Université de Montréal

Géométrie algébrique : Théorèmes d'annulation sur les variétés toriques

par

Vincent Girard

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

28 août 2017

SOMMAIRE

Ce mémoire se veut une bonne introduction au sujet des variétés toriques ainsi qu'à la théorie des faisceaux. On exposera des résultats déjà présents dans la littérature, mais dont les preuves sont partielles, découpées dans plusieurs sources ou simplement trop complexes pour un lecteur débutant. On synthétisera et détaillera ces résultats en limitant (dans la mesure du possible) les connaissances requises à leur compréhension.

On terminera ce mémoire par la démonstration de théorèmes d'annulation, permettant entre autres d'aborder la preuve (pour les variétés toriques) du théorème de Grauert-Riemenschneider.

Prérequis : des connaissances de base sur les variétés algébriques ou sur l'homologie pourraient aider à mieux appréhender les concepts discutés dans ce mémoire, et certains exemples font référence aux surfaces de Riemann ou aux CW-complexes. Toutefois, aucune connaissance de niveau gradué n'est nécessaire.

Mots-clés : Variétés algébriques, Variétés toriques, Faisceaux, Cohomologie de faisceaux, Théorèmes d'annulation

SUMMARY

This master's thesis is meant to be a good introduction to toric varieties and sheaves theory. We will show some results already present in the literature whose proofs are either incomplete, divided in multiple sources or too complex for a novice. We will synthesize and detail these results while avoiding (as much as possible) required knowledge of the subject.

We will finish this thesis with a proof of some vanishing theorems, required to tackle the Grauert-Riemenschneider theorem's proof (in the toric case).

Prerequisite : some basic knowledge of algebraic varieties or homology would help understand some of the concepts we discuss and a few examples we give refer to Riemann surfaces or CW complexes. But no knowledge past undergraduate-level is required.

Keywords : Algebraic varieties, Toric varieties, Sheaves, Sheaves cohomology, Vanishing theorems

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord remercier le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) et les Fonds de recherche - Nature et technologies du Québec (FRQNT). Les bourses d'étude qu'ils m'ont octroyées m'ont permis de me concentrer pleinement sur ma maîtrise.

Je souhaiterais aussi remercier mon directeur de recherche, Dr Abraham Broer, qui m'a soutenu et dirigé tout au long de mon parcours. Je sais que je n'ai pas dû être l'étudiant le plus facile à suivre et je le remercie grandement pour son aide.

Finalement, je veux remercier mes amis et surtout ma famille, qui m'ont encouragé tout au long de ma vie et qui m'ont poussé à me dépasser et à me démarquer dans mes études. J'aurais abandonné depuis longtemps si ce n'était pas d'eux.

INTRODUCTION

Le but de ce mémoire est double. Dans un premier temps, on souhaite offrir au lecteur une introduction relativement simple à la théorie des variétés toriques, sans nécessiter à ce-dernier une trop grande connaissance de la géométrie algébrique. Cette introduction aura toutefois pour objectif de démontrer des théorèmes d'annulation de la cohomologie de tels variétés. (Ces concepts seront définis au courant de la lecture.)

Dans le premier chapitre, on parlera de variétés algébriques. Intuitivement, il s'agit d'un espace topologique construit en recollant des espaces «simples», de façon analogue à la définition usuelle de variété. Toutefois, au lieu de prendre comme espaces simples les ouverts de $\mathbb{R}$, on prendra les zéros de polynômes multivariés. Dans notre cas, nous nous restreindrons aux polynômes à coefficients complexes, et donc à leurs racines dans $\mathbb{C}^n$. Une variété torique sera une variété algébrique possédant un sous-ensemble dense T se comportant comme $(\mathbb{C}^*)^m$ et agissant sur la variété de façon naturelle.

L'ajout de cette propriété algébrique nous permet de construire une classe de variété algébrique qui est, comme on le verra dans ce mémoire, facile à caractériser tout en restant vaste. De plus, l'action de T nous permet de simplifier certaines preuves. Cela fait donc de cette classe un bon candidat pour «tester» des théorèmes avant de s'attaquer à leurs démonstrations dans le cas général.

La plus importante de ces caractérisations est celle de «l'éventail», un recouvrement de (ou d'une partie de) $\mathbb{R}^m$ par des cônes centrés à l'origine. On peut associer à chaque variété torique un tel éventail (unique à isomorphisme près) et vice versa. Plusieurs propriétés sont préservées par cette association. Par exemple, la variété sera compacte si et seulement si l'éventail recouvre tout $\mathbb{R}^m$ et un morphisme entre variétés toriques correspondra à un morphisme d'éventail (et vice versa). On pourra aussi utiliser cet éventail pour étudier certains faisceaux sur notre variété et pour calculer la cohomologie de ces faisceaux.

Dans le second chapitre, on définira ce qu'est la cohomologie d'un faisceau. Celle-ci est très similaire au concept de cohomologie singulière d'un espace topologique (on vera que c'est en fait une généralisation de ce concept) : c'est une suite de groupes abéliens caractérisant notre faisceau.

On introduira différents types de faisceaux qui seront utilisés dans notre construction de la cohomologie. On explicitera certaines propriétés de cette construction et on montrera une méthode plus concrète pour «calculer» ces groupes, méthode appelée la *Cohomologie de Čech*.

Dans le troisième et dernier chapitre, on réunira les concepts introduits afin de démontrer des théorèmes d'annulation. En terme simple, on cherchera à démontrer des conditions sous lesquelles la cohomologie de certains faisceaux «s'annule» : tous les groupes passés celui d'ordre 0 seront triviaux. Le groupe d'ordre 0 étant généralement le seul groupe facilement calculable, c'est un résultat très puissant.

On introduira pour ce faire un dernier type de faisceau nous permettant d'utiliser les méthodes développées au chapitre 2 aux faisceaux introduits dans le chapitre 1.

En plus de ces trois chapitres, deux annexes ont été ajoutées afin d'introduire des concepts (celui de faisceaux et celui de cônes convexes de type fini) qui seront fréquemment manipulés dans ce texte, mais qui ne sont pas forcément bien connus du lecteur. On y présente les différents résultats utilisés ainsi qu'une démonstration de la majorité d'entre eux.

Au début de chaque chapitre et de chaque annexe, je mentionnerai les sources principales, les textes sur lesquelles est basée cette partie. Cela signifie que la majeure partie des définitions, des résultats et de la notation proviennent de ces sources (à traduction près). Certaines des preuves étant laissées en exercice, je les ai donc composées (ou complétées). Outre cela et les quelques preuves que j'ai refaites afin de les rendre plus accessibles, le lecteur devrait être capable de suivre ces sources en parallèle sans trop de difficulté.

Chapitre 1

VARIÉTÉS TORIQUES

Ce premier chapitre servira d'introduction aux variétés toriques et aux différents concepts de géométrie algébrique dont on aura besoin (e.g., les éventails, les faisceaux structuraux et les diviseurs). Avant de pouvoir définir ces concepts, nous aurons d'abord besoin d'introduire des notions plus fondamentales.

Les sources principales de ce chapitre sont [5] et [7]. Bien qu'on se restreindra à des variétés définies sur les complexes, on pourrait tout aussi bien remplacer $\mathbb{C}$ par n'importe quel corps algébriquement clos. Pour une introduction plus détaillée aux variétés algébriques, je recommande au lecture le livre [4].

Avant de commencer, il est recommandé au lecteur de se familiariser avec les deux annexes. Le concept de faisceaux sera mentionné tout au long du chapitre, particulièrement dans la section 1.7. Quant aux cônes convexes, ils prennent beaucoup d'importance à partir de la section 1.4.

1.1. Variétés algébriques affines

Dans cette section, on introduira des espaces simples (les variétés algébriques affines) avec lesquels on construira nos variétés toriques. Pour cette raison, on ne démontrera que très peu des résultats. Des sources seront toutefois données pour le lecteur souhaitant vérifier ces résultats.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et posons $S \doteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Définition. Soit $E \subseteq S$ un ensemble de polynômes multivariés. On appellera *variété algébrique affine* (ou simplement *variété affine*) l'ensemble $V \subseteq \mathbb{C}^n$ des racines communes à tous les polynômes de E. On remarque que les éléments de V seront des racines de tous polynômes engendrés par E, c'est-à-dire que si $I \doteq (E)$ est l'idéal engendré par E, alors on notera V par $\mathbf{V}(I) = \{p \in \mathbb{C}^n \mid f(p) = 0\ \forall f \in I\}$.

Une variété affine V sera dite *réductible* s'il existe deux sous-variétés affines strictes V_1 et V_2 (des variétés de $\mathbb{C}^n$ contenues dans V) telles que $V = V_1 \cup V_2$. Dans le cas contraire, on dira que V est *irréductible*.

Si V est une variété affine, on dénotera par $\mathbf{I}(V) \doteq \{f \in S \mid f(p) = 0 \; \forall p \in V\}$ l'idéal des polynômes s'annulant sur tout V.

On définit alors *l'anneau de coordonnées* de V par $\mathbb{C}[V] \doteq S/\mathbf{I}(V)$. On peut le voir comme l'anneau des polynômes à valeur dans $\mathbb{C}$, restreints à V. Sa structure naturelle de $\mathbb{C}$-espace vectoriel en fera même une $\mathbb{C}$-algèbre.

Soit $V_1 \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ et $V_2 \subseteq \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$ deux variétés affines. Un *morphisme* entre V_1 et V_2 est une fonction $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : V_1 \to \mathbb{C}^m$ où chaque φ_i est dans $\mathbb{C}[V_1]$ et où l'image de φ est dans V_2. On dira que ce morphisme est un isomorphisme s'il est bijectif et si φ^{-1} est un morphisme.

Quelques propriétés de base sur les variétés affines (voir [4, chap. 5.4]) :

— (Théorème de la base de Hilbert) Si V est une variété affine, $\mathbf{I}(V)$ sera généré par un nombre fini de polynômes. En particulier, toute variété affine est définie par un nombre fini de polynômes.

— (Théorème des zéros de Hilbert, «Nullstellenstatz») Soit $I \subseteq S$ un idéal. Alors, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I} = \{f \in S \mid f^k \in I \text{ pour un } k \geq 1\}$.

— Les trois énoncés «$\mathbb{C}[V]$ est un domaine intègre.», «$\mathbf{I}(V)$ est un idéal premier.» et «V est irréductible.» sont équivalents.

— À chaque morphisme $\varphi : V_1 \to V_2$, on peut associer un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbre $\varphi^* : \mathbb{C}[V_2] \to \mathbb{C}[V_1]$ défini par $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$ pour chaque $g \in \mathbb{C}[V_2]$. En plus d'être un foncteur contravariant, cette association est en fait une bijection entre les morphismes de V_1 vers V_2 et les homomorphismes de $\mathbb{C}[V_2]$ vers $\mathbb{C}[V_1]$.

— Deux variétés affines sont isomorphes si et seulement si leurs anneaux de coordonnées sont des $\mathbb{C}$-algèbres isomorphes.

— Chaque sous-variété W de V induit un idéal $\mathbf{I}_V(W) \doteq \{f \in \mathbb{C}[V] \mid f(x) = 0 \; \forall \, x \in W\}$ radiciel (tel que $\sqrt{I} = I$). L'application $\mathbf{I}_V$ forme une bijection entre les sous-variétés de V et les idéaux radiciels de $\mathbb{C}[V]$.

— Chaque point $p \in V$ nous donne l'idéal maximal $\{f \in \mathbb{C}[V] \mid f(p) = 0\}$ de $\mathbb{C}[V]$. Tout idéal maximal de $\mathbb{C}[V]$ s'écrit ainsi.

Cette dernière propriété nous permet d'écrire $V = \mathrm{Spm}(\mathbb{C}[V])$ où $\mathrm{Spm}(R)$ est le *schéma affine* (le *spectre*) de l'anneau commutative unitaire R, c'est-à-dire l'ensemble des idéaux maximaux de R.

Définition. La topologie usuelle de $\mathbb{C}$ induit sur V une topologie, qu'on appellera *topologie classique*. On définira toutefois une deuxième topologie sur V : la *topologie de Zariski*. Un sous-ensemble de V sera fermé dans la topologie de Zariski si et seulement si c'est une sous-variété de V. Ceux-ci étant fermés dans la topologie classique (car ce sont les racines de fonctions polynomiales, donc continues), la topologie de Zariski sera moins fine que la topologie classique.

Les ouverts de la forme $V_f \doteq \{p \in V \mid f(p) \neq 0\}$ (pour $f \in \mathbb{C}[V]$) forment une base de cette topologie. C'est-à-dire que tout ouvert de Zariski peut s'écrire comme une union finie de V_{f_i}. On les appelera les *ouverts principaux*. On les dénote aussi parfois par $D(f)$.

Ces deux topologies ne sont toutefois pas identiques. Par exemple, les seuls fermés dans $\mathbb{C}$ sous la topologie de Zariski sont $\mathbb{C}$ et les ensembles finis.

Prenons maintenant une variété affine irréductible V et dénotons par $\mathbb{C}(V)$ le corps de fractions de $\mathbb{C}[V]$. On définira alors l'*anneau local* de V au point p par : $\mathcal{O}_{V,p} \doteq \{f/g \in \mathbb{C}(V) \mid f,g \in \mathbb{C}[V] \text{ et } g(p) \neq 0\}$. En d'autre mots, ce sont les éléments de $\mathbb{C}(V)$ (les fonctions rationnelles) qui sont définies en p.

En algèbre commutative, «anneau local» est le terme utilisé pour les anneaux commutatifs n'ayant qu'un seul idéal maximal. En effet, le seul idéal maximal de $\mathcal{O}_{V,p}$ est $m_{V,p} \doteq \{\varphi \in \mathcal{O}_{V,p} \mid \varphi(p) = 0\}$.

Le choix de la notation de cet anneau vient du fait qu'on peut construire un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{O}_V$ sur V (avec la topologie de Zariski), appelé *faisceau structural*, tel que $\mathcal{O}_{V,p}$ est la fibre de $\mathcal{O}_V$ au point p. On peut trouver la construction dans plusieurs références ([**12**, chap. 2], [**5**, chap. 3.0] et [**15**, chap. I.4], pour n'en nommer que trois), mais voici quelques propriétés sur ce faisceau :

— Si on voit les $\mathcal{O}_{V,p}$ comme des sous-anneaux de $\mathbb{C}(V)$, alors pour tout ouvert (de Zariski) $U \subseteq V$, $\mathcal{O}_V(U) = \bigcap_{p \in U} \mathcal{O}_{V,p}$. En d'autres mots, une fonction rationnelle $f \in \mathbb{C}(V)$ est dans $\mathcal{O}_V(U)$ si et seulement si pour tout $p \in U$, il existe un ouvert $W_p \subseteq U$ contenant p et des fonctions $g,h \in \mathbb{C}(V)$ tels que h ne s'annulent en aucun point de W_p et que $f(x) = g(x)/h(x)$ pour tout $x \in W_p$.

  En particulier, on peut voir $\mathcal{O}_V(U)$ comme un ensemble de fonctions à valeur dans $\mathbb{C}$ et définies partout sur U. En effet, si deux fonctions rationnelles coïncident sur U, alors leur différence s'y annule. Or, si g/h s'annule sur tout W_p, c'est que g s'annule sur tout W_p. Ainsi, l'ouvert W_p est inclus dans un fermé de Zariski (celui des zéros de g), ce qui est impossible car V est irréductible (aucun ouvert n'est inclus dans un fermé autre que V). La différence doit donc être la fonction nulle et les deux fonctions sont en fait égales. On dira donc que $\mathcal{O}_V(U)$ est l'ensemble des fonctions *régulières* sur U.

— Soit R un anneau et K son corps de fractions. Pour tout $f \in R$, on dénotera par R_f le sous-anneau de K engendré par R et $1/f$ et on l'appellera la *localisation* de R en f. Alors, soit V_f un ouvert principal de V. On aura que $\mathcal{O}_V(V_f) = \mathbb{C}[V]_f$. En particulier, $\mathcal{O}_V(V) = \mathbb{C}[V]$.

En général, on traitera les ouverts principaux V_f comme des variétés affines d'anneau de coordonnées $\mathbb{C}[V_f] = \mathbb{C}[V]_f$. Cette définition, qui semble contraire à la définition qu'on a fait de variété affine, est toutefois très naturelle. En effet, remarquons d'abord que les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[V]_f$ sont exactement ceux de $\mathbb{C}[V]$ qui ne contiennent pas f. C'est-à-dire qu'ils correspondent exactement aux points de V_f. On peut aussi construire une «vraie» variété affine correspondant à V_f.

Écrivons $\mathbf{I}(V) = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ et prenons $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ un représentant de f ($V_f = V \setminus \mathbf{V}(g)$). Soit maintenant la variété affine $W \doteq \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s, 1 - gy) \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ (où y est la $(n+1)$-ième variable de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y]$).

La projection $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n \times \{0\} = \mathbb{C}^n$ nous donnera un isomorphisme entre W et V_f. En effet, W est clairement contenu dans $V \times \mathbb{C}$ (qui est simplement $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$). Donc, l'image de W par la projection est dans V. De plus, pour chaque fibre $\{x\} \times \mathbb{C}$ avec $x \in V$, si $g(x) = 0$ (c'est-à-dire si $x \notin V_f$), il n'y aura aucun $y \in \mathbb{C}$ tel que $1 - g(x)y = 0$. On aura alors que $(\{x\} \times \mathbb{C}) \cap W = \emptyset$ et donc que la projection de W est en fait dans V_f. Mais si $g(x) \neq 0$ ($x \in V_f$), alors il existe un unique $y \in \mathbb{C}$ tel que $1 - g(x)y = 0$, soit $y = 1/g(x)$. La projection étant définie par $\pi = (x_1, \ldots, x_n)$, c'est donc bien un morphisme bijectif entre W et V_f. Son inverse est la fonction $\varphi = (x_1, \ldots, x_n, 1/f(x_1, \ldots, x_n))$ qui est un morphisme de V_f vers W. On a donc bien un isomorphisme entre W et V_f.

Il n'est pas très difficile de vérifier que cette projection induit un isomorphisme entre les anneaux de coordonnées. La seule difficulté est de vérifier que l'image de $1/f$ est bien y.

On généralisera donc notre définition de variété affine pour inclure les ouverts principaux avec une structure de variété affine. À noter que cela signifie qu'il faudra faire la distinction entre les sous-variétés affines (les fermés de la topologie de Zariski) et les sous-ensembles ayant une structure de variété affine (comme les ouverts principaux).

On remarque aussi que, quitte à multiplier par une puissance de f, on peut toujours choisir les générateurs d'un idéal de $\mathbb{C}[V_f]$ de sorte qu'ils soient tous dans $\mathbb{C}[V] \subseteq \mathbb{C}[V_f]$. En particulier, la topologie de Zariski de V_f (où les fermés sont les zéros communs de ces générateurs) est induite par la topologie de Zariski de V.

Sachant tout cela, et comme $\mathbb{C}[V]$ et $\mathbb{C}[V_f]$ ont le même corps de fraction, on peut facilement voir que le faisceau structural $\mathcal{O}_{V_f}$ de V_f est simplement la restriction $\mathcal{O}_V|_{V_f}$ du faisceau structural de V.

Prenons l'exemple simple de $V = \mathbb{C}^n$, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ et $V_f = (\mathbb{C}^*)^n$. Selon ce qu'on a dit, $\mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^n] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{x_1 \cdots x_n}$. Comparons l'anneau $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{x_1 \cdots x_n}$ avec $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ (l'anneau des polynômes de Laurent) en tant que sous-anneaux de $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$. Clairement, le premier est inclus dans le deuxième, car $1/(x_1 \cdots x_n)$ s'écrit comme $1/x_1 \cdot \ldots \cdot 1/x_n$. Mais la réciproque est aussi vrai, car chaque x_i^{-1} s'écrit comme $\dfrac{x_1 \cdots \hat{x}_i \cdots x_n}{x_1 \cdots x_n}$ (où $\hat{x}_i$ signifie que x_i a été omis du produit). Ces deux anneaux sont donc égaux.

