

Université de Montréal

q -oscillateurs et q -polynômes de Meixner

par

Julien Gaboriaud

Département de Physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Physique

23 octobre 2017

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

q -oscillateurs et q -polynômes de Meixner

présenté par

Julien Gaboriaud

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Richard MacKenzie

(président-rapporteur)

Luc Vinet

(directeur de recherche)

Manu Paranjape

(membre du jury)

Mémoire accepté le

23 octobre 2017

SOMMAIRE

Une interprétation algébrique des q -polynômes de Meixner est présentée dans ce mémoire. Cette interprétation est obtenue en considérant des représentations de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ sur des états de q -oscillateurs et en observant que les q -polynômes de Meixner apparaissent comme éléments de matrice d'opérateurs de q -pseudorotation unitaires. Ces opérateurs sont construits à partir de q -exponentielles des générateurs de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$. Diverses propriétés des polynômes, telles que l'orthogonalité, la relation de récurrence et l'équation aux différences, sont obtenues de façon systématique dans le cadre de la construction. Deux chapitres d'introduction précèdent l'article et discutent des liens entre les polynômes orthogonaux, les structures algébriques (encodant des symétries d'un problème) et les systèmes physiques associés.

Mots clés : q -polynômes de Meixner, q -oscillateur, Interprétation algébrique, Algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$, Construction de Jordan-Schwinger, Déformations de théories physiques, Algèbre générant le spectre, Vecteur de Runge-Lenz

SUMMARY

An algebraic interpretation of the q -Meixner polynomials is obtained in this master's thesis. It is based on representations of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ on q -oscillator states with the polynomials appearing as matrix elements of unitary q -pseudorotation operators. These operators are built from q -exponentials of the $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ generators. The orthogonality, recurrence relation, difference equation, and other properties of the q -Meixner polynomials are systematically obtained in this framework. Two introductory chapters on orthogonal polynomials, algebraic structures (encoding symmetry properties) and their connections to the associated physical systems precede the article.

Keywords : q -Meixner Polynomials, q -Oscillator, Algebraic Interpretation, $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ Algebra, Jordan-Schwinger Construction, Deformations of Physical Theories, Spectrum Generating Algebra, Runge-Lenz Vector

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	v
Summary	vii
Dédicace	xi
Remerciements	xiii
Introduction	1
Contributions de l'auteur	2
Chapitre 1. Polynômes orthogonaux et systèmes physiques	3
1.1. Polynômes orthogonaux	3
1.2. Pourquoi des polynômes orthogonaux en physique?	4
1.3. Construction de Jordan-Schwinger et éléments de matrice : Interprétation algébrique de polynômes orthogonaux	6
Chapitre 2. q-déformations et systèmes physiques	9
2.1. Déformations en physique	9
2.2. q -nombres et q -déformations des polynômes orthogonaux	11
2.3. q -déformations des structures algébriques en physique	12
Chapitre 3. An algebraic interpretation of the q-Meixner polynomials	19
Abstract	19
Introduction	19
3.1. $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1, 1))$ and q -oscillators	21
3.2. The unitary operator $U(\theta)$ and its matrix elements	22
3.2.1. The unitary operator $U(\theta)$	22

3.3. Matrix elements of $U(\theta)$ and q -Meixner polynomials	23
3.3.1. Orthogonality relations	24
3.4. $q \rightarrow 1$ limit	25
3.4.1. Operator $U(\theta)$	25
3.4.2. Matrix elements	26
3.5. Backward, forward relations and difference relation	26
3.5.1. Backward relation	27
3.5.2. Forward relation	28
3.5.3. Difference equation	28
3.6. Complementary backward, forward relations and recurrence relation	29
3.6.1. Complementary backward relation	29
3.6.2. Complementary forward relation	30
3.6.3. Recurrence equation	30
3.7. Duality	31
3.8. Generating functions	31
3.8.1. Generating function with respect to the degrees	31
3.8.2. Generating function with respect to the variables	33
3.9. Conclusion	34
Acknowledgments	34
A. “Dual” relations	35
B. Useful q -series identities	36
Conclusion	37
Références	39

DÉDICACE

À ma famille

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, Luc Vinet, qui m'a offert un environnement idéal pour effectuer mes travaux de maîtrise et m'a fourni motivation et encouragements, ce qui m'a permis de réaliser cette maîtrise rapidement et sans à-coups.

Un merci énorme à mes collègues Éric-Olivier Bossé, Jean-Michel Lemay et Geoffroy Bergeron pour ces discussions passionnantes et éclairantes sur tant de sujets très divers (et à Félix Fournier également).

Merci enfin à ma famille et mes amis, grâce à qui ma vie est belle.

INTRODUCTION

Le sujet d'étude du présent mémoire porte sur les liens entre q -polynômes de Meixner et systèmes physiques quantiques. Cette étude s'inscrit dans un contexte plus large, qui serait assez bien résumé par « l'étude des liens entre les boîtes dans le diagramme ci-bas » :

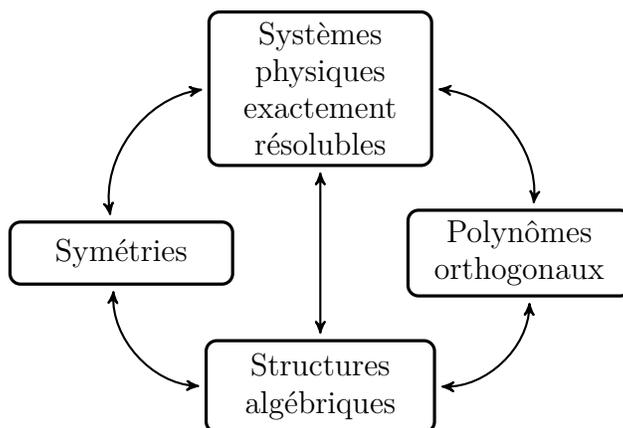


FIGURE 0.1. Diagramme \diamond des liens entre les domaines d'étude

Une tâche fondamentale en physique théorique est la construction de modèles physiques pour décrire le mieux possible les phénomènes observés. Mais qui dit « le mieux possible » dit « approximations », et qui dit « approximations » dit également « description imparfaite ». Ceci n'est pas la fin du monde ; en effet, si les imprécisions sont complètement négligeables et les prédictions faites (malgré les approximations) décrivent la réalité observée de façon juste, la théorie reste valable (jusqu'à preuve du contraire!).

Tel que formulé par Wigner [1], les mathématiques ont une « efficacité déraisonnable » pour décrire les sciences naturelles. Ce genre d'observation a même mené certaines personnes à considérer que « les mathématiques étaient choisies par la physique » [2] (sous certaines hypothèses de naturalisme) ! La justification ou la critique de ces points de vue ne sont pas le sujet d'étude du présent mémoire. Mais cette discussion a tout de même le mérite d'amener la constatation suivante :

Des avancées fondamentales en physique théorique peuvent être réalisées en traduisant des avancées du côté mathématique vers le côté physique par un des nombreux liens qui unissent les deux domaines.

Le diagramme \diamond présenté ci-haut représente bien cette vision. Ainsi, les avancées faites dans une des boîtes ont des répercussions sur les autres en raison des connexions entre celles-ci.

Les deux prochains chapitres s'efforceront d'introduire les éléments dans ces boîtes et les liens qui les relient afin de familiariser le lecteur avec une certaine approche (plutôt mathématique) pour faire de la physique. Après avoir introduit les polynômes orthogonaux, ceux-ci seront situés dans un contexte physique. Un exemple d'introduction aux interprétations algébriques de polynômes orthogonaux sera présenté par le biais de la construction de Jordan-Schwinger (les polynômes de Krawtchouk sont des éléments de matrice de représentations de rotations sur des états d'oscillateurs harmoniques). Par la suite, le concept de déformations en physique sera présenté, et formalisé de façon plus mathématique en observant son encodage dans les structures algébriques de théories physiques. Après cela, les q -déformations de nombres et de structures algébriques seront introduites. Puis, l'algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ sera obtenue dans un exemple, grâce à une fonction de déformation de l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$. Ceci terminera la mise en place des concepts et du contexte, et l'article au cœur du présent mémoire sera enfin présenté. L'interprétation algébrique des q -polynômes de Meixner sera obtenue dans un modèle de q -oscillateurs, et cette construction sera utilisée pour dériver simplement de nombreuses propriétés des polynômes. Quelques remarques finales concluront ce mémoire.

CONTRIBUTIONS DE L'AUTEUR

Ce projet de recherche a été initialement proposé par Luc Vinet comme projet dans le cadre du cours PHY-3030. L'idée d'obtenir une interprétation algébrique des q -polynômes de Meixner faisait suite à des avancées similaires qui avaient été faites pour les q -polynômes de Krawtchouk. Pour résoudre le problème, il fallait donc généraliser l'approche existante pour un cas plus compliqué, en créant un nouveau modèle, et en trouvant un moyen d'obtenir les polynômes désirés grâce au bon type de q -opérateur. Sous la supervision de Luc Vinet, l'auteur a créé le modèle et effectué les calculs. Puis, il a rédigé la première version de l'article, qui a été révisée et retravaillée en grand détail par le co-auteur, Luc Vinet, ce qui a grandement rehaussé la qualité de l'article final, qui a été publié en Juin 2017 dans le *Ramanujan Journal* [3].

Chapitre 1

POLYNÔMES ORTHOGONAUX ET SYSTÈMES PHYSIQUES

1.1. POLYNÔMES ORTHOGONAUX

« Une séquence $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ de polynômes $P_n(x)$ de degré n qui respecte

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = h_n\delta_{m,n} , \quad \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (1.1.1)$$

est appelée une *séquence de polynômes orthogonaux* par rapport à la fonction de poids $w(x) > 0$ sur l'intervalle $[a, b]$ » (h_n est une normalisation).

C'est ainsi que Theodore S. Chihara introduit les polynômes orthogonaux dans son ouvrage [4]. De nombreuses familles (ou séquences) de polynômes orthogonaux existent ; en effet, pour deux fonctions de poids différentes, les familles qui respectent la relation d'orthogonalité seront différentes. Une façon d'identifier et de classer les familles de polynômes orthogonaux se fait donc par l'entremise de leur fonction de poids.

Notons que ces polynômes peuvent être des polynômes de variable discrète. L'orthogonalité s'exprime alors comme

$$\sum_{x=a}^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = h_n\delta_{m,n} . \quad (1.1.2)$$

La relation d'orthogonalité présentée en (1.1.1) et (1.1.2) entraîne de nombreuses autres propriétés spéciales satisfaites par ces séquences de polynômes. En particulier, par le théorème de Favard, toutes les familles de polynômes orthogonaux respectent une *relation de récurrence à trois termes*

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) , \quad n \geq 0 , \quad (1.1.3)$$

qui peut se réécrire de la façon suivante :

$$x p_n(x) = p_{n+1}(x) + \alpha_n p_n(x) + \beta_n p_{n-1}(x) , \quad n = 0, 1, \dots , \quad (1.1.4)$$

où les $p_n(x)$ sont la forme monique des $P_n(x)$, c'est-à-dire que le coefficient du monôme de degré le plus élevé est 1 :

$$p_n(x) = 1x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0 . \quad (1.1.5)$$

Les polynômes orthogonaux continus (ou discrets) classiques respectent également une équation différentielle (ou une équation aux différences) de deuxième ordre, et peuvent être exprimés en série hypergéométrique. La série hypergéométrique ${}_rF_s\left(\begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{smallmatrix} \middle| z\right)$ est définie par

$${}_rF_s\left(\begin{smallmatrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{smallmatrix} \middle| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_r)_k}{(b_1)_k \dots (b_s)_k} \frac{z^k}{k!} , \quad (1.1.6)$$

où $(a)_k = \underbrace{a(a+1) \dots (a+k-1)}_{k \text{ termes}}$ est le symbole de Pochhammer.

Des exemples de polynômes orthogonaux sont les polynômes de Hermite [5], définis par

$$H_n(x) = (2x)^n {}_2F_0\left(\begin{smallmatrix} -\frac{n}{2}, -\frac{(n-1)}{2} \\ - \end{smallmatrix} \middle| -\frac{1}{x^2}\right) , \quad (1.1.7)$$

et les polynômes de Charlier [5], définis par

$$C_n(x; a) = {}_2F_0\left(\begin{smallmatrix} -n, -x \\ - \end{smallmatrix} \middle| -\frac{1}{a}\right) . \quad (1.1.8)$$

1.2. POURQUOI DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX EN PHYSIQUE ?

Les polynômes orthogonaux et fonctions spéciales apparaissent dans de nombreuses instances de résolution de problèmes en physique. Un exemple typique est l'oscillateur harmonique en une dimension, dont les fonctions d'onde s'expriment en termes des polynômes de Hermite [6].

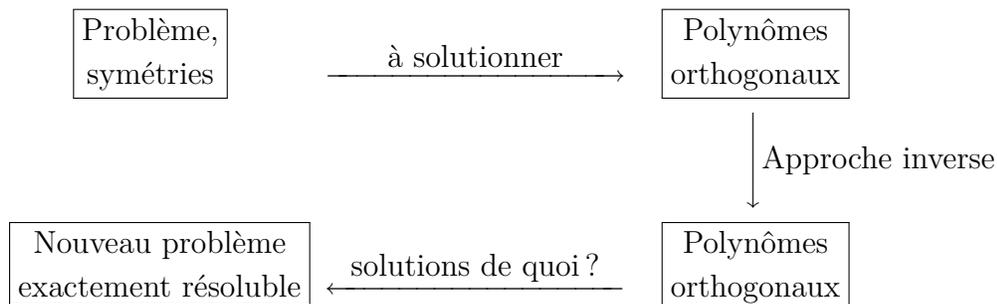
Il est assez aisé de se convaincre que les diverses propriétés que satisfont ces polynômes orthogonaux sont très naturelles dans un cadre physique. Regardons l'exemple de l'oscillateur harmonique plus en détail. L'orthogonalité des polynômes d'Hermite est liée au fait que ceux-ci forment une base orthogonale d'états propres pour le problème solutionné. L'équation différentielle satisfaite par ceux-ci apparaît lors de la résolution de l'équation de Schrödinger de ce système et est donc étroitement liée à l'Hamiltonien de ce système (dans cet exemple il s'agit de l'Hamiltonien conjugué par son état fondamental). Ces polynômes possèdent des opérateurs échelle qui sont étroitement liés aux opérateurs de création/annihilation qui permettent de passer d'un état propre d'énergie donné à un autre.

