Université de Montréal

Rigidité du crochet de Poisson en topologie symplectique

par

Dominique Rathel-Fournier

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

septembre 2017

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Rigidité du crochet de Poisson en topologie symplectique

présenté par

Dominique Rathel-Fournier

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Octav Cornea

(président-rapporteur)

François Lalonde

(directeur de recherche)

Vestislav Apostolov

(membre du jury)

Mémoire accepté le :

11 octobre 2017

SOMMAIRE

Ce mémoire est une introduction aux phénomènes de rigidité C^0 en topologie symplectique. Plus précisément, il sera question de la rigidité C^0 du crochet de Poisson sur une variété symplectique. Les notions élémentaires de la géométrie symplectique et de la dynamique hamiltonienne sont rappelées au premier chapitre. Le second chapitre traite de la géométrie d'Hofer du groupe des difféomorphismes hamiltoniens d'une variété symplectique. Le chapitre 3 concerne l'application de la géométrie d'Hofer à l'étude de fonctionnelles définies à partir du crochet de Poisson. Le résultat principal qui est démontré, dû à Buhovski, Entov et Polterovich, est la semi-continuité inférieure dans la topologie C^0 de la fonctionnelle qui associe à chaque paire de fonctions la norme uniforme de leur crochet de Poisson.

Mots-clés : Topologie symplectique, crochet de Poisson, dynamique hamiltonienne, géométrie d'Hofer, rigidité symplectique.

SUMMARY

This master's thesis is an introduction to C^0 rigidity phenomena in symplectic topology. More precisely, the main concern is the C^0 rigidity of the Poisson bracket on a symplectic manifold. The elementary notions of symplectic geometry and Hamiltonian dynamics are recalled in the first chapter. The second chapter introduces the Hofer geometry of the group of Hamiltonian diffeomorphisms of a symplectic manifold. Chapter 3 concerns the application of Hofer geometry to the study of functionals defined in terms of the Poisson bracket. The main result, due to Buhovski, Entov and Polterovich, is the lower semi-continuity of the functional which assigns to every pair of functions the uniform norm of their Poisson bracket.

Keywords : Symplectic topology, Poisson bracket, Hamiltonian dynamics, Hofer geometry, symplectic rigidity.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de recherche François Lalonde. Je suis reconaissant de la confiance infinie et de la liberté qu'il m'a accordées durant ces deux années. Merci de m'avoir toujours encouragé à me laisser porter par mon instinct et ma curiosité.

Je remercie les membres du jury Vestislav Apostolov, Octav Cornea et François Lalonde pour le temps consacré à l'évaluation de ce mémoire.

Je remercie le CRSNG ainsi que le FRQNT pour leur soutien financier qui m'a permis de me consacrer pleinement à ce projet. Je remercie aussi Iosif Polterovich pour son aide précieuse lors des demandes de bourse.

Merci à mes collègues et amis du DMS. Un merci particulier à Alex Perrier, pour m'avoir répété « Tu gères, mec ! » à des moments où j'avais de la misère à le croire. Merci aussi à Jean Lagacé pour son enthousiasme contagieux. Je remercie chaleureusement Jordan Payette pour avoir été une source d'inspiration, de motivation et de conseils inépuisable depuis que je le connais. C'est dans mes échanges avec lui que j'ai ressenti le plus vivement la beauté des mathématiques.

Je remercie mes amis physiciens, ceux qui enjolivaient ces dîners et ces soirées passés à la Planck et ailleurs. Vous vous reconnaîtrez sans doute.

Je remercie ma famille, qui m'a épaulé depuis toujours. Les mots manquent pour exprimer tout ce que je leur dois. Merci de m'avoir toujours encouragé à suivre ma passion.

Enfin, je remercie de tout coeur Véronique, qui a partagé mes joies et mes peines pendant ces deux années. Merci d'avoir toujours cru en moi et de m'avoir aidé à traverser les moments difficiles.

INTRODUCTION

Le sujet de ce mémoire est la géométrie symplectique, c'est-à-dire l'étude de variétés munies de formes symplectiques. Notre objet d'étude principal est le *crochet de Poisson* d'une variété symplectique, qui associe à deux fonctions la fonction donnée dans des coordonnées appropriées par l'expression classique

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

On peut voir le crochet de Poisson de deux fonctions comme une mesure de la « grandeur symplectique » de leurs dérivées en chaque point. Pour obtenir une mesure plus commode, il est naturel de considérer des fonctionnelles de la forme $(F, G) \mapsto \|\{F, G\}\|$, où $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace des fonctions. Nous allons principalement considérer la *norme* C^0 donnée par $\|F\|_\infty = \sup_{x \in M} |F(x)|$.

Viterbo et Cardin [**10**] ont découvert que la fonctionnelle $(F, G) \mapsto \|\{F, G\}\|_\infty$ possède d'étonnantes propriétés de rigidité. Ils ont montré que si des suites F_n et G_n convergent *uniformément* vers F et G respectivement, et que $\{F, G\} \neq 0$, alors la valeur de $\|\{F_n, G_n\}\|_\infty$ ne peut pas devenir arbitrairement proche de 0 lorsque $n \to \infty$. En termes précis, cela signifie que $\liminf_{n\to\infty} \|\{F_n, G_n\}\|_\infty > 0$. Cette propriété est surprenante car le crochet de Poisson dépend des dérivées des fonctions F_n et G_n, et que la convergence uniforme ne permet pas de contrôler le comportement des dérivées. Peu après, Entov et Polterovich [**15**] ainsi que Buhovski [**7**] ont montré un résultat plus fort : la fonctionnelle $(F, G) \mapsto \|\{F, G\}\|_\infty$ est *semi-continue inférieurement*. Cela signifie qu'il est impossible de baisser significativement la norme C^0 du crochet de Poisson de deux fonctions par des perturbations arbitrairement petites dans la topologie C^0. Ce phénomène est appelé la *rigidité* C^0 *du crochet de Poisson*. L'objectif de ce mémoire est d'introduire les outils nécessaires à la démonstration de la rigidité C^0 du crochet de Poisson.

Le premier chapitre expose toutes les notions élémentaires de la géométrie symplectique qui sont nécessaires pour la suite. L'accent est mis sur la dynamique hamiltonienne ainsi que sur le rôle du crochet de Poisson. Le seul prérequis que nous supposons est une connaissance de base du langage de la géométrie différentielle : variétés, champs de vecteurs et leur flot, formes différentielles, etc.

Au second chapitre, nous introduisons les difféomorphismes hamiltoniens, qui sont les transformations d'une variété symplectique qui sont obtenues à partir d'un hamiltonien H en solutionnant les *équations d'Hamilton*

$$q_i'(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$p_i'(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

qui décrivent la mécanique classique. L'objet central de ce chapitre est la *géométrie d'Hofer*, qui est une notion de distance sur l'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens qui est intimement liée à la dynamique hamiltonienne.

Au troisième et dernier chapitre de ce mémoire, nous commençons par présenter un bref survol de la genèse du concept de rigidité C^0 en topologie symplectique. Nous montrons ensuite comment la géométrie d'Hofer permet de dévoiler les propriétés de rigidité du crochet de Poisson. Les deux dernières sections sont dédiées aux preuves du résultat de Cardin et Viterbo ainsi que celui de Buhovski, Entov et Polterovich.

Les phénomènes de rigidité C^0 du crochet de Poisson que nous allons présenter ont mené à de nombreux développements ultérieurs que nous n'aurons pas l'occasion d'aborder dans ce mémoire. Notamment, ces résultats ont mené à l'introduction d'invariants symplectiques construits à partir du crochet de Poisson, appelés les *invariants pb*, qui sont aujourd'hui l'objet d'une recherche active. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article de Buhovski, Entov et Polterovich [**8**] ou la monographie de Polterovich et Rosen [**30**] pour une introduction à ces invariants.

Par soucis de rester bref, nous n'aborderons pas dans ce mémoire l'un des aspects les plus fondamentaux de la topologie symplectique, soit la théorie des courbes pseudo-holomorphes et la théorie de Floer. En particulier, on ne trouvera pas dans ce mémoire de preuve de la non-trivialité de la géométrie d'Hofer, qui est l'un des outils principaux que nous allons utiliser. Le lecteur soucieux de remédier à ce manque pourra consulter l'ouvrage d'Hofer et Zehnder [**19**] ou celui de Polterovich [**29**] pour des preuves détaillées dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$, ainsi que l'article de Lalonde et McDuff [**22**] pour le cas général. On réfère aussi aux livres d'Oh [**26**] et de Polterovich et Rosen [**30**] pour une autre approche à ce théorème via les invariants spectraux. Pour la théorie des courbes pseudo-holomorphes et leurs applications en topologie symplectique, l'ouvrage de McDuff et Salamon [**24**] et le recueil d'Audin et Lafontaine [**21**] sont des références incontournables.

Chapitre 1

GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

Dans ce chapitre, nous exposons les constructions de base de la géométrie symplectique. Nous commençons par introduire la géométrie des formes symplectiques, d'abord dans le cas linéaire puis sur les variétés. La section 3 traite de la dynamique hamiltonienne, qui généralise la mécanique hamiltonienne aux variétés symplectiques. Nous prouvons à la section 4 le théorème de Darboux, selon lequel toutes les variétés symplectiques de même dimension sont localement identiques. Enfin, nous introduisons à la section finale de ce chapitre le crochet de Poisson, qui sera l'objet d'étude principal de ce mémoire.

La référence standard pour le matériel de ce chapitre est le livre de McDuff et Salamon [**23**].

1.1. Espaces vectoriels symplectiques

Nous introduisons dans cette section les espaces vectoriels symplectiques, qui sont les objets linéaires sur lesquels est modelée la géométrie symplectique. Dans ce qui suit, les espaces vectoriels sont toujours supposés être des espaces vectoriels réels de dimension finie.

Définition 1.1.1. Soit V un espace vectoriel. Une **forme symplectique** sur V est une forme bilinéaire $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ qui est

(1) antisymétrique, c'est-à-dire que $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ pour tous u,$v \in V$;

(2) non-dégénérée, c'est-à-dire que $\omega(u, v) = 0$ pour tous $v \in V$ implique que $u = 0$.

Un **espace vectoriel symplectique** (V, ω) est un espace vectoriel V muni d'une forme symplectique ω. Si (V, ω) et (W, η) sont des espaces symplectiques, une application linéaire $L : V \to W$ est dite **symplectique** si $L^*\eta = \omega$.

Une forme symplectique ω induit une application $\Omega : V \to V^*$ entre V et son dual donnée par $\Omega(v) = \omega(v, \cdot)$. La non-dégénérescence de ω est alors équivalente à ce que Ω soit un isomorphisme. Une autre formulation équivalente est de demander que la forme $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (n facteurs) ne s'annule pas.

Exemple 1.1.1. L'exemple standard d'espace symplectique est $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme symplectique ω_0 qui est représentée dans la base standard par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

où I_n est la matrice identité $n \times n$. En notant $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ la base standard de $\mathbb{R}^{2n}$, cela signifie que $\omega_0(e_i, f_i) = \delta_{ij}$ et $\omega_0(e_i, e_j) = \omega_0(f_i, f_j) = 0$ pour tous i et j, les autres valeurs de ω_0 étant déterminées par la bilinéarité et l'antisymétrie. Si $a = \sum_i (x_i e_i + y_i f_i)$ et $b = \sum_i (u_i e_i + v_i f_i)$ sont des vecteurs quelconques, on a alors

$$\omega_0(a, b) = \sum_i (x_i v_i - y_i u_i) = \sum_i \det \begin{pmatrix} x_i & u_i \\ y_i & v_i \end{pmatrix}.$$

On reconnaît donc que $\omega_0(a, b)$ est la somme des *aires signées* des parallélogrammes engendrés par les projections de a et b sur les plans $\langle e_i, f_i \rangle$, le signe étant positif si l'orientation de ces projections est en accord avec celle de e_i et f_i, et négatif dans le cas contraire.

L'exemple précédent est essentiellement le seul, au sens où tous les espaces vectoriels symplectiques sont isomorphes à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ pour un certain n, ce que nous allons démontrer au théorème 1.1.1. En préparation à la preuve, on définit quelques sous-espaces importants des espaces symplectiques.

Définition 1.1.2. Soit (V, ω) un espace symplectique, et $W \subset V$ un sous-ensemble. L'ensemble

$$W^\omega = \{v \in V : \omega(v, w) = 0 \quad \text{pour tout } w \in W\}$$

est appelé **l'orthogonal symplectique** de W.

En géométrie euclidienne, un sous-espace et son orthogonal s'intersectent toujours trivialement. La situation est très différente pour une forme symplectique et il est important de distinguer comment un sous-espace se comporte par rapport à son orthogonal.

Définition 1.1.3. Un sous-espace W de (V, ω) est dit

- **symplectique**, si $W \cap W^\omega = 0$;
- **isotrope**, si $W \subset W^\omega$;
- **coisotrope**, si $W^\omega \subset W$;
- **lagrangien**, si $W = W^\omega$.

Remarquons que l'espace $W \cap W^\omega$ est précisément le noyau de la restriction de ω à W. Par conséquent, un sous-espace est symplectique si et seulement si la restriction de ω est une forme symplectique, ce qui justifie la terminologie.

On rassemble dans la proposition suivante quelques propriétés élémentaires de l'orthogonal symplectique qui seront utiles par la suite.

Proposition 1.1.1. *Soit (V, ω) un espace symplectique. Pour tout sous-espace A de V, on a*

(1) $\dim A + \dim A^\omega = \dim V$ *;*

(2) $(A^\omega)^\omega = A$.

De plus, pour tous sous-espaces A et B les relations suivantes sont satisfaites :

(3) $A \subset B$ *si et seulement si* $B^\omega \subset A^\omega$ *;*

(4) $(A + B)^\omega = A^\omega \cap B^\omega$ *;*

(5) $(A \cap B)^\omega = A^\omega + B^\omega$.

Démonstration.

(1) On remarque que A^ω est le noyau de l'opérateur linéaire $\varphi : V \to A^*$ donné par $\varphi = i^* \circ \Omega$, où $\Omega : V \to V^*$ est l'isomorphisme induit par la forme symplectique, $i : A \to V$ est l'inclusion et $i^* : V^* \to A^*$ est l'application duale à i. L'application i^* est surjective car i est injective, donc φ est elle-même surjective. Le théorème du rang implique alors que $\dim V = \dim A^* + \dim A^\omega = \dim A + \dim A^\omega$.

(2) Soit $a \in A$. Par définition, on a $\omega(a, v) = 0$ pour tout $v \in A^\omega$. Donc $a \in (A^\omega)^\omega$. Cela montre que $A \subset (A^\omega)^\omega$. Or, par la conclusion (1) on a $\dim V = \dim A + \dim A^\omega$ et $\dim V = \dim A^\omega + \dim (A^\omega)^\omega$. On en déduit que $\dim A = \dim (A^\omega)^\omega$, et donc que l'inclusion ci-haut est en fait une égalité.

(3) Si $A \subset B$, l'inclusion $B^\omega \subset A^\omega$ est évidente. Si $B^\omega \subset A^\omega$, alors cela implique $(A^\omega)^\omega \subset (B^\omega)^\omega$, et donc $A \subset B$ par (2).

(4) Puisque $A \subset A + B$ et $B \subset A + B$, on a par (3) que $(A + B)^\omega \subset A^\omega$ et $(A+B)^\omega \subset B^\omega$. Donc $(A+B)^\omega \subset A^\omega \cap B^\omega$. Pour montrer l'autre inclusion, prenons $v \in A^\omega \cap B^\omega$. Tout élément de $A + B$ s'écrit comme $a + b$ pour certains $a \in A$ et $b \in B$. On a alors $\omega(v, a + b) = \omega(v, a) + \omega(v, b) = 0$, donc $v \in (A + B)^\omega$.

(5) Il suffit d'appliquer (4) aux orthogonaux et d'utiliser (2), c'est-à-dire que $(A^\omega + B^\omega)^\omega = (A^\omega)^\omega \cap (B^\omega)^\omega = A \cap B$.

$\square$

La proposition précédente permet de reformuler la propriété d'être un sous-espace symplectique, ce qui sera l'ingrédient principal de la preuve du théorème 1.1.1.

Lemme 1.1.1. *Soit W un sous-espace de (V, ω). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) W est symplectique ;

(2) W^ω est symplectique ;

(3) $V = W \oplus W^\omega$;

(4) $\omega|_W$ est une forme symplectique sur W.

Démonstration. L'équivalence entre (1) et (2) est une conséquence directe de $(W^\omega)^\omega = W$. Pour montrer l'équivalence entre (1) et (4), il suffit de remarquer que l'ensemble $W \cap W^\omega$ est, par définition, le noyau de la forme $\omega|_W$.

L'implication (3) $\Rightarrow$ (1) est évidente. Pour montrer l'inverse, supposons que $W \cap W^\omega = 0$. En prenant l'orthogonal et en appliquant la conclusion (5) de la proposition précédente, on obtient que $W + W^\omega = 0^\omega$. Or, $0^\omega = V$ par la non-dégénérescence de ω, ce dont on déduit que $V = W \oplus W^\omega$. □

On énonce maintenant le théorème principal de cette section.

Théorème 1.1.1 (Théorème de classification des espaces symplectiques)**.** *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Alors V est de dimension paire et il existe une base $u_1, \ldots u_n, v_1, \ldots, v_n$ de V telle que $\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}$ et $\omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0$ pour tous i,j.*

Les bases de V dont l'existence est prédite par le théorème 1.1.1 sont appelées des **bases symplectiques**. Remarquons qu'une telle base définit un isomorphisme symplectique entre (V, ω) et l'espace standard $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ (introduit à l'exemple 1.1.1), où $\dim V = 2n$.

Démonstration. On procède par induction sur la dimension de V. Puisque ω est non-dégénérée, il existe des vecteurs u_1 et v_1 tels que $\omega(u_1, v_1) = 1$. Ceux-ci sont nécessairement linéairement indépendants, faute de quoi ils seraient parallèles et on aurait alors $\omega(u_1, v_1) = 0$ par antisymétrie. Cela termine la preuve dans le cas où $\dim V \leq 2$. Dans le cas général, on nomme W l'espace engendré par u_1 et v_1. La restriction de ω à W étant non-dégénérée, il s'agit d'un sous-espace symplectique (lemme 1.1.1). Toujours par le lemme 1.1.1, on a $V = W \oplus W^\omega$ et la restriction de ω à W^ω est une forme symplectique. Puisque $\dim W^\omega = \dim V - \dim W = \dim V - 2$, on peut appliquer l'hypothèse d'induction à $(W^\omega, \omega|_{W^\omega})$. On obtient alors une base symplectique $u_2, \ldots, u_n, v_2, \ldots, v_n$ de W^ω, où l'entier n est tel que $2n - 2 = \dim W^\omega = \dim V - 2$, c'est-à-dire que

$\dim V = 2n$. V est donc de dimension paire et la base $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ est une base symplectique de V, ce qui complète la preuve. □

1.2. Variétés symplectiques

Une variété symplectique est un variété lisse dont chaque plan tangent est muni d'une structure d'espace vectoriel symplectique. On demande que cette structure varie de façon lisse en fonction du point. On impose en plus que cette structure satisfasse une équation différentielle bien particulière ; la signification géométrique de cette condition deviendra claire par la suite. Dans ce qui suit, on suppose toujours que les variétés considérées sont connexes et sans bord (mais pas forcément compactes).

Définition 1.2.1. Une **variété symplectique** (M, ω) est une variété M munie d'une forme différentielle ω de degré 2 telle que

(1) pour tout $x \in M$, la forme ω_x est non-dégénérée ;

(2) ω est fermée, c'est-à-dire que $d\omega = 0$.