Définition. On dit qu'un domain intègre R est *normal* (ou *intégralement clos*) si tout élément de son corps de fraction K qui est *entier* sur R (c'est-à-dire qui est racine d'un polynôme unitaire à coefficient dans R) est en fait dans R. On dit aussi que R est sa propre clôture intégrale. Une variété affine irréductible V sera *normal* si son anneau de coordonnées $\mathbb{C}[V]$ est normal.

Remarquons que si V_1 et V_2 sont deux variétés affines, alors leur produit cartésien $V_1 \times V_2$ l'est aussi. En effet, si $\mathbf{I}(V_1) = \langle f_1, \ldots ,f_s\rangle \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots ,x_m]$ et si $\mathbf{I}(V_2) = \langle g_1, \ldots ,g_t\rangle \subseteq \mathbb{C}[y_1, \ldots ,y_n]$, alors on peut voir tous ces polynômes comme des éléments de $\mathbb{C}[x_1, \ldots ,x_m,y_1, \ldots ,y_n]$. Ainsi, on aura que $V_1 \times V_2 = \mathbf{V}(f_1, \ldots ,f_s,g_1, \ldots ,g_t)$ est bien une variété affine.

1.2. Variétés toriques affines

Avant de définir ce qu'est une variété torique, commençons par définir la notion de «tore» :

Définition. Un *tore* (de dimension n) est une variété affine T qui est isomorphe à la variété $(\mathbb{C}^*)^n$. Remarquons que $(\mathbb{C}^*)^n$ forme un groupe avec le produit composante par composante : $(x_1, \ldots ,x_n) \cdot (y_1, \ldots ,y_n) = (x_1y_1, \ldots , x_ny_n)$. Cela induit une structure de groupe à T.

À noter que $(\mathbb{C}^*)^n$ étant irréductible (son anneau de coordonnées est un domaine intègre), tous les tores le seront aussi.

Proposition 1.1. *Soient deux tores T_1 et T_2 et soit un morphisme $\Phi : T_1 \to T_2$ qui est aussi un homomorphisme de groupe. Alors, l'image de Φ est un fermé de T_2 (selon Zariski) qui est aussi un tore.*

Démonstration. Nous ne ferons pas la preuve complète de cet énoncé. Celle-ci se trouve dans [**12**]. À la page 33, il démontre un théorème (de Chevalley) affirmant que l'image de Φ est un ensemble constructible. À la page 54, il démontre qu'un sous-groupe constructible est toujours fermé. Or, l'image d'un homomorphisme de groupe est toujours un sous-groupe. Ceci nous donne bien que l'image est fermée.

Ensuite, à la page 103, il démontre qu'un sous-groupe fermé d'un d-groupe est d-groupe. (Un d-groupe est un terme défini dans cette section. On a seulement besoin de savoir qu'un tore est un d-groupe). Finalement, à la page suivante, il démontre qu'un d-groupe connexe est forcément un tore. Or, T_1 étant connexe (il est isomorphe, donc homéomorphe, à $(\mathbb{C}^*)^n$ qui est connexe), son image l'est aussi. Ceci conclut la preuve. □

Continuons avec quelques petits concepts reliés aux tores.

Définition. Un *caractère* sur un tore T est un morphisme $\chi : T \to \mathbb{C}^*$ qui est aussi un homomorphisme de groupe.

Par exemple, pour chaque $m = (a_1, \ldots , a_n) \in \mathbb{Z}^n$, on a un caractère χ^m de $(\mathbb{C}^*)^n$ défini par $\chi^m(t_1, \ldots ,t_n) \doteq t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$. En effet, c'est un élément de $\mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^n] = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots , t_n^{\pm 1}]$ dont l'image est dans $\mathbb{C}^*$ (c'est-à-dire que c'est bien un morphisme) et c'est un homomorphisme de groupe.

Proposition 1.2. *Tout caractère de* $(\mathbb{C}^*)^n$ *s'écrit* χ^m *pour un certain* $m \in \mathbb{Z}^n$*. En particulier, les caractères de* $(\mathbb{C}^*)^n$ *forment un groupe isomorphe à* $\mathbb{Z}^n$ *(avec le produit* $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$*).*

Démonstration. Soit χ un caractère de $(\mathbb{C}^*)^n$. C'est un élément de $\mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^n]$ qui ne s'annule jamais. En rassemblant les termes de χ contenant la même puissance de t_1, on se retrouve avec des entiers $k \leq l$ et des polynômes de Laurent $P_k, \ldots, P_l \in \mathbb{C}[t_2^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ tels que $\chi(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{i=k}^{l} t_1^i P_i(t_2, \ldots, t_n)$.

En fixant les $t_2, \ldots, t_n$ constantes, on se retrouve alors avec un polynôme de Laurent à une variable qu'on peut réécrire ainsi : $t_1^k \sum_{i=0}^{l-k} a_i t_1^i$ où les a_i sont dans $\mathbb{C}$. Or, la seule façon que ce polynôme n'ait que $t_1 = 0$ comme racine est qu'exactement un seul des a_i soit non-nul. Cela signifie que les polynômes P_i ont des supports (l'ensemble des points où le polynôme ne s'annule pas) disjoints et recouvrant $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$. Pour chaque P_i, par continuité, l'ensemble $P_i^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est ouvert. Or, $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ est connexe. La seule façon de le recouvrir avec des ouverts disjoints est que tous ces ouverts sauf un soient vides. Il n'y a donc qu'un seul polynôme P_j qui n'est pas constante-nulle. On a donc que $\chi(t_1, \ldots, t_n) = t_1^j P_j(t_2, \ldots, t_n)$.

En appliquant cet argument à chaque t_i, on a que $\chi(t_1, \ldots, t_n) = a t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$ où $a \in \mathbb{C}$. Or, comme χ est un homomorphisme de groupe, il doit envoyer l'unité de $(\mathbb{C}^*)^n$, c'est-à-dire $(1, \ldots, 1)$, vers 1. On a donc que a doit être 1, ce qui conclut la preuve. □

De la même façon, pour tout tore de dimension n, ses caractères forment un groupe abélien libre M de rang n. On peut s'en convaincre en prenant l'isomorphisme entre le tore et $(\mathbb{C}^*)^n$ et en le composant avec les caractères, on obtient alors un isomorphisme entre les groupes de caractères. On notera généralement ces caractères χ^m pour chaque $m \in M$.

Définition. Un *sous-groupe à un paramètre* d'un tore T est un morphisme $\lambda : \mathbb{C}^* \to T$ qui est aussi un homomorphisme de groupe.

Par exemple, pour chaque $u = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$, on a un sous-groupe à un paramètre $\lambda^u : \mathbb{C}^* \to (\mathbb{C}^*)^n$ défini par $\lambda^u(t) = (t^{b_1}, \ldots, t^{b_n})$. En effet, chaque t^{b_i} est un élément de $\mathbb{C}[\mathbb{C}^*] = \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ et aucun d'eux ne s'annulent sur $\mathbb{C}^*$ (donc l'image de λ^u est bien dans $(\mathbb{C}^*)^n$). C'est donc bien un morphisme. C'est aussi clairement un homomorphisme de groupe.

Proposition 1.3. *Tout sous-groupe à un paramètre de* $(\mathbb{C}^*)^n$ *s'écrit* λ^u *pour un certain* $u \in \mathbb{Z}^n$*. En particulier, les sous-groupes à un paramètre de* $(\mathbb{C}^*)^n$ *forment un groupe isomorphe à* $\mathbb{Z}^n$ *(avec le produit* $\lambda^u \cdot \lambda^{u'} = \lambda^{u+u'}$*).*

Démonstration. Soit λ un sous-groupe à un paramètre de $(\mathbb{C}^*)^n$. Comme c'est un morphisme de $\mathbb{C}^*$ vers $(\mathbb{C}^*)^n$, il doit s'écrit comme $\lambda = (P_1, \ldots, P_n)$ où chaque P_i est un polynôme de Laurent qui ne s'annule en aucun point de $\mathbb{C}^*$. Comme précédemment, cela signifie qu'il existe $b_i \in \mathbb{Z}$ et $a_i \in \mathbb{C}^*$ tels que $P_i(t) = a_i t^{b_i}$. On a donc que $\lambda(t) = (a_1 t^{b_1}, \ldots, a_n t^{b_n})$.

Or, λ est aussi un homomorphisme de groupe. Il doit donc envoyer 1 vers $(1,\ldots,1)$. Cela signifie que $a_i = 1$ pour tout i, ce qui conclut la preuve. $\square$

De la même façon, pour tout tore de dimension n, ses sous-groupes à un paramètre forment un groupe abélien libre N de rang n. On les notera généralement par λ^u pour chaque $u \in N$.

Cela nous donne une application bilinéaire naturelle $\langle\ ,\ \rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$ définie ainsi : si $m \in M$ et $u \in N$, alors la composition $\chi^m \circ \lambda^u : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ nous donne un caractère de $\mathbb{C}^*$. Il s'écrit donc $t \mapsto t^l$ pour un $l \in \mathbb{Z}$. On définit alors $\langle m,u\rangle \doteq l$.

Dans le cas où le tore est $(\mathbb{C}^*)^n$, on peut facilement calculer la composition : si $m = (a_1,\ldots,a_n)$ et $u = (b_1,\ldots,b_n)$, alors $\langle m,u\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ (le produit scalaire usuelle). En prenant les isomorphismes mentionnés plus haut, on obtient que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire usuelle dans le cas général pour certaines bases. On a ainsi une notion de base duale et on peut identifier M à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{Z})$ et N à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z})$.

De plus, le produit tensoriel $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ nous donne un tore en identifiant $u_i \otimes 1$ à e_i (où u_i et e_i sont les éléments de N et $(\mathbb{C}^*)^n$ (respectivement) ayant 1 à la i-ième composante et 0 aux autres). Sous cette identification, l'application $u \otimes t \mapsto \lambda^u(t)$ envoit $u_i \otimes 1$ vers t_i (l'élément de T associé à e_i) et sera ainsi un isomorphisme (de variété et de groupe).

Étant donné qu'on peut retrouver T à partir de N, il est commun de dénoter T par T_N.

Ainsi, nous pouvons enfin définir les variétés toriques.

Définition. Soit V une variété affine irréductible ayant un tore T_N comme ouvert principal (avec la structure de variété affine associée). Si l'action de T_N sur lui-même (induite par $(\mathbb{C}^*)^n$) se prolonge à une action de T_N sur V de sorte que pour tout $t \in T_N$, la fonction associée $t : V \to V$ soit un morphisme, alors on dira que V est une *variété torique affine.*

On définira la *dimension* de V comme la dimension de T_N.

À noter que la condition sur l'action de T_N sur V peut être reformulée en demandant qu'elle engendre un morphisme entre $T_N \times V$ et V, mais notre définition étant à la fois suffisante et plus simple, c'est elle qu'on utilisera.

Les variétés affines $(\mathbb{C}^*)^n$ et $\mathbb{C}^n$ (ainsi que toutes celles de la forme $(\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s}$) sont des exemples simples de variétés toriques affines.

Exemple. Pour un exemple moins trivial, prenons la variété $V \doteq \mathbf{V}(xy - wz) \subseteq \mathbb{C}^4$. Celle-ci est irréductible, car le polynôme $xy - wz$ est irréductible et l'idéal qu'il engendre est donc premier. Regardons ensuite l'ouvert principal $V_{xywz} = V \cap (\mathbb{C}^*)^4$. Chaque point de cet ouvert est à la fois un zéro de $xy - wz$ et n'a aucune composante nulle. La quatrième composante est donc uniquement déterminée par les trois autres : on peut écrire chaque point comme $(t_1,t_2,t_3,t_1t_2t_3^{-1})$ où chaque $t_i \in \mathbb{C}^*$. Cela nous donne un isomorphisme entre $(\mathbb{C}^*)^3$ et V_{xywz}, $(t_1,t_2,t_3) \mapsto (t_1,t_2,t_2,t_1t_2t_3^{-1})$.

Notre ouvert est donc un tore. On peut calculer son action sur lui-même : $(t_1,t_2,t_3,t_1t_2t_3^{-1})\cdot(t'_1,t'_2,t'_3,t'_1t'_2{t'}_3^{-1}) = (t_1t'_1,t_2t'_2,t_3t'_3,t_1t_2t_3^{-1}t'_1t'_2{t'}_3^{-1})$. Or, c'est exactement la restriction à V_{xywz} de l'action de $(\mathbb{C}^*)^4$ sur $\mathbb{C}^4$. Pour chaque $t \in V_{xywz}$, on aura donc un morphisme de $\mathbb{C}^4$ vers $\mathbb{C}^4$ et, en restreignant, un morphisme V vers $\mathbb{C}^4$.

Pour montrer que V est une variété torique affine (de dimension 3), il ne reste donc qu'à montrer que l'action de V_{xywz} sur V ne sort pas de V. Prenons donc $t = (t_1,t_2,t_3,t_1t_2t_3^{-1}) \in V_{xywz}$ et $p = (p_1,p_2,p_3,p_4) \in V$ et montrons que $t \cdot p$ est un zéro de $xy - wz$. En effet, $(t_1p_1)(t_2p_2) - (t_3p_3)(t_1t_2t_3^{-1}p_4) = t_1t_2p_1p_2 - t_1t_2p_3p_4 = (t_1t_2)(p_1p_2 - p_3p_4) = 0$. On a donc bien que $t \cdot p$ est dans V et donc que t est bien un morphisme de V vers V.

Définition. Soient V_1 et V_2 deux variétés toriques affines (avec tores respectifs T_1 et T_2). Un morphisme $\psi : V_1 \to V_2$ sera dit *torique* si $\psi(T_1) \subseteq T_2$ et si $\psi|_{T_1} : T_1 \to T_2$ est un homomorphisme de groupe.

Cette définition nous donne en particulier une notion d'*isomorphisme* de variétés toriques affines (c'est-à-dire un morphisme torique bijectif dont l'inverse est aussi un morphisme torique). Un tel isomorphisme sera à la fois un isomorphisme de variétés entre V_1 et V_2 et un isomorphisme de tores entre T_1 et T_2. La proposition suivante nous permet d'affirmer que cela implique que V_1 et V_2 représentent à toutes fins pratiques le même objet :

Proposition 1.4. *Un morphisme torique $\varphi : V_1 \to V_2$ entre deux variétés toriques affines est* équivariant*, c'est-à-dire qu'il préserve l'action des tores : pour tout $t \in T_1$ (le tore de V_1) et pour tout $p \in V_1$, $\varphi(t \cdot p) = \varphi(t) \cdot \varphi(p)$.*

Démonstration. Regardons t comme un morphisme de V_1 vers lui-même et $\varphi(t) \in T_2$ (le tore de V_2) comme un morphisme de V_2 vers lui-même. Alors, $\varphi \circ t$ et $\varphi(t) \circ \varphi$ seront deux morphismes de V_1 vers V_2. Visuellement, on aura le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{t} & V_1 \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ V_2 & \xrightarrow{\varphi(t)} & V_2 \end{array}$$

qui commutera pour tout $t \in T_1$ si et seulement si φ est équivariant. Or, la propriété que $\varphi|_{T_1} : T_1 \to T_2$ soit un homomorphisme de groupe nous garantit que ces deux morphismes coïncident sur T_1 (c'est-à-dire que le diagramme commute lorsqu'on remplace les V_i par des T_i).

En prenant les zéros de la différence de morphismes $\varphi \circ t - \varphi(t) \circ \varphi$, on obtient un fermé F contenant l'ouvert de Zariski T_1. Comme V_1 est irréductible, cela signifie que $F = V_1$ et donc que nos morphismes sont égaux. On peut donc conclure, car notre diagramme commute. $\square$

1.3. Constructions de variétés toriques affines

On aimerait développer des façons de contruire des variétés toriques affines, afin d'élaborer des exemples plus complexes et de potentiellement obtenir d'autres façons de caractériser ces variétés. Pour ce faire, on s'inspirera de l'exemple de $\mathbf{V}(xy - wz)$.

Rappelons qu'on a défini dans l'annexe B un *réseau* comme un groupe libre abélien de rang fini. Par exemple, chaque tore T_N a un réseau M de caractères et un réseau N de sous-groupes à un paramètre.

Prenons alors un tore T_N avec son réseau de caractères M et prenons un sous-ensemble $\mathscr{A} = \{m_1, \ldots, m_s\} \subseteq M$. Considérons l'application $\Phi_{\mathscr{A}} : T_N \to \mathbb{C}^s$ définie par $\Phi_{\mathscr{A}}(t) = (\chi^{m_1}(t), \ldots, \chi^{m_s}(t))$. On définira $Y_{\mathscr{A}}$ comme la fermeture de Zariski de l'image de $\Phi_{\mathscr{A}}$.

Proposition 1.5. *La variété affine $Y_{\mathscr{A}}$ définie plus haut est une variété torique ayant pour tore l'image de $\Phi_{\mathscr{A}}$ et pour réseau de caractère, $\mathbb{Z}\mathscr{A}$ (le sous-réseau de M engendré par $\mathscr{A}$).*

Démonstration. Comme les caractères d'un tore ne s'annulent jamais, on peut voir $\Phi_{\mathscr{A}}$ comme une application $T_N \to (\mathbb{C}^*)^s$. Par la proposition 1.1, l'image $T \doteq \Phi_{\mathscr{A}}(T_N)$ est un tore fermé (selon Zariski) dans $(\mathbb{C}^*)^s$. En particulier, $Y_{\mathscr{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s = T$. En effet, on sait déjà que $T \subseteq Y_{\mathscr{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$. Supposons au contraire que l'inclusion est stricte. Alors on peut trouver un fermé F dans $\mathbb{C}^s$ tel que $F \cap (\mathbb{C}^*)^s = T$. On peut assumer sans perdre de généralité que $F \subseteq Y_{\mathscr{A}}$ (sinon, on prend l'intersection). Cette inclusion est stricte, car $T \neq Y_{\mathscr{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$. Or, c'est impossible car $Y_{\mathscr{A}}$ est le plus petit fermé contenant T. On a donc bien que $T = Y_{\mathscr{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$. En particulier, T est un ouvert de $Y_{\mathscr{A}}$. (C'est même un ouvert principal.)

De plus, $Y_{\mathscr{A}}$ est irréductible. En effet, supposons au contraire qu'on a deux sous-variétés strictes V_1, V_2 de $Y_{\mathscr{A}}$ tels que $Y_{\mathscr{A}} = V_1 \cup V_2$. Alors, $T = (V_1 \cap T) \cup (V_2 \cap T)$, mais comme T est irréductible (c'est un tore), cela signifie que $T \subseteq V_1$ ou que $T \subseteq V_2$. Or, ceci est impossible car $Y_{\mathscr{A}}$ est le plus petit fermé contenant T et V_1 et V_2 sont des fermés strictement compris dans $Y_{\mathscr{A}}$.

Ensuite, pour l'action de T, on sait que $T \subseteq (\mathbb{C}^*)^s$. On a donc une action de T sur $\mathbb{C}^s$ induit par $(\mathbb{C}^*)^s$. Sous cette action, chaque élément $t = (t_1, \ldots, t_s) \in T$ envoit les sous-variétés de $\mathbb{C}^s$ vers des sous-variétés. En effet, si $V = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_r)$, alors on vérifie facilement que $t \cdot V = \mathbf{V}(f_1 \circ t^{-1}, \ldots, f_r \circ t^{-1})$ (où, pour $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s]$, l'application $f \circ t^{-1}(x_1, \ldots, x_s) = f(t_1^{-1}x_1, \ldots, t_s^{-1}x_s)$ est bien un polynôme).

On a donc que $t \cdot Y_{\mathscr{A}}$ est une sous-variété contenant $t \cdot T = T$. Ceci implique que $Y_{\mathscr{A}} \subseteq t \cdot Y_{\mathscr{A}}$ (par définition de la fermeture). En appliquant le même raisonnement à t^{-1}, on obtient l'inclusion inverse. On a donc bien que $Y_{\mathscr{A}} = t \cdot Y_{\mathscr{A}}$ et que T agit sur $Y_{\mathscr{A}}$.

