne de notre étoile en créant un tel modèle dynamo et en le calibrant rigoureusement sur les observations disponibles? Modéliser le magnétisme de la surface du Soleil en 2D avait un avantage indéniable sur les modèles précédents.

Le travail menant à l'élaboration du code numérique du modèle BL couplé $2 \times 2D$ s'étale sur une période de deux ans, de 2011 à 2013. Deux codes Fortran existants, utilisant chacun une méthode de résolution numérique par éléments finis, sont utilisés pour ce faire : un premier code pour la simulation SFT du champ radial $B_R(\theta, \phi, t)$ en surface (résolution de l'Équation (1.12)); et un second code indépendant pour la simulation dynamo axisymétrique du champ toroïdal $B_\phi(r, \theta, t)$ et du potentiel vecteur $A_\phi(r, \theta, t)$ (pour le champ poloïdal) dans le plan méridien (résolution simultanée de la paire d'Équations (1.15)). Les simulations sont couplées de telle sorte à s'exécuter simultanément, mais en conservant chacune leurs résolutions spatiale et temporelle, puisque chacune peut avoir à simuler des phénomènes demandant différentes précisions numériques. Comme décrit précédemment, le résultat de la simulation SFT, celle-ci demandant davantage de résolution temporelle que l'autre, sert régulièrement à mettre à jour la condition limite de la simulation dynamo interne. À son tour, la simulation dynamo interne produit une distribution de probabilité d'émergences, qui sont insérées régulièrement dans la simulation SFT. La description détaillée de ce couplage fait l'objet du début du Chapitre 3 (Article II).

Alors pourquoi le Chapitre 2 (Article I)? Lors de l’élaboration du modèle numérique BL couplé $2 \times 2D$, il devient rapidement évident qu’un nombre très important de paramètres ajustables, mal contraints par les observations, vient “affaiblir” la solidité du modèle : au total 18 paramètres, pour le profil d’écoulement méridien, la diffusivité, la fonction d’émergence, etc. (revoir Sections 1.4.4 et 1.4.5.f et Tableau 3.I). Une trop grande flexibilité paramétrique affaiblit les modèles en ce sens que, sans contrainte supplémentaire, une immense disparité de solutions peut être générée, dont une majorité n’ayant rien à voir avec le Soleil réel. La façon habituelle de choisir la “bonne” solution est alors d’ajuster “à la main” chaque paramètre, bouton par bouton, pour s’approcher des observations, mais sans pouvoir tirer de conclusion formelle quant à la validité relative de cette solution par rapport à d’autres à première vue tout aussi valables. Me vient alors l’idée d’explorer rigoureusement l’ensemble de l’espace de ces multiples paramètres, sur la base de critères quantitatifs indiquant la validité de chaque solution par rapport à un ensemble détaillé d’observations. L’exploration de milliers, voire de millions, de solutions permettrait d’atteindre une optimisation formelle du modèle en comparaison au vrai Soleil, et d’obtenir des barres d’incertitude de type Monte-Carlo pour chaque paramètre ajusté. Dans un espace à 18 paramètres, l’exploration ne peut toutefois pas se faire au hasard. Nous choisissons donc d’utiliser un algorithme génétique d’optimisation (PIKAIA 1.2 (Charbonneau, 2002b, Charbonneau & Knapp, 1995), distribué par le HAO/NCAR), que nous intégrons lui aussi à la simulation, pour en analyser la “qualité” de chaque solution et produire des “descendants” s’approchant de mieux en mieux de l’optimum. La distribution de solutions autour de l’optimum permet finalement d’évaluer les barres d’incertitude recherchées.

Puisque le modèle est composé de deux simulations indépendantes, il valait avant tout la peine d’optimiser la portion SFT seule, sur la base des observations magnétographiques de surface disponibles. Cette calibration fait donc l’objet d’un article préalable tout entier (Chapitre 2 : Article I). Ce travail d’optimisation menant au premier article s’étend sur plus d’un an, de 2013 à 2015. En plus de la publication, un travail important d’étalonnage est effectué afin de choisir le plus rigoureusement possible les résolutions spatiale et temporelle requises pour la stabilité numérique. En parallèle, un stagiaire d’été fort productif, Arnaud Carignan-Dugas, entame l’analyse détaillée des statistiques d’émergence de taches solaires enregistrées par différents observatoires américains depuis 1874. L’objectif est d’en arriver à générer, à partir d’une série temporelle unique comme celle du nombre de taches solaires (SSN) ou, en ce qui concerne le modèle BL couplé $2 \times 2D$, l’évolution du champ toroïdal profond, une base de données purement synthétique de taches. La partie magnétique de cette analyse statistique, basée sur les données de Wang & Sheeley (1989), est ensuite complétée par moi-même puis annexée à l’Article I (Section 2.A). Dans l’ensemble, la vaste majorité de l’Article I est rédigée par moi-même, avec apports majeurs de Paul Charbonneau à l’introduction et la conclusion et corrections à l’ensemble du texte.

Ce “petit” détour accompli pour optimiser la partie SFT du modèle, nous en revenons au corps

du sujet en la réintégrant au modèle BL couplé $2 \times 2D$. Reste maintenant à l’optimiser, lui aussi, sur la base de critères observationnels. Il s’agit là du milieu du Chapitre 3 (Article II) : avant de permettre au modèle dynamo de générer ses propres émergences, la simulation est testée afin de produire un “diagramme papillon” des émergences qui s’approche le mieux possible des observations solaires. Le même genre de procédure d’optimisation génétique que précédemment est utilisé, des centaines de milliers de solutions évaluées et un modèle optimal obtenu, avec barres d’incertitude pour chaque paramètre. Une fois cette optimisation complétée, le modèle $2 \times 2D$ est enfin autorisé à rouler par lui-même, les émergences de BMR en surface produites à partir de la fonction d’émergence sous-jacente, avec des statistiques extraite de la base de données de la Section 2.A (Article I), le tout espérant reproduire au mieux les caractéristiques du cycle d’activité solaire. L’Article II se termine par une présentation de quelques solutions de référence présentant, tel qu’attendu, des cycles de bonnes durées, de bonnes amplitudes relatives, avec fluctuations à long terme, etc. L’ensemble du travail pour cet article s’étend finalement sur environ un an, de 2015 à 2016. La vaste majorité du texte est rédigée par moi-même, avec apports majeurs de Paul Charbonneau à l’introduction, la discussion et la conclusion et corrections à l’ensemble du texte.

Outre par ces Articles I et II déjà publiés (The Astrophysical Journal, septembre 2015 et janvier 2017, respectivement) et présentés aux chapitres 2 et 3 de cette thèse², la description de nos travaux a pu trouver auditoire à maintes occasions. Les prémices ont été présentés pour la première fois à la rencontre du Centre de Recherche en Astrophysique du Québec (CRAQ) en 2011. J’ai ensuite pu faire part à plusieurs reprises de l’avancement du projet à la communauté canadienne en physique solaire, lors de présentations aux Canadian Solar Workshops de 2012, 2013 et 2016. Les travaux ont aussi été présentés aux étudiants du Département de physique de l’Université de Montréal lors du Festival de la Recherche en Physique de 2014, ainsi qu’aux collègues d’astrophysique lors d’un séminaire donné en mai 2015. À l’étranger, j’ai pu finalement annoncer les résultats quasi-finaux de ces travaux au Solar Dynamo Frontiers Workshop 2015, à Boulder, au Colorado.

Non seulement ces réussites passées, mais notre modèle BL couplé $2 \times 2D$ continue d’être hautement prometteur. Deux stagiaires de fin de baccalauréat, trois stagiaires d’été, deux étudiants en maîtrise et une étudiante au doctorat ont travaillé ou sont en cours de travail avec le modèle, pour en analyser les retombées. Un article (Nagy et al., 2017) est déjà publié, au sujet des fluctuations d’amplitude associées à la stochasticité du processus d’émergence. Quelques autres articles risquent d’être soumis à publication dans l’année à venir : étude de l’activité solaire à long terme, périodes de grands minima et maxima, assimilation de données, prédiction de l’activité, etc. Une description détaillée de ces travaux en cours sera faite en conclusion de cette thèse (Chapitre 4).

²Les articles sont rédigés en anglais, mes excuses aux principes de protection de notre belle langue et à la cohérence du présent document. J’eus préféré avoir le loisir de traduire ces pages, mais le temps étant ce qu’il est, il file et la thèse dut être déposée enfin.

CHAPITRE 2

A COUPLED 2×2 D BABCOCK–LEIGHTON SOLAR DYNAMO MODEL. I. SURFACE MAGNETIC FLUX EVOLUTION

Alexandre Lemerle^{1,2}, Paul Charbonneau¹, and Arnaud Carignan-Dugas¹

¹ *Département de physique, Université de Montréal, 2900 boul. Édouard-Montpetit,
Montréal, QC, H3T 1J4, Canada*

² *Collège de Bois-de-Boulogne, 10555 av. Bois-de-Boulogne, Montréal, QC, H4N 1L4, Canada*

Received 2015 May 4; accepted 2015 July 20

*Published in The Astrophysical Journal, Vol. 810–1, 78 (18 pages), 2015 September 1
(Lemerle et al., 2015, <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/810/1/78>)*

2.0 ABSTRACT

The need for reliable predictions of the solar activity cycle motivates the development of dynamo models incorporating a representation of surface processes sufficiently detailed to allow assimilation of magnetographic data. In this series of papers we present one such dynamo model, and document its behavior and properties. This first paper focuses on one of the model’s key components, namely surface magnetic flux evolution. Using a genetic algorithm, we obtain best-fit parameters of the transport model by least-squares minimization of the differences between the associated synthetic synoptic magnetogram and real magnetographic data for activity cycle 21. Our fitting procedure also returns Monte Carlo-like error estimates. We show that the range of acceptable surface meridional flow profiles is in good agreement with Doppler measurements, even though the latter are not used in the fitting process. Using a synthetic database of bipolar magnetic region (BMR) emergences reproducing the statistical properties of observed emergences, we also ascertain the sensitivity of global cycle properties, such as the strength of the dipole moment and timing of polarity reversal, to distinct realizations of BMR emergence, and on this basis argue that this stochasticity represents a primary source of

uncertainty for predicting solar cycle characteristics.

Keywords : dynamo — Sun : activity — Sun : magnetic fields — Sun : photosphere — sunspots

2.1 INTRODUCTION

The Sun’s magnetic field is generated by a magnetohydrodynamical induction process, or a combination of processes, taking place primarily in the solar convection zone. On small spatial scales, convection is believed to continuously process and replenish the photospheric magnetic field, through a local dynamo mechanism that is statistically stationary and does not produce net signed flux. At the other extreme, magnetic fields developing on spatial scales commensurate with the solar radius show a strong degree of axisymmetry and a well-defined dipole moment, and undergo polarity reversals on a regular cadence of approximately eleven years (see review by Hathaway 2010).

Cowling’s theorem dictates that such an axisymmetric large-scale magnetic field cannot be sustained by purely axisymmetric flows. Convective turbulence represents an ideal energy reservoir for the required dynamo action, provided the Coriolis force can break the mirror symmetry that would otherwise prevail. This process can be quantified using mean-field electrodynamics, leading to the so-called α -effect, an electromotive force proportional to the mean magnetic fields (for a recent review see, e.g., Charbonneau 2014). That such a turbulent dynamo, acting in conjunction with differential rotation, can lead to the production of large-scale magnetic fields undergoing polarity reversals has been confirmed by both laboratory experiments (Cooper et al., 2014, Lathrop & Forest, 2011, Zimmerman et al., 2014) and global magnetohydrodynamical (MHD) numerical simulations of solar convection (see Charbonneau 2014, § 3.2, and references therein).

The Coriolis force also acts on the flows developing along the axis of buoyantly rising toroidal magnetic flux ropes, believed to be generated near the base of the solar convection zone, and eventually piercing the photosphere in the form of bipolar magnetic regions (BMRs) (see Fan 2009 for a review). This rotational influence produces the observed systematic east–west tilt characterizing large BMRs, as embodied in Joy’s Law. Associated with this tilt is a net dipole moment so that, effectively, a poloidal magnetic component is being produced from a pre-existing toroidal component. Here again it is the Coriolis force that ultimately breaks the axisymmetry of the initially purely toroidal flux rope, so the process is akin to a large-scale version of the α -effect. With shearing by differential rotation producing a toroidal magnetic component from a pre-existing poloidal component, the dynamo loop can be closed. This forms the basis of the Babcock–Leighton (BL) dynamo models (Babcock, 1961, Leighton, 1969), which have undergone a strong revival in the past two decades and are now considered

a leading explanatory framework for the solar magnetic cycle (for a recent review, see, e.g., Karak et al. 2014).

In such models, the transport and accumulation in polar regions of the magnetic flux liberated at low latitudes by the decay of a BMR is what sets the magnitude of the resulting dipole moment and the timing of its reversal (Wang et al., 1989b, Wang & Sheeley, 1991). The cross-equatorial diffusive annihilation of magnetic flux associated with the leading members of tilted BMRs is ultimately what allows the build-up of a net hemispheric signed flux (see Cameron et al. 2013, 2014, and references therein). Indeed, only a small fraction of emerging magnetic flux eventually makes it to the poles; the magnetic flux in the polar cap at sunspot minimum, $\simeq 10^{22}$ Mx, is about the same as the unsigned flux in a single, large BMR, and the net axial dipole moment of all BMRs emerging during a typical cycle is a few times the dipole moment required for polarity inversion (Wang & Sheeley, 1989). Consequently, one large BMR emerging very close to the equator with a significant tilt can have a strong impact on the magnitude of the dipole moment building up in the descending phase of the cycle, and thus on the amplitude of the subsequent cycle (see, e.g., Jiang et al. 2014a).

In this series of papers we present a novel BL model of the solar cycle based on the coupling of a surface flux transport (SFT) simulation with a mean-field-like interior dynamo model. We henceforth refer to this hybrid as a “ $2 \times 2D$ model”, as it couples a two-dimensional simulation on a spherical surface (θ, ϕ) to a two-dimensional simulation on a meridional plane (r, θ) , each simulation providing the source term required by the other.

In the present paper we focus on the SFT component of the model. SFT has been extensively studied in the past decades, starting with the work of Leighton (1964) up to recent attempts to reproduce the details of modern magnetograms (see reviews by Sheeley 2005, Mackay & Yeates 2012, and Jiang et al. 2014b). The model’s behavior relative to emergence and model characteristics are fairly well understood (see, e.g., Baumann et al. 2004). In particular, observed magnetographic features, such as poleward flux strips (“surges”), require a delicate balance between meridional circulation and the surface effective diffusion rate (see, e.g. Wang et al. 1989a), ultimately driven by the dispersive random walk taking place at the supergranular scale. Yet, due to limitations in the measurement of these two processes, their detailed parameterization remains, even today, a matter of debate, with the consequence that SFT models continue to differ significantly in their outputs. This is an unsatisfactory situation, considering how useful accurate and spatially resolved representations of surface magnetic flux evolution would be for data assimilation-based cycle prediction schemes (e.g., Dikpati et al. 2014, Kitiashvili & Kosovichev 2008, and references therein). Moreover, the availability of realistic, detailed surface magnetic maps associated with distinct dynamo regimes is needed in reconstructing the heliospheric magnetic field in the distant past (see, e.g., Riley et al. 2015). In order to build a SFT model that behaves, as much as possible, like the Sun—one to be ultimately used as the key surface component of a solar-like BL dynamo model—calibration against observations needs to be performed

thoroughly. Some quantitative studies have been conducted (see, e.g., Yeates 2014), but never through systematic optimization procedures. This is what we aim to achieve in the present study.

We first discuss the formulation of the SFT model itself (§ 2), after which we turn to its calibration against observed data. Toward this end we used a genetic algorithm, which allows an efficient exploration of the model’s parameter space, as well as the identification of parameter correlations and degeneracies (§ 3). We then repeat the analysis while allowing the meridional flow to vary systematically in the course of the cycle, as suggested by observations. In § 4 we explore the model behavior with respect to the stochastic variability inherent to emergence statistics. We conclude by comparing and contrasting our optimized SFT model to similar models available in the extant literature. Coupling to the dynamo simulation, and the resulting solar cycle model, is the subject of the following paper in this series (A. Lemerle & P. Charbonneau 2015, in preparation).

2.2 MODEL

As new BMRs emerge at the surface of the Sun and subsequently decay, their magnetic flux is dispersed and transported with the plasma by surface flows, and locally destroyed or amplified according to basic rules of electromagnetic induction. For physical conditions representative of the solar photosphere, this process is well described by the MHD induction equation :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}) , \quad (2.1)$$

with η the net magnetic diffusivity, including contributions from the small microscopic magnetic diffusivity $\eta_e = c^2/4\pi\sigma_e$ (with σ_e^{-1} the electrical resistivity of the plasma), as well as a dominant turbulent contribution associated with the destructive folding of magnetic field lines by small-scale convective fluid motions. A dynamically consistent approach would require Equation (2.1) to be augmented by the hydrodynamical fluid equations including Lorentz force and Ohmic heating terms. However, on spatial scales commensurate with the solar radius, the use of a kinematic approximation, whereby the flow \mathbf{u} is considered given, has been shown to be quite appropriate in reproducing the synoptic evolution of the solar surface magnetic field (see, e.g., Baumann et al., 2004, Wang et al., 2002a). We adopt this kinematic approach in what follows, and solve Equation (2.1) on a spherical shell representing the solar photosphere.

On spatial scales much larger than convection, only meridional circulation $\mathbf{u}_p(r, \theta)$ and differential rotation $r \sin \theta \Omega(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi$ contribute to \mathbf{u} in Equation (2.1). Both these flows can be considered axisymmetric ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) and steady ($\partial/\partial t \equiv 0$) to a good first approximation. Since we solve the induction

equation on the solar surface, meridional circulation reduces to a latitudinal flow $\mathbf{u}_P \equiv u_\theta(R, \theta)\hat{e}_\theta$.

Following earlier modeling work on surface magnetic flux evolution¹, we consider the magnetic field to be predominantly radial on global scales and we solve only the r -component of Equation (2.1), after enforcing the null divergence condition throughout :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_R}{\partial t} = & -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin \theta u_\theta(R, \theta) B_R] - \Omega(R, \theta) \frac{\partial B_R}{\partial \phi} + \frac{\eta_R}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial B_R}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 B_R}{\partial \phi^2} \right] \\ & - \frac{B_R}{\tau_R} + S_{\text{BMR}}(\theta, \phi, t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

where η_R is the uniform surface diffusivity. Note the addition of two supplementary terms : a source term $S_{\text{BMR}}(\theta, \phi, t) = \sum_i B_i(\theta, \phi) \delta(t - t_i)$, with δ the Dirac delta, to account for the emergence of new BMRs at given positions (θ_i, ϕ_i) and times t_i , to be extracted from some suitable observational database (see § 2.3.1), and a linear sink term $-B_R/\tau_R$ to allow for some exponential decay of the surface field with time. This term thus mimics the radial diffusion and mechanical subduction of locally inclined magnetic field lines, which cannot be captured by Equation (2.2) and the assumption of a purely radial surface magnetic field. The addition of this sink term is also motivated by the analysis of Schrijver et al. (2002), who found that such decay on a timescale of 5 – 10 yr was necessary to preclude secular drift and ensure polarity reversal of the polar caps when modeling surface flux evolution over many successive cycles. Baumann et al. (2006) argued that this exponential destruction of surface magnetic flux could be justified physically as the effect of a vertical turbulent diffusion (including convective submergence) on the decay of the dominant dipole mode. In what follows we treat τ_R as a free parameter. Equation (2.2) is now a two-dimensional linear advection–diffusion equation for the scalar component $B_R = B_r(R, \theta, \phi, t)$ at the surface of the Sun, augmented by source and sink terms.

2.2.1 MERIDIONAL CIRCULATION

Because the solar meridional surface flow is weak and thus difficult to measure accurately (but do see Ulrich 2010), its latitudinal dependence has been approximated by a number of ad hoc analytical formulae : some as minimalistic as a $\cos \theta \sin \theta$, with peak at 45° latitude (e.g. Dikpati & Charbonneau, 1999), some displacing the peak flow to lower latitudes by introducing exponents to the $\cos \theta$ and $\sin \theta$ terms (e.g. van Ballegoijen & Choudhuri, 1988, Wang et al., 2002b), others using a truncated series expansion (Schrijver, 2001), or shutting down the flow speed to zero near the poles (e.g. van Ballegoijen et al., 1998), for a closer fit to the observed motion of surface magnetic features (Hathaway, 1996, Komm et al., 1993, Snodgrass & Dailey, 1996).

The recent observational determinations of Ulrich (2010)², however, suggest the existence of a

¹Post-publication note : “and observations of solar surface magnetic fields (Howard & Labonte, 1981)”

²Post-publication note : (see also Rightmire-Upton et al. 2012)

more complex latitudinal pattern, increasing quite rapidly from the equator to a peak amplitude near 15° to 20° latitude, and decreasing more slowly to zero up to 60° – 70° latitude. To account for such asymmetric rise and fall of the flow speed at low–mid latitudes and possible suppression of the flow at high latitudes, we opt to use the following, versatile analytical formula :

$$u_\theta(R, \theta) = -u_0 \operatorname{erf}^q(v \sin \theta) \operatorname{erf}^n(w \cos \theta) , \quad (2.3)$$

with u_0 the maximum flow velocity and q , n , v , and w free parameters to be determined in the course of the foregoing analysis. With u_0 the same in both hemispheres, the profile is antisymmetric with respect to the equator. It takes approximately the shape of a $\cos \theta \sin \theta$ profile in the case $q = 1$, $n = 1$, $v = 1$, and $w = 1$, with peak at mid-latitudes. Varying parameters w and v allows the latitude of peak flow speed to be moved to either lower latitudes ($w > 1$) or higher latitudes ($v > 1$). High values for both w and v broaden the peak between low and high latitudes. Values of $q > 1$ have the effect of stopping the flow before the poles, at lower latitudes as q increases. Growing values of n have the same effect near the equator, but since such a low-latitude 0 m s^{-1} plateau seems far from a solar

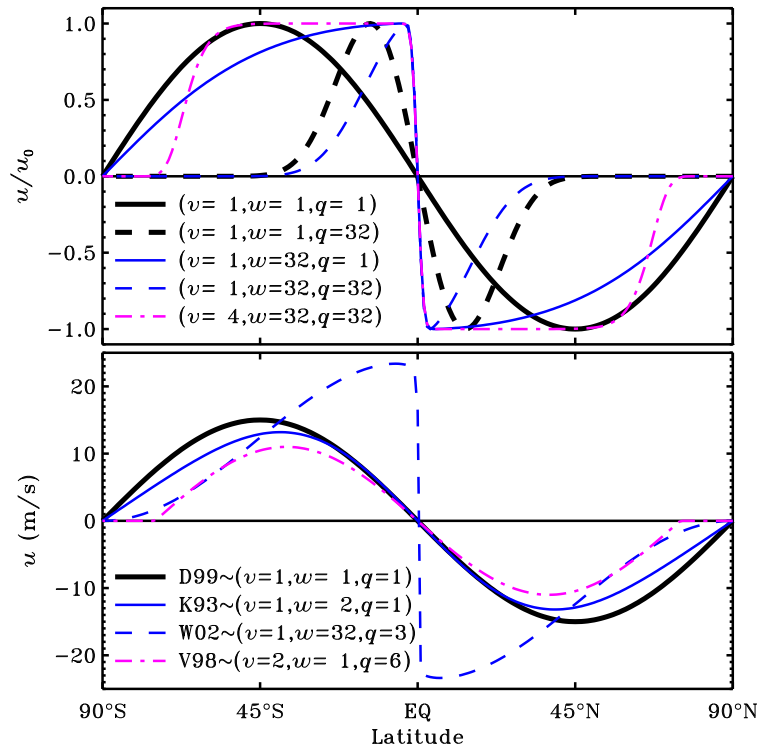


Figure 2.1 – Top panel : sample profiles of surface meridional circulation, as formulated in Equation (2.3). Bottom panel : other profiles found in the literature : D99 (Dikpati & Charbonneau, 1999), K93 (Komm et al., 1993), W02 (Wang et al., 2002b), and V98 (van Ballegoijen et al., 1998), with corresponding parameter values when approximated using Equation (2.3).

behavior, we set $n = 1$ for the remainder of our analysis. The top panel of Figure 2.1 illustrates a few sample profiles. Note in particular that, with appropriate choices for q , v and w , Equation (2.3) can reproduce most profiles in use in the literature (see bottom panel).

Analyses by Ulrich (2010) also show latitudinal flow speeds dropping to negative values near the poles, especially at the beginning and end of cycles. Since this pattern is at the limit of observational determinations and does not appear in all cycles or solar hemispheres³, we opt not to model these potential high-latitude secondary flow cells. We also use the same value of u_0 in both hemispheres.

2.2.2 DIFFERENTIAL ROTATION

Unlike meridional circulation, the surface differential rotation profile is observationally rather well established⁴. We adopt here the parametric formulae calibrated helioseismically by Charbonneau et al. (1999) :

$$\Omega(R, \theta) = \Omega_0 (1 + a_2 \cos^2 \theta + a_4 \cos^4 \theta) , \quad (2.4)$$

with $a_2 = -0.1264$ and $a_4 = -0.1591$. The angular velocity is lowest at the poles and highest at the equator, where $\Omega_0 = 2.894 \mu\text{rad s}^{-1}$.

2.2.3 MAGNETIC DIFFUSIVITY

Near the solar surface, the magnetic diffusivity due to Ohmic dissipation reaches $\eta_e \simeq 10^7 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. However, as initially shown by Leighton (1964), surface convective motions at the supergranular scale drive a random walk that disperses magnetic flux, and can be modeled as a diffusive process characterized by an effective magnetic diffusivity of order $\eta_R \simeq 10^{12} - 10^{13} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. The exact value is virtually impossible to determine from first principles, so we henceforth treat η_R as a free parameter to be determined by our analysis.

2.2.4 NUMERICAL SOLUTION

The adimensional form of the surface transport Equation (2.2) is solved numerically in a two-dimensional Galerkin finite-element scheme (see, e.g., Burnett 1987), over a regular Cartesian grid in $[\theta, \phi]$ with longitudinal periodicity, the latter enforced through a padding of ghost cells, updated at every time step. The zero-flux polar boundary condition $dB_R/d\theta = 0$ is hardwired at the level of the finite-element scheme itself. Because only a small fraction of emerging magnetic flux ends up

³*Post-publication note* : “and does not appear either in recent measurements obtained from the tracking of magnetic elements (Rightmire-Upton et al., 2012)”

⁴*Post-publication note* : Though its parametrization depends on observational techniques used : Doppler/helioseismic measurements provide photospheric rotational profiles, while magnetic tracking methods (see Snodgrass 1983) tend to trace rotation at a few megameters below the photosphere.

accumulating at the poles, it is essential to rigorously ensure magnetic flux conservation. Consequently, the numerical discretization errors must be monitored and kept in check.

Using double precision arithmetic, a $N_\phi \times N_\theta = 256 \times 128$ longitude–latitude grid is required to ensure that net signed surface flux never exceeds 10^{-2} of the total unsigned surface flux, at least an order of magnitude better than observations (see, e.g., Figure 2.2(e)). With such a grid, relatively short time steps are also necessary to ensure stability, which is of the order of 100 time steps per year, for a total of $N_t \simeq 10^3$ time steps per solar cycle.

2.2.5 NUMERICAL OPTIMIZATION

The final formulation of Equation (2.2) leaves us with a set of six unknown parameters (u_0 , q , v , w , η_R , and τ_R), which we aim to constrain quantitatively based on magnetographic observations of the solar surface.

We opt to compare a time–latitude map of longitudinally averaged $\langle B_R \rangle^\phi(\theta, t)$ output from our model with an equivalent longitudinally averaged magnetogram. For this purpose, Hathaway (2010) has provided us with his well-known “magnetic butterfly diagram” data⁵, made available from 1976 August to 2012 August, at a temporal resolution of one point per Carrington rotation and 180 data points equidistant in $\cos\theta$. The data are a compilation of measurements from instruments on Kitt Peak and SOHO, corrected to obtain the radial component of the magnetic field.

As a unique optimization criterion for the model, a plain minimization of the residuals between the two maps represents the most straightforward approach. Unfortunately, this turns out to be insufficient to properly constrain the model parameters, for a number of reasons including high-latitude artifacts, as well as observational size and magnetic field thresholds leading to missing flux. Therefore, in addition to fitting the time–latitude synoptic map, we add further constraints by putting more weight on two physically meaningful features : first, the evolution of the overall axial dipole moment (divided by R^2), defined as

$$D^*(t) = \frac{D(t)}{R^2} = \frac{3}{2} \int_0^\pi \langle B_R \rangle^\phi(\theta, t) \cos\theta \sin\theta d\theta ; \quad (2.5)$$

and, second, the shape of mid–latitudes flux-migration strips. To quantify the latter, we delimit two “transport regions”, one in each hemisphere (regions T1 and T2 in Figure 2.2(a), latitudes $\pm 34^\circ$ to $\pm 51^\circ$), dominated by inclined flux strips and where very little flux emerges or accumulates. We then calculate the latitudinal average of B_R in each region, a quantity directly influenced by the amount of flux and the width and inclination of flux strips :

$$\langle B_R \rangle^{\text{T1,T2}}(t) = \frac{\int_{\text{T1,T2}} \langle B_R \rangle^\phi(\theta, t) \sin\theta d\theta}{\int_{\text{T1,T2}} \sin\theta d\theta} . \quad (2.6)$$

⁵<http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/magbfly.jpg>

With such definitions, both of the above surface integrals end up having the same physical unit, with magnitude of the order of a few Gauss.

Constraining the behavior of the axial dipole component, and indirectly the times of polarity reversals, should help constrain the values of diffusivity η_R and exponential decay time τ_R , which directly shape the polar magnetic caps, as well as meridional circulation parameters (u_0 , q , v , and w), which dictate how new flux migrates toward the poles and eventually triggers the polarity reversals. The extent of polar caps down to $60 - 70^\circ$ latitude also suggests a significant decrease of the meridional flow near these high latitudes. Similarly, diffusivity will shape the width and length of mid-latitudes flux-migration strips, and the meridional circulation profile will set their inclination in the synoptic map.

To obtain a final optimization criterion, we evaluate the rms deviation χ_{map} between simulated $\langle B_R \rangle_{\text{sim}}^\phi(\theta, t)$ map and measured $\langle B_R \rangle_{\text{dat}}^\phi(\theta, t)$ map, the rms deviation χ_D between simulated $D_{\text{sim}}^*(t)$ and measured $D_{\text{dat}}^*(t)$, and the rms deviations $\chi_{T1, T2}$ between simulated $\langle B_R \rangle_{\text{sim}}^{T1, T2}(t)$ and measured $\langle B_R \rangle_{\text{dat}}^{T1, T2}(t)$. We combine them as follows, such that the overall rms deviation χ must be minimized :

$$\chi^2 = \frac{1}{4} \left(\chi_{\text{map}}^2 + \chi_D^2 + \chi_{T1}^2 + \chi_{T2}^2 \right). \quad (2.7)$$

This multi-objective optimization criterion goes significantly beyond the cross-correlation approach introduced by Yeates (2014), since it defines an absolute least-squares minimization of the differences between the model and observations, rather than being restricted to their temporal synchronisation.

The inverse of the quantity χ^2 is defined as our merit function, or “fitness”. We seek to maximize this fitness using the genetic algorithm-based optimizer PIKAIA 1.2, a public domain software distributed by HAO/NCAR⁶. Genetic Algorithm (GA) are a biologically inspired class of evolutionary algorithms that can be used to carry out global numerical optimization. PIKAIA (Charbonneau, 2002b, Charbonneau & Knapp, 1995) is one such classical GA-based optimizer. PIKAIA evolves an optimal solution to a given optimization task by selecting the better solutions among a population of trial solutions, and breeding new solutions through genetically inspired operations of crossover and mutation acting on a string encoding of the selected solution’s defining parameters. In this manner GA allow efficient, adaptive exploration of parameter space through parallel processing of advantageous substrings. Indeed, GA-based optimizers have proven quite robust in handling global optimization problems characterized by complex, multimodal parameter spaces that often trap gradient-based optimizers in local extrema. For an accessible introduction to GA and their use for numerical optimization, see Charbonneau (2002a).

In the present context PIKAIA is operating in a seven-dimensional parameter space (see Table 2.I), with the fitness measure given by Equation (2.7). We use the default settings for PIKAIA’s internal

⁶<http://www.hao.ucar.edu/modeling/pikaia/pikaia.php> (2015 March)

control parameters, with the exception of encoding depth, population size, mutation mode (equiprobable digit+creep, with fitness-based adjustment), and number of generational iterations.

As numerical optimization algorithms, GA tend to be computationally expensive, as the number of model evaluations is equal to the population size times the number of generational iterations. In most model fitting tasks reported upon in what follows, a population size of 48 trial solutions evolving over 500 generations was found to be sufficient to reliably ensure proper convergence of all model parameters. This adds up to 24000 model fitness evaluations per optimization run. Calculating the fitness of a single trial solution (seven-parameter vector) implies running a SFT simulation, calculating the various integrals introduced in § 2.2.5, and finally evaluating Equation (2.7). For our working spatial mesh and time step this requires a little under 10 minutes on a single-core modern CPU, adding up to 167 core-days for a typical optimization run. However, this sequence of operations is applied independently to each member of the population, and so can easily be carried out in parallel (see, e.g., Metcalfe & Charbonneau 2003). With the only information returned by each evaluation being the fitness, near-perfect parallelization can be achieved, by assigning one core per population member, thus bringing the wall-clock time down to a few days.

One specific feature of PIKAIA deserves further discussion, namely its adaptive mutation rate. Throughout the evolution, PIKAIA monitors the fitness differential and spread of the population in parameter space, and whenever these quantities become too small (large), the internal mutation rate is increased (decreased), while ensuring that the current best individual is always copied intact into the next generation. This effectively leads to a form of Monte Carlo exploration of parameter space in the vicinity of the current optimum, allowing escape from local extrema as the case may be. At the same time, this pseudo-random sampling of parameter space taking place about the current optimum solution can be harnessed to construct error estimates on solution parameters; these estimate remain useful even though, strictly speaking, population members are not statistically independent of one another since they have all been bred from the same earlier generations.