Définition 1.2.2. Soit (M, ω) et (N, η) des variétés symplectiques. Une application lisse $\phi : M \to N$ est dite **symplectique** si $\phi^*\eta = \omega$. Une application symplectique inversible est appelée un **symplectomorphisme**. S'il existe un symplectomorphisme $\phi : M \to N$, on dit alors que (M, ω) et (N, η) sont **symplectomorphes**. On note $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ le groupe des symplectomorphismes d'une variété symplectique (M, ω).

Avant d'aller plus loin, donnons quelques exemples de variétés symplectiques.

a) Espace standard.

L'exemple de base est $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme symplectique « constante » $\omega_0 = \sum dq_i \wedge dp_i$, où $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ sont les coordonnées usuelles sur $\mathbb{R}^{2n}$. En chaque point, cette forme est égale à la forme symplectique linéaire standard sur $\mathbb{R}^{2n}$ via l'identification usuelle $T_x\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n}$.

b) Fibrés cotangents.

Plus généralement, le fibré cotangent T^*Q d'une variété Q admet une forme symplectique. Soit $\pi : T^*Q \to Q$ la projection sur la base. On définit la **forme de Liouville** λ sur T^*Q de la façon suivante : si v est un vecteur tangent à T^*Q en (q, α), alors on pose $\lambda_{(q,\alpha)}(v) = \alpha(\pi_* v)$. On définit alors la **forme symplectique canonique** sur T^*Q par $\omega = -d\lambda$. Cette forme est évidemment fermée. Pour vérifier qu'elle est non-dégénérée, il convient d'écrire sa représentation en coordonnées naturelles. N'importe quel choix de coordonnées locales q_i sur Q induit via les différentielles des coordonnées q_i, p_i qui trivialisent localement T^*Q. Dans ces coordonnées, la forme de Liouville est donnée par $\lambda = \sum_i p_i dq_i$. En dérivant, on trouve que la forme ω est donnée localement par $\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$, ce qui correspond à la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$. On en déduit que ω est non-dégénérée.

Cet exemple a une importance particulière en physique. On peut interpréter la variété Q comme l'ensemble des positions accessibles à un système physique (on l'appelle alors l'espace des configurations). Le fibré cotangent T^*Q représente alors l'espace des phases du système physique, soit l'ensemble des positions et momentums accessibles. On pourra consulter l'ouvrage d'Arnol'd [**2**] pour explorer cette interprétation en plus de profondeur.

c) Surfaces munies d'une forme volume.

Sur une surface, toutes les formes de degré 2 sont fermées, et une forme est non-dégénérée si et seulement si elle ne s'annule pas. Une variété symplectique de dimension 2 est donc la même chose qu'une surface orientable munie d'une forme volume, et un symplectomorphisme est un difféomorphisme qui préserve le volume. La géométrie symplectique se confond donc avec la géométrie de volume dans le cas des surfaces.

d) Produits de variétés symplectiques.

Si (M, ω) et (N, η) sont des variétés symplectiques, alors la variété $M \times N$ admet (entre autres) la forme symplectique $\omega \oplus \eta = \pi_M^* \omega + \pi_N^* \eta$, où π_M et π_N sont les projections sur M et N, respectivement. Par exemple, les tores de dimension paire T^{2n} admettent des formes symplectiques.

Sur un fibré cotangent muni de la forme symplectique canonique, tout choix de coordonnées naturelles fournit une carte dans laquelle ω est identique à la forme standard sur $\mathbb{R}^{2n}$. Cela n'est pas un accident ; l'existence de telles coordonnées est une conséquence de la condition de fermeture $d\omega = 0$, comme l'affirme le théorème de Darboux.

Théorème 1.2.1 (Théorème de Darboux)**.** *Soit M une variété de dimension $2n$ munie d'une forme non-dégénérée ω de degré 2. Alors ω est fermée si et seulement s'il existe autour de chaque point de M des coordonnées locales $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ telles que la restriction de ω est donnée par $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$.*

La signification géométrique de la condition $d\omega = 0$ est donc qu'elle impose que les variétés symplectiques sont toutes localement identiques à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Il est clair que la fermeture de ω est une condition nécessaire à l'existence des cartes données par le théorème de Darboux. La démonstration que cette condition est aussi suffisante sera donnée à la section 1.4.

Ce ne sont pas toutes les variétés qui admettent des formes symplectiques. Par exemple, le théorème de classification des espaces vectoriels symplectiques implique que les variétés symplectiques sont de dimension paire. De plus, la non-dégénerescence de la forme symplectique ω est équivalente au fait que la forme $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (n facteurs) soit une forme volume. Une variété symplectique est donc toujours orientable. Une troisième obstruction à l'existence d'une forme symplectique est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.2.1. *Soit (M, ω) une variété symplectique compacte sans bord. Alors pour $1 \leq k \leq n$ les formes $\omega^k = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (k facteurs) sont fermées mais ne sont pas exactes. En particulier, $H^{2k}_{dR}(M) \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$.*

Démonstration. Pour montrer la fermeture de ω^k, on procède par induction et on utilise la règle de Leibniz $d(\omega^k) = d\omega \wedge \omega^{k-1} + \omega \wedge d(\omega^{k-1})$, le cas $k = 1$ étant vrai car ω est fermée. Pour montrer que ω^k n'est pas exacte, on suppose le contraire, c'est-à-dire que $\omega^k = d\beta$ pour une certaine forme $\beta \in \Omega^{2k-1}(M)$. Alors ω^n est elle aussi une forme exacte, car $d(\beta \wedge \omega^{n-k}) = d\beta \wedge \omega^{n-k} = \omega^n$. Par le théorème de Stokes, on aurait alors $\int_M \omega^n = 0$, ce qui est une contradiction car ω^n est une forme volume. $\square$

Cette proposition implique en particulier que les sphères de dimension plus grande que 2 n'admettent pas de formes symplectiques. Remarquons l'importance de l'hypothèse que M soit fermée dans la proposition précédente. Par exemple, les fibrés cotangents fournissent un exemple de variété dont la forme symplectique est exacte (de telles variétés sont appelées des variétés symplectiques exactes).

Comme nous l'avons observé précédemment, une variété symplectique (M, ω) possède des choix distingués de formes volumes, soit les multiples positifs de ω^n. On appelle $\mu = \omega^n/n!$ la *forme volume canonique* sur (M, ω). Ce choix de normalisation fait en sorte que la forme volume canonique de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ est la forme volume standard. Un difféomorphisme symplectique préserve en particulier la forme μ, donc $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(M, \mu)$, le groupe des difféomorphismes qui préservent μ. Nous explorerons plus en profondeur la relation entre ces deux groupes lors de notre discussion du théorème d'Eliashberg-Gromov à la section 3.1.

1.3. Dynamique hamiltonienne

On considère une variété symplectique (M, ω) ainsi que $H : M \times I \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, où I est un intervalle qui contient 0. On appellera une telle fonction une *fonction hamiltonienne* ou tout simplement un *hamiltonien.* L'interprétation physique est que M représente l'ensemble des états accessibles à un système physique, alors que la variable réelle, souvent notée t, représente le temps. La fonction H_t donnée par $H_t(x) = H(x,t)$ représente l'énergie du système au temps t. Dans la formulation hamiltonienne de la mécanique classique, l'énergie H détermine les équations du mouvement du système physique, qui décrivent comment l'état du système évolue dans le temps. Dans cette section, on montre qu'une forme symplectique permet d'associer à un hamiltonien une dynamique qui généralise la mécanique hamiltonienne.

1.3.1. Champs de vecteurs et isotopies

Commençons par rappeler quelques faits bien connus de la théorie des équations différentielles ordinaires. Nous allons nous intéresser principalement à des systèmes dynamiques sur une variété M qui sont donnés par un champ de vecteurs dépendant du temps, c'est-à-dire une application $X : M \times I \to TM$, que nous supposerons toujours lisse. Pour chaque $t \in I$ fixé, on note X_t le champ de vecteurs sur M donné par $X_t(x) = X(x,t)$. Le champ X donne lieu à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = X_t(\gamma(t)) \tag{1.3.1}$$

pour des courbes γ dans M. Pour x un point dans M, on appelle courbe intégrale (ou trajectoire) de X passant par x une solution de l'équation (1.3.1) qui satisfait $\gamma(0) = x$. Le théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires assure que pour chaque point $x \in M$, il existe une unique courbe intégrale maximale $\gamma_x : I_x \to M$ passant par x, où $I_x \subset I$ est un intervalle ouvert contenant 0. On dit que X est **complet** si toutes les courbes intégrales sont définies sur tout I. Cela est le cas en particulier si X est **à support compact**, où le support de X est par définition la fermeture de l'ensemble $\cup_{t\in I} \operatorname{supp} X_t$.

Si X est complet, pour chaque $t \in I$ on obtient une transformation de M en « suivant les trajectoires de X pour un temps t ». Plus précisément, pour chaque t on a un difféomorphisme $\varphi_t^X : M \to M$ donné par $\varphi_t^X(x) = \gamma_x(t)$, où γ_x est la courbe intégrale maximale passant par x. En mettant tous les difféomorphismes φ_t^X ensemble, on obtient une application $\varphi^X : M \times I \to M$, appelée **l'isotopie engendrée par** X. Rappelons que, par définition, une **isotopie** θ sur M est une application lisse $\theta : M \times I \to M$ qui satisfait

(1) $\theta_0 = \mathrm{id}_M$;

(2) Pour chaque $t \in I$, $\theta_t \in \mathrm{Diff}(M)$,

où pour $t \in I$ on note θ_t l'application $x \mapsto \theta(x,t)$. Une isotopie θ est toujours engendrée par un champ de vecteurs par la procédure décrite plus tôt. En effet, θ est engendrée par l'unique champ de vecteurs qui satisfait $\frac{d}{dt}\theta(x,t) = X_t(\theta(x,t))$, c'est-à-dire le champ donné par $X(x,t) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=t} \theta_s(\theta_t^{-1}(x))$.

Un champ de vecteurs qui ne dépend pas du temps est dit autonome. Dans ce cas, l'isotopie θ engendrée par X satisfait $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$ pour tous s et t, c'est-à-dire que l'application $t \mapsto \theta_t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{Diff}(M)$ est un morphisme de groupes. Pour mettre l'emphase sur cette propriété importante, on dira alors que θ est un **flot**.

1.3.2. Isotopies hamiltoniennes

La non-dégénérescence de la forme symplectique ω est équivalente à ce que l'application $\mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M)$ donnée par $X \mapsto \omega(X, \cdot)$ soit un isomorphisme.[1] Cela permet d'associer à toute fonction lisse $H : M \to \mathbb{R}$ l'unique champ de vecteur X correspondant à dH via cet isomorphisme. Ces constructions sont résumées dans la définition suivante.

Définition 1.3.1. Soit $H : M \times I \to \mathbb{R}$ un hamiltonien. L'unique champ de vecteur (dépendant du temps) X qui satisfait $i_{X_t}\omega = dH_t$ pour tout t est appelé le **champ de vecteur hamiltonien** de H. Lorsque X est complet, l'isotopie engendrée par X est appelée **l'isotopie hamiltonienne** engendrée par H.

Notation. Le champ de vecteur hamiltonien d'un hamiltonien H sera généralement noté X_H. L'isotopie hamiltonienne engendrée par un hamiltonien sera toujours notée par la lettre minuscule correspondante ; par exemple, l'isotopie engendrée par H est notée h. Pour tous les objets qui dépendent du temps, l'ajout d'un indice t (e.g. H_t, X_t, h_t) signifie qu'on considère l'application induite sur M au temps t.

Exemple 1.3.1. Sur $\mathbb{R}^{2n}$ avec coordonnées standard (q_i, p_i) et la forme standard $\omega_0 = \sum_i dq_i \wedge dp_i$, on vérifie aisément que le champ hamiltonien d'une fonction H est donné par

$$X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Une trajectoire $\gamma(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$ du champ hamiltonien est donc une solution du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.3.2}$$

1. On note par $\mathcal{X}(M)$ l'espace des champs de vecteurs lisses (autonomes) sur M.

Il s'agit des **équations d'Hamilton**, qui sont les équations fondamentales de la formulation hamiltonienne de la mécanique classique. Étant donné le théorème de Darboux, le flot hamiltonien sur une variété symplectique est toujours localement donné par les équations (1.3.2). Dans ce sens, la dynamique hamiltonienne sur une variété symplectique est une généralisation de la mécanique hamiltonienne.

Dans ce mémoire, on supposera toujours que les hamiltoniens considérés sont à *support compact*. Comme dans le cas des champs de vecteurs, on définit le **support** [2] d'une fonction $H : M \times I \to \mathbb{R}$ comme la fermeture de l'ensemble $\cup_t \operatorname{supp} H_t$. On dit que H est **à support compact** si son support est compact. Le champ hamiltonien d'un hamiltonien à support compact est lui-même à support compact et engendre donc une isotopie globalement définie.

Un hamiltonien H ne dépendant pas du temps sera dit **autonome** ; on l'identifie alors à une fonction sur M. Dans ce cas, l'isotopie h engendrée par H sera appelée le **flot hamiltonien** de H. Rappelons que dans ce cas on a $h_{t+s} = h_t h_s$ pour tous s et t. La dynamique des hamiltoniens autonomes est qualitativement beaucoup plus simple que celle des hamiltoniens dépendant du temps. Par exemple, les trajectoires d'un flot hamiltonien ne peuvent pas se croiser. Les propriétés d'un flot autonome sont aussi plus étroitement liées à celles de l'hamiltonien qui l'engendre que dans le cas non-autonome. Par exemple, une propriété importante est que H est préservée par son flot hamiltonien.

Proposition 1.3.1. *Soit h le flot hamiltonien engendré par un hamiltonien autonome H. Alors $H \circ h_t = H$ pour tout t, c'est-à-dire que H est constante le long des trajectoires du flot.*

Démonstration. La dérivée de H le long de son propre flot hamiltonien est donnée par :

$$\frac{d}{dt} H \circ h_t = h_t^*[dH(X_H)] = h_t^*[\omega(X_H, X_H)],$$

qui s'annule puisque ω est antisymétrique. On en déduit que pour tout t on a $H \circ h_t = H \circ h_0 = H$. □

En langage physique, cela signifie que *l'énergie est conservée* le long de l'évolution dans le temps. Géométriquement, cela signifie que les surfaces de niveau $\{H = c\}$ sont préservées par le flot de H. Une propriété essentielle des isotopies hamiltoniennes est qu'elles préservent la structure symplectique, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.3.2. *Soit h l'isotopie hamiltonienne engendrée par un hamiltonien H. Alors pour tout t, l'application h_t est un difféomorphisme symplectique.*

2. Notons que cette définition diffère de la notion usuelle de support pour une fonction $H : M \times I \to \mathbb{R}$.

Démonstration. On doit vérifier que $h_t^*\omega = \omega$ pour tout t. Puisque $h_0 = \mathrm{id}$, le résultat est évident pour $t = 0$. Puisque $\frac{d}{dt}h_t^*\omega = h_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega)$, où X est le champ hamiltonien de H, il suffit de vérifier que $\mathcal{L}_{X_t}\omega = 0$ pour tout t. Cela découle de la formule de Cartan et de la fermeture de ω :

$$\mathcal{L}_{X_t}\omega = d(\iota_{X_t}\omega) + \iota_{X_t}(d\omega) = d(dH_t) + \iota_{X_t}(d\omega) = 0.$$

On déduit que $h_t^*\omega$ est constant, c'est-à-dire que $h_t^*\omega = \omega$ pour tout t. □

Cette proposition fournit une première famille d'exemples de symplectomorphismes d'une variété symplectique, ce qui montre par ailleurs que le groupe $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ est très vaste. Les difféomorphismes obtenus de cette façon à partir d'une isotopie hamiltonienne sont appelés des *difféomorphismes hamiltoniens*. Ces difféomorphismes seront étudiés plus en profondeur au chapitre 2 de ce mémoire.

On aura souvent besoin de savoir comment un champ de vecteur hamiltonien se transforme sous l'action de symplectomorphismes, ce qui est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 1.3.3. *Soit (M, ω) et (N, η) des variétés symplectiques ainsi que $\phi : M \to N$ un symplectomorphisme. Alors pour toute fonction $H : N \to \mathbb{R}$ on a $X_{\phi^* H} = \phi^* X_H$.*

Démonstration. On doit montrer que $(d\,\phi^* H)(Z) = \omega(\phi^* X_H, Z)$ pour tout champ vectoriel Z. Il s'agit d'un calcul direct :

$$\begin{aligned}
(d\,\phi^* H)(Z) &= (\phi^* dH)(Z) \\
&= \phi^*[dH(\phi_* Z)] \\
&= \phi^*[\omega(X_H, \phi_* Z)] && \text{par définition de } X_H \\
&= (\phi^*\omega)(\phi^* X_H, Z) \\
&= \omega(\phi^* X_H, Z) && \text{car } \phi \text{ est symplectique.}
\end{aligned}$$

□

L'application qui associe à un hamiltonien H son champ de vecteurs hamiltonien n'est pas injective. En effet, puisque le champ hamiltonien dépend seulement des dérivées de H_t à t fixé, les hamiltoniens $H + C$, où C est une fonction dépendant seulement du temps, ont tous le même champ hamiltonien. Inversement, puisque M est connexe, deux hamiltoniens qui ont le même champ hamiltonien diffèrent nécessairement par une fonction qui dépend seulement du temps. Il est pratique de résoudre cette ambiguïté en imposant une condition de normalisation sur les hamiltoniens considérés.

Définition 1.3.2. Soit (M, ω) une variété symplectique et $H : M \times I \to \mathbb{R}$ un hamiltonien.

— Si M est fermée, H est dit **normalisé** si $\int_M H_t\, \omega^n = 0$ pour tout t.

— Si M est ouverte, H est dit **normalisé** si H est à support compact.

L'application qui envoie un hamiltonien normalisé vers son champ de vecteur hamiltonien est injective. Dans le cas fermé, c'est parce que la fonction nulle est la seule fonction constante d'intégrale nulle. Dans le cas ouvert, c'est parce que la fonction nulle est la seule fonction constante à support compact. Une isotopie étant uniquement déterminée par le champ de vecteur qui l'engendre, l'application qui associe à un hamiltonien normalisé son isotopie hamiltonienne est aussi injective.

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des hamiltoniens normalisés *autonomes* d'une variété symplectique. On a donc $\mathcal{H} = C_c^\infty(M)$ si M est une variété ouverte, alors que pour une variété fermée il s'agit de l'ensemble des fonctions d'intégrale nulle par rapport à ω^n. Cet ensemble jouera un rôle particulièrement important dans notre discussion des difféomorphismes hamiltoniens au chapitre 2.

1.4. Théorème de Darboux

Dans cette section nous démontrons le théorème de Darboux, selon lequel toute variété symplectique est localement isomorphe à l'espace standard $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Il s'agit d'une version locale du théorème de classification des espaces vectoriels symplectiques.

Théorème 1.4.1 (Théorème de Darboux)**.** *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Alors pour tout point $p \in M$ il existe une carte $\psi : U \to V$ autour de p telle que $\psi^* \omega_0 = \omega$.*

Les cartes sur M dont l'existence est prédite par le théorème de Darboux sont appelées des **cartes de Darboux** ou encore des **coordonnées canoniques**. La preuve du théorème de Darboux que nous présentons ici est basée sur un argument dû à Moser [**25**].