Finalement, il nous reste le réseau de caractères. Rappelons que T est une sous-variété de $(\mathbb{C}^*)^s$. En particulier, son anneau de coordonnées est un quotient de l'anneau de $(\mathbb{C}^*)^s$ et tout morphisme $T \to \mathbb{C}^*$ peut s'écrire comme la restriction à T d'un morphisme $(\mathbb{C}^*)^s \to \mathbb{C}^*$.

T étant aussi un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*)^s$, on a bien que tout caractère de T est simplement la restriction d'un caractère de $(\mathbb{C}^*)^s$. On sait aussi que le réseau de caractères de $(\mathbb{C}^*)^s$ est $\mathbb{Z}^s$.

Le morphisme $\Phi_{\mathscr{A}}$ induit un homomorphisme de réseau $\hat{\Phi}_{\mathscr{A}} : \mathbb{Z}^s \to M$ défini par $\hat{\Phi}_{\mathscr{A}}(\chi) = \chi \circ \Phi_{\mathscr{A}}$. En calculant cet homomorphisme, on réalise qu'il envoit simplement $e_1, \ldots ,e_s$ vers $m_1, \ldots ,m_s$ (respectivement). Remarquons que $\hat{\Phi}_{\mathscr{A}}(\chi)$ ne dépend que de la valeur de χ sur $\mathrm{Im}(\Phi_{\mathscr{A}}) = T$. Il induit donc un homomorphisme qui associe à chaque caractère de T un élément de M. On vient de dire que l'image de cet homomorphisme est $\mathbb{Z}\mathscr{A}$. Il ne nous reste qu'à montrer qu'il est injectif. En effet, soient $\bar{\chi}_1$ et $\bar{\chi}_2$ deux caractères de T et soient χ_1 et χ_2 des caractères de $(\mathbb{C}^*)^s$ les représentant. Si $\hat{\Phi}_{\mathscr{A}}(\chi_1) = \hat{\Phi}_{\mathscr{A}}(\chi_2)$, alors χ_1 et χ_2 coïncident sur T. $\bar{\chi}_1$ et $\bar{\chi}_2$ seront donc le même caractère de T. On a donc bien un isomorphisme de réseau entre $\mathbb{Z}\mathscr{A}$ et le réseau de caractère de T. □

Exemple. Prenons le réseau $\mathbb{Z}^3$ et l'ensemble $\mathscr{A} \doteq \{e_1,e_2,e_3,e_1 + e_2 - e_3\}$. L'image de l'application $\Phi_{\mathscr{A}}$ est exactement le tore $V_{xywz} \subseteq \mathbf{V}(xy-wz) \subseteq \mathbb{C}^4$ de notre exemple précédent. La variété $V = \mathbf{V}(xy-wz)$ étant irréductible, aucun fermé strictement contenu dans $\mathbf{V}(xy-wz)$ ne peut contenir l'ouvert V_{xywz}. En particulier, l'adhérence de cet ouvert est V. On a donc que $Y_{\mathscr{A}} = V$ et que l'action de T_N sur $Y_{\mathscr{A}}$ définie dans la preuve précédente concorde exactement avec l'action décrite dans l'exemple. On sait alors que le réseau de caractère de V_{xywz} est $\mathbb{Z}\mathscr{A} = \mathbb{Z}^3$. Vérifions-le !

On sait que les caractères de $(\mathbb{C}^*)^4$ sont engendrés par $\{x,y,w,z,x^{-1},y^{-1},w^{-1},z^{-1}\}$. Notre tore étant à la fois un sous-groupe et une sous-variété de $(\mathbb{C}^*)^4$, ces caractères engendreront aussi tous les caractères de V_{xywz}. Mais dans ce cas, le caractère z est exactement le caractère xyw^{-1} (et $z^{-1} = x^{-1}y^{-1}w$). On peut ainsi identifier nos générateurs à $\mathscr{A} \cup -\mathscr{A}$ ce qui nous donne bien que le réseau de caractère est $\mathbb{Z}\mathscr{A}$.

On a maintenant une façon de construire des variétés toriques. Est-ce la seule ?

Définition. Un *monoïde* est un ensemble S auquel on a associé une opération binaire associative et qui contient un élément neutre sous cette opération. On dira que S est un *monoïde affine* si l'opération est commutative, s'il est engendré par un nombre fini d'éléments et s'il peut être écrit comme un sous-monoïde d'un réseau M. Dans ce cas, on notera généralement l'opération par $+$ et l'élément neutre par 0.

Si est $\mathscr{A}$ est un sous-ensemble fini de S, on utilisera souvant la notation $\mathbb{N}\mathscr{A}$ pour parler de l'ensemble $\{\sum_{m\in\mathscr{A}} a_m m \mid a_m \in \mathbb{N}\}$ des éléments engendré par $\mathscr{A}$. Ainsi, les conditions pour être un monoïde affine se résument à ce qu'il existe un sous-ensemble fini $\mathscr{A}$ d'un réseau M tel que $\mathbb{N}\mathscr{A} = S$.

Définition. Soit $S \subseteq M$ un monoïde affine. On appelle *algèbre de monoïde* le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[S]$ ayant S comme base et où la multiplication est induite par la structure de monoïde de S.

On pensera souvent à M comme le réseau de caractères d'un tore T_N : chaque $m \in M$ nous donne un caractère χ^m. On peut alors écrire

$$\mathbb{C}[S] = \left\{ \sum_{m \in S} c_m \chi^m \mid c_m \in \mathbb{C},\, c_m \neq 0 \text{ pour seulement un nombre fini de } m \right\}$$

avec la multiplication $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$.

Dans le cas où $S = \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{Z}^n = M$, alors $\mathbb{C}[S]$ nous donne l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$ en identifiant $x_i = \chi^{e_i}$. Plus généralement, si $S = \mathbb{N}\mathscr{A}$ avec $\mathscr{A} = \{m_1, \ldots, m_s\}$, alors $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \ldots, \chi^{m_s}]$ (le $\mathbb{C}$-algèbre engendré par $\chi^{m_1}, \ldots, \chi^{m_s}$).

Entre autres, on peut voir aussi M comme un monoïde affine en prenant $\mathscr{A} = \{\pm e_i, \ldots, \pm e_n\}$. Par exemple, en regardant $(\mathbb{C}^*)^n$ et son réseau de caractères $\mathbb{Z}^n$ et en identifiant $t_i \doteq \chi^{e_i}$, on voit que $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ sera l'anneau de coordonnées de $(\mathbb{C}^*)^n$ tel qu'on l'a calculé précédemment. Dans le cas plus général où M est le réseau de caractères du tore T_N, on aura que $\mathbb{C}[T_N] = \mathbb{C}[M]$. En effet, soit φ l'isomorphisme entre T_N et $(\mathbb{C}^*)^n$. La condition de φ d'être un isomorphisme de groupe implique que $\chi^m \circ \varphi$ sera un caractère pour tout caractère χ^m. En particulier, φ^* induira un isomorphisme entre M et $\mathbb{Z}^n$.

Proposition 1.6. *Soit $S \subseteq M$ un monoïde affine. Alors $\mathbb{C}[S]$ est un domaine intègre et généré par un nombre fini d'éléments en tant que $\mathbb{C}$-algèbre. De plus, prenons un ensemble de générateurs $\mathscr{A} \subseteq S$ (c'est-à-dire tel que $S = \mathbb{N}\mathscr{A}$). Alors, $\mathbb{C}[S]$ est l'anneau de coordonnées de la variété torique affine $Y_{\mathscr{A}}$ qui a pour réseau de caractère $\mathbb{Z}S$.*

Démonstration. On a déjà fait remarquer que si $\mathscr{A} = \{m_1, \ldots, m_s\}$, alors $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \ldots, \chi^{m_s}]$. En particulier, il est généré par un nombre fini d'éléments. Comme $S \subseteq M$, on a que $\mathbb{C}[S] \subseteq \mathbb{C}[M]$ où $\mathbb{C}[M]$ est un domaine intègre. $\mathbb{C}[S]$ l'est donc aussi.

En prenant encore $\mathscr{A} = \{m_1, \ldots, m_s\}$, on a un morphisme $\Phi_{\mathscr{A}} : T_N \to \mathbb{C}^s$ défini dans la construction précédente. Celui-ci induit un morphisme $\pi = (\Phi_{\mathscr{A}})^* : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s] \to \mathbb{C}[M]$ qui envoie $x_i \mapsto \chi^{m_i}$. Remarquons que tout élément de $\mathbf{I}(Y_{\mathscr{A}})$ se trouve dans $\mathrm{Ker}(\pi)$. En effet, si $f \in \mathbf{I}(Y_{\mathscr{A}})$, alors il s'annulera sur tout l'image de $\Phi_{\mathscr{A}}$. On a donc que $\pi(f) = f \circ \Phi_{\mathscr{A}} = 0$. De même, si $f \in \mathrm{Ker}(\pi)$, alors il devra s'annuler sur tout l'image de $\Phi_{\mathscr{A}}$. Or, cela signifie que $T = \mathrm{Im}(\Phi_{\mathscr{A}})$ est contenu dans le fermé $\mathbf{V}(f)$. Comme $Y_{\mathscr{A}}$ est la fermeture de Zariski de T, il faut donc qu'il soit inclus dans $\mathbf{V}(f)$. En particulier, f s'annulera sur tout $Y_{\mathscr{A}}$ et $f \in \mathbf{I}(Y_{\mathscr{A}})$. On a donc montré que $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathbf{I}(Y_{\mathscr{A}})$. Quant à l'image de π, c'est simplement $\mathbb{C}[\chi^{m_1}, \ldots, \chi^{m_s}] = \mathbb{C}[S]$.

On a alors que l'anneau de coordonnées de $Y_{\mathscr{A}}$ est :

$$\mathbb{C}[Y_{\mathscr{A}}] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s]/\mathbf{I}(Y_{\mathscr{A}}) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_s]/\mathrm{Ker}(\pi) \simeq \mathrm{Im}(\pi) = \mathbb{C}[S].$$

Finalement, on sait que le réseau de caractères du tore de $Y_{\mathscr{A}}$ est $\mathbb{Z}\mathscr{A}$. Or, le fait que $S = \mathbb{N}\mathscr{A}$ implique bien que $\mathbb{Z}\mathscr{A} = \mathbb{Z}S$. $\square$

Revenons à notre exemple. Selon ce théorème, l'anneau de coordonnées de la variété $V = \mathbf{V}(xy - wz)$ devrait être l'anneau $\mathbb{C}[x,y,w,xyw^{-1}]$. Or, on sait que l'anneau de coordonnées est le quotient de $\mathbb{C}[x,y,w,z]$ par l'idéal $\mathbf{I}(V) = (xy - wz)$. Dans ce quotient, z se comporte exactement comme xyw^{-1}. L'application envoyant x, y et w vers eux-mêmes et z vers xyw^{-1} sera donc bien un isomorphisme.

Remarquons que l'action du tore T_N sur lui-même nous donne une action de T_N sur $\mathbb{C}[M]$: pour chaque $t \in T_N$ et chaque $f \in \mathbb{C}[M]$, on définit $t \cdot f \in \mathbb{C}[M]$ par $p \mapsto f(t^{-1} \cdot p)$ pour tout $p \in T_N$. Soit $m = (m_1, \ldots, m_n) \in M$ et soit $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ correspondant à $t \in T_N$. Alors, si $p \in T_N$ correspond à $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$, $\chi^m(p) = p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}$ et $t \cdot \chi^m(p) = \chi^m(t^{-1} \cdot p) = (t_1^{-1}p_1)^{m_1} \cdots (t_n^{-1}p_n)^{m_n} = \chi^m(t^{-1})\chi^m(p)$. En particulier, $t \cdot \chi^m$ est bien dans $\mathbb{C}[M]$ et comme tout élément de $\mathbb{C}[M]$ est une combinaison linéaire de χ^m, notre action est bien définie.

Lemme 1.7. *Soit A un sous-espace de $\mathbb{C}[M]$ qui est stable sous l'action de T_N. Alors,*

$$A = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C}\chi^m.$$

Démonstration. Posons $A' = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C}\chi^m$ et comparons-le à A. Comme A est un espace vectorielle, on a clairement que $A' \subseteq A$. Pour avoir l'inclusion inverse, il suffit de montrer que pour tout $f \in A$ s'écrivant $f = \sum_{m \in \mathscr{B}} c_m \chi^m$ (où $c_m \in \mathbb{C}^*$ et $\mathscr{B} \subseteq M$ est fini), chaque caractère χ^m avec $m \in \mathscr{B}$ est dans A. (Ceci revient à dire que $f \in A'$.)

Supposons au contraire qu'il existe un $f \in A$ tel qu'au moins un des $m \in \mathscr{B}$ est tel que $\chi^m \notin A$. Alors, on pourra retirer à f tous les termes $c_m\chi^m$ tels que $\chi^m \in A$ (cela restera dans A). On peut donc assumer sans perte de généralité que $\mathscr{B}$ ne contient aucun m tel que $\chi^m \in A$. Prenons alors f tel que le nombre d'éléments dans $\mathscr{B}$ soit minimal.

Clairement $\mathscr{B}$ n'est pas vide, car sinon $f = 0 \in A'$. De plus, $\mathscr{B}$ n'a pas non plus qu'un seul élément, car on aurait alors que $f = c_m\chi^m$. Comme A est un espace vectoriel, ceci impliquerait que $\chi^m \in A$ et donc que $f \in A'$. On a donc que $\mathscr{B}$ a au moins deux éléments.

Prenons $m',m'' \in \mathscr{B}$ tel que $m'_i \neq m''_i$ (pour un i quelconque) et posons $t \in T_N$ l'élément qui à un 2 à sa i-ième composante et un 1 à chacune des autres. (On aura alors que $\chi^m(t) = 2^{m_i}$.) Comme A est stable, l'élément $2^{m'_i} t \cdot f = \sum_{m \in \mathscr{B}} c_m 2^{m'_i - m_i} \chi^m$ sera dans A. En lui soustrayant f, on obtiendra un élément $f' = \sum_{m \in \mathscr{B}'} c'_m \chi^m$ de A tel que $\mathscr{B}' \subsetneq \mathscr{B}$. (On sait que $\mathscr{B}'$ est non-vide car il contient m''.) Par minimalité de $\mathscr{B}$, il doit exister un élément $m \in \mathscr{B}'$ tel que $\chi^m \in A$. Or, c'est impossible, car aucun χ^m avec $m \in \mathscr{B}$ n'est dans A. On a donc notre contradiction. $\square$

Théorème 1.8. *Soit V une variété torique affine. Alors, il existe un monoïde affine S tel que $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$.*

Démonstration. L'inclusion $T_N \subseteq V$ nous donne un homomorphisme injectif d'anneaux de coordonnées $\mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}[M]$. En effet, si un $f \in \mathbb{C}[V]$ est envoyé vers 0, c'est qu'il s'annule sur tout T_N. Or, comme T_N est un ouvert de Zariski dans V et comme V est irréductible, cela signifie que f s'annule sur tout V et donc que $f = 0$.

On remarque que pour tout $t \in T_N$ et pour tout $f \in \mathbb{C}[V]$, $p \mapsto f(t^{-1} \cdot p)$ est bien un élément de $\mathbb{C}[V]$ (car $p \mapsto t^{-1} \cdot p$ est un morphisme de V vers V). On a donc que $\mathbb{C}[V]$ est un sous-espace de $\mathbb{C}[M]$ stable par l'action de T_N. En particulier, il s'écrit

$$\mathbb{C}[V] = \bigoplus_{\chi^m \in \mathbb{C}[V]} \mathbb{C}\chi^m.$$

En définissant le monoïde $S \doteq \{m \in M \mid \chi^m \in \mathbb{C}[V]\}$, on aura bien que $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$. Il ne nous reste qu'à montrer que S est affine. Il est déjà contenu dans le réseau M (et est donc commutatif).

De plus, on sait que $\mathbb{C}[V]$ est engendré par un nombre fini d'éléments. En effet, dans notre définition originel de variété affine, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ engendrent $\mathbb{C}[V]$. Dans le cas général, il suffit de rajouter f^{-1} pour engendrer $\mathbb{C}[V_f]$. En écrivant les générateurs de $\mathbb{C}[V]$ en termes de caractères, on aura que les caractères utilisés (en nombre fini) engendreront S, ce qui était la condition qui nous manquait pour avoir que S soit un monoïde affine. $\square$

Cela signifie que toute variété torique affine V a un anneau de coordonnées isomorphe à celui d'une variété $Y_{\mathscr{A}}$ telle que construite plus haut. Comme on l'a mentionné au début du chapitre, cela signifie qu'il existe un isomorphisme de variétés affines φ entre V et $Y_{\mathscr{A}}$ tel que φ^* est l'isomorphisme d'anneaux de coordonnées en question. Est-ce que φ est un isomorphisme torique ?

Proposition 1.9. *Soient V_1 et V_2 deux variétés toriques affines et soient $\varphi : V_1 \to V_2$ un morphisme de variétés affines. Alors φ sera torique si et seulement si $\varphi^* : \mathbb{C}[V_2] = \mathbb{C}[S_2] \to \mathbb{C}[V_1] = \mathbb{C}[S_1]$ (où S_1 et S_2 sont des monoïdes affines) est un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbre induit par un homomorphisme de monoïde $\hat{\varphi} : S_2 \to S_1$.*

Démonstration. Commençons par le cas simple où $V_1 = T_1$ et $V_2 = T_2$ et démontrons que φ sera un homomorphisme de groupes et si seulement φ^* est induit par un homomorphisme $\hat{\varphi} : M_2 \to M_1$. Quitte à composer φ à gauche et à droite par un isomorphisme de tore, on peut assumer que $T_1 = (\mathbb{C}^*)^r$ et que $T_2 = (\mathbb{C}^*)^s$. Alors, il existe $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^r]$ tels que $\varphi = (f_1, \ldots, f_s)$ et on obtient que $\varphi^*(\chi^{e_i}) = f_i$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, s\}$. Comme les e_i engendrent (librement) $\mathbb{Z}^s$, φ^* sera induit par un homomorphisme de réseaux si et seulement si f_i est un caractère de $(\mathbb{C}^*)^r$ pour chaque i. Or, comme $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq (\mathbb{C}^*)^s$, on sait déjà que les f_i ne s'annulent en aucun point. Ils seront donc des caractères si et seulement s'ils sont des homomorphismes de groupe (c'est-à-dire si et seulement si φ en est un). On a donc démontré notre cas particulier.

Pour le cas général, commençons par assumer que φ est torique. La condition que $\varphi(T_1) \subseteq T_2$ implique que $\psi \doteq \varphi|_{T_1}$ correspond à un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbre $\psi^* : \mathbb{C}[M_2] \to \mathbb{C}[M_1]$. Si on voit $\mathbb{C}[V_i]$ comme une sous-algèbre de $\mathbb{C}[M_i]$ (comme dans la preuve précédente), on remarque que φ^* est en fait la restriction à $\mathbb{C}[S_2]$ de ψ^*. C'est-à-dire qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[V_2] \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, hook] & \mathbb{C}[V_1] \arrow[d, hook] \\
\mathbb{C}[M_2] \arrow[r, "\psi^*"] & \mathbb{C}[M_1].
\end{tikzcd}$$

De là, on a terminé, car $\psi = \varphi|_{T_1}$ est un homomorphisme de groupe (et donc un morphisme de tore). ψ^* est alors induit par un homomorphisme $\hat{\varphi} : M_2 \to M_1$ comme on l'a démontré dans le cas particulier. Or, on sait que $\psi^*(\mathbb{C}[S_2]) = \varphi^*(\mathbb{C}[S_2]) \subseteq \mathbb{C}[S_1]$ et donc que $\hat{\varphi}$ envoie S_2 vers S_1. C'est donc bien un homomorphisme de monoïdes.

Pour l'implication inverse, étendons $\hat{\varphi}$ à un homomorphisme de groupe $\hat{\varphi} : \mathbb{Z}S_2 \to \mathbb{Z}S_1$. On veut montrer que $\mathbb{Z}S_i = M_i$ pour i valant 1 ou 2. Remarquons d'abord que $\mathbb{Z}S_i$ est engendré par un nombre fini d'éléments (les générateurs $\mathscr{A} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ de S_i) et étant un sous-groupe de M_i, il est libre et est donc un réseau. Étudions alors $V \doteq (V_i)_{\chi^{a_1+\ldots+a_k}}$ l'ouvert principal de V_i qui a comme anneau de coordonnées $\mathbb{C}[V_i]_{\chi^{a_1+\ldots+a_k}} = \mathbb{C}[\mathbb{Z}S_i]$.