2.3 SOLAR CYCLE 21 : A CASE STUDY

2.3.1 SURFACE EMERGENCE DATABASE

In an effort to characterize the details of surface flux evolution during sunspot cycle 21, Wang & Sheeley (1989, hereafter WS1989) have assembled a comprehensive database of over 3000 observed BMRs, each approximated as a pair of poles of identical magnetic flux but opposite polarity. Their input data consisted of daily magnetograms recorded at the National Solar Observatory/Kitt Peak between 1976 August and 1986 April. For each BMR, they list the time, magnetic flux, polarity of

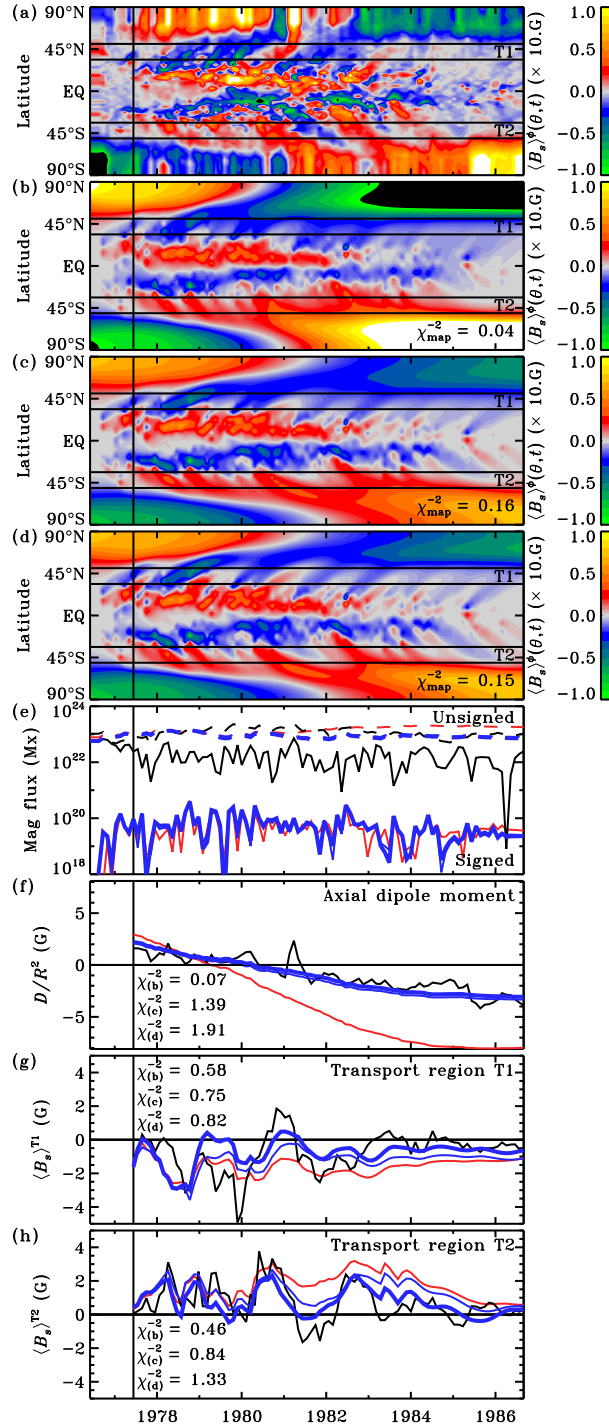


Figure 2.2 – Time–latitude contour plots of the radial surface magnetic field from (a) magnetographic data by Hathaway (2010), cycle 21 only, (b) an unacceptable solution using the reference values listed in Table 2.I ($\chi^{-2} = 0.09$), (c) an example of a suboptimal but acceptable solution with $\chi^{-2} = 0.42 = 93\% \chi_{\text{max}}^{-2}$, and (d) an optimal solution ($\chi_{\text{max}}^{-2} = 0.45$). Temporal evolution of (e) total unsigned (dashed) and absolute signed (continuous) magnetic flux, (f) axial dipole moment, and average radial magnetic field in (g) transport region T1 (latitudes 34°N to 51°N), and (h) transport region T2 (latitudes 34°S to 51°S). Thin black curves are extracted from the data presented in (a), thin red from the unacceptable solution (b), thin blue from the suboptimal solution (c), and thick blue from the optimal solution (d). The vertical straight line delineates the first 10% of the simulation time, which is excluded from the fitness calculation. Also listed are the values of sub-criteria χ_{map}^{-2} , χ_D^{-2} , χ_{T1}^{-2} , and χ_{T2}^{-2} for each solution.

the western pole, and latitude and longitude of each pole, measured when their magnetic flux reached its peak. Positive magnetic fluxes range from 10^{20} Mx to 7×10^{22} Mx, for a total of 1.09×10^{25} Mx for the whole database. As described in WS1989's analysis, while the latitude and time of emergence of the BMRs follow the usual butterfly pattern, the polarities of western poles are predominantly coherent in a given hemisphere and opposite in the other hemisphere, as per Hale's law. The database also shows a slight hemispheric asymmetry of 0.4% in favor of the northern hemisphere, in both total flux and number of BMRs.

We use WS1989's updated database entries as direct inputs for the SFT source term $S_{\text{BMR}}(\theta, \phi, t)$. Each i th BMR is injected in the surface layer at its observed time t_i , colatitude θ_i , and longitude ϕ_i , with a gaussian distribution for each pole :

$$B_i(\theta, \phi) = \underbrace{B_{i0} e^{-\delta_{i+}^2/2\sigma^2}}_{B_{i+}(\theta, \phi)} + \underbrace{-B_{i0} e^{-\delta_{i-}^2/2\sigma^2}}_{B_{i-}(\theta, \phi)}, \quad (2.8)$$

where δ_{i+} and δ_{i-} are the heliocentric angular distances from the centres (θ_{i+}, ϕ_{i+}) and (θ_{i-}, ϕ_{i-}) of the two poles, respectively, and $\sigma = 4^\circ$ the width of the gaussian. We set this width to a fixed value for all emergences, in order to minimize numerical errors, a choice that may induce only slight shifts in the times of emergences. In other words, our Gaussian-shape BMRs are injected with a larger area than observed, but this does not impact the subsequent evolution since Gaussian profiles spread in a shape-preserving manner under the sole action of diffusion. Also, the use of heliocentric distances ensures that the surface integral of $B_{i+}(\theta, \phi)$ can be calculated exactly as the measured flux, provided that magnetic field amplitude B_{i0} at the centre of the gaussian is adjusted accordingly. This appropriate geometry also guarantees that total signed flux from both poles cancels completely. This condition is important since any remnant net surface flux was found to accumulate during the simulation. All these factors considered, along with a tight grid and double precision arithmetic, the net magnetic flux from one discretized BMR rarely exceeds 10^{-13} times the emerged flux in the positive pole.

2.3.2 INITIAL CONDITION

As we aim to reproduce, among other global cycle features, the timing of polar cap polarity reversals, the amount and distribution of magnetic flux at the beginning of the cycle is particularly crucial. Even if we assumed an axisymmetric initial condition, the synoptic data compiled by Hathaway (2010) remain incomplete for this 1976-1977 activity minimum. In fact, while the southern hemisphere presents the expected quantity of negative flux, the northern hemisphere presents no clear polar cap, and even some substantial negative flux through the end of 1976 (see Figure 2.2(a)). Figure 2.2(e) illustrates how the corresponding signed magnetic flux is far from zero for this period, even reaching the value of unsigned flux at one point. Figure 2.3(a) illustrates the latitudinal distribution of B_R in

1976 June, patently not mirror-symmetric about the equatorial plane.

In order to construct a plausible initial condition, we turn to observed distributions for other cycle minima. Figure 2.3(b) illustrates latitudinal distributions of B_R at the beginnings of cycles 22–24, normalized to unity in each hemisphere. Apart from the unusually asymmetric profile for cycle 21, the latitudinal distributions are characterized by a low field strength from the equator to $\simeq 45^\circ$ latitude, followed by a rise to maximum field strength near 70° latitude, in both hemispheres. The amplitude appears to fall near the poles for some activity minima, but we do not take this feature into account considering the lower reliability of high-latitude line-of-sight magnetographic measurements. While the simple axisymmetric profile

$$B_R(\theta, \phi, t_0) = B_0 |\cos \theta|^7 \cos \theta \quad (2.9a)$$

has been adopted by many authors (e.g. Svalgaard et al., 1978, Wang et al., 1989b), a curve of the form

$$B_R(\theta, \phi, t_0) = B_0^* \operatorname{erf}\left(\frac{|\cos \theta|^{11} \cos \theta}{\pi/8}\right) \quad (2.9b)$$

fits better the measurements shown in Figure 2.3. We test both functional forms in what follows. In both cases, the same amplitude B_0 is used in the two hemispheres, to ensure a zero net flux, but is kept as a seventh free parameter to be optimized along with the six physical parameters described above.

Finally, for the same reason that prevents us from using 1976 June measurements as an initial condition, we should probably not expect to reproduce the synoptic magnetogram for early cycle 21. We therefore choose to perform our optimization over the period going from 1977 June to 1986 Septembre.

2.3.3 REFERENCE CASE

As a benchmark for subsequent comparison, we first look at the behavior of our model using some typical parameter values found in the literature. Baumann et al. (2004) presented a detailed study of the effect of varying parameters on a SFT model similar to ours. For their reference case, they used a diffusivity $\eta_R = 600 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$ and a maximum meridional flow velocity $u_0 = 11 \text{ m s}^{-1}$, with the profile by van Ballegoijen et al. (1998), as illustrated in Figure 2.1. This profile can be closely approximated by our adopted profile (Equation (2.3)), by setting $q = 6$, $v = 2$, and $w = 1$. They did not use any exponential decay term, which is similar to adopting $\tau_R \gtrsim 32 \text{ yr}$ in Equation (2.2). Figure 2.2(b) illustrates the results of our SFT simulation in such a parameter regime (listed in the first column of Table 2.I), starting with the $11.5 \text{ G} |\cos \theta|^7 \cos \theta$ initial condition by Svalgaard et al. (1978).

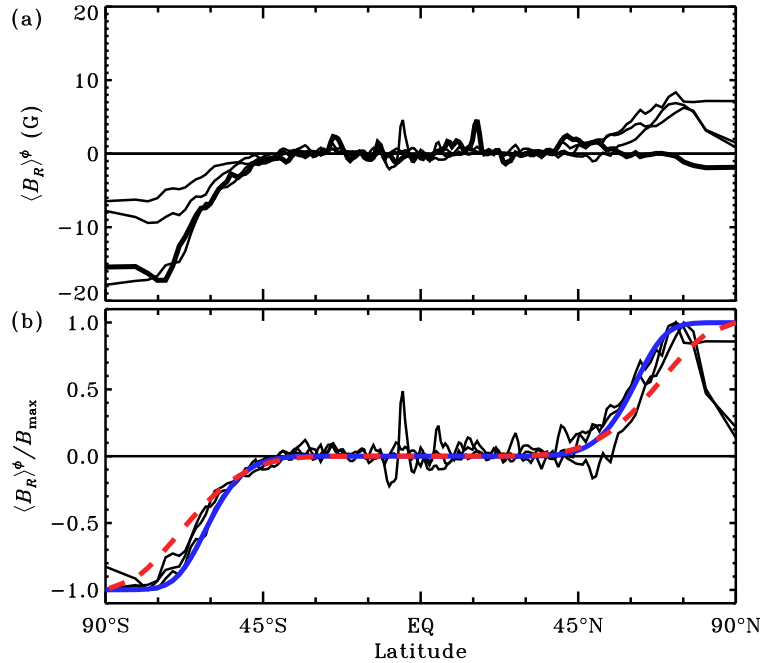


Figure 2.3 – (a) Latitudinal distributions of B_R during the last four activity minima : 1976 June (thick black) and 1986 September, 1996 May, and 2008 December (thin black). (b) Same curves, for the last three minima, but normalized to 1 in each hemisphere. Superimposed are profiles 2.9b (thick blue) and 2.9a (thick red dashed).

Visual comparison of panels (a) and (b) of Figure 2.2 is encouraging, with some typical mid-latitude flux-migration strips of the right polarity, and accumulation of polar flux at about the right time and amplitude. However, the rms deviation between this time–latitude map and its observed counterpart (Figure 2.2(a)) is $\chi_{\text{map}} = 4.9$ G, which is quite high. Moreover, an excessive quantity of opposite magnetic flux accumulates in polar regions during the second half of the cycle, with final unsigned magnetic flux reaching about twice the observed value of 10^{23} Mx at the end of the cycle (cf. black and red dashed curves in Figure 2.2(e)). The comparison worsens further when looking at the evolution of the axial dipole moment (Figure 2.2(f)) : the simulated curve diverges markedly from observations, with $\chi_D = 3.9$ G. Again, the initial axial dipole is too strong, but this does not prevent an early reversal and the building of dipolar moment in excess of the observed value by over a factor of two. This excessive transport of flux toward the poles is presumably due to a combination of a slow poleward flow at low latitudes, allowing too much of the polarity of the BMRs’ western poles to cancel at the equator, and a fast latitudinal transport of the remaining polarity at mid/high latitudes. This suggests the use of a suboptimal meridional circulation profile.

The detailed shape of flux-migration strips, evaluated using the integrated magnetic field in the transport regions T1 (Figure 2.2(g)) and T2 (Figure 2.2(h)), does not compare well to observations either ($\chi_{T1} = 1.3$ G and $\chi_{T2} = 1.5$ G). The subdued variability reveals a temporal widening of the

flux strips, likely due to an excessive surface magnetic diffusivity. Altogether, these features lead to a combined rms difference $\chi = 3.3$ G between this reference case and observations ($\chi^{-2} = 0.09$).

2.3.4 OPTIMAL SOLUTION

We perform our main optimization of the cycle 21 simulation and its seven-parameters set (hereafter W21-7), based on fitness χ^{-2} (Equation (2.7)). For each parameter, we choose an interval to be explored that is both physically meaningful and numerically stable. For instance, values of $q > 32$ and $w > 32$ tend to generate numerical instabilities due to excessive latitudinal gradients. Surface diffusivity $\eta_R < 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$ sometimes causes problems when used in conjunction with our axisymmetric transport dynamo model of the solar interior. Maximum flow speed $u_0 \in [5, 30] \text{ m s}^{-1}$ broadly corresponds to observations (e.g. Ulrich, 2010), and similarly for $B_0 \in [0, 25] \text{ G}$ (see Figure 2.3(a)). Finally, the linear term $-B_R/\tau_R$ in Equation (2.2) has virtually no effect for $\tau_R \gtrsim 32 \text{ yr}$. The intervals explored for each parameter are listed in the second column of Table 2.I.

Figure 2.2(d) illustrates one optimal solution, with maximum fitness $\chi_{\text{max}}^{-2} = 0.45$ ($\chi = 1.5$ G), significantly better than the $\chi^{-2} = 0.09$ ($\chi = 3.3$ G) obtained for the reference case. The general shape of the time–latitude map is visually similar to the reference case, but with a later polar field reversal, a magnetic cap slightly more confined to high latitudes, and a more reasonable maximum polar field of order 10 G at the end of the cycle. This translates to a rms residual $\chi_{\text{map}} = 2.6$ G, a reduction by a factor of nearly two as compared to the reference case of Figure 2.2(b). The overall unsigned magnetic flux at the end of the cycle, where observed signed flux reaches its lowest value, is also closer to the observed 10^{23} Mx (Figure 2.2(e)). These improvements are even more obvious in terms of the axial dipole moment (Figure 2.2(f)), with a curve that nicely fits the general trend of observations ($\chi_D = 0.72$ G). Mid–latitudes flux-migration strips are better defined and distinct from one another, with appropriate time–latitude inclinations. This translates into more pronounced oscillations of the integrated magnetic field in transport regions T1 (Figure 2.2(g)) and T2 (Figure 2.2(h)), in much better agreement with observed curves ($\chi_{\text{T1}} = 1.1$ G and $\chi_{\text{T2}} = 0.87$ G).

Nonetheless, despite this formal quantitative optimization, our best solution is unable to reproduce many details of the observed magnetic butterfly diagram. This means that high-frequency variations of polar magnetic fields must be either artefacts of high-latitude observations or, if real, would require the sporadic injection of magnetic flux opposite to the main trend, potentially from small flux strips, which are obviously not present in the simulations. On the other hand, most large flux strips are reproduced by the simulation, but not necessarily at the right moments. Looking in detail at transport region T1, we see : a large negative strip that crosses the region during year 1978, well reproduced by the simulation ; a second strip building progressively from early 1979 up to a peak at the end of the same year, triggering a first polar flux reversal in the northern hemisphere, but which fails to be reproduced

Tableau 2.I – Optimal Parameter Values

Symbol	Reference Value ($\chi^{-2} = 0.09$)	Tested Interval	Optimal Solution ($\chi^{-2} \in [0.42, 0.45]$)
B_0	11.5	[0, 25]	$8.5 \pm \frac{3.5}{2.5}$ G
τ_R	^a 32	[2 ¹ , 2 ⁵]	$32 \pm \frac{\infty}{25}$ yr
w	1	[1, 2 ⁵]	$8 \pm \frac{24}{4}$
v	2	[1, 2 ³]	$2.0 \pm \frac{1.5}{1.0}$
q	6	[1, 2 ⁵]	^b $7 \pm \frac{4}{3}$
u_0	11	[5, 30]	^c $12 \pm \frac{4}{2}$ m s ⁻¹
η_R	600	[10 ² , 10 ⁴]	^d 350 ± 70 km ² s ⁻¹

Notes.

^a $\tau_R \gtrsim 32$ yr is similar to removing the term $-B_R/\tau_R$ in Equation (2.2).

^b Solution for q when $v=2$. Otherwise $q=(2.8 \pm \frac{2.0}{1.1}) \cdot 2^{1.25(\log_2 v)^2}$ (optimization W21-7; see Figure 2.6).

^c Solution for u_0 when $v=2$, $q=7$, and $w=8$ (optimization W21-2). Overall solution : $u_0 \in [8, 18]$ m s⁻¹ (optimization W21-7).

^d Solution for η_R when $u_0=12$ m s⁻¹, $v=2$, $q=7$, and $w=8$. More generally, $\eta_R = (350 \pm 70) \cdot 10^{0.037(u_0-12)}$ km² s⁻¹ when $v=2$, $q=7$, and $w=8$ (optimization W21-2; see Figure 2.8). Overall solution : $\eta_R \in [240, 660]$ km² s⁻¹ (optimization W21-7).

with the correct amplitude; followed by a large positive strip in early 1981, which reverses back the polar cap field but is only slightly visible in the simulation; followed again, during year 1982, by a surge of negative flux that triggers the final polar field reversal, and finds its equivalent in two small strips in the simulation; and a small positive strip, which does not manage to reach mid-latitudes in the simulation. Transport region T2 is somehow more satisfying with a series of five distinct positive strips from 1978 to 1985, reproduced almost exactly at the right moments, but interrupted by at least three negative strips only faintly visible in the simulation. All these differences suggest that the simulation may not always transport the flux adequately from low latitudes. This could be due to a missing time dependence in the meridional flow, due, e.g., to nonlinear magnetic feedback from activity bands (Cameron et al., 2014), or to oversimplifications in our emergence procedure, in particular the slight temporal shifts induced by the use of fixed angular sizes for all emergences or the lower limit on BMR detection in WS1989’s database. The use of the SFT approximation itself also has obvious limits, in particular the assumptions of a systematic radially oriented magnetic field and of uniform diffusion rate, the latter simplification breaking down at the small scales where the advective motions of the magnetic elements occur, which can result in a small- to large-scale build-up of magnetic structures (see, e.g., Schrijver 2001).

2.3.5 PARAMETER ANALYSIS

Figure 2.4 illustrates the value of criterion χ^{-2} as a function of each parameter value, for a set of 144000 solutions obtained from six independent W21-7 optimizations (different seed populations), 500 generations each, 48 individuals per generation. In all six cases, the fitness reaches the same maximum value $\chi_{\max}^{-2} = 0.45$. Unfortunately, all parameters do not end up constrained equally tightly. As a first estimate of fitting errors, we take a look at intervals for which the maximum value of $\chi^{-2} \geq 0.445$. The corresponding parameter ranges are indicated by the thick horizontal line segments on each panel of Figure 2.4. We succeed in obtaining narrow optimal peaks for three parameters (u_0 , η_R and B_0), but not for the other four parameters (q , v , w , and τ_R).

In such a complex modeling problem, the optimal solution is only as physically meaningful as the goodness-of-fit measure being maximized by the GA. Our adopted fitness measure (Equation (2.7)) is physically motivated, but nonetheless retains some level of arbitrariness (e.g., the exact latitudinal boundaries of our “transport” regions, and equal weight given to each fitness submeasures). Clearly, there must exist a value of χ^{-2} above which solutions are physically acceptable, even if not strictly optimal. An example of such a solution, with $\chi^{-2} = 0.42$, is presented in Figure 2.2(c). It corresponds to the optimal solution obtained when minimizing only the difference between the two maps (maximum χ_{map}^{-2}). The time–latitude map, unsigned magnetic flux, and axial dipole moment look very similar to the optimal solution. The main difference lies more in the shape of the flux-migration strips, which are slightly too diffuse and thus less distinct from one another, leading to smoother curves for the integrated field in the two transport regions (thin blue line in Figure 2.2(g) and (h)). These differences appear significant enough to understand that such a solution is not as good as the optimal one, but still at the limit of acceptability in terms of observed global features.

We go one step further and examine the properties of all solutions produced by the GA that are characterized by a fitness larger than 93% of the optimal fitness χ_{\max}^{-2} . Among the 144000 solutions presented in Figure 2.4, less than 15000 satisfy this criterion, arising from various combinations of parameters inside the corresponding intervals (as delineated by the thin blue lines in the figure). The opposite is not true, however : many combinations of parameters inside these intervals still lead to inappropriate solutions that lie below the 93% line. To exclude the unacceptable solutions and assess how the acceptable ones behave inside these intervals, we explore the shape of the seven-dimensional parameter-space landscape, proceeding by pairs of parameters. Figure 2.5 illustrates ten representative cuts, among the 21 possible combinations. If all combinations of two given parameters were good enough, the corresponding rectangle would be filled with acceptable solutions. On the other hand, any empty region of a given rectangle indicates that the corresponding combination of parameters is not acceptable. In particular, the obvious trend observed between $\log_2 q$ and $(\log_2 v)^2$, with a correlation coefficient of 0.99, indicates a close linear dependence between the two parameters (of slope 1.25), and

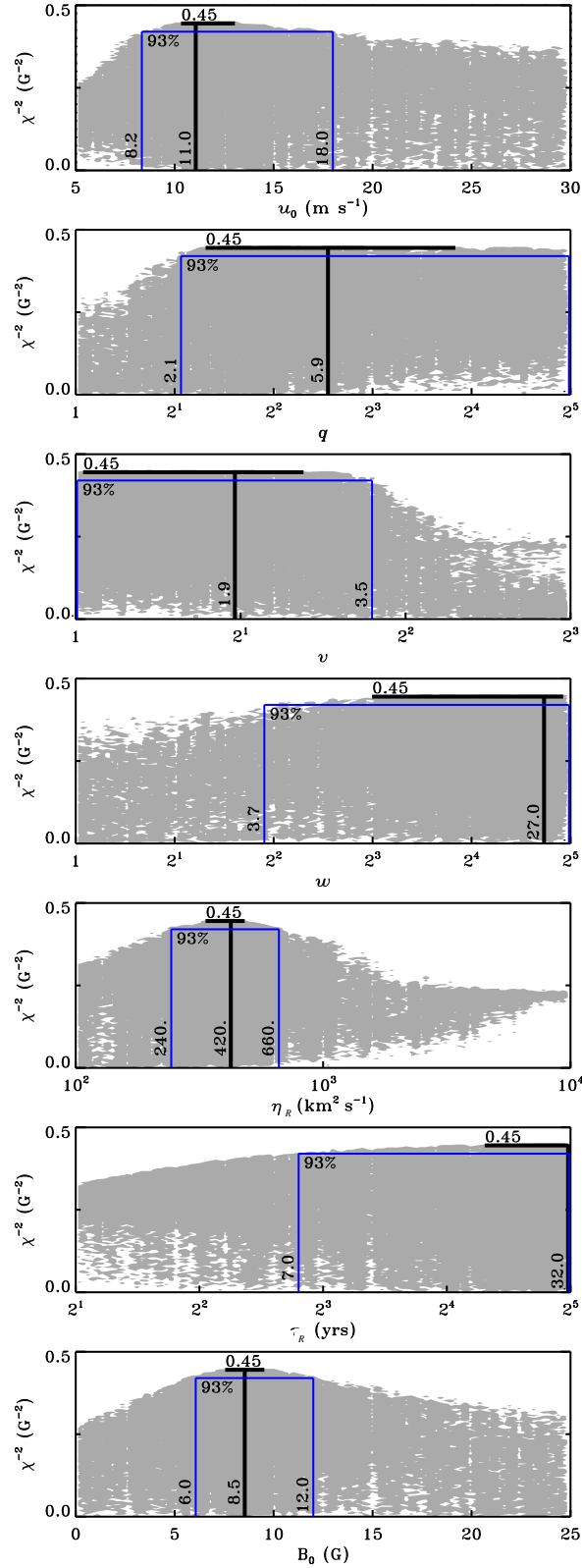


Figure 2.4 – Fitness χ^{-2} as a function of parameter values, for each of the 144000 solutions obtained from optimization W21-7 (initial condition 2.9a). On each plot, the thick horizontal line indicates the interval where $\chi^{-2} \geq 0.445$, and the thick vertical line the parameter value where true maximum fitness $\chi_{\max}^{-2} = 0.450$ is reached. Thin vertical blue lines indicate the parameter values where fitness reaches 93% χ_{\max}^{-2} , such that any solution above the horizontal blue line is considered acceptable.

that any other combination of the two parameters should be avoided. Replotting the distribution of original solutions in terms of $\log_2 q - 1.25(\log_2 v)^2$ instead of $\log_2 q$ successfully gives rise to a fourth, well-constrained parameter (Figure 2.6).

2.3.5.a Parameter B_0

The preceding set of simulations were run using profile (2.9a) as an initial condition. The bottom panel of Figure 2.4 shows an amplitude converging quite properly to $B_0 = 8.5 \pm \frac{3.5}{2.5}$ G. This initial state corresponds to an unsigned magnetic flux $F_{\text{sim}} \simeq 6 \times 10^{22}$ Mx (with negligible signed flux $\Phi_{\text{sim}} \simeq 10^{15}$ Mx) during 1976 June, to be compared with the improbable unsigned flux $F_{\text{dat}} \simeq 10^{23}$ Mx observed for the same period, but unfortunately unbalanced by $\Phi_{\text{dat}} \simeq 5 \times 10^{22}$ Mx (see Figure 2.2(e)). Independent testings of initial condition (2.9b) have also shown the solutions to converge to a maximum fitness $\chi_{\text{max}}^{-2} = 0.45$, with almost identical results obtained for each parameter, except for $B_0^* \simeq 6.6$ G. This lower value for the polar magnetic field amplitude was to be expected considering the flatter profile near the poles and corresponds, in fact, to the same unsigned flux F_{sim} . As a result, this means that our optimization does not allow us to distinguish between initial conditions (2.9a) and (2.9b), but that we can be confident that the net unsigned magnetic flux was closer to 6×10^{22} Mx than 10^{23} Mx during early cycle 21. As for the remainder of our analysis, even if profile (2.9b) seems in closer agreement with the latitudinal distribution observed at other cycle minima, we choose to stick to simplicity with the more conventional profile (2.9a). And since the only original purpose of optimizing B_0 was to ensure a suitable initial state for the optimization of other parameters, we go on with our analysis assuming profile $B_R(\theta, \phi, t_0) = 8.5 \text{ G} |\cos \theta|^7 \cos \theta$ as being representative of the solar photosphere around 1976 June. This value of $B_0 = 8.5$ G also ensures that maximum intervals are still considered for parameters u_0 and η_R , as illustrated in the corresponding plots of Figure 2.5.

2.3.5.b Parameter τ_R

Figure 2.4 (sixth panel) reveals a very smooth distribution of solutions in terms of parameter τ_R , unfortunately without any peak inside the explored domain. A wide variety of solutions lie above the $93\% \chi_{\text{max}}^{-2}$ line, meaning that various combinations of parameters with τ_R between 7 and 32 yr can lead to acceptable solutions. In fact, this parameter was expected to be difficult to constrain from the optimization of a single solar cycle, though Yeates (2014) finds a value of 10 yr to better reproduce the evolution of cycle 23 and early cycle 24. We must recall that parameter τ_R , with a value of 5 – 10 yr, was found by Schrijver et al. (2002) to be required in the equation of SFT to allow some exponential decay of accumulated flux, and thus allow polarity reversals even when two subsequent cycles have markedly different amplitudes. Since our optimization process appears unable to constrain the parameter, we opt to use $\tau_R = 32$ yr for the remainder of the present analysis, which

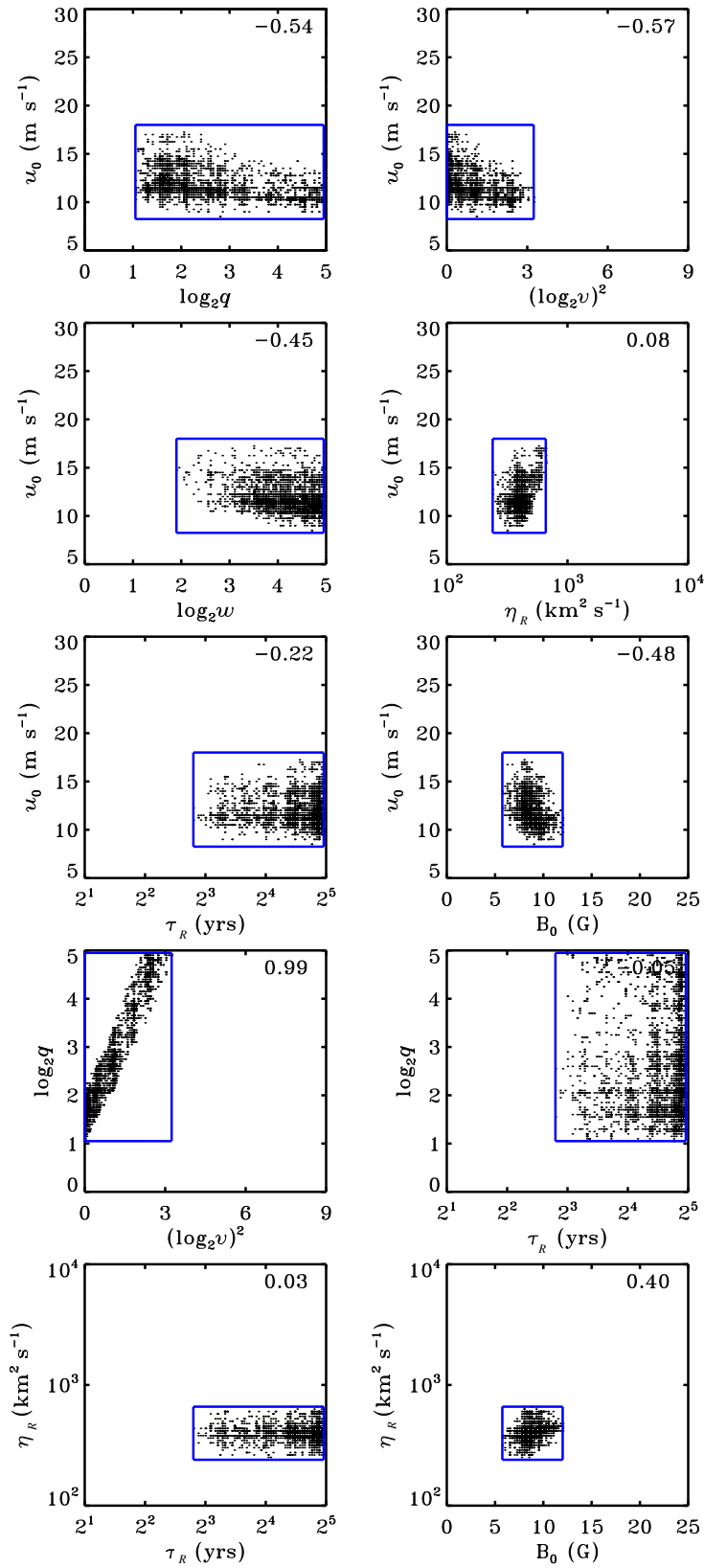


Figure 2.5 – Distribution of $\simeq 15000$ acceptable solutions extracted from Figure 2.4, in ten two-dimensional cuts of the seven-dimensional parameter space. Parameter $(\log_2 v)^2$ was plotted instead of $\log_2 v$ for a better visualization. Blue boxes delimit those solutions in terms of acceptable intervals for each parameter. Also shown are the corresponding the Pearson's linear correlation coefficients.

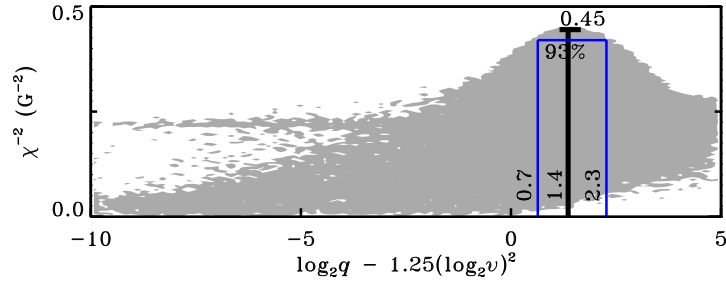


Figure 2.6 – Distribution of the 144000 solutions tested, as in Figure 2.4, but now in terms of a combination of parameters q and v .

is approximately equivalent to simply doing away with the linear term $-B_R/\tau_R$ in Equation (2.2).

2.3.5.c Meridional circulation profile

The second, third, and fourth panels of Figure 2.4 also reveal a wide variety of solutions above 93% χ_{\max}^{-2} for parameters q , v , and w ($q \in [2, 32]$, $v \in [1.0, 3.5]$, $w \in [4, 32]$), suggesting that our optimization is rather bad at constraining our sophisticated latitudinal profile (Equation (2.3)). Fortunately, the strong correlation observed between $\log_2 q$ and $(\log_2 v)^2$ (Figure 2.5) and the fairly narrow peak obtained for $\log_2 q - 1.25(\log_2 v)^2$ (Figure 2.6), reveal that one of those three parameters can be, in fact, rather well constrained. The result is a parameter q that is restricted to $2.8 \pm \frac{2.0}{1.1}$ when $v = 1$

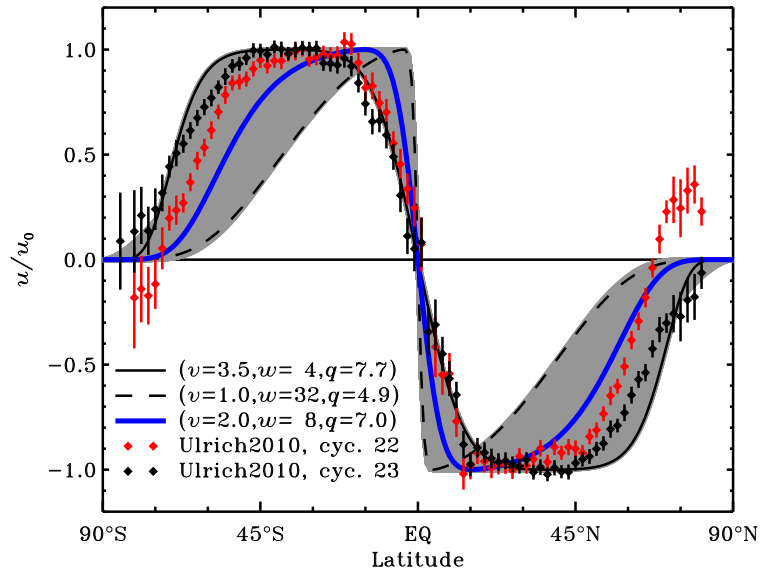


Figure 2.7 – Our optimal meridional circulation surface profile (thick blue curve), with shaded area illustrating all possible curves within the error bars listed in Table 2.I. Thin continuous and dashed black lines indicate some sample extreme solutions. Red and black dots and error bars illustrate average measurements for cycles 22 and 23, respectively, as obtained by Ulrich (2010). All curves are normalized with respect to maximum flow speed u_0 .

and up to $\gtrsim 30$ when $v = 3.5$. Generally formulated, this gives $q = (2.8 \pm \frac{2.0}{1.1}) \cdot 2^{1.25(\log_2 v)^2}$. The effect is a surface flow that tends to drop to zero before reaching the poles, usually between 70° and 80° latitude, regardless of the value of v (see Figure 2.7). This allows the build-up of magnetic polar caps that are not too confined near the poles. Such high-latitude behavior is compatible with meridional flow profiles by van Ballegooijen et al. (1998) and Wang et al. (2002b) (see Figure 2.1).

Furthermore, the interval obtained for parameter $w \in [4, 32]$ is not as unconstraining as it may appear. It corresponds to a latitudinal flow that reaches its peak speed between 4° and 25° latitude, which is actually a noteworthy result since it excludes many typical profiles used in the literature⁷ that tend to peak at or near mid-latitudes (e.g., Dikpati & Charbonneau, 1999, Komm et al., 1993), in particular the profile by van Ballegooijen et al. (1998) used earlier as a reference case. This quick rise of the flow speed between the equator and 4° – 25° latitude seems to be required to prevent too large a cross-hemispheric cancellation of the BMRs’ western flux, and thus too large a net flux to be transported to higher latitudes, as happened in the reference case.

The dominant uncertainty that remains in our surface circulation profile concerns parameter v , whose solutions between 1 and 3.5 correspond to a surface flow peak that has respectively no extent in latitude (rapid rise from the equator to 4° – 25° latitude and immediate decrease) or a width up to 45° (rapid rise from the equator to 4° – 25° latitude, followed by a plateau up to 49° – 55°). This result is obviously imprecise since it constrains rather poorly the flow speed between $\simeq 25^\circ$ and $\simeq 70^\circ$ latitude (see Figure 2.7). This is quite surprising since these latitudes harbor the “transport regions” where flux-migration strips build up.