Preuve du théorème de Darboux. Soit ω une forme symplectique sur M et $p \in M$. Puisque le problème est local, en prenant une carte centrée en p on se ramène au cas où M est un ouvert V de $\mathbb{R}^{2n}$ et où $p = 0$. Par le théorème de classification des espaces vectoriels symplectiques, en composant cette carte avec un difféomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^{2n}$, on peut supposer que ω coïncide en 0 avec la forme standard ω_0. On doit alors montrer qu'il existe un voisinage (possiblement plus petit) de 0 et un difféomorphisme ψ de cet ouvert tel que $\psi^* \omega = \omega_0$.

La méthode de Moser consiste à s'attaquer à un problème qui est *a priori* encore plus difficile. On prétend qu'il est possible, quitte à prendre V assez petit, d'obtenir ω à partir de ω_0 par une *déformation continue*. Plus précisément, on cherche une famille de formes symplectiques ω_t joignant ω_0 à ω et une isotopie θ telle que $\theta_1 = \psi$ et $\theta_t^* \omega_t = \omega_0$ pour tout t. Un choix naturel est de considérer le segment de formes qui joint ω_0 et ω_1, c'est-à-dire $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega$, $0 \leq t \leq 1$. Les formes ω_t sont clairement fermées. Puisqu'elles coïncident avec ω_0 en 0, quitte à prendre V plus petit, on peut aussi supposer qu'elles sont toutes non-dégénérées. Les formes ω_t sont donc des formes symplectiques.

Pour trouver une isotopie comme ci-haut, on suppose d'abord que celle-ci existe et on en déduit les conditions qui doivent être satisfaites par le champ de vecteurs X qui l'engendre. En dérivant l'équation $\theta_t^* \omega_t = \omega_0$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\, \theta_t^* \omega_t &= \theta_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \omega_t + \frac{d}{dt} \omega_t \right) \\ &= \theta_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \omega_t + \omega - \omega_0 \right) \\ &= \theta_t^* \left(d(\iota_{X_t} \omega_t) + \omega - \omega_0 \right), \end{aligned}$$

où la dernière égalité suit de la formule de Cartan. Ce calcul montre que le champ X doit satisfaire $d(\iota_{X_t} \omega_t) = \omega_0 - \omega$ pour tout t. Puisque la forme $\omega_0 - \omega$ est fermée, le lemme de Poincaré garantit (quitte à prendre le voisinage V contractible) qu'il existe une forme α telle que $d\alpha = \omega_0 - \omega$ et $\alpha(0) = 0$. On cherche donc un champ X qui satisfait $\iota_{X_t} \omega_t = \alpha$ pour tout t. Or, cette équation peut être résolue en vertu de la non-dégénérescence des formes ω_t. On rebrousse donc chemin et on *définit* X comme étant l'unique champ qui satisfait $\iota_{X_t} \omega_t = \alpha$ pour tout t.

On ne peut garantir *a priori* que le champ X engendre une isotopie globale. Cependant, le fait que $\alpha(0) = 0$ entraîne que $X_t(0) = 0$ pour tout t, donc que la courbe intégrale en 0 est définie pour tout temps. Puisque le temps d'existence des courbes intégrales est une fonction qui est semi-continue inférieurement (voir par exemple la proposition 4.1.24 de [**1**]), il doit exister un voisinage de 0 tel que toutes les courbes intégrales sur ce voisinage sont définies au moins sur $[0, 1]$. En intégrant le champ de vecteurs, on obtient donc une famille de plongements $\theta_t : V \to \mathbb{R}^{2n}$, avec $t \in [0, 1]$, qui satisfont $\theta_0 = \mathrm{id}$ et $\theta_t(0) = 0$ pour tout t. Par continuité, on peut trouver un voisinage $U \subset V$ tel que $\theta_t(U) \subset V$ pour tout t. Par construction du champ de vecteur X, on a alors $\theta_t^* \omega_t = \omega_0$ pour tout t. En particulier, on a ainsi obtenu un difféomorphisme $\theta_1 : U \to \theta_1(U)$ tel que $\theta_1^* \omega = \omega_0$. □

Une conséquence du théorème de Darboux est que les variétés symplectiques n'ont pas d'invariants locaux outre la dimension ; deux variétés symplectiques de même dimension ne peuvent pas être distinguées localement. Le problème de décider si deux variétés symplectiques difféomorphes sont symplectomorphes est donc généralement très difficile. Pour distinguer les variétés symplectiques entre elles, on doit se mettre à la recherche d'invariants *globaux* des variétés symplectiques. L'absence de structure locale se reflète aussi dans le fait que les variétés symplectiques ont un groupe de symétries très grand (i.e. de dimension infinie).

Pour terminer cette section on donne une seconde application de la méthode de Moser, qui permet en particulier de classifier les variétés symplectiques fermées de dimension 2.

Théorème 1.4.2. *Soit M une variété fermée orientable ainsi que μ et ν des formes volumes sur M. Alors il existe une difféomorphisme $\phi : M \to M$ tel que $\phi^*\nu = \mu$ si et seulement si $\int_M \mu = \int_M \nu$.*

Le volume *total* est donc le seul invariant géométrique des variétés munies d'une forme volume. Comme une forme symplectique n'est rien d'autre qu'une forme volume en dimension 2, cela montre que les surfaces symplectiques fermées sont entièrement classifiées à symplectomorphisme près par leur topologie (i.e. leur genre) ainsi que leur volume total.

Démonstration. La condition que $\int_M \mu = \int_M \nu$ est clairement nécessaire ; on montre qu'elle est aussi suffisante. Comme dans la preuve du théorème de Darboux, on considère la famille de formes volumes $\sigma_t = (1-t)\mu + t\nu$, $t \in [0,1]$. Puisque μ et ν ont le même volume, celles-ci représentent la même classe de cohomologie. On a donc $[\sigma_t] = (1-t)[\mu] + t[\nu] = [\mu]$ pour tout t. Puisque les formes σ_t sont cohomologues, la forme $\frac{d}{dt}\sigma_t$ est exacte pour tout t. Il existe donc une famille lisse[3] de formes α_t telle que $\frac{d}{dt}\sigma_t = d\alpha_t$. On cherche une isotopie θ telle que $\theta_t^*\sigma_t = \mu$ pour tout t. Par le même argument que précédemment, le champ X qui génère θ doit alors satisfaire $d(\iota_{X_t}\sigma_t) = -\frac{d}{dt}\sigma_t = -d\alpha_t$. Puisque les σ_t sont des formes volumes, on peut définir X comme l'unique champ qui satisfait $\iota_{X_t}\sigma_t = -\alpha_t$. Puisque M est fermée, X génère une isotopie globale θ. Par construction, on a alors $\theta_t^*\sigma_t = \mu$ pour tout t, et en particulier $\theta_1^*\nu = \mu$. $\square$

3. On doit faire preuve de soin pour montrer que le choix des formes α_t peut être fait de manière lisse. Voir le théorème 3.17 de [**23**] pour une esquisse de preuve.

1.5. Crochet de Poisson

Nous introduisons dans cette section l'objet qui sera au coeur de ce mémoire : le crochet de Poisson sur une variété symplectique. Dans cette section, on considère seulement des hamiltoniens autonomes.

Définition 1.5.1. Soit (M, ω) une variété symplectique et $F, G \in C^\infty(M)$ des fonctions sur M. Alors le **crochet de Poisson** de F et G est la fonction $\{F, G\}$ donnée par

$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G).$$

Exemple 1.5.1. En reprenant l'exemple 1.3.1, sur $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ le crochet de Poisson de deux fonctions F et G est donné par

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

Comme on s'y attend, on retrouve l'expression classique que nous avons présentée dans l'introduction.

Par définition du champ de vecteur hamiltonien, le crochet de Poisson de deux fonctions est donné par $\{F, G\} = dF(X_G) = -dG(X_F)$. Le crochet de Poisson est donc (à un signe près) la dérivée de chaque fonction dans la direction du champ hamiltonien de l'autre. En particulier, $\{F, G\} = 0$ implique que F est constante le long du flot hamiltonien de G, et inversement. Plus généralement, on a la relation suivante entre le crochet de Poisson de deux fonctions et leurs champs de vecteurs hamiltoniens.

Proposition 1.5.1. *Soit F et G des fonctions sur M. Alors le champ hamiltonien de $\{F, G\}$ est $-[X_F, X_G]$.*

Démonstration. On doit vérifier que $i_{[X_G, X_F]}\omega = d\{F, G\}$. En utilisant l'identité $\iota_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \iota_Y]$ pour des champs de vecteurs X et Y, on trouve

$$\iota_{[X_G, X_F]}\omega = \mathcal{L}_{X_G}\iota_{X_F}\omega - \iota_{X_F}\mathcal{L}_{X_G}\omega.$$

X_G étant un champ hamiltonien, on a $\mathcal{L}_{X_G}\omega = 0$ (proposition 1.3.2). On obtient donc

$$i_{[X_G, X_F]}\omega = \mathcal{L}_{X_G}\iota_{X_F}\omega = \mathcal{L}_{X_G} dF = d(\mathcal{L}_{X_G} F) = d\{F, G\}.$$

$\square$

C'est un fait bien connu de géométrie différentielle que deux champs de vecteurs autonomes complets X et Y commutent si et seulement si leurs flots ϕ et ψ commutent, c'est-à-dire que $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t$ pour tous s et t. On peut donc déduire le corollaire suivant de la proposition précédente.

Corollaire 1.5.1. *Soit F et G des fonctions à support compact sur M, dont les flots hamiltoniens sont f et g respectivement. Alors $\{F, G\} = 0$ si et seulement si les flots hamiltoniens de F et G commutent, c'est-à-dire que $f_t \circ g_s = g_s \circ f_t$ pour tous t et s.*

On montre maintenant les propriétés algébriques essentielles satisfaites par le crochet de Poisson.

Proposition 1.5.2. *Le crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ est une application bilinéaire. De plus, pour toutes fonctions F, G et H sur M, on a*

(1) $\{F, G\} = -\{G, F\}$ *;*

(2) $\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0$ *;*

(3) $\{F, GH\} = \{F, G\} H + G \{F, H\}$.

Démonstration. La bilinéarité et la propriété (1) sont des conséquences directes de la bilinéarité et l'antisymétrie de ω. Pour montrer la propriété (3), on exprime le membre de droite en termes des dérivées de H seulement et on utilise la proposition précédente :

$$\begin{aligned}\{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} &= X_F X_G H + X_{\{F,G\}} H - X_G X_F H \\ &= X_F X_G H - [X_F, X_G] H - X_G X_F H \\ &= 0.\end{aligned}$$

La propriété (4) suit directement de la règle de Leibniz pour les champs de vecteurs :

$$\{F, GH\} = X_F(GH) = H\, X_F(G) + G\, X_F(H) = H \{F, G\} + G \{F, H\}.$$

□

Ces propriétés motivent l'introduction des notions d'algèbre de Poisson et de variété de Poisson, qui sont des généralisations du crochet de Poisson d'une variété symplectique.

Définition 1.5.2. Une **algèbre de Poisson** sur un corps k est une k-algèbre associative A munie d'un produit bilinéaire $\{\cdot, \cdot\} : A \times A \to A$ qui satisfait les conditions suivantes :

(1) $\{x, x\} = 0$ pour tout $x \in A$;

(2) (Identité de Jacobi) $\{x, \{y, z\}\} + \{z, \{x, y\}\} + \{y, \{z, x\}\} = 0$ pour tous $x, y, z \in A$;

(3) (Règle de Leibniz) $\{x, yz\} = \{x, y\} z + y \{x, z\}$ pour tous $x, y, z \in A$.

On appelle $\{\cdot,\cdot\}$ le **crochet de Poisson** de A.

Notons que les propriétés (1) et (2) de la définition signifient que A munie du crochet $\{\cdot,\cdot\}$ est une algèbre de Lie. La propriété (3) signifie que pour $x \in A$ fixé, l'application $\{x,\cdot\} : A \to A$ est une dérivation de A, vue comme algèbre associative.

Définition 1.5.3. Une **variété de Poisson** est une variété M munie d'un crochet de Poisson sur l'algèbre des fonctions lisses $C^\infty(M)$.

Au vu des définitions précédentes, la proposition 1.5.2 exprime le fait que le crochet de Poisson $\{F,G\} = \omega(X_F, X_G)$ sur une variété symplectique munit effectivement l'algèbre $C^\infty(M)$ d'une structure d'algèbre de Poisson. Une variété symplectique est donc naturellement une variété de Poisson, bien qu'il s'agisse d'un exemple très spécial. L'étude des variétés de Poisson en général, que nous n'aborderons pas dans ce mémoire, est appellée la *géométrie de Poisson*.

L'algèbre de Poisson est un objet très important dans l'étude des variétés symplectiques. La plupart des définitions et des constructions de base en géométrie symplectique peuvent être formulées en faisant seulement référence au crochet de Poisson. Par exemple, le crochet de Poisson caractérise la propriété d'être un difféomorphisme symplectique.

Proposition 1.5.3. *Soit (M,ω) et (N,η) des variétés symplectiques ainsi que $\phi : M \to N$ un difféomorphisme. Alors ϕ est symplectique si et seulement s'il préserve le crochet de Poisson, c'est-à-dire que*

$$\phi^* \{F,G\} = \{\phi^* F, \phi^* G\}$$

pour toutes fonctions F,$G \in C^\infty(N)$.

Démonstration. Si ϕ est symplectique, alors

$$\begin{aligned} \phi^* \{F,G\} &= \phi^*(\eta(X_F, X_G)) \\ &= (\phi^*\eta)(\phi^* X_F, \phi^* X_G) \\ &= \omega(\phi^* X_F, \phi^* X_G) \\ &= \omega(X_{\phi^* F}, X_{\phi^* G}) && \text{par la proposition 1.3.3} \\ &= \{\phi^* F, \phi^* G\}. \end{aligned}$$

Inversement, supposons que ϕ préserve le crochet de Poisson. Notons qu'il en découle que ϕ^{-1} préserve aussi le crochet de Poisson. Soit $p \in M$ et Y,$Z \in T_pM$. On montre d'abord qu'il existe des fonctions F et G sur M telles que $X_F(p) = Y$ et $X_G(p) = Z$. En effet, en choisissant des coordonnées x_i autour de p, l'unique covecteur $\alpha \in T_p^* M$ qui satisfait $\alpha = \iota_Y \omega$ s'écrit $\alpha = \sum a_i dx_i$. Alors, la fonction définie localement par $F(x) = \sum a_i x_i$ et étendue à tout M par une fonction plateau valant 1 près de p satisfait $X_F(p) = Y$. Le même argument montre qu'il existe une fonction G avec $X_G(p) = Z$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(\phi^*\eta)_p(Y,Z) &= \eta_{\phi(p)}(\phi_* Y, \phi_* Z) \\
&= \eta_{\phi(p)}(\phi_* X_F, \phi_* X_G) \\
&= \eta_{\phi(p)}(X_{(\phi^{-1})^* F}, X_{(\phi^{-1})^* G}) && \text{par la proposition 1.3.3} \\
&= \left\{(\phi^{-1})^* F, (\phi^{-1})^* G\right\}(\phi(p)) \\
&= (\phi^{-1})^* \{F,G\}(\phi(p)) && \text{car } \phi^{-1} \text{ préserve le crochet} \\
&= \{F,G\}(p) \\
&= \omega_p(X_F, X_G) \\
&= \omega_p(Y,Z).
\end{aligned}$$

Y et Z et le point p étant arbitraires, on a montré que $\phi^*\eta = \omega$, c'est-à-dire que ϕ est symplectique. □

Cette proposition implique que deux variétés symplectiques sont isomorphes si et seulement si elles sont isomorphes en tant que variétés de Poisson (ce qui est *a priori* moins fort). En fait, la structure d'algèbre de Lie sur $C^\infty(M)$ est à elle seule suffisante pour déterminer une variété symplectique à équivalence conforme près. [4]

Théorème 1.5.1 ([**3**, théorème 8.10])**.** *Soit (M,ω) et (N,η) des variétés symplectiques connexes. Supposons qu'il existe un isomorphisme* d'algèbres de Lie $L : (C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\}_M) \to (C^\infty(N), \{\cdot,\cdot\}_N)$. *Alors il existe un difféomorphisme $\phi : N \to M$ et un réel c non-nul tels que $\phi^*\omega = c\,\eta$.*

On pourra consulter l'article [**3**] de C. J. Atkin et J. Grabowski pour une preuve de ce théorème. L'espace $C^\infty(M)$ muni du crochet de Poisson capture donc l'essentiel de la structure symplectique d'une variété, ce qui témoigne de l'importance de cet objet.

On termine cette section (et ce chapitre) par un calcul important, qui montre en particulier que le crochet de Poisson de deux fonctions est toujours de moyenne nulle.

Proposition 1.5.4. *Soit F et G des fonctions lisses sur (M,ω). Alors*

$$\{F,G\}\,\omega^n = n\, dF \wedge dG \wedge \omega^{n-1} \tag{1.5.1}$$

En particulier, $\int_M \{F,G\}\,\omega^n = 0$ si F ou G est à support compact.

4. On dit que deux variétés symplectiques (M,ω) et (N,η) sont *conformément équivalentes* s'il existe un difféomorphisme $\phi : M \to N$ et un réel non-nul c tels que $\phi^*\eta = c\omega$.

Démonstration. Remarquons d'abord que pour toute fonction H, $i_{X_H}\omega^k = k\,dH \wedge \omega^{k-1}$. En effet, le cas $k = 1$ est vrai par définition du champ hamiltonien et, en raisonnant par induction, on a pour $k > 1$:

$$\begin{aligned} i_{X_H}\omega^k &= i_{X_H}(\omega \wedge \omega^{k-1}) \\ &= (i_{X_H}\omega) \wedge \omega^{k-1} + \omega \wedge (i_{X_H}\omega^{k-1}) \\ &= dH \wedge \omega^{k-1} + \omega \wedge ((k-1)dH \wedge \omega^{k-2}) \\ &= k\,dH \wedge \omega^{k-1}. \end{aligned}$$

Il suit donc que

$$\begin{aligned} n\,dF \wedge dG \wedge \omega^{n-1} &= (i_{X_F}\omega) \wedge (i_{X_G}\omega^n) \\ &= -i_{X_G}\underbrace{((i_{X_F}\omega) \wedge \omega^n)}_{=0} + (i_{X_G}i_{X_F}\omega) \wedge \omega^n \\ &= \omega(X_F, X_G)\,\omega^n \\ &= \{F, G\}\,\omega^n. \end{aligned}$$

On a donc montré la formule (1.5.1). Puisque $dF \wedge dG \wedge \omega^{n-1} = d(F\,dG \wedge \omega^{n-1})$, la seconde conclusion suit directement du théorème de Stokes (dans le cas où M est ouverte, on applique le théorème de Stokes à un ouvert qui contient le support de F et on remarque que F est nulle sur le bord de cet ouvert). $\square$

Cette proposition implique que $\{F, G\}$ est normalisé si F ou G est à support compact. En particulier, $\mathcal{H}$ est un idéal de l'algèbre de Lie $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$.