Une fois ces observations faites, il n'est donc guère surprenant que les polynômes orthogonaux, qui satisfont des propriétés somme toute très « physiques », soient souvent liés aux solutions de systèmes physiques. D'autres exemples d'apparition de polynômes orthogonaux dans des problèmes physiques sont : les polynômes de Laguerre généralisés (atome d'hydrogène), les polynômes de Legendre (équation de Laplace en électrodynamique [7]), et divers

autres types de polynômes orthogonaux, tels que les polynômes de Hahn et de Racah, dans les problèmes de Clebsch-Gordan et de Racah respectivement.

L'oscillateur harmonique mentionné ci-haut n'est pas un exemple banal. La possibilité de solutionner simplement et exactement ce système et le fait que de nombreuses perturbations en physique s'écrivent en première approximation comme des oscillateurs harmoniques rendent ce système fort utile pour modéliser des comportements dans de nombreux domaines en physique (excitations de champs bosoniques en théorie des champs [8], phonons en matière condensée [6], etc).

Dans le contexte des liens étroits entre polynômes orthogonaux et systèmes physiques, il existe également une approche moins connue, à l'opposé de celle présentée ci-haut. Au lieu de dériver les polynômes orthogonaux comme solutions de problèmes en physique, il est possible de partir de polynômes orthogonaux et de chercher quel problème ceux-ci solutionnent (dans le même esprit que l'émission de télévision *Jeopardy!*). Ceci peut être schématisé comme suit :



Cette approche permet systématiquement d'agrandir le répertoire de systèmes exactement solubles, qui sont une denrée rare en physique théorique.

L'auteur du présent mémoire a déjà appliqué cette approche inverse dans un projet d'été, en collaboration avec V. X. Genest, J. Lemieux et L. Vinet [9]. En partant du postulat que les polynômes de Meixner bivariés étaient les fonctions d'onde d'un système physique à déterminer, nous avons dérivé le système physique correspondant : il s'agissait d'une version discrétisée de l'oscillateur harmonique en deux dimensions qui respectait la même algèbre de symétrie $\mathfrak{su}(2)$ que dans le cas continu, une première dans le domaine. Les travaux de maîtrise présentés ici continuent d'explorer les liens entre les polynômes de Meixner et les systèmes physiques : plus précisément, l'article au coeur de ces travaux de maîtrise offre une interprétation algébrique de la q -généralisation des polynômes de Meixner, dans un contexte de systèmes physiques quantiques superintégrables¹.

1. Un système quantique superintégréable est un système physique qui possède un plus grand nombre de constantes du mouvement indépendantes que de dimensions (les constantes du mouvement sont des opérateurs qui commutent avec l'Hamiltonien).

1.3. CONSTRUCTION DE JORDAN-SCHWINGER ET ÉLÉMENTS DE MATRICE : INTERPRÉTATION ALGÈBRIQUE DE POLYNÔMES ORTHOGONAUX

En 1952, Julian Schwinger introduit sa célèbre construction éponyme [10]. Il s'agit là d'un exemple modèle d'interprétation de polynômes orthogonaux, dont l'esprit inspirera de nombreuses autres constructions du genre.

Pour faire cette construction, on choisit les générateurs de l'algèbre bosonique $(a_i, a_i^\dagger, i = 1, 2)$, comme générateurs de l'algèbre dynamique du système. Les relations de commutation respectées par ceux-ci sont

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} , \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 . \quad (1.3.1)$$

La représentation usuelle choisie est donnée par la base des états orthonormés dénotés $|n_1, n_2\rangle \equiv |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$, $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$ et sur laquelle les actions des générateurs sont données par

$$a_1 |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1} |n_1 - 1, n_2\rangle , \quad a_2 |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2} |n_1, n_2 - 1\rangle , \quad (1.3.2)$$

$$a_1^\dagger |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1 + 1} |n_1 + 1, n_2\rangle , \quad a_2^\dagger |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2 + 1} |n_1, n_2 + 1\rangle . \quad (1.3.3)$$

L'énergie totale d'un tel système est mesurée par l'opérateur

$$N = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 . \quad (1.3.4)$$

L'algèbre de symétrie du système (c'est-à-dire l'algèbre générée par les opérateurs linéairement indépendants qui commutent avec l'énergie N) est générée par les opérateurs

$$J_1 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) , \quad J_2 = \frac{1}{2i}(a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger) , \quad J_3 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) . \quad (1.3.5)$$

Il est aisé de vérifier que $[J_i, N] = 0$, $i = 1, 2, 3$. Les relations de commutation des J_i sont

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k , \quad (\epsilon_{ijk} \text{ le symbole de Levi-Civita}) , \quad (1.3.6)$$

ce qui permet d'identifier que l'algèbre de symétrie du système est $\mathfrak{su}(2)^2$.

La théorie des groupes et des algèbres de Lie permet de rendre explicite le lien entre l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$ et le double revêtement $SU(2)$ du groupe des rotations [12]. Cette théorie prescrit comment obtenir un élément du groupe de Lie à partir de l'exponentiation d'un élément de l'algèbre. Ainsi, on peut alors former un opérateur $U(\theta)$ défini par

$$U(\theta) = \exp(i\theta J_2) = \exp\left(\frac{\theta}{2}(a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger)\right) \quad (1.3.7)$$

2. Ceci est dû au choix restreint des opérateurs J_i , $i = 1, 2, 3$. Plus généralement [11], la construction de Schwinger (ou Jordan-Schwinger) permet d'obtenir $\mathfrak{u}(n)$ comme algèbre de symétrie à partir de n oscillateurs harmoniques, en formant les opérateurs $G_{\alpha\beta} = a_\alpha^\dagger a_\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$.

qui s'interprète alors comme un opérateur de “rotation” qui mélange entre eux les états des deux oscillateurs harmoniques sans changer l'énergie totale du système.

L'intérêt de la construction de Schwinger est de permettre de calculer simplement les éléments de matrice de cet opérateur de rotation. Si on dénote le sous-espace dégénéré des états d'énergie N par $|n\rangle_N \equiv |n, N - n\rangle$, $n = 0, 1, \dots, N$, les éléments de matrice non-nuls de $U(\theta)$ à calculer s'écrivent alors

$${}_N\langle n|U(\theta)|x\rangle_N \equiv \xi_{n,x}^{(N)}. \quad (1.3.8)$$

Quelques manipulations astucieuses et l'utilisation de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff [6] permettent d'arriver à la relation de récurrence à trois termes que ces éléments de matrice respectent, et ainsi d'obtenir leur identification en tant que polynômes orthogonaux.

$$\begin{aligned} {}_N\langle n|e^{i\theta J_2}a_1^\dagger a_1|x\rangle_N &= x\xi_{n,x}^{(N)} \\ &= {}_N\langle n|[e^{i\theta J_2}a_1^\dagger e^{-i\theta J_2}][e^{i\theta J_2}a_1 e^{-i\theta J_2}]e^{i\theta J_2}|x\rangle_N \\ &= {}_N\langle n|[a_1^\dagger \cos(\theta/2) - a_2^\dagger \sin(\theta/2)][a_1 \cos(\theta/2) - a_2 \sin(\theta/2)]e^{i\theta J_2}|x\rangle_N \\ &= -\sqrt{n(N-n+1)}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\xi_{n-1,x}^{(N)} - \sqrt{(N-n)(n+1)}\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\xi_{n+1,x}^{(N)} \\ &\quad + [n\cos^2(\theta/2) + (N-n)\sin^2(\theta/2)]\xi_{n,x}^{(N)} \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Sous la redéfinition

$$\xi_{n,x}^{(N)} = p_n(x; \theta, N) \frac{(-1)^n}{[\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)]^n} \sqrt{\frac{(N-n)!}{n!}}, \quad (1.3.10)$$

la relation de récurrence des polynômes de Krawtchouk de type monique [5] avec paramètre $p = \sin^2(\theta/2)$ est obtenue :

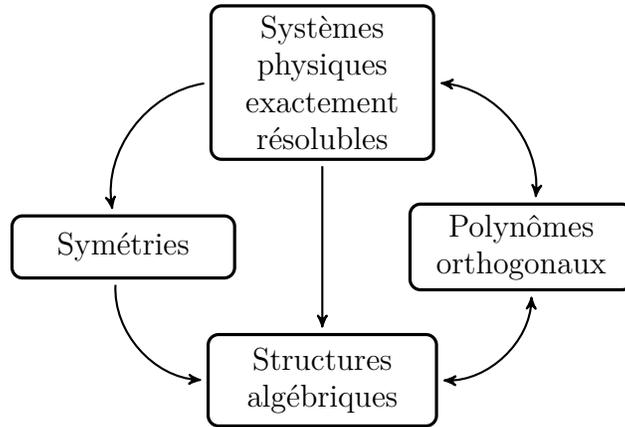
$$\begin{aligned} xp_n(x; \theta, N) &= p_{n+1}(x; \theta, N) + p_n(x; \theta, N) [n\cos^2(\theta/2) + (N-n)\sin^2(\theta/2)] \\ &\quad + p_{n-1}(x; \theta, N) [n(N-n+1)\cos^2(\theta/2)\sin^2(\theta/2)]. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Ainsi, les éléments de matrice obtenus

$$\xi_{n,x}^{(N)} = \frac{N!}{\sqrt{n!(N-n)!}} \tan^n(\theta/2) K_n(x; \sin^2(\theta/2), N) \quad (1.3.12)$$

permettent d'interpréter les polynômes de Krawtchouk comme éléments de matrice de représentations de rotations sur des états d'oscillateurs.

Pour synthétiser le tout, ce chapitre a introduit les liens suivants dans le diagramme :



Le prochain chapitre s'efforcera de compléter les liens manquants. Plus particulièrement, une courte section discutera des effets d'une modification des structures algébriques. Ceci clarifiera comment les structures algébriques traduisent mathématiquement les symétries d'une théorie physique (passage de la relativité restreinte à la relativité galiléenne) et également les types de systèmes physiques étudiés (passage de la mécanique quantique à la mécanique classique). Enfin, une direction à suivre pour obtenir une q -déformation du schéma sera indiquée.

Chapitre 2

q -DÉFORMATIONS ET SYSTÈMES PHYSIQUES

2.1. DÉFORMATIONS EN PHYSIQUE

Le concept de déformation apparaît à de nombreux endroits en physique. Un premier exemple est la relativité restreinte, qui apparaît comme déformation de la relativité galiléenne lorsqu'une vitesse maximale de propagation c (vitesse de la lumière) constante dans tous les référentiels [13] est imposée. Dans cet exemple, la théorie physique est construite à partir de l'imposition d'une contrainte qui, encodée de façon algébrique, revient à imposer le groupe de Poincaré comme groupe de symétries de l'espace-temps. Bien entendu, dans la limite où le paramètre de déformation c tend vers l'infini (aucune limite sur la vitesse de propagation), on retrouve la relativité galiléenne car tous les facteurs de correction relativistes, encodés par γ , tendent vers 1 :

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \gamma = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 \quad (2.1.1)$$

D'un point de vue plus algébrique, le « retrait » de la déformation peut être vu de la façon suivante : dans la limite $c \rightarrow \infty$, l'algèbre de Poincaré (algèbre qui reflète le produit des transformations de relativité restreinte au niveau infinitésimal) est contractée à la *Wigner-Inonu* [14] vers l'algèbre de Galilée (algèbre des générateurs du groupe des symétries de la relativité galiléenne).

Ceci se voit assez bien lorsqu'on écrit explicitement. L'algèbre de Poincaré (en $3 + 1$ dimensions) est générée par $\{J_i, P_i, K_i, P_0, m\}$, $i = 1, 2, 3$, et m est l'énergie au repos ($m^2 c^2 = P_0^2 - \vec{P}^2$) :

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k & [P_0, P_i] &= 0 & [P_i, P_j] &= 0 \\ [J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk} P_k & [P_0, K_i] &= iP_i & [P_i, K_j] &= i\delta_{ij} P_0 \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k & & & [K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk} J_k \\ [J_i, P_0] &= 0 & & & & \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Sous les redéfinitions

$$\begin{cases} \mathcal{J}_i = J_i , \\ \mathcal{P}_i = -P_i , \\ \mathcal{K}_i = \frac{K_i}{c} , \\ \mathcal{H} = cP_0 - mc^2 , \end{cases} \quad (2.1.3)$$

les relations de commutation de ces nouveaux générateurs prennent la forme :

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k & [\mathcal{H}, \mathcal{P}_i] &= 0 & [\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] &= 0 \\ [\mathcal{J}_i, \mathcal{P}_j] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{P}_k & [\mathcal{H}, \mathcal{K}_i] &= -i\mathcal{P}_i & [\mathcal{P}_i, \mathcal{K}_j] &= -\frac{i}{c}\delta_{ij}\left(\frac{\mathcal{H}}{c} + mc\right) \\ [\mathcal{J}_i, \mathcal{K}_j] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{K}_k & & & [\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j] &= -\frac{1}{c}i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k \\ [\mathcal{J}_i, \mathcal{H}] &= 0 & & & & \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Dans la limite $c \rightarrow \infty$, on retrouve effectivement l'algèbre de Galilée (en 3 dimensions) :

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k & [\mathcal{H}, \mathcal{P}_i] &= 0 & [\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] &= 0 \\ [\mathcal{J}_i, \mathcal{P}_j] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{P}_k & [\mathcal{H}, \mathcal{K}_i] &= -i\mathcal{P}_i & [\mathcal{P}_i, \mathcal{K}_j] &= -im\delta_{ij} \\ [\mathcal{J}_i, \mathcal{K}_j] &= i\epsilon_{ijk}\mathcal{K}_k & & & [\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j] &= 0 \\ [\mathcal{J}_i, \mathcal{H}] &= 0 , & & & & \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

m est maintenant une extension centrale.