The problem is partly alleviated by the uncertainty in the maximum flow speed u_0 . As can be seen in the top right panel of Figure 2.5, the allowed interval for u_0 varies from $9 - 17 \text{ m s}^{-1}$ when $v = 1$ to $10 - 12 \text{ m s}^{-1}$ when $v \simeq 3.5$. The resulting flow speed in the transport regions (latitudes 34° – 51°) ends up being more dependent on u_0 than v , with values of $3 - 14 \text{ m s}^{-1}$ when $v = 1$ to $9 - 12 \text{ m s}^{-1}$ when $v \simeq 3.5$. The uncertainty obviously remains substantial, and since it is unlikely that the latitudinal flow speed does not influence the shape, especially the inclination, of flux-migration strips, this result means either that the calculation of average magnetic field $\langle B_R \rangle^{T1, T2}$ in the transport regions is not a sufficiently restrictive way to characterize these shapes or that the discrepancies between the observed and simulated curves of $\langle B_R \rangle^{T1, T2}$ are too large to allow a selective comparison. Nonetheless, the mid-latitude features observed in Figure 2.2(c) and 2.2(d) do fit better than those of the reference case (Figure 2.2(b)). The solution must therefore come from a delicate equilibrium between advection and diffusion.

Figure 2.7 plots the whole variety of acceptable latitudinal profiles described above in the form of a shaded area. Also superimposed on the figure are average Doppler measurements provided by Ulrich (2010) for cycles 22 and 23. Apart from some high-latitude equatorward flow observed for cycle

⁷ *Post-publication note* : “or observed on the Sun”

22, which we deliberately opt to ignore, all measurements fit quite nicely inside the optimal shaded area. More specifically, measurements for cycle 22 can be well approximated below $\simeq 65^\circ$ latitude by a ($v = 2.7, w = 4, q = 11$) curve, and cycle 23's pattern up to $\simeq 75^\circ$ latitude by a ($v = 2.7, w = 4, q = 5$) curve. In terms of amplitude, cycle 22's smoothed trend peaks near $14 - 15 \text{ m s}^{-1}$ while that of cycle 23 peaks closer to 16 m s^{-1} . In both cases, the two hemispheres are not perfectly symmetric. All these values fit adequately inside, or at the limit of, the optimal intervals listed in Table 2.I⁸.

The completion of our analysis now requires the selection of a final representative profile for cycle 21. To remain independent from direct meridional flow measurements, we instead choose some reasonable profile that lies near the middle of the optimal region. A value of $w = 8$ seems reasonable in terms of peak flow latitude (15°) and near-equator latitudinal gradient, and prevents numerical instabilities that could occur at low spatial resolution with higher values of w . With parameter $v = 2$, the fast low-latitude flow slows down only slightly up to $\simeq 45^\circ$ latitude, an apparently good compromise between a purely peaked profile and a broad sustained plateau. This leaves the allowed interval $[4, 11]$ for parameter q , with a peak at $q = 7$, for a final drop to zero speed near $70^\circ - 75^\circ$ latitude. This final profile is shown in blue in Figure 2.7.

2.3.5.d Maximum flow amplitude and magnetic diffusivity

Although Figure 2.4 shows clear optimal peaks for parameters u_0 and η_R , a wide variety of solutions in the intervals $u_0 \in [8, 18] \text{ m s}^{-1}$ and $\eta_R \in [240, 660] \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$ do not reach the $93\% \chi_{\max}^{-2}$ line. Considering the various interdependences illustrated in Figure 2.5, we opt to perform a last cycle 21 optimization, called W21-2, using the fixed meridional circulation profile chosen above and only u_0 and η_R as free parameters. We cover the whole domain with 10000 solutions and obtain the two-dimensional landscape illustrated in Figure 2.8.

The maximum fitness obtained lies 1% lower than the original $\chi_{\max}^{-2} = 0.45$, due to the use of a slightly suboptimal $w = 8$ in our final surface flow profile. Nonetheless, a clear peak rises above the $93\% \chi_{\max}^{-2}$ ring, within the intervals $u_0 \in [10, 16] \text{ m s}^{-1}$ and $\eta_R \in [250, 500] \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$. These values both roughly correspond to those found in the literature, though η_R does not include the $600 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$ used in the reference case and typical of many studies (e.g. Mackay et al., 2002, Wang et al., 1989b). The acceptable combinations of the two parameters form an elongated ridge, already noticeable in the equivalent plot of Figure 2.5, now with a much higher linear correlation of 0.81. This positive interdependence illustrates the aforementioned delicate balance between advection and diffusion. In fact, a faster latitudinal flow gives less time for cancellation to occur between opposite polarities of the BMRs before they reach the poles, thus requiring a higher diffusivity. Similarly, mid-latitude flux strips will keep the same width with a higher diffusivity, provided the flux is transported more quickly.

⁸*Post-publication note* : Other recent observed profiles, such as those obtained from magnetic element tracking by Rightmire-Upton et al. (2012), also show approximate concordance with our optimal intervals.

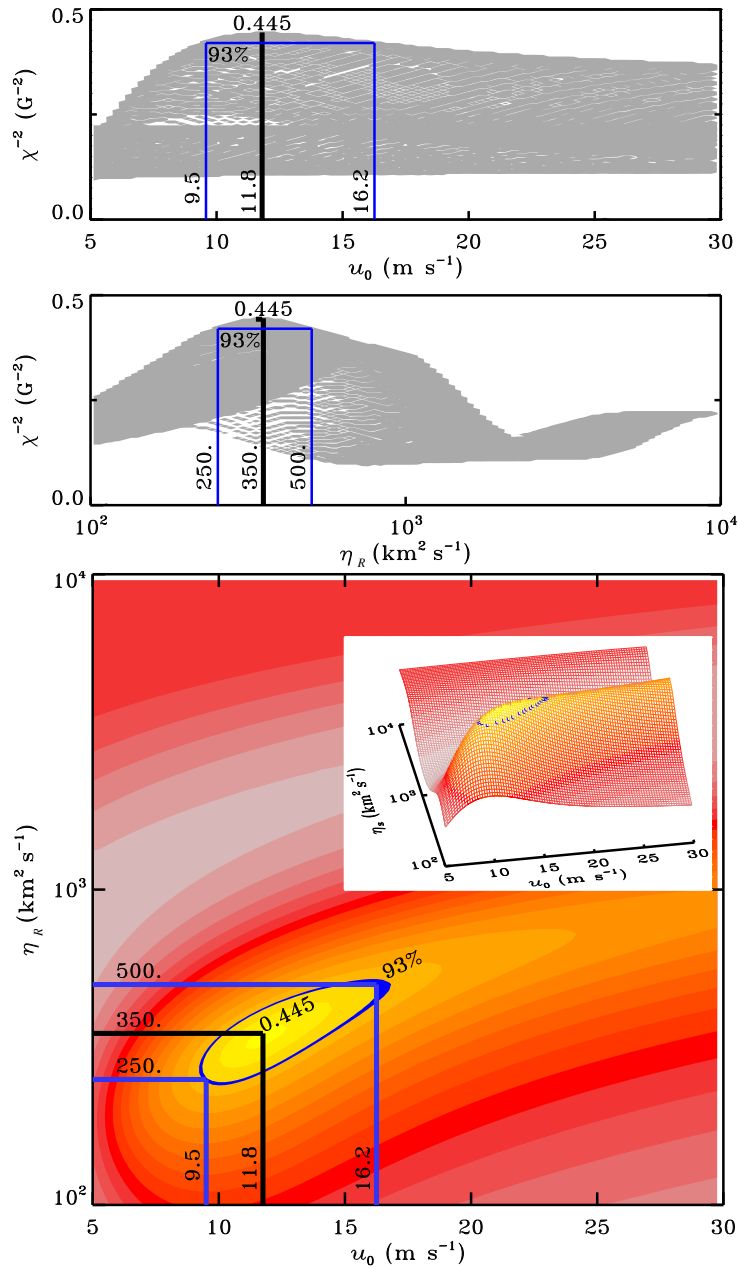


Figure 2.8 – Fitness χ^{-2} as a function of parameters u_0 and η_R , from optimization W21-2. Thick black lines indicate the position of the best solution. Thin vertical blue lines indicate the parameter values where fitness reaches $93\% \chi_{\max}^{-2}$, such that any solution above the blue line or inside the blue ring is considered acceptable.

This balance is also required at the poles, where a stronger flow would squeeze the magnetic cap to higher latitudes if it were not for a higher diffusivity.

The best linear fit to this final restrained region gives a slope of 0.037, such that parameters u_0 and $\log \eta_R - 0.037 u_0$ are nearly independent. As a final numerical constraint to those two parameters, we have $u_0 = 12 \pm \frac{4}{2} \text{ m s}^{-1}$ and $\eta_R = (350 \pm 70) \cdot 10^{0.037(u_0 - 12)} \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$, with an overall range of

[250, 500] km² s⁻¹ for η_R . These intervals correspond to a magnetic Reynolds number $R_m = 24 \pm \frac{6}{5}$.

These numerical values overlap with results obtained in analyses of advection–diffusion-based SFT simulations by Wang et al. (1989b) and Wang & Sheeley (1991), who found values of $\eta_R = 600 \pm 200$ km² s⁻¹ and $u_0 = 10 \pm 3$ m s⁻¹ to be required for reproducing the evolution of polar field strengths, dipole strengths, and large-scale open magnetic flux, as well as values of $\eta_R = 600$ km² s⁻¹ and $u_0 = 11$ m s⁻¹ used by Baumann et al. (2004) as a reference case. However, their latitudinal flow profiles are to be excluded by the interval of optimal profiles described above. On the other hand, Wang et al. (2002b) found $\eta_R \simeq 500$ km² s⁻¹, with a surface flow profile (see Figure 2.1) that fits the optimal constraints detailed in Table 2.I, but an amplitude $u_0 \simeq 20 - 25$ m s⁻¹ that is definitely outside of our fitted boundaries. Alternatively, random-walk-based surface flux evolution models tend to lead to smaller diffusion coefficients (see, e.g., Schrijver (2001) who found $\eta_R \simeq 300$ km² s⁻¹, and Thibault et al. (2014) who used $\eta_R \simeq 416$ km² s⁻¹) Furthermore, for the lower range of u_0 , our result for η_R overlaps with indirect measurements by, e.g., Mosher (1977) and Komm et al. (1995) who obtained values in the range $\simeq 100 - 300$ km² s⁻¹ (see also Schrijver & Zwaan 2000, Table 6.2, for a compilation of published diffusion coefficients). Last, but certainly not least, our optimal meridional flow amplitude is in agreement both with the tracking of surface magnetic features by Komm et al. (1993)⁹ ($u_0 \simeq 13.2$ m s⁻¹) for cycle 21 and with Doppler determinations of Ulrich (2010) ($u_0 \simeq 14 - 16$ m s⁻¹) for cycles 22 and 23.

2.3.6 VARIABLE MERIDIONAL FLOW

In § 2.3.4 we explained how even our optimal solution does not perfectly reproduce some of the polar surges and mid–latitude flux strips observed for cycle 21. While we have already explored in detail the possible latitudinal variations of the meridional flow speed, one explanation for the discrepancies could come from some temporal variability. Such time dependence of the flow is in fact observed (see, e.g., Ulrich 2010)¹⁰, both in amplitude and shape.

We use our optimization procedure to test for possible improvements to the best-fit solution by allowing for temporal variations of the meridional flow amplitude. We opt for a piecewise-continuous representation of the flow parameter u_0 , by successively separating the cycle into $M = 2$, $M = 4$, and $M = 8$ contiguous segments of equal duration, each such interval having its own value $u_{0,m}$. As in the previous W21-2 analysis, we keep the initial condition (B_0), decay time (τ_R), and meridional flow profile (parameters q , v , and w) fixed, while optimizing the two, four, or eight values for $u_{0,m}$ along with the supergranular diffusivity η_R .

The addition of more temporal intervals successively improves the overall fitness χ^{-2} , by up to 3% ($\chi^{-2} \leq 0.46$). As expected, the improvement is mostly noticeable in sub-criteria χ_{T1}^{-2} and χ_{T2}^{-2} ,

⁹ *Post-publication note* : (see also Rightmire-Upton et al. 2012)

¹⁰ *Post-publication note* : (see also Hathaway & Rightmire 2010, 2011)

which measure the shape of mid-latitude inclined strips. However, the additional degrees of freedom in the optimization process also worsen parameter degeneracies; the values of $u_{0,m}$ end up simply unconstrained for most of the temporal intervals. These optimization experiments do indicate that the value of u_0 in the first half of the cycle is most critical, because it is constrained adequately, but no robust intra-cycle temporal trend can be extracted from the fitting. Note, however, that in all cases the resulting optimal interval for parameter η_R remains essentially the same as obtained earlier from the W21-2 optimization. The availability of uniform emergence databases for other activity cycles may allow, in the future, an extension of the present study over multiple solar cycles, and perhaps the extraction of statistically significant temporal dependences in the meridional flow amplitude.

2.4 EMERGENCE-RELATED VARIABILITY

Extensive studies (e.g., Cameron et al. 2014, and references therein) have shown that details of the emergence of individual BMRs can have a strong impact on global cycle properties; this is hardly surprising considering that a single large BMR contains about as much magnetic flux as the polar caps at cycle minimum. In order to quantify the effects of the specific realization of bipolar emergences during a given solar cycle, as compared to the overall statistics of those emergences, we develop a Monte Carlo procedure generating synthetic databases of BMRs, respecting the statistical properties characterizing latitudinal and area distributions of emergences as a function of solar cycle amplitude, as established on the basis of the temporally extended photographic records from the Royal Greenwich Observatory (RGO), the US Air Force (USAF), and the National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA). The required additional magnetic properties are synthesized using the statistical distributions of magnetic fluxes, angular separations, and east-west tilts characterizing WS1989's database. Appendix 2.A describes in detail the required analyses. The end product is a Monte Carlo engine that can generate statistically independent realizations of BMR emergences using as the only input the monthly value of the International Sunspot Number (SSN) and the amplitude and length of the activity cycles we aim to model.

Accordingly, we compare the results of the SFT simulation based on synthetic realizations of cycle 21, with those previously obtained with the real emergences compiled by WS1989. We generate $\simeq 1000$ such independent synthetic realizations, using the optimal model parameter values previously obtained for cycle 21 (Table 2.I) to compute the resulting surface magnetic flux evolution. Only three (0.3%) among the thousand simulations based on synthetic emergences lead to synthetic magnetograms resembling observations sufficiently to reach our former acceptable limit of $93\% \chi_{\max}^{-2} = 0.42$.

Criterion χ (Equation (2.7)) was elaborated with the aim of constraining the SFT simulation

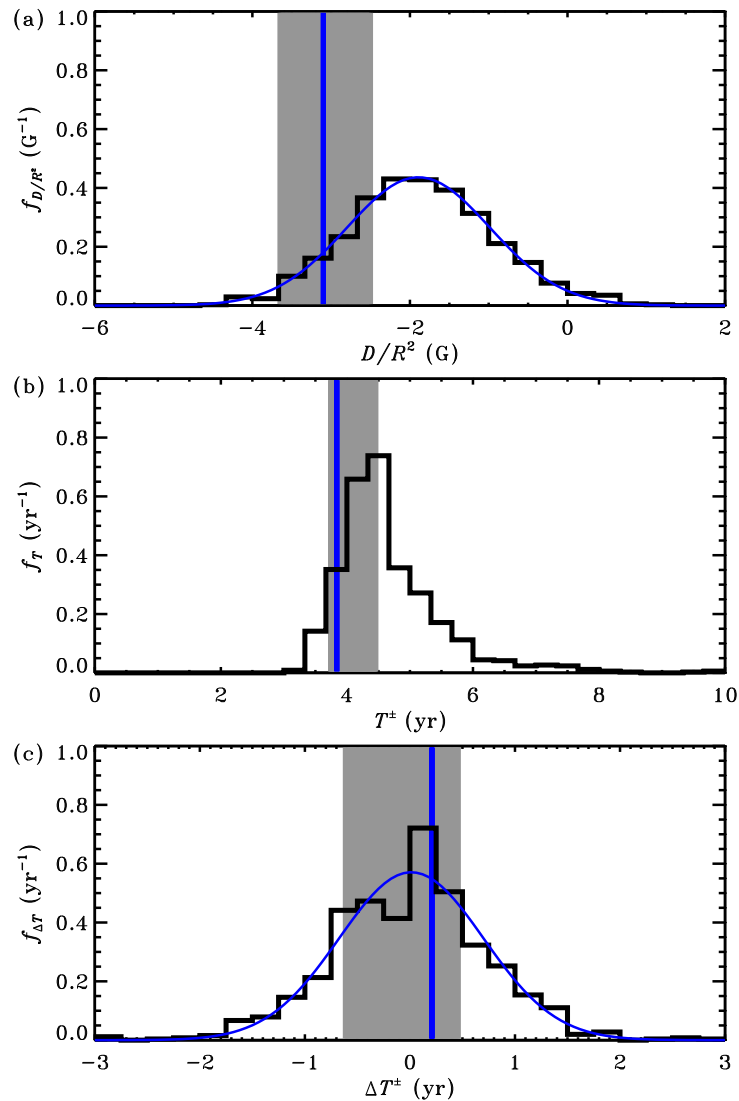


Figure 2.9 – PDFs (thick black histograms) of (a) axial dipole moment at the end of cycle 21, (b) time required for polarity reversal, since the beginning of cycle 21, and (c) delay between polarity reversals in the northern and southern hemisphere, for $\simeq 1000$ databases of synthetic emergences for cycle 21 generated from independent random sequences. Superimposed on (a) and (c) are best gaussian fits (thin blue lines). Each plot also shows the corresponding values extracted from our optimal solution (vertical blue line; see Figure 2.2(f)), as well as intervals (shaded gray area) covered by acceptable solutions in terms of criterion (2.7) (see Table 2.I).

to reproduce the details of synoptic magnetograms. We should perhaps not count on a synthetic realization of cycle 21 to perform very well in this respect, but it is still reasonable to expect some of the overall trends and global cycle properties to be reproduced in a probabilistic sense. We consider here the following three quantities : the axial dipole moment at the end of cycle 21 (D_{end}^*), the timing of polarity reversal of the axial dipole moment (T^\pm), and the delay between polarity reversals in the northern and southern hemispheres (ΔT^\pm). In Figure 2.9, we plot their probability density functions (PDFs), built from the thousand synthetic realizations generated earlier. In parallel, we

also compute the same three quantities, for a few hundred simulations using the WS1989 emergence database, but now with the parameter values for the SFT model extracted randomly in the intervals given in Table 2.I. The resulting ranges obtained for D_{end}^* , T^\pm , and ΔT^\pm are indicated by the shaded areas in Figure 2.9.

The PDF of D_{end}^* based on synthetic emergences is Gaussian-shaped, with a peak probability at -1.9 G and a standard deviation of 0.9 G. This distribution clearly overlaps with the range of optimal cycle-21-like solutions, which confirms that the synthetic databases are able to reproduce the observed axial dipole moment. However, most realizations of synthetic emergences end up building a weaker axial dipole moment than the $D_{\text{end}}^* = -3.1 \pm 0.6$ G covered by acceptable solutions for the real cycle 21.

The distribution for the time T^\pm of polarity reversals in our synthetic cycle 21 peaks near 4.7 yr, with a standard deviation of $\simeq 1.0$ yr, and an asymmetric shape suggesting that polarity reversals are more difficult to hasten than to delay. The optimal solutions ($T^\pm = 3.8 \pm 0.6$ yr), and presumably the real cycle 21, now lie closer to the peak of probability. The few simulations that show a highly delayed or even no reversal ($T^\pm \rightarrow 10$ yr in Figure 2.9(b)) correspond to those with a weaker or even positive axial dipole moment at cycle minimum ($D_{\text{end}}^* \simeq 0$ G on Figure 2.9(a)).

Finally, the distribution of ΔT^\pm indicates that hemispheres tend to be in phase or nearly so in most simulations, as for the observed cycle 21, but still with a standard deviation of 0.7 yr.

We conclude from this exercise that uncertainties in global cycle characteristics are dominated by the inherent stochasticity of the flux emergence process, rather than by uncertainties related to model calibration. This inherent stochasticity is therefore what is likely to limit the predictive capability of any dynamo-based solar cycle prediction schemes, highlighting the need for appropriate data assimilation procedures, and dynamo models suitably designed toward this end.

2.5 CONCLUSIONS

We have reported in this paper on the design of the surface component of a coupled surface–interior BL dynamo model of the solar cycle, including a latitudinally and longitudinally resolved representation of the solar photospheric magnetic field. Specifically, we used a genetic algorithm to evolve a surface magnetic flux evolution model providing an optimal representation of a surface synoptic magnetogram. Our procedure is robust, in that it can operate in multimodal parameter spaces and escape secondary extrema. It also returns useful error estimates on all best-fit parameters, and allows the identification of any correlations between these parameters.

An essential input to any surface magnetic flux evolution model is the characterization of emerging

BMRs in the course of an activity cycle : their time of emergence, latitude and longitude, magnetic flux, pole separation, and tilt with respect to the east–west direction. Wang & Sheeley (1989) have assembled an appropriate database for cycle 21, covering the period 1976 August to 1986 April, which they kindly made available to us. The optimization of our magnetic flux transport model was therefore carried out using this database, over that same time period.

The optimal solution is characterized by a surface magnetic diffusivity intrinsically correlated with the amplitude of the surface meridional flow speed, that is $\eta_R = (350 \pm 70) \cdot 10^{0.037(u_0-12)} \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$ for $u_0 = 12 \pm \frac{1}{2} \text{ m s}^{-1}$. This interval of solutions for η_R is in agreement with analyses by, e.g., Wang et al. (1989b), Wang et al. (2002b), Schrijver (2001), Dikpati et al. (2004), and Cameron et al. (2010), and, for the lower range of u_0 , is also compatible with indirect measurements by Mosher (1977) and Komm et al. (1995). The meridional flow amplitude is in agreement both with the tracking of surface magnetic features by Komm et al. (1993)¹¹ and with Doppler determinations of Ulrich (2010). The latitudinal dependence of the optimal surface meridional flow profile is found to be in good agreement with Ulrich (2010)’s measurements, even though these data are not used in the optimization process. This provides an independent validation of our best-fit models. While the latitudinal profile of the surface meridional flow is not entirely constrained by our fitting procedure, it is sufficiently limited to exclude a number of latitudinal profiles commonly used in extant flux transport models.

Prior modeling work has demonstrated quite clearly that the global aspects of surface magnetic flux evolution over an activity cycle, in particular the timing of the polarity reversals and strength of the dipole moment at the end of the cycle, are sensitively dependent on details of magnetic flux emergence, and in particular on the frequency and properties of large BMRs emerging close to the equator (Cameron et al., 2014). In this respect, the observed cycle 21 represents one possible realization of an activity cycle. Using the unified sunspot group database of D. Hathaway as well as the aforementioned database of Wang and Sheeley, we designed a Monte Carlo simulation of BMR emergence in which emergence statistics are tailored to reproduce observed statistics. Our overall procedure is similar to that presented in Jiang et al. (2011) but differs in a number of significant details. We used this Monte Carlo procedure to generate a large set of synthetic realizations of cycle 21. This allowed us to quantify the degree to which global surface magnetic flux evolution is impacted by idiosyncrasies of BMR emergences. The timing of polarity reversals and the associated time delay between solar hemispheres are both fairly robust (standard deviations of 1.0 yr and 8 months, respectively), with mean values close to those obtained for the observed cycle 21. The dipole moment at the end of the cycle, on the other hand, shows greater variability, $D_{\text{end}}^* = -1.9 \pm 0.9 \text{ G}$, with a mean value significantly smaller than that of the observed cycle 21 ($D_{\text{end}}^* = -3.1 \pm 0.6 \text{ G}$ for the set of acceptable best-fit models).

In the following paper in this series (A. Lemerle & P. Charbonneau 2015, in preparation), we couple the calibrated surface transport model discussed herein to a kinematic axisymmetric mean-

¹¹*Post-publication note* : (see also Rightmire-Upton et al. 2012)

field-like flux transport dynamo model. With the surface flux model effectively providing a BL-like source term through the upper boundary condition on the dynamo model, and the latter providing emergences to feed the former, there results a working solar cycle model where the stochasticity in surface flux emergence and transport self-consistently feeds back into the dynamo loop. This represents a unique analysis tool toward the understanding of the origin of solar cycle fluctuations, as well as a computational framework ideally suited for assimilation of magnetographic data toward cycle prediction.

ACKNOWLEDGMENTS

We wish to thank Yi-Ming Wang and Neil R. Sheeley, Jr. for kindly providing us with their comprehensive database of bipolar emergences for cycle 21, David H. Hathaway for his magnetic butterfly diagram data, and Roger Ulrich for his compilation of latitudinal flow measurements and error estimates. This research was funded by a doctoral research scholarship of the Fonds de Recherche du Québec Nature et Technologies (A. L.), and a summer research scholarship (A. C.-D.) and the Discovery Grant Program (P. C.) of the Natural Science and Engineering Research Council of Canada. Calculations were performed on Calcul Québec’s computing facilities, a member of Compute Canada consortium.

APPENDIX

2.A SYNTHETIC DATABASE

The detailed analyses presented in § 2.3 were made possible by the availability of the WS1989 emergence database, which provides the input required for our SFT simulation : times of emergence, heliographic positions, tilts, separations, magnetic fluxes, and polarity. To the best of our knowledge, no similarly comprehensive emergence database is currently available for other sunspot cycles (but do see Yeates 2014).

A workaround lies in building a synthetic database grounded on observed statistics, rather than real individual magnetic emergences. A suitable long-term record of daily observations of sunspots groups has been assembled by David Hathaway, at the Marshall Space Flight Center¹², combining an old record (1874-1976) from the RGO with more recent data from the USAF and the NOAA. Following in essence the approach described in Jiang et al. (2011), we start our analysis by an exploration of this non-magnetic database to extract the statistical behavior of the position and umbral area of sunspot

¹²<http://solarscience.msfc.nasa.gov/greenwch.shtml>

groups as a function of time, and link it to the more temporally extended monthly SSN. To consider each group only once, we extract its properties when it reaches maximum area. We finally arrive at a synthetic magnetic database by statistically filling the gap between RGO–USAF–NOAA and WS1989 databases.

2.A.1 NUMBER OF EMERGENCES

Our aim is to construct a synthetic database of sunspot groups, and hence BMRs, generated solely from the smoothed monthly value of the SSN (R_Z), as well as the corresponding n th cycle amplitude, given by the maximum value of R_Z inside the cycle ($R_Z^{\max}_n$), and length (L_n), where cycles are delimited by times of minimum activity as obtained from the average of three solar indexes by Hathaway (2010) (see vertical dashed lines in Figure 2.10). A first step would be to determine the number of sunspot groups (N_m), and indirectly the number of BMRs, to emerge during a given month. By definition, R_Z is related nonlinearly to N_m , and a direct linear correlation between the two quantities is thus unlikely to be good. Instead, we find a much better linear correlation between R_Z and the monthly total area A_m of those N_m emerged groups. The upper middle and right panels of Figure 2.10 show the good linear correlation that exists between RGO’s A_m and R_Z ($r = 0.96$), especially when considering their respective 13 month running mean ($r = 0.99$). The best linear fit to these data, with an intercept forced to zero, gives

$$A_m = 78R_Z \text{ (}\mu\text{Hem)} . \quad (2.10)$$

In comparison, the N_m vs R_Z data plotted in the top left panel of the same figure shows a poorer fit, with a linear correlation coefficient $r = 0.91$ ($r = 0.95$ for the corresponding 13 month running means), with a quadratic curve fitting the data around 25% better than a linear one, in terms of rms deviation.

Focusing on the A_m vs R_Z trend, we look at the effect of extending the RGO (1876–1976) sequence with USAF–NOAA (1977–2013) data. Superimposed on the upper middle panel of Figure 2.10 are the 13 month running means of the USAF–NOAA A_m values plotted against the 13 month running mean of R_Z for the same period. A linear fit to these uncorrected data gives a slope of 52 μHem , which is precisely 2/3 of the RGO slope. This result is in close agreement with Hathaway (2010, § 3.2), who indicates that USAF–NOAA’s areas should be multiplied by a factor 1.48 in order to match RGO measurement standard. The top right panel of Figure 2.10 shows the 13 month running mean of the corrected A_m plotted against the 13 month running mean of R_Z , now with an rms deviation from RGO’s fit that is more than five times better than for raw USAF–NOAA’s areas.

The bottom panel of Figure 2.10 shows the superimposed temporal evolution of R_Z and A_m , both smoothed and unsmoothed, with the correction factor of 1.5 used for the 1977–2013 USAF–NOAA sequence.

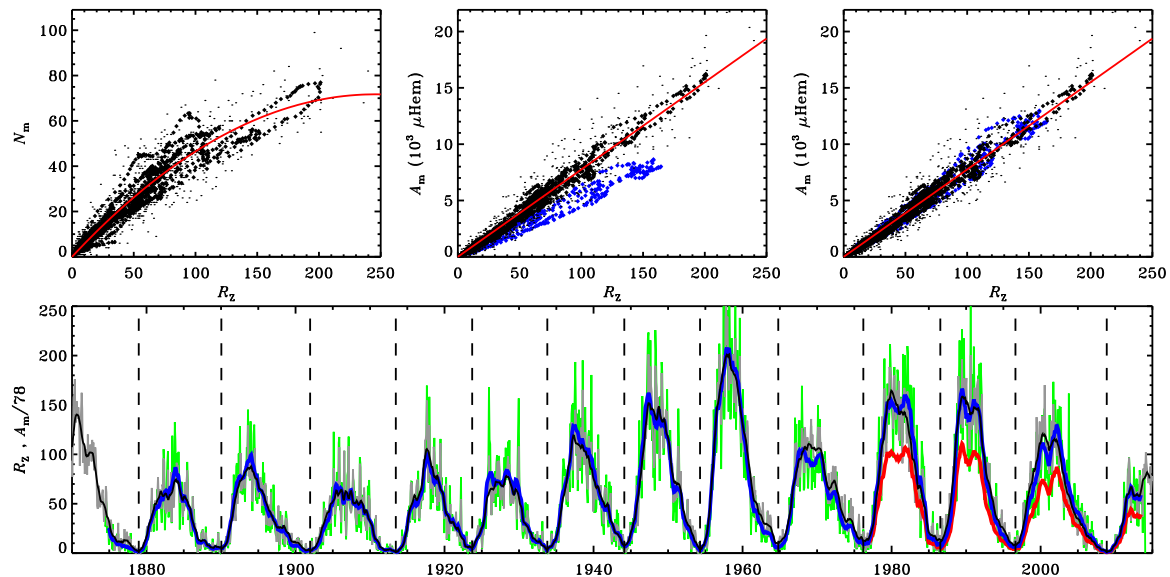


Figure 2.10 – Top left panel : actual number of emergences N_m during a given month of the RGO data plotted against monthly SSN R_Z (small dots) ; corresponding 13-months running means (thick dots) ; and best quadratic fit to these last (red line). Center panel : total area A_m of all emergences during a given month of the RGO data plotted against R_Z (small black dots) ; corresponding 13-months running means (thick black dots) ; best linear fit to these last (red line) ; and 13-months running mean of USAF-NOAA A_m plotted against the 13-months running mean of R_Z (thick blue dots). Top right panel : same as center panel, but with USAF-NOAA areas multiplied by 1.5. Bottom panel : temporal evolution of R_Z (thin grey), its 13-months running mean (thin black), RGO A_m (1876-1976) followed by USAF-NOAA areas (1977-2013) corrected by a factor 1.5 (thin green), the corresponding 13-months running mean (thick blue), and the uncorrected USAF-NOAA areas (thick red). Vertical dashed lines indicate the times of solar cycle minima.

2.A.2 AREA DISTRIBUTION

We now examine the distribution of areas of RGO and USAF-NOAA sunspot groups. The top panel of Figure 2.11 illustrates the PDF of A , computed from regular bins in $\log A$. Following Bogdan et al. (1988), we carry out a log-normal fit to this distribution over the full range of measured areas, which yields a rms residual three times lower than a power-law fit over the restricted interval going from 10 to 300 μHem , as done in Jiang et al. (2011). Note, however, that in this restricted interval the log-normal fit provides a somewhat poorer fit than the power law. We opt to retain the log-normal fit because it does much better at the high end of the size spectrum, a proper representation of which is critical for the overall surface flux evolution.

We also analyze the PDF of A for individual cycles. A simultaneous optimization of the mean ($\log A_0$) and standard deviation ($\sigma_{\log A}$) of the individual log-normal distributions reveals no net tendency for $\log A_0$, neither with respect to cycle amplitude nor length. However, when fixing $\log A_0 = 1.75$, as obtained from the preceding best fit to the whole data set, the standard deviation shows a significant dependence on cycle amplitude. We find a linear correlation $r = 0.80$ between $\sigma_{\log A}$ and the

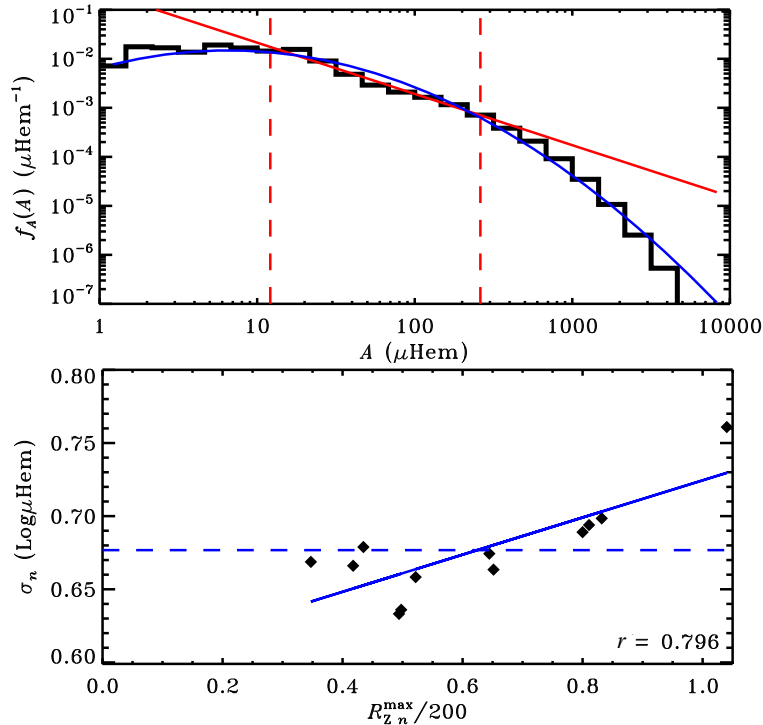


Figure 2.11 – Top panel : PDF of A for all RGO and corrected USAF–NOAA combined, between 1 and 6132 μHem , binned every $\log A = 0.2$ and properly normalized such that $\int f_A(A) dA = 1$. Superimposed is a log-normal best fit, for all bins with more than ten counted sunspot groups (blue line), as well as a fitted power law between 10 and 300 μHem (red line). Bottom panel : standard deviations of the log-normal best fits to the PDFs of A for individual cycles, from $n = 12$ to 23, plotted against the corresponding normalized cycle’s amplitude A_m^{\max} (black dots). Superimposed are the average of the 12 values (dashed blue line), the linear best fit to those 12 cycles (continuous blue line), as well as the corresponding linear correlation coefficient.

maximum value of the 13 month running mean of R_Z for each cycle (R_Z^{\max}). The best linear fit between those two quantities, as plotted in Figure 2.11 (bottom panel), is roughly three times better than the null hypothesis, in terms of rms deviation. Here again, we find that a multiplication factor of 1.5 for USAF–NOAA data is the optimal correction for the standard deviation of areas to better follow RGO’s tendency. We do not consider any dependence of the area distribution on cycle phase or latitude, but this aspect remains to be studied in more detail, as suggested in Jiang et al. (2011)’s analysis.

In brief, our recipe to produce a set of synthetic emergences begins as follows : (i) every month, Equation (2.10) is used to calculate the monthly total area A_m of sunspot groups to emerge ; (ii) the area A of each individual sunspot group is extracted randomly from the following log-normal distribution, until A_m is reached :

$$f_{A,n}(A) = f_{0,A,n} \frac{1}{A} \exp\left(-\frac{(\log A - \log A_0)^2}{2\sigma_{\log A,n}^2}\right), \quad (2.11a)$$

with $\log A_0 = 1.75$ ($\log \mu\text{Hem}$),

$$\sigma_{\log A, n} = 0.60 + 0.13(R_Z^{\max}/200) (\log \mu\text{Hem}) , \quad (2.11b)$$

and $f_{0, A, n}$ a normalization factor.

2.A.3 LATITUDINAL DISTRIBUTION AND CYCLE OVERLAPS

The emergence of sunspots is known to follow the so-called butterfly diagram. Superposing solar cycles 12–20, normalized to the same duration, Jiang et al. (2011) found a quadratic trend for the temporal equatorward migration of the average latitude of emergence, with a linear increase of average latitude with cycle amplitude. They also found a quadratic trend for the temporal evolution of latitudinal standard deviation around this average latitude.