Chapitre 2

DIFFÉOMORPHISMES HAMILTONIENS ET GÉOMÉTRIE D'HOFER

Ce chapitre est dédié à l'étude des difféomorphismes hamiltoniens, qui sont les transformations d'une variété symplectique pouvant être obtenues à partir d'un hamiltonien en solutionnant les équations d'Hamilton. L'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens de (M, ω), noté $\mathrm{Ham}(M, \omega)$, forme un sous-groupe normal de $\mathrm{Symp}(M, \omega)$. Un propriété exceptionnelle du groupe $\mathrm{Ham}(M, \omega)$, découverte par Hofer [**18**], est que celui-ci peut être vu comme un objet géométrique en soi. Plus précisément, ce groupe possède des métriques bi-invariantes qui sont intimement reliées aux propriétés dynamiques des isotopies hamiltoniennes. L'existence de cette géométrie a des conséquences profondes en topologie symplectique. En particulier, il s'agit de l'outil qui nous permettra au chapitre 3 de démontrer le théorème principal de ce mémoire, soit la rigidité C^0 du crochet de Poisson.

Une référence standard pour le matériel de ce chapitre est le livre de Polterovich [**29**]. On pourra aussi consulter l'ouvrage d'Hofer et Zehnder [**19**], qui donne un traitement exhaustif de la théorie sur $\mathbb{R}^{2n}$.

2.1. Difféomorphismes hamiltoniens

Soit $H : M \times I \to \mathbb{R}$ un hamiltonien normalisé. On a vu au chapitre précédent que H engendre une isotopie hamiltonienne h et que pour chaque t fixé le difféomorphisme h_t est symplectique (proposition 1.3.2). Les difféomorphismes obtenus de cette façon sont appelés des *difféomorphismes hamiltoniens*.

Définition 2.1.1. Soit (M, ω) une variété symplectique. Un difféomorphisme $\phi : M \to M$ est appelé un **difféomorphisme hamiltonien** s'il existe une isotopie $h : M \times [0, 1] \to M$ engendrée par un hamiltonien normalisé telle que $\phi = h_1$. On note $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ l'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens de (M, ω), ou tout simplement Ham lorsque cela ne cause pas de confusion.

On dira que ϕ est le **difféomorphisme hamiltonien engendré par** h lorsque $\phi = h_1$. Rappelons que l'isotopie h est engendrée par un *unique* hamiltonien normalisé ; on dira alors que H engendre ϕ, ce qu'on notera $H \mapsto \phi$. Une observation importante est qu'il existe de nombreuses isotopies qui engendrent un difféomorphisme hamiltonien donné.

Notons que la définition précédente impose que les difféomorphismes hamiltoniens que nous considérons sont à support compact, c'est-à-dire qu'ils coïncident avec l'identité en dehors d'un compact contenu dans M.

Nous avons définis les difféomorphismes hamiltoniens comme les applications au temps 1 d'isotopies paramétrées par l'intervalle $[0,1]$. En fait, si $f : M \times I \to M$ est une isotopie hamiltonienne quelconque, alors tous les difféomorphismes f_t sont hamiltoniens ; cela est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Soit $f : M \times I \to M$ l'isotopie hamiltonienne engendrée par un hamiltonien normalisé F, et soit $r : I' \to I$ une fonction lisse telle que $r(0) = 0$. Alors l'isotopie $g : M \times I' \to M$ donnée par $g_t = f_{r(t)}$ est engendrée par l'hamiltonien normalisé $r'(t)F(x, r(t))$.*

Démonstration. Pour $x \in M$ fixé, le champ tangent à la courbe $t \mapsto f_{r(t)}x$ est donné par

$$\frac{d}{dt} f_{r(t)}x = r'(t)\ X_{F_{r(t)}}(f_{r(t)}x).$$

Donc l'isotopie $t \mapsto f_{r(t)}$ est engendrée par le champ de vecteurs $r'(t)X_{F_{r(t)}}$ qui, par linéarité, est le champ hamiltonien de l'hamiltonien $r'(t)F_{r(t)}$. □

Soit $f : M \times I \to M$ et $g : M \times I' \to M$ des isotopies. On dit que g est une **reparamétrisation** de f s'il existe une fonction lisse croissante $r : I \to I'$ telle que $g_t = f_{r(t)}$. La proposition précédente assure que les reparamétrisations d'isotopies hamiltoniennes sont hamiltoniennes. En particulier, on peut toujours reparamétrer une isotopie hamiltonienne pour qu'elle soit définie sur $M \times [0,1]$, ce qu'on va toujours supposer pour la suite.

Rappelons que les isotopies hamiltoniennes préservent la forme symplectique (proposition 1.3.2), donc que $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ est un sous-ensemble de $\mathrm{Symp}(M,\omega)$. Le premier fait essentiel est que $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ est en fait un sous-groupe de $\mathrm{Symp}(M,\omega)$. Cela est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 2.1.2. *Soit f et g les isotopies hamiltoniennes engendrées par les hamiltoniens normalisés F et G. Alors*

(1) l'isotopie $t \mapsto f_t \circ g_t$ est engendrée par l'hamiltonien normalisé $F\#G$ défini par

$$(F\#G)(x,t) := F_t(x) + G_t(f_t^{-1}x);$$

(2) l'isotopie $t \mapsto f_t^{-1}$ est engendrée par l'hamiltonien normalisé $\overline{F}$ défini par

$$\overline{F}(x,t) := -F_t(f_t x).$$

Démonstration. Soit l'isotopie $h_t = f_t \circ g_t$. Alors pour $x \in M$, le champ tangent à la courbe $t \mapsto h_t x$ est :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} h_t x &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} f_t(g_s x) + (f_s)_* \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} g_t x \right) \\
&= X_{F_s}(f_s g_s x) + (f_s)_* \left(X_{G_s}(g_s x)\right) \\
&= X_{F_s}(f_s g_s x) + X_{G_s \circ f_s^{-1}}(f_s g_s x) \qquad \text{proposition 1.3.3} \\
&= X_{F_s + G_s \circ f_s^{-1}}(f_s g_s x).
\end{aligned}$$

On conclut que l'isotopie h est engendrée par l'hamiltonien $F_t + G_t \circ f_t^{-1}$, ce qui montre (1).

En particulier, en prenant $G(x,t) = \overline{F}(x,t) = -F_t(f_t x)$, on a $F \# G \equiv 0$. Donc par (1) l'isotopie g engendrée par G satisfait $f_t \circ g_t = \mathrm{id}$ pour tout t, c'est-à-dire que $g_t = f_t^{-1}$. Donc $\overline{F}$ engendre l'isotopie f_t^{-1}, ce qui montre (2).

Il est clair que les hamiltoniens $F \# G$ et $\overline{F}$ sont normalisés si F et G le sont. Dans le cas ouvert, c'est une conséquence directe du fait que F et G sont à support compact. Dans le cas fermé, cela suit du fait que les difféomorphismes hamiltoniens préservent le volume, donc $F \# G$ et $\overline{F}$ sont aussi d'intégrale nulle si F et G le sont. □

On déduit aisément de la proposition précédente que $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ est un groupe. En effet, soit $\phi, \psi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ et f, g des isotopies hamiltoniennes qui engendrent ϕ et ψ, respectivement. Par la proposition, l'isotopie $h_t = f_t \circ g_t$ est hamiltonienne et engendre $\phi \circ \psi$, donc le produit $\phi \circ \psi$ est dans $\mathrm{Ham}(M,\omega)$. De même, l'isotopie f_t^{-1} est hamiltonienne et engendre ϕ^{-1}, donc $\phi^{-1} \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$. On a donc montré que $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Symp}(M,\omega)$. Pour simplifier la notation, le produit dans Ham sera dorénavant noté par la juxtaposition, i.e. $\phi\psi := \phi \circ \psi$.

Proposition 2.1.3. $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ *est un sous-groupe normal de* $\mathrm{Symp}(M,\omega)$.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ et une isotopie hamiltonienne $F \mapsto f$ qui engendre ϕ. Soit $\psi \in \mathrm{Symp}(M,\omega)$. On doit montrer que $\psi\phi\psi^{-1} \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$. L'isotopie donnée par $g_t = \psi \circ f_t \circ \psi^{-1}$ engendre $\psi\phi\psi^{-1}$. On montre que g est une isotopie hamiltonienne engendrée par l'hamiltonien $F_t \circ \psi^{-1}$. En effet, en répétant l'argument de la proposition 2.1.2, on a pour tout $x \in M$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \psi \circ f_t \circ \psi^{-1}(x) &= \psi_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} f_t \circ \psi^{-1}(x) \right) \\ &= \psi_* \left(X_{F_s}(f_s \circ \psi^{-1}(x)) \right) \\ &= (\psi_* X_{F_s})(\psi \circ f_s \circ \psi^{-1}(x)) \\ &= X_{F_s \circ \psi^{-1}}(\psi \circ f_s \circ \psi^{-1}(x)) \quad \text{par la proposition 1.3.3.}\end{aligned}$$

On conclut que l'hamiltonien $F_t \circ \psi^{-1}$ engendre l'isotopie $t \mapsto \psi \circ f_t \circ \psi^{-1}$ et donc que $\psi\phi\psi^{-1} \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$. $\square$

Rappelons qu'un groupe G est dit **simple** si ses seuls sous-groupes normaux sont G et le sous-groupe trivial. Le théorème fondamental qui suit est dû à Banyaga [**4**].

Théorème 2.1.1. *Soit* (M, ω) *une variété symplectique fermée. Alors* $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ *est un groupe simple.*

Ce théorème a la conséquence puissante suivante : pour montrer qu'une propriété invariante par conjugaison est vraie pour *tous* les difféomorphismes hamiltoniens, il suffira de montrer qu'elle est satisfaite par au moins un élément non-trivial.

Une question qui apparaîtra en filigrane dans les sections qui suivent est la suivante : qu'est-il possible ou non de faire avec un difféomorphisme hamiltonien ? Après tout, les difféomorphismes hamiltoniens sont des transformations très spéciales en raison de leur lien avec la structure symplectique, ce qui leur confère une certaine forme de rigidité. Néanmoins, puisque les difféomorphismes hamiltoniens sont déterminés par des fonctions, ils héritent d'une partie de leur souplesse. Pour clore cette section, on démontre un premier résultat qui illustre cette souplesse, à savoir que l'action du groupe Ham sur (M, ω) est k-transitive. [1]

Proposition 2.1.4. *Soit* (M, ω) *une variété symplectique connexe. Alors pour toute paire de points distincts* x *et* y *de* M *et tout ouvert connexe* U *contenant* x *et* y*, il existe un difféomorphisme hamiltonien* ϕ *à support dans* U *tel que* $\phi(x) = y$*. En particulier, l'action de* $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ *sur* M *est* k*-transitive pour tout* $k \geq 1$*.*

Démonstration. Cette preuve provient de Boothby [**6**] ; voir aussi la section 4.2 de l'ouvrage de Banyaga [**5**].

1. Rappelons qu'une action d'un groupe G est dite k-transitive pour un certain $k \geq 1$ si pour tous ensembles de k points $\{x_1, \ldots, x_k\}$ et $\{y_1, \ldots, y_k\}$, il existe un $g \in G$ tel que $gx_i = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

Supposons d'abord que x et y sont inclus dans une carte de Darboux (U, ψ). Quitte à composer avec une translation et une rotation, on peut supposer que $\psi(x) = 0$ et $\psi(y) = (a, 0, \ldots, 0)$. Alors la translation T qui envoie $\psi(x)$ sur $\psi(y)$ est engendrée par l'hamiltonien $F = aq_1$. Soit ρ une fonction plateau à support compact dans $\psi(U)$ et valant 1 sur un ouvert connexe V contenant $\psi(x)$ et $\psi(y)$. On définit sur M l'hamiltonien $H = (\rho F) \circ \psi$, étendu par 0 en dehors de U. Alors le difféomorphisme hamiltonien ϕ engendré par H est à support dans U et coïncide sur $\psi^{-1}(V)$ avec $\psi^{-1} \circ T \circ \psi$, donc $\phi(x) = y$.

Dans le cas général, soit x et y une paire de points distincts de M et U un voisinage connexe de x et y. Soit $\gamma : [0, 1] \to U$ une courbe plongée joignant x à y. On peut choisir une partition finie $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ de l'intervalle $[0, 1]$ de sorte que l'image de chaque sous-intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ soit contenue dans une carte de Darboux. Par la construction précédente, pour chaque i entre 0 et $N-1$ on obtient un difféomorphisme hamiltonien ϕ_i qui envoie $\gamma(t_i)$ sur $\gamma(t_{i+1})$ et qui est supporté dans un petit voisinage de $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$. Alors le difféomorphisme hamiltonien $\phi = \phi_{N-1} \cdots \phi_1 \phi_0$ envoie x sur y et est à support dans U.

On montre maintenant la k-transitivité. Soit $\{x_1, \ldots, x_k\}$ et $\{y_1, \ldots, y_k\}$ deux ensembles de k points distincts. On peut choisir des ouverts connexes disjoints $U_1, \ldots, U_k$ tels que $x_i, y_i \in U_i$ pour tout i. Par la construction précédente il existe des difféomorphismes hamiltoniens $\phi_1, \ldots, \phi_k$ tels que ϕ_i est à support dans U_i et $\phi_i(x_i) = y_i$. Puisque les supports des ϕ_i sont disjoints, le difféomorphisme $\phi = \phi_k \cdots \phi_2 \phi_1$ est tel que désiré. □

2.2. Distance d'Hofer

Dans cette section, nous introduisons une notion de distance sur le groupe Ham. Soit ϕ un difféomorphisme hamiltonien d'une variété symplectique. ϕ est engendré par de nombreuses isotopies hamiltoniennes ; chacune de ces isotopies peut être vue comme un chemin dans Ham reliant l'identité à ϕ. Pour définir la distance entre ϕ l'identité, nous allons associer à chaque isotopie une longueur. La distance entre ϕ et l'identité sera alors la longueur du plus court chemin qui les joint.

Pour définir la longueur d'une isotopie hamiltonienne, on s'inspire de la *géométrie de Finsler*. Rappelons qu'une *métrique de Finsler* sur une variété M est un choix lisse de normes $\|\cdot\|_x$ sur chaque espace tangent T_xM. Il s'agit d'une généralisation de la notion de métrique riemanienne au cas de normes qui ne proviennent pas nécessairement d'un produit scalaire. Comme dans le cas riemannien, cette structure permet de définir la longueur d'une courbe $\alpha : I \to M$ par

$$\ell(\alpha) = \int_I \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)}\, dt.$$

On peut alors définir la distance entre deux points comme l'infimum de la longueur des courbes qui les joignent.

Rappelons qu'une isotopie hamiltonienne h est générée par un unique hamiltonien normalisé H. En s'inspirant de la géométrie de Finsler, on interprète l'hamiltonien H_t comme le « vecteur tangent » à l'isotopie h au temps t. [2] Puisque H est normalisé, on a $H_t \in \mathcal{H}$ pour chaque t. En choisissant une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace des hamiltoniens normalisés autonomes $\mathcal{H}$, on peut alors définir la **longueur d'une isotopie hamiltonienne** $h : M \times I \to M$ par

$$\ell(h) = \int_I \|H_t\| \ dt \tag{2.2.1}$$

où H est l'unique hamiltonien normalisé qui engendre h. En reprenant l'interprétation physique d'un hamiltonien comme représentant « l'énergie » d'un système physique, la longueur d'une isotopie est donc une mesure de la moyenne dans le temps de l'énergie nécessaire pour la générer, telle que mesurée par la norme $\|\cdot\|$.

Remarquons que la longueur d'une isotopie est invariante sous les reparamétrisations. Plus précisément, soit $f : M \times I \to M$ et $g : M \times I' \to M$ des isotopies hamiltoniennes telles qu'il existe une reparamétrisation $r : I' \to I$ telle que $g_t = f_{r(t)}$. Alors les isotopies f et g ont la même longueur. En effet, par la proposition 2.1.1, l'isotopie $t \mapsto f_{r(t)}$ est engendrée par l'hamiltonien normalisé $r'(t)F_{r(t)}$, où F est l'hamiltonien normalisé qui engendre f. On a alors

$$\ell(g) = \int_{I'} \left\|r'(t)F_{r(t)}\right\| dt = \int_{I'} |r'(t)| \left\|F_{r(t)}\right\| dt = \int_I \|F_t\|\, dt = \ell(f).$$

Dans ce qui suit, on s'intéressera aux normes sur $\mathcal{H}$ qui sont **invariantes** par rapport à l'action de Ham, c'est-à-dire qui satisfont $\|H \circ \phi\| = \|H\|$ pour tous $\phi \in$ Ham et pour toutes fonctions $H \in \mathcal{H}$. La norme invariante qui va principalement nous intéresser est la **norme** C^0

$$\|F\|_\infty := \sup_{x \in M} |F(x)|.$$

D'autres exemples de normes invariantes sont les **normes** L^p

$$\|F\|_p := \left(\int_M |F|^p \ \mu \right)^{1/p},$$

2. Cette analogie peut être rendue rigoureuse en interprétant le groupe Ham comme une variété de Fréchet de dimension infinie, dont l'algèbre de Lie s'identifie à $\mathcal{H}$. Le crochet de Lie est alors donné par le crochet de Poisson. On pourra par exemple consulter les ouvrages de Banyaga [**5**] et Polterovich [**29**] pour les détails.

où μ est le volume symplectique et $p \geq 1$. Remarquons que la norme C^0 est en fait invariante sous tous les difféomorphismes et que les normes L^p sont invariantes sous le groupe des difféomorphismes qui préservent μ.

Ayant défini la longueur d'une isotopie hamiltonienne, on définit **l'énergie** $\rho(\phi)$ d'un difféomorphisme hamiltonien ϕ comme

$$\rho(\phi) = \inf_{h \mapsto \phi} \ell(h) \tag{2.2.2}$$

où l'infimum est pris sur toutes les isotopies $h : M \times [0,1] \to M$ qui engendrent ϕ, c'est-à-dire telles que $h_1 = \phi$. L'énergie d'un difféomorphime hamiltonien est donc l'énergie nécessaire pour l'engendrer si on le fait le plus efficacement possible.

On définit alors la **distance** entre deux difféomorphismes hamiltoniens ϕ et ψ comme $d(\phi, \psi) = \rho(\phi\psi^{-1})$. Avec cette définition, remarquons que l'énergie d'un difféomorphisme hamiltonien est tout simplement sa distance à l'identité. Notons que les objets que nous avons définis dépendent du choix initial de norme sur $\mathcal{H}$, même si cette dépendance n'apparaît pas explicitement dans la notation. On montre que l'énergie est une pseudo-norme invariante sur Ham, au sens de la définition suivante.

Définition 2.2.1. Soit G un groupe avec identité 1. Une **norme invariante** sur G est une application $\rho : G \to [0, \infty)$ telle que pour tout $g, h \in G$ on ait

(1) $\rho(1) = 0$.

(2) $\rho(g^{-1}) = \rho(g)$.

(3) (Inégalité du triangle) $\rho(gh) \leq \rho(g) + \rho(h)$.

(4) (Invariance sous conjugaison) $\rho(hgh^{-1}) = \rho(g)$.

(5) (Non-dégénérescence) $\rho(g) > 0$ si $g \neq 1$.

On dit que ρ est une **pseudo-norme invariante** si elle satisfait les propriétés (1) à (4).

Proposition 2.2.1. *Soit $\|\cdot\|$ une norme* Ham*-invariante sur $\mathcal{H}$. Alors l'énergie ρ induite par $\|\cdot\|$ est une pseudo-norme invariante sur* Ham.

Démonstration. Il est clair que $\rho(\mathrm{id}) = 0$. Pour montrer la propriété (2), soit $\phi \in$ Ham et $H \mapsto h$ une isotopie qui engendre ϕ. Par la proposition 2.1.2, l'hamiltonien $\overline{H}(x,t) = -H_t(h_t x)$ engendre ϕ^{-1}. Par l'invariance de la norme on a alors

$$\rho(\phi^{-1}) \leq \int_0^1 \|-H_t \circ h_t\| \; dt = \int_0^1 \|H_t\| \; dt = \ell(h).$$

Puisque cela est vrai pour toutes les isotopies qui engendrent ϕ, on en déduit que $\rho(\phi^{-1}) \leq \rho(\phi)$. L'autre inégalité s'en déduit immédiatement puisque $\rho(\phi) = \rho((\phi^{-1})^{-1}) \leq \rho(\phi^{-1})$.