Si $\{m_1, \ldots, m_s\}$ est une base de $\mathbb{Z}S_i$, alors on aura un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres entre $\mathbb{C}[\mathbb{Z}S_i]$ et $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^s]$ défini par $m_j \mapsto e_j$, qui nous donnera un isomorphisme de variétés entre V et $(\mathbb{C}^*)^s$. On peut ainsi donner une structure de tore à V.

De plus, comme $\chi^{a_1+\ldots+a_k}$ ne s'annule nulle part sur le tore T_i, V contient T_i. Cette inclusion est le morphisme de variétés associé à l'inclusion de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}S_i]$ dans $\mathbb{C}[M_i]$. Or, il est induit par l'homomorphisme de réseau $\mathbb{Z}S_i \hookrightarrow M_i$. C'est donc un morphisme de tores. Par la proposition 1.1, T_i est un fermé de V : il s'écrit comme $T_i = V \cap F$ pour F fermé dans V_i. Or, comme V_i est irréductible, le seul fermé F pouvant contenir l'ouvert T_i est V_i et on obtient ainsi que $T_i = V$ (et en particulier que $\mathbb{Z}S_i = M_i$)

L'homomorphisme $\hat{\varphi} : M_2 \to M_1$ induit donc un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\psi^* : \mathbb{C}[M_2] \to \mathbb{C}[M_1]$ (défini par $\psi^*(\chi^m) \doteq \chi^{\hat{\varphi}(m)}$) dont la restriction à $\mathbb{C}[S_2] = \mathbb{C}[V_2]$ nous donne $\varphi^* : \mathbb{C}[V_2] \to \mathbb{C}[V_1]$. On a donc un diagramme commutatif comme celui ci-haut. On sait aussi que ψ^* correspond à un morphisme $\psi : T_1 \to T_2$. En posant ι_i l'inclusion de T_i dans V_i, le diagramme nous donne que

$$(\iota_2 \circ \psi)^* = \psi^* \circ \iota_2^* = \iota_1^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ \iota_1)^*.$$

Et comme l'application $f \mapsto f^*$ est injective, cela signifie que $\iota_2 \circ \psi = \varphi \circ \iota_1$, c'est-à-dire que ψ est la restriction de φ à T_1. En particulier $\varphi(T_1) \subseteq T_2$.

De là, on a fini, car ψ^* est induit par un homomorphisme de réseaux $\hat{\varphi} : M_2 \to M_1$ et on a montré au début de cette preuve que cela signifiait que ψ est un homomorphisme de groupe. $\square$

On a donc une façon de représenter toutes les variétés toriques affines, à isomorphisme près.

1.4. Cônes et variétés toriques

Soit $N_\mathbb{R}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Un sous-ensemble fini $S \subseteq N_\mathbb{R}$ nous donne un cône convexe de type fini σ défini par

$$\sigma = \mathrm{Cone}(S) \doteq \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0 \right\}.$$

Proposition 1.10 (Lemme de Gordan). *Soit σ un cône convexe rationnel de type fini. Alors $S_\sigma \doteq \sigma^\vee \cap M$ est un monoïde affine.*

Démonstration. Comme $\sigma^\vee$ est rationnel, prenons $T \subseteq M$ fini tel que $\sigma^\vee = \mathrm{Cone}(T)$. Alors, l'ensemble $K = \{\sum_{m \in T} \delta_m m \mid 0 \leq \delta_m \leq 1\}$ est un compact de $M_\mathbb{R}$. Comme M est discret, l'intersection $K \cap M$ est fini. On veut montrer que $K \cap M$ engendre S_σ en tant que monoïde.

En effet, prenons un élément $u \in S_\sigma$ et écrivons-le $u = \sum_{m \in T} \lambda_m m$ (avec $\lambda_m \geq 0$). En prenant la partie entière $l_m \in \mathbb{N}$ de λ_m et son reste $\delta_m \in [0,1[$, on peut écrire $u = \sum_{m \in T} l_m m + \sum_{m \in T} \delta_m m$ où chaque m et $\sum_{m \in T} \delta_m m$ sont dans $K \cap M$. On conclut que S_σ est engendré par un nombre fini d'éléments. Étant déjà sous-groupe d'un réseau, cela nous permet de conclure. $\square$

En particulier, on peut construire une variété torique U_σ ($= Y_\mathscr{A}$ pour un ensemble fini $\mathscr{A} \subseteq S$ qui engendre S) de sorte que $\mathbb{C}[U_\sigma] = \mathbb{C}[S_\sigma]$ et que son réseau de caractères soit $\mathbb{Z}S_\sigma$. De plus, on a la propriété suivante :

Proposition 1.11. *Soient $\sigma \subseteq N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ un cône convexe rationnel de type fini et U_σ sa variété torique associée. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $\dim U_\sigma = n$;
2. *le tore de U_σ est $T_N = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}^*$;*
3. *σ est fortement convexe.*

Démonstration. Remarquons d'abord que de dire que le tore de U_σ est T_N revient simplement à dire que N est le réseau de sous-groupes à un paramètre du tore de U_σ, c'est-à-dire que M est le réseau de caractères de ce tore. Donc, ce sera vrai si et seulement si $M = \mathbb{Z}S_\sigma$.

Étudions donc $\mathbb{Z}S_\sigma$. Remarquons d'abord que $\mathbb{Z}S_\sigma = S_\sigma - S_\sigma = \{m_1 - m_2 \mid m_1, m_2 \in S_\sigma\}$ et prenons $m \in M$ tel que $km \in \mathbb{Z}S_\sigma$ pour un certain $k > 1$. Alors, il existe $m_1, m_2 \in S_\sigma$ tels que $km = m_1 - m_2$. Comme m_1 et m_2 sont dans le cône convexe $\sigma^\vee$ (étant dans S_σ), on a que $m + m_2 = \frac{1}{k}m_1 + \frac{k-1}{k}m_2 \in \sigma^\vee$. Étant déjà dans M, $m + m_2$ est donc un élément de S_σ. En particulier, $m = (m + m_2) - m_2 \in \mathbb{Z}S_\sigma$. Le quotient $M/\mathbb{Z}S_\sigma$ est donc sans torsion et on aura que $M = \mathbb{Z}S_\sigma$ si et seulement si $\operatorname{rank} \mathbb{Z}S_\sigma = n$.

Or, remarquons que la dimension de U_σ est simplement la dimension de son tore, qu'on sait égal au rang de son réseau de caractères, c'est-à-dire $\operatorname{rank} \mathbb{Z}S_\sigma$. Donc, $\dim U_\sigma = n$ si et seulement si $\operatorname{rank} \mathbb{Z}S_\sigma = n$, ce qui nous donne notre première équivalence.

Ensuite, on sait que le cône σ sera fortement convexe si et seulement si $\dim \sigma^\vee = n$. Or, on sait aussi que $\sigma^\vee$ est engendré par des éléments de M. En particulier, $\sigma^\vee = \operatorname{Cone}(S_\sigma)$ et sa dimension est la dimension de l'espace vectoriel engendré par S_σ, qui est exactement le rang de $\mathbb{Z}S_\sigma$. Donc, $\dim \sigma^\vee = n$ si et seulement si $\operatorname{rank} \mathbb{Z}S_\sigma = n$, ce qui nous donne l'autre équivalence et nous permet de conclure. $\square$

Exemple. Dans le cas où $\mathscr{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3\} \subseteq \mathbb{Z}^3$, σ sera le cône dans $\mathbb{R}^3$ engendré par les quatre vecteurs $\{e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3\}$ (de sorte que $\sigma^\vee = \operatorname{Cone}(\mathscr{A})$). Il est fortement convexe, car il n'intersecte pas le plan $x + y + z = 0$ sauf à l'origine. La dimension de la variété $V = \mathbf{V}(xy - wz) = Y_\mathscr{A} = U_\sigma$ est bien 3. Les énoncés 1 et 3 sont donc bien vérifiés dans cet exemple. L'énoncé 2 est plus difficile à visualiser. Il faut réellement la voir comme une autre façon de dire que le réseau dual de $\mathbb{Z}\mathscr{A}$ contient tous les sous-groupes à un paramètre du tore V_{xywz}, ce qui revient simplement à dire que $\mathscr{A}$ engendre tous les caractères du tore. Or, on sait déjà que c'est le cas (le réseau de caractère est $\mathbb{Z}\mathscr{A}$). On a donc bien vérifié les trois énoncés.

Remarquons que la construction de $U_\sigma = Y_\mathscr{A}$ ne dépend que de S_σ et $\mathscr{A}$. (Et encore, on peut vérifier avec ce qu'on a montré plus haut qu'il ne dépend pas de $\mathscr{A}$ à isomorphisme près). On peut donc toujours plonger S_σ dans $\mathbb{Z}S_\sigma$ et ne pas se soucier du reste de M. Pour σ, cela revient simplement à prendre sa projection dans $N_\mathbb{R}/(\sigma \cap (-\sigma))$, qui sera un cône fortement convexe rationel de type fini. On peut donc assumer que σ est fortement convexe sans changer la variété obtenue. Cela nous permettra de toujours pouvoir facilement obtenir le tore de cette variété.

Contrairement à la construction précédente, la construction par les cônes ne nous donne pas toutes les variétés toriques affines possibles. Elle ne nous donnera que des variétés normales (mais cela nous suffira) :

Théorème 1.12. *Soit V une variété torique affine et soit $S \subseteq M$ un monoïde affine (où $M = \mathbb{Z}S$) tel que $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$. Alors, les trois énoncés suivants sont équivalents :*

1. *V est normal ;*
2. *pour tout $m \in M$, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $km \in S$, alors $m \in S$;*
3. *il existe un cône (fortement) convexe rationnel de type fini $\sigma \subseteq N_\mathbb{R}$ tel que $S = S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ (et en particulier, $V = U_\sigma$).*

Démonstration.

1⇒2 : Cette implication est plutôt simple. Remarquons d'abord que $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[\mathbb{Z}S]$ est contenu dans le corps de fractions de $\mathbb{C}[S]$. Si $m \in M$ et $k \in \mathbb{N}$ sont tels que $km \in S$, alors le caractère $\chi^m \in \mathbb{C}[M]$ est racine du polynôme $X^k - \chi^{km}$ qui est à coefficients dans $\mathbb{C}[S]$. Comme V (et donc $\mathbb{C}[S]$) est normal, cela signifie que χ^m est dans $\mathbb{C}[S]$ et que $m \in S$.

2⇒3 : Pour cette implication, prenons un ensemble $\mathscr{A} \subseteq S$ fini engendrant S et définissons le cône convexe rationnel de type fini $\tau \doteq \mathrm{Cone}(\mathscr{A}) \subseteq M_{\mathbb{R}}$ (qui sera engendré par $\mathscr{A}$). Démontrons que $S = \tau \cap M$ (l'inclusion de gauche à droite étant évidente). Pour cela, nous aurons besoin d'une version du théorème de Carathéodory pour les cônes (voir le théorème 7.1 de [**17**]) disant que tout élément u de τ s'écrit comme une combinaison linéaire positive d'éléments linéairement indépendants de $\mathscr{A}$. En particulier, on peut assumer que ces éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathscr{A}$ forment une base B' de $M_{\mathbb{R}}$ (quitte à ajouter des éléments de $\mathscr{A}$ qui ne seront pas utilisés dans l'écriture de u).

Comparons cette base à la base canonique $B \doteq \{e_i, \ldots, e_n\}$ de M et de $M_{\mathbb{R}}$. Comme nos a_i sont dans M, la matrice de passage de B à B' aura des coefficients entiers et son inverse aura alors des coefficients rationnels. De plus, si $u \in \tau \cap M$, alors u s'écrit comme une combinaison entière d'éléments de B. En appliquant la matrice de passage de B' à B, u sera une combinaison rationnelle (positive) des a_i. Pour $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on aura alors que $ku \in S$ ce qui signifie, par ce qu'on a assumé sur S, que $u \in S$ et donc que τ est rationnel.

Donc, posons $\sigma \doteq \tau^\vee \subseteq N_{\mathbb{R}}$. Ce sera bien un cône convexe rationnel de type fini (fortement convexe car τ est de dimension $n = \dim(M_{\mathbb{R}})$) tel que $S = \tau \cap M = \sigma^\vee \cap M = S_\sigma$.

3⇒1 : Finalement, on doit montrer que $\mathbb{C}[S_\sigma]$ est toujours normal lorsque σ est un cône convexe rationnel de type fini. D'après la proposition B.18, on peut prendre un ensemble fini $\mathscr{A}$ contenant des $a \in \sigma \cap N$ tels que $\sigma^\vee \cap a^\perp$ est une facette de $\sigma^\vee$. On choisira $\mathscr{A}$ afin qu'il contienne exactement un élément pour chaque facette de $\sigma^\vee$. Par la proposition B.12, chacun de ces éléments engendrera une face $\tau_a \doteq (a^*)^* = \mathrm{Cone}(a)$ de σ de dimension 1. Par le même argument que dans la construction de $\mathscr{A}$, on pourra écrire cette face comme $\sigma \cap u_a^\perp$ pour un certain $u_a \in \sigma^\vee \cap M$.

D'après la proposition B.9, on peut écrire

$$\sigma^\vee = \bigcap_{a \in \mathscr{A}} a^\vee = \bigcap_{a \in \mathscr{A}} \tau_a^\vee.$$

En intersectant avec M, on obtient que $S_\sigma = \bigcap_{a\in\mathscr{A}} S_a$ (où $S_a \doteq S_{\tau_a}$), ce qui nous donne que

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \bigcap_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{C}[S_a].$$

Or, la proposition B.19 nous dit que $S_a = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u_a)$ et donc que $\mathbb{C}[S_a] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^{u_a}}$. En particulier, $\mathbb{C}[S_\sigma]$ possède le même corps de fractions que $\mathbb{C}[S_a]$ et donc $\mathbb{C}[S_\sigma]$ sera normal si chaque $\mathbb{C}[S_a]$ l'est. En effet, si $x \in \mathbb{C}(S_\sigma)$ est racine du polynôme p à coefficients dans $\mathbb{C}[S_\sigma]$, alors par normalité il est dans chaque $\mathbb{C}[S_a]$ et donc dans $\mathbb{C}[S_\sigma]$.

Il nous suffit donc de montrer la normalité des $\mathbb{C}[S_a]$. Pour ce faire, regardons le réseau $\Gamma \doteq N \cap \operatorname{Span}(a)$. Comme N est discret dans $N_\mathbb{R} = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$, Γ sera un sous-groupe discret de la droite $\operatorname{Span}(a)$. Il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$ et possède un générateur a'. Quitte à multiplier a' par -1, supposons que a' est dans $\operatorname{Cone}(a)$ et remplaçons a par a' (car cela ne changera pas S_a ni $\mathbb{C}[S_a]$). Alors, par le lemme B.16, on peut trouver une base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de N telle que $e_1 = a$. Cela nous donnera la base duale $B^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ de M qui est telle que $u \in M$ sera dans S_a si et seulement si la composante en e_1^* de u est positive. En particulier, si on identifie x_i à $\chi^{e_i^*}$, on aura que

$$\mathbb{C}[S_a] = \mathbb{C}[x_1, x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]_{x_2 \cdots x_n}.$$

Or, $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est un anneau factoriel (et donc normal). De plus, tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}[S_a]$ s'écrira comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, multiplié par $x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ pour des $a_i \in \mathbb{Z}$. En particulier, toute racine d'un tel polynôme sera dans $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \subseteq \mathbb{C}[S_a]$. Notre anneau $\mathbb{C}[S_a]$ est donc normal et on peut conclure.

□

On dira alors que le monoïde affine S est *saturé*.

1.5. Variétés abstraites

On généralisera maintenant notre notion de variété affine à des objets qui ne seront pas forcément plongés dans $\mathbb{C}^n$. Cette nouvelle définition sera toutefois très naturelle pour le lecteur qui est habitué à travailler avec des variétés.

Définition. Prenons un espace topologique X, un recouvrement fini $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de X par des ouverts et une collection d'homéomorphismes $h_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha$ où V_α est une variété affine (avec la topologie de Zariski). On demandera aussi que pour tout $\alpha,\beta \in A$, $h_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ soit un ouvert principal de V_α et $h_\alpha^{-1} \circ h_\beta$ soit un isomorphisme de variétés affines (selon la structure de variété affine qu'on a donné aux ouverts principaux). Si on a tout cela, alors on appellera X une *variété algébrique*.

Plus généralement, soit un ouvert U de X associé à un homéomorphisme h entre U et une variété affine V. Si U et h sont *compatibles* avec X (c'est à dire qu'on pourrait les ajouter à notre recouvrement et toute les contraintes resteraient respectées), alors on dira que U est un ouvert *affine* de X et que h est une *carte* de X. En particulier, cela inclut les ouverts U_α et les homéomorphismes h_α de la définition.

Afin d'aider à comprendre cette définition plutôt abstraite, nous allons faire quelques exemples.

Remarquons d'abord que toute variété affine est une variété algébrique. Ce n'est pas un exemple très intéressant, car les conditions sont toutes trivialement respectées, mais il est nécessaire de le faire remarquer si on veut pouvoir affirmer que cette définition est une généralisation de notre concept précédent.

Exemple. Un résultat important de la topologie est qu'on peut recouvrir l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$ par $n+1$ ouverts U_i (i variant de 0 à n) homéomorphes à $\mathbb{C}^n$. Chaque U_i est intuitivement obtenu en prenant les points de $\mathbb{P}^n$ dont le i-ième coefficient est non-nul et en le «fixant» à 1. Afin de simplifier un peu notre notation, on écrira alors $\mathbb{C}[U_i] = \mathbb{C}[x_0,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n]$ (où $\hat{x}_i$ signifie que la i-ième variable a été retirée).

Remarquons que l'intersection $U_i \cap U_j$ correspond dans U_i aux points où x_j est non-nul (ou à U_i si $i = j$). C'est donc bien un ouvert principal. Dans le cas où $i \neq j$, son anneau de coordonnées est alors $\mathbb{C}[x_0,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n]_{x_j} = \mathbb{C}[x_0,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,x_j^{-1}]$. La fonction qui fait le passage de cet intersection dans U_i vers U_j (si $i \neq j$) est :

$$\varphi = (x_0x_j^{-1},\ldots,\widehat{x_jx_j^{-1}},\ldots,x_{i-1}x_j^{-1},x_j^{-1},x_{i+1}x_j^{-1},\ldots,x_nx_j^{-1})$$

où l'ordre entre i et j est purement esthétique. (On aurait aussi bien pu avoir $j > i$.) Lorsque $i = j$, ce sera simplement l'identité. Dans les deux cas, cette fonction est bien un morphisme.

Or, on sait déjà qu'elle est bijective, et le même raisonnement nous donne que son inverse est un morphisme. On a alors bien un isomorphisme, et donc une structure de variété algébrique sur $\mathbb{P}^n$.

Exemple. Prenons une collection finie de variétés affines $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ et fixons pour chaque paire d'indices $\alpha,\beta \in A$ un ouvert principal $V_{\beta\alpha} \subseteq V_\alpha$ et un isomorphisme $g_{\beta\alpha} : V_{\beta\alpha} \to V_{\alpha\beta}$. Supposons que pour tout $\alpha,\beta,\gamma \in A$, on ait que $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$, que $g_{\beta\alpha}(V_{\beta\alpha} \cap V_{\gamma\alpha}) = V_{\alpha\beta} \cap V_{\gamma\beta}$ et que $g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta} \circ g_{\beta\alpha}$ sur $V_{\beta\alpha} \cap V_{\gamma\alpha}$. Alors, on peut construire une variété algébrique en recollant les V_α.