Dans le même ordre d'idées, la mécanique quantique peut être vue comme une déformation de la mécanique classique, en incorporant un quanta d'énergie \hbar pour décrire l'unité fondamentale d'énergie¹. Encore une fois, dans une certaine limite (dans la limite où \hbar tend vers 0) qui correspond à ne pas considérer de quantification, la mécanique classique est retrouvée. Ceci peut être visualisé de façon élégante par le formalisme des intégrales de chemin, introduites tout d'abord par Dirac en 1932 [15] puis développées plus en profondeur par Feynman en 1942 [16] : l'évolution d'une fonction d'onde $\psi(x, t)$ peut être obtenue par l'action d'un propagateur $U(t, x; t_i, x_i)$ défini comme

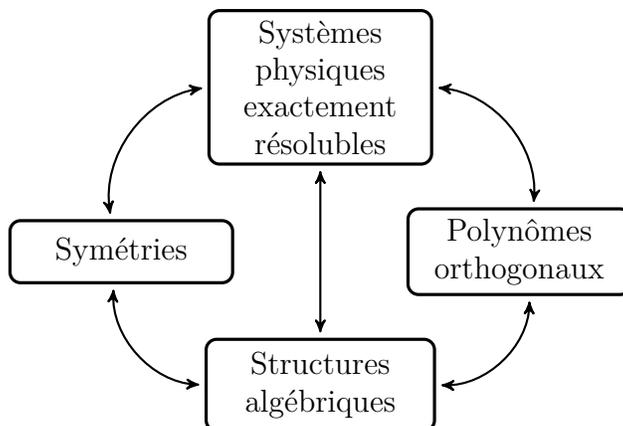
$$\psi(x, t) = U(t, x; t_i, x_i)\psi(x_i, t_i) = A \int \mathcal{D}x e^{i/\hbar S[x]} \psi(x_i, t_i) , \quad (2.1.6)$$

où $S[x] = \int dt \mathcal{L}$, l'intégrale temporelle du Lagrangien \mathcal{L} , est l'action pour une trajectoire donnée. Dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, l'exponentielle complexe est hautement oscillatoire. L'addition de facteurs de phase se fera en général de façon destructrice, sauf si $S[x]$ varie très faiblement autour d'un ensemble de chemins. On voit ainsi que le seul chemin sélectionné dans la limite classique est celui qui correspond bel et bien à la trajectoire classique prescrite par le principe d'extrémisation de l'action.

1. On devrait en fait parler d'unité fondamentale d'action, puisque les unités de \hbar sont des $J \cdot s \dots$

Notons également qu'il est possible de retrouver l'équation d'Hamilton-Jacobi dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$ à partir de l'équation de Schrödinger.

Le portrait \diamond est maintenant enfin complété :



Le restant de ce chapitre aura pour but de mener au schéma q -déformé, en introduisant le formalisme des q -déformations.

2.2. q -NOMBRES ET q -DÉFORMATIONS DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Il est bien connu que la somme partielle des $n \in \mathbb{N}$ premiers termes de la série géométrique de raison $|q| < 1$ est donnée par

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} . \quad (2.2.1)$$

Dans la limite $q \rightarrow 1$, cela revient à additionner n fois le nombre 1 :

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - q^n}{1 - q} = n \quad (2.2.2)$$

On peut aisément généraliser le $n \in \mathbb{N}$ pour un $x \in \mathbb{R}$ et la limite précédente tient toujours par la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - q^x}{1 - q} \stackrel{\text{R.H.}}{=} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{-xq^{x-1}}{-1} = x \quad (2.2.3)$$

On en conclut que $\frac{1 - q^x}{1 - q}$ correspond à une certaine q -déformation du nombre x .

Le symbole de Pochhammer peut également être q -déformé :

$$(a; q)_n = \underbrace{(1 - a)(1 - aq)(1 - aq^2) \dots (1 - aq^{n-1})}_{n \text{ termes}} \quad (2.2.4)$$

Tel que mentionné au chapitre précédent, les polynômes orthogonaux peuvent être exprimés en série hypergéométrique. Suite à l'introduction des q -déformations des nombres et des q -Pochhammer, une généralisation assez naturelle consiste à définir des q -polynômes

orthogonaux en termes de la série hypergéométrique basique, qui est une q -déformation de la série hypergéométrique définie en (1.1.6) :

$${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_k \cdots (a_r; q)_k}{(b_1; q)_k \cdots (b_s; q)_k} \left[(-1)^k q^{\binom{k}{2}} \right]^{1+s-r} \frac{z^k}{(q; q)_k}, \quad (2.2.5)$$

où $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$.

Par exemple, les q -polynômes de Charlier [5] sont définis par

$$\mathcal{C}_n(q^{-x}; a; q) = {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{-x} \\ 0 \end{matrix} \middle| q; -\frac{q^{n+1}}{a} \right), \quad (2.2.6)$$

et on retrouve les polynômes de Charlier définis en (1.1.8) sous le changement de variable $a \rightarrow a(1-q)$ et la limite $q \rightarrow 1$:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathcal{C}_n(q^{-x}; a(1-q); q) = C_n(x; a) \quad (2.2.7)$$

Enfin, notons qu'il existe d'autres façons de q -déformer les nombres. En particulier, introduisons dès maintenant la notation $[x]_q$ (qui sera utilisée dans le restant du texte) pour définir le q -nombre

$$[x]_q := \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad \lim_{q \rightarrow 1} [x]_q = x. \quad (2.2.8)$$

On se restreindra au cas où q n'est pas une racine de l'unité pour les développements de la prochaine section.

2.3. q -DÉFORMATIONS DES STRUCTURES ALGÈBRIQUES EN PHYSIQUE

On s'intéressera plus particulièrement aux systèmes physiques exactement résolubles dans ce qui suit (à des fins de simplicité). Dans l'esprit des précédentes déformations, une fois les q -nombres introduits, il nous faut maintenant q -déformer les structures algébriques utilisées en physique. Puisque ces structures algébriques sont très étroitement liées aux systèmes physiques, une introduction plus détaillée des différents objets est donc souhaitable.

La façon de faire de la mécanique quantique repose en général sur l'approche suivante : diagonaliser l'Hamiltonien \mathcal{H} du système, c'est-à-dire identifier une base d'états propres \mathcal{B} de l'opérateur d'énergie. L'algèbre de symétrie du système est alors l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie, générée par les opérateurs qui commutent avec l'Hamiltonien (c'est-à-dire les opérateurs qui préservent l'énergie).

Définition : L'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur \mathbb{C} , dénotée $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, est définie [17] comme l'algèbre tensorielle de \mathfrak{g} (dénotée $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$) quotientée par l'idéal bilatère

$\mathcal{I} = [x, y] - (x \otimes y - y \otimes x)$. Plus précisément,

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}(\mathfrak{g}) / \mathcal{I},$$

$$\mathcal{T}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}) \quad , \quad \mathcal{T}^k(\mathfrak{g}) = \begin{cases} \mathbb{C} & k = 0 \\ \underbrace{\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}}_{k \text{ fois}} & k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Conceptuellement, ceci signifie que les relations de commutation de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} sont toujours respectées dans l'extension $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et que la manipulation des puissances de générateurs, par exemple de l'opérateur de moment cinétique total de $SO(3)$, $\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, peut désormais se faire de façon bien définie mathématiquement dans l'extension $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Également, puisqu'une représentation de \mathfrak{g} est un homomorphisme d'algèbre, cette même représentation sera donc forcément valide pour $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Revenons à l'algèbre de symétrie d'un système en physique. On peut agrandir cette algèbre en incluant des opérateurs « échelle » qui agissent sur la base \mathcal{B} en passant d'une solution d'une énergie donnée à une autre. Cette algèbre agrandie est appelée « algèbre générant le spectre »² et sera dénotée \mathcal{G}_0 pour la suite. Cette algèbre encode la dynamique du système dans son entièreté : elle encode toutes les transitions possible d'un état du système à un autre (ou encore : elle encode toutes les transformations possibles d'une solution de l'équation de Schrödinger à une autre). L'espace de Hilbert \mathcal{H} du système quantique est ici un module irréductible unitaire de \mathcal{G}_0 .

Dans l'algèbre \mathcal{G}_0 , on peut identifier la sous-algèbre $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_0$ qui est l'algèbre de symétrie du système. Un Casimir de \mathcal{G}_1 est dénoté \mathcal{C}_1 et par le lemme de Schur, ses valeurs propres prennent des valeurs constantes sur les différents sous-espaces de Hilbert provenant de la décomposition de \mathcal{H} en irréductibles de \mathcal{G}_1 .

Ce processus peut être répété pour former une chaîne de sous-algèbres $\mathcal{G}_n \subset \cdots \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_0$, en identifiant un nouveau Casimir \mathcal{C}_n pour chaque sous-algèbre, qui étiquette alors les sous-espaces de Hilbert irréductibles sous \mathcal{G}_n ³. L'ensemble des valeurs propres des Casimirs de toutes les sous-algèbres est appelé « les nombres quantiques » et ce sont ceux-ci qu'on utilise pour identifier les états quantiques.

Cette décomposition peut être illustrée avec un exemple non trivial et fort intéressant : l'atome d'Hydrogène. L'algèbre générant le spectre de ce système est $\mathcal{U}(\mathfrak{so}(4,1))$ [18] pour

2. Certains auteurs appellent également cette algèbre « l'algèbre dynamique du système ». Les deux appellations seront utilisées pour la suite. Notons également qu'une vision équivalente de ce qu'est l'algèbre dynamique est de considérer le système physique comme étant décrit par l'ensemble de ses observables $\{\mathcal{O}_i\}$ (on entend ici toutes les observables, par uniquement un sous-ensemble d'observables qui commutent entres elles). Les $\{\mathcal{O}_i\}$ sont alors vues comme générateurs d'une algèbre de Lie. L'algèbre enveloppante universelle générée par ces $\{\mathcal{O}_i\}$ est alors exactement l'algèbre générant le spectre introduite ci-haut.

3. Dans le cas où une sous-algèbre \mathcal{G}_k possède plusieurs Casimirs indépendants, il faut bien entendu identifier tous ses Casimirs $\mathcal{C}_k^{(i)}$, et l'ensemble de leurs valeurs propres étiquettera alors les sous-espaces de Hilbert invariants sous \mathcal{G}_k .

des énergies négatives. Sous un certain choix de normalisation, on peut écrire l'Hamiltonien de la façon suivante (rappel : $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$, $\hbar = 1$) :

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2} - aX^{-1} , \quad a = me^2 , \quad X^{-1} = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right)^{-1} , \quad P^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 . \quad (2.3.2)$$

À première vue, cet Hamiltonien est invariant sous les rotations et il possède donc trois quantités conservées (les composantes du vecteur de moment cinétique L_i , qui commutent avec l'Hamiltonien). Mais il possède trois quantités conservées supplémentaires (A_i) en raison du potentiel en $\sim 1/X$, qui correspondent aux composantes du vecteur de Runge-Lenz. Sous un certain choix de normalisation, ces quantités ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} L_i &= \epsilon_{ijk} x_j p_k , \\ A_i &= \left(\sqrt{-2\mathcal{H}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (p_j L_k + L_k p_j) + a x_i X^{-1} \right) , \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

et les relations de commutation sont données par

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, L_i] &= [\mathcal{H}, A_i] = 0 \\ [L_i, L_j] &= i\epsilon_{ijk} L_k , \quad [L_i, A_j] = i\epsilon_{ijk} A_k , \quad [A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk} L_k . \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Les L_i, A_i génèrent l'algèbre $\mathfrak{so}(4)$. L'algèbre de symétrie est donc $\mathcal{U}(\mathfrak{so}(4))$. Deux Casimirs existent pour $\mathfrak{so}(4)$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \vec{A}^2 + \vec{L}^2 , \\ \mathcal{C}'_1 &= \vec{A} \cdot \vec{L} , \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

mais en raison des expressions pour L_i, A_i et \mathcal{H} , ces Casimirs se réécrivent

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= a^2 (-2\mathcal{H})^{-1} - I , \\ \mathcal{C}'_1 &= 0 . \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Les valeurs propres c_1 du Casimir \mathcal{C}_1 serviront donc à étiquetter les sous-espaces de Hilbert invariants sous l'algèbre de symétrie (tous ces sous-espaces ont la même valeur propre $c'_1 = 0$ du Casimir \mathcal{C}'_1 , cette étiquette est donc inutile). Puisque les valeurs propres de l'Hamiltonien sont les énergies E et les valeurs propres du Casimir sont données par $c_1 = (n^2 - 1)$, le spectre de cet Hamiltonien s'obtient aisément :

$$a^2 (-2E)^{-1} - 1 = n^2 - 1 \quad \implies \quad E = -\frac{a^2}{2n^2} . \quad (2.3.7)$$

On remarque que tout comme dans de nombreux autres cas (dans le cas de l'oscillateur harmonique, par exemple), le nombre quantique principal n , qui provient des valeurs propres du Casimir \mathcal{C}_1 , permet d'écrire les énergies du système. Mais les états d'une certaine énergie fixe sont dégénérés. On peut poursuivre la décomposition pour lever des dégénérescences.

Une sous-algèbre de $\mathfrak{so}(4)$ est $\mathfrak{so}(3)$ (algèbre correspondant aux symétries de rotation). Puis, $\mathfrak{so}(3)$ possède la sous-algèbre $\mathfrak{so}(2)$, ce qui donne comme étiquettes les deux nombres quantiques ℓ et m correspondent aux valeurs propres des Casimirs de $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{so}(2)$ respectivement⁴. Un état quantique de l'atome d'Hydrogène, qui correspond à un sous-espace de Hilbert invariant sous l'action des Casimirs $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, est donc étiqueté par 3 nombres quantiques et dénoté par le ket $|n, l, m\rangle$. Schématiquement, la décomposition qui a été faite est la suivante :

$$\underbrace{\mathcal{G}_0}_{\mathfrak{so}(4,1)} \supset \underbrace{\mathcal{G}_1}_{\mathfrak{so}(4)} \supset \underbrace{\mathcal{G}_2}_{\mathfrak{so}(3)} \supset \underbrace{\mathcal{G}_3}_{\mathfrak{so}(2)}, \quad (2.3.8)$$

et on voit précisément de quelle façon les nombres quantiques n, ℓ et m apparaissent dans l'identification des états propres de l'Hamiltonien de l'atome d'Hydrogène.

Où cette approche algébrique mène-t-elle ? Les groupes et algèbres de Lie sont souvent introduits en physique pour caractériser les symétries ou transformations dans un espace. Dans l'optique de peaufiner des modèles existants, il est naturel de considérer des raffinements aux modèles, et un premier pas dans cette direction est de considérer des déformations à un paramètre q des algèbres enveloppantes universelles de ces algèbres de Lie. Ces q -déformations permettent ainsi de décrire et caractériser des types de symétries (ou transformations) plus générales que celles exprimées par les algèbres de Lie classiques.