We perform a similar analysis, with cycles 12–23, normalized with respect to their respective length L_n and divided into 100 temporal boxes. Also, instead of considering average latitude and standard deviation independently, we directly fit gaussian distributions, inside each temporal box, on 1° binned latitudinal histograms. Figure 2.12, upper panel, shows a density plot of the number of emergences inside each time–latitude box, averaged over all cycles. Also shown are gaussian fits obtained for a few sample temporal boxes. Globally, we find an exponential to fit better the temporal equatorward evolution of the average latitude with time than a quadratic decrease (11% improvement in terms of rms deviation). Moreover, the standard deviation of the latitudinal spreading increases with time until cycle maximum and decreases afterwards, in a roughly quadratic manner.

For each cycle, we first perform the fits while avoiding the beginning and end of the cycles where overlaps occur. We use the wing shape delimited by the $\lambda_{0, n}(t^*) \pm 3\sigma_{\lambda, n}(t^*)$ curves, as shown in Figure 2.12 for all cycles superimposed, to characterize overlaps between cycles : every emergence inside one cycle’s wing shape is assumed to belong to this cycle, while emergences outside the region are assigned as an extension of either the end of the preceding cycle or the beginning of the following one. We then calculate again the latitudinal gaussian best fits inside each normalized temporal box, the best exponential fit on average latitudes, and the best quadratic fit on standard deviations, but now for phases $t^* \in [-0.25, 1.25]$. We repeat the process iteratively until stability is reached. Figure 2.12, bottom panel, illustrates the final curves obtained for all cycles superimposed.

The result of this analysis runs as follows : (i) The probability density of emergence at a given latitude λ and temporal phase t^* inside each cycle n is given by

$$f_{\lambda, n}(\lambda, t^*) = f_{0, \lambda, n} \exp\left(-\frac{(\lambda - \lambda_{0, n}(t^*))^2}{2\sigma_{\lambda, n}(t^*)^2}\right) , \quad (2.12a)$$

where $\lambda_{0, n}(t^*)$ and $\sigma_{\lambda, n}(t^*)$ are the evolving average latitude and standard deviation, and $f_{0, \lambda, n}$ a

normalization factor. (ii) The average latitude migrates toward the equator as

$$\lambda_{0,n}(t^*) = c_{1,n}e^{-t^*/c_{2,n}} + c_{3,n} \text{ (deg)} , \quad (2.12b)$$

with an empirical linear dependence of the parameters with respect to cycle amplitude : $c_{1,n}$ varies from 19° for weak cycle 14 to 24° for strong cycle 19, $c_{2,n}$ from 0.56 to 0.65, and $c_{3,n}$ stays roughly constant to 2.8° . (iii) The evolution of the latitudinal standard deviation follows a quadratic tendency,

$$\sigma_{\lambda,n}(t^*) = c_{4,n} + c_{5,n}t^* + c_{6,n}t^{*2} \text{ (deg)} , \quad (2.12c)$$

where, again, $c_{4,n}$ varies from 2.1° to 3.5° , $c_{5,n}$ from 17.5° to 17.4° , and $c_{6,n}$ from -18.0° to -18.5° . (iv) For a given cycle, the length of the left overlap with the preceding cycle ($t^* < 0$) is determined by the crossing of the upper and lower $3\sigma_{\lambda,n}(t^*)$ curves, while the right overlap ($t^* > 1$) with the next cycle is determined by the crossing of the upper $3\sigma_{\lambda,n}(t^*)$ curve with the equator. Essentially, this leads to longer overlaps at the beginning of strong cycles than at weak cycles. During the overlapping phase between two cycles, we make the probability for an emergence to rise inside the right tail of cycle n to decrease linearly from 1 to 0, while the probability to rise inside the left tail of cycle $n + 1$ increases linearly from 0 to 1.

The preceding analyses of latitudinal patterns were performed simultaneously on the two hemis-

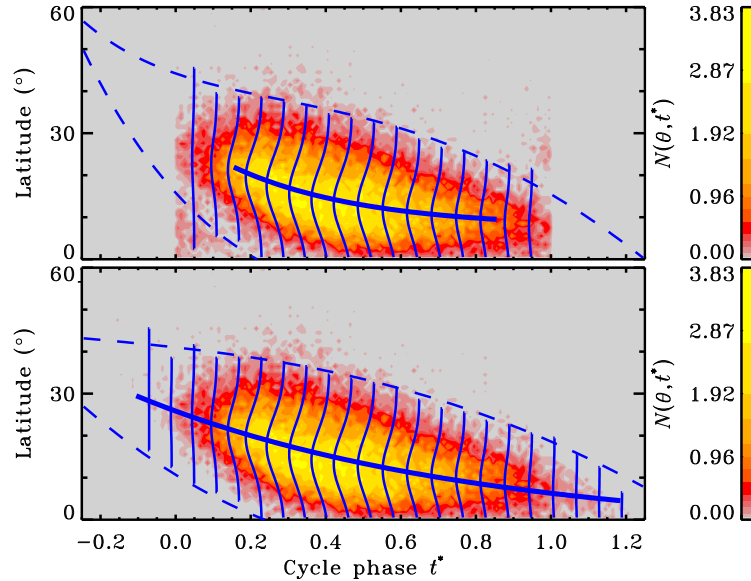


Figure 2.12 – Density plots of the number of emergences inside each time–latitude box, with sample latitudinal gaussian fits (thin blue), exponential trend of the average latitude (thick blue), and $3\sigma_\lambda$ lines used to delimit the time–latitude shape of the cycles (dashed blue). Top panel : cycles 12 to 23 superimposed according to phase, and averaged ($t^* \in [0., 1.]$). Bottom panel : same as upper panel, but with cycle overlaps corrected for and repositioned at the beginning or end of the appropriate cycles (see text).

pheres. Even though hemispheric asymmetries may be self-enhancing through sunspot groups nesting (see Hathaway 2010, § 4.9, and references therein), we leave our synthetic database generator to build such asymmetries solely from the stochastic properties of individual sunspot groups and thus set the probability to emerge in one hemisphere or the other to 0.5.

2.A.4 LONGITUDINAL DISTRIBUTION

Sunspot groups have also been found to emerge with a slight preference for “active longitudes”, i.e., near previously emerged sunspot groups (see Hathaway 2010, § 4.10, and references therein). It may be necessary to take this effect into account to properly model the extent of open magnetic flux rooted in such active nests. It is unlikely, though, that a statistical approach would reproduce specific realizations of such nesting. We therefore opt for a uniform random generation of emerging longitudes.

2.A.5 MAGNETIC FLUX DISTRIBUTION

We now study the statistical behavior of the WS1989 magnetic database for cycle 21, and compare it with the corrected USAF–NOAA area database for the same cycle. While one database uses magnetographic observations, the other is based on observations in the visible. Nevertheless, both present a number of entries of the same order, that is respectively $N_{\text{WS1989}} = 3047$ BMRs and $N_{\text{USAF-NOAA}} = 3755$ sunspot groups. Unfortunately, the independence of the two datasets prevents us from performing one-to-one statistics. Instead, we compare the overall distribution of WS1989 magnetic fluxes with the distribution of USAF–NOAA areas.

As for the areas, the PDF of magnetic fluxes (Φ) for cycle 21 appears roughly log-normal. Figure 2.13(b) shows the PDF of $\log\Phi$ from the WS1989 database. The observed histogram shows a left wing that is slightly too strong, but not enough to bring it near a power-law distribution. We opt to retain the best fit :

$$f_{\Phi}(\Phi) = f_{0,\Phi} \frac{1}{\Phi} \exp\left(-\frac{(\log\Phi - \log\Phi_0)^2}{2\sigma_{\log\Phi}^2}\right), \quad (2.13)$$

with $\log\Phi_0 = 21.3$ (log Mx), $\sigma_{\log\Phi} = 0.5$ (log Mx), and $f_{0,\Phi}$ a normalization factor. As for the size distribution, we do not consider any variability in the flux distribution with latitude or with cycle phase, but this aspect remains to be improved, as suggested in the analysis of Wang & Sheeley (1989).

Figure 2.13(a) shows the PDF of $\log A$ for cycle 21, with a best fit compatible with Equation (2.11). At first glance, the normal distribution of those areas seems questionable. However, considering the good fit obtained for all cycles superimposed (Figure 2.11), and the fact that all USAF–NOAA cycles (20–23), but not RGO cycles (12–19), show similar behavior, it is more likely that the excess of measurements near $\log A = 1$ indicates an observational bias that would be responsible for the lack

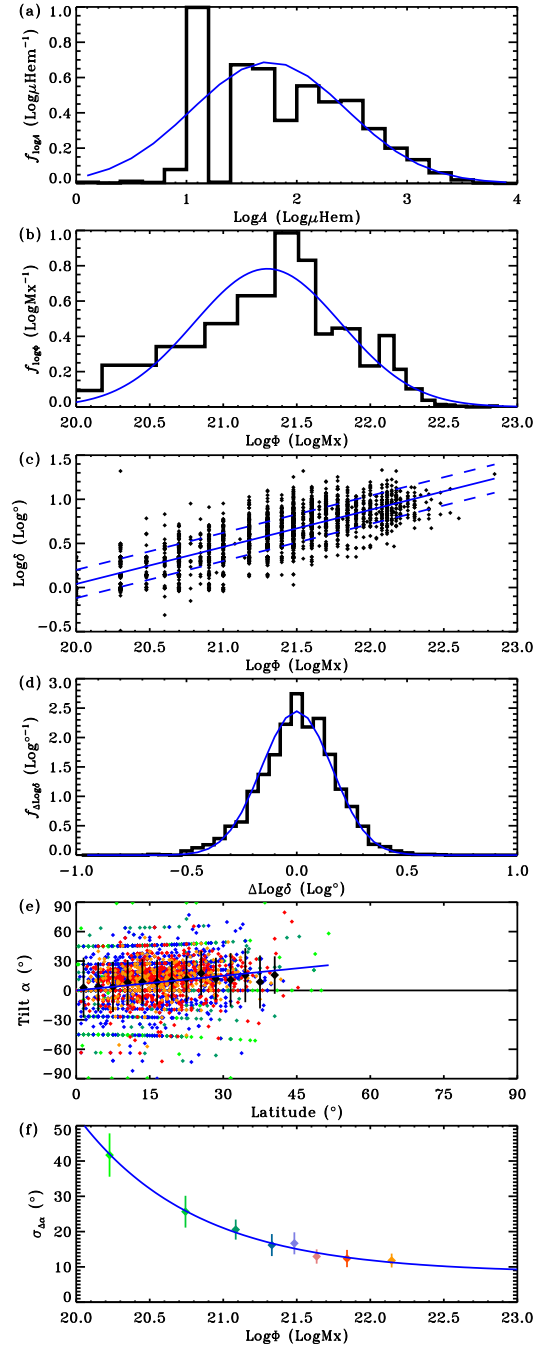


Figure 2.13 – (a) PDF of $\log A$ for cycle 21, as extracted from the USAF–NOAA database, with superimposed Gaussian best fit compatible with Equation (2.11) (blue line). (b) PDF of $\log \Phi$ as extracted from the WS1989 database, binned irregularly to account for observational biases, with superimposed normal best fit (blue line). (c) Distribution of WS1989 angular separation δ with respect to their magnetic flux Φ , in log–log scale. Superimposed are a linear best fit (continuous blue line) and $\pm 1\sigma$ lines (dashed blue). (d) PDF of $\log \delta$ around the preceding linear fit, with superimposed gaussian best fit (blue line). (e) Distribution of WS1989 tilt angles α against latitude, in eight different colors (green to orange dots) corresponding to eight flux intervals between 10^{20} and 10^{23} Mx. Also shown are the average tilt angle inside 3° wide latitudinal bins (black diamonds), the standard deviation inside each latitudinal bin (black lines), and the Joy’s linear fit to those averages (blue line). (f) Standard deviations, obtained from best gaussian fits of the tilt angles spread around the preceding linear fit, as a function of magnetic flux, with colors matching those of plot (e). Vertical bars denote relative errors estimated from the rms deviations of individual gaussian fits. Superimposed is the best exponential fit to those points (thin blue line).

of measurements at lower $\log A$. This also suggests that the total number of sunspot groups measured for cycle 21 could be underestimated. As explained earlier, the remaining uncertainty is likely to be of minimal impact for the purpose of flux transport simulations, since we expect the high end of the area and flux spectra to dominate the surface evolution.

Assuming a positive correlation between area and magnetic flux, i.e. large areas harbor high magnetic fluxes and small areas low magnetic fluxes, we can make a direct bridge between the two log-normal distributions. With B_R^{mean} the average radial surface magnetic field inside a given sunspot group, we have

$$\Phi = B_R^{\text{mean}} A . \quad (2.14a)$$

Since the two log-normal distributions do not have the same width, B_R^{mean} varies with A as follows :

$$B_R^{\text{mean}}(A) = \frac{\Phi_0}{A_0} \left(\frac{A}{A_0} \right)^{\frac{\sigma_{\log \Phi}}{\sigma_{\log A, 21}} - 1} , \quad (2.14b)$$

with $\Phi_0 = 10^{21.3}$ Mx, $A_0 = 10^{1.75}$ μHem , $\sigma_{\log \Phi} = 0.5$ (log Mx) and $\sigma_{\log A, 21} = 0.70$ (log μHem), as defined above. The result is that small, compact sunspot groups harbor higher average magnetic fields ($B_R^{\text{mean}} = 3750$ G for $A = 1$ μHem) than large, spatially extended sunspot groups ($B_R^{\text{mean}} = 340$ G for $A = 4000$ μHem). Though this conversion process has obvious limits, we use Equation (2.14) to determine the magnetic flux of every synthetic sunspot group generated in Equation (2.11). The fact that the area distribution presents a dependence on cycle amplitude will thus imply a cycle dependence of the flux distribution as well.

We must finally correct the new synthetic database for its absolute number of emergences. In fact, while the original numbers of entries in WS1989 and USAF–NOAA databases were not equal, the gaussian fits adopted worsen the situation : the area under the gaussian curve of Figure 2.13(a) now gives $N_{\text{USAF-NOAA}} \simeq 4500$ sunspot groups, while that of Figure 2.13(b) gives $N_{\text{WS1989}} \simeq 3000$ BMRs. Assuming completeness of the two independent samples, this discrepancy can still be justified by the fact that sunspot groups and BMRs are not defined in the same manner. To ensure a minimal consistency, we divide the number of emergences obtained in the preceding analysis by a factor 1.5. This number will, however, remain a source of uncertainty for determining the absolute amount of flux to emerge during a given cycle.

2.A.6 MAGNETIC BIPOLE SEPARATIONS

Each sunspot group must now be converted into a BMR, that is a pair of patches of the same flux and opposite polarity. We consider the statistics of angular separation δ of the bipolar entries in the WS1989 database. While there is no obvious trend of δ with latitude, we find a reasonable linear correlation ($r = 0.82$) between $\log \delta$ and $\log \Phi$. Figure 2.13(c) illustrates the repartition of $\log \delta$ values

with respect to $\log\Phi$. The linear best fit gives an average value

$$\log\delta_0 = 0.46 + 0.42(\log\Phi - 21) (\log^\circ) , \quad (2.15)$$

with a nearly uniform standard deviation $\sigma_{\log\delta} = 0.16$ deg around this mean, as illustrated by the gaussian fit on $\Delta\log\delta = \log\delta - \log\delta_0$ shown in Figure 2.13(d). A similar analysis can be found in Wang & Sheeley (1989). Unfortunately, the use of the WS1989 database for cycle 21 alone prevents us from looking at any dependence of δ on cycle amplitude.

2.A.7 MAGNETIC BIPOLE TILTS

BMR are known to have their axis tilted with respect to the equator. Using again the WS1989 bipolar entries, Figure 2.13(e) plots the BMR tilt angles α as a function of latitude. When averaged into 3° wide latitudinal bins, α shows the expected increase with latitude as stated by Joy's law. We opt for the plain proportional formulation

$$\alpha_0 = c_\alpha \lambda , \quad (2.16a)$$

since other latitudinal profiles used in the literature (e.g. $|\alpha_0| \propto \sqrt{|\lambda|}$), do not appear to provide any significant improvement. We find that values of the proportionality factor c_α varying from 0.4 to 0.6 could fit the latitudinal trend rather similarly, with some unclear dependence on flux. The value $c_\alpha = 0.5$, though, provides the best overall compromise when considering the very large, Gaussian-shaped, dispersion of α around α_0 .

On the other hand, standard deviations do show a strong dependence on flux amplitude. We thus apply gaussian fits to the distribution of $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$ for eight different flux intervals between 10^{20} and 10^{23} Mx. Figure 2.13(f) illustrates the variation of the standard deviation $\sigma_{\Delta\alpha}$ with $\log\Phi$, with relative error bars indicating the importance of the rms deviation between the gaussian fit and the data in each flux bin. We find this standard deviation to decrease exponentially as

$$\sigma_{\Delta\alpha} = 8.5^\circ + 12^\circ e^{-(\log\Phi - 21)/0.8} . \quad (2.16b)$$

Again, the use of the WS1989 database for cycle 21 prevents us from finding any dependence of α on cycle characteristics. In a study of observed tilt angles for cycles 15–21, Dasi-Espuig et al. (2010) did find a decrease of average tilt with respect to cycle amplitude. However, the inclusion of such a result in the construction of our synthetic database would require a re-evaluation of Equation (2.16b) for cycles other than 21. For simplicity, we chose not to consider such systematic dependences of the tilt angles for the time being.

CHAPITRE 3

A COUPLED 2×2 D BABCOCK–LEIGHTON SOLAR DYNAMO MODEL. II. REFERENCE DYNAMO SOLUTIONS

Alexandre Lemerle^{1,2} and Paul Charbonneau¹

¹ *Département de physique, Université de Montréal, 2900 boul. Édouard-Montpetit,
Montréal, QC, H3T 1J4, Canada*

² *Collège de Bois-de-Boulogne, 10555 av. Bois-de-Boulogne, Montréal, QC, H4N 1L4, Canada*

Received 2016 April 12; *revised* 2016 October 30; *accepted* 2016 November 8

Published in The Astrophysical Journal, Vol. 834–2, 133 (18 pages), 2017 January 10
(Lemerle & Charbonneau, 2017, <http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/834/2/133>)

3.0 ABSTRACT

In this paper we complete the presentation of a new hybrid 2×2 D flux transport dynamo (FTD) model of the solar cycle based on the Babcock–Leighton mechanism of poloidal magnetic field regeneration via the surface decay of bipolar magnetic regions (BMRs). This hybrid model is constructed by allowing the surface flux transport (SFT) simulation described in Lemerle et al. (2015) to provide the poloidal source term to an axisymmetric FTD simulation defined in a meridional plane, which in turn generates the BMRs required by the SFT. A key aspect of this coupling is the definition of an emergence function describing the probability of BMR emergence as a function of the spatial distribution of the internal axisymmetric magnetic field. We use a genetic algorithm to calibrate this function, together with other model parameters, against observed cycle 21 emergence data. We present a reference dynamo solution reproducing many solar cycle characteristics, including good hemispheric coupling, phase relationship between the surface dipole and the BMR-generating internal field, and correlation between dipole strength at cycle maximum and peak amplitude of the next cycle. The saturation of the cycle amplitude takes place through the quenching of the BMR tilt as a function

of the internal field. The observed statistical scatter about the mean BMR tilt, built into the model, acts as a source of stochasticity which dominates amplitude fluctuations. The model thus can produce Dalton-like epochs of strongly suppressed cycle amplitude lasting a few cycles and can even shut off entirely following an unfavorable sequence of emergence events.

Keywords : dynamo — Sun : activity — Sun : interior — Sun : magnetic fields — Sun : photosphere — sunspots

3.1 INTRODUCTION

Close to a century has now gone by since the discovery of the underlying magnetic nature of the eleven-year sunspot cycle (Hale et al., 1919). The magnetic polarity reversals of the leading and following (with respect to rotation) components of large bipolar magnetic regions (BMRs) is now thought to reflect the presence, somewhere in the solar interior, of a large-scale, dominantly axisymmetric zonally-oriented (toroidal) magnetic field, antisymmetric about the sun’s equator and itself undergoing polarity reversals approximately every eleven years, for a full magnetic cycle period of $\simeq 22$ years. The rotational shear of a pre-existing dipole, later detected on the solar surface (Babcock & Babcock, 1955), can act as an inductive source for such an internal toroidal magnetic flux system. However, closing the dynamo loop requires an inductive mechanism capable of regenerating the dipole from this internal toroidal component, in a manner such as leading the cyclic polarity reversals of both of these large-scale components of the solar magnetic field.

Many candidates for this toroidal-to-poloidal hydromagnetic inductive mechanisms have been identified, starting with cyclonic convection (Parker, 1955) and its associated mean electromotive force, and the surface decay of bipolar magnetic regions (Babcock, 1961), now referred to as the Babcock–Leighton (BL) mechanism. These were joined more recently by helical waves along thin magnetic flux tubes (Schmitt 1987; Ossendrijver 2000, and references therein), and shear instabilities in the tachocline (Dikpati & Gilman, 2001), the stably stratified rotational shear layer located beneath the base of the solar convection zone, as revealed by helioseismology. In all cases, the rotational influence mediated by the Coriolis force is the key agent that breaks the mirror symmetry of the inductive flows, thus allowing to circumvent Cowling’s theorem.

Of these various candidates for poloidal field regeneration, the BL mechanism stands out as the only one that can be directly observed operating at the solar surface, and as such is far better constrained than any other. In particular, the distribution of tilt angles of BMRs, namely the angle defined by a line segment joining each pole of the BMR measured with respect to the east–west direction, is

now well characterized from white light (Dasi-Espuig et al., 2010, Howard, 1991) and magnetographic observations (Wang & Sheeley, 1989). This tilt arises through the action of the Coriolis force, and associated with it is a net dipole moment so that, effectively, a poloidal magnetic component is being produced from the pre-existing deep-seated toroidal component ultimately giving rise to emerging BMRs (see Fan 2009 for a review). The magnitude of this tilt, and its pattern of variations with latitude, BMR flux and separation, and statistical fluctuations about the mean, all play a key role in setting the magnitude of the surface dipole moment produced in the course of a sunspot cycle.

Because the BL mechanism operates at the solar surface, a transport mechanism is also needed to carry the surface poloidal magnetic field down into the interior, where rotational shearing is taking place. Here again a number of appropriate candidate mechanisms are available, including advection by large-scale meridional flows pervading the solar convection zone, as well as turbulent transport effects, namely isotropic diffusive transport and directional turbulent pumping. Viewed globally, the BL mechanism is a non-local inductive effect : the surface source of poloidal field is driven by the deep-seated toroidal component, on timescales much shorter than the magnetic cycle period.

Dynamo models of the solar cycle relying on the BL mechanism of poloidal field regeneration have undergone a vigorous revival in the last 25 years or so, spurred by Wang et al. (1989b), Wang & Sheeley (1991), Choudhuri et al. (1995), and Durney (1995). Many such models are now dispersed in the literature (for recent reviews see Charbonneau 2010; Karak et al. 2014). The vast majority rely on a two-dimensional axisymmetric formulation of the problem, whereby the large-scale flows and magnetic field components are both axisymmetric, and the dynamo equations solved in a meridional (r, θ) plane. Typically, helioseismology-compatible parameterizations for solar-like internal differential rotation and meridional circulation are introduced, and these flows are assumed steady (the so-called kinematic approximation).

Many such models do differ in how they incorporate the BL mechanism, a fundamentally non-axisymmetric effect, into the axisymmetric dynamo equations (compare, e.g., Dikpati & Charbonneau 1999, Durney 1995, Muñoz-Jaramillo et al. 2010, Nandy & Choudhuri 2001). They also differ in assumptions made regarding the primary magnetic field transport mechanism. As a consequence, models based on rather different input physics can do roughly as well as one another in reproducing the primary characteristics of the observed solar cycle. However, the differences can matter a lot in practice. Perhaps no better illustration of this point can be found than the widely differing dynamo model-based predictions of sunspot cycle 24 made by Dikpati et al. (2006) and Choudhuri et al. (2007), each using a distinct BL model “calibrated” to earlier sunspot cycles.

This problem is compounded when introducing data assimilation into the model-based prediction, as the datasets must then also be preprocessed in some way to accommodate the axisymmetric formulation of the dynamo model used for forecasting. Both aforementioned model-based prediction schemes used distinct geometrically simplified implementations of different datasets being assimilated, and in

all likelihood these differences also contributed to the widely varying predictions for the amplitude of cycle 24. Ideally, data assimilation should be carried out using full-disk magnetograms and/or detailed observations of active region emergences, including complete positional and timing information. Either way, this requires a dynamo model with a geometrically complete representation of the solar surface, and thus demands abandoning axisymmetry.

One extreme possibility consists in turning to global magnetohydrodynamical simulations of solar convection. Despite remarkable progress in the past decade (for a review see, e.g., § 3 of Charbonneau 2014), such simulations still cannot accommodate sufficient spatial resolution to resolve convection and magnetic field evolution in the surface layers, or even capture the interior process of magnetic flux rope formation and buoyant rise (but on the latter do see Fan & Fang 2014; Nelson et al. 2013; 2014). Typically, such simulations also fail to drive regular, solar-like polarity cyclic reversals in the large-scale magnetic field they generate (see Passos & Charbonneau 2014 for the closest thing yet).

Intermediate approaches are also possible : finding a way to include the full non-axisymmetric representation of, at-least, the surface processes, while retaining the kinematic approach for the transport of magnetic flux. To our knowledge, only two such models exist in the literature (Yeates & Muñoz-Jaramillo 2013; Miesch & Dikpati 2014, hereafter MD2014), as they include a full three-dimensional kinematic representation of the solar convection zone up to the surface. Here again, they mostly differ in how they incorporate the localized emergence of new magnetic flux : Yeates & Muñoz-Jaramillo (2013) impose localized flow perturbations at the base of the convection zone to trigger the eruption of active regions out of the toroidal flux, while MD2014 and Miesch & Teweldebirhan (2016) apply a surface flux deposition technique, through an empirical masking of the deep-seated toroidal field.

In this series of paper we present a BL dynamo model that belongs to this same category. We retain a fairly conventional two-dimensional axisymmetric kinematic flux transport dynamo (FTD) model, specifically the model described in Charbonneau et al. (2005), without its non-local poloidal source term, and couple it to a two-dimensional surface flux transport (SFT) simulation. The latter provides the source term for the former through the upper boundary condition, and in turn the FTD provides the emergences required as input to the SFT simulation. We opted to call this a “ $2 \times 2D$ ” dynamo model. This is still a kinematic model, in that it uses steady parametrized large-scale flow fields compatible with helioseismology and surface measurements. Specifying the form of these flows requires the adjustment of many model parameters, in order to generate the most “solar-like” dynamo solutions possible.

In Lemerle et al. (2015, hereafter Paper I), we introduced a genetic algorithm-based method for formally carrying out this optimization problem, in the context of the surface flux transport simulation. The optimization process is set to minimize deviations with respect to synoptic magnetograms (and derived global quantities). Not only does this approach finds an optimal solution, but it also allows to map a range of acceptable solutions, thus providing robust Monte Carlo-like confidence intervals on

best-fit model parameters and allowing the identification of parameter degeneracies. A key result is that the range of acceptable surface meridional flow profiles fits nicely surface Doppler measurements (Ulrich, 2010), even though these data are not used to constrain the optimization process.

In the present paper we extend the procedure to the coupled model described above, and thus produce an “optimal” 2×2 D BL dynamo model of the solar cycle. The use of quotes is motivated by the fact that even this basic optimal model involves unavoidable stochastic components, associated with the flux emergence process, so that it can only fit the Sun (meaning, e.g., the sunspot number time series) in a statistical sense. Indeed, the SFT solutions presented in Paper I already show how the uncertainties in global cycle characteristics are dominated by the inherent stochasticity of the flux emergence process.

In § 2 we discuss the formulation of the coupled model and its components. In § 3 we turn to its calibration against observed solar features. In § 4 we present self-consistent reference dynamo solutions and examine their patterns of long term variability. In § 5 we discuss the limitations of the calibration technique and compare some of the results with direct solar observations. We conclude by summarizing our most salient results as well as possible paths of improvement and ongoing work.

3.2 MODEL

The contemporary version of the original scenario proposed by Babcock (1959) runs as follows :

- (0) at solar maximum, strong toroidal magnetic fields are present deep in the solar interior, anti-symmetric with respect to the equator ;
- (i) during the ascending and descending phases of the solar cycle, toroidal flux loops rise and emerge at the solar surface in the form of BMRs, twisted due to the Coriolis effect, such that the western spots tend to be closer to the equator (tilt following on average Joy’s law) ;
- (ii) surface diffusion/transport near the equator allows for more cancellation of the western polarities, when merging with their counterparts from the other hemisphere, leaving the remaining “eastern” flux to be transported toward the poles and trigger the polarity reversal of magnetic polar caps ;
- (iii) the new surface dipole is subducted and sheared by differential rotation, building up a new internal toroidal magnetic structure, opposite to the preceding one and ready for...
- (iv) ...the generation of a new population of BMRs during the next half-cycle (from now on, we refer to such half magnetic cycle, or sunspot cycle, as simply a “cycle”).

The numerical implementation we propose for carrying out this scheme is quite simple :

- (i) new BMRs are continuously deposited at the solar surface, at times, latitudes and longitudes, tilts, angular separations, magnetic fluxes and polarity generated through a (probabilistic) flux emergence algorithm based on the strength and spatial distribution of the deep-seated magnetic fields;
- (ii) the SFT equation is solved on the solar spherical surface, and generates the expected cancellation, decay, transport and specific features typically observed in surface magnetograms (see Paper I);
- (iii) the FTD equation is solved in the meridional plane, using the evolving results of the surface simulation as a time-dependent upper boundary condition on the poloidal field; transport of this poloidal field to the base of the convection zone and subsequent shearing by differential rotation eventually builds up strong toroidal magnetic fields deep in the convection zone;
- (iv) the dynamo loop is closed by allowing this deep-seated magnetic structure to generate the emergences required in step (i).

3.2.1 BASIC INGREDIENTS

In the depths of the solar convection zone or in the tangles of photospheric turbulent motions, magnetic fields are dispersed, transported, amplified or destroyed by small and large-scale flows. In the solar interior and photosphere, these processes are well-captured by the magnetohydrodynamics (MHD) induction equation :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}) , \quad (3.1)$$

with η the net magnetic diffusivity, including contributions from the small microscopic magnetic diffusivity $\eta_e = c^2/4\pi\sigma_e$ (with σ_e^{-1} the electric resistivity of the plasma), as well as a dominant turbulent contribution associated with the destructive folding of magnetic field lines by small-scale convective fluid motions. We adopt here the kinematic approximation, whereby the flow \mathbf{u} is considered given. This approximation has been shown to be appropriate in reproducing reasonably well the synoptic evolution of the solar surface magnetic field (see, e.g., Baumann et al., 2004, Wang et al., 2002a), as well as the overall solar dynamo properties (see, e.g., Karak et al., 2014, and references therein). On spatial scales much larger than convection, two flows contribute to \mathbf{u} : meridional circulation $\mathbf{u}_P(r, \theta)$ and differential rotation $\varpi\Omega(r, \theta)\hat{e}_\phi$. Both these flows can be considered axisymmetric ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) and steady ($\partial/\partial t \equiv 0$) as per the kinematic approximation. They can be expressed in spherical polar coordinates (r, θ, ϕ) as

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \underbrace{\frac{R}{\rho(r)/\rho_0} \nabla \times (\Psi(r, \theta)\hat{e}_\phi)}_{\mathbf{u}_P(r, \theta) = u_r(r, \theta)\hat{e}_r + u_\theta(r, \theta)\hat{e}_\theta} + \varpi\Omega(r, \theta)\hat{e}_\phi , \quad (3.2)$$

where the meridional flow has been formulated in terms of a stream function $\Psi(r, \theta)$, thus ensuring mass conservation in a $\rho(r) = \rho_0 \xi^m$ density profile, with $\xi(r) = (R/r) - 1$, $m = 1.5$ for an adiabatic stratification, R the solar radius, and $\varpi = r \sin \theta$.

3.2.1.a Meridional Circulation

We opted to use a modified form of the meridional flow profile introduced by van Ballegoijen & Choudhuri (1988). This flow can be defined through a separable stream function of the form :

$$\Psi(r, \theta) = u_\theta(R, \theta) \frac{R}{r} \left[-\frac{\xi^{m+1}}{m+1} + \frac{c_1 \xi^{2m+1}}{2m+1} - \frac{c_2 \xi^{2m+p+1}}{2m+p+1} \right], \quad (3.3a)$$

where

$$c_1 = \frac{(2m+1)(m+p)}{(m+1)p} \xi_b^{-m}, \quad c_2 = \frac{(2m+p+1)m}{(m+1)p} \xi_b^{-(m+p)},$$

and $\xi_b = (R/R_b) - 1$. Parameters p and m determine the depth and concentration of the return flow, down to $r = R_b$. For the purpose of the foregoing analysis and calibration, parameters p and R_b will be treated as free parameters, while the polytropic index m is set at 1.5, appropriate for an adiabatic stratification.

We deviate from the original formulation of van Ballegoijen & Choudhuri (1988) by using the following latitudinal dependence, also used in Paper I :

$$u_\theta(R, \theta) = -\frac{u_0}{u_0^*} \operatorname{erf}^q(v \sin \theta) \operatorname{erf}^n(w \cos \theta), \quad (3.3b)$$

with u_0^* a normalization factor such that u_0 is the maximum meridional flow velocity and q , n , v , and w parameters that allow to generate a very wide range of solar-like surface meridional flow profiles. The value of n is fixed to 1 as to prevent the formation of a 0 m s^{-1} plateau near the equator. We developed this flexible formulation in Paper I to allow for the inclusion of various profiles used in flux transport modeling (e.g., Dikpati & Charbonneau 1999, van Ballegoijen & Choudhuri 1988, Wang et al. 2002b) and measured on the Sun (e.g., Ulrich 2010)¹.

3.2.1.b Differential Rotation

Unlike meridional circulation, the solar internal differential rotation profile is well constrained by helioseismology. We use here the helioseismically-calibrated solar-like parameterization introduced in Charbonneau et al. (1999) :

$$\Omega(r, \theta) = \Omega_c + \frac{\Omega(R, \theta) - \Omega_c}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{r - R_c}{\delta_c/2} \right) \right], \quad (3.4a)$$

¹Post-publication note : (see also Rightmire-Upton et al. 2012)

with $\Omega_c = 2.724 \mu\text{rad s}^{-1}$, $R_c = 0.7R$, and surface rotation

$$\Omega(R, \theta) = \Omega_0 (1 + a_2 \cos^2 \theta + a_4 \cos^4 \theta) , \quad (3.4b)$$

where $a_2 = -0.1264$, $a_4 = -0.1591$, and $\Omega_0 = 2.894 \mu\text{rad s}^{-1}$ (see also Snodgrass 1983). The thickness δ_c of the transition region between differential and solid rotation, the tachocline, near the base of the convection zone, is kept as a free parameter.

3.2.1.c Magnetic Diffusivity

In the stably stratified core, the presumed absence of turbulence suggests a net diffusivity (η_c) given by Ohmic dissipation, while in the bulk of the convection zone, enhanced turbulent dissipation (η_t) of the magnetic field is expected to dominate. The following parametric profile, given by Dikpati & Charbonneau (1999), allows for a smooth transition between these two regimes :

$$\eta(r) = \eta_c + \frac{\eta_t}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{r - R_c}{\delta_c/2} \right) \right] , \quad (3.5)$$

where R_c takes the same value as in the preceding differential rotation profile.

In the surface layer, supergranular convective motions drive a random walk that disperses magnetic flux, and can be modeled as a diffusive process (Leighton, 1964) characterized by an effective magnetic diffusivity of order $\eta_R \simeq 10^{12} - 10^{13} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. This value is used solely in the SFT part of the model. The overall radial profile of $\eta(r)$ consequently includes an implicit step function at $r = R$. The exact values for η_c , η_t , and η_R , as well as δ_c , are virtually impossible to determine from first principles, such that they must be treated as unknown parameters needing a proper calibration.