En effet, soit Y l'union disjointe des V_α (avec la topologie engendrée par les ouverts des V_α) et définissons la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $a \sim b$ si $a \in V_\alpha$, $b \in V_\beta$ et $b = g_{\beta\alpha}(a)$ pour certains $\alpha,\beta \in A$. Nos conditions sur les $g_{\beta\alpha}$ nous garantissent que $\sim$ est bien une relation d'équivalence. On posera X comme l'espace quotient de Y par $\sim$ (avec la topologie quotient).

Pour chaque $\alpha \in A$, l'ensemble $U_\alpha \doteq \{\bar{a} \in X \mid a \in V_\alpha\}$ sera un ouvert de X (car V_α est un ouvert de Y). La fonction $h_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha$ définie par la projection $a \mapsto \bar{a}$ sera alors un homéomorphisme. De plus, pour tout $\beta \in A$, $h_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ sera simplement $V_{\beta\alpha}$ et on aura que $h_\beta^{-1} \circ h_\alpha = g_{\beta\alpha}$ qui est un isomorphisme. On a donc bien une variété algébrique.

On définira ensuite quelques notions analogues à celles des variétés affines.

Définition. La topologie de X sera appelée *topologie de Zariski* et les fermés dans cette topologie seront appelés *sous-variétés* de X. En effet, un sous-ensemble $Y \subseteq X$ sera fermé si et seulement si son intersection avec U_α est fermée dans U_α pour tout $\alpha \in A$ (c'est-à-dire que celle-ci correspond à une sous-variété de V_α).

On dira que X est *réductible* s'il s'écrit comme l'union de deux sous-variétés propres. On dira qu'il est *irréductible* dans le cas contraire.

Soient X et Y deux variétés algébriques ayant pour recouvrement d'ouverts affines $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ et $Y = \bigcup_\beta U'_\beta$ et soit $\Phi : X \to Y$ une application continue (selon la topologie de Zariski). Alors pour tout α et tout β, $U_\alpha \cap \Phi^{-1}(U_\beta)$ sera un ouvert de U_α. En particulier, il s'écrira comme une union d'ouverts principaux $U_{\alpha,\beta,f_i} \subseteq U_\alpha$. On dira alors que Φ est un *morphisme* entre X et Y si $\Phi|_{U_{\alpha,\beta,f_i}} : U_{\alpha,\beta,f_i} \to U_\beta$ est un morphisme pour tout α, β et i.

Remarquons qu'il y a une structure naturelle de variété algébrique sur tout ouvert U (principal ou non) de X. En effet, pour chaque ouvert affine U_α, $U \cap U_\alpha$ correspond à un ouvert de V_α et s'écrit donc comme une union d'ouverts principaux, qui sont eux mêmes des variétés affines. On recouvre ainsi U et on obtient une variété algébrique.

À noter aussi que les $h_\alpha^{-1} \circ h_\beta$ étant des isomorphismes de variétés affines, on a aussi une topologie classique sur X : celle engendrée par les ouverts des U_α en tant que sous-espaces de $\mathbb{C}^s$. Ce n'est toutefois pas cette topologie qui nous intéresse. Lorsqu'on parlera d'ouverts ou de fermés dans X, ce sera toujours dans la topologie de Zariski, sauf sur indication contraire.

Définition. Soit X une variété abstraite et soit $U \subseteq X$ un ouvert. Posons $W_\alpha \doteq h_\alpha^{-1}(U \cap U_\alpha) \subseteq V_\alpha$ pour chaque $\alpha \in A$. Une fonction $\varphi : U \to \mathbb{C}$ sera dite *régulière* si $\varphi \circ h_\alpha|_{W_\alpha} : W_\alpha \to \mathbb{C}$ est régulière pour chaque $\alpha \in A$.

On définira alors un *faisceau structural* $\mathcal{O}_X$ sur X par :

$$\mathcal{O}_X(U) = \{\varphi : U \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ est régulière}\}.$$

Il n'est pas très difficile de vérifier que c'est bien un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres. Il suffit de remarquer que la restriction et le recollement de fonctions régulières sont régulières, que l'unicité du recollement pour chaque V_α nous garantit l'unicité du recollement dans X et que la structure de $\mathbb{C}$-algèbre est directement héritée de celle des $\mathcal{O}_{V_\alpha}$.

En fait, sachant que $h_\alpha^{-1} \circ h_\beta$ forme un isomorphisme entre $W_\beta \doteq h_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ et $W_\alpha \doteq h_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, il induit un isomorphisme entre leurs anneaux de coordonnées. Donc, si $U \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$ et si $\varphi : U \to \mathbb{C}$, alors $\varphi \circ h_\alpha|_{W_\alpha}$ sera régulière si et seulement si $\varphi \circ h_\beta|_{W_\beta}$ est régulière. En particulier, si $U \subseteq U_\alpha$ est un ouvert et si φ est une fonction de U vers $\mathbb{C}$, alors la condition que $\varphi \circ h_\alpha|_U$ soit régulière sera suffisante (et nécessaire) pour avoir que φ soit régulière. h_α nous permet donc d'identifier la restriction $\mathcal{O}_X|_{U_\alpha}$ au faisceau structural $\mathcal{O}_{U_\alpha}$.

En particulier, notre définition est bien une généralisation de la notion de faisceau structural pour les variétés affines.

Définition. Soit p un point d'une variété affine X. On appelera *anneau local* de X en p la fibre du faisceau $\mathcal{O}_X$ en p.

On peut voir chaque $\varphi \in \mathcal{O}_{X,p}$ comme une fonction régulière bien définie sur un voisinage de p. On dénotera sa valeur en p (indépendante du choix de représentant de φ) par $\varphi(p)$. Le raisonnement qu'on a fait précédemment nous indique que si $p \in U_\alpha$, alors h_α induit un isomorphisme entre $\mathcal{O}_{X,p}$ et $\mathcal{O}_{U_\alpha,p}$. En particulier, $\mathcal{O}_{X,p}$ a un unique idéal maximal, soit $m_{X,p} \doteq \{\varphi \in \mathcal{O}_{X,p} \mid \varphi(p) = 0\}$.

Définition. Une variété irréductible X est dite *normale* si V_α est normal pour chaque $\alpha \in A$.

Si X et Y sont deux variétés affines avec recouvrement d'ouverts affines $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ et $Y = \bigcup_\beta U'_\beta$, alors on peut donner une structure naturelle de variété algébrique au produit $X \times Y$. On lui donne d'abord la topologie produit. Ensuite, on le recouvre par les ouverts $U_\alpha \times U'_\beta$ qui sont homéomorphes aux variétés affines $V_\alpha \times V'_\beta$. Finalement, les changements de cartes seront simplement $(h_{\alpha_1}^{-1} \circ h_{\alpha_2}) \times (h_{\beta_1}^{-1} \circ h_{\beta_2})$ qui sont bien des isomorphismes de variétés affines.

Définition. Soit X une variété algébrique. L'application *diagonale* $\Delta : X \to X \times X$ est définie par $x \mapsto x \times x$. Si l'image de cette application est un fermé de $X \times X$, alors on dira que X est *séparée*.

Cette propriété (qui est toujours respectée dans le cas affine) est très importante. En effet, si f et g sont deux morphismes entre les variétés algébriques Y et X, alors la condition que X soit séparée nous garantit que l'ensemble $\{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$ sera toujours un fermé de Y. Elle nous permet aussi d'affirmer que l'intersection de deux ouverts affines de X sera aussi affine.

On peut finalement définir les variétés algébriques toriques.

Définition. Une *variété algébrique toriques* (ou simplement *variété torique*) sera une variété algébriques irréductible X qui contient un tore T_N en tant qu'ouvert de Zariski tel que l'action de T_N sur lui-même s'étant à une action de T_N sur X, action qui est donnée par un morphisme $t\cdot : X \to X$ pour chaque $t \in T_N$.

Lorsqu'on parle de tore, on veut dire ici un ouvert affine U tel que la variété V associée est un tore.

On vera un peu plus loin que ce sont en fait les variétés toriques normales et séparées qui nous intéressent le plus. La propriété de séparation est parfois simplement incluse dans la définition de variété ; elle correspond en quelque sorte à la notion d'espace de Hausdorff en topologie. Quant à la normalité de la variété, ce n'est pas très étonnant considérant qu'on souhaiterait pouvoir utiliser les résultats de la section précédente.

1.6. Éventails

Définition. Un *éventail* Σ dans l'espace vectoriel $N_{\mathbb{R}}$ est une collection finie de cônes $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ rationnels fortement convexes de type fini telle que :

— toute face d'un cône dans Σ est aussi dans Σ ;

— l'intersection de deux cônes dans Σ est une face commune aux deux cônes (et est donc dans Σ).

Un cône de Σ sera dit *maximal* s'il n'est pas strictement contenu dans un autre cône de Σ.

Le *support* de Σ est l'union $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ de tous les cônes de Σ et est dénoté $|\Sigma|$.

On dénotera par $\Sigma(r)$ l'ensemble des cônes de dimension r de Σ.

On peut construire un éventail à partir d'un cône σ (rationnel fortement convexe de type fini) en prenant l'ensemble des faces de σ. Le support de cet éventail sera simplement σ et on dénotera l'ensemble des faces de σ de dimension r par $\sigma(r)$.

Toutefois, cet exemple est loin de représenter tous les éventails possibles. On peut, par exemple, recouvrir $\mathbb{R}^2$ avec les trois cônes $\{\mathrm{Cone}(e_1,e_2), \mathrm{Cone}(e_1, -e_1 - e_2), \mathrm{Cone}(e_2, -e_1 - e_2)\}$ qui ont les propriétés recherchées. En ajoutant leurs faces $\{\mathrm{Cone}(e_1), \mathrm{Cone}(e_2), \mathrm{Cone}(-e_1 - e_2), \{0\}\}$, on obtient bien un éventail.

Rappelons la proposition B.13 (et la remarque à la fin de la section B.4) disant que si on a deux cônes σ_1 et σ_2 dans Σ (et leur intersection $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ sera alors une face commune aux deux cônes), il existera $u \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee \cap M$ tel que $\tau = \sigma_1 \cap u^\perp = \sigma_2 \cap u^\perp$.

En particulier, par la proposition B.19, on aura que $S_\tau = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u) = S_{\sigma_2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}u$. Or, comme $u \in S_{\sigma_1}$ et $-u \in S_{\sigma_2}$, cela signifie en fait que $S_\tau = S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$.

De plus, cela signifiera que $\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_{\sigma_1}]_{\chi^u} = \mathbb{C}[S_{\sigma_2}]_{\chi^{-u}}$. On peut donc voir U_τ à la fois comme l'ouvert principal $(U_{\sigma_1})_{\chi^u}$ de U_{σ_1} et comme l'ouvert principal $(U_{\sigma_2})_{\chi^{-u}}$ de U_{σ_2}. C'est cette double inclusion qui sera la base du lien entre les éventails et les variétés toriques.

Pour construire une variété algébrique à partir de Σ, on utilisera la construction qu'on a présenté au début de la section précédente. On prendra la collection $\{V_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ (où $V_\sigma \doteq U_\sigma$) et pour toute paire d'indices $\sigma_1,\sigma_2 \in \Sigma$, on posera $V_{\sigma_2\sigma_1} \doteq (V_{\sigma_1})_{\chi^u} = U_{\sigma_1 \cap \sigma_2} \subseteq V_{\sigma_1}$. L'isomorphisme $g_{\sigma_2\sigma_1} : V_{\sigma_2\sigma_1} \to V_{\sigma_1\sigma_2}$ sera simplement le passage de $U_{\sigma_1\cap\sigma_2} \subseteq V_{\sigma_2\sigma_1}$ à $U_{\sigma_1\cap\sigma_2} \subseteq V_{\sigma_1\sigma_2}$. À remarquer que notre définition de $V_{\sigma_2\sigma_1}$ ne dépend pas du choix de u, mais seulement de l'inclusion $\mathbb{C}[S_{\sigma_1\cap\sigma_2}] \subseteq \mathbb{C}[S_{\sigma_1}]$. Il nous faut maintenant vérifier que les conditions sont bien remplies.

Soient $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3 \in \Sigma$. On veut montrer que les variétés affines $V_{\sigma_2\sigma_1} \cap V_{\sigma_3\sigma_1} \subseteq V_{\sigma_2\sigma_1}$ et $V_{\sigma_1\sigma_2} \cap V_{\sigma_3\sigma_2} \subseteq V_{\sigma_1\sigma_2}$ correspondent toutes les deux à la même chose dans $V_{\sigma_1\cap\sigma_2}$. Afin de simplifier un peu la notation, posons $\sigma_{ij} \doteq \sigma_i \cap \sigma_j \in \Sigma$ et $\sigma_{123} \doteq \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3 \in \Sigma$. Nous allons démontrer que nos deux variétés correspondent à $V_{\sigma_{123}} \subseteq V_{\sigma_{12}}$. Soient $u \in M \cap \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee$

tel que $\sigma_{12} = \sigma_1 \cap u^\perp = \sigma_2 \cap u^\perp$, $\hat{u} \in M \cap \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_3)^\vee$ tel que $\sigma_{13} = \sigma_1 \cap \hat{u}^\perp = \sigma_3 \cap \hat{u}^\perp$ et $\bar{u} \in M \cap \sigma_2^\vee \cap (-\sigma_3)^\vee$ tel que $\sigma_{23} = \sigma_2 \cap \bar{u}^\perp = \sigma_3 \cap \bar{u}^\perp$.

Remarquons alors que $\sigma_{123} = \sigma_{13} \cap \sigma_2 = \sigma_1 \cap \hat{u}^\perp \cap \sigma_2 = \sigma_{12} \cap \hat{u}^\perp$ et que $\sigma_{123} = \sigma_{23} \cap \sigma_1 = \sigma_2 \cap \bar{u}^\perp \cap \sigma_2 = \sigma_{12} \cap \bar{u}^\perp$. De plus, $\hat{u} \in M \cap \sigma_1^\vee \subseteq M \cap \sigma_{12}^\vee$ et $\bar{u} \in M \cap \sigma_2^\vee \subseteq M \cap \sigma_{12}^\vee$. On aura donc que :

$$\mathbb{C}[S_{\sigma_{123}}] = \mathbb{C}[S_{\sigma_{12}}]_{\chi^{\hat{u}}} = \mathbb{C}[S_{\sigma_{12}}]_{\chi^{\bar{u}}}.$$

La variété affine $V_{\sigma_3\sigma_1}$ est l'ouvert principal des points de V_{σ_1} où $\chi^{\hat{u}}$ ne s'annule pas (c'est à dire $(V_{\sigma_1})_{\chi^{\hat{u}}}$). En l'intersectant avec $V_{\sigma_1\sigma_2}$, on obtient les points de $V_{\sigma_1\sigma_2}$ où $\chi^{\hat{u}}$ ne s'annule pas, soit $(V_{\sigma_1\sigma_2})_{\chi^{\hat{u}}}$. L'ouvert $V_{\sigma_1\sigma_2} \cap V_{\sigma_3\sigma_1}$ correspond donc à $(V_{\sigma_{12}})_{\chi^{\hat{u}}}$ dans $V_{\sigma_{12}}$ et son anneau de coordonnées est $\mathbb{C}[S_{\sigma_{12}}]_{\chi^{\hat{u}}}$. De même, $V_{\sigma_1\sigma_2} \cap V_{\sigma_3\sigma_2}$ correspondra à $(V_{\sigma_{12}})_{\chi^{\bar{u}}}$ dans $V_{\sigma_{12}}$ et son anneau de coordonnées sera $\mathbb{C}[S_{\sigma_{12}}]_{\chi^{\bar{u}}}$. Ces deux variétés, ainsi que $V_{\sigma_{123}}$ ont donc le même anneau de coordonnées et correspondent toutes au même ouvert principal de $V_{\sigma_{12}}$.

Pour résumer ce qu'on vient de dire, en appliquant le même raisonnement aux permutations des σ_i, on a montré que $V_{\sigma_j\sigma_i} \cap V_{\sigma_k\sigma_i}$, $V_{\sigma_i\sigma_j} \cap V_{\sigma_k\sigma_j}$ et $V_{\sigma_{123}}$ s'identifient naturellement au même ouvert principal de $V_{\sigma_{ij}}$ (pour $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$) et les fonctions $g_{\sigma_j\sigma_i}$ sont simplement la composition de deux de ces identifications. En particulier, on a bien que $g_{\sigma_2\sigma_1} = g_{\sigma_1\sigma_2}^{-1}$, que $g_{\sigma_2\sigma_1}(V_{\sigma_2\sigma_1} \cap V_{\sigma_3\sigma_1}) = V_{\sigma_1\sigma_2} \cap V_{\sigma_3\sigma_2}$ et que $g_{\sigma_3\sigma_1} = g_{\sigma_3\sigma_2} \circ g_{\sigma_2\sigma_1}$ sur $V_{\sigma_2\sigma_1} \cap V_{\sigma_3\sigma_1}$.

Cela nous donne donc une variété algébrique, dénotée X_Σ, qu'on peut intuitivement voir comme un recollement des différentes variétés affines U_σ pour chaque $\sigma \in \Sigma$.

À partir d'ici, nous ne ferons plus de distinctions entre les ouverts affines U_α et les variétés V_α. Cela ne ferait qu'alourdir la notation et il est plus intuitif de voir une variété algébrique comme un recollement de variétés affines.

Théorème 1.13. *Soit Σ un éventail dans $N_\mathbb{R}$. Alors, la variété algébrique X_Σ construite ci-haut est une variété torique normale et séparée, de tore $U_{\{0\}}$.*

Démonstration. Commençons par montrer que c'est une variété torique. Remarquons d'abord que $U_{\{0\}}$ est bien un tore. En effet, $\mathbb{C}[U_{\{0\}}] = \mathbb{C}[S_{\{0\}}] = \mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[T_N]$. De plus, d'après ce qu'on a montré à la section 1.4, chaque cône σ étant fortement convexe, rationnel et de type fini, on a que U_σ est une variété torique avec comme tore $T_N = U_{\{0\}}$. De plus, si on prend un autre cône σ', alors ces deux actions de T_N sur l'intersection $U_\sigma \cap U_{\sigma'} = U_{\sigma\cap\sigma'}$ coïncident avec l'action de T_N sur $U_{\sigma\cap\sigma'}$.

En effet, les inclusions de $U_{\sigma\cap\sigma'}$ dans U_σ et $U_{\sigma'}$ sont induits (respectivement) par les inclusions $S_\sigma \subseteq S_{\sigma\cap\sigma'}$ et $S_{\sigma'} \subseteq S_{\sigma\cap\sigma'}$ et sont donc des morphismes toriques. Par la proposition 1.4, les deux actions coïncident avec l'action de T_N sur $U_{\sigma\cap\sigma'}$ donnée par sa structure de variété torique affine. On peut alors correctement recoller l'action de T_N sur tout X_Σ et comme tout $t \in T_N$ donne un morphisme sur tout U_σ (et donc sur toute intersection de U_σ), c'est bien un morphisme.

De plus, X_Σ est irréductible. En effet, si on prend deux fermés $F_1,F_2 \subseteq X_\Sigma$, alors il faut que F_1 ou F_2 contienne T_N au complet (car celui-ci est irréductible). Sans perdre de généralité, supposons que c'est F_1 qui le contient. Alors pour tout cône $\sigma \in \Sigma$, F_1 ou $X_\Sigma \setminus T_N$ contient U_σ (car celui-ci est irréductible). Or, c'est impossible que ce soit $X_\Sigma \setminus T_N$, car U_σ contient T_N. On a donc que F_1 contient tout les ouverts U_σ (et donc X_Σ).

Aussi, X_Σ est normale, car chaque U_σ l'est (par la proposition 1.12).

Il ne reste donc qu'à montrer que X_Σ est séparé. Pour cela, il nous suffit de démontrer que pour tout $\sigma_1,\sigma_2 \in \Sigma$, l'image de l'application diagonale $\Delta_\tau : U_\tau \to U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$ (où $\tau \doteq \sigma_1 \cap \sigma_2$) est fermée. En effet, l'image de $\Delta : X \to X_\Sigma \times X_\Sigma$ intersectée avec $U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$ est exactement $(U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2}) \times (U_{\sigma_1} \cap U_{\sigma_2}) = \mathrm{Im}(\Delta_\tau)$. Or, comme les sous-ensembles $U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2} \subseteq X_\Sigma \times X_\Sigma$ sont les ouverts affines de notre structure de variété algébrique pour $X \times X$, cela signifie en effet que $\mathrm{Im}(\Delta)$ sera fermé si et seulement chaque $\mathrm{Im}(\Delta_\tau)$ l'est.