L'algèbre de Lie par excellence pour débiter l'étude de la théorie des algèbres de Lie est $\mathfrak{su}(2)$. Dans la même optique, considérons comme exemple d'introduction $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$, l'algèbre enveloppante universelle quantique de $\mathfrak{su}(2)$.

Soient $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_\pm$, les générateurs de cette algèbre. Les relations de commutation définissant l'algèbre sont données par

$$[\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_\pm] = \pm \mathcal{J}_\pm \quad , \quad [\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-] = \frac{q^{\mathcal{J}_0} - q^{-\mathcal{J}_0}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}. \quad (2.3.9)$$

On remarque que, dans la limite $q \rightarrow 1$, les générateurs deviennent

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathcal{J}_0 = J_0 \quad , \quad \lim_{q \rightarrow 1} \mathcal{J}_\pm = J_\pm, \quad (2.3.10)$$

et on retrouve les relations de l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$ usuelle :

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm \quad , \quad [J_+, J_-] = 2J_0. \quad (2.3.11)$$

Une façon élégante de voir le passage de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ vers $\mathfrak{su}(2)$ est de regarder une déformation des générateurs de $\mathfrak{su}(2)$ par une fonction $f(J_0)$.

4. Notons ici que cette chaîne de sous-algèbres est la chaîne canonique mais ce n'est qu'un choix parmi d'autres. Il existe d'autres choix de chaînes non-canoniques qui sont parfois plus appropriées dans certains contextes physiques mais la décomposition en irréductibles devient alors un problème plus complexe. Voir [11] pour plus de détails.

Puisque \mathcal{C} , le Casimir de $\mathfrak{su}(2)$, a valeur propre $j(j+1)$,

$$C = J_0(J_0 + 1) + J_- J_+ = J_0(J_0 - 1) + J_+ J_- = j(j+1) , \quad (2.3.12)$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned} J_+ J_- &= (j + J_0)(j + 1 - J_0) , \\ J_- J_+ &= (j - J_0)(j + 1 + J_0) . \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Définissons des nouveaux opérateurs déformés par une fonction $f(J_0)$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_+ &= \sqrt{\overbrace{\frac{[j + J_0]_{q^{1/2}} [j + 1 - J_0]_{q^{1/2}}}{(j + J_0) (j + 1 - J_0)}}^{f(J_0)}} J_+ , \\ \mathcal{J}_- &= \mathcal{J}_+^\dagger = J_- \sqrt{\frac{[j + J_0]_{q^{1/2}} [j + 1 - J_0]_{q^{1/2}}}{(j + J_0) (j + 1 - J_0)}} , \\ \mathcal{J}_0 &= J_0 , \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

où $[x]_q$ est défini en (2.2.8).

Il est alors aisé de vérifier que

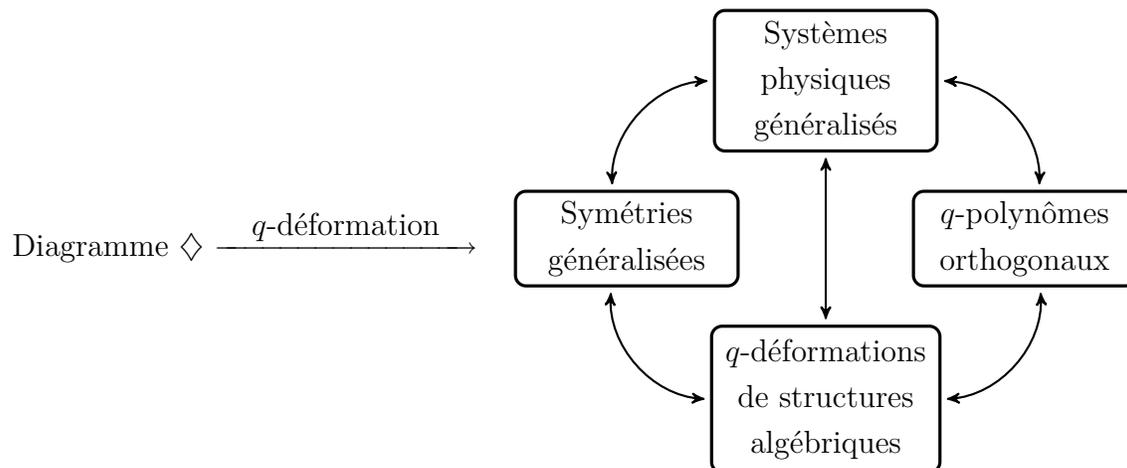
$$[J_0, f(J_0)J_\pm] = \pm f(J_0)J_\pm \quad \implies \quad [\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_\pm] = \pm \mathcal{J}_\pm . \quad (2.3.15)$$

De plus,

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-] &= \frac{[j + J_0]_{q^{1/2}} [j + 1 - J_0]_{q^{1/2}}}{(j + J_0) (j + 1 - J_0)} J_+ J_- - J_- \frac{[j + J_0]_{q^{1/2}} [j + 1 - J_0]_{q^{1/2}}}{(j + J_0) (j + 1 - J_0)} J_+ \\ &= \frac{[j + J_0]_{q^{1/2}} [j + 1 - J_0]_{q^{1/2}}}{(j + J_0) (j + 1 - J_0)} (j + J_0)(j + 1 - J_0) \\ &\quad - \frac{[j + J_0 + 1]_{q^{1/2}} [j - J_0]_{q^{1/2}}}{(j + J_0 + 1) (j - J_0)} (j - J_0)(j + 1 + J_0) \\ &= \frac{(q^{j+J_0} - q^{-j-J_0})(q^{j+1-J_0} - q^{-j-1+J_0}) - (q^{j+J_0+1} - q^{-j-J_0-1})(q^{j-J_0} - q^{-j+J_0})}{(q^{1/2} - q^{-1/2})^2} \\ &= \frac{q^{1/2}}{(q^{1/2} - q^{-1/2})} \frac{q^{J_0} - q^{-J_0}}{(q^{1/2} - q^{-1/2})} - \frac{q^{-1/2}}{(q^{1/2} - q^{-1/2})} \frac{q^{J_0} - q^{-J_0}}{(q^{1/2} - q^{-1/2})} \\ &= \frac{q^{J_0} - q^{-J_0}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} . \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Ainsi, en effectuant la construction (introduite en [19]) d'une fonction de déformation $f(J_0)$, on obtient une q -déformation de l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$. On remarque également que dans la limite $q \rightarrow 1$, $f(J_0) \rightarrow 1$, ce qui justifie l'affirmation qu'il s'agit d'une « déformation continue de l'algèbre par un paramètre q ».

On pourrait définir davantage de structures sur l'algèbre $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ (coproduit, counité, antipode) pour faire de cette algèbre enveloppante universelle quantique une algèbre de Hopf, mais ceci va au-delà de l'objectif du présent chapitre, qui était d'introduire les structures algébriques minimales pour bien saisir les concepts en jeu et introduire les q -déformations de ces structures. Tout ceci mène assez naturellement à l'introduction du tableau q -déformé suivant, qui représente le contexte dans lequel s'inscrit l'article au chapitre suivant :



Chapitre 3

AN ALGEBRAIC INTERPRETATION OF THE q -MEIXNER POLYNOMIALS

Ce chapitre est le fruit du travail de deux co-auteurs : l'auteur du présent mémoire et Luc Vinet.

ABSTRACT

An algebraic interpretation of the q -Meixner polynomials is obtained. It is based on representations of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ on q -oscillator states with the polynomials appearing as matrix elements of unitary q -pseudorotation operators. These operators are built from q -exponentials of the $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ generators. The orthogonality, recurrence relation, difference equation, and other properties of the q -Meixner polynomials are systematically obtained in the proposed framework.

INTRODUCTION

The purpose of this paper is to introduce an algebraic interpretation of the univariate q -Meixner polynomials. The q -Meixner polynomials, $\mathcal{M}_n(q^{-x}; b, c; q)$ are defined as follows [5]

$$\mathcal{M}_n(q^{-x}; b, c; q) = {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{-x} \\ bq \end{matrix} \middle| q; -\frac{q^{n+1}}{c}\right), \quad (3.0.1)$$

with the basic hypergeometric series given by

$${}_r\phi_s\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_n \cdots (a_r; q)_n}{(q; q)_n (b_1; q)_n \cdots (b_s; q)_n} \left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+s-r} z^n, \quad (3.0.2)$$

where $\binom{n}{2}$ is the standard binomial coefficient, and $(a; q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$ stands for the q -Pochhammer symbol.

These polynomials were introduced by Meixner [20] in 1934 as the ones orthogonal with respect to the negative binomial distribution. Their connection with $\mathfrak{su}(1,1)$ is well established (see for instance [21, 22, 23, 24]). Some 40 years later, Griffiths [25] provided their multivariate generalization, orthogonal with respect to the negative multinomial distribution. A group theoretical interpretation whereby Meixner polynomials in d variables arise as matrix elements of $SO(d,1)$ representations on oscillator states was given recently [26] and allowed for an elegant characterization of these polynomials. There remains to cast their q -analogs in a similar algebraic setting.

We thus wish to initiate for the q -Meixner polynomials a program that has been carried through in part for the q -Krawtchouk polynomials. Of the 4 families of q -Krawtchouk polynomials [5], two, the related quantum and affine q -Krawtchouk polynomials, have been given algebraic interpretations. At the univariate level, two dual points of view have been offered. On the one hand, Koornwinder obtained in [27] the q -Krawtchouk polynomials as matrix elements of unitary q -irreducible representations of twisted $SU_q(2)$ quantum group. See also [28] and [29]. A similar treatment of the q -Meixner polynomials based on the quantum group $SU_q(1,1)$ is given in [29] in addition. On the other hand, Genest, Post, Vinet, Yu and Zhedanov [30] identified these same polynomials as matrix elements of q -exponentials of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(2))$ generators on representation bases. The latter approach was subsequently generalized [31] to encompass the multivariate situation and to interpret the q -Krawtchouk polynomials in many variables introduced by Gasper and Rahman [32].

We shall here focus on the univariate q -Meixner polynomials. This is interesting on its own and essential for a study of the multivariate case. Significant differences with respect to the analysis of the q -Krawtchouk polynomials given in [30] will be observed. An embedding of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ in the direct sum of two q -Weyl algebras associated to a pair of independent q -oscillators will be used and the q -Meixner polynomials will be observed to arise as matrix elements of unitary q -pseudorotation operators built from q -exponentials in the $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ generators realized in terms of q -boson operators. While other treatments of the q -Meixner polynomials can be found elsewhere [29, 33, 34], we wish to point out that the approach presented here extends itself naturally to the multivariable case. We shall also illustrate its power by using it to obtain a full characterization of the polynomials.

The article is organized as follows. In the first section, a model à la Schwinger of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ in terms of two independent q -oscillators is presented. In section 3.2 the unitary operators of interest are introduced. Their matrix elements are then expressed in terms of q -Meixner polynomials in section 3.3. Unitarity naturally leads to the orthogonality relations. In section 3.4, the $q \rightarrow 1$ limits of the unitary operators and of the matrix elements are given. The determination of the backward, forward relations and difference equation is carried out in section 3.5. Complementary backward, forward relations and recurrence relations are presented in section 3.6. A duality property satisfied by the polynomials leading to

new identities is exhibited in [section 3.7](#). Generating functions of two types are derived in [section 3.8](#). Concluding remarks will be found in [section 3.9](#). Basic q -identities that are used throughout the paper have been collected for reference in [section A](#). [section B](#) contains the list of the “dual” relations satisfied by the q -Meixner polynomials.

3.1. $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ AND q -OSCILLATORS

Consider two uncoupled q -oscillators [[35](#), [36](#), [37](#)] A and B whose sets of dynamical operators, $\{A_\pm, A_0\}$ and $\{B_\pm, B_0\}$, respectively, obey the following relations :

$$\begin{aligned}
&\text{Oscillator A :} && \text{Oscillator B :} \\
&[A_0, A_\pm] = \pm A_\pm , && [B_0, B_\pm] = \pm B_\pm , \\
&[A_-, A_+] = q^{A_0} , && [B_-, B_+] = q^{-B_0-1} , \\
&A_- A_+ - q A_+ A_- = 1 , && q B_- B_+ - B_+ B_- = 1 , \\
&\text{with } [A_\pm, B_\pm] = [A_\pm, B_0] = [A_0, B_\pm] = [A_0, B_0] = 0 .
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

This can be viewed as a two-dimensional system. The subalgebras associated to the q -oscillators A and B admit the semi-infinite irreducible representations given by the following actions on the orthonormal basis vectors $|n_A\rangle, |n_B\rangle$ with $n_A, n_B = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned}
A_0 |n_A\rangle &= n_A |n_A\rangle , & B_0 |n_B\rangle &= n_B |n_B\rangle , \\
A_- |n_A\rangle &= \sqrt{\frac{1 - q^{n_A}}{1 - q}} |n_A - 1\rangle , & B_- |n_B\rangle &= \sqrt{\frac{q^{-n_B} - 1}{1 - q}} |n_B - 1\rangle , \\
A_+ |n_A\rangle &= \sqrt{\frac{1 - q^{n_A+1}}{1 - q}} |n_A + 1\rangle , & B_+ |n_B\rangle &= \sqrt{\frac{q^{-(n_B+1)} - 1}{1 - q}} |n_B + 1\rangle .
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Note that $A_\pm^\dagger = A_\mp$ and $B_\pm^\dagger = B_\mp$ in this representation.