3.2.2 THE FLUX TRANSPORT DYNAMO EQUATIONS

The large-scale axisymmetric magnetic field simulated in the FTD component of the model can be expressed as

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \underbrace{\nabla \times (A_\phi(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi)}_{\mathbf{B}_P = B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta} + B_\phi(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi , \quad (3.6)$$

where \mathbf{B}_P and $B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$ are respectively the poloidal and toroidal vector components of the field. Inserting this decomposition for \mathbf{B} , along with Equation (3.2) for the flow, into the MHD induction Equation (3.1) then yields the usual two evolutionary equations for the scalar components $A_\phi(r, \theta, t)$

and $B_\phi(r, \theta, t)$:

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = -\varpi(\mathbf{u}_P \cdot \nabla) \left(\frac{B_\phi}{\varpi} \right) + \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B_\phi - (\nabla \cdot \mathbf{u}_P) B_\phi + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial(\varpi B_\phi)}{\partial r} + \varpi \mathbf{B}_P \cdot \nabla \Omega , \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial A_\phi}{\partial t} = -\frac{1}{\varpi} (\mathbf{u}_P \cdot \nabla) (\varpi A_\phi) + \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A_\phi . \quad (3.7b)$$

These two equations are linear in A_ϕ and B_ϕ , but are coupled by the shearing term in Equation (3.7a) which acts as a source for B_ϕ proportional to A_ϕ . No such source appears explicitly in Equation (3.7b). Here the regeneration and amplification of the poloidal field is supplied by a continuous input from the SFT simulation, providing a time-evolving surface boundary condition for A_ϕ which effectively acts as a source.

3.2.3 SURFACE FLUX TRANSPORT

Following earlier modeling work on surface magnetic flux evolution, in particular in Paper I, we consider the magnetic field to be predominantly radial on global scales and we solve only the r -component of Equation (3.1), at $r = R$. This leads to the usual two-dimensional linear advection–diffusion equation for the scalar component $B_R = B_r(R, \theta, \phi, t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_R}{\partial t} = & -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [u_\theta(R, \theta) B_R \sin \theta] - \Omega(R, \theta) \frac{\partial B_R}{\partial \phi} + \frac{\eta_R}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial B_R}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 B_R}{\partial \phi^2} \right] \\ & - \frac{B_R}{\tau_R} + S_{\text{BMR}}(\theta, \phi, t) , \end{aligned} \quad (3.8)$$

to which two supplementary terms have been added : a source term $S_{\text{BMR}}(\theta, \phi, t)$ to account for the discrete emergence of new surface flux in the form of BMRs, and a linear sink term $-B_R/\tau_R$ to allow for an exponential decay of the surface field with time. Schrijver et al. (2002) originally found such a decay on a timescale of 5 – 10 yr to be necessary to preclude secular drift and ensure polarity reversal of the polar caps when modeling surface flux evolution over many successive cycles of differing amplitudes. This was subsequently justified physically by Baumann et al. (2006) as the effect of a vertical turbulent diffusion, or equivalently a convective submergence, on the decay of the dominant dipole mode, two physical mechanisms that cannot be directly included in the SFT model. We included this term in Paper I but did not find it to be required for the SFT results to match the synoptic magnetogram of cycle 21. We test it again here, with τ_R treated as a free parameter.

3.2.4 NUMERICAL SOLUTION AND COUPLING

The FTD equations (3.7) and SFT equation (3.8) are solved concurrently, each on a separate two-dimensional computational grid on which spatial discretization is carried out via the Galerkin finite element method, and implicit temporal discretization through the one-step Θ -method (see, e.g., Burnett 1987).

The SFT simulation is solved over a regular Cartesian grid in (θ, ϕ) representing the whole solar surface, with longitudinal periodicity enforced through a padding of ghost cells. Rigorous flux conservation is also required since only a small fraction of the emerging magnetic flux ultimately builds up the axial dipole observed at sunspot minima. We minimize numerical discretization errors by adopting double precision arithmetics, a 256×128 longitude–latitude grid, and 8000 time steps for the eight-cycle runs that will be analyzed in § 3 (for more details on numerical errors see Paper I, § 2.4 and discussion therein).

The FTD simulation is solved simultaneously over a regular 96×128 Cartesian grid in (r, θ) , from pole to pole and $0.5 \leq r/R \leq 3.0$. Below $r = 0.5R$, the radiative core is considered perfectly conductive and the $A_\phi = B_\phi = 0$ boundary condition is applied. For $r > R$, the absence of flows and electrical currents imposes $B_\phi = 0$. The spherical geometry finally constrains $A_\phi = B_\phi = 0$ at the poles. The overall scheme is similar to that described in Charbonneau et al. (2005).

With such spatial resolutions and typical time steps of $\simeq 4$ and $\simeq 40$ days respectively in the SFT and FTD simulations, the former dominates the computational workload by a factor of $\simeq 20$.

3.2.4.a From SFT to FTD

The surface ($r = R$) boundary condition on A_ϕ is updated at every FTD time step, via the longitudinal averaging of the SFT solution ($\langle B_R \rangle^\phi(\theta, t)$) and integration of the resulting latitudinal function :

$$A_\phi(R, \theta, t) = A_\phi^0 + \frac{R}{\sin \theta} \int \langle B_R \rangle^\phi(\theta, t) \sin \theta d\theta, \quad (3.9)$$

where A_ϕ^0 is set to zero at the poles. This provides the coupling from the SFT toward the FTD model.

Such coupling assumes that physical processes responsible for surface magnetic flux evolution occur only inside the single FTD grid layer located at $r = R$, which is of thickness $\simeq 3.7$ Mm for our working spatial mesh.

3.2.4.b From FTD to SFT : Emergence Function

The coupling from the FTD toward the SFT is the emergence of BMRs. In view of the considerable complexity of the various processes involved in the formation, destabilization, buoyant rise, and emergence of deep-seated magnetic flux tubes (see, e.g., Weber et al. 2011 and review by Fan 2009),

we opted here to input emerging BMRs directly into the SFT component of the model, based on a semi-empirical emergence function giving, as a function of the strength of the internal magnetic field, the *probability* that the emergence of a BMR will occur.

Calculations of the destabilization and buoyant rise of magnetic flux tubes carried out in the thin-tube approximation do offer some useful guidance. From the stability diagrams obtained by Schüssler et al. (1994) and Ferriz-Mas et al. (1994), one can infer the depth, latitude and magnetic amplitudes at which toroidal flux tubes are expected to destabilize. According to their results, and depending on the level of subadiabaticity in the outer reaches of the radiative core, instability growth rates near $r/R \simeq 0.7$ remain approximately constant, or show a smooth increase with latitude, from the equator up to $\simeq 70^\circ$, and then fall off rapidly to zero over a latitudinal width of $\simeq 5^\circ$. A lower threshold of order $10^4 - 10^5$ G is also required, on the amplitude of the magnetic field inside concentrated flux tubes. A crucial missing link is the degree of magnetic field amplification taking place during the formation of these toroidal flux tubes from the dynamo-generated large-scale magnetic field. Accordingly, we define this lower limit as $B^* \in [10^1, 10^4]$ (with units that depend on the exact parameterization of Equation 3.10 below), and treat it as another free parameter to be calibrated. Modeling also shows that a certain level of twist is required for the tube to maintain its coherence during the rise through the convective envelope (Fan, 2009). Accordingly, we introduce the quantity $|B_{\text{mix}}| = |B_\phi|^b |A_\phi|^a$, evaluated at depth $r^*/R \in [0.60, 0.80]$ and with exponents in the ranges $b \in [0.5, 3.0]$ and $a \in [0.0, 2.0]$, and use it to build the following quasi-normalized emergence function :

$$|F_B(\theta, t)| = \frac{1}{4} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{|B_{\text{mix}}| - B^*}{\delta B^*} \right) \right) \left| \frac{B_{\text{mix}}}{\max |B_{\text{mix}}|} \right|^c \left((1 - \mu_\ell) \frac{|\ell|}{90} + \mu_\ell \right) \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{|\ell| - \ell^*}{\delta \ell^*} \right) \right). \quad (3.10)$$

The first part of Equation (3.10) sets a lower threshold on B_{mix} above which emergences can take place, as well as a possible saturation ($c \rightarrow 0$) or linear growth ($c \rightarrow 1$) of the probability above B^* . The transition scale δB^* is set to some fraction of B^* (see § 3.3). The second part accounts for the latitudinal dependence of the instability's growth rate, which we assume to increase linearly from $\mu_\ell \in [0, 1]$ at the equator to 1 near latitude $\ell^* \in [65^\circ, 90^\circ]$, followed by a quick drop to zero in $\delta \ell^* = 3^\circ$ (cf. Figures 1 and 2 of Ferriz-Mas et al. 1994). The sign of $F_B(\theta, t)$ is given by the sign of the input B_ϕ .

The emergence process is made inherently non-deterministic with the following sources of stochasticity :

- (i) at every SFT time step, the number $N(t)$ of new BMRs to emerge is extracted from a uniform random distribution, proportional to the sum $\sum_\theta F_B(\theta, t)$ at the corresponding FTD time step;
- (ii) the probability of emergence of a BMR at a given latitude is made proportional to $F_B(\theta, t)$.

Also, independently from the distribution of $F_B(\theta, t)$, and as determined in our analysis of Wang & Sheeley (1989)'s database entries (see Appendix A of Paper I) :

- (iii) emergence longitudes are assumed to be random ;
- (iv) magnetic fluxes Φ are extracted from a log-normal distribution centered at $\log \Phi_0 = 21.3$ (log Mx) with standard deviation $\sigma_{\log \Phi} = 0.5$ (log Mx) (Paper I, Equation (13)), independently of cycle phase and amplitude (following Bogdan et al. 1988) ;
- (v) magnetic bipole separations δ follow a power law with flux, with a gaussian dispersion about it (Paper I, Equation (15)) ;
- (vi) magnetic bipole tilts α relative to the equatorial direction follow a linear increase with latitude (Joy's law) and a gaussian spread with standard deviation decreasing exponentially with $\log \Phi$ (Paper I, Equations (16a) and (16b)).

The input of BMRs in the SFT simulation enters the source term

$$S_{\text{BMR}}(\theta, \phi, t) = \sum_{i=1}^{N(t)} B_i(\theta, \phi) \delta_D(t - t_i) , \quad (3.11a)$$

with δ_D the Dirac delta. Each new BMRs is placed at its given position (θ_i, ϕ_i) and time t_i , with a gaussian distribution for each pole :

$$B_i(\theta, \phi) = \underbrace{B_{i0} e^{-\delta_{i+}^2/2\sigma^2}}_{B_{i+}(\theta, \phi)} + \underbrace{-B_{i0} e^{-\delta_{i-}^2/2\sigma^2}}_{B_{i-}(\theta, \phi)} , \quad (3.11b)$$

where δ_{i+} and δ_{i-} are the heliocentric angular distances from the centres (θ_{i+}, ϕ_{i+}) and (θ_{i-}, ϕ_{i-}) of the two poles, respectively, and $\sigma = 4^\circ$ the width of the gaussians.

The preceding steps dictate the relative probability of given emergences to occur, but the actual number $N(t)$ of BMRs to emerge every time step remains adjustable. We introduce a proportionality factor K between the emergence function $F_B(\theta, t)$ and the actual emerged butterfly diagram, so that $N(t) = K \cdot \sum_{\theta} F_B(\theta, t)$. Therefore, K effectively acts as a dynamo number in the model. Here however, the fact that the poloidal source term depends on a *number* of emergences $N(t)$, rather than being directly proportional to the underlying toroidal flux, means that the relationship is not formally linear. Nonetheless, as described in § 3.4.1, the model appears to behave linearly when averaged over many different stochastic realizations of emergences. Stochastic aspects notwithstanding, K may thus be considered a dynamo number in a statistical sense, as it sets the mean growth rate in the linear regime. This dynamo number is akin to that encountered in the classical mean-field framework, where it is defined as the dimensionless product of the strength of differential rotation and turbulent

electromotive force over magnetic dissipation. Moreover, as demonstrated by the dynamo solutions to be discussed presently, the value of K also sets the absolute mean amplitude of the dynamo, together with the tilt-quenching mechanism introduced in § 3.4.2.

As a result, for the reference dynamo solution presented in § 3.4.2, with the working spatial mesh and time stepping described above and after adjustment of K to obtain stable, solar-like solutions, the value of $N(t)$ varies from 5 – 15 per SFT time step (50 – 150 per month) near cycle maxima down to 0 – 1 per SFT time step (0 – 10 per month) at cycle minima.

Meanwhile, the exact distribution of these newly emerged BMRs, i.e. the shape of $F_B(\theta, t)$, is mostly critical if one strives to match the observed butterfly diagram. The next logical step is now to carry out a calibration of all parameters describing the full model, using observed emergences as a constraint, as detailed in the following section.

3.3 MODEL CALIBRATION

The various physical components of the coupled SFT–FTD model introduced in the preceding section jointly involve a large number of numerical parameters; 27 to be precise. Nine of these can be fixed confidently either through observations or theoretical considerations. Five (R_c , Ω_0 , Ω_c , a_2 , and a_4) are the numerical parameters defining the differential rotation profile (see § 3.2.1.b), another (m) is the polytropic index characterizing the stratification within the convection zone, and yet another (n) is used to formulate a flexible surface meridional flow profile but set to 1 to reflect solar observations (see § 3.2.1.a). The last two parameters to be held fixed, δB^* and $\delta \ell^*$, control the shapes of the latitudinal and magnetic masking used in the emergence function (see § 3.2.4.b); experimenting with the model reveals that within reasonably wide ranges, the exact values chosen for these parameters have little impact on the global dynamo behavior. Consequently, they are fixed at values $0.1B^*$ and 3° respectively.

This leaves 18 adjustable parameters, which are listed in Table 3.I. Eleven pertain to the linear terms in the model, including the shape of the meridional flow, magnetic diffusivity and surface sink (δ_c , R_b , u_0 , p , q , v , w , η_c , η_t , η_R , and τ_R), and the remaining seven (r^* , b , a , c , B^* , ℓ^* , and μ_ℓ) to the form of the nonlinear emergence function (Equation (3.10)).

3.3.1 VALIDATION WITH THE MD2014 MODEL

The large number of model parameters listed in Table 3.I results from the very general forms adopted for many model ingredients, notably the meridional flow profile and emergence function. This gives the model great flexibility, in that it includes as a subset a number of published models. As

Tableau 3.I – Optimal Parameter Values

Parameters	Reference Values ($C = 0.42$)	Tested Intervals	Optimal Values ($C \in [0.92, 0.94]$)
r^*/R	0.705	[0.60 , 0.80]	0.68 \pm $\begin{smallmatrix} 0.04 \\ 0.03 \end{smallmatrix}$
b	1.0	[0.5 , 3.0]	1.5 \pm $\begin{smallmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{smallmatrix}$
a	0.0	[0.0 , 2.0]	0.0 \pm $\begin{smallmatrix} 0.8 \\ 0.0 \end{smallmatrix}$
c	1.0	[0.0 , 1.0]	1.0 \pm $\begin{smallmatrix} 0.0 \\ 0.6 \end{smallmatrix}$
B^* ^a	^c 10^2	[10^1 , 10^4]	10^2 \pm $\begin{smallmatrix} 0 \\ 10^2 \end{smallmatrix}$
ℓ^*	45	[64 , 90]	70 \pm $\frac{9}{6}$
μ_ℓ	0.0	[0.0 , 1.0]	0.5 \pm $\begin{smallmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{smallmatrix}$
δ_c/R	0.05	[0.04 , 0.10]	0.05 \pm $\begin{smallmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{smallmatrix}$
R_b/R	0.69	[0.60 , 0.70]	0.60 \pm $\begin{smallmatrix} 0.02 \\ 0.00 \end{smallmatrix}$
$u_0/\text{m s}^{-1}$	18	^e [8 , 18]	17 \pm $\frac{1}{8}$
$\log p$	2.0	[-1.0 , 2.0]	-0.7 \pm $\begin{smallmatrix} 1.2 \\ 0.2 \end{smallmatrix}$
q	2.5	^f [2^0 , 2^5]	1 \pm $\begin{smallmatrix} 31 \\ 0 \end{smallmatrix}$
v	1.0	^f [2^0 , 2^3]	7 \pm $\frac{1}{5}$
w	3.5	^f [2^0 , 2^5]	1 \pm $\frac{1}{0}$
$\log(\eta_c/\text{cm}^2 \text{ s}^{-1})$	9	[7 , 11]	8.0 \pm $\begin{smallmatrix} 2.4 \\ 1.0 \end{smallmatrix}$
$\log(\eta_t/\text{cm}^2 \text{ s}^{-1})$	10.7	[11.0 , 13.0]	12.0 \pm $\begin{smallmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{smallmatrix}$
$\log(\eta_R/\text{cm}^2 \text{ s}^{-1})$	12.48	^e [12.38, 12.82]	12.78 \pm $\begin{smallmatrix} 0.04 \\ 0.40 \end{smallmatrix}$
τ_R/years	^d 32	^e [7 , 32]	10 \pm $\frac{\infty}{3}$

Notes.

^a The units of B^* depend on the values of exponents b and a , since they must be the same than the units of $|B_{\text{mix}}| = |B_\phi|^b |A_\phi|^a$ to ensure coherence in Equation (3.10).

^b Reference values as to approximate velocity and diffusivity profiles and emergence algorithm used by MD2014, leading to the solution shown in Figure 3.1(a).

^c Threshold value B^* unavailable from MD2014.

^d $\tau_R \gtrsim 32$ yr is similar to removing term $-B_R/\tau_R$ in Equation (3.8).

^e As determined in Paper I, where the initial interval were $u_0 \in [5, 30] \text{ m s}^{-1}$, $\eta_R \in [10^2, 10^4] \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$, and $\tau_R \in [2^1, 2^5] \text{ yr}$. The linear correlation between u_0 and η_R obtained from the surface analysis should still be considered in conjunction with the final results given in the rightmost column.

^f As opposed to the optimal intervals obtained in Paper I, where $w = 8 \pm \frac{24}{4}$, $v = 2.0 \pm \frac{1.5}{1.0}$, and $q = (2.8 \pm \frac{2.0}{1.1}) \cdot 2^{1.25(\log_2 v)^2}$.

^g Solutions for the first seven parameters (r^* , b , a , c , B^* , ℓ^* , and μ_ℓ) result from the full W21 \times 8-18 optimization. Solutions for the remaining eleven parameters (δ_c , R_b , u_0 , p , q , v , w , η_c , η_t , η_R , and τ_R) result from the subsequent W21 \times 8-11 optimization. ‘‘Optimal values’’ listed in bold font correspond to one chosen optimal solution (see Figures 3.1(e) and (f)) among the acceptable solutions bounded by the given error bars. Other combinations of parameters allowed by the error bars should still be used with care, considering the shape of the parameter-space landscape inside the optimal region and in particular the correlations described at the end of § 3.3.5.

an example and a form of validation exercise, we now reproduce a dynamo solution resembling that presented in MD2014.

Since MD2014’s model includes a full two-dimensional representation of the solar surface and an emergence algorithm similar to ours, direct contact is allowed between specific features of the two models despite significant differences in algorithmic implementation and numerical procedures. Their (single-cell) meridional circulation profile (described in Dikpati 2011) and magnetic diffusivity profile (described in Dikpati & Gilman 2007) may be closely approached by ours, through the parameter values listed in the first column of Table 3.I. Similarly, their emergence function is comparable to the one we describe in § 3.2.4.b, with a latitudinal masking approximated by parameters $\mu_\ell = 0$ and $\ell^* = 45^\circ$ (a low-latitude cutoff conducive to the production of a solar-like butterfly diagram but hard to justify from the point of view of stability of thin flux tubes) and applied only to the B_ϕ component evaluated near depth $r^*/R = 0.705$. The magnetic masking includes a lower threshold B^* of unspecified value and apparently no upper saturation threshold (parameter $c = 1$). The detailed parametrization of individual emerging BMRs nonetheless differs significantly from ours, in a generally more deterministic manner. The latitude of emergence is directly associated with the location of peak toroidal field, as compared to the probabilistic approach we use. The tilt, separation, size and flux of the spot pair are mainly determined by the value of B_ϕ and the latitude of emergence, and so are deterministic rather than stochastic.

In order to minimize the differences associated with stochastic realizations of our emergence procedure, we limit this exercise to the input of observed emergences. Following Paper I, we use the comprehensive database of over 3000 BMRs gathered by Wang & Sheeley (1989) for cycle 21. By feeding these data into Equations (3.11a) and (3.11b), the $2 \times 2D$ simulation is indirectly forced to run in a cycle-21-like mode. The remaining model parameters are set to mimic MD2014’s model (first column of Table 3.I). We obtain the two-cycles solution presented in Figure 3.1(a), for the synoptic evolution of B_ϕ at the base of the convection zone. This solutions resembles MD2014’s result in that it presents a strong mid-high-latitude poleward branch. Our low-latitude equatorial branch is however much weaker. Applying the appropriate latitudinal and magnetic mask from MD2014, we obtain the emergence function, or equivalently the probabilistic distribution of emergences, presented in Figure 3.1(b). This resembles the pattern of emergence produced in MD2014, with surface emergences strongly localized around $\pm 40^\circ$ latitude, with a hint of equatorward propagation (see their Figure 2a, keeping in mind that the slanted thick poleward streaks going from mid to high latitudes on this time–latitude plot reflect post-emergence surface flux transport, not emergence per se).

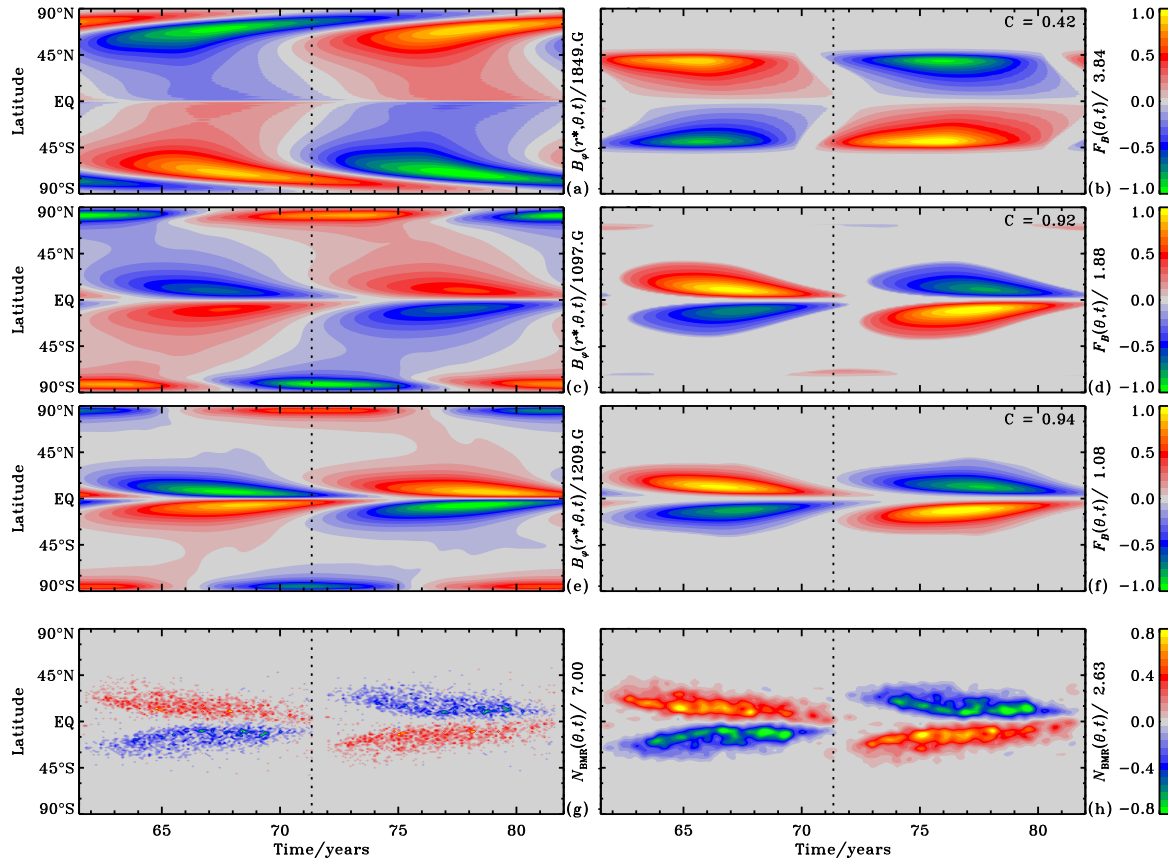


Figure 3.1 – Left : time–latitude contour plots of the toroidal magnetic field component $B_\phi(r^*, \theta, t)$, at $r^*/R = 0.68$, for (a) a two-cycle reference solution approaching that by MD2014, (c) an example of an acceptable solution with $C = 0.92$, and (e) an optimal solution ($C_{\max} = 0.94$). (g) Raw density plot of observed BMRs, extracted from Wang & Sheeley (1989)’s database, where all emergences in a given hemisphere and cycle have been attributed the same polarity. Right : (b),(d), and (f) time-latitude contour plots of the emergence function $F_B(\theta, t)$ associated with each of the solutions presented at the left, with their respective fitness factor C . (h) Smoothed version of the density plot presented at the left. All diagrams show the last quarter of simulations W21 \times 8 (last two repetitions of cycle 21), which was used for optimization. Time, given in years, starts at the beginning of the eight-cycles runs. Vertical dotted lines indicate the times of activity minima.

3.3.2 NUMERICAL OPTIMIZATION

We now seek to select model parameter values so as to obtain a solar-like dynamo solution. This defines a numerical optimization task which consists in optimizing the 18 parameters listed in Table 3.I to yield the closest possible fit to solar observations.

The first choice to be made is the goodness-of-fit measure to be used to drive such optimization. We opted to use a single fitness measure, namely the value of the linear correlation coefficient C between the synoptic distribution of synthetic and observed emergences of BMRs. This presupposes that the magnetic flux tubes producing BMRs upon emergence through the photosphere rise radially through the convection zone, on a timescale very much shorter than the cycle period. Models based on the

thin flux tube approximation support this idea, at least for the more strongly magnetized flux tube presumably producing the larger BMRs (see, e.g., Fan 2009, and references therein).

Next we must select a suitable observational dataset against which to optimize the model. As for the preceding validation exercise, we use Wang & Sheeley (1989)'s BMRs database for cycle 21. In order to minimize any influence of the initial condition (solar minimum-like dipolar configuration, as introduced in Paper I), we generate a sequence of eight replicates of the cycle 21 database (hereafter W21 \times 8), by sequentially inverting the latitudes of emergence from one replication to the next, and use the output corresponding to the last two cycles to compute the correlation coefficient.

3.3.3 GENETIC ALGORITHM (GA) : PIKAIA

We perform the numerical optimization of C using the GA-based optimizer PIKAIA 1.2² (Charbonneau, 2002b, Charbonneau & Knapp, 1995). GAs allow for an efficient and adaptive exploration of the parameter space, and are thus quite robust at handling global optimization problems. As described in Paper I, they also allow for a quasi-Monte Carlo sampling of the parameter space about the current optimum solution, thus helping to construct error estimates on optimal parameter values. In the present context PIKAIA is operating in a 18-dimensional parameter space (viz. Table 3.I), with the fitness measure given by the correlation C . Calculating the fitness of a single trial solution (18-parameter vector) implies running the SFT and FTD simulations in parallel, with appropriate coupling through the surface boundary condition, and finally evaluating C . For our working spatial mesh and time stepping this requires about twenty minutes on a single-core modern CPU. For a typical optimization run of 500 generations with 96 trial solutions per generation, this adds up to 667 core-days, but the fitness calculation being almost trivial to parallelize across the population, the wall-clock time can be brought down to a few days.

3.3.4 CHOOSING PARAMETER RANGES

PIKAIA is designed to carry out optimization in a bounded parameter space. The intervals explored for each parameter (second column of Table 3.I) are chosen to be physically meaningful and computationally stable. In particular, parameters u_0 , η_R , and τ_R are restricted to the intervals found in Paper I to better reproduce surface synoptic magnetograms. Parameters q , v , and w , however, are left free to vary in their original intervals despite the preceding calibration, to allow full exploration of the domain. Diffusivity values η_c and η_t and profile parameters δ_c , R_b , and p are given broad intervals but still within limits inferred by theoretical considerations and numerical experiments. Masking parameters are allowed to vary within ranges inferred from calculated stability diagrams, as described in § 3.2.4.b.

²<http://www.hao.ucar.edu/modeling/pikaia/pikaia.php> (March 2015)

3.3.5 OPTIMAL SOLUTION FOR CYCLE 21

The first sequence of optimizations are run with all 18 unconstrained parameters allowed to vary freely in the intervals listed in Table 3.I, hence called W21×8-18. We first analyse the model's behavior relative to the parameters involved in the very definition of the emergence function $F_B(\theta, t)$ (Equation (3.10)). Figure 3.2 illustrates the value of the goodness-of-fit C as a function of emergence parameters r^* , b , a , c , B^* , ℓ^* , and μ_ℓ for a set of 192000 solutions obtained from four independent optimizations (different seed populations), 500 generations each, 96 trial solutions per generation. In all four optimizations, the fitness reaches the same optimal value $C_{\max} = 0.94$. Such optimal solution, which parameters are listed in bold font in the rightmost column of Table 3.I, is presented in Figures 3.1(e) and 3.1(f). The fit between the emergence function (Figure 3.1(f)) and the smoothed butterfly diagram of cycle 21 emergences (Figure 3.1(h)) is good, with expected butterfly shapes and cycle overlaps.

However, it is clear from Figure 3.2 that considering only a single optimal solution is insufficient, optima being surrounded by a wide variety of sub-optimal but likely acceptable solutions, besides the clearly unacceptable ones. Also, all seven parameters presented are not equally constrained by the fitting procedure. By looking at all solutions standing above the $C \geq 0.935$ level (thick black line), we get a first estimate of the relative restriction applied on each parameter. For instance, parameters r^* , a , and B^* are fairly well constrained to a limited interval within the original boundaries, while parameters b , c , ℓ^* , and μ_ℓ show wider regions of acceptable fit.

In order to build meaningful error estimates for each parameter, we must assess the physical limit of validity of the optimization criterion. Clearly, there must exist a value of C above which solutions are physically acceptable, even if not strictly optimal. An example of such a solution, with $C = 0.92$, is presented in Figures 3.1(c) and 3.1(d). The butterfly shape in this solution is still clearly visible, though a second tail is starting to build towards the high latitudes. These differences are significant enough to declare such a solution inferior to the optimal one, but still at the limit of acceptability in terms of observed global features. The horizontal blue lines in Figure 3.2 delimit the solutions that are characterized by a criterion $C \geq 0.92$.

Before proceeding further into the parameters analysis, we now opt to get rid of the variability associated with the definition of the empirical emergence function (Equation (3.10)), and pick up definitive values, within the interval of acceptability, for the parameters involved. The inferred depth for the generation of flux instabilities is thus set near its optimal value $r^*/R = 0.68$, by averaging the magnetic field values between $r/R = 0.68$ and 0.70 . For simplicity, the relative contribution to B_{mix} of the poloidal field is set to zero ($a = 0$), while we round the optimal exponent of the toroidal contribution to $b = 1.5$. The lower threshold, above which this diffuse toroidal field is assumed to be able to generate instabilities, is set to its highest acceptable value, that is $B^* = 10^2$. The units of

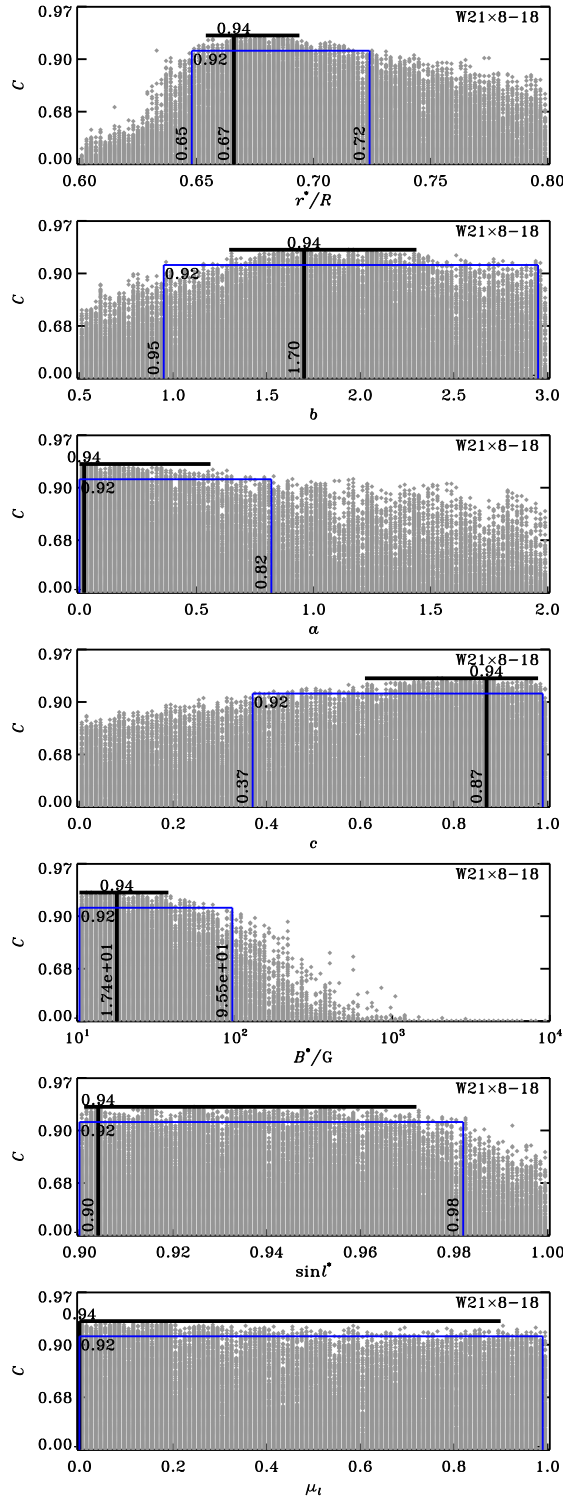


Figure 3.2 – Distribution of the fitness C (vertical inverse log scale) as a function of each of the seven “emergence” parameters (r^* , b , a , c , B^* , l^* , and μ_t). Each gray dot indicates the parameter-space position of one of the 192000 solutions obtained from four independent W21x8-18 optimizations. The remaining eleven parameters are not shown here since their final analysis is based instead on the W21x8-11 optimization (see Figure 3.4). On each plot, the thick horizontal line indicates the interval where $C \geq 0.935$, and the thick vertical line the parameter value where true maximum fitness $C = 0.94$ is reached. Thin vertical blue lines delimit the parameter values where fitness reaches $C = 0.92$, such that any solution above the horizontal blue line is considered acceptable.

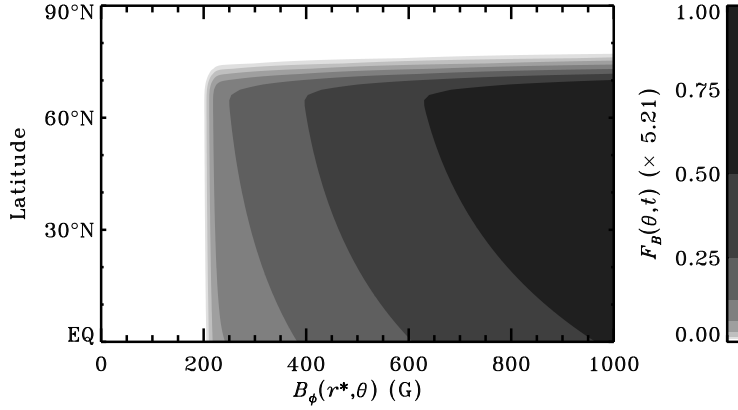


Figure 3.3 – “Stability diagram” used as a mask on the toroidal magnetic field component $B_\phi(r^*, \theta, t)$ shown in Figure 3.1(e), to produce the emergence function $F_B(\theta, t)$ shown in Figure 3.1(f). This corresponds to Equation (3.10) with $\delta B^* = 10^{-1} B^*$, and parameters b , a , c , B^* , ℓ^* , and μ_ℓ set to their final values, as listed in the rightmost column of Table 3.I.

B^* are in fact $G^{1.5}$ in the case $b = 1.5$ to ensure coherence in Equation (3.10). This corresponds to a lower threshold of $\simeq 200$ G in B_ϕ , as illustrated in Figure 3.3. The emergence function F_B remains proportional to B_{mix} , with $c = 1.0$, rather than saturating above B^* . The highest latitude of emergence is fixed to $\ell^* = 70^\circ$ ($\sin \ell^* = 0.94$), in accordance with stability diagrams by Ferriz-Mas et al. (1994), and the equatorial intercept μ_ℓ is set to 0.5, such that the latitudinal filter halves smoothly from $\ell^* = 70^\circ$ down to the equator. The final emergence function (i.e. emergence probability) can now be mapped as a function of latitude and toroidal field amplitude, as shown in Figure 3.3, to form a synthetic “stability” diagram, which is the model’s equivalent to the stability diagrams presented in Ferriz-Mas et al. (1994, Figures 1 and 2).