Pour démontrer cette dernière étape, rappelons-nous tout d'abord ce qu'on a fait remarquer précédemment : $S_\tau = S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$. On peut donc prendre deux ensembles de générateurs $\mathscr{A}_1 = \{m_1, \ldots, m_p\}$ et $\mathscr{A}_2 = \{m'_1, \ldots, m'_q\}$ de S_{σ_1} et S_{σ_2} (respectivement) tels que $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$ engendrent S_τ. D'après ce qu'on a démontré dans les sections précédentes, on peut plonger la variété $U_{\sigma_1} = Y_{\mathscr{A}_1}$ dans $\mathbb{C}^p$, $U_{\sigma_2} = Y_{\mathscr{A}_2}$ dans $\mathbb{C}^q$ et $U_\tau = Y_{\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2}$ dans $\mathbb{C}^{p+q}$.

On a donc que U_τ et $U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$ sont toutes les deux des sous-variétés de $\mathbb{C}^{p+q}$. Comme $U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$ contient le tore $\mathrm{Im}(\Phi_{\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2}) \subseteq \mathrm{Im}(\Phi_{\mathscr{A}_1}) \times \mathrm{Im}(\Phi_{\mathscr{A}_2})$, il doit contenir sa fermeture, U_τ. En particulier, U_τ est une sous-variété (un fermé) de $U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$. Il ne nous reste donc qu'à montrer que cette inclusion correspond bien à l'application diagonale, ce qui nous permettra de dire que X_Σ est séparé et donc de conclure.

En effet, soit ι l'inclusion de U_τ dans $\mathbb{C}^{p+q}$ et soit π_1 la projection de $\mathbb{C}^{p+q} = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ vers $\mathbb{C}^p$. Alors, la composition $\pi_1 \circ \iota$ nous donne un morphisme de U_τ vers U_{σ_1}. Celui-ci engendre un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbre $\iota^* \circ \pi_1^* : \mathbb{C}[U_{\sigma_1}] \to \mathbb{C}[U_\tau]$. Regardons où est envoyé χ^{m_i} par ce morphisme. Dans la section 1.3 (plus précisément dans la preuve de la proposition 1.6), on a vu que χ^{m_i} est simplement la restriction à $U_{\sigma_1} = Y_{\mathscr{A}_1}$ de $x_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p] = \mathbb{C}[\mathbb{C}^p]$. Or, π_1 envoie simplement $x_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p]$ vers $x_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{p+q}]$ qui, restreint à U_τ, nous donne χ^{m_i}. L'homomorphisme $\iota^* \circ \pi_1^*$ est donc simplement l'inclusion de $\mathbb{C}[U_{\sigma_1}]$ dans $\mathbb{C}[U_\tau]$ qui correspond à l'inclusion de U_τ dans U_{σ_1}. Comme la correspondance entre «morphismes de variétés» et «homomorphismes d'anneau de coordonnées» est bijectif, cela signifie que $\pi_1 \circ \iota$ est simplement l'inclusion.

Un argument similaire nous dit que si $\pi_2 : \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^q$ est la projection, alors $\pi_2 \circ \iota : U_\tau \to U_{\sigma_2}$ sera l'inclusion. (La grosse différence des raisonnements est que $\chi^{m'_i}$ correspond à x_i dans $\mathbb{C}[\mathbb{C}^q]$, qui correspond à x_{i+p} dans $\mathbb{C}[\mathbb{C}^{p+q}]$, qui correspond lui-même à $\chi^{m'_i}$.) On peut alors en conclure que ι est simplement le produit de l'inclusion dans U_{σ_1} et de l'inclusion dans U_{σ_2}, c'est-à-dire que c'est Δ_τ. $\square$

À noter que la dernière partie de cette preuve est inspirée de la preuve du théorème 1.4 de [19].

Dans le cas où Σ est l'éventail engendré par un cône σ, alors $X_\Sigma = U_\sigma$. En effet, les ouverts U_τ pour $\tau \in \Sigma$ sont tous contenus dans U_σ. En général, on peut voir X_Σ comme le recollement des ouverts affines U_σ avec $\sigma \in \Sigma$ maximal, les autres étant contenus dans un de ces U_σ.

Exemple. Soit Σ l'éventail construit plus haut contenant les cônes engendrés par deux (ou moins) des vecteurs e_1, e_2 et $-e_1-e_2$. Notons $\sigma_1 \doteq \text{Cone}(e_1,e_2)$, $\sigma_2 \doteq \text{Cone}(e_1,-e_1-e_2)$, $\sigma_3 \doteq \text{Cone}(e_2,-e_1-e_2)$, $\sigma_{ij} \doteq \sigma_i \cap \sigma_j$ (pour $i,j \in \{1,2,3\}$) et $\sigma_{123} \doteq \{0\}$. On oubliera aussi le σ dans la notation des U_{σ_*}.

Lorsqu'on fait les calculs, on obtient que $\mathbb{C}[U_1] = \mathbb{C}[x,y]$, $\mathbb{C}[U_2] = \mathbb{C}[xy^{-1},y^{-1}]$ et $\mathbb{C}[U_3] = \mathbb{C}[x^{-1},x^{-1}y]$. Ces algèbres étant toutes isomorphes, chaque U_i est isomorphe à $\mathbb{C}^2$. De même, on obtient que chaque U_{ij} (avec $i \neq j$) est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

Faisons le cas U_{12} en détail. Le dual de $\text{Cone}(e_1) = \tau_1 \cap \tau_2$ est $\text{Cone}(e_2,e_1,-e_2)$. On obtient alors que $\mathbb{C}[U_{12}] = \mathbb{C}[x,y,y^{-1}]$ qui est exactement l'anneau de coordonnées de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$. En effet, $\mathbb{C}[x,y,y^{-1}] = \mathbb{C}[x,y]_y$ et on peut donc voir U_{12} comme l'ouvert principal $(\mathbb{C}^2)_y = \mathbb{C}\times\mathbb{C}^* \subseteq \mathbb{C}^2$. Or, on peut aussi écrire $\mathbb{C}[x,y,y^{-1}] = \mathbb{C}[xy^{-1},y,y^{-1}] = \mathbb{C}[xy^{-1},y^{-1}]_{y^{-1}}$. Cela signifie qu'on peut aussi identifier U_{12} à l'ouvert principal $(U_2)_{y^{-1}}$. Afin de comprendre la fonction de recollement entre U_1 et U_2, il nous suffit de comprendre cette identification.

Pour cela, il faut d'abord comprendre l'isomorphisme entre U_2 et $\mathbb{C}^2$. L'anneau de coordonnées de U_2 étant $\mathbb{C}[xy^{-1},y^{-1}]$, on peut envoyer xy^{-1} vers x et y^{-1} vers y. Comme il n'y a pas de relations entre xy^{-1} et y^{-1}, cela nous donne un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres obtenu depuis un isomorphisme de monoïde affine. Il induit donc bien un isomorphisme torique de variétés affines.

L'inclusion de U_{12} dans U_1 correspond à l'inclusion de $\mathbb{C}[U_1]$ dans $\mathbb{C}[U_{12}]$. (De même pour l'inclusion de U_{12} dans U_2.) Si on prend la fonction de recollement g_{21} et qu'on la compose à gauche et à droite par les isomorphismes entre U_i et $\mathbb{C}^2$ (U_1 à gauche et U_2 à droite), on obtient un morphisme $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Son dual φ^* enverra le morphisme x vers $xy^{-1} \in \mathbb{C}[U_2] \subseteq \mathbb{C}[U_{12}]$ et le morphisme y vers $y^{-1} \in \mathbb{C}[U_{12}]$. Le morphisme φ est donc $(x,y) \mapsto (xy^{-1},y^{-1})$.

La méthode est identique pour voir que la fonction de recollement g_{31} correspond au morphisme $(x,y) \mapsto (x^{-1},x^{-1}y)$. La méthode de calcul pour la fonction de recollement g_{32} est légèrement plus compliquée, mais revient essentiellement à faire deux fois le raisonnement ci-haut. On obtient alors qu'elle correspond au morphisme $(x,y) \mapsto (yx^{-1},x^{-1})$.

De là, on remarque que c'est exactement la construction qu'on a fait pour $\mathbb{P}^2$ (mais avec U_0 au lieu de U_3 : il suffit pour le voir de renommer les composantes de U_1 en x_0 et x_2, ceux de U_2 en x_0 et x_1 et ceux de U_3 en x_1 et x_2.

On a donc que $X_\Sigma = \mathbb{P}^2$.

On peut démontrer que toute variété torique normale et séparée est isomorphe à une telle variété torique X_Σ. L'idée de la preuve est donnée dans les exercices de la section 3.2 de [5]. Toutefois, on dira simplement qu'on se restreind aux variétés toriques de cette forme.

1.7. Diviseurs

Le lecteur à l'aise avec les surfaces de Riemann se rappelera qu'un diviseur est une combinaison (fini) entière de points et qu'on peut obtenir un diviseur $\mathrm{div}(f)$ à partir d'une fonction méromorphe f en prenant les zéros de f (en nombre fini) multipliés par leurs ordres respectifs moins les pôles de f (aussi en nombre fini) multipliés aussi par leurs ordres respectifs. Cela nous permet de définir le faisceau $\mathcal{O}_D$ des fonctions méromorphes f tels que $\mathrm{div}(f) + D$ n'a que des coefficients positifs. Ces faisceaux (et leurs groupes de cohomologie) sont utilisés pour étudier la surface.

Nous aimerions définir des objets analogues pour les variétés toriques. Pour ce faire, nous accepterons quelques définitions et propriétés des variétés algébriques et nous ferons la construction de leurs versions toriques.

Définition. Soit X une variété algébrique. Un *diviseur premier* de X est une sous-variété irréductible de codimension 1.

Un *diviseur de Weil* est une combinaison entière (finie) de diviseurs premiers. Ces diviseurs forment donc un groupe libre abélien dont les diviseurs premiers forment une base.

Un diviseur D sera dit *effectif* si tous ses coefficients sont positifs. On le dénotera par $D \geq 0$.

Si U est un ouvert non-vide de X, alors on définit la *restriction* de $D = \sum_i a_i D_i$ à U par : $D|_U \doteq \sum_{U \cap D_i \neq \emptyset} a_i U \cap D_i$.

Ici, la définition qu'on a donné de dimension ne s'applique pas très bien aux variétés non-toriques. On peut toutefois généraliser celle-ci de plusieurs façons équivalentes. On peut définir la dimension d'une variété X comme la longueur maximale d'une chaîne $Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_n$ (ici, de longueur n) de sous-variétés distinctes non-vides de X. On peut aussi, dans le cas affine, la définir comme la longueur maximale d'une chaîne $I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n$ d'idéals premiers distincts de $\mathbb{C}[X]$. Cette deuxième définition est aussi appelé *dimension de Krull* de l'anneau $\mathbb{C}[X]$.

Hartshorne [10] démontre au début de son livre que ces deux définitions sont équivalentes (si X est affine). Il démontre aussi que la dimension d'une variété affine (plongée dans $\mathbb{C}^n$) est égale à celle de son adhérence et que $\mathbb{C}^n$ est de dimension n. En particulier, cela nous permet de dire que notre définition est elle aussi équivalente dans le cas affine. Le cas général n'est pas très difficile à déduire.

Cette définition correspond à celle des surfaces de Riemann (où les sous-variétés irréductibles de codimension 1 sont simplement les singletons).

Voici la définition de diviseur qu'on utilisera pour les variétés toriques :

Définition. Soit X une variété torique. Un *diviseur premier T_N-invariant* sera un cône $\sigma \in \Sigma$ de dimension 1.

Un *diviseur de Weil T_N-invariant* sera une combinaison entière de cônes $\sigma \in \Sigma(1)$. Ils forment eux aussi un groupe libre abélien.

À priori, cette définition n'a rien à voir avec la définition précédente. Une définition plus intuitivement auraient été plutôt de demander que nos diviseurs premiers soient stable sous l'action du tore (c'est-à-dire qu'ils soient T_N-invariant).

Mais lorsque $X = X_\Sigma$ est torique, on peut construire une telle sous-variété $V(\rho)$ pour chaque cône $\rho \in \Sigma(1)$. Pour chaque cône $\sigma \in \Sigma$ contenant ρ comme face, l'intersection $V(\rho) \cap U_\sigma$ sera définie par $\mathbf{V}(I)$ avec $I \doteq \bigoplus_{m \in S_\sigma \setminus \rho^*} \chi^m \subseteq \mathbb{C}[S_\sigma]$. Sachant que $\rho^* = \sigma^\vee \cap \rho^\perp$ est une face de $\sigma^\vee$, on a que si $m{,}m' \in \sigma^\vee$ sont tels que $m + m' \in \rho^*$, alors $m{,}m' \in \rho^*$. En particulier, I est un idéal de $\mathbb{C}[S_\sigma]$.

Comme $t \cdot \chi^m = \chi^m(t^{-1})\chi^m$ pour tout $t \in T_N$, $V(\rho) \cap U_\sigma$ est bien stable sous l'action de T_N.

Dans le cas où $\sigma \in \Sigma$ ne contient pas ρ comme face (c'est-à-dire que $\rho \cap \sigma = \{0\}$), alors on pose $V(\rho) \cap U_\sigma \doteq \emptyset$.

Il n'est pas très difficile de vérifier que ces définitions coïncident sur l'intersection de U_σ et $U_{\sigma'}$ et donc que $V(\rho)$ est un fermé de X. De plus, remarquons que l'anneau de coordonnées de $V(\rho) \cap U_\sigma$ (pour $\sigma \in \Sigma$ contenant ρ) est $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \rho^\perp \cap M]$. (En effet, cet anneau est le quotient de $\mathbb{C}[U_\sigma]$ par l'idéal I. Étant un anneau intègre, cela signifie que I est premier et donc que $I = \mathbf{I}(D) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$.)

Or, prenons l'ensemble $\bar{\Sigma}$ des cônes dans Σ contenant ρ et projetons-le sur l'espace $N_\mathbb{R}/\operatorname{Span}(\rho)$. Cela nous donne un éventail. Son espace dual sera simplement $\rho^\perp$ (avec réseau $\rho^\perp \cap M$). Les anneaux de coordonnées étant identiques, on a donc un isomorphisme entre chaque $V(\rho) \cap U_\sigma$ et la variété torique affine $U_{\bar{\sigma}}$. Ceux-ci se prolongent à un isomorphisme entre $V(\rho)$ et $X_{\bar{\Sigma}}$ (car ils coïncident sur les intersections) et nous donne une structure naturelle de variété torique sur $V(\rho)$ (de tore $V(\rho) \cap U_\rho$). En particulier, $V(\rho)$ est irréductible et de codimension $\dim(\operatorname{Span}(\rho)) = \dim(\rho) = 1$.

Proposition 1.14. *Soit X_Σ une variété torique de tore T_N. Alors, on a l'égalité suivante :*

$$T_N \sqcup \bigcup_{\rho \in \Sigma(1)} V(\rho) = X_\Sigma.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que cet union est bien disjointe car aucun caractère ne s'annule sur T_N et elle est clairement contenue dans X_Σ.

Quant à l'inclusion inverse, prenons un cône $\sigma \in \Sigma$ et regardons les cônes $\rho \in \Sigma(1)$ qui sont des faces de σ. On a défini $V(\rho) \cap U_\sigma$ par $\mathbf{V}(I_\rho)$ où I_ρ est l'idéal de $\mathbb{C}[U_\sigma]$ engendré par les caractères dans $S_\sigma \setminus \rho^*$. Prendre l'union sur tous ces fermés revient à prendre le produit de ces idéals (ou à prendre l'idéal engendré par les produits de générateurs). Comme une somme d'éléments de $\sigma^\vee$ ne sera pas dans ρ si au moins un des éléments de la somme n'est pas dans ρ, cela revient à prendre l'idéal I engendré par les caractères χ^m où $m \in S_\sigma$ n'est dans aucune des facettes ρ^*. C'est-à-dire que $I = \bigoplus_{m \in \mathrm{Relint}(\sigma^\vee) \cap M} \mathbb{C}\chi^m$.

Or, dans la preuve de la proposition B.12, on explique que si $m \in \mathrm{Relint}(\sigma^\vee) \cap M$, alors $\sigma \cap m^\perp = \{0\}$. On a donc que $T_N = U_{\{0\}} = (U_\sigma)_{\chi^m}$ pour tout $m \in \mathrm{Relint}(\sigma^\vee) \cap M$. En particulier, tous les caractères $\chi^m \in I$ nous donnent la même sous-variété dans U_σ : $\mathbf{V}(\chi^m) = U_\sigma \setminus T_N$. On a donc que $U_\sigma \setminus (T_N \sqcup \mathbf{V}(I)) = \bigcup_{\rho \in \Sigma(1)} (V(\rho) \cap U_\sigma)$.

En recouvrant X_σ par les ouverts affines U_σ, on obtient bien que $X_\Sigma \setminus T_N = \bigcup_{\rho \in \Sigma(1)} V(\rho)$. □

Corollaire 1.15. *Tout diviseur premier de X_Σ qui est stable sous l'action du tore T_N est T_N-invariant. En d'autres mots, ces deux définitions sont équivalentes.*

Démonstration. Un résultat découlant directement de la proposition précédente est que tout diviseur premier qui n'est pas T_N-invariant doit intersecter T_N. En effet, supposons que D est un diviseur premier n'intersectant pas T_N. Alors, D s'écrit comme l'union de fermés $D \cap V(\rho)$. Les $V(\rho)$ étant en nombre fini et D étant irréductible (par définition), la seule possibilité est que D soit égal à un des $V(\rho)$.

Supposons donc qu'on a un diviseur premier D qui est stable sous l'action de T_N, mais qui n'est pas T_N-invariant. Par ce qu'on vient de dire, D doit intersecter T_N. Mais comme T_N agit transitivement sur lui-même, cela signifie que D doit contenir T_N. Comme X_Σ est irréductible, D ne peut pas contenir T_N à moins d'être la variété X_Σ au complet, ce qui contredirait le fait que D est de codimension 1.

Comme on a déjà dit que les $V(\rho)$ sont stables sous l'action de T_N, on a bien que nos deux définitions sont équivalentes. □

Ensuite, on aimerait définir un diviseur à chaque fonction sur X, c'est-à-dire un *ordre d'annulation* (de l'anglais, «order of vanishing») à la fonction pour chaque diviseur premier. Pour ce faire, nous aurons besoin du concept de valuation :

Définition. Une *valuation discrète* sur un corps K est un homomorphisme de groupe $\nu : K^* \to \mathbb{Z}$ tel que pour tout $x,y \in K^* = K \setminus \{0\}$ (avec $x + y \in K^*$), on a que $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x),\nu(y))$.

On appellera *anneau de valuation discrète* l'anneau $R = \{x \in K^* \mid \nu(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ associé.

Exemple. Dans les surfaces de Riemann, les fonctions «ordre au point p» définies pour toute fonction méromorphe sont des valuations discrètes. Leurs anneaux de valuation sont les fonctions méromorphes définies au point p.

Commençons alors par définir le corps K qu'on utilisera.

Soit $\mathbb{C}(X)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : U \to \mathbb{C}$ régulières définies sur un ouvert non-vide $U \subseteq X$, quotienté par la relation : $\varphi : U_1 \to \mathbb{C}$ et $\psi : U_2 \to \mathbb{C}$ sont équivalentes si et seulement s'il existe un ouvert non-vide $V \subseteq U_1 \cap U_2$ tel que $\varphi|_V = \psi|_V$. À priori, cet ensemble n'est pas très bien défini (La relation est-elle transitive ?) et ne forme pas un corps (Comment définit-on les opérations sur des fonctions ayant un domaine disjoint ?). Toutefois, il faut se rappeler qu'on travaille avec des variétés X irréductibles. Il est donc impossible d'avoir deux ouverts disjoints.