Pour montrer l'inégalité du triangle, soit $\phi, \psi \in \mathrm{Ham}$ et H, G des hamiltoniens qui engendrent ϕ et ψ, respectivement. Toujours par la proposition 2.1.2, le difféomorphisme $\phi\psi$ est engendré par l'hamiltonien $(H\#G)_t = H_t + G_t \circ h_t^{-1}$. Par l'invariance de la norme et l'inégalité du triangle, on a

$$\rho(\phi\psi) \leq \int_0^1 \left\| H_t + G_t \circ h_t^{-1} \right\| dt \leq \int_0^1 (\|H_t\| + \|G_t\|)\, dt = \ell(h) + \ell(g).$$

En prenant l'infimum on trouve donc $\rho(\phi\psi) \leq \rho(\phi) + \rho(\psi)$.

Pour montrer l'invariance sous conjugaison, soit $\phi, \psi \in \mathrm{Ham}$ et H un hamiltonien qui engendre ϕ. Par la proposition 2.1.3, $\psi\phi\psi^{-1}$ est engendré par l'hamiltonien $H_t \circ \psi^{-1}$. On a alors

$$\rho(\psi\phi\psi^{-1}) \leq \int_0^1 \left\| H_t \circ \psi^{-1} \right\| \, dt = \ell(h),$$

et on conclut que $\rho(\psi\phi\psi^{-1}) \leq \rho(\phi)$. L'autre inégalité suit de la précédente, car $\rho(\phi) = \rho((\psi^{-1}\psi)\phi(\psi^{-1}\psi)) \leq \rho(\psi\phi\psi^{-1})$. Cela complète la preuve. $\square$

Rappelons que nous avons défini la distance entre deux difféomorphismes hamiltoniens ϕ et ψ comme $d(\phi, \psi) = \rho(\phi\psi^{-1})$. Cela définit une pseudo-distance bi-invariante sur Ham, au sens de la définition suivante.

Définition 2.2.2. Soit G un groupe avec identité 1. Une **distance bi-invariante** sur G est une application $d : G \times G \to [0, \infty)$ telle que pour tout $f, g, h \in G$ on ait

(1) $d(1, 1) = 0$.

(2) (Symétrie) $d(f, g) = d(g, f)$.

(3) (Inégalité du triangle) $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

(4) (Bi-invariance) $d(f\,h, g\,h) = d(f, g) = d(h\,f, h\,g)$.

(5) (Non-dégénérescence) $d(f, g) = 0$ implique $f = g$.

On dit que d est une **pseudo-distance bi-invariante** si elle satisfait les propriétés (1) à (4).

On vérifie aisément qu'une pseudo-norme invariante ρ induit une pseudo-distance bi-invariante en posant $d(f, g) = \rho(fg^{-1})$. Inversement, une pseudo-distance bi-invariante induit une pseudo-norme invariante en posant $\rho(f) = d(1, f)$. Ces deux concepts sont donc intimement reliés et on passera librement de l'un à l'autre. Remarquons aussi qu'une pseudo-norme est non-dégénérée si et seulement si la pseudo-distance qu'elle induit est non-dégénérée, et inversement.

Par la proposition 2.2.1 et la discussion précédente, une norme invariante sur Ham induit une pseudo-distance bi-invariante sur Ham. Une telle distance est appelée la *distance de Finsler* sur Ham induite par la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{H}$. Un problème naturel est de déterminer pour quelles normes sur $\mathcal{H}$ cette distance est non-dégénérée. Remarquons que, sur une variété fermée, la simplicité du groupe Ham implique qu'une pseudo-distance invariante est soit non-dégénérée, soit identiquement nulle. En effet, on vérifie aisément que l'ensemble des éléments qui sont à distance 0 de l'identité forme un sous-groupe normal ; celui-ci doit donc être trivial ou correspondre à Ham tout entier. Nous allons démontrer à la section 2.4 que les pseudo-distances induites par les normes L^p sont toutes dégénérées lorsque $1 \leq p < \infty$. Le théorème hautement non-trivial suivant affirme que cela n'est pas le cas pour la norme C^0.

Théorème 2.2.1. *La pseudo-distance induite par la norme C^0 sur $\mathcal{H}$ est non-dégénérée.*

Ce théorème été démontré d'abord sur $\mathbb{R}^{2n}$ par Hofer [**18**], puis pour les variétés symplectiques rationelles par Polterovich [**28**]. Il a finalement été démontré en toute généralité par Lalonde et McDuff [**22**]. Toutes les preuves exploitent la notion *d'énergie de déplacement*, que nous introduisons à la section suivante.

Nous appellerons **distance d'Hofer** et **norme d'Hofer** respectivement, la distance et la norme sur Ham induites par la norme C^0 sur $\mathcal{H}$.[3] Celles-ci seront notées d_H et ρ_H, ou simplement d et ρ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. La topologie sur Ham induite par la distance d'Hofer est appelée la **topologie d'Hofer**. Il suit directement de la définition de distance bi-invariante que le groupe Ham muni de la topologie d'Hofer est un groupe topologique, c'est-à-dire que le produit et l'inversion sont des applications continues. Il est aussi immédiat que la norme d'Hofer est continue. Une propriété de la topologie d'Hofer qui sera essentielle pour la suite est que les applications $\mathcal{H} \to \mathrm{Ham}(M, \omega)$ qui associent à un hamiltonien le difféomorphisme au temps t de sont flot hamiltonien sont continues, lorsque $\mathcal{H}$ est muni de la topologie C^0. Cela est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 2.2.2. *Soit f et g les isotopies engendrées par les hamiltoniens normalisés F et G. Alors pour tout t on a*

$$d_H(f_t, g_t) \leq \int_0^t \|F_s - G_s\|_\infty \, ds. \tag{2.2.3}$$

En particulier, les applications $\mathcal{H} \to$ Ham définies par $H \mapsto h_t$ sont continues lorsque $\mathcal{H}$ est muni de la topologie C^0 et Ham *de la topologie d'Hofer.*

3. Notre définition diffère légèrement de celle originellement introduite par Hofer [**18**], qui avait plutôt considéré la distance induite par l'oscillation $\mathrm{osc}(H) = \max H - \min H$. Ces deux normes étant équivalentes, les métriques qu'elles induisent sont aussi équivalentes.

DÉMONSTRATION. Par définition, on a $d_H(f_t, g_t) = \rho_H(f_t^{-1} g_t)$. Par la proposition 2.1.2, l'isotopie $s \mapsto f_s^{-1} g_s$ est engendrée par l'hamiltonien normalisé

$$(\overline{F} \# G)_s = -F_s \circ f_s + G_s \circ f_s = (-F_s + G_s) \circ f_s.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \rho_H(f_t^{-1} g_t) &\leq \int_0^t \|(-F_s + G_s) \circ f_s\|_\infty \, ds \\ &= \int_0^t \|F_s - G_s\|_\infty \, ds. \end{aligned}$$

□

L'importance de cette proposition tient au fait que l'application qui associe à un hamiltonien le difféomorphisme hamiltonien qu'il engendre n'est pas du tout continue si on munit plutôt Ham de la topologie de la convergence uniforme. En effet, le flot hamiltonien d'une fonction dépend fortement de ses *dérivées*. Par conséquent, si on a une suite de fonctions H_n qui converge vers H uniformément, on ne peut pas garantir en général que les difféomorphismes hamiltoniens $(h_n)_t$ convergent uniformément, et encore moins qu'ils convergent vers h_t. Cependant, puisque la norme d'Hofer d'un difféomorphisme hamiltonien dépend seulement de la norme C^0 des hamiltoniens qui l'engendrent (et non de leurs dérivées), on a au moins la convergence *dans la topologie d'Hofer*. La topologie d'Hofer sur Ham est donc adaptée à l'étude de la topologie C^0 sur $\mathcal{H}$. Cette constatation va s'avérer d'une très grande importance au chapitre 3.

2.3. Énergie de déplacement

Dans cette section, nous introduisons la notion d'énergie de déplacement de sous-ensembles d'une variété symplectique. Ce concept a été introduit par Hofer [**18**] dans sa preuve de la non-dégénérescence de la distance d'Hofer sur $\mathbb{R}^{2n}$. L'énergie de déplacement est un invariant symplectique qui se comporte comme une aire et décrit la « taille symplectique » d'un sous-ensemble d'une variété symplectique. Dans ce qui suit, ρ dénote la norme invariante sur Ham induite par une norme invariante sur $\mathcal{H}$.

Définition 2.3.1. Soit Z un sous-ensemble borné de (M, ω).

(1) Soit $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$. On dit que ϕ **déplace** Z si $\phi(Z) \cap Z = \emptyset$.

(2) On dit que Z est **déplaçable** s'il existe un $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ qui déplace Z.

(3) Si Z est déplaçable, on définit **l'énergie de déplacement** de Z par

$$e(Z) = \inf_{\phi} \ \rho(\phi) \tag{2.3.1}$$

où l'infimum est pris sur tous les $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ qui déplacent Z. Si Z n'est pas déplaçable, on pose par convention que $e(Z) = \infty$.

Si Z n'est pas borné, on pose $e(Z) = \sup_K e(K)$, où le supremum est pris sur tous les ensembles bornés contenus dans Z.

L'énergie de déplacement d'un sous-ensemble Z est donc l'énergie nécessaire pour le disjoindre de lui-même par un difféomorphisme hamiltonien, si on le fait de la façon la plus efficace possible. Dans ce qui suit, on note e_H l'énergie de déplacement induite par la norme d'Hofer sur Ham.

Remarquons que dans $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ tous les ensembles bornés peuvent être déplacés par des translations. Au contraire, sur une variété de volume fini, les ensembles de volume trop grand ne sont pas déplaçables. En effet, puisque les difféomorphismes hamiltoniens préservent le volume, un ensemble Z dont le volume satisfait $\mathrm{vol}(Z) > \mathrm{vol}(M)/2$ n'est pas déplaçable. Cependant, l'énergie de déplacement, vue comme une mesure de la « taille » symplectique d'un ensemble, a peu à voir avec le volume, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 2.3.1. Soit $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la sphère munie de la forme d'aire standard. Alors l'équateur $\{z = 0\}$ n'est pas déplaçable, même s'il a volume zéro. En effet, l'équateur coupe la sphère en deux hémisphères de même aire. On ne peut donc pas le déplacer par une application qui préserve l'aire. Au contraire, tous les ensembles de S^2 qui sont entièrement contenus dans un hémisphère sont déplaçables par une rotation qui échange les deux hémisphères.

Mentionnons quelques propriétés élémentaires de l'énergie de déplacement. Il s'agit d'une fonction monotone, c'est-à-dire que $e(Y) \leq e(Z)$ si $Y \subset Z$. En effet, tout difféomorphisme hamiltonien qui déplace Y déplace forcément Z. L'énergie de déplacement est invariante sous l'action de difféomorphismes hamiltoniens, c'est-à-dire que $e(\phi(Z)) = e(Z)$ pour tout $\phi \in \mathrm{Ham}$. En effet, si $\psi \in \mathrm{Ham}$ déplace $\phi(Z)$, alors $\phi^{-1}\psi\phi$ est un difféomorphisme hamiltonien de même énergie que ψ qui déplace Z, et inversement. Si e est induite par une norme sur $\mathcal{H}$ qui est invariante sous tout le groupe $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ (ce qui est le cas, par exemple, pour la norme C^0), alors le même argument montre que e est invariante sous l'action de symplectomorphismes. Une troisième propriété importante est que l'énergie de déplacement dans $\mathbb{R}^{2n}$ se comporte comme une *aire* sous les dilatations.

Proposition 2.3.1. *Soit $Z \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Alors $e_H(\lambda Z) = \lambda^2 e_H(Z)$ pour tout $\lambda > 0$.*

Démonstration. Soit $\phi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ qui déplace Z. Alors le difféomorphisme $\phi_\lambda = m_\lambda \phi m_\lambda^{-1}$ déplace λZ, où m_λ est la dilatation par un facteur λ. On montre que ϕ_λ est hamiltonien et $\rho(\phi_\lambda) = \lambda^2 \rho(\phi)$.

Soit h une isotopie qui engendre ϕ. Alors l'isotopie $t \mapsto m_\lambda h_t m_\lambda^{-1}$ engendre ϕ_λ. On montre que cette isotopie est hamiltonienne. En procédant comme à la proposition 2.1.2, on montre aisément que celle-ci est générée par le champ de vecteurs $(m_\lambda)_* X$, où X est le champ qui génère h. Or, le champ $(m_\lambda)_* X$ est le champ hamiltonien de l'hamiltonien $(H_\lambda)_t = \lambda^2 H_t \circ m_\lambda^{-1}$. En effet, en effectuant le même calcul qu'à la preuve de la proposition 1.3.3, on a

$$\begin{aligned} d(H_\lambda)_t &= \lambda^2\, d(H_t \circ m_\lambda^{-1}) = \lambda^2\, (m_\lambda^{-1})^* dH_t = \lambda^2\, (m_\lambda^{-1})^* \iota_{X_t}\omega_0 \\ &= \lambda^2\, \iota_{(m_\lambda)_* X_t} (m_\lambda^{-1})^* \omega_0 = \iota_{(m_\lambda)_* X_t}\omega_0, \end{aligned}$$

où la dernière égalité suit de $(m_\lambda^{-1})^*\omega_0 = \lambda^{-2}\omega_0$. On peut donc estimer la norme de ϕ_λ comme suit :

$$\rho(\phi_\lambda) \leq \int_0^1 \|(H_\lambda)_t\|_\infty\, dt = \lambda^2 \int_0^1 \left\|H_t \circ m_\lambda^{-1}\right\|_\infty dt = \lambda^2 \int_0^1 \|H_t\|_\infty\, dt = \lambda^2\, \ell(h).$$

Puisque cela est vrai pour toute isotopie h qui engendre ϕ, on conclut que $\rho(\phi_\lambda) \leq \lambda^2\, \rho(\phi)$. En inversant les rôles de ϕ et ϕ_λ et en remplaçant λ par λ^{-1}, le même argument montre l'inégalité inverse. On a donc bien $\rho(\phi_\lambda) = \lambda^2\, \rho(\phi)$.

Puisque ϕ_λ déplace λZ, cela montre que $e_H(\lambda Z) \leq \rho(\phi_\lambda) = \lambda^2 \rho(\phi)$. Comme cela est vrai pour tous les ϕ qui déplacent Z, on conclut que $e_H(\lambda Z) \leq \lambda^2 e_H(Z)$. Finalement, en inversant les rôles de Z et λZ, le même argument montre que l'inégalité inverse est aussi vraie, et par conséquent que $e_H(\lambda Z) = \lambda^2 e_H(Z)$. □

Pour trouver des bornes supérieures sur l'énergie de déplacement d'un ensemble, il suffit de construire un difféomorphisme hamiltonien qui le disjoint de lui-même et de calculer la longueur d'une isotopie qui l'engendre. Cependant, l'existence de bornes *inférieures* sur l'énergie de déplacement s'appuie sur les techniques les plus puissantes de la topologie symplectique. Le théorème profond qui suit est la fondation de tous les résultats que nous allons présenter au chapitre 3.

Théorème 2.3.1. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors $e_H(U) > 0$ pour tout ouvert non-vide U.*

Ce théorème est dû à Hofer [**18**] dans le cas de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, à Polterovich [**28**] pour les variétés rationnelles ainsi qu'à Lalonde et McDuff [**22**] en toute généralité. La positivité de l'énergie de déplacement est le théorème principal qui nous permettra de démontrer la rigidité du crochet de Poisson au chapitre 3. Cependant, la preuve de ce résultat dépasse largement le cadre de ce mémoire. Le lecteur soucieux de remédier à ce manque pourra consulter les références données ci-haut pour les preuves. L'ouvrage d'Hofer et Zehnder [**19**] contient une preuve très détaillée dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$. Nous référons aussi aux livres d'Oh [**26**] et de

Polterovich et Rosen [**30**] pour une autre approche à ce théorème via les invariants spectraux.

La positivité de l'énergie de déplacement a de profondes conséquences en topologie symplectique. D'abord, le théorème 2.3.1 implique directement la non-dégénérescence de la distance d'Hofer. En effet, tout difféomorphisme hamiltonien ϕ qui n'est pas l'identité déplace nécessairement un certain ensemble ouvert non-vide U. Il suit donc de la définition de l'énergie de déplacement que $d_H(\phi, \mathrm{id}) = \rho_H(\phi) \geq e_H(U)$, et cette dernière quantité est strictement positive par le théorème 2.3.1.

Une deuxième conséquence directe de la positivité de l'énergie concerne la dynamique des difféomorphismes hamiltoniens. Comme nous l'avons explicité à la section précédente, l'importance de la géométrie d'Hofer dans notre étude est sa compatibilité avec la topologie C^0 sur l'espace des hamiltoniens normalisés (proposition 2.2.2). En particulier, si un hamiltonien H est proche de 0 dans la norme C^0, alors le difféomorphisme hamiltonien ϕ qu'il engendre est proche de l'identité dans la distance d'Hofer. Mais que peut-on alors tirer comme conclusion concrète sur le comportement dynamique de ϕ ? La positivité de l'énergie de déplacement fournit une réponse à cette question. En effet, supposons que U est un ouvert non-vide d'énergie $e(U)$. Alors, par définition, tous les difféomorphismes hamiltoniens d'énergie plus petite que $e(U)$ ne peuvent pas déplacer U. (Évidemment, cela ne donnerait aucune information si on avait $e(U) = 0$.) Par conséquent, si ϕ est suffisament proche de l'identité en distance d'Hofer, alors ϕ ne peut pas déplacer U. Cette observation simple va s'avérer cruciale dans notre étude de la rigidité du crochet de Poisson au chapitre 3. Soulignons au passage le caractère presque miraculeux de la conclusion précédente. L'hypothèse que la norme d'Hofer d'un difféomorphisme hamiltonien est petite en est une sur la norme C^0 des hamiltoniens qui l'engendrent. Or, la norme C^0 des hamiltoniens qui engendrent ϕ capture seulement une *infime* quantité d'information sur ϕ lui-même. Pourtant, cette information est suffisante pour tirer des conclusions non-triviales sur le comportement dynamique de ϕ.

Nous concluons cette section avec une troisième conséquence de la positivité de l'énergie de déplacement, qui concerne la relation entre la convergence dans la topologie d'Hofer et la convergence uniforme de difféomorphisme hamiltoniens. Comme nous l'avons déjà souligné à la section 2.2, la convergence uniforme d'une suite d'hamiltoniens n'implique pas la convergence uniforme des difféomorphismes hamiltoniens qu'ils engendrent, car ceux-ci dépendent des dérivées des fonctions. La convergence dans la topologie d'Hofer n'implique donc pas la convergence uniforme. Cependant, si on sait *a priori* que la suite converge aussi uniformément, alors les deux limites doivent être égales.