With the emergence function now fixed, we carry out a new series of four optimizations, hereafter called W21×8-11, with only the 11 physical model parameters (δ_c , R_b , u_0 , p , q , v , w , η_c , η_t , η_R , and τ_R) left to vary freely in their prescribed intervals. The corresponding 192000 solutions are presented in Figure 3.4 as a function of each parameter values. Again, the optimal fitness reaches $C_{\text{max}} = 0.94$, and all solutions characterized by a $C \geq 0.92$ are considered acceptable. The corresponding interval for each parameter is used to define final error bars about the optimal values, as listed in the rightmost column of Table 3.I. As mentioned earlier, various combinations of parameters within these accepted intervals lead to acceptable solutions, but not all do, due to various correlations between some pairs of best-fit parameters (see also discussion in Paper I, § 3.5). Figure 3.5 depicts two of the strongest such correlations uncovered in our W21×8-11 set of solutions. The left panel shows a net linear (anti)correlation between the surface meridional flow speed u_0 and one of the parameters (p) setting the depth dependence of the meridional flow in the interior (viz. Equation 3.3a). This (anti)correlation has an unambiguous physical explanation : it leads to all solutions near the red line having an equatorward

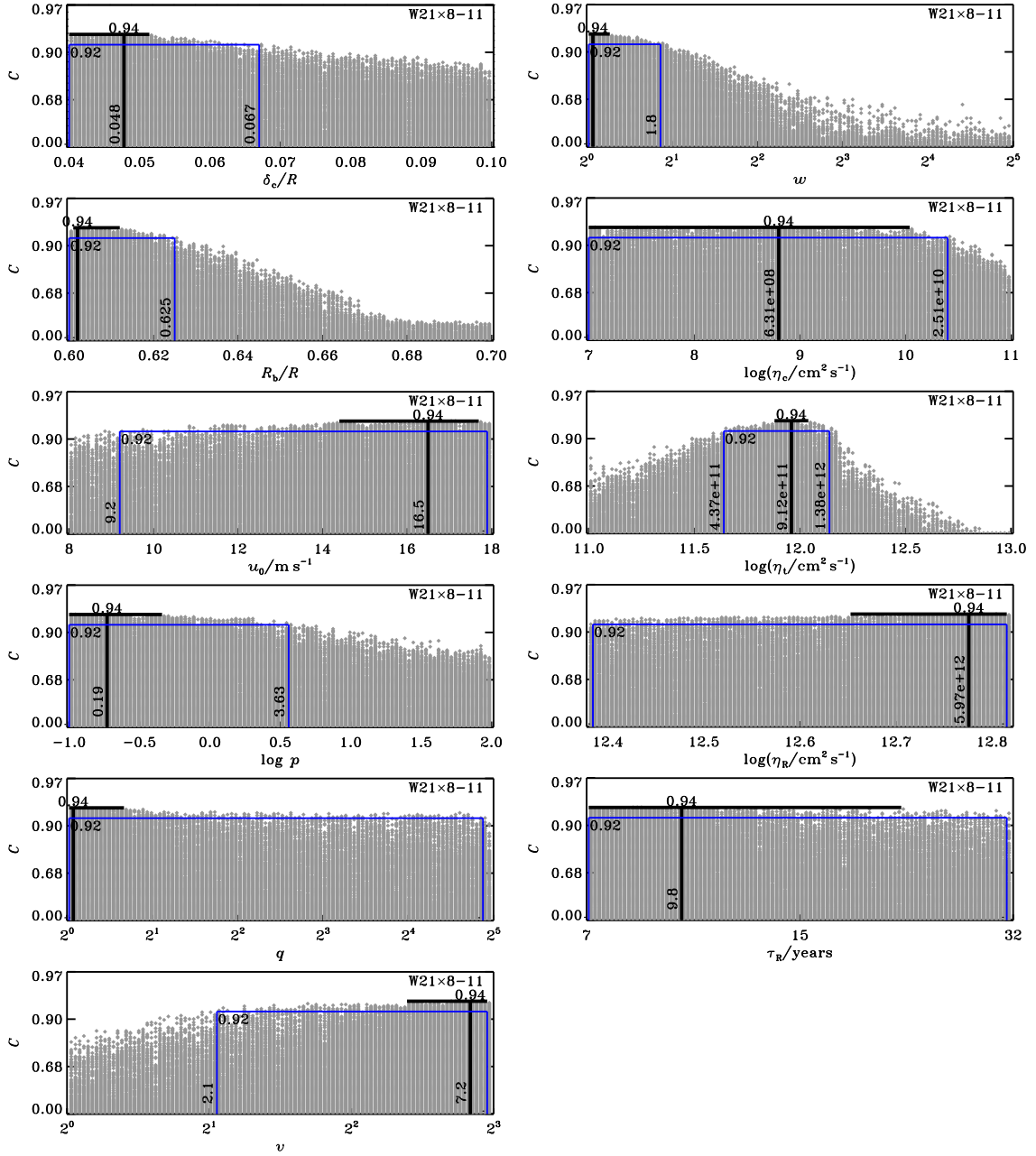


Figure 3.4 – Same as Figure 3.2, but for the eleven model parameters (δ_c , R_b , u_0 , p , q , v , w , η_c , η_t , η_R , and τ_R), from four independent W21x8-11 optimisations, while the seven “emergence” parameters are held fixed to their optimal value listed in Table 3.I.

meridional flow speed equal to $6.6 \text{ m s}^{-1} \pm 8\%$ at $r/R = 0.66$, that is below the base of the convective envelope, beneath the layer where the emergence function is calculated. It is the speed of this return flow that sets the cycle period, and thus is strongly constrained by the sunspot butterfly diagram used to establish our goodness-of-fit measure. The right panel of Figure 3.5 shows another correlation between a pair of parameters, in the form of a somewhat triangular constraint on parameter q , which

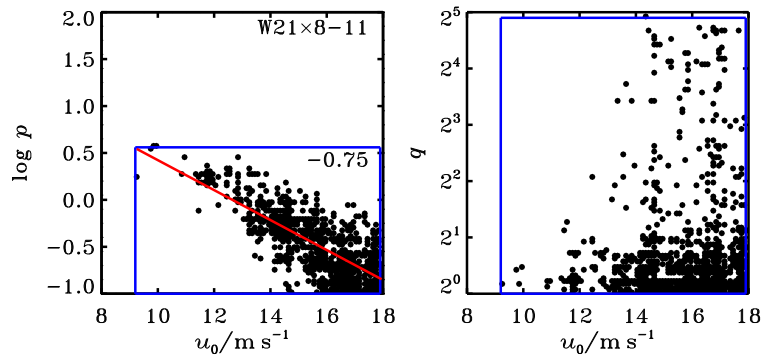


Figure 3.5 – Correlations between the best-fit parameter values for surface meridional flow speed u_0 and (left) depth variation parameter p and (right) latitudinal profile parameter q (see Equations (3.3a) and (3.3b)). The blue squares correspond to the $C \geq 0.92$ regions on Figure 3.4, third, fourth, and fifth panels at left. The linear best-fit (red line) and Pearson’s correlation coefficient are also shown on the left panel. In particular, despite the ranges of values for u_0 , p , and q , all these solutions have a peak equatorward flow speed of $6.6 \text{ m s}^{-1} \pm 8\%$ near $r/R = 0.66$.

controls the polar end of the latitudinal dependence of the meridional flow, as a function of maximum flow speed u_0 (viz. Equation 3.3b). This correlation sets a lower limit on the surface flow speed at mid–high latitude, of the order of $\gtrsim 5 \text{ m s}^{-1}$.

3.4 A SOLAR-LIKE DYNAMO SOLUTION

Now that the physical model and masking parameters have been properly calibrated to ensure that function $F_B(\theta, t)$ reproduces the observed solar butterfly diagram of surface emergences, we may use it as the statistical emergence function it was meant to be, i.e. providing the missing surface source term $S_{\text{BMR}}(\theta, \phi, t)$ with new emergences generated from deep seated toroidal flux (Equations (3.11a) and (3.11b)) and thus closing the loop for a self-consistent and autonomous $2 \times 2\text{D}$ dynamo.

In all following cases, we use as initial condition the simulation state at the end of the previously calibrated W21x8 sequences. This ensures that the new simulations start up from a state representative of a solar activity minimum.

3.4.1 QUASI-LINEAR REGIME

The linearity in \mathbf{B} of the FTD equations (3.7b) and (3.7a) and SFT equation (3.8) is expected to lead to either growing or decaying dynamo solutions. In the well-studied mean-field framework, this behavior is controlled by the “dynamo number”. Here it is the proportionality constant K between $F_B(\theta, t)$ and the absolute number of emerging BMRs per time step that plays the equivalent role. Since

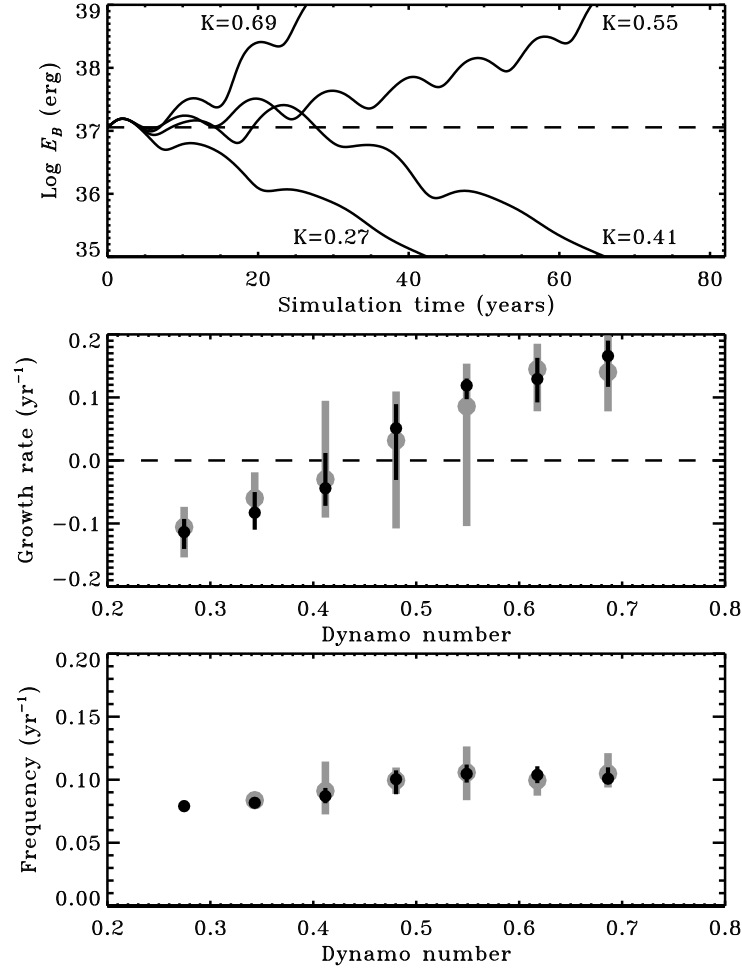


Figure 3.6 – Top panel : evolution of the total magnetic energy content inside the simulated Sun, for $\simeq 8$ -cycles sample realizations of a 2×2 D dynamo run in the quasi-linear regime at four different dynamo numbers K (horizontal dashed line indicates the initial energy level). Middle panel : long term growth rate of the magnetic energy as a function of dynamo number K , for ten independent realizations of (thick gray) the full statistical emergence procedure (cf. § 3.2.4.b, stochasticity sources (i) to (vi)) per value of K and of (thin black) a reduced stochastic emergence procedure (retaining sources (i) to (iv) only, and fixing bipole separations (v) and tilts (vi) at their observed mean values). Bottom panel : similar as the preceding panel, but for the oscillation frequency of the detrended magnetic energy.

$a = 0$ and $b = 1.5$ in the definition of B_{mix} , and $c = 1$ in Equation (3.10), the number of emerging BMRs is proportional to $B_\phi^{1.5}$ as long as the latter exceeds the lower threshold B^* . However, the emergence process itself is inherently stochastic, so the dynamo growth rate can only be defined in a statistical sense, hence the “quasi-linear” labeling.

The top panel of Figure 3.6 depicts the temporal evolution of the total magnetic energy content inside the simulated Sun, for $\simeq 8$ -cycles sample realizations of a 2×2 D dynamo run in the quasi-linear regime at four different dynamo numbers K . From these few samples, the transition between decaying (small K) and exponentially growing (large K) solutions seems sharp, but a more complete

analysis reveals otherwise. The middle panel of Figure 3.6 shows how the growth rate of the magnetic energy can show a wide spread at a given value of K . Error bars on the plot illustrate the intervals of growth rates obtained at each given K , through ten different realizations of the statistical emergence procedure described earlier (cf. § 3.2.4.b). We also performed a similar set of simulations in a reduced stochastic regime (shown in black on the plot). This reveals the strong global impact of stochasticity in the emergence process, particularly by the distributions in separations and tilts of emerging BMRs. The consequence is that a precise value for the critical dynamo number cannot be defined, with different realizations of the dynamo with $K \in [0.4, 0.6]$ resulting in dynamo solutions that can either grow or decay. The fact that this transition region lies significantly below the value $K \simeq 1$ required to reproduce the observed butterfly diagram for cycle 21 in the preceding section suggests that the dynamo should run in the supercritical regime, with some non-linear feedback regulating the mean cycle amplitude. This aspect will be discussed in the following subsection.

As another indicator of the model behavior, average cycle frequencies (periods) of the corresponding solutions, are also presented in the bottom panel of Figure 3.6, again with error bars showing the intervals of frequencies obtained for a given K . Considering the difficulty of measuring cycle periods in quickly decaying oscillatory solutions (low K), no strong trend appears from this plot. This suggests how robust is the model at producing oscillations on a 9 – 12 yr timescale, in spite of the strong variability associated with stochastic processes.

3.4.2 TILT-QUENCHING AND REFERENCE DYNAMO SOLUTIONS

To overcome the problem of (quasi-)linearity, but without dealing explicitly with dynamical feedback, some ad hoc quenching may be added to the dynamo source terms. Motivated by the modeling of the buoyant rise of thin magnetic flux tubes by D’Silva & Choudhuri (1993) and Caligari et al. (1995) (for a review see Fan 2009, § 5.1.2, and references therein), we introduce a quenching of the BMR mean tilt as a function of the amplitude of the contributing underlying toroidal field $B_\phi(r^*, \theta, t)$, in order to mimic the resistance of magnetic tension in strongly magnetized flux tubes against the twisting imparted by the Coriolis force. Observationally the situation is less clear-cut (see § 6 in Pevtsov et al. (2014) for a recent review). Dasi-Espuig et al. (2010) and McClintock & Norton (2013) do find an influence of cycle amplitude on mean tilt angles, varying from cycle to cycle and from one solar hemisphere to another, but Stenflo & Kosovichev (2012) do not find a statistically significant relationship between tilt angles and flux of individual BMRs.

The quenched tilt is written

$$\alpha_q = \frac{\alpha}{1 + (B_\phi/B_q)^2}, \quad (3.12)$$

with B_q some adjustable critical magnetic field amplitude. In the context of the present dynamo model, we find a tilt-quenching with $B_q \simeq 500$ G, at dynamo number $K = 0.75$, to be adequate to generate

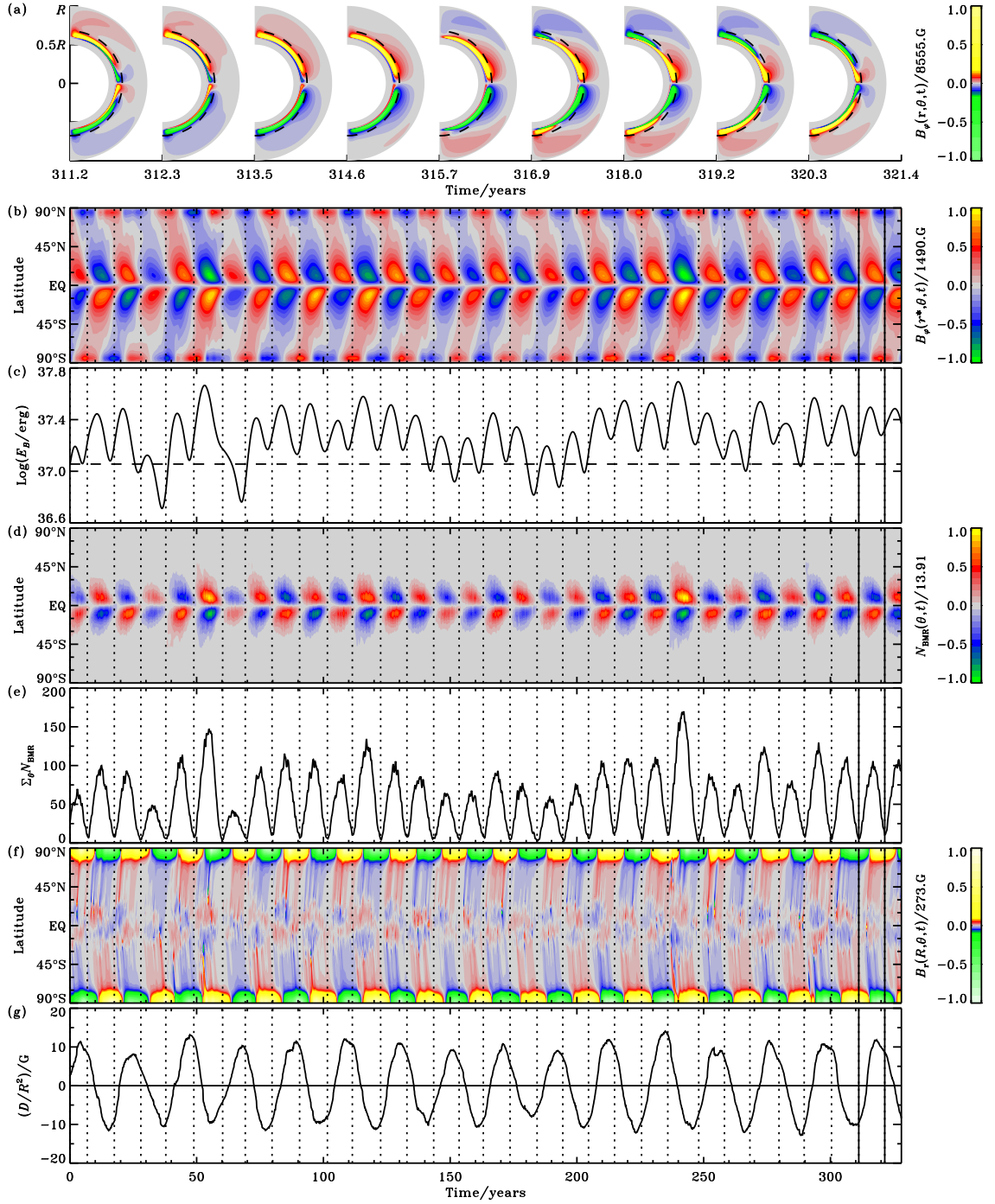


Figure 3.7 – A representative solar-like tilt-quenched $2 \times 2\text{D}$ dynamo solution obtained using the optimal parameter values listed in the rightmost column of Table 3.I. (a) Latitude–radius snapshots of the toroidal magnetic field between $r/R = 0.5$ and 1.0 , at nine different phases of the dynamo cycle delimited by two vertical continuous lines in the following plots (color table saturates above 1.5 kG ; dashed lines indicate the depth of the tachocline ($r/R = 0.7$)). (b) Time–latitude contour plot of the toroidal magnetic field averaged in the depth range $0.68 \leq r^*/R \leq 0.70$; (c) corresponding temporal evolution of the total magnetic energy content inside the simulated Sun ($0.5 \geq r/R \geq 1.0$; horizontal dashed line indicates the initial energy level). (d) Time–latitude density plot (butterfly diagram) of the number of BMRs emerged at the surface, as dictated by the emergence function F_B , in turn based on the preceding toroidal field amplitude; (e) corresponding monthly number of newly emerged BMRs (pseudo-SSN), as a function of time. (f) Time–latitude contour plot of the surface radial magnetic field (color scale saturated above 27 G); (g) corresponding temporal evolution of the surface axial dipole moment. Vertical dotted lines indicate the times of activity minima as defined by the minimum values of the pseudo-SSN.

stable dynamo solutions, comparable to solar amplitudes for the butterfly density plot and the monthly number of newly-emerged BMRs. The latter we refer to as a “pseudo-SSN”, since no consideration is given here to distinguishing groups vs individual emergences, or assigning them different weights, as is the case in the definition of the International Sunspot Number (SSN). For instance, observed cycle 21 peaks at a SSN of $\simeq 175$ while the maximum monthly number of newly-emerged BMRs in Wang & Sheeley (1989)’s database is $\simeq 50$.

Figure 3.7(b)–(g) illustrate the evolution of the deep toroidal field, total magnetic energy, BMRs density, pseudo-SSN, surface radial field, and axial dipole moment for a sample dynamo solution run over more than 300 years and roughly 32 synthetic solar cycles. The temporal series exhibit solar-like behaviors in many aspects, in particular cycle periods varying between 8.5 and 12 years, cycle amplitude variations of a factor three to four in the pseudo-SSN, and long term variability such as some progressive increase of cycle amplitude after the occurrence of a weak cycle or the triggering of small cycles after very strong ones. Some significant hemispheric asymmetries are also noticeable on the various plots, but polarity reversals remain sharply synchronized, indicating strong cross-hemispheric coupling. The oscillating surface axial dipole moment peaks at or near pseudo-SSN minimum, in agreement with observations. The phase relationship between the surface dipole and deep-seated toroidal field is also solar-like, with the dipole peaking at or shortly prior to pseudo-SSN minimum.

The overall amplitude of this dynamo solution is however slightly higher than that of the average solar cycle. The axial dipole moment (panel (g)) oscillates with an amplitude of $\simeq 10 \text{ G} \cdot R^2$ as compared to $\simeq 4 \text{ G} \cdot R^2$ for the Sun. The pseudo-SSN (panel (e)) peaks between $\simeq 50$ and $\simeq 150$, which is slightly higher than average solar cycle amplitude ($\simeq 50$ for cycle 21). This corresponds to 50 – 150 emergences per month near cycle maxima down to 0 – 10 per month at cycle minima. The total number of BMRs to emerge during a cycle varies from $\simeq 2000$ for the smallest cycles to $\simeq 8000$ for the strongest ones, which is comparable, but again slightly higher in average, than the original $\simeq 3000$ BMRs extracted from Wang & Sheeley (1989)’s database for cycle 21. Due to the use of a constant log-normal distribution for BMR magnetic fluxes, total magnetic flux emerged during a cycle scales linearly with the number of BMRs. Finally, most presumably due to the use of a suboptimal profile for the surface meridional circulation leading to extra flux accumulation near the poles at activity minima, the peak amplitude of the radial surface field (panel (f)) builds up at an order of magnitude stronger than observed. At any rate, a dynamo number $K \lesssim 1$ is more than sufficient to maintain stable dynamo solutions, with only the BL mechanism operating and without having to artificially enhance the emerging flux (see also Cameron & Schüssler 2015). The value of K used here for the reference dynamo should even be brought down a little to better fit solar cycle observations.

Also shown in Figure 3.7(a) is a series of radius–latitude cuts of the toroidal field component, at nine different phases of a synthetic sunspot cycle. The toroidal field reverses amplitude after $\simeq 9$ yr, which is slightly shorter than the average observed sunspot cycle. The peak toroidal field amplitude near

$r/R = 0.7$ is reached at mid-cycle, near maximum sunspot activity. Below the tachocline, the magnetic field from three to four successive cycles piles up to thinner and thinner layers as it reaches the depth $r/R = 0.6$. This is precisely what is to be expected from the average diffusivity $\eta \simeq 5 \times 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ used at $0.6 \geq r/R \geq 0.7$, which corresponds to a diffusive time-scale of $\simeq 31$ years. Below $r/R = 0.6$, the magnetic diffusivity of $10^9 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, leads to a diffusive time-scale $\gtrsim 1000$ years. Therefore, while the meridional circulation acts on a time-scale commensurate with the sunspot cycle period, the deep diffusive processes act on much longer timescales. The remnants from old cycles appear to be able to feed back into the dynamo system and induce some long term memory in cycle amplitude.

Figure 3.8 shows some long term interrelations between cycle properties, extracted from the preceding dynamo solution. Panel (c) in the figure shows the strong linear correlation (0.89) obtained

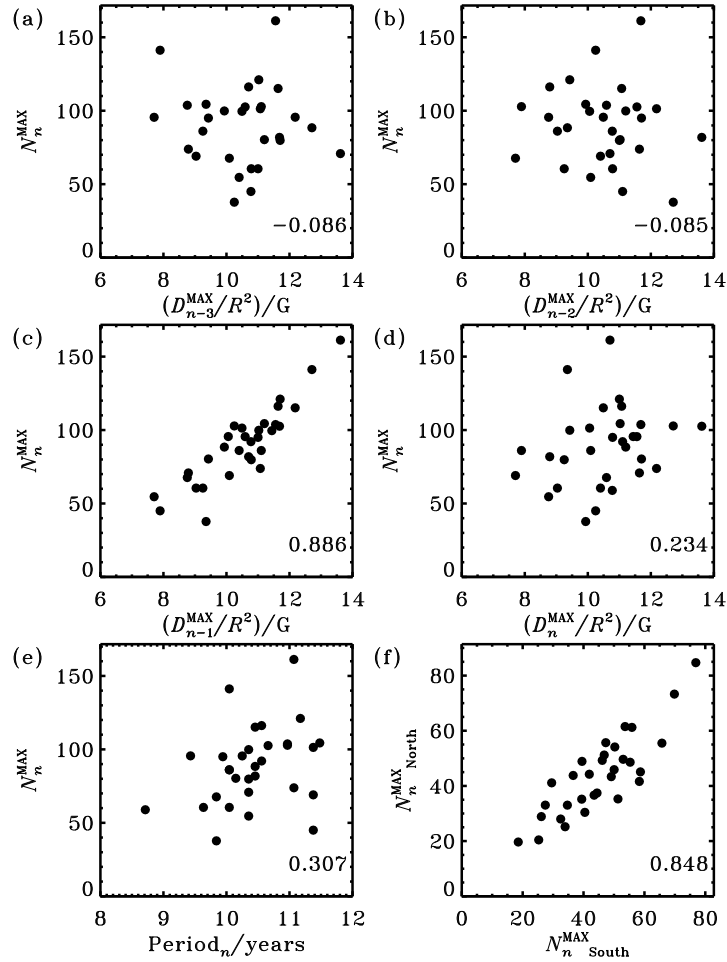


Figure 3.8 – Amplitude (maximum pseudo-SSN) of cycle n as a function of maximum axial dipole moment at the end of (a) cycle $n - 3$, (b) cycle $n - 2$, (c) cycle $n - 1$, and (d) cycle n , for the sample dynamo solution presented in Figure 3.7. (e) Cycle amplitude as compared to the period of the same cycle. (f) Cycle amplitude calculated independently in each hemisphere and plotted against one another. In each panel is also given the corresponding Pearson's linear coefficient.

between amplitude (maximum pseudo-SSN) of a cycle (n) and maximum axial dipole moment at the end of the preceding cycle ($n - 1$). This behavior is to be expected from the quasi-linear transport and shearing of the poloidal magnetic field accumulated at cycle minimum into a deep toroidal component peaking at cycle maximum and generating a proportional number of surface emergences. As shown in panel (d) of the figure, the reverse correlation is not true, however, as the stochastic properties of emerged BMRs during a given cycle n destroy the otherwise expected correlation between pseudo-SSN and axial dipole amplitude at the end of the same cycle (n). Also, even if long term magnetic memory does exist in the interior, the poor correlations obtained between amplitude of cycle n and axial dipole moment at the end of cycles $n - 2$ (panel (b)) and cycles $n - 3$ (panel (a)) indicate that it is erased by the stochasticity of flux emergence. Despite these stochastic sources of fluctuations, hemispheric cycle amplitudes remain strongly correlated, as shown in Figure 3.8(f). All the preceding results are in good agreement with observed solar cycle characteristics (see, e.g., Muñoz-Jaramillo et al. 2013, Figure 5).

As also shown in panel (e) of Figure 3.8, cycle amplitude and period are essentially uncorrelated. This differs from the behavior observed in the Sun, where a significant anticorrelation is inferred between these two cycle measures. Some additional dynamical feedback would likely be required to reproduce such behavior.

3.4.3 LONG TERM VARIABILITY

Figure 3.9 shows the Fourier transforms of the pseudo-SSN time series, for a sample 32-cycles tilt-quenched 2×2 D dynamo simulation similar to the reference solution of Figure 3.7, along with the average spectra constructed from three statistically independent realizations of a 96-cycles simulation. The relatively poor sampling of the 32-cycles simulation shows spectral features similar to those of the 23-cycles solar SSN spectrum (also shown in the figure), in that it presents a broad peak between periods of 9 to 12 yr (8 to 14 yr for the SSN) as well as low amplitude (5 – 10 % of peak power) structures at other frequencies. However, these secondary features occur at different frequencies for the SSN and for different realizations of the pseudo-SSN, and so do not represent physically robust signals. Indeed, the averaging of three 96-cycles spectra (equivalent to $\simeq 300$ cycles in total) reveals no hint of low-frequency signature above 2 % of peak power, of the type one would associate with the so-called Gleissberg or Suess cycles detected in temporally-extended records of solar activity. The cycle period is also much more robust, at 9.5 – 11 yr. These results indicate that despite the strong variability in cycle amplitude characterizing the simulations, the period is very stable, even more so than in the real Sun.

Figure 3.10 shows two sets of synthetic butterfly diagrams and associated pseudo-SSN time series, obtained for the same parameter values as the solution of Figure 3.7 but using distinct stochastic realizations for the fluctuating properties of the synthetic BMRs. The top solution generally resembles

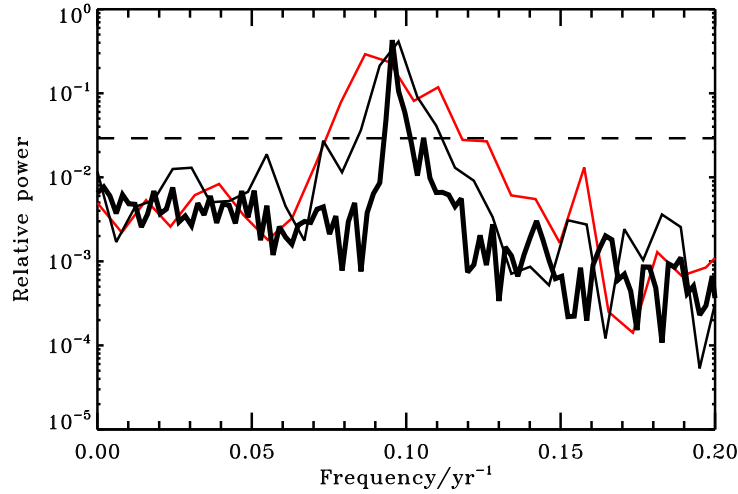


Figure 3.9 – Temporal power spectra of the solar SSN (thin red), of the pseudo-SSN of a sample 32-cycles tilt-quenched $2 \times 2D$ dynamo simulation (thin black), and of the pseudo-SSN averaged over three independent realizations of a 96-cycles simulation (thick black). In all three cases, the Fourier transform was performed on a signed version of the temporal series, with amplitudes alternatively reversed from one cycle to the next to impose an oscillation about zero, and the frequencies subsequently multiplied by two to retrieve the $\simeq 10$ yr sunspot cycle characteristic period. The horizontal dashed line marks 10 % of the peak spectral power.

panels (d) and (e) of Figure 3.7 in its overall amplitude fluctuation pattern, but now also shows an episode of strongly reduced cycle amplitude, persisting here for four cycles ($84 \leq t \leq 132$ yr) and reminiscent of the 1796–1825 Dalton minimum of the sunspot record. Entry into this low amplitude episode is sudden, the preceding few cycles being of average amplitude or higher. Recovery is however more gradual, with a few cycles required for the cycle to build back up to its pre-event average amplitude.

The solution plotted on the two bottom panels of Figure 3.10 shows yet another interesting behavior : a complete halt of the cyclic dynamo, here at $t \simeq 150$ yr, following a sequence of unfavorably positioned and/or tilted large BMRs, leading to a much reduced dipole moment building up in the descending phase of the cycle peaking at $t \simeq 118$ yr. Because of the lower cutoff B^* built into our emergence function (viz. Equation (3.10) herein), once the toroidal magnetic field falls below this threshold, BMRs are no longer produced, so that the existing dipole then undergoes simple resistive decay, followed by resistive decay of the toroidal component, as per Cowling’s theorem. A distinct inductive mechanism able to operate at low mean-field strengths, such as the alpha-effect of classic mean-field electrodynamics, would be needed here to restart the dynamo cycle (see, e.g., Passos et al. 2014). Ongoing numerical experiments along these lines suggest that this would be a feasible path towards the generation of solar-like Grand Minima of activity.

In a set of 30 realizations similar to the one displayed in Figure 3.7 and the two in Figure 3.10, seven shut off before reaching the 32th cycle, and 15 before reaching the 96th cycle. The probability

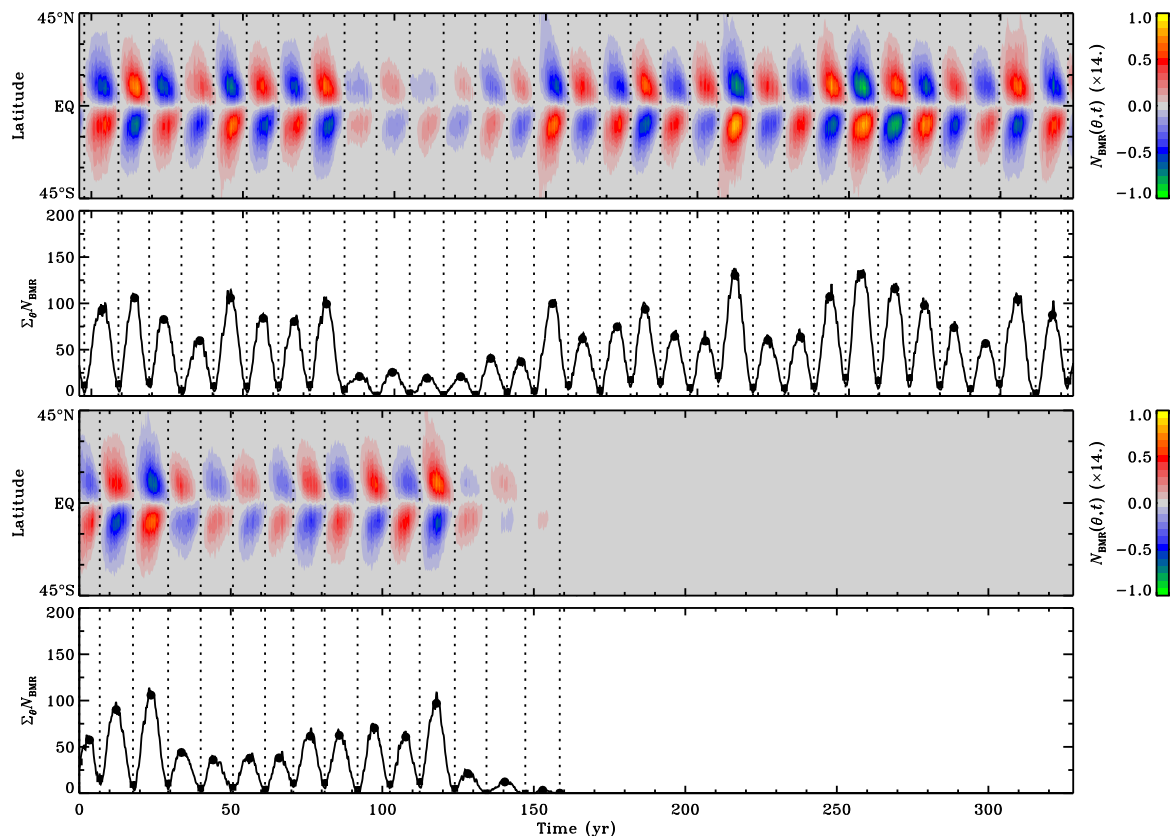


Figure 3.10 – Time–latitude density plot (butterfly diagram) and corresponding monthly number (pseudo-SSN) of newly emerged BMRs, for two distinct realizations of a 32-cycles tilt-quenched 2×2 D dynamo simulation using the same optimal parameter values used to produce the reference solution of Figure 3.7 (viz. panels (d) and (e)).

of a dynamo to remain active after a certain number of cycles thus decreases with time in a manner that appears consistent with a stationary memoryless random process, as would be expected from the stochastic nature of the properties of emerging BMRs built into the model. A detailed, quantitative investigation of these matters, currently underway, will be the focus of a subsequent paper in this series.