La relation est donc bien transitive (et forme une relation d'équivalence) et nos opérations (définies en prenant la restriction à l'intersection) sont bien définies. La fermeture sous la somme et le produit, l'existence de l'inverse additif et l'associativité et la distributivité des opérations sont facilement démontrables. Quant à l'existence de l'inverse multiplicatif, rappelons que les zéros d'une fonction régulière forment un fermé. (C'est le cas sur les ouverts affines et on a défini une fonction régulière sur un ouvert de X comme une fonction dont la restriction à chaque ouvert affine est régulière.) Quant à l'inverse multiplicatif, on peut se restreindre à l'ouvert des points où la fonction ne s'annule pas. Sur cet ouvert, la fonction sera inversible.

On a donc notre corps $K = \mathbb{C}(X)$. On appelera les éléments de $\mathbb{C}(X)$ les fonctions *rationnelles* sur X. Pour chaque diviseur premier D, voici maintenant l'anneau de valuation discrète :

$$\mathcal{O}_{X,D} = \{\varphi \in \mathbb{C}(X) \mid \varphi \text{ est défini sur l'ouvert } U \subseteq X \text{ avec } U \cap D \neq \emptyset\}.$$

La seule chose dont on a besoin de se rappeler pour vérifier que cet ensemble est bien un sous-anneau de $\mathbb{C}(X)$ est que, tout comme X, D est irréductible. Donc, si on a deux ouverts $U_1, U_2 \subseteq X$ tels que $U_1 \cap D$ et $U_2 \cap D$ sont non-vides, alors $U_1 \cap U_2 \cap D$ sera non-vide aussi.

Si X est normale, Cox [5] nous dit que cet anneau est de valuation discrète. Pour ce faire, il démontre que c'est un domaine intègre noethérien ayant un unique idéal premier. Il utilise ensuite la proposition 9.2 de [1] pour en faire un anneau de valuation discrète. Nous allons tout de même présenter la construction de cette valuation dans le cas torique.

Prenons un ouvert $U \subseteq X$ tel que $U \cap D \neq \emptyset$ (par exemple, si $D = V(\tau)$, U_σ avec σ contenant τ). Pour chaque $\varphi \in \mathbb{C}(X)$, si φ est définie sur l'ouvert V, alors sa restriction à $V \cap U$ (non-vide) donnera le même élément dans $\mathbb{C}(X)$. En particulier, si $\mathbb{C}(U)$ est l'ensemble (le corps) des fonctions régulières définies sur un ouvert dans U, alors la fonction restriction nous donne un isomorphisme naturel entre $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{C}(U)$. On écrira alors $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(U)$. Le même argument nous donne aussi que $\mathcal{O}_{X,D} = \mathcal{O}_{U,U\cap D}$.

Concentrons-nous donc sur le cas $D = V(\tau)$ et $U = U_\sigma$. Le corps $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(U_\sigma)$ sera alors simplement le corps de fractions de l'anneau des fonctions régulières $\mathcal{O}_{U_\sigma}(U_\sigma) = \mathbb{C}[U_\sigma]$ (qu'on avait aussi dénoté $\mathbb{C}(U_\sigma)$). En effet, un élément de $\mathbb{C}(U_\sigma)$ est une fonction régulière définie sur un ouvert $V \subseteq U_\sigma$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{O}_{U_\sigma}(V)$ qui est contenu dans le corps de fractions de $\mathbb{C}[U_\sigma]$ (voir la définition originelle de la section 1.1). Cela ne dépend pas du choix de V (ou des représentants f/g), car deux fonctions rationnelles distinctes ne peuvent coïncider sur un ouvert, par irréductibilité de U_σ.

À l'inverse, un élément du corps de fractions de $\mathbb{C}[U_\sigma]$ s'écrit f/g avec $f,g \in \mathbb{C}[U_\sigma]$ et $g \neq 0$. En restreignant f et g à l'ouvert $(U_\sigma)_g$ (non-vide, car $g \neq 0$), on se retrouve avec un élément de $\mathbb{C}(U_\sigma)$.

Sous cette identification, $\mathcal{O}_{X,D}$ sera le sous-anneau des fonctions rationnelles f/g où g ne s'annule pas sur tout D. (Ce qui est équivalent à dire que $g \notin \mathbf{I}(D)$ ou que f/g est définie sur un ouvert de D.)

Nous sommes maintenant prêts à définir notre valuation. Prenons d'abord v_ρ l'élément non-nul de $\rho \cap N$ le plus près de 0 (qui existe car N est discret) et définissons $\nu_D(\chi^m) \doteq \langle m, v_\rho \rangle$. Cela nous donne un homomorphisme de groupe entre M et $\mathbb{Z}$ et, comme $v_\rho \in \rho \subseteq \sigma = (\sigma^\vee)^\vee$, tous les $\chi^m \in \mathbb{C}[U_\sigma]$ sont tels que $\nu_D(\chi^m) \geq 0$. De plus, si $\chi^m \in \mathbb{C}[U_\sigma]$ ne s'annule pas sur tout D (et possède donc un inverse dans $\mathcal{O}_{X,D}$), il sera alors dans $\rho^\perp \cap M$ et $\nu_D(\chi^m) = 0$. Ça semble donc être un bon candidat pour notre valuation.

Étendons cet homomorphisme à tout $\mathbb{C}[M]$ ainsi : si $f = \sum c_i \chi^{m_i}$ (avec chaque c_i non-nul), alors on définira $\nu_D(f) \doteq \min\{\nu_D(\chi^{m_i})\}$. (En particulier, ν_D ne dépendra pas des coefficients complexes.) Cette définition nous garantit d'avoir que $\nu_D(f+g) \geq \min(\nu_D(f), \nu_D(g))$. Remarquons de plus que les seuls éléments inversibles de $\mathbb{C}[M]$ sont les multiples de caractères $c\chi^m$ et que $\nu_D(c\chi^{-m}) = -\nu_D(c\chi^m)$. On peut donc étendre ν_D à un homomorphisme entre $\mathbb{C}(U_\sigma)^*$ et $\mathbb{Z}$ en posant $\nu_D(f^{-1}) \doteq -\nu_D(f)$. Cet homomorphisme a bien la propriété que pour tout $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in \mathbb{C}(U_\sigma)^*$,

$$\begin{aligned} \nu_D\left(\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}\right) &= \nu_D(f_1 g_2 + f_2 g_1) - \nu_D(g_1 g_2) \\ &\geq \min\{\nu_D(f_1 g_2), \nu_D(f_2 g_1)\} - \nu_D(g_1 g_2) \\ &\geq \min\left\{\nu_D\left(\frac{f_1}{g_1}\right), \nu_D\left(\frac{f_2}{g_2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Pour finir, remarquons que si $g \in \mathbb{C}[U_\sigma]$ ne s'annule pas sur tout D, alors sa décomposition en caractères doit contenir au moins un caractère χ^m tel que $\nu_D(\chi^m) = 0$ (car tous les autres caractères s'annulent sur D) et on a que $\nu_D(g) = 0$. En particulier, tout élément $f/g \in \mathcal{O}_{X,D}$ est tel que $\nu_D(f/g) \geq 0$. À l'inverse, supposons qu'on a $f,g \in \mathbb{C}[U_\sigma]$ (avec $g \neq 0$) tels que $\nu_D(f/g) \geq 0$. Soit $m \in M$ tel que $\nu_D(\chi^m) = \nu_D(g)$ et étudions les fonctions rationnels f/χ^m et g/χ^m (la première, de valuation positive et la deuxième, de valuation nulle).

On sait que $f/\chi^m \in \mathbb{C}[M]$, mais il n'est pas forcément dans $\mathbb{C}[U_\sigma]$. Prenons un charactère $\chi^{m'}$ de la décomposition de f/χ^m et prenons un ensemble fini $\mathscr{A}$ de générateurs de σ contenant v_ρ. On sait que $(\tau^*)^* = (\tau^*)^\perp \cap N = \tau$ et donc que pour chaque élément $a \in \mathscr{A} \setminus \tau$, il existe $m_a \in \tau^*$ tel que $\langle m_a,a\rangle > 0$. Sachant que $\langle m',v_\rho\rangle = \nu_D(\chi^{m'}) \geq 0$ (c'est-à-dire que $m' \in \tau^\vee$), on peut alors ajouter suffisamment d'élément de $\tau^* \cap M$ à m' pour que le résultat soit dans $\sigma^\vee \cap M$.

En répétant cet argument sur chaque m', on obtient que, quitte à soustraire à m des éléments de $\tau^* \cap M \subseteq \tau^\perp \cap M$, on peut supposer que tous les caractères $\chi^{m'}$ contenu dans f/χ^m sont dans $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Cela ne changera pas la valeur de $\nu_D(\chi^m)$ et on aura que $f/\chi^m \in \mathbb{C}[U_\sigma]$. En appliquant le même argument à g/χ^m, on aura que f/g s'écrit comme le quotient de f/χ^m et g/χ^m, deux fonctions dans $\mathbb{C}[U_\sigma]$ où g/χ^m contient des caractères χ^m avec $m \in \tau^* \cap M$ dans sa décomposition et n'est donc pas dans $\mathbf{I}(D)$.

$\mathcal{O}_{X,D}$ est donc bien l'anneau de valuation discrète de ν_D.

Ayant nos valuations, on peut définir le diviseur d'une fonction rationnelle :

Définition. Soit $f \in \mathbb{C}(X)$ une fonction rationnelle. Celle-ci nous donne un diviseur $\operatorname{div}(f) \doteq \sum \nu_D(f)D$ où la somme se fait sur tous les diviseurs premiers de X.

On appellera les diviseurs de cette forme *principaux*.

Une première propriété qu'on acceptera sans démontrer est que cette somme contient toujours un nombre fini de termes non nuls. Dans le cas T_N-invariant, c'est trivialement vérifiable, car il n'y a qu'un nombre fini de cône de dimension 1.

On sait que $\mathbb{C}(X)$ contient les fonctions régulières $\mathcal{O}_X(U)$ pour tout ouvert U. Comme ces fonctions sont définis sur U, elles sont donc dans tous les anneaux $\mathcal{O}_{U,U\cap D}$ pour tout diviseur premier D tel que $U \cap D \neq 0$. En particulier, on a que $\operatorname{div}(f)|_U \geq 0$ pour tout $f \in \mathcal{O}_X(U)$. La deuxième propriété qu'on acceptera sera que la réciproque est vraie : si $f \in \mathbb{C}(X)^*$ a un diviseur effectif sur U ($\operatorname{div}(f)|_U \geq 0$), alors on peut l'étendre à une fonction régulière sur U (c'est-à-dire que $f \in \mathcal{O}_X(U)$).

Ces deux propriétés sont démontrées dans Cox [5]. La première, à la page 159 et la deuxième, à la page 162. (La proposition 4.0.16 démontre le cas particulier où $U = X$, mais il n'est pas très difficile de généraliser cette preuve.)

De là, on peut enfin définir le faisceau que l'on étudiera dans le dernier chapitre.

Définition. Soient X une variété algébrique normale et D un diviseur de Weil. Alors, le faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ est défini sur tout ouvert U par :

$$\mathcal{O}_X(D)(U) \doteq \{f \in \mathbb{C}(X)^* \mid (\operatorname{div}(f) + D)|_U \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Cette définition nous donne clairement un préfaisceau, car la restriction d'un diviseur ne change pas la positivité des coefficients, elle ne fait qu'en retirer. (Si le diviseur était effectif sur un ouvert, il le sera aussi sur un plus petit ouvert.) De plus, si $U = \bigcup_i U_i$ et si D' est un diviseur tel que $D'|_{U_i} \geq 0$ pour tout i, alors les coefficients de D' sont positifs pour tout diviseur premier intersectant au moins un des U_i, et donc pour tout diviseur premier intersectant U. On a donc que $D'|_U \geq 0$, ce qui nous donne l'existence du recollement de sections dans notre préfaisceau. L'unicité du recollement provient directement du fait que tous les ensembles $\mathcal{O}_X(D)(U)$ proviennent du même corps $\mathbb{C}(X)$. On a donc un faisceau.

Remarquons que la propriété qu'on a décrite un peu plus haut (la deuxième) implique que le faisceau $\mathcal{O}_X$ défini à la section 1.5 est identique au faisceau $\mathcal{O}_X(0)$. De plus, $\mathcal{O}_X(D)(U)$ est clairement un groupe abélien et si $f \in \mathcal{O}_X(U)$ et $g \in \mathcal{O}_X(D)(U)$, alors $(\mathrm{div}(fg)+D)|_U = \mathrm{div}(f)|_U + (\mathrm{div}(g) + D)|_U \geq 0$. Notre faisceau est donc un $\mathcal{O}_X$-module.

Rappelons-nous comment on a démontré dans la preuve du théorème 1.8 qu'on peut voir $\mathbb{C}[V]$ comme un sous-espace de $\mathbb{C}[M]$ engendré par des caractères. Un résultat similaire existe pour notre faisceau :

Proposition 1.16. *Si D est un diviseur de Weil T_N-invariant sur X_Σ, alors pour tout U s'écrivant comme une union d'ouverts affines U_σ (incluant X_Σ), on a que :*

$$\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(U) = \bigoplus_{(\mathrm{div}(\chi^m)+D)|_U \geq 0} \mathbb{C}\chi^m.$$

Démonstration. Le cas où U est vide est trivial, car on sait déjà que $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(\emptyset) = \{0\}$. On peut donc ignorer ce cas.

Pour démontrer l'égalité, vérifions d'abord que $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(U) \subseteq \mathbb{C}[M]$. Pour cela, il suffit de remarquer que $D|_{T_N} = 0$. En effet, rappelons-nous que les diviseurs premiers T_N-invariants n'intersectent pas T_N, et D est une somme de tels diviseurs. Pour tout $f \in \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(U)$, on a donc que $f|_{T_N} = (f + D)|_{T_N} \geq 0$ (car $T_N \subseteq U$). Par ce qu'on a dit plus haut, f est donc un élément de $\mathcal{O}_X(0)(T_N) = \mathcal{O}_{T_N}(T_N) = \mathbb{C}[T_N] = \mathbb{C}[M]$.

Aussi, pour chaque élément $t \in T_N$, on a un isomorphisme $t : X_\Sigma \to X_\Sigma$. Celui-ci envoit les sous-variétés (les fermés) vers d'autres sous-variétés et préserve ainsi les chaînes de sous-variétés. En particulier, il induit une bijection entre les diviseurs premiers de X_Σ. De plus, regardons l'action que t induit sur $\mathbb{C}[M]$ par $f \mapsto t \cdot f = f \circ t^{-1}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ et pour tout diviseur premier D', si D' (et donc $t^{-1} \cdot D'$) n'est pas T_N-invariant, alors il intesecte T_N et $\nu_{t^{-1} \cdot D'}(f) \geq 0$. La fonction f est donc définie sur un ouvert intersectant $t^{-1} \cdot D'$. On obtient ainsi que $t \cdot f$ est définie sur un ouvert intersectant $t \cdot t^{-1} \cdot D' = D'$ et donc que $\nu_{D'}(t \cdot f) \geq 0$.

Si $D' = V(\rho)$ est T_N-invariant, alors prenons un $m \in M$ tel que $\langle m, v_\rho \rangle$ soit égal au coefficient devant D' dans la décomposition de D. Alors, $\nu_{D'}(f\chi^m) \geq 0$ et on peut appliquer l'argument précédent pour dire que $\nu_{D'}(t \cdot (f\chi^m)) \geq 0$. Or, $t \cdot (f\chi^m) = (t \cdot f)(t \cdot \chi^m) = (t \cdot f)\chi^m(t^{-1})\chi^m$ et comme le nombre complexe $\chi^m(t^{-1})$ ne change rien à la valuation, on a bien que $\nu_{D'}(f) + \nu_{D'}(\chi^m) \geq 0$.

On a donc bien que $t \cdot f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ et que ce sous-espace de $\mathbb{C}[M]$ est stable sous l'action de T_N. Par le lemme 1.7, on obtient que

$$\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(U) = \bigoplus_{\chi^m \in \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(U)} \mathbb{C}\chi^m.$$

Ceci nous donne directement l'égalité qu'on cherchait (les conditions sous les sommes étant clairement équivalentes). $\square$

Remarquons que si $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$, la condition $(\mathrm{div}(\chi^m) + D)|_U \geq 0$ est équivalente à dire que pour tout $\rho \in \Sigma(1)$ tel que $\rho \subseteq \sigma$, $\langle m, v_\rho \rangle + a_\rho \geq 0$ (ou que $\langle m, v_\rho \rangle \geq -a_\rho$) où v_ρ est le plus petit élément non-nul de $\rho \cap N$. En effet, les caractères sont définis sur tout T_N, qui est un ouvert intersectant tout diviseur premier qui n'est pas T_N-invariant. On a donc bien que $\nu_{D'}(\chi^m) \geq 0$ pour tout $m \in M$ et tout diviseur premier D' qui n'est pas T_N-invariant.

Une conséquence intéressante de ce raisonnement est que si les cônes de dimension 1 engendrent $N_\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $\mathrm{Cone}(\Sigma(1)) = N_\mathbb{R}$), alors le seule caractère $m \in M$ qui peut être positif sur chacune de ces faces est le caractère nul. En d'autres mots, on aura que $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(X_\Sigma) = \mathcal{O}_{X_\Sigma}(0)(X_\Sigma) = \mathbb{C}$ (les fonctions constantes).

Un cas particulier est celui où l'éventail Σ est complet, $|\Sigma| = N_\mathbb{R}$. C'est le cas par exemple de $\mathbb{P}^2$.

Définissons un dernier type de diviseur :

Définition. Un diviseur de Weil D est dit *de Cartier* s'il est *localement principal*. C'est-à-dire qu'il doit exister un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de X par des ouverts et des fonctions rationnelles $f_i \in \mathbb{C}(X)^*$ pour chaque $i \in I$ tels que $D|_{U_i} = \mathrm{div}(f_i)|_{U_i}$ pour tout $i \in I$.

Un diviseur de Weil D sera dit *de $\mathbb{Q}$-Cartier* s'il existe un entier strictement positif k tel que kD est de Cartier.

Les diviseurs de Cartier qui nous intéresseront le plus seront ceux ayant pour recouvrement les ouverts affines U_σ (ou plus précisément les U_σ avec σ maximaux dans Σ) et dont les fonctions f_i sont des caractères. Par ce qu'on a dit plus haut, les diviseurs de caractères sont toujours T_N-invariants et donc ces diviseurs de Cartier le sont aussi. La proposition suivante illustre pourquoi ces diviseurs de Cartier sont particulièrement intéressants :

Proposition 1.17. *Soit D un diviseur de Cartier T_N-invariant. Alors pour tout $\sigma \in \Sigma$, $D|_{U_\sigma}$ est le diviseur d'un caractère. En particulier, tout diviseur de Cartier T_N-invariant est de la forme décrite ci-haut.*

Démonstration. Commençons par le cas particulier où D est effectif. Alors, par la proposition précédente, on a que :

$$I_D \doteq \mathcal{O}_X(-D)(U_\sigma) = \{f \in \mathbb{C}(X)^* \mid \mathrm{div}(f)|_{U_\sigma} \geq D|_{U_\sigma}\} \cup \{0\} = \bigoplus_{\mathrm{div}(\chi^m) \geq D} \mathbb{C}\chi^m.$$

Regardons aussi l'ensemble $I \doteq \bigoplus_{m \in S_\sigma \setminus \sigma^*} \mathbb{C}\chi^m \subseteq \mathbb{C}[U_\sigma]$. C'est un idéal car $\sigma^* = \sigma^\perp$ est une face de $\sigma^\vee$ (et donc si $m,m' \in S_\sigma$ sont tels que $m+m' \in \sigma^*$, alors $m,m' \in \sigma^*$). C'est en fait un idéal premier, car σ^* est fermé sous l'addition. En particulier, $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I} = I \subsetneq \mathbb{C}[U_\sigma]$ (où l'inclusion stricte est dû au fait que I ne contient pas les fonctions constantes) et $\mathbf{V}(I)$ n'est pas vide. Prenons alors un point $p \in \mathbf{V}(I) \subseteq U_\sigma$. La définition de I nous garantit que $p \in V(\rho)$ pour tout $\rho \in \Sigma(1)$ qui est une face de σ (c'est-à-dire que $V(\rho)$ intersecte U_σ).