Consider the operators

$$J_0 = \frac{A_0 + B_0 + 1}{2} , \quad J_\pm = q^{\frac{B_0 - A_0 + 2}{2}} A_\pm B_\pm . \tag{3.1.3}$$

They act on the vector space spanned by the basis states $|n_A\rangle \otimes |n_B\rangle \equiv |n_A, n_B\rangle$ of the combined system. It is immediate to check that J_0, J_\pm realize the commutation relations of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$:

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm , \quad [J_+, J_-] = -\frac{q^{J_0} - q^{-J_0}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} . \tag{3.1.4}$$

It will prove practical to use the following notation for the 2 q -oscillator vector states. We shall write

$$|n\rangle_\beta \equiv |n, n + \beta - 1\rangle , \quad \beta = 1, 2, 3, \dots \tag{3.1.5}$$

where

$$n \equiv n_A \quad , \quad \beta \equiv n_B - n_A + 1 . \quad (3.1.6)$$

It is immediate to see that the orthonormality relation

$${}_{\beta} \langle n|n' \rangle_{\beta'} = \delta_{\beta\beta'} \delta_{nn'} \quad (3.1.7)$$

follows from $\langle n_A, n_B | n'_A, n'_B \rangle = \delta_{n_A n'_A} \delta_{n_B n'_B}$. It is also readily observed that J_0 and J_{\pm} preserve the value of β . As a matter of fact, the actions of these operators in the basis $|n\rangle_{\beta}$ read :

$$\begin{aligned} J_0 |n\rangle_{\beta} &= \left(n + \frac{\beta}{2} \right) |n\rangle_{\beta} , \\ J_- |n\rangle_{\beta} &= q^{\frac{\beta+1}{2}} \sqrt{\frac{1-q^n}{1-q} \frac{q^{1-n-\beta}-1}{1-q}} |n-1\rangle_{\beta} , \\ J_+ |n\rangle_{\beta} &= q^{\frac{\beta+1}{2}} \sqrt{\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \frac{q^{-n-\beta}-1}{1-q}} |n+1\rangle_{\beta} . \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

One thus sees that J_0 and J_{\pm} transform among themselves the vector states $|n\rangle_{\beta}$ with a fixed value of β . An infinite-dimensional representation of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ labelled by β has thus been constructed.

3.2. THE UNITARY OPERATOR $U(\theta)$ AND ITS MATRIX ELEMENTS

In this section, a q -analog of the unitary operator representing $SU(1,1)$ group elements is introduced and its unitarity is demonstrated. Its matrix elements will prove related to q -Meixner polynomials. Operators of that type have also been introduced by Zhedanov [38].

3.2.1. The unitary operator $U(\theta)$

Consider the following operator $U(\theta)$:

$$U(\theta) = e_q^{1/2} \left(-\theta^2 q^{-A_0} \right) e_q \left(\theta(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) E_q \left(-\theta(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) E_q^{1/2} \left(\theta^2 q^{B_0+1} \right) . \quad (3.2.1)$$

The limit of this operator when $q \rightarrow 1$ will be obtained in [section 3.4](#) and the result will justify the statement made at the beginning of this section.

Let us now show that $U(\theta)$ is unitary. In the framework of the previous sections, using Eqs. (3.1.1) and (B.5), one can obtain the following relations :

$$e_q(\alpha A_- B_-)(A_+ B_+) E_q(-\alpha A_- B_-) = A_+ B_+ - \frac{\alpha q^{A_0}}{(1-q)^2} + \frac{\alpha q^{-B_0-1}}{(1-q)^2(1-\alpha A_- B_-)} \quad (3.2.2)$$

and

$$e_q(\alpha A_- B_-) q^{-B_0-1} E_q(-\alpha A_- B_-) = \frac{q^{-B_0-1}}{1-\alpha A_- B_-} . \quad (3.2.3)$$

This leads to

$$e_q(\alpha A_- B_-) \left(A_+ B_+ - \frac{\alpha q^{-B_0-1}}{(1-q)^2} \right) E_q(-\alpha A_- B_-) = A_+ B_+ - \frac{\alpha q^{A_0}}{(1-q)^2}, \quad (3.2.4)$$

which allows one to write

$$e_q(\alpha A_- B_-) e_q \left(\beta A_+ B_+ - \frac{\alpha \beta q^{-B_0-1}}{(1-q)^2} \right) = e_q \left(\beta A_+ B_+ - \frac{\alpha \beta q^{A_0}}{(1-q)^2} \right) e_q(\alpha A_- B_-). \quad (3.2.5)$$

Remarking that

$$\begin{aligned} (A_+ B_+) (q^{-B_0-1}) &= q (q^{-B_0-1}) (A_+ B_+), \\ (q^{A_0}) (A_+ B_+) &= q (A_+ B_+) (q^{A_0}), \end{aligned}$$

and using (B.6), one obtains the identity

$$e_q(\alpha A_- B_-) e_q \left(-\frac{\alpha \beta q^{-B_0-1}}{(1-q)^2} \right) e_q(\beta A_+ B_+) = e_q(\beta A_+ B_+) e_q \left(-\frac{\alpha \beta q^{A_0}}{(1-q)^2} \right) e_q(\alpha A_- B_-). \quad (3.2.6)$$

Similarly, inverting the previous equation, one finds

$$E_q(\gamma A_+ B_+) E_q \left(\frac{\gamma \delta q^{-B_0-1}}{(1-q)^2} \right) E_q(\delta A_- B_-) = E_q(\delta A_- B_-) E_q \left(\frac{\gamma \delta q^{A_0}}{(1-q)^2} \right) E_q(\gamma A_+ B_+). \quad (3.2.7)$$

The fact that (3.2.1) is a unitary operator ($UU^\dagger = U^\dagger U = 1$) can now easily be checked with the help of (3.2.6) and (3.2.7).

3.3. MATRIX ELEMENTS OF $U(\theta)$ AND q -MEIXNER POLYNOMIALS

We now wish to determine the matrix elements of the q -pseudorotation operator $U(\theta)$, in the basis formed by the q -oscillator states $|x\rangle_\beta$.

Using the fact that

$$(A_- B_-)^\mu |x\rangle_\beta = (1-q)^{-\mu} \sqrt{(q^{-x}; q)_\mu (q^{1-x-\beta}; q)_\mu q^{\mu x - \binom{\mu}{2}}} |x - \mu\rangle_\beta, \quad (3.3.1)$$

$$(A_+ B_+)^\nu |y\rangle_\beta = (1-q)^{-\nu} \sqrt{(q^{y+1}; q)_\nu (q^{y+\beta}; q)_\nu q^{-\nu(y+\beta) - \binom{\nu}{2}}} |y + \nu\rangle_\beta, \quad (3.3.2)$$

and the definition (B.2), one finds :

$$\begin{aligned} \xi_{n,x}^{(\beta)}(\theta) &= {}_\beta \langle n | U(\theta) | x \rangle_\beta \\ &= E_q^{1/2} \left(\theta^2 q^{x+\beta} \right) \sum_\mu \sum_\nu e_q^{1/2} \left(-\theta^2 q^{-(x-\mu+\nu)} \right) \frac{\theta^{\mu+\nu} (-1)^\mu}{(q; q)_\mu (q; q)_\nu} \sqrt{(q^{-x}; q)_\mu (q^{1-x-\beta}; q)_\mu} \\ &\quad \times \sqrt{(q^{x-\mu+1}; q)_\nu (q^{x-\mu+\beta}; q)_\nu} \sqrt{q^{\binom{\mu}{2} - \binom{\nu}{2} + \mu x + \mu \beta + \nu \mu - \nu x}} {}_\beta \langle n | x - \mu + \nu \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

In terms of the variable $\gamma = x - \mu$, the orthogonality of the basis vectors (3.1.7) imposes $n = x - \mu + \nu = \gamma + \nu$. Further simplifications using various q -Pochhammer identities lead

to

$$\begin{aligned} \xi_{n,x}^{(\beta)} &= (-1)^x \theta^{n+x} \begin{bmatrix} n + \beta - 1 \\ n \end{bmatrix}_q^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} x + \beta - 1 \\ x \end{bmatrix}_q^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{q^{\binom{x}{2} - \binom{n}{2}}}{(-\theta^2; q)_{x+\beta} (-\theta^2 q^{-n}; q)_n}} \\ &\quad \times \sum_{\gamma} \frac{(q^{-n}; q)_{\gamma} (q^{-x}; q)_{\gamma}}{(q; q)_{\gamma} (q^{\beta}; q)_{\gamma}} \left(-\frac{q^{n+1}}{\theta^2} \right)^{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Recalling definition (3.0.1), one arrives at

$$\xi_{n,x}^{(\beta)} = (-1)^x \theta^{n+x} \begin{bmatrix} n + \beta - 1 \\ n \end{bmatrix}_q^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} x + \beta - 1 \\ x \end{bmatrix}_q^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{q^{\binom{x}{2} - \binom{n}{2}}}{(-\theta^2; q)_{x+\beta} (-\theta^2 q^{-n}; q)_n}} \mathcal{M}_n \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right), \quad (3.3.5)$$

which entails the interpretation of q -Meixner polynomials as matrix elements of q -pseudorotation representations on q -oscillator states (see also [38]). Note that these matrix elements are real and that in general the formulas derived within the present setting (with $b = q^{\beta-1}$) extend to the full admissible range of the parameter b ($0 < b < 1$) as in [5].

3.3.1. Orthogonality relations

The unitarity of the operator $U(\theta)$ can be used to obtain the orthogonality of the q -Meixner polynomials in the following way.

Introduce the negative binomial distribution

$$\omega_x^{(\beta)} = [\xi_{0,x}^{(\beta)}]^2 = \theta^{2x} \begin{bmatrix} x + \beta - 1 \\ x \end{bmatrix}_q \frac{q^{\binom{x}{2}}}{(-\theta^2; q)_{x+\beta}}. \quad (3.3.6)$$

One can write

$${}_{\beta} \langle n' | U U^{\dagger} | n \rangle_{\beta} = \sum_{x=0}^{\infty} {}_{\beta} \langle n' | U | x \rangle_{\beta} {}_{\beta} \langle x | U^{\dagger} | n \rangle_{\beta} = \sum_{x=0}^{\infty} \xi_{n',x}^{(\beta)} \left(\xi_{n,x}^{(\beta)} \right)^* = \delta_{nn'}. \quad (3.3.7)$$

Substituting (3.3.5) and using the reality of the matrix elements, the relation (3.3.7) translates into the orthogonality relation for the q -Meixner polynomials :

$$\sum_{x=0}^{\infty} \omega_x^{(\beta)} \mathcal{M}_n \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right) \mathcal{M}_{n'} \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right) = \frac{q^{\binom{n}{2}} (q; q)_n (-\theta^2 q^{-n}; q)_n}{\theta^{2n} (q; q)_{n+\beta-1} (q; q)_{\beta-1}} \delta_{nn'}. \quad (3.3.8)$$

A dual relation can similarly be obtained. One has

$${}_{\beta} \langle x' | U^{\dagger} U | x \rangle_{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{\beta} \langle x' | U^{\dagger} | n \rangle_{\beta} {}_{\beta} \langle n | U | x \rangle_{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_{n,x}^{(\beta)} \left(\xi_{n,x'}^{(\beta)} \right)^* = \delta_{xx'}. \quad (3.3.9)$$

Following parallel steps, the following relation is found :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right) \mathcal{M}_n \left(q^{-x'}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right) \frac{\theta^{2n} q^{-\binom{n}{2}}}{(-\theta^2 q^{-n}; q)_n} \begin{bmatrix} n + \beta - 1 \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{1}{\omega_x^{(\beta)}} \delta_{xx'}. \quad (3.3.10)$$

3.4. $q \rightarrow 1$ LIMIT

It is instructive to obtain the $q \rightarrow 1$ limits of $U(\theta)$ and its matrix elements. This is done now.

3.4.1. Operator $U(\theta)$

Let

$$\lim_{q \rightarrow 1} X_0 = \widetilde{X}_0, \quad \lim_{q \rightarrow 1} X_{\pm} = \widetilde{X}_{\pm}, \quad X = A, B. \quad (3.4.1)$$

In the limit $q \rightarrow 1$, the commutation relations become :

$$\begin{aligned} [\widetilde{X}_0, \widetilde{X}_{\pm}] &= \pm \widetilde{X}_{\pm}, & [\widetilde{X}_-, \widetilde{X}_+] &= 1, & X &= A, B, \\ [\widetilde{A}_{\pm}, \widetilde{B}_{\pm}] &= [\widetilde{A}_{\pm}, \widetilde{B}_0] = [\widetilde{A}_0, \widetilde{B}_{\pm}] = [\widetilde{A}_0, \widetilde{B}_0] &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Noting that

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{e_q(-\theta^2 q^{-B_0-1})}{e_q(-\theta^2)} = (1 + \theta^2)^{-(1+\widetilde{B}_0)} = \exp(-\ln(1 + \theta^2)(1 + \widetilde{B}_0)), \quad (3.4.3)$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{E_q(\theta^2 q^{A_0})}{E_q(\theta^2)} = (1 + \theta^2)^{-\widetilde{A}_0} = \exp(-\ln(1 + \theta^2)\widetilde{A}_0), \quad (3.4.4)$$

the $q \rightarrow 1$ limit of (3.2.1), denoted $\widetilde{U}(\theta)$, is found to be :

$$\widetilde{U}(\theta) = \exp\left[-\ln(1 + \theta^2)\frac{(1 + \widetilde{B}_0)}{2}\right] \exp[\theta \widetilde{A}_+ \widetilde{B}_+] \exp[-\theta \widetilde{A}_- \widetilde{B}_-] \exp\left[-\ln(1 + \theta^2)\frac{\widetilde{A}_0}{2}\right]. \quad (3.4.5)$$

The identities

$$e^{\alpha \widetilde{A}_-} e^{-\beta \widetilde{A}_0} = e^{-\beta \widetilde{A}_0} e^{(e^{-\beta}) \alpha \widetilde{A}_-}, \quad \text{and} \quad e^{\gamma \widetilde{B}_0} e^{\delta \widetilde{B}_+} = e^{(e^{\gamma}) \delta \widetilde{B}_+} e^{\gamma \widetilde{B}_0}, \quad (3.4.6)$$

obtained from the usual Baker–Campbell–Hausdorff formula $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots$ allow to simplify (3.4.5) into

$$\widetilde{U}(\theta) = \exp\left[\frac{\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} \widetilde{A}_+ \widetilde{B}_+\right] \exp\left[-\ln(1 + \theta^2)\frac{(\widetilde{A}_0 + \widetilde{B}_0 + 1)}{2}\right] \exp\left[\frac{-\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}} \widetilde{A}_- \widetilde{B}_-\right]. \quad (3.4.7)$$

Recall the Schwinger realization of $\mathfrak{su}(1,1)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_0 &= \frac{\widetilde{A}_0 + \widetilde{B}_0 + 1}{2}, & \widetilde{J}_{\pm} &= \widetilde{A}_{\pm} \widetilde{B}_{\pm}, \\ [\widetilde{J}_0, \widetilde{J}_{\pm}] &= \pm \widetilde{J}_{\pm}, & [\widetilde{J}_+, \widetilde{J}_-] &= -2\widetilde{J}_0. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Under the change of variable $\theta = \sinh \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, (3.4.7) becomes

$$\begin{aligned} \widetilde{U}(\sinh \tau) &= \exp[\tanh \tau \widetilde{J}_+] \exp[-2 \ln(\cosh \tau) \widetilde{J}_0] \exp[-\tanh \tau \widetilde{J}_-] \\ &= \exp\left[\tau (\widetilde{J}_+ - \widetilde{J}_-)\right], \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

where the following disentangling formula for $\mathfrak{su}(1,1)$ [39] has been used :

$$\exp(\tau L_+ - \bar{\tau} L_-) = \exp \left[\left(\frac{\tau}{|\tau|} \tanh |\tau| \right) L_+ \right] \exp [-2 \ln (\cosh |\tau|) L_0] \exp \left[- \left(\frac{\bar{\tau}}{|\tau|} \tanh |\tau| \right) L_- \right] . \quad (3.4.10)$$

The operator (3.4.9) is hence identified as representing a (two-dimensional) pseudorotation, thus allowing to say that $U(\theta)$ represents a q -pseudorotation in two dimensions.