3.5 DISCUSSION

The dynamo solutions presented above result from the use of a model calibrated to cycle 21 emergence data through an optimization process operating on a specific goodness-of-fit measure and in a bounded search space. These bounds were set (loosely) on observational and/or physical grounds, but obviously pose a restriction on the range of solutions accessible to the optimization. Could we

do better than the optimal solution listed in Table 3.I? We have carried out a number of alternate optimization runs in order to answer this question, as described in what follows.

An 18-parameter optimization similar to that described in § 3.3.5 but using much broader ranges of parameter does manage to return a best-fit solution with $C = 0.97$, significantly better than the original 18-parameter best-fit solution, which has $C = 0.94$. This nominally superior fit, however, is achieved through a low-latitude cutoff for the emergence function, down to $\ell^* = 30^\circ$, which is clearly incompatible with stability diagrams for thin toroidal flux ropes.

We also carried out optimization runs in which the parameters defining the latitudinal dependence of the meridional flow (via Equations (3.3a)—(3.3b)) are constrained to a narrower range of acceptable values, corresponding to the best-fit surface flux transport solution obtained in Paper I by fitting actual synoptic magnetograms, rather than just the spatiotemporal distributions of BMR emergences. The best-fit solution from such an optimization reaches only $C \simeq 0.86$, which is much less satisfactory than the $C = 0.94$ best-fit solution. More worrisome is the fact that the surface meridional flow for the best-fit solution and error bars of Table 3.I, plotted in Figure 3.11 (dark gray band), provides a rather poor fit to the Doppler observations of Ulrich (2010), which lie mostly outside the range of acceptable solutions from the optimization run. The best-fit profile of Paper I did much better in this respect (reproduced herein as the pale gray band in Figure 3.11).

This suggests some incompatibility between the optimization of the SFT model relative to surface magnetograms and the optimization of the coupled SFT–FTD model relative to the shape of the suns-

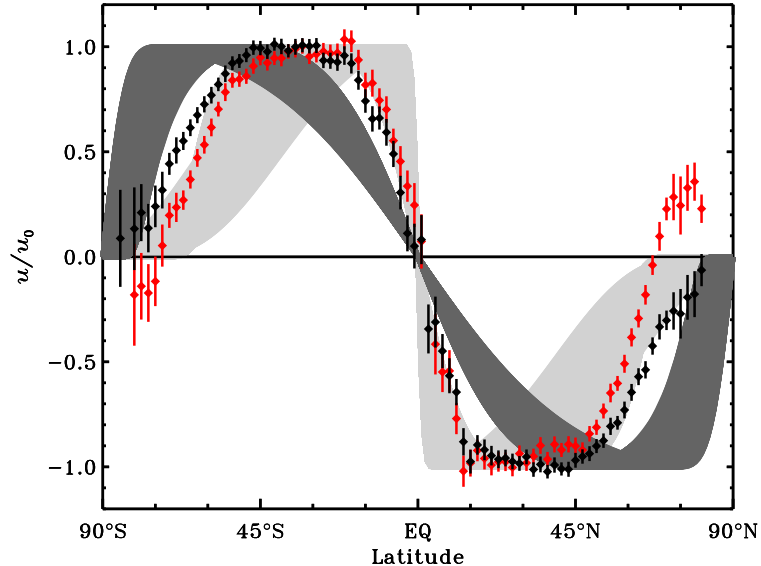


Figure 3.11 – Observed and modeled latitudinal profiles of surface meridional flow. The dark gray band indicates the range of acceptable profiles in the W21×8-11 optimal solution of § 3.3.5, while the pale gray band indicates the acceptable range obtained in Paper I by fitting the full synoptic magnetograms. The solid dots and error bars are the Doppler measurements of Ulrich (2010) for cycles 22 (red) and 23 (black).

pot butterfly diagram. The W21×8-11 optimal solution of § 3.3.5 still lies within the surface-optimized ranges for the maximum meridional flow amplitude u_0 , the surface diffusivity η_R , and the exponential decay time τ_R obtained in paper I, while the parameters q , v and w (see Equation (3.3b)), setting the latitudinal dependence of the stream function, do not. Interestingly, despite significant variations in latitudinal profiles, all acceptable solutions ($C \geq 0.92$) have a peak equatorward meridional flow speed of $6 - 7 \text{ m s}^{-1}$ near the base of the circulation cell; this is consistent with the deep meridional flow setting the cycle period in these dynamo solutions, which leads to a very tight constraint when fitting the butterfly diagram.

The analytic form adopted here for the meridional flow stream function is of course extremely simple : steady and separable in r and θ , which enforces the same latitudinal dependence at all depths, and defining a single flow cell per meridional quadrant. What our butterfly diagram-based goodness-of-fit measure thus constrains is primarily the flow at the base of the convection zone. The misfit with the results from purely surface optimization suggests that the internal flow is more complex than the single-cell profile used here. Indeed, the recent helioseismic inversions of Zhao et al. (2013) and Schad et al. (2013) suggest multiple cells in radius, which is known to have a large impact on the operation of flux transport dynamos (e.g., Jouve & Brun 2007). The dynamo modeling work of Hazra et al. (2014a) indicates, however, that provided additional transport processes such as turbulent diffusion and/or pumping can couple the surface and base of the convection zone, solar-like butterfly diagrams can be produced as long as an equatorward flow is present at or immediately beneath the base of the convection zone (see also Jiang et al. 2013).

Another physical inconsistency of the W21×8-11 optimal solution is the meridional flow’s deep penetration below the base of the convection zone. This is known to be conducive to the production of solar-like butterfly diagrams (e.g., Nandy & Choudhuri 2002), but unlikely on dynamical grounds (Gilman & Miesch, 2004), and delicate to reconcile with observed solar light element abundances (Charbonneau, 2007). Finally, both observations (Ulrich, 2010)³ and numerical simulations (Passos et al., 2012) suggest that the meridional flow may undergo systematic temporal variations in the course of the cycle, presumably driven by the cycling magnetic field. Such effects are *a priori* excluded from the meridional flow parametrization used here.

All these incompatibilities and inconsistencies most likely reflect, at least in part, the specific choices made for the parametrization of the meridional flow profile. An interesting possibility would be to use our GA-based fitting technique to invert a spatially-resolved discretization of the internal meridional flow from the sunspot butterfly diagram. Such a method, dubbed genetic forward modeling, has already been used successfully to infer the rotational profile of the deep solar core from low- ℓ rotational frequency splittings (see Charbonneau et al. 1998).

Genetic forward modeling could also be used to invert stability diagrams for the emergence of

³Post-publication note : (see also Hathaway & Rightmire 2010, 2011)

BMRs. Our best-fit emergence function has $a = 0$ in Equation (3.10), implying that the emergence probability is primarily set by the strength of the toroidal magnetic component, in agreement with the idea that sunspots form from axisymmetric toroidal magnetic flux ropes located at or near the base of the convection zone. However, our eruption threshold of $\simeq 200$ G is rather low, even if some level of amplification is expected in forming a compact flux rope from a diffuse magnetic field. There is clearly room for improvement in this model component.

3.6 CONCLUSIONS

In this paper we have described a new solar cycle model based on the Babcock–Leighton mechanism of poloidal field regeneration through the surface decay of active regions. This new model is based on the coupling of a conventional latitude–longitude simulation of surface magnetic flux evolution (as described in Paper I), coupled to an equally conventional axisymmetric kinematic flux transport dynamo model defined in a meridional plane (closely following Charbonneau et al. 2005). The novelty lies in the coupling between these two model components: the surface flux evolution simulation provides the source term of the internal dynamo through the surface boundary condition; while the internal dynamo provides the magnetic flux emergence, in the form of pseudo-sunspot bipolar pairs, that act as a source in the surface magnetic flux simulation. The properties of these synthetic bipolar pairs—flux distribution, component separation, tilt angles, etc—are tailored to reflect observed statistical properties of real sunspots and active regions, as documented in Paper I (Appendix).

The other key aspect of the coupling is the emergence function, which controls the probability of bipole emergence as a function of the spatiotemporal distribution of the deep-seated magnetic field produced by the dynamo component of the coupled model. The emergence probability is assumed to scale linearly with this emergence function, with the proportionality constant acting as the dynamo number for the full coupled model.

The coupled model involves a number of parameters and functionals that cannot be set from first principle, and thus must be optimized to provide the best possible fit to solar observations. We opted to carry out this optimization task through a genetic algorithm-based maximization of the fit between the spatiotemporal distribution of sunspot emergences (butterfly diagram) as produced by the model, and the cycle 21 emergence data of Wang & Sheeley (1989). This scheme returns not only a globally optimal solution, but also Monte Carlo-like error estimates on best-fit parameters values.

The magnetic cycles generated by this dynamo model are intrinsically non-steady, due primarily to the large statistical scatter about the mean East–West tilt pattern of BMRs (as embodied in Joy’s Law). This is expected, since the axial dipole component of the bipolar pair is determined by this tilt.

As a consequence, a critical dynamo number can only be defined in a statistical sense.

A quenching parametrization of the mean tilt angle based on the strength of the internal magnetic field readily stabilizes the mean cycle amplitude, but large fluctuations about this mean nonetheless persist. Such a quenching is consistent with the modeling of the buoyant rise of thin magnetic flux tubes (see Fan 2009, § 5.1.2, and references therein), and, at the relatively mild level taking place in our dynamo model, does not conflict with extant observational analyses (see Pevtsov et al. 2014). One consequence of tilt quenching is that a very high amplitude cycle tend to be followed by a lower-than-average cycle. This alternation would tend to amplify over time were it not for the stabilizing effect of the linear sink term used in Equation (3.8) with $\tau_R = 10$ yr. Very low amplitude cycles can also be produced by unfavorable emergence patterns, which then lead to persistently low amplitudes in subsequent cycles, with slow recovery to normal amplitude values.

Even though the amplitude of successive simulated cycles are strongly affected by the specific stochastic realization of flux, separation and tilts in the course of a given cycle, even in the linear regime the cycle period is largely insensitive to the value of the dynamo number. The magnetic cycle is also characterized by good hemispheric coupling, in terms of both hemispheric cycle amplitude and timing of hemispheric minima/maxima.

As a descriptive representation of the observed solar cycle, the model reproduces a number of well-known features. The dipole peaks at or slightly before the time of pseudo-sunspot cycle minimum, and its amplitude shows no correlation with the maximum pseudo-sunspot number of the ending cycle. This is a direct consequence of the strong stochasticity introduced by the realization of tilt patterns throughout the cycle, which is the primary source of cycle amplitude fluctuations. However, the model reproduces the observed positive correlation between dipole strength at cycle minimum and the amplitude of the subsequent pseudo-sunspot cycle. This indicates that, as in the real Sun, the dipole moment generated in the model is a good precursor of cycle amplitude.

Room for improvement certainly remains. The model fails to reproduce the observed moderate anticorrelation between cycle amplitude and duration, yielding instead a very weak positive correlation between these two quantities. While a few extant kinematic flux transport dynamo models do better in this respect (e.g., Karak & Choudhuri 2011), another possibility is that the origin of this pattern is to be found in dynamical effects, namely the magnetic backreaction on large-scale flows. The recent analyses of Passos et al. (2012) suggest that an increase in the speed of the deep equatorward meridional flow may indeed be driven by a higher-than-average large-scale magnetic field, which in advection-dominated flux transport dynamos would be expected to lead to a proportional reduction in cycle period (see, e.g., Dikpati & Charbonneau 1999).

The long timescale behavior of the simulated cycles also shows some interesting features, some solar-like and others less so. The model produces a very stable cycle period of 9.5–11 years, but no well-defined low-frequency spectral peaks that could be associated with Gleissberg-like long periodicities.

The model does produce occasional Dalton-minimum-like periods of successive low amplitude cycles, and can also spontaneously shut down the cycle and enter a non-cycling grand-minima-like state, through an unfavorable stochastic pattern of bipolar pseudo-sunspot emergences in the course of a cycle. This is a relatively common occurrence for a simulation using the best-fit parameter values obtained in § 3.3 : more than one half of simulations initialized with distinct random seeds were found to undergo shutdown at some point during a 100-cycle long time span.

In subsequent papers in this series we will investigate cycle fluctuation patterns in greater detail, and quantify the occurrence statistics of Dalton-like minima. The few such events found so far in our extant simulation runs suggest that entry into these failed minima is rapid, from one cycle to the next, while recovery to average cycle amplitudes is more gradual. We also plan to add a weak turbulent alpha-effect in the convective envelope portion of the domain, and investigate whether this can pull the model out of a shutdown state, as existing simulations have already suggested (e.g., Ossendrijver 2000; Karak & Choudhuri 2013; Hazra et al. 2014b).

Because it includes an explicit, spatially-resolved representation of the solar “surface”, the $2 \times 2D$ solar cycle model presented here is ideally suited for providing synthetic data for coronal magnetic field reconstructions, as well as for assimilation of magnetographic data towards solar cycle forecasting. The results presented in this paper indicate that an accurate determination of the tilt angles of individual emerging bipolar sunspot pairs will be a critical element of such latter endeavor.

ACKNOWLEDGMENTS

We wish to thank Yi-Ming Wang and Neil R. Sheeley, Jr. for kindly providing us with their comprehensive database of bipolar emergences for cycle 21 and Roger Ulrich for his compilation of latitudinal flow measurements and error estimates. This research was funded by a graduate research fellowship of the Fonds de Recherche du Québec Nature et Technologies (A. L.) and the Discovery Grant Program (P. C.) of the Natural Science and Engineering Research Council of Canada. Calculations were performed on Calcul Québec’s computing facilities, a member of Compute Canada consortium.

CHAPITRE 4

CONCLUSION

4.1 RÉSUMÉ

Deux approches, aux fondements essentiellement opposés, peuvent être adoptées lorsque vient le temps de modéliser un phénomène (physique) observé : d’une part, intégrer d’un coup un maximum de lois (physiques) fondamentales connues, afin de représenter le plus fidèlement possible l’ensemble des phénomènes fondamentaux présents (approche “ab initio”), puis analyser le comportement des solutions (complexes) obtenues pour comprendre leur correspondance, ou non, à la réalité que l’on désire représenter ; d’autre part, approcher le problème de manière plus “phénoménologique”, en expliquant progressivement les observations une à une, cherchant les causes, les reliant entre elles par des modèles d’abord simplistes, puis complexifiant progressivement le modèle global, le généralisant, pour enfin se rapprocher des lois (physiques) préalablement connues. C’est cette seconde approche que nous avons adoptée pour notre modèle, en mettant l’accent sur la correspondance aux observations, tout naturellement explicables par la logique du mécanisme de Babcock–Leighton (BL). À l’inverse, les modèles tridimensionnels (3D) magnétohydrodynamiques (MHD) complets (comme EULAG-MHD, aussi en cours d’étude par le Groupe de Recherche en Physique solaire (GRPS) ; voir Ghizaru et al. 2010), incluent un maximum de principes physiques, dans un Soleil 3D fictif, pour l’instant assez éloigné des observations puisque ne proposant pas de représentation de la surface solaire. Bien sûr, comme dans tout processus de modélisation, l’objectif ultime sera de tendre vers l’unification des deux approches en un résultat cohérent.

Ainsi, dans la logique phénoménologique du modèle de type BL, l’introduction de cette thèse a porté une attention toute particulière à présenter de façon détaillée les observations de surface du Soleil (Sections 1.1 et 1.2). On y a décrit le cycle d’activité solaire, ses origines magnétiques, les distributions de flux magnétique du maximum au minimum d’activité, les écoulements observés en surface (granulation, supergranulation, rotation différentielle, écoulement méridien, écoulements convergents), les distributions d’éléments magnétiques (réseau magnétique, régions magnétiques bipolaires (BMR) éphémères et actives, leur flux, leurs caractéristiques d’émergence).

Puis, deux façons de modéliser cette surface ont été décrites (Section 1.3). Une première approche consiste à traiter directement la marche discrète des millions de minuscules éléments magnétiques de la photosphère, leur fragmentation, collision, vers l'équilibre neutre du réseau tranquille et vers la construction de structures unipolaires à grande échelle, parsemées d'éléments "perturbateurs" aux petites échelles. Une seconde approche consiste plutôt à traiter le champ magnétique de surface comme un continu de champ radial diffus, généré par des courants électriques aux grandes échelles et répondant donc aux lois d'induction électromagnétique (équation MHD). La première approche, plus phénoménologique, a l'avantage de mieux représenter les distributions magnétiques observées aux petites échelles. La seconde permet un meilleur appui sur les lois physiques fondamentales et un arrimage direct avec les modèles dynamo internes du Soleil. C'est pourquoi nous avons opté pour la seconde méthode : la simulation "surface flux transport (SFT)".

L'avantage des simulations numériques détaillées de la surface solaire, c'est que leurs résultats peuvent être comparés directement et formellement aux observations précédemment décrites. À ce sujet, probablement rien plus près des observations que la méthode d'assimilation de données magnétographiques utilisée par Upton & Hathaway (2014) pour prédire l'activité en fin de cycle 24. La méthode consiste à utiliser une simulation SFT, gouvernée par les écoulements de surface observés en temps réels et à laquelle on ajoute les nouvelles émergences de flux magnétique directement à partir des magnétogrammes. D'une autre façon, davantage indépendante des observations en temps réel, l'étude décrite au Chapitre 2 (Lemerle et al. (2015) (Article I)) permet aussi une comparaison directe et formelle aux observations. Après avoir analysé de façon détaillée les statistiques d'émergence des BMR pour les cycles 12 à 23, afin de produire un algorithme synthétique d'émergence (Annexe 2.A), nous y avons produit une optimisation formelle de la simulation SFT, sur la base du magnétogramme synoptique observé pour le cycle 21. Nous avons ainsi obtenu pour la première fois des contraintes physiques formelles (valeurs optimales et barres d'incertitude) sur un ensemble de paramètres typiques de ce genre de modèles, autrement mal contraints par les observations.

Cependant, l'inconvénient des simulations SFT seules, aussi précises et collées sur les données soient-elles, c'est qu'elles restent limitées à la surface. Elles ne tiennent pas compte des processus internes et ne peuvent donc en aucun cas espérer reproduire la boucle dynamo BL entière : transport du champ poloïdal vers les profondeurs, inversion du champ toroïdal, production des émergences et, résultat complet, inversion cyclique du champ magnétique solaire. Pourvu qu'on leur fournisse les émergences de BMR adéquates, les simulations SFT peuvent très bien performer durant le cycle, en particulier du maximum au minimum d'activité suivant, mais ne pourront aucunement générer le cycle qui suit. C'est précisément le souhait de rallier le meilleur de ces deux mondes, de la dynamo interne et de la SFT collée aux observations, qui nous a mené à la création du modèle dynamo BL couplé $2 \times 2D$ présenté au Chapitre 3 (Lemerle & Charbonneau (2017) (Article II)). Pour cela, nous avons d'abord présenté en introduction (Section 1.4), un éventail assez complet des modèles dynamo

cinématiques existants, de la simple représentation axisymétrique d'un champ diffus, sans surface bidimensionnelle (2D), aux modèles BL 3D lourds à exécuter. Le net avantage du modèle BL couplé $2 \times 2D$ se comprend finalement par sa simplicité conceptuelle et sa rapidité d'exécution. Au Chapitre 3 (Article II), nous avons utilisé ce modèle pour encore calibrer formellement le régime paramétrique ajustable, cette seconde fois sur la base du “diagramme papillon” des émergences observées pour le cycle 21, et en obtenir des valeurs optimales avec barres d'incertitude.

Ce processus formel d'optimisation (double) est en soit totalement inédit et constitue une avancée importante dans la caractérisation de paramètres physiques qui échappent encore aux observations directes. L'obtention de valeurs optimales et de barres d'incertitudes pour chacun des paramètres libres du modèle permet une analyse quantitative des résultats, mieux qu'aucune autre étude précédente. En outre bien sûr, les simulations ainsi optimisées se révèlent très représentatives du comportement solaire réel : des cycles de bonne durée (Figure 3.9), d'amplitude variable (Figures 3.7 et 3.10), des suites de plusieurs cycles d'amplitude faible (type minimum de Dalton), des périodes d'arrêt complet (type minimum de Maunder ou “grand minimum”), des corrélations adéquates entre amplitudes des cycles et amplitudes des dipôles (Figure 3.8)¹, etc. Une telle précision des résultats permet d'envisager d'importantes avancées dans la reconstruction et la caractérisation de l'activité passée et la prédiction de l'activité future du Soleil.

4.2 CRITIQUE ET PERSPECTIVES D'AMÉLIORATIONS

Bien évidemment, plusieurs aspects du modèle BL couplé $2 \times 2D$ actuel demeurent à améliorer, la représentation fidèle de certains comportements du Soleil réel faisant encore défaut. D'un côté, certaines observations directes n'ont pas encore été intégrées au modèle “phénoménologique” de départ : probable structure interne multi-cellulaire de la circulation méridienne, présence d'écoulements convergents vers les régions actives en surface et, bien sûr, multiples phénomènes aux échelles plus petites que la résolution de la simulation (écoulements granulaires, etc.). De l'autre, il est clair que plusieurs principes physiques fondamentaux ne sont pas appliqués adéquatement dans le modèle, si on souhaite en assurer la cohérence interne et son rapprochement vers les modèles “ab initio” existants : certaines approximations, comme celle des écoulements statiques (absence de force de Lorentz) ou de la génération spontanée de flux magnétique (non conservation de l'énergie), nécessiteront progressivement d'être levées.

¹À ce sujet, un test de corrélation supplémentaire qui mériterait analyse est celui de la forte anti-corrélation observée entre la durée d'un cycle et l'amplitude du cycle suivant (Hathaway, 2015).

4.2.1 PROFIL DE CIRCULATION MÉRIDIENNE

Avant tout, c’est la paramétrisation des écoulements qui requière d’importants ajustements. En effet, tel que discuté à la Section 3.5, les intervalles optimaux pour le profil de la circulation méridienne, obtenus par les deux processus indépendants d’optimisation effectués aux Chapitres 2 (Article I) et 3 (Article II), ne correspondent pas. La bande d’écoulement de surface (Figure 3.11) requise pour reproduire au mieux l’évolution du flux magnétique de surface se retrouve à plus basse latitude que celle nécessaire à la dynamo interne pour à une bonne reproduction du “diagramme papillon” des taches solaires. Cette incompatibilité implique une incohérence entre les profils d’écoulement du modèle et du Soleil réel, malgré la polyvalence de la paramétrisation actuelle du profil synthétique.

D’abord, nous avons choisi de présenter aux Figures 2.7 et 3.11 une comparaison de nos résultats de circulation méridienne de surface avec des mesures Doppler obtenues par Ulrich (2010). Ces mesures directes sont probablement ce qui se fait de mieux dans le domaine, mais demeurent entachées d’importantes incertitudes, en particulier près des pôles, dues à la grande difficulté d’extraire le signal de l’écoulement latitudinal net ($\simeq 10 \text{ m s}^{-1}$), de celui de la rotation différentielle et des écoulements turbulents ($\simeq 1000 \text{ m s}^{-1}$). De plus, près des pôles, le contre-écoulement (dirigé vers l’équateur) observé pour le cycle 22 n’est pas compatible avec le transport de flux magnétique de surface. L’amplitude et le profil de l’écoulement optimal obtenu pourraient être davantage compatibles avec les profils d’écoulement observés par suivi d’éléments magnétiques de surface (voir Rightmire-Upton et al., 2012). En effet, ces mesures ne montrent pas de contre-écoulement près des pôles et seraient représentatives de l’écoulement latitudinal à une certaine profondeur ($\simeq 10 - 20 \text{ Mm}$) sous la photosphère, ce qui serait davantage susceptible de conduire l’évolution de l’ensemble du flux magnétique de surface, ancré à ces mêmes profondeurs. Une validation détaillée de nos résultats au regard de ces dernières observations serait donc de mise.

Ensuite, concernant l’incompatibilité des deux profils optimisés, il est clair que cela implique une différence nette entre la configuration de l’écoulement de surface, qui transporte le flux magnétique vers les pôles, et celle du retour vers l’équateur au bas de la zone convective, qui semble guider la progression du champ magnétique toroïdal profond. Au minimum, cela indique que le profil unicellulaire en variables séparées présenté aux Équations 1.17 n’est pas valable et doit être amélioré. D’autre part, il est maintenant évident, d’après les observations héliosismiques récentes (Mitra-Kraev & Thompson, 2007, Schad et al., 2013, Zhao et al., 2013) et analyses de corrélation croisée de la supergranulation (Hathaway, 2012), que le retour de l’écoulement latitudinal de surface se ferait beaucoup moins profondément ($\simeq 40 \text{ Mm}$) que ne le permettrait une cellule méridionale unique. Il est donc probable que la circulation méridienne se fasse en plusieurs cellules (au minimum deux) superposées dans la direction radiale, et non une seule. Une telle configuration multi-cellulaire est par ailleurs connue pour avoir un effet non négligeable sur le transport du flux magnétique par une dynamo cinématique (voir Jouve &

Brun, 2007), tel notre dynamo BL couplée $2 \times 2D$. Heureusement, le travail de modélisation dynamo de Hazra et al. (2014a) (voir aussi Passos et al., 2015) indique qu’un “diagramme papillon” de type solaire peut alors être reproduit tant qu’un écoulement dirigé vers l’équateur est présent près de la base de la zone convective, même s’il s’agit d’une seconde ou troisième cellule méridienne.

Ainsi, il est de toute évidence nécessaire d’ajuster la paramétrisation du modèle dynamo BL couplé $2 \times 2D$ pour construire un profil de circulation méridienne à multiples cellules radiales, avec écoulements de retour à différentes profondeurs de la zone convective. Un tel profil plus polyvalent pourrait d’abord être bâti de façon analytique, avec une série de paramètres ajustables pour lesquelles le double processus d’optimisation déjà en place pourrait obtenir des valeurs optimales. Autrement, plutôt que de paramétriser un écoulement avec de multiples paramètres libres, la rigueur du processus d’optimisation génétique pourrait même permettre “d’inverser” un profil numérique de circulation méridienne interne (voir Charbonneau et al. 1998 pour un exemple d’utilisation d’une telle méthode de modélisation génétique “prospective” pour obtenir des profils de rotation différentielle profonde à partir de mesures héliosismiques). Dans les deux cas, l’obtention d’un profil de circulation méridienne interne au Soleil, formellement optimisé (avec barres d’incertitudes) en un modèle dynamo BL couplé $2 \times 2D$ cette fois entièrement cohérent, pourrait même constituer une avancée par rapport à l’état actuel des observations.

Finalement, la question de la variabilité temporelle de la circulation méridienne reste à étudier. L’ensemble du processus de double optimisation devrait être appliqué à d’autres cycles que le cycle 21. Cela devrait être possible avec la récente mise en disponibilité de bases de données complètes d’émergences pour les cycles 21 à 24 (par exemple celle de Yeates 2016², maintenue par Andrés Muñoz-Jaramillo). On devrait alors être en mesure d’obtenir des valeurs optimales de paramètres dépendantes de l’amplitude (ou d’autres caractéristiques) du cycle d’activité. Le travail récent de Whitbread et al. (2017) oeuvre précisément dans cette direction.

4.2.2 RÉTROACTION DYNAMIQUE SUR LES ÉCOULEMENTS

Une approximation fondamentalement limitante, dans l’état actuel du modèle, est celle des écoulements (rotation différentielle et circulation méridienne) stationnaires dans le temps. En un premier temps, il est possible de corriger cette limitation tout en demeurant dans l’approximation axisymétrique pour le champ interne : il suffit de continuer à solutionner les équations d’induction MHD en $2 \times 2D$ (Équations 1.12 et 1.15), mais en imposant des fluctuations à la circulation méridienne et à la rotation différentielle, telles que contraintes par les observations (voir observations des oscillations torsionnelles, Howe 2009). À ce sujet, le travail de thèse de doctorat de C. Simard (2017) offre déjà un excellent avant-goût de ce qui pourra être fait.

²<https://dataverse.harvard.edu/dataset.xhtml?persistentId=doi:10.7910/DVN/Y5CXM8>

En un temps ultérieur, une résolution cohérente de l'équation de Navier–Stokes pour les écoulements, incluant la force de Lorentz, pourrait être requise pour reproduire de façon inhérente et complète les fluctuations des écoulements. En effet, les simulations numériques (voir Passos et al., 2012) montrent clairement que la circulation méridienne subit d'importantes variations systématiques au cours du cycle, entretenues par la variation cyclique du champ magnétique global. L'ajout de ce niveau de précision au modèle dynamo BL couplé $2 \times 2D$ permettrait certainement de renforcer la qualité des reconstructions passées et prédictions futures de l'activité solaire.

4.2.3 ÉCOULEMENTS CONVERGENTS VERS LES RÉGIONS ACTIVES

Outre la circulation méridienne et la rotation différentielle, un champ d'écoulement de surface supplémentaire, qui n'est pas inclus dans la version actuelle du modèle, pourrait être requis afin de mieux reproduire le comportement du Soleil réel. Cameron & Schüssler (2010) montrent que l'ajout des écoulements convergents, observés à la surface solaire vers les régions de forte activité magnétique, pourrait reproduire l'apparente modulation temporelle de la circulation méridienne. Cameron & Schüssler (2012) montrent aussi que ces écoulements peuvent avoir pour effet de freiner la séparation des polarités des BMR en temps de plus forte activité, ce qui agirait comme mécanisme important de rétroaction dynamique sur le processus de transport du flux magnétique. Ce champ d'écoulement variable, bien paramétrisé et optimisé avec le reste du modèle, pourrait donc avoir un effet majeur sur les résultats du modèle en modulant le profil d'écoulement global et s'approcher davantage des observations. Il est donc requis, dans une perspective d'amélioration du modèle dynamo BL couplé $2 \times 2D$, d'envisager l'ajout et l'analyse détaillée ces effets potentiellement importants.

4.2.4 ÉVOLUTION À LONG TERME ET REDÉMARRAGE DE LA DYNAMO

Pour permettre un redémarrage de la dynamo BL couplée $2 \times 2D$ après descente dans une phase de grand minimum, nous discuterons à la Section 4.3.1 de la nécessité d'inclure un effet α comme mécanisme dynamo secondaire. Les résultats sont déjà extrêmement prometteurs à ce sujet.

Toutefois, il s'agit pour l'instant d'un simple facteur de proportionnalité produisant une force électromotrice turbulente toroïdale à partir d'un champ magnétique toroïdal, comme dans les modèles en champs moyens de type $\alpha\Omega$ classiques, mais il s'agit là uniquement de la composante $\alpha = \alpha_{\phi\phi}$ d'un tenseur α comportant éventuellement neuf composantes. Les travaux de doctorat de C. Simard (2017), ayant porté sur l'analyse des coefficients de transport turbulent extraits des résultats des simulations d'EULAG-MHD, montrent justement que le terme $\alpha_{\phi\phi}$ ne serait pas le seul d'importance. Afin de continuer à tendre vers une unification du modèle BL couplé $2 \times 2D$ avec les modèles physiques 3D MHD complets (comme EULAG-MHD), il deviendra particulièrement intéressant d'y inclure l'entièreté d'un tel tenseur α .

4.3 TRAVAUX EN COURS

Maintes années passées à ce projet de doctorat, et ma satisfaction personnelle est d’autant plus grande que ma contribution ne s’est pas limitée à cette thèse. Parmi les avenues à explorer décrites ci-dessus, plusieurs ont déjà été ou sont en cours d’étude, depuis plus de deux ans, dans le cadre de trois projets de fin de baccalauréat, deux stages d’été, deux projets de maîtrise et un projet de doctorat. Un nouvel article (Nagy et al., 2017) est déjà publié, et quelques autres devraient être soumis à publication dans la prochaine année. Ces travaux en cours ont aussi été présentés en juillet 2017, à la Conférence internationale Solar Heliospheric and INterplanetary Environment (SHINE), à Saint-Sauveur, Québec.

4.3.1 ACTIVITÉ SOLAIRE À LONG TERME : GRANDS MINIMA ET MAXIMA

De par son fonctionnement de base, le modèle BL couplé $2 \times 2D$ utilise l’amplitude du champ toroïdal profond, au-delà d’un seuil prédéfini, pour déterminer la probabilité d’émergence de BMR en surface. Ainsi, dès qu’une suite de circonstances a pour effet de conduire la simulation vers de faibles valeurs de champ toroïdal, sous la barre du seuil établi, aucune émergence n’aura lieu lors du cycle donné, aucun champ poloïdal ne sera accumulé au minimum d’activité et le champ toroïdal ira en décroissant vers une phase d’arrêt complet (“grand minimum”). Aucune façon de redémarrer cette dynamo BL tel quel. Un autre mécanisme sous-jacent doit donc aussi être présent, à la rescousse du mécanisme de BL. Sans pousser trop profondément dans la modélisation de la dynamique des phénomènes turbulents, une analyse bien connue permet de séparer les champs moyens (magnétique et d’écoulement), axisymétriques, des fluctuations aux petites échelles, pour en extraire un terme source : une force électromotrice turbulente propulsée par la convection aux petites échelles, l’effet α (voir Section 1.4.5.a). Cause, conséquence ou entièrement indépendant du mécanisme BL observable en surface, cela reste encore un mystère de la dynamo solaire, mais cet effet α peut en toute logique opérer lui aussi, en parallèle, dans la zone convective.

La code numérique de la simulation couplée $2 \times 2D$ ayant été préparé en conséquence, l’ajout d’un effet α scalaire (correspondant pour l’instant uniquement à la composante $\alpha_{\phi\phi}$ d’un tenseur α comportant éventuellement neuf composantes) a pu être rapidement testé et produit d’excellent résultats. En hiver 2016, lors d’un projet de fin de baccalauréat, Élise Beaudin effectue les premiers tests d’un effet α comme mécanisme dynamo secondaire. Le résultat est concluant : la dynamo peut redémarrer après une période de grand minimum.

À l’été 2016, ce sont deux stagiaires d’été, Florence Boileau et Gabriel Longpré, qui poursuivent l’analyse paramétrique du nouvel effet α . Plusieurs modes dynamo sont investigués : un effet α trop fort domine entièrement la dynamo, allant d’oscillations à trop fortes amplitudes et reléguant le mécanisme de BL au second plan, voire négligeable ; un effet α uniforme dans la zone convective peut même générer

une dynamo opérant plutôt à hautes latitudes ; un effet α et un mécanisme de BL opposés peuvent aussi s’annuler entièrement, ou générer un mode dynamo constant, sans inversion de polarité ; puis un effet α plus faible, de même signe que le mécanisme de BL, peut avoir l’effet souhaité. Ainsi, dans un concours de circonstances défavorables pour le mécanisme de BL, le champ toroïdal peut perdre progressivement de son amplitude, jusqu’à passer sous le seuil prédéterminé pour les émergences de BMR, et la dynamo tombe alors dans une phase d’arrêt. Mais l’effet α continue d’opérer en arrière plan en une seconde dynamo de plus faible amplitude. Alors les champs toroïdal et poloïdal continuent de s’induire mutuellement et de s’inverser dans la zone convective, sans effets visible aux petites échelles en surface. Et, finalement, un concours favorable de circonstances peut permettre au champ toroïdal de regagner l’amplitude seuil nécessaire au redémarrage de la dynamo BL principale par la génération de nouvelles émergences de BMR. L’opération d’une telle dynamo secondaire cachée durant les phases de grand minima (comme celui de Maunder, $\simeq 1650$ – 1700) est précisément une option probable pour le fonctionnement du Soleil réel.