Proposition 2.3.2. *Soit ϕ_i une suite de difféomorphismes hamiltoniens. On suppose que $\phi_i \to \phi$ dans la topologie d'Hofer et qu'en addition la suite ϕ_i converge uniformément vers une certaine application ψ. Alors $\phi = \psi$.*

Démonstration. En considérant à la place la suite $\phi_i\phi^{-1}$, on se ramène au cas où la suite ϕ_i converge vers l'identité dans la topologie d'Hofer. On doit alors montrer que $\psi = \mathrm{id}$. Supposons le contraire ; il existe alors un ouvert non-vide U qui est déplacé par ψ. Quitte à prendre U plus petit on peut supposer que ψ déplace aussi sa fermeture. Puisque la distance entre U et $\psi(U)$ est strictement positive et que $\phi_i \to \psi$ uniformément, les ϕ_i déplacent aussi U pour tout i assez grand. On a donc $e_H(U) \leq \rho_H(\phi_i)$ pour tout i assez grand. Mais puisque $\phi_i \to \mathrm{id}$ dans la topologie d'Hofer, on doit avoir $\rho_H(\phi_i) \to 0$ et donc que $e_H(U) = 0$, ce qui contredit la positivité de l'énergie de déplacement. $\square$

Un conséquence de cette proposition est que si une suite d'hamiltoniens autonomes $H_i \in \mathcal{H}$ converge uniformément vers une application H, et qu'on sait en addition que les difféomorphismes hamiltoniens ϕ_i engendrés par les H_i convergent uniformément, alors on doit avoir $\phi_i \to \phi$ uniformément, où ϕ est le difféomorphisme hamiltonien engendré par H. Évidemment, cette constatation a une portée limitée car les situations où on peut garantir *a priori* la convergence uniforme des flots hamiltoniens sont l'exception plutôt que la règle.

2.4. Unicité de la distance d'Hofer

Il est naturel de se demander s'il existe d'autres normes sur $\mathcal{H}$ que la norme C^0 qui induisent d'authentiques distances sur Ham. La réponse est négative : la distance d'Hofer est essentiellement la *seule* distance de Finsler qui soit non-dégénérée, au sens où toute norme sur $\mathcal{H}$ qui induit une distance non-dégénérée est forcément équivalente à la norme C^0. Ce résultat est dû aux travaux d'Ostrover et Wagner [**27**] ainsi que de Buhovski et Ostrover [**9**]. L'énoncé précis est le suivant.

Théorème 2.4.1. *Soit (M,ω) une variété fermée, et $\|\cdot\|$ une norme* Ham*-invariante sur $\mathcal{H}$ qui est continue dans la topologie C^∞. Alors la pseudo-distance de Finsler induite par $\|\cdot\|$ sur* $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ *est non-dégénérée si et seulement si $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme C^0.*

Remarque 2.4.1. La condition de continuité dans la topologie C^∞ est naturelle d'un point de vue géométrique ; elle est équivalente à ce que toutes les isotopies hamiltoniennes aient une longueur finie (voir [**9**], proposition 5.1).

Remarque 2.4.2. Soulignons qu'il existe bien d'autres distances bi-invariantes sur Ham, parmis lesquelles les distances induites par la norme spectrale et la norme autonome sont des exemples importants. Les résultats d'unicité présentés dans cette section concernent *exclusivement* les distances de Finsler sur Ham.

La preuve du théorème 2.4.1 dépasse le cadre de ce mémoire ; nous allons cependant illustrer un cas particulier en montrant que les distances induites par les normes L^p (avec $1 \leq p < \infty$) sont dégénérées. Ce résultat est dû à Eliashberg et Polterovich [**14**] (on pourra aussi consulter les sections 2.3 et 2.4 du livre de Polterovich [**29**] pour une autre exposition).

On montre d'abord le théorème suivant, qui indique qu'il suffit de démontrer l'existence d'un ouvert non-vide d'énergie nulle.

Théorème 2.4.2 ([**14**], théorème 1.3.A.)**.** *Soit d une distance bi-invariante non-dégénérée sur* $\mathrm{Ham}(M, \omega)$*. Alors $e(U) > 0$ pour tout ouvert non-vide U.*

Rappelons que $e(U)$ est l'infimum de l'énergie nécessaire pour déplacer U par un difféomorphisme hamiltonien. L'hypothèse de non-dégénérescence de la distance d assure que l'énergie de chaque hamiltonien qui déplace U est strictement positive, mais rien n'empêche *a priori* que cette énergie puisse être arbitrairement petite. La teneur du théorème précédent est donc que la non-dégénérescence garantit en fait qu'il y a une borne inférieure strictement positive pour l'énergie de tous les hamiltoniens qui déplacent U. Cette borne inférieure est obtenue au lemme suivant.

Lemme 2.4.1. *Soit U un ouvert non-vide de M et $\phi, \psi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ à support dans U. Alors $4\,e(U) \geq \rho([\phi, \psi])$.*

Démonstration. Si U n'est pas déplaçable le résultat est trivial. Supposons donc qu'il existe $\chi \in \mathrm{Ham}$ qui déplace U. Posons $\theta = \phi\chi^{-1}\phi^{-1}\chi$. Puisque $\phi = \mathrm{id}$ en dehors de U et que $\chi(U) \cap U = \emptyset$, θ coïncide avec ϕ sur U. Puisque ψ est à support dans U, cela implique que $\phi^{-1}\psi\phi = \theta^{-1}\psi\theta$, donc $[\phi, \psi] = [\theta, \psi]$. Par l'invariance de la norme ρ on a

$$\rho([\phi, \psi]) = \rho([\theta, \psi]) = \rho(\theta\psi\theta^{-1}\psi^{-1}) \leq \rho(\theta) + \rho(\psi\theta^{-1}\psi^{-1}) = 2\rho(\theta).$$

Par le même argument, on a

$$\rho(\theta) = \rho(\phi\chi^{-1}\phi^{-1}\chi) \leq 2\rho(\chi).$$

On a donc $\rho([\phi, \psi]) \leq 4\rho(\chi)$. Comme cela est vrai pour tout χ qui déplace U, on a donc $\rho([\phi, \psi]) \leq 4\,e(U)$. $\square$

Le théorème suit alors directement du lemme suivant, qui assure qu'il existe toujours des difféomorphismes hamiltoniens pour lesquels la borne inférieure obtenue au lemme précédent est non-triviale (sous l'hypothèse que la métrique est non-dégénérée).

Lemme 2.4.2. *Soit U un ouvert non-vide de M. Alors il existe $\phi, \psi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ à support dans U tels que $[\phi, \psi] \neq \mathrm{id}$.*

Démonstration. Soit $p \in U$. On choisit des vecteurs $Y, Z \in T_pM$ tels que $\omega(Y, Z) \neq 0$. Il existe alors des fonctions F et G à support dans U qui satisfont $X_F(p) = Y$, $X_G(p) = Z$ (par le même argument qu'à la proposition 1.5.3 ; voir la page 21). Soit f et g les isotopies hamiltoniennes engendrées par F et G. Puisque les fonctions F et G sont à support dans U, il en est de même de chacun des difféomorphismes hamiltoniens f_t et g_t. De plus, par construction on a $\{F, G\}(p) = \omega(Y, Z) \neq 0$. Le corollaire 1.5.1 implique alors que les flots de F et G ne commutent pas ; il existe donc des réels s et t tels que $f_t g_s \neq g_s f_t$. □

Théorème 2.4.3. *Soit (M, ω) une variété symplectique (fermée ou non). Alors pour $1 \leq p < \infty$ la pseudo-distance sur $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ induite par la norme L^p est dégénérée.*

Démonstration. Par le théorème 2.4.2, il suffit de trouver un seul ouvert d'énergie nulle, c'est-à-dire un ouvert qui peut être déplacé par des difféomorphismes hamiltoniens d'énergie arbitrairement petite.

Choisissons une boule ouverte plongée B dans M dont le bord (topologique) S est une sphère plongée. En prenant une boule plus petite si nécessaire, on peut supposer que B est déplaçable.[4] Soit donc h une isotopie hamiltonienne engendrée par un hamiltonien H telle que h_1 déplace B. On construit à partir de h une autre isotopie qui déplace B de la façon suivante. Soit S_t la sphère $h_t(S)$. L'idée est d'utiliser des fonctions plateaux pour construire un hamiltonien qui coïncide avec H_t près de S_t, mais dont le support est de volume arbitrairement petit. Plus précisément, on prétend que pour tout $\varepsilon > 0$ il est possible de choisir une famille d'ouverts bornés U_t et des fonctions plateaux ξ_t avec les propriétés suivantes :

(1) U_t est un voisinage de S_t ;

(2) $\mathrm{vol}(U_t)^{1/p} \leq \varepsilon / \|H\|_\infty$ pour tout t ;

(3) ξ_t est à support dans U_t ;

(4) $0 \leq \xi_t \leq 1$ et $\xi_t \equiv 1$ dans un voisinage de S_t ;

4. En prenant une carte de Darboux, on peut construire un difféomorphisme hamiltonien qui coïncide localement via cette carte avec une translation. Toute boule suffisamment petite est nécessairement disjointe d'elle-même par une telle translation.

(5) L'application $\xi : (x,t) \mapsto \xi_t(x)$ est lisse.

En effet, puisque S est une hypersurface fermée, il existe pour tout choix de $\varepsilon > 0$ un voisinage U_0 de S tel que $\mathrm{vol}(U_0)^{1/p} \leq \varepsilon / \|H\|_\infty$.[5] On choisit une fonction plateau ξ_0 à support dans U_0 telle que $0 \leq \xi_0 \leq 1$ et $\xi_0 \equiv 1$ près de S. Il suffit alors de prendre $U_t = h_t(U_0)$ et $\xi_t = \xi_0 \circ h_t^{-1}$.

On considère alors l'hamiltonien $G_t = \xi_t H_t$, et g l'isotopie engendrée par G. Puisque G_t coïncide avec H_t près de S_t, on a $g_t(S) = h_t(S)$ pour tout t. En particulier, cela implique que $g_1(B) = h_1(B)$, donc g_1 disjoint aussi B d'elle-même. L'hypothèse sur les volumes des supports des fonctions ξ_t permet de borner l'énergie L^p de g_1 comme suit :

$$\rho(g_1) \leq \int_0^1 \|G_t\|_p \, dt \leq \int_0^1 \|G_t\|_\infty \mathrm{vol}(U_t)^{1/p} \, dt \leq \|H\|_\infty \sup_{t\in[0,1]} \mathrm{vol}(U_t)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

On a donc construit un difféomorphisme g_1 qui déplace B et qui satisfait $\rho(g_1) \leq \varepsilon$. Puisque cela est possible pour tout choix de $\varepsilon > 0$, on conclut que $e(B) = 0$. $\square$

Remarque 2.4.3. L'idée cruciale de la preuve précédente est qu'il est possible *à la fois* de rendre la norme L^p des hamiltoniens G_t arbitrairement petite tout en s'assurant que ceux-ci coïncident avec H_t près de S_t, ce qui est évidemment impossible pour la norme C^0. En fait, la seule propriété des normes L^p qui est utilisée dans la preuve est que les normes d'une suite de fonctions uniformément bornées convergent vers 0 si le volume du support des fonctions converge vers 0. Un des principaux résultats de l'article [**27**] d'Ostrover et Wagner est que cette propriété est aussi satisfaite par toutes les normes Ham-invariantes sur $\mathcal{H}$ qui sont dominées par la norme C^0 mais qui n'y sont pas équivalentes. Le même argument que dans la preuve du théoreme 2.4.3 montre alors que la pseudo-distance induite par une telle norme est dégénérée. Cela démontre une partie de l'unicité de la distance d'Hofer (théorème 2.4.1).

Remarque 2.4.4. Comme nous l'avons observé précédemment, dans le cas des variétés fermées la simplicité du groupe Ham implique qu'une pseudo-distance bi-invariante dégénérée est en fait *identiquement nulle*. Cela n'est plus nécessairement le cas pour des variétés qui ne sont pas fermées. Par exemple, pour des variétés *exactes* (qui, rappelons-le, ne peuvent pas être fermées), Eliashberg et Polterovich [**14**] ont montré que la pseudo-distance sur Ham induite par les

5. Pour s'en convaincre, on peut par exemple fixer une métrique compatible avec la topologie de M et considérer les δ-voisinages V_δ de S, c'est-à-dire $V_\delta = \cup_{x\in S} B(x,\delta)$. Puisque S est fermé, les voisinages V_δ décroissent vers S lorsque $\delta \to 0$, donc $\mathrm{vol}(V_\delta) \to \mathrm{vol}(S)$. Or, $\mathrm{vol}(S) = 0$ puisque S est une hypersurface.

normes L^p est un multiple du *morphisme de Calabi*

$$\mathrm{cal}(\phi) = \int_0^1 \int_M H_t \, \omega^n \, dt,$$

où H est n'importe quel hamiltonien qui génère ϕ (cette application est bien définie sous l'hypothèse que ω est exacte). Plus précisément, en notant d_p la pseudo-distance induite par la norme L^p, on a

$$d_p(\mathrm{id}, \phi) = (\mathrm{vol}\, M)^{\frac{1-p}{p}} \, |\, \mathrm{cal}(\phi)|,$$

où, dans le cas où $\mathrm{vol}\, M = \infty$, on convient que $\infty^0 = 1$ et $\infty^q = 0$ si $q < 0$.

Chapitre 3

RIGIDITÉ C^0 DU CROCHET DE POISSON

En mécanique classique, si H est l'hamiltonien autonome qui détermine l'évolution dans le temps d'un système physique, alors les observables F qui satisfont $\{F, H\} = 0$ sont des constantes du mouvement. Si F est une constante du mouvement, on peut possiblement réduire la complexité du système à l'étude en se restreignant aux ensembles de niveau $\{F = c\}$. L'étude de ces quantités conservées est donc un problème important. La question qui va nous intéresser dans ce chapitre concerne l'approximation de fonctions quelconques par des fonctions qui sont *presque* des constantes du mouvement.

Question principale. Soit A et B deux fonctions sur une variété symplectique. Est-il possible d'approximer A et B avec une précision arbitrairement grande par des fonctions F et G respectivement, de sorte que le crochet de Poisson $\{F, G\}$ soit près de 0 ?

Malgré son apparence simple, nous verrons que la réponse à cette question fait intervenir quelques-uns des outils les plus puissants de la topologie symplectique. La première section de ce chapitre est un survol des premières propriétés de *rigidité symplectique* qui ont été découvertes dans les années 70 et 80. Ces découvertes marquent la naissance de la topologie symplectique et motivent les problèmes que nous allons aborder par la suite. À la section 3.2, nous donnons un sens précis à notre *question principale* et nous énonçons les principaux résultats la concernant. La preuve de ces résultats occupe les deux dernières sections de ce mémoire.

3.1. Phénomènes de rigidité C^0 en topologie symplectique

Le but de cette section est de mettre en contexte et de motiver les phénomènes reliés au crochet de Poisson qui seront étudiés aux sections suivantes. Nous tenterons d'esquisser ce qu'est le concept de rigidité C^0 en topologie symplectique.

Nous ne donnerons pas de justifications rigoureuses des énoncés présentés ici ; cela nous amènerait trop loin de notre but. Dans ce qui suit, la *topologie* C^0 fait référence à la topologie de la convergence uniforme. Notre point de départ est la question fondamentale suivante.

Question. Soit $\phi_i : M \to M$ une suite de difféomorphismes symplectiques qui convergent uniformément vers un difféomorphisme ϕ. ϕ est-il symplectique ?

Il n'est pas difficile de montrer que ϕ doit préserver le volume. Sans entrer dans les détails, la raison derrière cela est que le volume est une quantité « de type C^0 ». Intuitivement, cela signifie que si U est un ouvert et les difféomorphismes ϕ et ψ sont suffisamment proches dans la topologie C^0, alors les volumes de $\phi(U)$ et $\psi(U)$ ne diffèrent pas beaucoup. La propriété d'être symplectique, quant à elle, est une condition sur la *dérivée* de ϕ. Il n'y a donc pas de raison *a priori* que celle-ci soit préservée par la convergence uniforme.

Historiquement, l'importance de ce problème en topologie symplectique est dûe à la dichotomie suivante, qui a été démontrée par Gromov : soit le groupe $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ est fermé dans $\mathrm{Diff}(M)$ muni de la topologie C^0, ou bien sa fermeture est égale à $\mathrm{Diff}(M, \mu)$, le groupe des difféomorphismes qui préservent le volume symplectique μ. Le second cas aurait signifié que la géométrie symplectique se réduit essentiellement à la géométrie des formes volumes, que l'on sait être une géométrie très *flexible* car le seul invariant est le volume total (théorème 1.4.2). Eliashberg [**13**] et Gromov [**17**] ont montré que c'est plutôt la rigidité qui l'emporte.

Théorème 3.1.1 (Théorème d'Eliashberg-Gromov)**.** *Soit* (M, ω) *une variété symplectique et* ϕ_n *une suite de difféomorphismes symplectiques qui converge localement uniformément vers un difféomorphisme* ϕ*. Alors* ϕ *est symplectique.*

Ce phénomène est souvent appelé la *rigidité* C^0 *des difféomorphismes symplectiques.* Dans ce mémoire, nous utiliserons fréquemment l'expression « rigidité C^0 » ou l'adjectif « C^0-rigide » pour décrire des phénomènes semblables à celui-ci. Dans cette terminologie, le qualificatif « C^0 » fait référence à la topologie de la convergence uniforme, et le terme « rigidité » fait référence au fait qu'une propriété qui est *a priori* une propriété *différentielle* se trouve être préservée par les limites uniformes.

Il a été réalisé plus tard que le théorème d'Eliashberg-Gromov s'explique par l'existence d'invariants « de type C^0 » qui caractérisent la propriété d'être un difféomorphisme symplectique (tout comme le volume dans le cas des difféomorphismes qui préservent une forme volume). L'introduction de ces invariants a été motivée par le *théorème de non-tassement de Gromov* :

Théorème 3.1.2 (Gromov [**16**]). *Supposons qu'il existe un plongement symplectique*

$$\psi : (B^{2n}(r), \omega_0) \to (Z^{2n}(R), \omega_0),$$

où $B^{2n}(r) \subset R^{2n}$ est la boule unité ouverte de rayon r et $Z^{2n}(R)$ est le cylindre $B^2(R) \times \mathbb{R}^{2n-2}$. Alors $r \leq R$.

Ce théorème est l'une des expressions les plus simples et les plus profondes de la rigidité symplectique. Remarquons qu'il est toujours possible de plonger une boule de rayon quelconque dans un cylindre de façon à préserver son *volume* ; il suffit pour cela de la rendre longue et mince. Au contraire, le théorème de non-tassement affirme qu'il n'est pas possible de plonger une boule de cette façon tout en préservant la structure symplectique. La propriété d'être symplectique est donc plus contraignante, plus *rigide*, que celle de préserver le volume.

Le théorème de non-tassement a motivé l'introduction par Ekeland et Hofer [**12**] de la notion de *capacité symplectique.*

Définition 3.1.1. Une **capacité symplectique** c associe à toute variété symplectique (M, ω) un nombre $c(M, \omega) \in [0, \infty]$ tel que les propriétés suivantes sont satisfaites.

(1) (Monotonicité) S'il existe un plongement symplectique ψ de (M, ω) dans (N, η), alors $c(M, \omega) \leq c(N, \eta)$.

(2) (Conformalité) $c(M, \lambda\omega) = |\lambda| c(M, \omega)$ pour tout réel λ non-nul.

(3) (Normalisation) $c(B^{2n}(1), \omega_0) = \pi = c(Z^{2n}(1), \omega_0)$.