3.4.2. Matrix elements

For the q -Meixner polynomials one has [5]

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathcal{M}_n \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \frac{c}{1-c}; q \right) = M_n(x; \beta, c) . \quad (3.4.11)$$

One thus straightforwardly obtains :

$$\lim_{q \rightarrow 1} \xi_{n,x}^{(\beta)} = (-1)^x (\theta)^{x+n} \binom{n+\beta-1}{n}^{\frac{1}{2}} \binom{x+\beta-1}{x}^{\frac{1}{2}} (1+\theta^2)^{-\frac{(\beta+n+x)}{2}} M_n \left(x, \beta, \frac{\theta^2}{1+\theta^2} \right) . \quad (3.4.12)$$

Under the change of variable $\theta = \sinh \tau$, this becomes

$$\lim_{q \rightarrow 1} \xi_{n,x}^{(\beta)} = (-1)^x \binom{n+\beta-1}{n}^{\frac{1}{2}} \binom{x+\beta-1}{x}^{\frac{1}{2}} \frac{(\tanh \tau)^{x+n}}{(\cosh \tau)^\beta} M_n \left(x, \beta, \tanh^2 \tau \right) , \quad (3.4.13)$$

in keeping with results obtained in [26] on the $SU(1,1)$ interpretation of the standard univariate Meixner polynomials.

3.5. BACKWARD, FORWARD RELATIONS AND DIFFERENCE RELATION

The algebraic interpretation of the q -Meixner polynomials that we have provided offers a cogent framework to derive the basic features of those polynomials. We shall focus in this section on the lowering and raising formulas as well as the difference equation. We shall begin by deriving two identities that will prove fundamental in obtaining the desired properties. We wish to show that

$$U^\dagger(q^{-1/2}\theta)A_-U(\theta) = A_- \sqrt{1 + \theta^2 q^{B_0}} + \theta q^{\frac{A_0+B_0}{2}} B_+ . \quad (3.5.1)$$

First, from the commutation relations (3.1.1), one finds that

$$\begin{aligned} U^\dagger(q^{-1/2}\theta)A_-U(\theta) &= E_q^{1/2} \left(\theta^2 q^{B_0} \right) E_q \left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0}{2}} A_+ B_+ \right) A_- \\ &\times \left[e_q \left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) e_q \left(-\theta^2 q^{-A_0} \right) e_q \left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) \right] \\ &\times E_q \left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) E_q^{1/2} \left(\theta^2 q^{B_0+1} \right) . \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Using (3.2.6), this leads to

$$\begin{aligned}
U^\dagger(q^{-1/2}\theta)A_-U(\theta) &= E_q^{1/2}(\theta^2q^{B_0})E_q\left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0}{2}}A_+B_+\right)A_- \\
&\times \left[e_q\left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_+B_+\right)e_q\left(-\theta^2q^{B_0+1}\right)e_q\left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_-B_-\right) \right] \\
&\times E_q\left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_-B_-\right)E_q^{1/2}(\theta^2q^{B_0+1}) \\
&= E_q^{1/2}(\theta^2q^{B_0})\left[E_q\left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0}{2}}A_+B_+\right)A_-e_q\left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_+B_+\right) \right] \\
&\times e_q^{1/2}\left(-\theta^2q^{B_0+1}\right).
\end{aligned}$$

With the help of (B.4), the expression in the square brackets is computed to be

$$E_q\left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0}{2}}A_+B_+\right)A_-e_q\left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_+B_+\right) = A_- + \theta q^{\frac{A_0+B_0}{2}}B_+, \quad (3.5.3)$$

and one thus arrives at (3.5.1).

The Hermitian conjugate of the relation (3.5.1) also gives another useful identity :

$$U^\dagger(\theta)A_+U(q^{-1/2}\theta) = A_+\sqrt{1+\theta^2q^{B_0}} + \theta B_-q^{\frac{A_0+B_0}{2}}. \quad (3.5.4)$$

3.5.1. Backward relation

The backward relation is obtained as follows. One has

$$\begin{aligned}
{}_{\beta+1}\langle n|A_-U(\theta)|x\rangle_\beta &= \sqrt{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}\xi_{n+1,x}^{(\beta)}(\theta) \\
&= {}_{\beta+1}\langle n|U(q^{-1/2}\theta)U^\dagger(q^{-1/2}\theta)A_-U(\theta)|x\rangle_\beta \\
&= {}_{\beta+1}\langle n|U(q^{-1/2}\theta)\left(A_-\sqrt{1+\theta^2q^{B_0}} + \theta q^{\frac{A_0+B_0}{2}}B_+\right)|x\rangle_\beta, \quad (3.5.5)
\end{aligned}$$

with the help of (3.5.1). In terms of matrix elements, one finds

$$\sqrt{1-q^{n+1}}\xi_{n+1,x}^{(\beta)}(\theta) = \sqrt{(1-q^x)(1+\theta^2q^{x+\beta-1})}\xi_{n,x-1}^{(\beta+1)}(q^{-1/2}\theta) + \theta q^{x/2}\sqrt{1-q^{x+\beta}}\xi_{n,x}^{(\beta+1)}(q^{-1/2}\theta). \quad (3.5.6)$$

Using the expression (3.3.5) of $\xi_{n,x}^{(\beta)}$ in terms of q -Meixner polynomials and simplifying, one arrives at

$$\begin{aligned}
\theta^2(1-q^\beta)\mathcal{M}_{n+1}(q^{-x};q^{\beta-1},\theta^2;q) &= q(1-q^{-x})(1+\theta^2q^{x+\beta-1})\mathcal{M}_n(q^{-(x-1)};q^\beta,\theta^2q^{-1};q) \\
&\quad + \theta^2(1-q^{x+\beta})\mathcal{M}_n(q^{-x};q^\beta,\theta^2q^{-1};q), \quad (3.5.7)
\end{aligned}$$

which coincides with the relation given in [5].

3.5.2. Forward relation

One proceeds similarly for the forward relation. Using (3.5.4), we have

$$\begin{aligned} {}_{\beta} \langle n | A_+ U(q^{-1/2}\theta) | x \rangle_{\beta+1} &= \sqrt{\frac{1-q^n}{1-q}} \xi_{n-1,x}^{(\beta+1)}(q^{-1/2}\theta) \\ &= {}_{\beta} \langle n | U(\theta) \left(A_+ \sqrt{1+\theta^2 q^{B_0}} + \theta B_- q^{\frac{A_0+B_0}{2}} \right) | x \rangle_{\beta+1} . \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Applying the q -oscillator operators on the right leads to

$$\sqrt{1-q^n} \xi_{n-1,x}^{(\beta+1)}(q^{-1/2}\theta) = \sqrt{1+\theta^2 q^{x+\beta}} \sqrt{1-q^{x+1}} \xi_{n,x+1}^{(\beta)}(\theta) + \theta q^{x/2} \sqrt{1-q^{x+\beta}} \xi_{n,x}^{(\beta)}(\theta) . \quad (3.5.9)$$

Using (3.3.5) and simplifying, the following forward relation for the q -Meixner polynomials is obtained :

$$\frac{1}{\theta^2 q^x} \frac{1-q^n}{1-q^\beta} \mathcal{M}_{n-1}(q^{-x}; q^\beta, \theta^2 q^{-1}; q) = \mathcal{M}_n(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) - \mathcal{M}_n(q^{-(x+1)}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) , \quad (3.5.10)$$

which checks with the formulas in [5].

3.5.3. Difference equation

The difference equation is found by combining the two ladder relations. Indeed, we see that

$$\begin{aligned} {}_{\beta} \langle n | A_+ A_- U(\theta) | x \rangle_{\beta} &= \frac{1-q^n}{1-q} \xi_{n,x}^{(\beta)}(\theta) \\ &= {}_{\beta} \langle n | U(\theta) \left(A_+ \sqrt{1+\theta^2 q^{B_0}} + \theta B_- q^{\frac{A_0+B_0}{2}} \right) \left(A_- \sqrt{1+\theta^2 q^{B_0}} + \theta q^{\frac{A_0+B_0}{2}} B_+ \right) | x \rangle_{\beta} , \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

upon using the identities (3.5.1) and (3.5.4). This leads to the following relation in terms of matrix elements

$$\begin{aligned} (1-q^n) \xi_{n,x}^{(\beta)}(\theta) &= \left[(1-q^x) (1+\theta^2 q^{x+\beta-1}) + \theta^2 q^x (1-q^{x+\beta}) \right] \xi_{n,x}^{(\beta)}(\theta) \\ &\quad + \theta \sqrt{1-q^{x+1}} \sqrt{1+\theta^2 q^{x+\beta}} \sqrt{1-q^{x+\beta}} q^{x/2} \xi_{n,x+1}^{(\beta)}(\theta) \\ &\quad + \theta \sqrt{1-q^x} \sqrt{1+\theta^2 q^{x+\beta-1}} \sqrt{1-q^{x+\beta-1}} q^{(x-1)/2} \xi_{n,x-1}^{(\beta)}(\theta) . \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Finally, given (3.3.5), the difference equation of the q -Meixner polynomials is obtained, and is seen to correspond to the one in [5]

$$\begin{aligned} (1-q^n) \mathcal{M}_n(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) &= -\theta^2 q^x (1-q^{x+\beta}) \mathcal{M}_n(q^{-(x+1)}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) \\ &\quad + \left[(1-q^x) (1+\theta^2 q^{x+\beta-1}) + \theta^2 q^x (1-q^{x+\beta}) \right] \mathcal{M}_n(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) \\ &\quad - (1-q^x) (1+\theta^2 q^{x+\beta-1}) \mathcal{M}_n(q^{-(x-1)}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) . \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

3.6. COMPLEMENTARY BACKWARD, FORWARD RELATIONS AND RECURRENCE RELATION

The recurrence relation and complementary ladder relations on the variable are derived by following an approach similar to the one of the last section. In this case, one needs formulas analogous to (3.5.1) and (3.5.4) with $U(\theta)$ instead of $U^\dagger(\theta)$ on the left. With the help of (3.2.7), one finds

$$\begin{aligned}
U(\theta)q^{-A_0/2}A_-U^\dagger(\theta) &= e_q^{1/2}(-\theta^2q^{-A_0})e_q\left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_+B_+\right)q^{-A_0/2}A_- \\
&\times \left[E_q\left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_-B_-\right)E_q\left(\theta^2q^{B_0+1}\right)E_q\left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_+B_+\right)\right] \\
&\times e_q\left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_-B_-\right)e_q^{1/2}(-\theta^2q^{-A_0}) \\
&= e_q^{1/2}(-\theta^2q^{-A_0})e_q\left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_+B_+\right)q^{-A_0/2}A_- \\
&\times \left[E_q\left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_+B_+\right)E_q\left(\theta^2q^{-A_0}\right)E_q\left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_-B_-\right)\right] \\
&\times e_q\left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_-B_-\right)e_q^{1/2}(-\theta^2q^{-A_0}) \\
&= e_q^{1/2}(-\theta^2q^{-A_0})\left\{e_q\left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_+B_+\right)q^{-A_0/2}A_-E_q\left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_+B_+\right)\right\} \\
&\times E_q^{1/2}\left(\theta^2q^{-A_0}\right).
\end{aligned}$$

Using the q -BCH formula (B.5) and simplifying, the middle term in brackets is found to be equal to

$$\begin{aligned}
e_q\left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_+B_+\right)q^{-A_0/2}A_-E_q\left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}}A_+B_+\right) \\
= q^{-A_0/2}A_- - \theta q^{-A_0}q^{B_0/2}B_+.
\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

One thus arrives at the following identity

$$U(\theta)q^{-A_0/2}A_-U^\dagger(\theta) = q^{-A_0/2}A_-\sqrt{1+\theta^2q^{-A_0}} - \theta q^{-A_0}q^{B_0/2}B_+. \tag{3.6.2}$$

The Hermitian conjugate of (3.6.2) gives a second one, which is also useful :

$$U(\theta)A_+q^{-A_0/2}U^\dagger(\theta) = \sqrt{1+\theta^2q^{-A_0}}A_+q^{-A_0/2} - \theta q^{-A_0}B_-q^{B_0/2}. \tag{3.6.3}$$

3.6.1. Complementary backward relation

A complementary backward relation is now derived as follows. It is seen that

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-q}{}_\beta \langle n|U(\theta)q^{-A_0/2}A_-|x\rangle_{\beta-1} &= \sqrt{1-q^x}q^{-(x-1)/2}\xi_{n,x-1}^{(\beta)}(\theta) \\
&= \sqrt{1-q^{n+1}}\sqrt{1+\theta^2q^{-(n+1)}}q^{-n/2}\xi_{n+1,x}^{(\beta-1)}(\theta) - \theta\sqrt{1-q^{n+\beta-1}}q^{-n}\xi_{n,x}^{(\beta-1)}(\theta),
\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

using (3.6.2). Applying (3.3.5), one obtains the desired result

$$\frac{q^{n+1}}{\theta^2} \frac{1 - q^{-x}}{1 - q^{\beta-1}} \mathcal{M}_n \left(q^{-(x-1)}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right) = \mathcal{M}_{n+1} \left(q^{-x}; q^{\beta-2}, \theta^2; q \right) - \mathcal{M}_n \left(q^{-x}; q^{\beta-2}, \theta^2; q \right) . \quad (3.6.5)$$