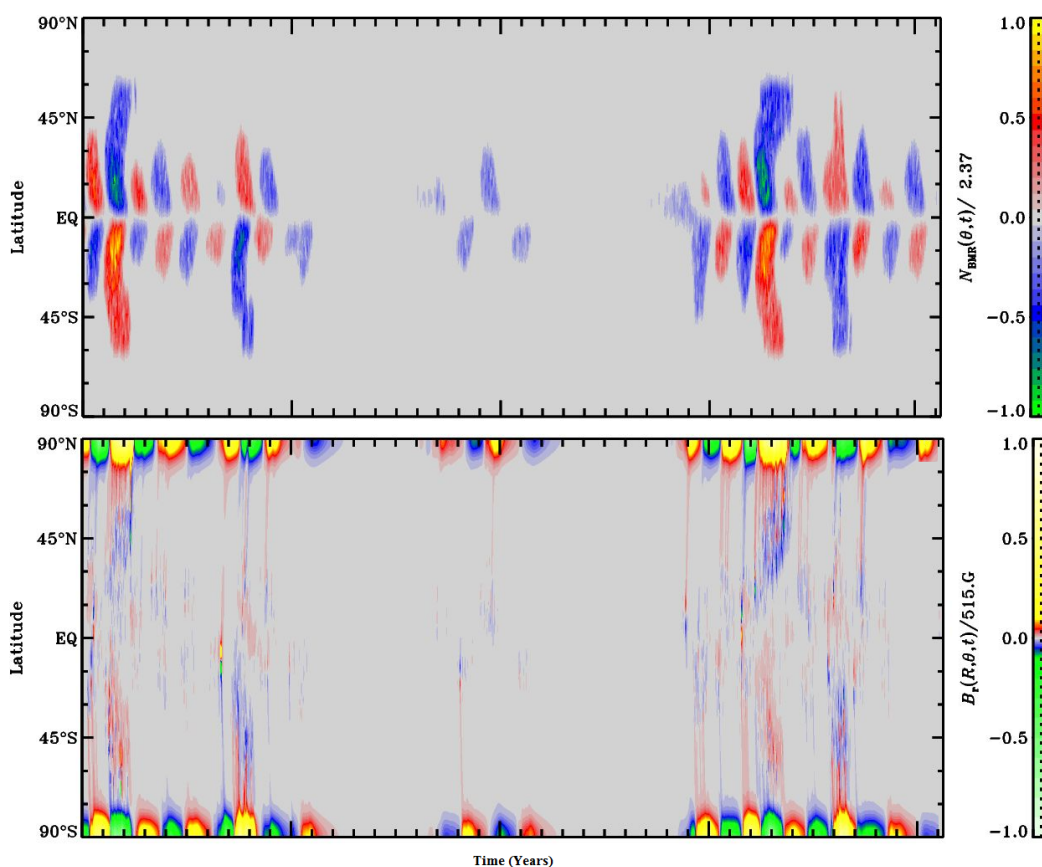


Figure 4.1 – Exemple de cartes latitude–temps (panneau du haut) de la densité d’émergences en surface (“diagramme papillon”) et (panneau du bas) du champ magnétique radial en surface, pour une simulation dynamo BL couplée $2 \times 2\text{D}$ augmentée d’un effet α secondaire, sur une durée d’environ 410 ans.

La Figure 4.1 illustre un tel résultat d’une simulation dynamo BL couplée $2 \times 2D$ augmentée d’un effet α secondaire, où l’on constate l’enchaînement de huit cycles d’activités complets (environ un siècle), suivis d’activité partielle à forte asymétrie hémisphérique, d’un arrêt complet du mécanisme de BL (grand minimum) d’un demi-siècle, de quelques cycles partiels asymétriques, d’un nouveau grand minimum, puis d’un redémarrage complet du mode BL pour les dix derniers cycles. On peut remarquer que même durant ces phases d’arrêt des émergences, partiel ou quasi-complet, le flux magnétique polaire continue d’être inversé en surface. Cela confirme les observations récentes indiquant qu’une seule, ou seulement quelques, BMR au cours d’un cycle peuvent suffirent au processus d’inversion. Ces inversions du dipole axial solaire sont d’ailleurs observées durant le minimum de Maunder, dans les fluctuations de ^{10}Be dans les glaces terrestres (Beer et al., 1998).

L’étude détaillée de la fréquence de survenance de tels grands minima d’activité, de périodes de fortes amplitudes soutenues (“grand maxima”), des oscillations d’amplitude à long terme de la simulation numérique sont actuellement le sujet d’étude d’un projet de maîtrise par Deniz Ölçek, au GRPS. Pour cela, des séries de centaines de cycles d’activité ont dû être produites, d’où encore une fois l’intérêt d’un modèle numériquement peu exigeant. Pour l’instant, les comportements constatés semblent très près des observations d’activité solaire à long terme, telles qu’enregistrées dans les traces d’isotopes cosmogéniques sur Terre (^{14}C dans les végétaux, ^{10}Be dans les glaces). Les résultats de ce projet seront fort probablement soumis à publication dans la prochaine année.

4.3.2 STOCHASTICITÉ, FLUCTUATIONS D’AMPLITUDE ET ASYMÉTRIES HÉMISPHERIQUES

Parallèlement aux analyses de l’activité solaire à long terme, l’activité du modèle à beaucoup plus court terme, plus spécifiquement l’effet de l’émergence de BMR spécifiques, statistiquement marginales, doit aussi être analysée. Dans le cadre d’un modèle de type BL, fortement contrôlé par la stochasticité du processus d’émergence, l’analyse statistique et la caractérisation des conséquences des phénomènes marginaux est primordiale, en particulier si on a pour objectif la prédiction éventuelle de l’activité solaire.

Déjà quelques études (voir par exemple Cameron et al., 2013) montrent que l’émergence d’une seule grosse BMR aux caractéristiques bien particulières, très inclinée et près de l’équateur, peut avoir un effet décisif sur l’avenir du cycle d’activité en question. En effet, une telle BMR peut posséder, dès son émergence, un moment dipolaire axial du même ordre d’amplitude que celui accumulé aux pôles au minimum d’activité précédent. De la même manière, Wang & Sheeley (1989) indiquaient déjà qu’une seule des grosses BMR observées lors du cycle 21 possédait plus de flux absolu que nécessaire pour inverser le flux polaire. Comme décrit en détails à la Section 1.3.3.c, c’est le transport de ce moment dipolaire (de ce flux) vers les pôles qui est critique. Lorsque l’émergence se fait directement

sur ou près de l'équateur, la circulation méridienne tend à séparer immédiatement les polarités de la BMR, qui peuvent alors directement contribuer au flux opposé à chaque pôle.

Le modèle BL couplé $2 \times 2D$ offrant une représentation 2D complète de la surface solaire, formellement calibrée sur le Soleil observé, ces effets peuvent être testés exhaustivement. L'analyse de l'importance d'événements marginaux dans le processus d'émergence stochastique fait actuellement l'objet d'un projet d'étude doctoral par Mélinda Nagy, au GRPS, en collaboration avec l'Institute for Geography and Earth Sciences, de l'université Eötvös, à Budapest, Hongrie (voir Nagy et al., 2017). Un exemple de cas marginal analysé est présenté à la Figure 4.2. Au milieu du deuxième cycle simulé, une grosse BMR émerge en marge des distributions statistiques permises, légèrement au nord de l'équateur et avec une inclinaison inverse à la tendance moyenne : un moment dipolaire de l'ordre du gauss, de signe opposé à celui nécessaire au renversement du flux polaire. L'effet est bien visible au panneau du bas de la Figure 4.2, sous forme d'une chute soudaine dans l'évolution du moment dipolaire axial. Cette unique BMR suffit à réduire de plus de 40 % le nouveau moment dipolaire accumulé à la fin du deuxième cycle, par rapport à la même simulation d'où on a retiré cette BMR. L'effet perdure même jusqu'au deux minimums d'activité suivants, et probablement plus.

De plus, on comprend bien le fonctionnement de la dynamo BL en observant la conséquence de cette émergence marginale et de son moment dipolaire sur le nombre d'émergences (pseudo-SSN) subséquent. Puisque c'est la structure du champ toroïdal profond qui détermine le nombre d'émergences lors du cycle donné, et que ce champ toroïdal est principalement le résultat du cisaillement du champ poloïdal construit à la fin du cycle précédent, la BMR marginale n'a pas d'effet sur l'activité du cycle-même. L'effet se fait ressentir sur le cycle suivant, lorsque le dipôle accumulé en fin de cycle grâce aux émergences en cours de cycle aura eu le temps de se faire cisailier pour produire un nouveau champ toroïdal inverse. Cette corrélation entre moment dipolaire au minimum d'activité et amplitude du cycle d'activité suivant est bien connue (voir Figure 3.8(c)). Et il s'agit-là d'une caractéristique fondamentale de ce type de modèles : un délai temporel de l'ordre d'un demi-cycle d'activité (quart de cycle magnétique) est présent entre l'oscillation du champ poloïdal, résultat de la migration de flux en surface, elle hautement sujette à la stochasticité du processus d'émergence, et l'oscillation du champ toroïdal profond, l'induction de ce dernier par le premier étant bien davantage déterministe et offrant un potentiel prédictif très intéressant. Ici, le faible moment dipolaire accumulé en fin de deuxième cycle, à cause de la BMR marginale identifiée, a un effet majeur sur le troisième cycle. En présence de cette BMR, le nouveau cycle peine à démarrer, le plus faible champ toroïdal prenant du temps à prendre de l'ampleur. Le maximum d'activité est atteint près de trois ans plus tard que "prévu" en l'absence de la BMR, avec une amplitude diminuée de moitié. La transition des cycles 23 à 24, vers 2009, a présenté ce genre de long minimum, dû à l'accumulation d'un moment dipolaire plus faible qu'à l'habitude en fin de cycle 23.

Nous poursuivons actuellement ce genre d'analyse détaillée pour un ensemble d'émergences margi-

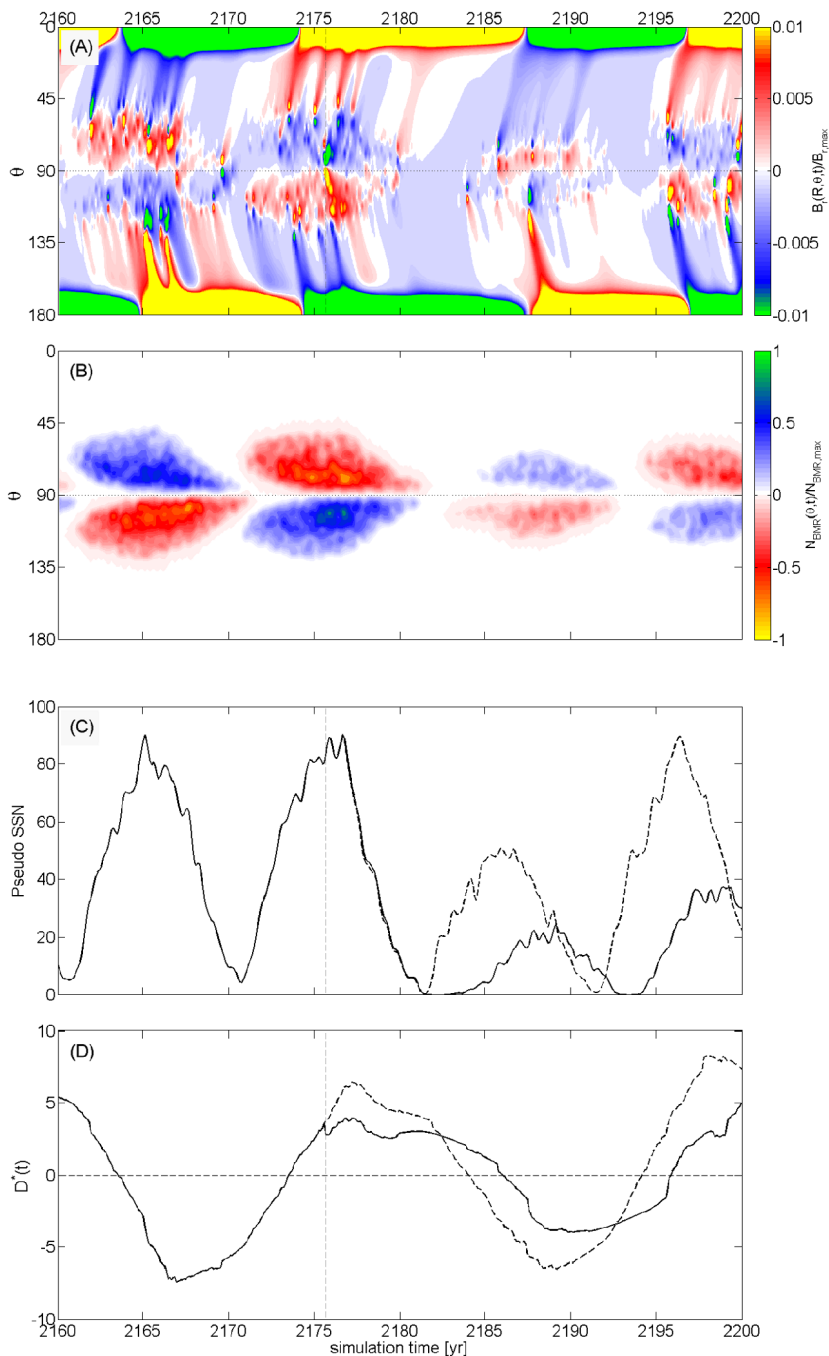


Figure 4.2 – De haut en bas, pour une simulation BL couplée $2 \times 2D$ sur une durée d'environ 40 ans : carte latitude–temps du champ magnétique radial en surface; carte latitude–temps de la densité d'émergences en surface; évolution temporelle du nombre de BMR émergées (pseudo-SSN); évolution temporelle du moment dipolaire axial. En traits continus, la simulation originale présentée aux deux panneaux du haut et, en pointillés, la même simulation après retrait de la BMR marginale émergée près de l'équateur vers le milieu du deuxième cycle d'activité (trait pointillé vertical) et visible explicitement sur la carte de champ magnétique radial. (Tiré de Nagy et al. 2017.)

nales identifiées dans quelques simulations BL couplées $2 \times 2D$. Nous investiguons l'effet du retrait de ces BMR, de leur déplacement en latitude, en temps, afin d'obtenir des intervalles de comportements pour les cycles subséquents : durée, moment du maximum, amplitude, degré d'asymétrie hémisphérique. Cette analyse est particulièrement nécessaire afin d'évaluer la fiabilité d'éventuelles prédictions de l'activité solaire. En plus de faire bientôt partie intégrante de la thèse de doctorat de Mélinda Nagy, une partie de ce travail vient d'être récemment publié dans Nagy et al. (2017).

4.3.3 PRÉDICTION DE L'ACTIVITÉ SOLAIRE

À l'aide d'un modèle purement SFT, Hathaway & Upton (2016) utilisent les émergences de flux observées au cours du cycle 24 pour prédire jusqu'à trois ans à l'avance l'amplitude et l'asymétrie du dipôle à la fin du cycle, pour ensuite se permettre une prédiction de l'amplitude et de l'asymétrie du cycle 25. Avec ce même genre d'analyse bien ancrée sur les observations, par l'assimilation directe de magnétogrammes (voir Upton & Hathaway, 2014) ou plus simplement à partir de listes d'émergences observées (tel la base de données de Wang & Sheeley (1989) (WS1989) ou celle en construction de Yeates (2016)), notre modèle BL couplé $2 \times 2D$ a le potentiel de faire encore mieux en terme de prédictions. En effet, un modèle SFT ne pourrait modéliser au-delà du minimum d'activité, les prédictions du cycle d'activité suivant pouvant uniquement être basées sur des corrélations statistiques préexistantes. Dans le cas du modèle BL couplé $2 \times 2D$, toute prédiction de la distribution de champ poloïdal en fin

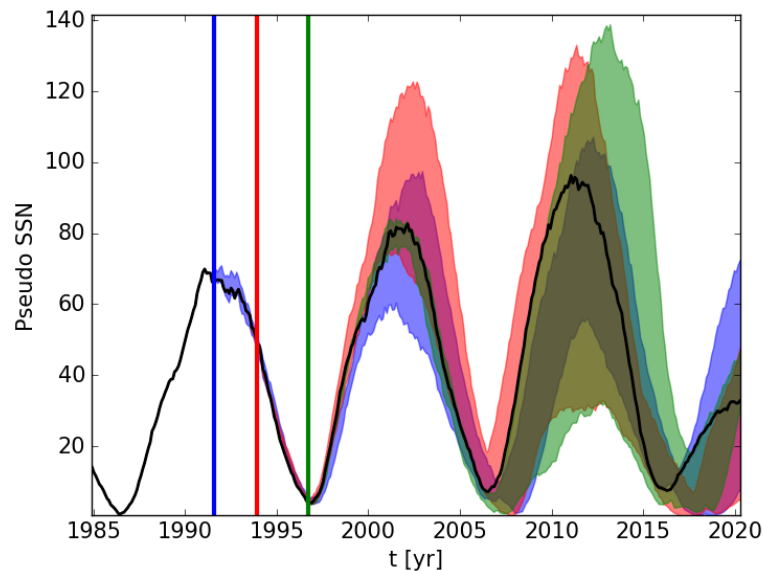


Figure 4.3 – Séquence temporelle du nombre mensuel d'émergences (pseudo-SSN) dans une réalisation du modèle BL couplé $2 \times 2D$ (courbe noire), et intervalles (vert, rouge et bleu) de solutions obtenues pour la même simulation mais avec séquence aléatoire d'émergence réinitialisée à multiples reprises aux trois moments du cycle d'activité indiqués par les barres verticales verte, rouge et bleue. (Tiré de Nagy et al. 2017.)

de cycle devrait permettre de prédire la distribution du champ toroïdal et conséquemment la forme courbe d'activité (pseudo-SSN) pour presque toute la durée du cycle d'activité suivant. La Figure 4.3 illustre bien ce résultat : la réinitialisation de la séquence aléatoire des émergences au minimum d'activité (ligne vertical verte) redonne approximativement le même cycle d'activité suivant peu importe la réalisation spécifique survenue (intervalle de courbes vertes), donc un horizon de prédiction de l'ordre du cycle entier. La divergence se fait à partir du minimum d'activité suivant, puisque la réalisation précise des émergences aura bâti un dipôle différent à chaque fois, ce qui génèrera sub-séquemment un champ toroïdal et donc une séquence d'émergences différents. Le potentiel prédictif est moins intéressant si la séquence est réinitialisée plus tôt au cours du cycle (lignes verticales et intervalles rouges et bleues).

Pour l'instant, l'analyse a été faite pour des séquences synthétiques d'émergences (voir Nagy et al., 2017). Le potentiel prédictif du modèle sera bientôt validé sur des cycles réels, en intégrant une assimilation formelle des observations. Prédire en autant de détails la forme du cycle d'activité à partir du minimum d'activité précédent sera une avancée majeure. Nous effectuons actuellement ce travail au GRPS, en particulier dans le cadre du projet de fin de baccalauréat, puis de maîtrise de François Labonville. Nous pouvons nous attendre à une publication de ces travaux dans la prochaine année.

Le modèle pourrait aussi être en mesure de prédire des cartes complètes de champ magnétique radial en surface, selon une approche probabiliste des émergences au cours du cycle. Pour pousser davantage, de telles cartes pourraient être utilisées pour prédire la distribution de flux magnétique "ouvert" ("open flux") sur l'environnement solaire, pour des simulations d'évolution du vent solaire, utiles à la météorologie de l'environnement géospatial. À plus long terme, la structure de champ de surface pourrait être utilisée dans des reconstructions et prédictions synthétiques des irradiances solaires totale et spectrale, utiles aux modèles climatiques terrestres.

4.4 AVENIR ET CONTEXTE PROFESSIONNEL

Les travaux en cours et futurs décrits ci-dessus montrent bien tout le potentiel de ce projet de recherche, bien au-delà de cette thèse de doctorat.

Avant tout, mon poste d'enseignant en physique au Collège de Bois-de-Boulogne est l'occasion idéale de vulgariser cette recherche au plus grand auditoire : des centaines d'étudiants curieux sur les sujets de la physique solaire, stellaire, de l'astrophysique, de la physique en général. Quelle satisfaction que de voir s'émerveiller ces jeunes adultes lorsqu'on leur explique comment les lois d'induction électromagnétique qu'ils apprennent peuvent à la fois générer l'électricité à la sortie d'un barrage hydraulique

et justifier l'existence du cycle d'activité de notre étoile, des émergences et des éruptions qui perturbent sa surface, jusqu'à perturber nos satellites, nos télécommunications, de cette magnétosphère terrestre qui nous protège!

De plus, il est de mon intention ferme de continuer à prendre part de façon bien concrète à ce projet de recherche, pour en assurer la pérennité. Avec la volonté actuelle du ministère de l'Enseignement supérieur du Québec de promouvoir la recherche dans les institutions collégiales, le contexte est particulièrement propice à cet effet. Les bourses de recherche pour chercheurs de collèges et les subventions équipe pour la collaboration inter-institutions du Fonds de recherche du Québec – Nature et technologies (FRQNT) sont des opportunités de financement fort prometteuses. De plus, je peux déjà prévenir de ma volonté d'œuvrer au Collège de Bois-de-Boulogne en tant que membre du Centre de recherche en astrophysique du Québec (CRAQ).

BIBLIOGRAPHIE

- Alfvén, H. 1942, *Nature*, 150, 405
- Babcock, H. D. 1959, *ApJ*, 130, 364
- Babcock, H. W. 1961, *ApJ*, 133, 572
- Babcock, H. W., & Babcock, H. D. 1955, *ApJ*, 121, 349
- Baumann, I., Schmitt, D., & Schüssler, M. 2006, *A&A*, 446, 307
- Baumann, I., Schmitt, D., Schüssler, M., & Solanki, S. K. 2004, *A&A*, 426, 1075
- Beaudoin, P., Charbonneau, P., Racine, E., & Smolarkiewicz, P. K. 2013, *Sol. Phys.*, 282, 335
- Beer, J., Tobias, S., & Weiss, N. 1998, *Sol. Phys.*, 181, 237
- Bogdan, T. J., Gilman, P. A., Lerche, I., & Howard, R. 1988, *ApJ*, 327, 451
- Braun, D. C., & Fan, Y. 1998, *ApJ*, 508, L105
- Burnett, D. S. 1987, *Finite Element Analysis : From Concepts to Applications* (Reading, Massachusetts : Addison-Wesley Pub. Co.)
- Caligari, P., Moreno-Insertis, F., & Schussler, M. 1995, *ApJ*, 441, 886
- Cameron, R., & Schüssler, M. 2015, *Science*, 347, 1333
- Cameron, R. H., Dasi-Espuig, M., Jiang, J., et al. 2013, *A&A*, 557, A141
- Cameron, R. H., Jiang, J., Schmitt, D., & Schüssler, M. 2010, *ApJ*, 719, 264
- Cameron, R. H., Jiang, J., Schüssler, M., & Gizon, L. 2014, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 119, 680
- Cameron, R. H., & Schüssler, M. 2010, *ApJ*, 720, 1030
- . 2012, *A&A*, 548, A57
- Charbonneau, P. 2002a, *NCAR Tech. Note, NCAR/TN-450+IA* (Boulder : National Center for Atmospheric Research), 1
- . 2002b, *NCAR Tech. Note, NCAR/TN-451+STR* (Boulder : National Center for Atmospheric Research), 1

- Charbonneau, P. 2007, *Advances in Space Research*, 39, 1661
- . 2010, *Living Reviews in Solar Physics*, 7, 3
- . 2014, *ARA&A*, 52, 251
- Charbonneau, P., Christensen-Dalsgaard, J., Henning, R., et al. 1999, *ApJ*, 527, 445
- Charbonneau, P., & Knapp, B. 1995, NCAR Tech. Note, NCAR/TN-418+IA (Boulder : National Center for Atmospheric Research), 1
- Charbonneau, P., St-Jean, C., & Zacharias, P. 2005, *ApJ*, 619, 613
- Charbonneau, P., Tomczyk, S., Schou, J., & Thompson, M. J. 1998, *ApJ*, 496, 1015
- Chatterjee, P., Nandy, D., & Choudhuri, A. R. 2004, *A&A*, 427, 1019
- Choudhuri, A. R., Chatterjee, P., & Jiang, J. 2007, *Physical Review Letters*, 98, 131103
- Choudhuri, A. R., Schüssler, M., & Dikpati, M. 1995, *A&A*, 303, L29+
- Cooper, C. M., Wallace, J., Brookhart, M., et al. 2014, *Physics of Plasmas*, 21, 013505
- Cowling, T. G. 1933, *MNRAS*, 94, 39
- . 1953, *Solar Electrodynamics* (Kuiper, G. P.), 532–+
- Dasi-Espuig, M., Solanki, S. K., Krivova, N. A., Cameron, R., & Peñuela, T. 2010, *A&A*, 518, A7
- Dikpati, M. 2011, *ApJ*, 733, 90
- Dikpati, M., Anderson, J. L., & Mitra, D. 2014, *Geophys. Res. Lett.*, 41, 5361
- Dikpati, M., & Charbonneau, P. 1999, *ApJ*, 518, 508
- Dikpati, M., de Toma, G., & Gilman, P. A. 2006, *Geophys. Res. Lett.*, 33, 5102
- Dikpati, M., de Toma, G., Gilman, P. A., Arge, C. N., & White, O. R. 2004, *ApJ*, 601, 1136
- Dikpati, M., & Gilman, P. A. 2001, *ApJ*, 559, 428
- . 2007, *Sol. Phys.*, 241, 1
- D’Silva, S., & Choudhuri, A. R. 1993, *A&A*, 272, 621
- Durney, B. R. 1995, *Sol. Phys.*, 160, 213
- . 1996, *Sol. Phys.*, 166, 231

- . 1997, *ApJ*, 486, 1065
- Fan, Y. 2009, *Living Reviews in Solar Physics*, 6, 4
- Fan, Y., & Fang, F. 2014, *ApJ*, 789, 35
- Fan, Y., Fisher, G. H., & Deluca, E. E. 1993, *ApJ*, 405, 390
- Ferriz-Mas, A., Schmitt, D., & Schuessler, M. 1994, *A&A*, 289, 949
- Ghizaru, M., Charbonneau, P., & Smolarkiewicz, P. K. 2010, *ApJ*, 715, L133
- Gilman, P. A., & Miesch, M. S. 2004, *ApJ*, 611, 568
- Gizon, L. 2004, *Sol. Phys.*, 224, 217
- Guerrero, G., & de Gouveia Dal Pino, E. M. 2008, *A&A*, 485, 267
- Guerrero, G. A., & Muñoz, J. D. 2004, *MNRAS*, 350, 317
- Hale, G. E., Ellerman, F., Nicholson, S. B., & Joy, A. H. 1919, *ApJ*, 49, 153
- Hart, A. B. 1956, *MNRAS*, 116, 38
- Harvey, K. L. 1993, PhD thesis, , Univ. Utrecht, (1993)
- Harvey, K. L., & Zwaan, C. 1993, *Sol. Phys.*, 148, 85
- Hathaway, D. H. 1996, *ApJ*, 460, 1027
- . 2010, *Living Reviews in Solar Physics*, 7, 1
- . 2012, *ApJ*, 760, 84
- . 2015, *Living Reviews in Solar Physics*, 12, 4
- Hathaway, D. H., & Rightmire, L. 2010, *Science*, 327, 1350
- . 2011, *ApJ*, 729, 80
- Hathaway, D. H., & Upton, L. A. 2016, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 121, 10,744
- Hazra, G., Karak, B. B., & Choudhuri, A. R. 2014a, *ApJ*, 782, 93
- Hazra, S., Passos, D., & Nandy, D. 2014b, *ApJ*, 789, 5
- Howard, R., & Labonte, B. J. 1980, *ApJ*, 239, L33
- . 1981, *Sol. Phys.*, 74, 131

- Howard, R. F. 1991, *Sol. Phys.*, 136, 251
- Howe, R. 2009, *Living Reviews in Solar Physics*, 6, 1
- Jiang, J., Cameron, R. H., Schmitt, D., & Işık, E. 2013, *A&A*, 553, A128
- Jiang, J., Cameron, R. H., Schmitt, D., & Schüssler, M. 2011, *A&A*, 528, A82
- Jiang, J., Cameron, R. H., & Schüssler, M. 2014a, *ApJ*, 791, 5
- Jiang, J., Hathaway, D. H., Cameron, R. H., et al. 2014b, *Space Sci. Rev.*, 186, 491
- Jouve, L., & Brun, A. S. 2007, *A&A*, 474, 239
- Karak, B. B., & Choudhuri, A. R. 2011, *MNRAS*, 410, 1503
- . 2013, *Research in Astronomy and Astrophysics*, 13, 1339
- Karak, B. B., Jiang, J., Miesch, M. S., Charbonneau, P., & Choudhuri, A. R. 2014, *Space Sci. Rev.*, 186, 561
- Kitiashvili, I., & Kosovichev, A. G. 2008, *ApJ*, 688, L49
- Komm, R. W., Howard, R. F., & Harvey, J. W. 1993, *Sol. Phys.*, 147, 207
- . 1995, *Sol. Phys.*, 158, 213
- Krause, F., & Raedler, K.-H. 1980, *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*
- Lathrop, D. P., & Forest, C. B. 2011, *Physics Today*, 64, 40
- Leighton, R. B. 1964, *ApJ*, 140, 1547
- . 1969, *ApJ*, 156, 1
- Leighton, R. B., Noyes, R. W., & Simon, G. W. 1962, *ApJ*, 135, 474
- Lemerle, A., & Charbonneau, P. 2017, *ApJ*, 834, 133
- Lemerle, A., Charbonneau, P., & Carignan-Dugas, A. 2015, *ApJ*, 810, 78
- Li, J., & Ulrich, R. K. 2012, *ApJ*, 758, 115
- Mackay, D., & Yeates, A. 2012, *Living Reviews in Solar Physics*, 9, 6
- Mackay, D. H., Priest, E. R., & Lockwood, M. 2002, *Sol. Phys.*, 209, 287
- McClintock, B. H., & Norton, A. A. 2013, *Sol. Phys.*, 287, 215

- McClintock, B. H., Norton, A. A., & Li, J. 2014, *ApJ*, 797, 130
- Metcalfe, T. S., & Charbonneau, P. 2003, *Journal of Computational Physics*, 185, 176
- Miesch, M. S. 1998, PhD thesis, UNIVERSITY OF COLORADO AT BOULDER
- Miesch, M. S., & Dikpati, M. 2014, *ApJ*, 785, L8
- Miesch, M. S., & Teweldebirhan, K. 2016, *Advances in Space Research*, 58, 1571
- Mitra-Kraev, U., & Thompson, M. J. 2007, *Astronomische Nachrichten*, 328, 1009
- Moffatt, H. K. 1978, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*
- Mosher, J. M. 1977, PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena.
- Muñoz-Jaramillo, A., Dasi-Espuig, M., Balmaceda, L. A., & DeLuca, E. E. 2013, *ApJ*, 767, L25
- Muñoz-Jaramillo, A., Nandy, D., Martens, P. C. H., & Yeates, A. R. 2010, *ApJ*, 720, L20
- Nagy, M., Lemerle, A., Labonville, F., Petrovay, K., & Charbonneau, P. 2017, *Sol. Phys.*, 292, 167
- Nandy, D., & Choudhuri, A. R. 2001, *ApJ*, 551, 576
- . 2002, *Science*, 296, 1671
- Nelson, N. J., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2013, *ApJ*, 762, 73
- Nelson, N. J., Brown, B. P., Sacha Brun, A., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2014, *Sol. Phys.*, 289, 441
- Ossendrijver, M. A. J. H. 2000, *A&A*, 359, 1205
- Parker, E. N. 1955, *ApJ*, 122, 293
- . 1984, *ApJ*, 281, 839
- Passos, D., & Charbonneau, P. 2014, *A&A*, 568, A113
- Passos, D., Charbonneau, P., & Beaudoin, P. 2012, *Sol. Phys.*, 279, 1
- Passos, D., Charbonneau, P., & Miesch, M. 2015, *ApJ*, 800, L18
- Passos, D., Nandy, D., Hazra, S., & Lopes, I. 2014, *A&A*, 563, A18
- Pevtsov, A. A., Berger, M. A., Nindos, A., Norton, A. A., & van Driel-Gesztelyi, L. 2014, *Space Sci. Rev.*, 186, 285
- Rajaguru, S. P., & Antia, H. M. 2015, *ApJ*, 813, 114

- Rieutord, M., & Rincon, F. 2010, *Living Reviews in Solar Physics*, 7, 2
- Rightmire-Upton, L., Hathaway, D. H., & Kosak, K. 2012, *ApJ*, 761, L14
- Riley, P., Lionello, R., Linker, J. A., et al. 2015, *ApJ*, 802, 105
- Roudier, T., Rieutord, M., Brito, D., et al. 2009, *A&A*, 495, 945
- Sanchez, S., Fournier, A., & Aubert, J. 2014, *ApJ*, 781, 8
- Schad, A., Timmer, J., & Roth, M. 2013, *ApJ*, 778, L38
- Schmitt, D. 1987, *A&A*, 174, 281
- Schou, J., & Bogart, R. S. 1998, *ApJ*, 504, L131
- Schrijver, C. J. 2001, *ApJ*, 547, 475
- Schrijver, C. J., De Rosa, M. L., & Title, A. M. 2002, *ApJ*, 577, 1006
- Schrijver, C. J., & Harvey, K. L. 1994, *Sol. Phys.*, 150, 1
- Schrijver, C. J., & Title, A. M. 2001, *ApJ*, 551, 1099
- Schrijver, C. J., Title, A. M., van Ballegoijen, A. A., Hagenaar, H. J., & Shine, R. A. 1997, *ApJ*, 487, 424
- Schrijver, C. J., & Zwaan, C. 2000, *Solar and Stellar Magnetic Activity*, Cambridge astrophysics series No. 34 (New-York : Cambridge University Press)
- Schüssler, M., Caligari, P., Ferriz-Mas, A., & Moreno-Insertis, F. 1994, *A&A*, 281, L69
- Sheeley, Jr., N. R. 1991, *ApJ*, 374, 386
- . 2005, *Living Reviews in Solar Physics*, 2, 5
- Simard, C. 2017, PhD thesis, Université de Montréal
- Simon, G. W., Title, A. M., & Weiss, N. O. 2001, *ApJ*, 561, 427
- Snodgrass, H. B. 1983, *ApJ*, 270, 288
- . 1991, *ApJ*, 383, L85
- Snodgrass, H. B., & Dailey, S. B. 1996, *Sol. Phys.*, 163, 21
- Stenflo, J. O., & Kosovichev, A. G. 2012, *ApJ*, 745, 129
- Svalgaard, L., Duvall, Jr., T. L., & Scherrer, P. H. 1978, *Sol. Phys.*, 58, 225

- Thibault, K. 2014, PhD thesis, Université de Montréal
- Thibault, K., Charbonneau, P., & Béland, M. 2014, *ApJ*, 796, 19
- Thibault, K., Charbonneau, P., & Crouch, A. D. 2012, *ApJ*, 757, 187
- Tsuneta, S., Ichimoto, K., Katsukawa, Y., et al. 2008, *ApJ*, 688, 1374
- Ulrich, R. K. 2010, *ApJ*, 725, 658
- Upton, L., & Hathaway, D. H. 2014, *ApJ*, 780, 5
- van Ballegooijen, A. A., Cartledge, N. P., & Priest, E. R. 1998, *ApJ*, 501, 866
- van Ballegooijen, A. A., & Choudhuri, A. R. 1988, *ApJ*, 333, 965
- Wang, Y.-M., Lean, J., & Sheeley, Jr., N. R. 2002a, *ApJ*, 577, L53
- Wang, Y.-M., Nash, A. G., & Sheeley, Jr., N. R. 1989a, *ApJ*, 347, 529
- . 1989b, *Science*, 245, 712
- Wang, Y.-M., & Sheeley, Jr., N. R. 1989, *Sol. Phys.*, 124, 81
- . 1991, *ApJ*, 375, 761
- Wang, Y.-M., Sheeley, Jr., N. R., & Lean, J. 2002b, *ApJ*, 580, 1188
- Wang, Y.-M., Sheeley, Jr., N. R., & Nash, A. G. 1991, *ApJ*, 383, 431
- Weber, M. A., Fan, Y., & Miesch, M. S. 2011, *ApJ*, 741, 11
- Whitbread, T., Yeates, A. R., Muñoz-Jaramillo, A., & Petrie, G. J. D. 2017, *A&A*, 607, A76
- Yeates, A. R. 2014, *Sol. Phys.*, 289, 631
- Yeates, A. R. 2016, Bipolar magnetic regions determined from NSO synoptic carrington maps, doi :10.7910/DVN/Y5CXM8
- Yeates, A. R., & Muñoz-Jaramillo, A. 2013, *MNRAS*, 436, 3366
- Zhao, J., Bogart, R. S., Kosovichev, A. G., Duvall, Jr., T. L., & Hartlep, T. 2013, *ApJ*, 774, L29
- Zimmerman, D. S., Triana, S. A., Nataf, H.-C., & Lathrop, D. P. 2014, *Journal of Geophysical Research (Solid Earth)*, 119, 4538