Dans ce langage, le théorème de Gromov est équivalent à ce que le *rayon de Gromov* c_G, défini par

$$c_G(M^{2n}, \omega) = \sup \left\{ \pi r^2 : \text{il existe un plongement symplectique } \psi : B^{2n}(r) \to M \right\},$$

satisfasse la propriété de normalisation $c_G(Z^{2n}(1)) \leq \pi$. Le rayon de Gromov est donc une capacité symplectique (les autres axiomes étant facilement démontrés). De nombreuses autres capacités ont été découvertes depuis, dont la capacité d'Ekeland-Hofer [**12**] et la capacité d'Hofer-Zehnder [**19**] ; nous référons à [**11**] pour un survol de ce vaste sujet. [1] Par la propriété de normalisation, l'existence d'une capacité implique le théorème de non-tassement, ce qui fournit d'ailleurs des preuves du non-tassement qui sont différentes de la preuve originale de Gromov.

En tenant pour acquise l'existence d'une capacité symplectique, l'essence de la preuve du théorème d'Eliashberg-Gromov est alors contenue dans le théorème suivant.

1. Remarquons que l'énergie de déplacement n'est pas une capacité au sens de la définition que nous avons donnée, car elle ne satisfait pas l'axiome de monotonicité. On peut cependant la voir comme une *capacité relative* ; voir le théorème 12.15 de [**23**].

Théorème 3.1.3 ([**23**], proposition 12.10)**.** *Soit $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ un difféomorphisme et c une capacité symplectique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) ψ préserve la capacité des ellipsoïdes, c'est-à-dire que $c(\psi(E)) = c(E)$ pour tout ellipsoïde E.

(2) ψ est symplectique ou anti-symplectique, c'est-à-dire que $\psi^*\omega = \pm\omega$.

Ce théorème fournit donc une reformulation de la propriété d'être symplectique (à un signe près) qui ne fait pas intervenir les dérivées de ψ, et qui est donc manifestement C^0-rigide. Cela explique pourquoi la propriété d'être symplectique est préservée sous la convergence uniforme.

Les phénomènes reliés au crochet de Poisson que nous allons considérer dans ce chapitre sont très semblables à la rigidité C^0 des difféomorphismes symplectiques. Le *leitmotiv* est le même : nous allons étudier des fonctionnelles qui n'ont pas de raison *a priori* d'avoir un comportement contraint relativement à la convergence uniforme puisqu'ils font intervenir le crochet de Poisson, mais qui pourtant possèdent des propriétés de continuité dans la topologie C^0. Ce phénomène est appelé la *rigidité C^0 du crochet de Poisson*. Comme dans la discussion précédente, cette rigidité se dévoile en reformulant ces propriétés en termes d'invariants symplectiques qui sont manifestement C^0-rigides. Pour le problème que nous allons considérer dans la suite, l'invariant symplectique sur lequel repose la rigidité est l'énergie de déplacement, qui a été introduite au chapitre 2.

3.2. Rigidité du crochet de Poisson

Rappelons la question principale de ce chapitre.

Question principale. Soit A et B deux fonctions sur une variété symplectique. Est-il possible d'approximer A et B avec une précision arbitrairement grande par des fonctions F et G respectivement, de sorte que le crochet de Poisson $\{F, G\}$ soit près de 0 ?

Commençons par donner un sens précis à cette question. Il faut d'abord spécifier ce qu'on entend par approximer des fonctions, c'est-à-dire qu'il faut choisir une topologie sur l'espace $C_c^\infty(M)$. La discussion de la section précédente motive le choix de la topologie C^0, c'est-à-dire la topologie induite par la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Deuxièmement, il faut préciser ce que signifie que le crochet de Poisson soit « près de 0 ». Une façon naturelle de le faire est de mesurer la grandeur du crochet de Poisson avec la norme C^0. On introduit donc la fonctionnelle suivante sur l'espace des paires de fonctions à support compact muni de la topologie C^0 :

$$\begin{aligned} \Phi : C_c^\infty(M) \times C_c^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (F,G) &\longmapsto \|\{F,G\}\|_\infty . \end{aligned}$$

On pourrait penser que la norme C^0 du crochet de Poisson de deux fonctions puisse être modifié autant que l'on souhaite par des perturbations qui sont petites en norme C^0. En effet, le crochet de Poisson de deux fonctions dépend de leurs *dérivées*, et celles-ci peuvent être modifiées de façon arbitraire par des perturbations C^0-petites. Par exemple, on peut facilement imaginer une suite de fonctions qui converge uniformément tout en devenant de plus en plus oscillatoire. La convergence uniforme impose seulement que *l'amplitude* de ces oscillations doit converger vers 0, mais n'impose aucun contrôle sur leur *fréquence*. L'exemple suivant illustre ce type de comportement. Cet exemple apparaît dans un article d'Humilière [**20**], qui l'attribue à Polterovich.

Exemple 3.2.1. On considère $\mathbb{R}^2$ avec coordonnées polaires r et θ. Dans ces coordonnées, la forme standard est donnée par $\frac{1}{r} dr \wedge d\theta$. On fixe une fonction à support compact $\chi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ qui s'annule dans un voisinage de 0. On introduit les fonctions suivantes :

$$F_n(r,\theta) = \chi(r)\frac{\cos n\theta}{\sqrt{n}}$$
$$G_n(r,\theta) = \chi(r)\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}},$$

qui sont étendues à $\mathbb{R}^2$ en posant $F_n(0) = 0 = G_n(0)$. Ces fonctions oscillent de plus en plus rapidement lorsque $n \to \infty$, mais l'amplitude de ces oscillations décroit à 0. On a donc $F_n \to 0$ et $G_n \to 0$ uniformément. Leur crochet de Poisson est donné par

$$\begin{aligned} \{F_n, G_n\} &= \frac{1}{r}\left[\left(\chi'(r)\frac{\cos n\theta}{\sqrt{n}}\right)\left(\chi(r)\frac{n\,\cos n\theta}{\sqrt{n}}\right) - \left(\chi(r)\frac{-n\,\sin n\theta}{\sqrt{n}}\right)\left(\chi'(r)\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{r}\chi'(r)\chi(r)\left(\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta\right) \\ &= \frac{\chi'(r)\chi(r)}{r}. \end{aligned}$$

Le choix judicieux des fonctions F_n et G_n fait en sorte que le crochet de Poisson ne dépend pas de n. Il est alors clair que l'on peut rendre $\|\{F_n, G_n\}\|_\infty$ aussi grand que l'on veut avec des choix appropriés de fonctions χ, et ce même si ces fonctions convergent uniformément vers 0. Notons aussi que les fonctions F_n et G_n peuvent être choisies avec un support arbitrairement petit.

En fait, il est toujours possible de rendre le crochet de Poisson de deux fonctions arbitrairement grand par des perturbations arbitrairement petites. Plus précisément :

Proposition 3.2.1. *Pour toute paire de fonctions* $(A,B) \in C_c^\infty(M) \times C_c^\infty(M)$, *on a*

$$\limsup_{(F,G)\to(A,B)} \|\{F,G\}\|_\infty = \infty.$$

Démonstration. Comme il suffit de montrer qu'on peut rendre le crochet de Poisson arbitrairement grand en un seul point, on se ramène au cas où A et B sont des fonctions sur $\mathbb{R}^{2n}$ muni la forme symplectique standard, avec coordonnées $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$. Pour rendre le crochet de Poisson grand, il suffit d'introduire une petite « bosse » dont la hauteur décroit vers 0 et dont le support rétrécit encore plus rapidement. Plus précisément, on fixe une fonction $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à support compact et on considère les fonctions

$$F_n = A + \frac{1}{n}\,\xi\,\chi(n^3 q_1)$$
$$G_n = B + \frac{1}{n}\,\xi\,p_1,$$

où ξ est une fonction à support compact qui vaut 1 dans un voisinage V de 0. Alors $F_n \to A$ et $G_n \to B$ uniformément et un calcul direct montre que sur le voisinage V on a

$$\{F_n, G_n\} = \{A,B\} + \frac{1}{n}\frac{\partial A}{\partial q_1} + n^2\chi'(n^3 q_1)\frac{\partial B}{\partial p_1} + n\chi'(n^3 q_1).$$

Fixons un point $x_0 = (q_0, 0, \ldots, 0)$ tel que $\chi'(q_0) \neq 0$. Alors pour tout n on a

$$\begin{aligned} \|\{F_n, G_n\}\|_\infty &\geq |\{F_n, G_n\}(x_0/n^3)| \\ &= \left|\{A,B\}\left(\frac{x_0}{n^3}\right) + 1/n\frac{\partial A}{\partial q_1}\left(\frac{x_0}{n^3}\right) + n^2\chi'(q_0)\frac{\partial B}{\partial p_1}\left(\frac{x_0}{n^3}\right) + n\chi'(q_0)\right|. \end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$, cette dernière quantitée est de l'ordre de n^2 si $\frac{\partial B}{\partial p_1}(0)$ ne s'annule pas, et de l'ordre de n sinon. Dans les deux cas on trouve donc que $\limsup_{n\to\infty} \|\{F_n, G_n\}\|_\infty = \infty$. □

Comme on s'y attend, la proposition précédente montre que la fonctionnelle Φ est bien loin d'être continue, car pour toutes fonctions A et B il existe des fonctions arbitrairement proches pour lesquelles Φ est arbitrairement grande. De même, on pourrait penser qu'on peut trouver des fonctions arbitrairement proches de A et B de sorte que la valeur de Φ pour ces fonctions est arbitrairement proche de 0. Plus précisément, on se donne comme objectif d'étudier le comportement de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \overline{\Phi} : C_c^\infty(M) \times C_c^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A,B) \quad &\longmapsto \liminf_{(F,G)\to(A,B)} \|\{F,G\}\|_\infty . \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Rappelons que, par définition, la quantité $\liminf_{(F,G)\to(A,B)} \Phi(F,G)$ est l'infimum de $\liminf_{n\to\infty} \Phi(F_n, G_n)$ sur l'ensemble de toutes les suites (F_n, G_n) dans $C_c^\infty(M) \times C_c^\infty(M) \setminus \{(A,B)\}$ qui convergent vers (A,B).

Une observation immédiate est qu'on a l'inégalité

$$\liminf_{(F,G)\to(A,B)} \|\{F,G\}\|_\infty \leq \|\{A,B\}\|_\infty .$$

En effet, pour des suites F_n et G_n qui convergent vers A et B en norme C^1, on a que $\{F_n, G_n\} \to \{A,B\}$ uniformément et en particulier $\|\{F_n,G_n\}\|_\infty \to \|\{A,B\}\|_\infty$. Dans le cas général, c'est-à-dire lorsqu'on sait seulement que les suites F_n et G_n convergent uniformément vers A et B, on a aucun contrôle sur la convergence de $\{F_n, G_n\}$, comme l'illustre l'exemple donné à la proposition 3.2.1. On distingue deux comportements extrêmes possibles pour la fonctionnelle $\overline{\Phi}$.

Flexibilité : $\overline{\Phi} \equiv 0$. Dans ce cas, pour toutes fonctions A et B et tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver des suites de fonctions $F_n \to A$, $G_n \to B$ qui satisfont $\lim_{n\to\infty} \|\{F_n, G_n\}\|_\infty < \varepsilon$.

Rigidité : $\overline{\Phi} = \Phi$. Dans ce cas, la fonctionnelle Φ est *semi-continue inférieurement*, c'est-à-dire que pour toutes fonctions A et B, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toutes suites $F_n \to A$, $G_n \to B$, on a

$$\Phi(F_n, G_n) > \Phi(A,B) - \varepsilon$$

pour tout n assez grand. Il est donc impossible de baisser significativement la valeur de $\Phi(A,B)$ par des perturbations arbitrairement petites de A et B.

Comme on l'a déjà mentionné, il n'y a pas de raison *a priori* que la convergence uniforme permette d'avoir un contrôle sur la norme C^0 des crochets de Poisson. On pourrait donc s'attendre à ce que la fonctionnelle Φ soit flexible, c'est-à-dire que la réponse à notre *question principale* soit positive. De façon surprenante, C. Viterbo et F. Cardin [**10**] ont démontré que cela n'est pas le cas.

Théorème 3.2.1. *Soit A et B deux fonctions à support compact telles que $\{A,B\} \neq 0$. Alors*

$$\liminf_{(F,G)\to(A,B)} \|\{F,G\}\|_\infty > 0.$$

Rappelons que cela signifie qu'il existe une borne inférieure strictement positive sur la valeur de $\liminf_{n\to\infty} \|\{F_n, G_n\}\|_\infty$ pour des suites F_n et G_n qui convergent vers A et B, respectivement. Malgré son apparente simplicité, la démonstration de ce théorème s'appuie sur la non-dégénérescence de la norme d'Hofer sur Ham. La démonstration du résultat de Cardin et Viterbo sera donnée à la section 3.3.

Le résultat de Cardin et Viterbo affirme que la fonctionnelle Φ n'est pas flexible. Le théorème principal que nous allons démontrer est que la fonctionnelle Φ est en fait *rigide*.

Théorème 3.2.2. *Pour toute paire de fonctions* $(A, B) \in C_c^\infty(M) \times C_c^\infty(M)$, *on a*

$$\liminf_{(F,G)\to(A,B)} \|\{F, G\}\|_\infty = \|\{A, B\}\|_\infty .$$

Autrement dit, la fonctionnelle $\Phi(A, B) = \|\{A, B\}\|_\infty$ *est semi-continue inférieurement dans la topologie* C^0.

Ce théorème a d'abord été démontré dans le cas des surfaces par Zapolsky [**31**]. Il a ensuite été démontré en toute généralité par Entov et Polterovich [**15**] et indépendamment par Buhovski [**7**]. La preuve de ce théorème sera donnée à la section 3.4.

Les résultat présentés jusqu'à maintenant concernaient la rigidité de la norme C^0 du crochet de Poisson. Une généralisation naturelle de ce problème est de déterminer si une certaine forme de rigidité persiste pour d'autres normes Ham-invariantes. Par exemple, dans le cas des normes L^p, notre *question principale* devient : peut-on approximer uniformément deux fonctions par des fonctions dont le crochet de Poisson est petit *en moyenne* ? Un résultat récent de K. Samvelyan et F. Zapolsky [**32**] montre que la rigidité persiste pour les normes L^p en dimension 2.

Théorème 3.2.3 (Samvelyan et Zapolsky [**32**])**.** *Soit* M *une variété symplectique de dimension* 2 *et* $p \in [1, \infty)$. *Alors la fonctionnelle* $\Phi_p : C_c^\infty(M) \times C_c^\infty(M) \to \mathbb{R}$ *donnée par* $\Phi_p(F, G) = \|\{F, G\}\|_p$ *est semi-continue inférieurement.*

La preuve donnée par Samvelyan et Zapolsky est très spécifique à la dimension 2. Elle exploite le fait que le crochet de Poisson en dimension 2 est essentiellement donné par une *aire*. Plus précisément, en dimension 2 la formule (1.5.1) que nous avons démontrée au chapitre 1 devient $\{F, G\}\,\omega = dF \wedge dG = u^*(dx \wedge dy)$, où $u : M \to \mathbb{R}^2$ est l'application $u(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$. Puisque cette interprétation fait défaut en dimension supérieure, il n'est pas clair si la fonctionnelle Φ_p est rigide ou non.

Question 3.2.1. La fonctionnelle Φ_p est-elle semi-continue inférieurement pour des variétés symplectiques de dimension plus grande que 2 ?

En fait, on ne sait pas si l'équivalent du théorème de Cardin et Viterbo (théorème 3.2.1) est vrai dans le cas des normes L^p.

Question 3.2.2. Soit $A, B \in C_c^\infty(M)$ des fonctions qui satisfont $\{A, B\} \neq 0$. A-t-on $\liminf_{(F,G)\to(A,B)} \|\{F,G\}\|_p > 0$?

À la section suivante, nous verrons que la dégénérescence des normes sur Ham induites par les normes L^p fait en sorte que l'argument de la preuve de Cardin et Viterbo ne s'étend pas au cas des normes L^p.

3.3. Preuve du théorème de Cardin-Viterbo

Dans cette section nous démontrons le théorème 3.2.1 de F. Cardin et C. Viterbo [**10**]. Ce résultat est plus faible que le théorème 3.2.2, qui sera démontré à la section suivante, mais l'idée de la preuve est riche en enseignements sur le problème de rigidité pour d'autres normes que la norme C^0.

Remarquons que la valeur de $\Phi(F, G) = \|\{F, G\}\|_\infty$ ne change pas si on ajoute des fonctions constantes aux fonctions F et G. Pour démontrer le théorème de Cardin-Viterbo il suffit donc de considérer des hamiltoniens normalisés, ce qui revient à montrer le résultat pour la restriction de Φ à $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ (que nous allons aussi noter Φ pour alléger la notation).

L'idée de départ dans la preuve du théorème 3.2.1 est un perfectionnement du résultat élémentaire obtenu au corollaire 1.5.1, selon lequel deux fonctions F et G satisfont $\{F, G\} = 0$ si et seulement si leurs flots hamiltoniens commutent, c'est-à-dire que $f_t g_s f_{-t} g_{-s} = \mathrm{id}$ pour tous t et s. En fait, nous allons montrer que les difféomorphismes hamiltoniens $f_t g_s f_{-t} g_{-s}$ permettent de donner des bornes inférieures sur la norme du crochet de Poisson.

Lemme 3.3.1. *Soit $F, G \in \mathcal{H}$ et f, g les flots hamiltoniens correspondants. Alors, pour tout s fixé, l'isotopie $t \mapsto f_t g_s f_{-t} g_{-s}$ est engendrée par l'hamiltonien normalisé*

$$H^s(t, x) = F(x) - F(g_{-s} f_{-t} x). \tag{3.3.1}$$

Démonstration. Il s'agit d'une application directe des propositions 2.1.2 et 2.1.3. L'isotopie $t \mapsto f_{-t}$ est engendrée par l'hamiltonien $-F \circ f_t$, qui est égal à $-F$ car il s'agit d'un flot autonome. Par la proposition 2.1.3, l'isotopie $t \mapsto g_s f_{-t} g_{-s}$ est alors engendrée par l'hamiltonien $-F \circ g_{-s}$. Enfin, le produit $f_t(g_s f_{-t} g_{-s})$ est engendré par l'hamiltonien $F \#(-F \circ g_{-s}) = F - F \circ g_{-s} \circ f_{-t} = H^s$. $\square$

Remarquons que $H^0(t, x) = F(x) - F(f_{-t} x) = 0$, car F est constante le long de son flot hamiltonien.

Lemme 3.3.2. *Soit $\|\cdot\|$ une norme* Ham*-invariante sur $\mathcal{H}$. Soit F, $G \in \mathcal{H}$. Alors, pour tout s et t, on a l'estimation suivante sur la norme du crochet de Poisson* *de F et G :*

$$\|H^s_t\| \leq s\,\|\{F,G\}\|\,, \tag{3.3.2}$$

où H^s est l'hamiltonien donné par la formule (3.3.1).

Démonstration. Le lien entre H^s et $\{F,G\}$ se dévoile en dérivant $H^s(t,x)$ par rapport à s :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}H^s(t,x) &= -\frac{\partial}{\partial s}F(g_{-s}f_{-t}x)\\ &= dF(X_G)(g_{-s}f_{-t}x)\\ &= \{F,G\}\,(g_{-s}f_{-t}x).\end{aligned}$$

Puisque $H^0 = 0$, on a alors pour tous x et t :

$$H^s(t,x) = H^s(t,x) - H^0(t,x) = \int_0^s \frac{\partial}{\partial\sigma}H^\sigma(t,x)\,d\sigma = \int_0^s \{F,G\}\,(g_{-\sigma}f_{-t}x)\,d\sigma.$$

En prenant la norme de cette dernière expression et en appliquant l'inégalité du triangle on obtient alors

$$\|H^s_t\| \leq \int_0^s \|\{F,G\}\circ g_{-\sigma}\circ f_{-t}\|\,d\sigma = s\,\|\{F,G\}\|\,,$$

où la dernière égalité suit de l'invariance de la norme. □

Le lemme fournit une borne inférieure sur la norme du crochet de Poisson, du moins si on parvient à estimer la norme de H^s_t. Puisque l'hamiltonien H^s engendre l'isotopie $t \mapsto f_t g_s f_{-t} g_{-s}$, on peut borner cette quantité par la norme des commutateurs $f_t g_s f_{-t} g_{-s}$.