3.6.2. Complementary forward relation

Here one starts from

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - q} {}_{\beta} \langle n | U(\theta) A_+ q^{-A_0/2} | x \rangle_{\beta+1} &= \sqrt{1 - q^{x+1}} q^{-x/2} \xi_{n,x+1}^{(\beta)}(\theta) \\ &= \sqrt{1 - q^n} \sqrt{1 + \theta^2 q^{-n}} q^{-(n-1)/2} \xi_{n-1,x}^{(\beta+1)}(\theta) - \theta \sqrt{1 - q^{n+\beta}} q^{-n} \xi_{n,x}^{(\beta+1)}(\theta) , \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

where (3.6.3) has been used. Applying (3.3.5), one then obtains

$$\begin{aligned} \theta^2 q^n (1 - q^{\beta}) \mathcal{M}_n \left(q^{-(x+1)}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right) &= \theta^2 (1 - q^{n+\beta}) \mathcal{M}_n \left(q^{-x}; q^{\beta}, \theta^2; q \right) \\ &\quad - (q^n + \theta^2) (1 - q^n) \mathcal{M}_{n-1} \left(q^{-x}; q^{\beta}, \theta^2; q \right) . \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

3.6.3. Recurrence equation

The recurrence equation is found by combining the two previous relations. Note that

$$\begin{aligned} {}_{\beta} \langle n | U(\theta) A_+ q^{-A_0} A_- | x \rangle_{\beta} &= \frac{1 - q^x}{1 - q} q^{-(x-1)} \xi_{n,x}^{(\beta)} \\ &= {}_{\beta} \langle n | \left(\sqrt{1 + \theta^2 q^{-A_0}} A_+ q^{-A_0/2} - \theta q^{-A_0} B_- q^{B_0/2} \right) \\ &\quad \times \left(q^{-A_0/2} A_- \sqrt{1 + \theta^2 q^{-A_0}} - \theta q^{-A_0} q^{B_0/2} B_+ \right) U(\theta) | x \rangle_{\beta} . \end{aligned}$$

This leads to the following relation for the matrix elements

$$\begin{aligned} (1 - q^x) q^{-(x-1)} \xi_{n,x}^{(\beta)} &= \left[(1 - q^n) (1 + \theta^2 q^{-n}) q^{-n+1} + \theta^2 q^{-2n} (1 - q^{n+\beta}) \right] \xi_{n,x}^{(\beta)} \\ &\quad - \theta q^{-3n/2} \sqrt{1 - q^{n+1}} \sqrt{1 + \theta^2 q^{-n-1}} \sqrt{1 - q^{n+\beta}} \xi_{n+1,x}^{(\beta)} \\ &\quad - \theta q^{-3(n-1)/2} \sqrt{1 - q^n} \sqrt{1 + \theta^2 q^{-n}} \sqrt{1 - q^{n+\beta-1}} \xi_{n-1,x}^{(\beta)} , \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

and calling upon (3.3.5), the recurrence relation [5] is finally obtained :

$$\begin{aligned} q^{2n+1} (1 - q^{-x}) \mathcal{M}_n \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right) &= q (1 - q^n) (q^n + \theta^2) \mathcal{M}_{n-1} \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right) \\ &\quad - \left[q (1 - q^n) (q^n + \theta^2) + \theta^2 (1 - q^{n+\beta}) \right] \mathcal{M}_n \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right) \\ &\quad + \theta^2 (1 - q^{n+\beta}) \mathcal{M}_{n+1} \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right) . \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

3.7. DUALITY

The following relation expresses the property of the q -Meixner polynomials under an exchange of the degree and the variable :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) &= {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{-x} \\ q^\beta \end{matrix} \middle| q; -\frac{q^{n+1}}{\theta^2}\right) \\ &= {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-x}, q^{-n} \\ q^\beta \end{matrix} \middle| q; -\frac{q^{x+1}}{\theta^2 q^{x-n}}\right) = \mathcal{M}_x(q^{-n}; q^{\beta-1}, \theta^2 q^{x-n}; q) . \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

In terms of matrix elements, this amounts to

$$\xi_{n,x}^{(\beta)}(\theta) = \sqrt{q^{n-x}} \xi_{x,n}^{(\beta)}(-\theta q^{(x-n)/2}) . \quad (3.7.2)$$

Using this duality property, other relations can be derived in a simple way. For example, starting from the recurrence relation (3.6.9) and applying the above relation, one obtains

$$\begin{aligned} q^{2n+1} (1 - q^{-x}) \mathcal{M}_n(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2 q^{x-n}; q) &= \theta^2 (1 - q^{n+\beta}) \mathcal{M}_{n+1}(q^{-x}, q^{\beta-1}, \theta^2 q^{x-(n+1)}; q) \\ &\quad - [q(1 - q^n)(q^n + \theta^2) + \theta^2 (1 - q^{n+\beta})] \mathcal{M}_n(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2 q^{x-n}; q) \\ &\quad + q(1 - q^n)(q^n + \theta^2) \mathcal{M}_{n-1}(q^{-x}, q^{\beta-1}, \theta^2 q^{x-(n-1)}; q) . \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Exchanging $x \leftrightarrow n$ and then taking $\theta^2 \rightarrow \theta^2 q^{x-n}$, one gets

$$\begin{aligned} q^{x+1} (1 - q^n) \mathcal{M}_n(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) &= -q(1 - q^x)(q^n + \theta^2) \mathcal{M}_n(q^{-(x-1)}; q^{\beta-1}, \theta^2 q; q) \\ &\quad + [q(1 - q^x)(q^n + \theta^2) + \theta^2 (1 - q^{x+\beta})] \mathcal{M}_n(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) \\ &\quad - \theta^2 (1 - q^{x+\beta}) \mathcal{M}_n(q^{-(x+1)}; q^{\beta-1}, \theta^2 q^{-1}; q) . \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Note that this relation is not exactly the difference equation (3.5.13) because the parameters θ^2 are affected by a factor q in some of the polynomials.

The same process can be applied to the other relations that were derived to obtain new relations, but again these relations will have their parameters θ^2 modified by some factors of q , which means that those relations will differ from the usual ones. A list of these “dual” relations is included in [section A](#).

3.8. GENERATING FUNCTIONS

Two generating functions are now obtained from the algebraic picture : one with respect to the degrees and the other with respect to the variables.

3.8.1. Generating function with respect to the degrees

A useful identity that is proved from (3.2.6) is the following

$$E_q(\gamma A_- B_-) e_q(\delta A_+ B_+) = e_q\left(\frac{\gamma \delta q^{-B_0-1}}{(1-q)^2}\right) e_q(\delta A_+ B_+) E_q(\gamma A_- B_-) E_q\left(\frac{-\gamma \delta q^{A_0}}{(1-q)^2}\right) . \quad (3.8.1)$$

Now introduce the operator

$$V(\theta, t) = E_q \left(t(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) E_q^{1/2} \left(\theta^2 q^{-A_0} \right) \quad (3.8.2)$$

and let $\mathcal{F}_1 = {}_\beta \langle n | V(\theta, t) U(\theta) | 0 \rangle_\beta$. The generating function will be arrived at by obtaining two expressions for \mathcal{F}_1 . Acting first with $V(\theta, t)$ on the left leads to

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= {}_\beta \langle 0 | E_q \left(t(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) E_q^{1/2} \left(\theta^2 q^{-A_0} \right) U(\theta) | x \rangle_\beta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_\beta \langle n | U(\theta) | x \rangle_\beta E_q^{1/2} \left(\theta^2 \right) \left(-\theta^2 q^{-n} \right)_n^{1/2} \sqrt{q^{\binom{n}{2}} \frac{(q^\beta; q)_n}{(q; q)_n}} t^n. \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

This corresponds to a sum of q -Meixner polynomials. Indeed, using (3.3.5), we obtain

$$\mathcal{F}_1 = E_q^{1/2} \left(\theta^2 \right) (-\theta)^x \begin{bmatrix} x + \beta - 1 \\ x \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{q^{\binom{x}{2}}}{(-\theta^2; q)_{x+\beta}}} \sum_{n=0}^{\infty} (\theta t)^n \frac{(q^\beta; q)_n}{(q; q)_n} \mathcal{M}_n \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right). \quad (3.8.4)$$

The other way to express \mathcal{F}_1 is to use (3.8.1) to write

$$\begin{aligned} V(\theta, t) U(\theta) &= E_q \left(t(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) e_q \left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) \\ &\quad \times E_q \left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) E_q^{1/2} \left(\theta^2 q^{B_0+1} \right) \\ &= e_q \left(\theta t q^{-A_0} \right) e_q \left(\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) E_q \left(t(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) \\ &\quad \times E_q \left(-\theta t q^{B_0+1} \right) E_q \left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) E_q^{1/2} \left(\theta^2 q^{B_0+1} \right), \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

which then leads to

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= e_q(\theta t) E_q^{1/2} \left(\theta^2 q^{x+\beta} \right) \\ &\quad \times {}_\beta \langle 0 | E_q \left(t(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) E_q \left(-\theta t q^{B_0+1} \right) E_q \left(-\theta(1-q)q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) | x \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

Expanding the q -exponentials and recalling the orthogonality of the basis vectors, one obtains

$$\mathcal{F}_1 = \frac{E_q^{1/2} \left(\theta^2 \right)}{(-\theta^2; q)_{x+\beta}^{1/2}} \frac{(-\theta)^x}{(\theta t; q)_\beta} \begin{bmatrix} x + \beta - 1 \\ x \end{bmatrix}_q^{\frac{1}{2}} \sqrt{q^{\binom{x}{2}}} {}_1\phi_1 \left(q^{-x} \middle| q; -\frac{tq}{\theta} \right). \quad (3.8.7)$$

Performing the change of variable $z = \theta t$ and equating the RHS of (3.8.4) and (3.8.7) yield the following generating function with respect to the degrees :

$$e_q(z) E_q \left(-z q^\beta \right) {}_1\phi_1 \left(q^{-x} \middle| q; -\frac{zq}{\theta^2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{(q^\beta; q)_n}{(q; q)_n} \mathcal{M}_n \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right). \quad (3.8.8)$$

This generating function seems new to the best of our knowledge; it is also valid in general when $q^{\beta-1}$ is replaced by b for $(0 < b < 1)$.

3.8.2. Generating function with respect to the variables

A generating function where the sum is over the variables is obtained in a fashion similar to what was done in the last subsection. Introduce

$$W(\theta, t) = e_q^{1/2} \left(-\theta^2 q^{B_0+1} \right) e_q \left(t(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) \quad (3.8.9)$$

and let $\mathcal{F}_2 = {}_\beta \langle n | U(\theta) W(\theta, t) | 0 \rangle_\beta$. From the definition of the q -exponentials (B.2), one has

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &= {}_\beta \langle n | U(\theta) e_q^{1/2} \left(-\theta^2 q^{B_0+1} \right) e_q \left(t(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) | 0 \rangle_\beta \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} {}_\beta \langle n | U(\theta) | x \rangle_\beta e_q^{1/2} \left(-\theta^2 \right) \sqrt{(-\theta^2; q)_{x+\beta} q^{-\binom{x}{2}}} \begin{bmatrix} x + \beta - 1 \\ x \end{bmatrix}_q^{\frac{1}{2}} t^x. \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

In view of (3.3.5), one obtains

$$\mathcal{F}_2 = e_q^{1/2} \left(-\theta^2 \right) \sqrt{\frac{q^{-\binom{n}{2}}}{(-\theta^2 q^{-n}; q)_n}} \begin{bmatrix} n + \beta - 1 \\ n \end{bmatrix}_q^{\frac{1}{2}} \theta^n \sum_{x=0}^{\infty} (-\theta t)^x \begin{bmatrix} x + \beta - 1 \\ x \end{bmatrix}_q \mathcal{M}_n \left(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q \right). \quad (3.8.11)$$

Meanwhile, using (3.8.1) we obtain

$$\begin{aligned} U(\theta) W(\theta, t) &= e_q^{1/2} \left(-\theta^2 q^{-A_0} \right) e_q \left(\theta(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) \\ &\quad \times E_q \left(-\theta(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) e_q \left(t(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) \\ &= e_q^{1/2} \left(-\theta^2 q^{-A_0} \right) e_q \left(\theta(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) e_q \left(-\theta t q^{-A_0} \right) \\ &= e_q \left(t(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) E_q \left(-\theta(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_- B_- \right) E_q \left(\theta t q^{B_0+1} \right). \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

Then,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &= e_q^{1/2} \left(-\theta^2 q^{-n} \right) E_q \left(\theta t q^\beta \right) \\ &\quad \times {}_\beta \langle n | e_q \left(\theta(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) e_q \left(-\theta t q^{-A_0} \right) e_q \left(t(1-q) q^{\frac{B_0-A_0+1}{2}} A_+ B_+ \right) | 0 \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

Expanding the q -exponentials and using the orthogonality of the basis vectors lead to

$$\mathcal{F}_2 = \frac{e_q^{1/2} \left(-\theta^2 \right)}{(-\theta^2 q^{-n}; q)_n^{1/2}} \frac{\theta^n}{(-\theta t; q)_\beta} \begin{bmatrix} n + \beta - 1 \\ n \end{bmatrix}_q^{\frac{1}{2}} \sqrt{q^{-\binom{n}{2}}} {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, 0 \\ -\frac{q}{\theta t} \end{matrix} \middle| q; -\frac{q^{n+1}}{\theta^2} \right). \quad (3.8.14)$$

Effecting the change of variables $z = -\theta t$ and equating the RHS of (3.8.11) and (3.8.14) leads to

$$\frac{1}{(z; q)_\beta} {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, 0 \\ q/z \end{matrix} \middle| q; -\frac{q^{n+1}}{\theta^2} \right) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x \frac{(q^\beta; q)_x}{(q; q)_x} \mathcal{M}_n(q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) . \quad (3.8.15)$$

3.9. CONCLUSION

Summing up, we have provided an interpretation of the univariate q -Meixner polynomials where they arise as matrix elements of unitary q -pseudorotation representations on q -oscillator states. The unitarity of the representations was observed to imply the orthogonality relations for the polynomials and the structure relations were given a useful algebraic underpinning. A duality property has been presented and observed to lead to a new set of relations for the polynomials. Generating functions of two different types were obtained in this $\mathcal{U}_q(\mathfrak{su}(1,1))$ framework.