Corollaire 3.3.1. *Sous les mêmes hypothèses que le lemme 3.3.2, on a pour tous t et s que*

$$\rho(f_t g_s f_{-t} g_{-s}) \leq s\,t\,\|\{F,G\}\|\,, \tag{3.3.3}$$

où ρ est la norme invariante sur Ham *induite par* $\|\cdot\|$.

Démonstration. Il suffit d'intégrer l'inégalité donnée par le lemme 3.3.2 par rapport à t :

$$\int_0^t \|H^s_\tau\|\,d\tau \leq s\,t\,\|\{F,G\}\|\,.$$

Puisque H^s engendre l'isotopie $t \mapsto f_t g_s f_{-t} g_{-s}$, le côté gauche de cette inégalité n'est rien d'autre que la longueur de l'isotopie en question par rapport à la norme $\|\cdot\|$, ce dont on déduit la formule (3.3.3). □

Une observation essentielle est que ce corollaire est significatif *seulement* dans le cas de la norme C^0 (et des normes qui y sont équivalentes). En effet, par le théorème 2.4.1, dans tous les autres cas la norme ρ induite sur Ham est dégénérée, voire identiquement nulle (pour les variétés fermées). Pour ces normes, on ne peut assurer que la borne inférieure donnée par l'équation (3.3.3) est non-triviale. La suite de l'argument s'applique donc uniquement à la norme C^0 (et bien entendu aux normes équivalentes).

Fin de la preuve du théorème 3.2.1. Avec le corollaire 3.3.1 en main, la preuve du théorème de Cardin-Viterbo est presque achevée. En effet, le corollaire fournit une borne inférieure sur la fonctionelle Φ qui est continue dans la topologie C^0. Pour être précis, on définit pour $s, t \neq 0$ les fonctionnelles

$$\begin{aligned} \zeta_{s,t} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (F,G) &\longmapsto \frac{1}{s\,t}\,\rho(f_t g_s f_{-t} g_{-s}), \end{aligned}$$

où comme à l'habitude f et g sont les flots de F et G. Le corollaire 3.3.1 affirme que $\zeta_{s,t} \leq \Phi$. On prétend que $\zeta_{s,t}$ est continue dans la topologie C^0. En effet, on sait déjà par la proposition 2.2.2 que l'application $\mathcal{H} \to \mathrm{Ham}$ qui associe à une fonction H le difféomorphisme hamiltonien h_t est continue dans la topologie C^0 sur $\mathcal{H}$ et la topologie d'Hofer sur Ham. De même, par continuité du produit et de l'inversion dans Ham, l'application $(\phi, \psi) \mapsto [\phi, \psi]$ est continue. Enfin, la norme d'Hofer $\rho : \mathrm{Ham} \to \mathbb{R}$ est clairement continue.

Puisque $\zeta_{s,t}$ est dominée par Φ, on a donc pour toutes fonctions A et B que

$$\begin{aligned} \liminf_{(F,G)\to(A,B)} \Phi(F,G) &\geq \liminf_{(F,G)\to(A,B)} \zeta_{s,t}(F,G) \\ &= \zeta_{s,t}(A,B) \\ &= \frac{1}{s\,t}\,\rho(a_t b_s a_{-t} b_{-s}). \end{aligned}$$

Si $\{A, B\}$ est non-nul, il existe par le corollaire 1.5.1 des temps s et t tels que $a_t b_s a_{-t} b_{-s} \neq \mathrm{id}$. La non-dégénérescence de la norme d'Hofer nous permet donc de conclure que $\liminf_{(F,G)\to(A,B)} \Phi(F,G) > 0$. □

L'argument utilisé dans la preuve du théorème de Cardin-Viterbo repose entièrement sur la non-dégénérescence de la norme d'Hofer. Cette méthode ne donne aucune information dans le cas de normes qui ne sont pas équivalentes à la norme C^0 ; on ne sait donc pas si le résultat tient toujours pour de telles normes. Par exemple, dans le cas des normes L^p, la proposition 3.3.2 fournit la borne inférieure suivante sur la norme du crochet de Poisson :

$$\begin{aligned} s^p \,\|\{F,G\}\|_p^p \geq \|H_t^s\|_p^p &= \int_M |F(x) - F(g_{-s} f_{-t} x)|^p \,\omega^n \\ &= \int_M |F(x) - F(g_{-s} x)|^p \,\omega^n. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité représente une moyenne sur M de la différence des valeurs que prend la fonction F en un point et en son image par le flot de G. Cette quantité n'est pas manifestement semi-continue inférieurement dans la topologie C^0 en raison de la présence du flot de G. Cette approche ne nous permet donc pas de tirer des conclusions immédiates sur la rigidité/flexibilité de la fonctionnelle $(F,G) \mapsto \|\{F,G\}\|_p$.

3.4. Preuve de la rigidité C^0 du crochet de Poisson

Dans cette section, on donne une démonstration du théorème 3.2.2 en utilisant les outils présentés au chapitre 2. La preuve présentée ici est due à L. Buhovski [**7**]. Nous allons principalement suivre l'exposition faite par Polterovich et Rosen [**30**]. L'ingrédient principal de la preuve est la positivité de l'énergie de déplacement de tout ouvert non-vide (théorème 2.3.1). Dans cette section, d, ρ et e dénotent respectivement la distance, la norme et l'énergie de déplacement induites par la norme C^0.

Comme nous l'avons souligné à la section précédente, il suffit de montrer le théorème pour la restriction de Φ à $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Tous les hamiltoniens considérés dans la suite seront donc supposés être autonomes et normalisés.

Comme dans la preuve du théorème de Cardin-Viterbo, l'objectif est de trouver des bornes inférieures sur $\|\{F,G\}\|_\infty$ en termes de quantités qui sont manifestement C^0-rigides. Cette estimation sera donnée au lemme 3.4.1 qui suit. Avant de formuler le lemme, faisons d'abord quelques observations simples qui rendront son énoncé plus naturel. Soit A et B des fonctions normalisées et b le flot hamiltonien de B. On fait les suppositions suivantes :

(1) Pour un certain $s > 0$, le difféomorphisme hamiltonien b_s déplace un certain ouvert U ;

(2) la fonction A est plus grande sur $b_s(U)$ qu'elle ne l'est sur U, i.e. on a
$$\inf_{b_s(U)} A - \sup_U A > q$$
pour un certain $q > 0$.

Alors, puisque $\{A,B\}$ est la dérivée de A dans la direction du flot hamiltonien de B, on a pour tout $x \in U$ que
$$\int_0^s \{A,B\}(b_t x)\,dt = A(b_s x) - A(x) > \inf_{b_s(U)} A - \sup_U A > q. \tag{3.4.1}$$
L'intégrale peut être facilement estimée en terme de la norme C^0 :
$$\int_0^s \{A,B\}(b_t x)\,dt \le s\,\|\{A,B\}\|_\infty .$$

De ces deux inégalités on obtient alors l'estimation $\|\{A, B\}\|_\infty > q/s$. Le lemme suivant affirme que cette inégalité est encore vraie (à epsilon près) si l'on remplace les fonctions A et B par des fonctions F et G qui sont suffisament proches dans la distance uniforme.

Lemme 3.4.1. *Soit A et B des fonctions normalisées ainsi que b le flot hamiltonien de B. On suppose qu'il existe un ouvert déplaçable U avec les propriétés suivantes :*

(1) Pour un certain $s > 0$, b_s déplace U ;

(2) $\inf_{b_s(U)} A - \sup_U A > q$ pour un certain $q > 0$;

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que l'inégalité

$$\|\{F, G\}\|_\infty > \frac{q}{s} - \varepsilon \tag{3.4.2}$$

est satisfaite pour toutes les fonctions $F, G \in \mathcal{H}$ telles que $\|F - A\|_\infty < \delta$ et $\|G - B\|_\infty < \delta$.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit F et G des fonctions normalisées telles que $\|F - A\|_\infty < \delta$ et $\|G - B\|_\infty < \delta$, où pour l'instant δ est quelconque et sera fixé plus tard. Par le même argument que ci-haut, la norme de $\{F, G\}$ peut être estimée par

$$s\ \|\{F, G\}\|_\infty \geq F(g_s(x)) - F(x)$$

pour tout $s \geq 0$ et tout $x \in M$. Puisque F est δ-proche de A, on obtient donc

$$s\ \|\{F, G\}\|_\infty \geq A(g_s(x)) - A(x) - 2\delta. \tag{3.4.3}$$

Par la condition (2), on a $A(y) - A(x) > q$ dès que $x \in U$ et $y \in b_s(U)$. On pourra donc borner le côté droit de l'équation (3.4.3) si on peut trouver *au moins un* $x \in U$ tel que que $g_s(x) \in b_s(U)$. En d'autre termes, il faut choisir G de sorte que l'ensemble $U \cap g_s^{-1}(b_s(U))$ soit non-vide, c'est-à-dire tel que le difféomorphisme hamiltonien $g_s^{-1}b_s$ *ne déplace pas* U. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, il suffit pour cela que la norme d'Hofer de $g_s^{-1}b_s$ soit plus petite que l'énergie de déplacement de U. Par la proposition 2.2.2, la norme d'Hofer peut être estimée en termes de la distance uniforme des hamiltoniens B et G comme suit :

$$\rho(g_s^{-1}b_s) = d(b_s, g_s) \leq \int_0^s \|G - B\|_\infty\ ds = s\ \|G - B\|_\infty. \tag{3.4.4}$$

On note par r l'énergie de déplacement de U. Par l'équation (3.4.4), on aura $\rho(g_s^{-1}b_s) < r$ dès que $\|G - B\|_\infty < r/s$. Par conséquent, en prenant $\delta = r/s$, le difféomorphisme $g_s^{-1}b_s$ ne peut pas déplacer U. Il existe donc un point $x \in U$ tel que $g_s(x) \in b_s(U)$. Par la condition (2), on a donc $A(g_s(x)) - A(x) > q$. L'équation

(3.4.3) devient alors

$$s\ \|\{F,G\}\|_\infty \geq q - 2\delta.$$

On en déduit que $\|\{F,G\}\|_\infty \geq q/s - 2\delta/s$. En prenant $\delta = \min\{s\varepsilon/2, r/s\}$, on a alors $\|\{F,G\}\|_\infty > q/s - \varepsilon$ pour toutes les fonctions F et G qui sont δ-proches de A et B respectivement, ce qui démontre le lemme. □

Remarque 3.4.1. Notons que ce lemme ne donnerait aucune information si l'ouvert U satisfaisait $e(U) = 0$. Toute la force de ce résultat réside donc dans la positivité de l'énergie de déplacement.

Remarque 3.4.2. Soulignons que cette méthode utilisant l'énergie de déplacement ne donne aucune information sur l'ensemble $g_s^{-1}b_s(U) \cap U$, outre qu'il est non-vide. Cela est suffisant pour estimer la norme C^0, ce qui explique pourquoi la preuve est spécifique à cette norme. Pour appliquer un raisonnement semblable à la norme L^p, il faudrait être en mesure de contrôler le volume de l'ensemble $g_s^{-1}b_s(U) \cap U$.

Pour démontrer le théorème, il ne reste qu'à prouver l'existence d'un ouvert U qui satisfait les conditions (1) et (2) du lemme pour un nombre q approprié.

Preuve du théorème 3.2.2. Soit A et B des fonctions normalisées. On pose $K = \|\{A,B\}\|_\infty$. Pour montrer la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle Φ, rappelons que l'on doit montrer que pour tout choix de $\varepsilon > 0$ on peut trouver un $\delta > 0$ tel que pour toutes fonctions normalisées satisfaisant $\|F - A\|_\infty < \delta$ et $\|G - B\|_\infty < \delta$, on ait $\|\{F,G\}\|_\infty > K - \varepsilon$. On suppose que $K > 0$, le cas $K = 0$ étant trivial. Quitte à remplacer A par $-A$, on peut supposer que K est le maximum de $\{A,B\}$. Soit x un point tel que $\{A,B\}(x) = K$.

Pour appliquer le lemme, on veut trouver un voisinage U de x tel que b_s déplace U pour un certain s. De plus, on veut que la différence entre les valeurs que prend A sur $b_s(U)$ et U soit de l'ordre de sK (on pourra alors prendre $q \approx sK$ dans le lemme). Pour ce faire, la dérivée de A le long du flot b (c'est-à-dire le crochet de Poisson $\{A,B\}$) devrait être de l'ordre du maximum K sur tous les ensembles $b_t(U)$ avec $t \in [0,s]$. On fixe donc un ouvert U et un temps $s > 0$ assez petits pour que

i) $\{A,B\}(b_t y) > K - \varepsilon$ pour tout $y \in U$ et tout $t \in [0,s]$.

Cela est évidemment possible par la continuité de la fonction $\{A,B\}$ et du flot b. La propriété i) permet seulement de contrôler la variation de A le long du flot de B. Pour que la condition (2) du lemme soit satisfaite, on doit être en mesure de contrôler la différence entre $A(b_s(y))$ et $A(z)$ pour *tous* les points $y, z \in U$. Pour ce faire, on impose la condition additionnelle que U soit assez petit pour que A ne varie pas beaucoup sur U :

ii) $|A(y) - A(z)| < s\varepsilon$ pour tous $y, z \in U$.

Encore une fois, cela est possible car A est continue. En vertu des conditions i) et ii), on a pour tous $y, z \in U$ que

$$\begin{aligned}
A(b_s y) - A(z) &= A(b_s y) - A(y) + A(y) - A(z) \\
&= \int_0^s \{A, B\}(b_t y)\, dt + A(y) - A(z) \\
&\geq s(K - \varepsilon) - s\varepsilon \\
&= s(K - 2\varepsilon).
\end{aligned}$$

Comme souhaité, la différence entre les valeurs que prend A sur $b_s(U)$ et U est de l'ordre de sK. De plus, en prenant ε plus petit si nécessaire on aura $K - 2\varepsilon > \varepsilon$, donc $A(b_s y) - A(z) > s\varepsilon$ pour tous y et z dans U. Par la condition ii), cela implique qu'on doit avoir $b_s(y) \notin U$ pour tout y, c'est-à-dire que b_s déplace U. On a donc construit un ouvert U qui satisfait les hypothèses du lemme 3.4.1 avec $q = s(K - 2\varepsilon)$.

Par le lemme, il existe un $\delta > 0$ tel que toutes les fonctions F et G qui sont δ-proches en norme C^0 de A et B respectivement satisfont

$$\|\{F, G\}\|_\infty \geq \frac{1}{s}\, s(K - 2\varepsilon) - \varepsilon = K - 3\varepsilon.$$

Puisque ε était arbitraire, cela montre que la fonctionnelle Φ est semi-continue inférieurement dans la topologie C^0. $\square$

Bibliographie

[1] Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden, et Tudor Ratiu, *Manifolds, tensor analysis, and applications*, 2e éd., Applied Mathematical Sciences, vol. 75, Springer-Verlag, New York, 1988.

[2] Vladimir I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, 2e éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989.

[3] Christopher J. Atkin et Janusz Grabowski, *Homomorphisms of the Lie algebras associated with a symplectic manifold*, Compositio Math. **76** (1990), no. 3, 315–349.

[4] Augustin Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Comment. Math. Helv. **53** (1978), no. 2, 174–227.

[5] ———, *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its Applications, vol. 400, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.

[6] William M. Boothby, *Transitivity of the automorphisms of certain geometric structures*, Trans. Amer. Math. Soc. **137** (1969), 93–100.

[7] Lev Buhovski, *The* 2/3*-convergence rate for the Poisson bracket*, Geom. Funct. Anal. **19** (2010), no. 6, 1620–1649.

[8] Lev Buhovski, Michael Entov, et Leonid Polterovich, *Poisson brackets and symplectic invariants*, Selecta Math. (N.S.) **18** (2012), no. 1, 89–157.

[9] Lev Buhovski et Yaron Ostrover, *On the uniqueness of Hofer's geometry*, Geom. Funct. Anal. **21** (2011), no. 6, 1296–1330.

[10] Franco Cardin et Claude Viterbo, *Commuting Hamiltonians and Hamilton-Jacobi multi-time equations*, Duke Math. J. **144** (2008), no. 2, 235–284.

[11] Kai Cieliebak, Helmut Hofer, Janko Latschev, et Felix Schlenk, *Quantitative symplectic geometry*, Dynamics, ergodic theory, and geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 54, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 1–44.

[12] Ivar Ekeland et Helmut Hofer, *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics*, Math. Z. **200** (1989), no. 3, 355–378.

[13] Yakov Eliashberg, *A theorem on the structure of wave fronts and its application in symplectic topology*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **21** (1987), no. 3, 65–72, 96.

[14] Yakov Eliashberg et Leonid Polterovich, *Bi-invariant metrics on the group of Hamiltonian diffeomorphisms*, Internat. J. Math. **4** (1993), no. 5, 727–738.

[15] Michael Entov et Leonid Polterovich, *C^0-rigidity of Poisson brackets*, Symplectic topology and measure preserving dynamical systems, Contemp. Math., vol. 512, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 25–32.

[16] Mikhail Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), no. 2, 307–347.

[17] ———, *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[18] Helmut Hofer, *On the topological properties of symplectic maps*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **115** (1990), no. 1-2, 25–38.

[19] Helmut Hofer et Eduard Zehnder, *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher., Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[20] Vincent Humilière, *Hamiltonian pseudo-representations*, Comment. Math. Helv. **84** (2009), no. 3, 571–585.

[21] Jacques Lafontaine et Michèle Audin, *Introduction : applications of pseudo-holomorphic curves to symplectic topology*, Holomorphic curves in symplectic geometry, Progr. Math., vol. 117, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 1–14.

[22] François Lalonde et Dusa McDuff, *The geometry of symplectic energy*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 2, 349–371.

[23] Dusa McDuff et Dietmar Salamon, *Introduction to symplectic topology*, 2e éd., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[24] ———, *J-holomorphic curves and symplectic topology*, 2e éd., American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 52, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[25] Jürgen Moser, *On the volume elements on a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965), 286–294.

[26] Yong-Geun Oh, *Symplectic topology and Floer homology. Vol. 2*, New Mathematical Monographs, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 2015, Floer homology and its applications.

[27] Yaron Ostrover et Roy Wagner, *On the extremality of Hofer's metric on the group of Hamiltonian diffeomorphisms*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 35, 2123–2141.

[28] Leonid Polterovich, *Symplectic displacement energy for Lagrangian submanifolds*, Ergodic Theory Dynam. Systems **13** (1993), no. 2, 357–367.

[29] ———, *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[30] Leonid Polterovich et Daniel Rosen, *Function theory on symplectic manifolds*, CRM Monograph Series, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[31] Frol Zapolsky, *Quasi-states and the Poisson bracket on surfaces*, J. Mod. Dyn. **1** (2007), no. 3, 465–475.

[32] Frol Zapolsky et Karina Samvelyan, *Rigidity of the L^p-norm of the Poisson bracket on surfaces*, Electron. Res. Announc. Math. Sci. **24** (2017), 28–37.