Now that this understanding of the univariate q -Meixner polynomials has been elaborated, it should be possible to develop an algebraic interpretation of the multivariate q -Meixner polynomials, similar to what was done for the multivariate q -Krawtchouk polynomials [31]. It is expected that the d -dimensional q -Meixner polynomials will appear as matrix elements of unitary $(d+1)$ -dimensional q -pseudorotation representations on $(d+1)$ q -oscillator states. The authors plan to report on this matter in future work.

Acknowledgments

The authors would like to thank V. X. Genest, T. Koornwinder, M. E. H. Ismail, and A. Zhedanov for useful remarks and helpful discussions. J. G. holds an Alexander-Graham-Bell Graduate Scholarship from the Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) of Canada. The research of L. V. was supported in part by the NSERC.

A. “DUAL” RELATIONS

The standard relations derived in the paper can be given a dual version by the process explained in section 3.7. Here is the list of the relations that are obtained in this fashion.

Backward relation (3.5.7) \rightarrow

$$\begin{aligned} \theta^2 q^{x+1} (1 - q^\beta) \mathcal{M}_n (q^{-(x+1)}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) &= \theta^2 q^{x+1} (1 - q^{n+\beta}) \mathcal{M}_n (q^{-x}; q^\beta, \theta^2; q) \\ &\quad - q (1 - q^n) (1 + \theta^2 q^{x+\beta}) \mathcal{M}_{n-1} (q^{-x}; q^\beta, \theta^2 q^{-1}; q) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Forward relation (3.5.10) \rightarrow

$$\frac{1 - q^{-x}}{\theta^2 (1 - q^\beta)} \mathcal{M}_n (q^{-(x-1)}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) = \mathcal{M}_{n+1} (q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2 q; q) - \mathcal{M}_n (q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) \quad (\text{A.2})$$

Difference equation (3.5.13) \rightarrow

$$\begin{aligned} (1 - q^x) \mathcal{M}_n (q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) &= - (1 - q^n) (1 + \theta^2 q^{x+\beta-1}) \mathcal{M}_{n-1} (q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2 q^{-1}; q) \\ &\quad + [(1 - q^n) (1 + \theta^2 q^{x+\beta-1}) + \theta^2 q^x (1 - q^{n+\beta})] \mathcal{M}_n (q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) \\ &\quad - \theta^2 q^x (1 - q^{n+\beta}) \mathcal{M}_{n+1} (q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2 q; q) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Complementary Backward relation (3.6.5) \rightarrow

$$\begin{aligned} \frac{q}{\theta^2} \frac{1 - q^n}{1 - q^{\beta-1}} \mathcal{M}_{n-1} (q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2 q^{-1}; q) &= \mathcal{M}_n (q^{-x}; q^{\beta-2}, \theta^2; q) \\ &\quad - \mathcal{M}_n (q^{-(x+1)}; q^{\beta-2}, \theta^2 q^{-1}; q) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Complementary Forward relation (3.6.7) \rightarrow

$$\begin{aligned} \theta^2 q^x (1 - q^\beta) \mathcal{M}_{n+1} (q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2 q; q) &= \theta^2 (1 - q^{x+\beta}) \mathcal{M}_n (q^{-x}; q^\beta, \theta^2; q) \\ &\quad - (q^n + \theta^2) (1 - q^x) \mathcal{M}_n (q^{-(x-1)}; q^\beta, \theta^2 q; q) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Recurrence relation (3.6.9) \rightarrow

$$\begin{aligned} q^{x+1} (1 - q^n) \mathcal{M}_n (q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) &= -q (1 - q^x) (q^n + \theta^2) \mathcal{M}_n (q^{-(x-1)}; q^{\beta-1}, \theta^2 q; q) \\ &\quad + [q (1 - q^x) (q^n + \theta^2) + \theta^2 (1 - q^{x+\beta})] \mathcal{M}_n (q^{-x}; q^{\beta-1}, \theta^2; q) \\ &\quad - \theta^2 (1 - q^{x+\beta}) \mathcal{M}_n (q^{-(x+1)}; q^{\beta-1}, \theta^2 q^{-1}; q) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

B. USEFUL q -SERIES IDENTITIES

A number of useful q -series identities are gathered here for convenience.

The q -binomial coefficients are defined as follows

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (\text{B.1})$$

They tend to the usual coefficients when $q \rightarrow 1$.

The little q -exponential, $e_q(z)$, and the big q -exponential, $E_q(z)$, are defined by

$$e_q(z) = {}_1\phi_0 \left(\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; z \right) = \frac{1}{(z; q)_\infty}, \quad E_q(z) = {}_0\phi_0 \left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| q; -z \right) = (-z; q)_\infty, \quad (\text{B.2})$$

for $|z| < 1$. It is straightforward to see that $e_q(z)E_q(-z) = 1$. From (B.2), one easily derives the following relations :

$$\begin{aligned} e_q(\lambda q^n) &= e_q(\lambda)(\lambda; q)_n, & e_q(\lambda q^{-n}) &= \frac{e_q(\lambda)}{(\lambda q^{-n}; q)_n}, \\ E_q(\lambda q^n) &= \frac{E_q(\lambda)}{(-\lambda; q)_n}, & E_q(\lambda q^{-n}) &= E_q(\lambda)(-\lambda q^{-n}; q)_n. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

The Baker–Campbell–Hausdorff formula admits two q -extensions [40, 41]. The first one is

$$\begin{aligned} E_q(\lambda X)Y e_q(-\lambda q^\alpha X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(q; q)_n} [X, Y]_n, \\ [X, Y]_0 &= Y, \quad [X, Y]_{n+1} = q^n X [X, Y]_n - q^\alpha [X, Y]_n X, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

The second one is

$$\begin{aligned} e_q(\lambda X)Y E_q(-\lambda q^\alpha X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(q; q)_n} [X, Y]'_n, \\ [X, Y]'_0 &= Y, \quad [X, Y]'_{n+1} = X [X, Y]'_n - q^{n+\alpha} [X, Y]'_n X, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Let us also record that for $XY = qYX$, one has

$$e_q(X + Y) = e_q(Y)e_q(X), \quad \text{and} \quad E_q(X + Y) = E_q(X)E_q(Y). \quad (\text{B.6})$$

CONCLUSION

Les travaux de maîtrise présentés dans ce mémoire portaient sur l'interprétation algébrique des q -polynômes de Meixner.

Deux chapitres préliminaires ont introduit les concepts en jeu et le contexte de ce projet de recherche pour mieux encadrer le contenu de l'article de maîtrise. Ces chapitres ont explicité des liens qui existaient entre polynômes orthogonaux, systèmes physiques exactement résolubles, leurs symétries et les structures algébriques associées (diagramme \diamond), en plus de d'introduire la version q -déformée du diagramme.

Puis, dans l'article central, une interprétation algébrique des q -polynômes de Meixner a été obtenue : ceux-ci apparaissent comme éléments de matrice de représentations de q -pseudorotations sur des états de q -oscillateurs. Diverses propriétés des polynômes, telles que l'orthogonalité, la relation de récurrence et l'équation aux différences, ont été obtenues de façon systématique en tirant profit de la construction.

Une interprétation algébrique du même genre avait déjà été obtenue pour les q -polynômes de Krawtchouk : ceux-ci apparaissaient dans les éléments de matrice de représentations de q -rotations sur des états de q -oscillateurs, et le modèle s'était généralisé assez naturellement en dimension supérieure (en dimension n), en introduisant davantage de q -oscillateurs (n q -oscillateurs au total). Les éléments de matrice de représentations de q -rotations en n dimensions contenaient alors des polynômes à $n - 1$ variables : les q -polynômes de Krawtchouk multivariés. Il serait intéressant de suivre un chemin similaire en généralisant la construction réalisée dans l'article pour obtenir une interprétation algébrique des q -polynômes de Meixner multivariés. Ceci devrait être le sujet d'une future publication.

Il devrait également être possible de s'inspirer de ces résultats pour obtenir une interprétation algébrique d'une certaine q -déformation des polynômes de Charlier multivariés (fort probablement les polynômes d'Al-Salam Carlitz de type II multivariés). Le modèle permettrait de dériver les principales propriétés de ces polynômes, qui ne sont pas encore toutes connues. Il permettrait également d'obtenir les propriétés principales des q -polynômes de Hermite discrets de type II multivariés, qui s'obtiennent des Al-Salam Carlitz de type II par une certaine limite.

Références

- [1] E. P. WIGNER : The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(1):1–14, 1960.
- [2] M. S. LEIFER : Mathematics is Physics. *Trick or Truth? The Mysterious Connection Between Physics and Mathematics*, pages 21–40, 2016.
- [3] J. GABORIAUD et L. VINET : An algebraic interpretation of the q-Meixner polynomials. *The Ramanujan Journal*, <https://doi.org/10.1007/s11139-017-9908-3>, 2017.
- [4] T. S. CHIHARA : *An introduction to Orthogonal Polynomials*. Dover Publications, 1978.
- [5] R. KOEKOEK, P. A. LESKY et R. F. SWARTTOUW : *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*. Springer Monographs in Mathematics, 2010.
- [6] C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU et F. LALOË : *Mécanique Quantique*. Hermann, 1998.
- [7] D. J. GRIFFITHS : *Introduction to Electrodynamics*. Pearson, 4^e édition, 2013.
- [8] M. E. PESKIN et D. V. SCHROEDER : *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview, 1995.
- [9] J. GABORIAUD, V. X. GENEST, J. LEMIEUX et L. VINET : A superintegrable discrete oscillator and two-variable Meixner polynomials. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 48(41), 2015.
- [10] J. SCHWINGER : On Angular Momentum. *USAEC Report*, (NYO-3071), 1952.
- [11] F. IACHELLO : *Lie Algebras and Applications*. Springer, 1^e édition, 2006.
- [12] S. M. LEA : *Mathematics for Physicists*. Brooks/Cole, 2004.
- [13] S. M. CARROLL : *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, San Francisco, USA, 2004.
- [14] E. INONU et E. P. WIGNER : On the Contraction of Groups and Their Representations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 39(6):510–524, 1953.
- [15] P. A. M. DIRAC : The Lagrangian in Quantum Mechanics. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, 3:64–72, 1933.
- [16] R. P. FEYNMAN : *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics*. Thèse de doctorat, Princeton University, 1942.
- [17] A. W. KNAPP : *Lie Groups Beyond an Introduction*. Birkhäuser, 2^e édition, 2005.
- [18] A. BOHM : *Quantum Mechanics : Foundations and Applications*. Springer, 3^e édition, 1993.

- [19] T. L. CURTRIGHT et C. K. ZACHOS : Deforming Maps for Quantum Algebras. *Physics Letter B*, 243(3):237–244, 1990.
- [20] J. MEIXNER : Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion. *J. London Math. Soc.*, s1-9:6–13, 1934.
- [21] D. BASU et K. B. WOLF : The unitary irreducible representations of $SL(2, \mathbb{R})$ in all subgroup reductions. *Journal of Mathematical Physics*, 23:189–205, 1982.
- [22] N. Ja. VILENKIN et A. U. KLIMYK : *Representation of Lie Groups and Special Functions*. Springer, 1991.
- [23] Ya. I. GRANOVSKII et A. S. ZHEDANOV : Orthogonal polynomials in the Lie algebras. *Soviet Physics Journal*, 29(5):387–393, 1986.
- [24] R. FLOREANINI, J. LETOURNEUX et L. VINET : Quantum mechanics and polynomials of a discrete variable. *Annals of Physics*, 226(2):331–349, 1993.
- [25] R. C. GRIFFITHS : Orthogonal polynomials on the negative multinomial distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 5(2):271–277, 1975.
- [26] V. X. GENEST, H. MIKI, L. VINET et A. ZHEDANOV : The multivariate Meixner polynomials as matrix elements of $SO(d, 1)$ representations on oscillator states. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 47(4):045207, 2014.
- [27] T. H. KOORNWINDER : Representations of the twisted $SU(2)$ quantum group and some q -hypergeometric orthogonal polynomials. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 92(1):97–117, 1989.
- [28] E. KOELINK : q -Krawtchouk polynomials as spherical functions on the Hecke algebra of type B. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352(10):4789–4813, 2000.
- [29] Y. SMIRNOV et C. CAMPIGOTTO : The quantum q -Krawtchouk and q -Meixner polynomials and their related D -functions for the quantum group $SU_q(2)$ and $SU_q(1,1)$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 164:643–660, 2004.
- [30] V. X. GENEST, S. POST, L. VINET, G.-F. YU et A. ZHEDANOV : q -rotations and Krawtchouk polynomials. *The Ramanujan Journal*, 40(2):335–357, 2016.
- [31] V. X. GENEST, S. POST et L. VINET : An algebraic interpretation of the multivariate q -Krawtchouk polynomials. *The Ramanujan Journal*, 43(2):415–445, 2016.
- [32] G. GASPER et M. RAHMAN : Some systems of multivariable orthogonal q -Racah polynomials. *The Ramanujan Journal*, 13(1):389–405, 2007.
- [33] M. N. ATAKISHIEV, N. M. ATAKISHIEV et A. U. KLIMYK : Big q -Laguerre and q -Meixner polynomials and representations of the quantum algebra $U_q(su_{1,1})$. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 36(41):10335–10347, 2003.
- [34] H. ROSENGREN : A new quantum algebraic interpretation of the Askey-Wilson polynomials. *Contemporary Mathematics*, 254:371–394, 2000.
- [35] A. J. MACFARLANE : On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 22(21):4581–4588, 1989.

- [36] L. C. BIEDENHARN : The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 22(18):L873–L878, 1989.
- [37] R. FLOREANINI et L. VINET : q -Orthogonal polynomials and the oscillator quantum group. *Letters in Mathematical Physics*, 22(1):45–54, 1991.
- [38] A. ZHEDANOV : Q rotations and other Q transformations as unitary nonlinear automorphisms of quantum algebras. *Journal of Mathematical Physics*, 34(6):2631–2648, 1993.
- [39] D. R. TRUAX : Baker-Cambpell-Hausdorff relations and unitarity of $SU(2)$ and $SU(1,1)$ squeeze operators. *Physical Review D*, 31(8):1988–1991, 1985.
- [40] R. FLOREANINI et L. VINET : Automorphisms of the q -oscillator algebra and basic orthogonal polynomials. *Physics Letters A*, 180(6):393–401, 1993.
- [41] E. G. KALNINS, W. MILLER et S. MUKHERJEE : Models of q -algebra representations : Matrix elements of the q -oscillator algebra. *Journal of Mathematical Physics*, 34:5333–5356, 1993.