Comme D est de Cartier, il existe un ouvert $U \subseteq X$ contenant p sur lequel D est principal. Quitte à diminuer l'ouvert, on peut supposer qu'il est principal dans U_σ (qu'il existe $h \in \mathbb{C}[U_\sigma]$ tel que $U = (U_\sigma)_h$). Prenons donc $f \in \mathbb{C}(X)^*$ telle que $D|_U = \operatorname{div}(f)|_U$. Comme D est effectif, on a que $f \in \mathcal{O}_X(0)(U) = \mathcal{O}_X(U) = \mathbb{C}[U_\sigma]_h$. Mais la fonction h est définie et non-nulle sur tout U. Son diviseur $\operatorname{div}(h)|_U$ est donc 0 et, quitte à multiplier f par une puissance de h, on peut supposer que $f \in \mathbb{C}[U_\sigma]$. Donc, $\operatorname{div}(f)|_{U_\sigma} \geq 0$ et si on lui retire les diviseurs premiers qui ne sont pas T_N-invariants, on diminuera simplement ce diviseur. En d'autres mots,

$$\operatorname{div}(f)|_{U_\sigma} \geq \sum_{\rho \in \Sigma(1),\ D_\rho \cap U_\sigma \neq \emptyset} \nu_{D_\rho}(f) D_\rho \cap U_\sigma = D|_{U_\sigma}$$

(où $D_1 \geq D_2$ signifie simplement que $D_1 - D_2 \geq 0$).

Donc, $f \in I_D$ (car $\operatorname{div}(f)|_{U_\sigma} \geq D|_{U_\sigma}$) et il existe $m_1, \ldots, m_s \in M$ et $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{C}^*$ tels que $f = \sum_i a_i \chi^{m_i}$ et que $\operatorname{div}(\chi^{m_1}) \geq D$ pour tout i. Cette dernière inégalité, si on la restreind à U, devient $\operatorname{div}(\chi^{m_i})|_U \geq \operatorname{div}(f)|_U$. Les fonctions rationnels χ^{m_i}/f sont donc des fonctions régulières sur U. Sachant que $1 = \frac{\sum_i a_i \chi^{m_i}}{f} = \sum_i a_i \frac{\chi^{m_i}}{f}$, il doit exister au moins un i tel que $(\chi^{m_i}/f)(p) \neq 0$. Donc, χ^{m_i}/f est définie et non-nulle sur un ouvert $V \subseteq U$ contenant p.

Cela signifie que $\operatorname{div}(\chi^{m_i})|_V = \operatorname{div}(f)|_V = D|_V$. Sachant que $\operatorname{div}(\chi^{m_i})$ est T_N-invariant et que V intersecte tous les diviseurs $V(\rho)$ (où $\rho \in \Sigma(1)$ est dans σ), on a donc bien que $\operatorname{div}(\chi^{m_i})|_{U_\sigma} = D|_{U_\sigma}$. Cela démontre ce qu'on cherchait dans le cas où D est effectif.

Dans le cas général, il suffit de prendre $m \in \operatorname{Relint}(\sigma^\vee) \cap M$. On aura alors que $\langle m, v_\rho \rangle > 0$ pour tout $\rho \in \Sigma(1)$ contenu dans σ. Donc $\operatorname{div}(\chi^m)|_{U_\sigma}$ est une combinaison strictement positive de tous les diviseurs $V(\rho)$ et il existera un entier positif suffisamment large k tel que $\bar{D} \doteq (D + \operatorname{div}(\chi^m))|_{U_\sigma} \geq 0$. L'argument précédent nous dira que $\bar{D}$ sera le diviseur d'un caractère. Ce sera donc aussi le cas de $D|_{U_\sigma}$, ce qui nous permet de conclure. □

Cette proposition nous permet de différencier les trois classes de diviseurs qu'on a introduit.

Exemple. Dans la variété $U_\sigma = V(xy - wz)$ (où $\sigma = \operatorname{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$), le diviseur $D_1 \doteq V(\operatorname{Cone}(e_1))$ est clairement de Weil et T_N-invariant, mais n'est pas de Cartier (ni de $\mathbb{Q}$-Cartier). En effet, si un caractère $m \in M$ a un produit nul avec e_2, $e_1 + e_3$ et $e_2 + e_3$, alors son produit avec e_1 sera forcément nul lui aussi. Il n'existe donc pas de $l > 0$ tel que lD_1 soit le diviseur d'un caractère (et donc de Cartier).

En général, ce raisonnement nous permettra de trouver des diviseurs de Weil qui ne sont pas de $\mathbb{Q}$-Cartier dès qu'on a un cône $\sigma \in \Sigma$ qui possède plus de face de dimension 1 que sa dimension ($\dim(\sigma) < \#\sigma(1)$).

Exemple. Soit σ le cône $\operatorname{Cone}(2e_1+e_2,e_2) \subseteq \mathbb{R}^2$. Alors, si on pose $D_1 \doteq V(\operatorname{Cone}(2e_1+e_2))$ et $D_2 \doteq (\operatorname{Cone}(e_2))$, on aura que le diviseur $D \doteq 2D_1+D_2$ n'est pas de Cartier. En effet, soit $m \in M$ tel que $\langle m,e_2\rangle = 1$ et que $\langle m,2e_1+e_2\rangle = 2$. Alors, il faudra que $\langle m,e_1+e_2\rangle = 1/2$, ce qui est impossible. Toutefois, $2D = 4D_1 + D_2$ est de Cartier. C'est en effet le diviseur du caractère $m \in M$ défini par $\langle m,e_1\rangle = 1$ et $\langle m,e_2\rangle = 2$.

La condition qu'on a utilisée ici est que les v_ρ (pour $\rho \in \sigma$) n'engendrent pas $\sigma \cap N$ en tant que monoïde affine. Elle sera nécessaire si on veut trouver des exemples de diviseurs de $\mathbb{Q}$-Cartier T_N-invariant qui ne sont pas de Cartier. Toutefois, lorsque Σ n'est pas obtenu à partir d'un seul cône, cette condition ne sera pas forcément suffisante.

Cette façon de voir les diviseurs D de Cartier (ou de $\mathbb{Q}$-Cartier) T_N-invariants nous permet de définir une fonction contenant toute l'information de la décomposition de D en diviseurs de caractère.

Définition. Soit D un diviseur de Cartier T_N-invariant et soit $\{m_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ tel que pour tout $\sigma \in \Sigma$, $D|_{U_\sigma} = \operatorname{div}(\chi^{m_\sigma})|_{U_\sigma}$. Alors, on définira la *fonction de support* $\varphi_D : |\Sigma| \to \mathbb{R}$ de D par $v \mapsto -\langle m_\sigma,v\rangle$ si $v \in \sigma$.

Cette fonction est bien définie. En effet, si τ est une face de $\sigma \in \Sigma$ et si m_τ et m_σ sont tels que les diviseurs de χ^{m_τ} et de χ^{m_σ} coïncident avec D sur U_τ et U_σ (respectivement), alors on a que $\operatorname{div}(\chi^{m_\tau})|_{U_\tau} = \operatorname{div}(\chi^{m_\sigma})|_{U_\tau}$ et $\chi^{m_\tau - m_\sigma}$ et $\chi^{m_\sigma - m_\tau}$ seront tous les deux dans $\mathcal{O}_X(U_\tau) = \mathbb{C}[S_\tau]$. On aura en particulier que $m_\tau - m_\sigma \in \tau^\perp \cap M$ et donc que $\langle m_\tau,v\rangle = \langle m_\sigma,v\rangle$ pour tout $v \in \tau$.

Cela démontre aussi que la fonction φ_D ne dépend pas du choix des m_σ. De plus, comme $\nu_{D_\rho}(\chi^m) = \langle m,v_\rho\rangle$ pour tout $\rho \in \Sigma(1)$ et tout $m \in M$, on a que $D = -\sum_\rho \varphi_D(v_\rho)D_\rho$. À noter qu'il existe dans la littérature une autre définition pour la fonction de support de D, qui est égale $-\varphi_D$. Fulton [7] la dénote par ψ_D.

Définition. Soit D un diviseur de $\mathbb{Q}$-Cartier T_N-invariant et soit un entier $l > 0$ tel que lD est de Cartier. On définira naturellement la *fonction de support* de D par $\varphi_D \doteq (1/l)\varphi_{lD}$.

Cette fonction ne dépend pas du choix de l. En effet, prenons deux entiers $l_1,l_2 > 0$ tels que $l_1 D$ et $l_2 D$ sont de Cartier et, pour $\sigma \in \Sigma$ fixé, choisissons deux caractères χ^{m_1} et χ^{m_2} dont les diviseurs coïncident sur U_σ avec $l_1 D$ et $l_2 D$ (respectivement). Alors, $l_1 l_2 D$ est de Cartier et $l_2 m_1$ et $l_1 m_2$ sont deux choix de m_σ pour ce diviseur. Par ce qu'on vient de montrer, $-l_2\langle m_1,v\rangle = \varphi_{l_1 l_2 D}(v) = -l_1\langle m_2,v\rangle$ pour tout $v \in \sigma$. En divisant par $l_1 l_2$, on obtient bien que φ_D ne dépend que de D.

Chapitre 2

COHOMOLOGIE DE FAISCEAUX

Dans ce chapitre, on démontrera des résultats plus avancés de la théorie des faisceaux et on introduira différents types de faisceaux. Au lecteur qui n'est pas encore à l'aise avec les faisceaux, on lui recommandera de lire l'annexe A ou une des références à ce sujet. On bâtira sur ces fondations tout au long du chapitre.

On introduira aussi la cohomologie de faisceau, qui sera familière à ceux qui ont déjà fait de l'homologie.

Les références principales sont [**8**] et [**21**], excepté pour les résultats des sections 2.2 et 2.6, qui sont pour la plupart tirés de [**5**] et [**10**].

2.1. Modules projectifs et injectifs

Afin de simplifier la notion, on fixera un anneau R et on assumera que, à moins d'indication contraire, tous les modules de cette section sont des R-modules à gauche. Toutefois, toutes les définitions et propriétés de cette section tiennent aussi pour les R-modules à droite.

Soient M et L deux modules. Alors, on notera $\mathrm{Hom}_R(L,M)$ (ou simplement $\mathrm{Hom}(L,M)$) pour parler de l'ensemble des homomorphismes de module allant de L vers M. Ce n'est pas forcément un module, mais c'est au moins un groupe abélien. Soient M' et L' deux autres modules et soient $f : L' \to L$ et $g : M \to M'$ des homomorphismes de module. On a alors un homomorphisme de groupe

$$\mathrm{Hom}(f,g) : \mathrm{Hom}(L,M) \to \mathrm{Hom}(L',M')$$

défini par $u \mapsto g \circ u \circ f$.

Un résultat important de la théorie des modules est que le foncteur $\mathrm{Hom}(L,\cdot)$ est *exact à gauche* : si on a la suite exacte

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

(où M', M et M'' sont des modules, et f et g sont des homomorphismes), alors pour tout module L, la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}(L,M') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{Id}_L\,,f)} \mathrm{Hom}(L,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{Id}_L\,,g)} \mathrm{Hom}(L,M'')$$

est exacte.

On a un résultat dual pour $\mathrm{Hom}(\cdot,M)$: si on a la suite exacte

$$L' \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} L'' \to 0$$

(où L', L et L'' sont des modules), alors pour tout module M, la suite

$$\mathrm{Hom}(L',M) \xleftarrow{\mathrm{Hom}(f,\mathrm{Id}_M)} \mathrm{Hom}(L,M) \xleftarrow{\mathrm{Hom}(g,\mathrm{Id}_M)} \mathrm{Hom}(L'',M) \leftarrow 0$$

est exacte.

Définition. On dit qu'un module L est *projectif* si $\mathrm{Hom}(L,\cdot)$ est *exact* : pour toute suite exacte de module

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

la suite correspondante

$$0 \to \mathrm{Hom}(L,M') \to \mathrm{Hom}(L,M) \to \mathrm{Hom}(L,M'') \to 0$$

est exacte. Par ce qu'on a dit plus haut, cela revient à dire que le foncteur $\mathrm{Hom}(L,\cdot)$ préserve la surjectivité.

L'exemple le plus simple de module projectif est le module libre. En effet, si L est libre, alors un élément de $\mathrm{Hom}(L,X)$ est déterminé par les valeurs qu'il prend sur une base β de L et il existe un tel élément pour chacun de ces choix. (C'est-à-dire que $\mathrm{Hom}(L,X)$ est en bijection avec l'ensemble des applications de β vers X.) De là, soient $f : M \to M'$ un homomorphisme surjectif et $\varphi \in \mathrm{Hom}(L,M')$. Pour chaque $x \in \beta$, on définit $\psi(x)$ en prenant arbitrairement un élément de $f^{-1}(\varphi(x)) \subseteq M$. Cela nous donne un homomorphisme $\psi \in \mathrm{Hom}(L,M)$. Par ce qu'on vient de dire, il faut forcément que $\varphi = f \circ \phi$. Donc, $\mathrm{Hom}(\mathrm{Id}_L\,,f)$ est surjectif.

En particulier, tout module peut être vu comme le quotient d'un module projectif.

Définition. On dit qu'un module M est *injectif* si $\mathrm{Hom}(\cdot,M)$ est exact : pour toute suite exacte de module

$$0 \to L' \to L \to L'' \to 0,$$

la suite correspondante

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(L',M) \leftarrow \mathrm{Hom}(L,M) \leftarrow \mathrm{Hom}(L'',M) \leftarrow 0$$

est exacte. Par ce qu'on a dit plus haut, il est suffisant d'avoir l'exactitude en $\mathrm{Hom}(L',M)$ pour avoir l'injectivité.

Une autre façon de voir l'injectivité d'un module M est donc que pour tout module L et pour tout sous-module L', un homorphisme entre L' et M peut être prolongé à un homomorphisme entre L et M.

Les modules injectifs sont beaucoup moins facile à visualiser que les projectifs. On peut toutefois simplifier un peu notre condition :

Proposition 2.1. *Un module M est injectif si et seulement si, pour tout idéal (à gauche) I de R (vus tous les deux comme des modules), l'homomorphisme* $\mathrm{Hom}(R,M) \to \mathrm{Hom}(I,M)$ *induit par l'inclusion $I \subseteq R$ est surjectif.*

Démonstration. Ce critère est clairement nécessaire, car ce n'est qu'un cas particulier de la définition où $L' = I$ et $L = R$. Il nous faut donc montrer que ce critère est suffisant.

Soient L un module, L' un sous-module de L et $f \in \mathrm{Hom}(L',M)$. Soit E l'ensemble des couples $(\bar{L}, \bar{f})$ où $L' \subseteq \bar{L} \subseteq L$ et $\bar{f}|_{L'} = f$. Cette ensemble est non-vide (il contient (L',f)) et on peut y définir la relation d'ordre suivante : $(L_1,f_1) \leq (L_2,f_2)$ si et seulement si $L_1 \subseteq L_2$ et $f_2|_{L_1} = f_1$. Avec cet ordre, pour toute chaîne $(L_1,f_1) \leq (L_2,f_2) \leq \ldots$, on a le majorant $(\bar{L}, \bar{f})$ où $\bar{L} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} L_i$ et pour $x \in L_i$, $\bar{f}(x) = f_i(x)$. C'est donc un ensemble inductif et, par le Lemme de Zorn, on a un élément maximal $(\hat{L},\hat{f})$.

Assumons que $\hat{L} \neq L$ (sinon on aurait terminé) et prenons $x \in L \setminus \hat{L}$. Soit J l'ensemble des $r \in R$ tels que $r \cdot x \in \hat{L}$. Comme $\hat{L}$ est un module, l'ensemble J sera clairement un idéal. Prenons l'homomorphisme $h : J \to M$ défini par $h(\lambda) \doteq \hat{f}(\lambda \cdot x)$. Notre critère nous dit qu'on peut étendre h à un homomorphisme $\bar{h} : R \to M$. On peut alors définir un homomorphisme g sur le sous-module de L engendré par $\hat{L}$ et x : $g(y + r \cdot x) \doteq \hat{f}(y) + \bar{h}(r)$ pour tout $y \in \hat{L}$ et $r \in R$. Cette fonction est bien définie car si $r \cdot x \in \hat{L}$, alors $r \in J$ et $\bar{h}(r) = h(r) = \hat{f}(r \cdot x)$. C'est un homomorphisme, car g et $\bar{h}$ sont des homomorphismes. De plus, $g|_{\hat{L}} = \hat{f}$.

On a donc réussi à étendre $\hat{f}$ sur un sous-module de L strictement plus grand que $\hat{L}$. Ceci contredit la maximalité de $(\hat{L},\hat{f})$. On a donc forcément que $\hat{L} = L$ et qu'on peut prolonger f à un homomorphisme sur tout L. $\square$

À remarquer qu'un homomorphisme $f \in \mathrm{Hom}(R,M)$ a toujours forcément la forme $f(r) = r \cdot x$ pour un certain $x \in M$.

Ce critère nous permet de donner notre premier exemple de module injectif.

Exemple. Prenons le cas où $R = \mathbb{Z}$ et définissons le $\mathbb{Z}$-module $T \doteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Celui-ci est injectif. En effet, les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont simplement les sous-groupes $n\mathbb{Z}$ pour $n \geq 0$. Prenons donc un $\mathbb{Z}$-homomorphisme $f : n\mathbb{Z} \to T$ et posons $x \doteq f(n) \in T$. On peut alors prendre $y \in T$ tel que $n \cdot y = x$. (Si $n = 0$, alors il faut que $x = 0$ et tout y fonctionne. Sinon, on prend un représentant dans $\mathbb{Q}$ de x et on le divise par n.)

La fonction $g : \mathbb{Z} \to T$ définie par $g(m) \doteq m \cdot y$ sera bien un homomorphisme dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},T)$ qui prolonge f, car $g(nm) = m \cdot (n \cdot y) = m \cdot x = m \cdot f(n) = f(nm)$. Par le critère précédent, T est injectif.

Comme tout module peut être représenté comme le quotient d'un module projectif, on aimerait un résultat similaire pour les modules injectifs.

Proposition 2.2. *Tout module est un sous-module d'un module injectif.*

Démonstration. Prenons $T = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ le $\mathbb{Z}$-module défini précédemment et L un module quelconque. En particulier, c'est un groupe abélien et on peut aussi le voir comme un $\mathbb{Z}$-module. Définissons $L' \doteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,T)$. Pour $r \in R$, $f \in L'$ et $x \in L$, on peut définir le produit $(f \cdot r)(x) \doteq f(rx)$. Cela fera de L' un R-module à droite.

Sous cette structure, si $g : L \to M$ est un homomorphisme de R-modules, alors $\hat{g} \doteq \mathrm{Hom}(g, \mathrm{Id}_T) : M' \to L'$ en sera un lui aussi. En effet, pour tout $f \in M'$, tout $r \in R$ et tout $x \in L$, on a que :

$$(\hat{g}(f) \cdot r)(x) = \hat{g}(f)(rx) = f(g(rx)) = f(r \cdot g(x)) = (f \cdot r)(g(x)) = \hat{g}(f \cdot r)(x).$$

Comme on a déjà dit que $\hat{g}$ est un homomorphisme de groupe, on en conclut que c'est bien un homomorphisme de R-modules (à droite). Le même raisonnement s'appliquerait si g était un homomorphisme de R-modules à droite : $\hat{g}$ serait alors un homomorphisme de R-modules à gauche.

Maintenant, définissons $L'' \doteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L',T)$. ($\mathbb{Z}$ étant abélien, T est un $\mathbb{Z}$-module à gauche et à droite.) En lui équipant un produit similaire à celui de L', on en fera un R-module à gauche. De là, on a un homomorphisme canonique $\varphi : L \to L''$ qu'on définit ainsi : si $x \in L$, alors $\varphi(x)$ sera l'homomorphisme qui envoit f vers $f(x)$ pour tout $f \in L'$.

Remarquons que φ est injectif. En effet, prenons $x \in L$ non-nul et posons G le groupe cyclique engendré par x dans le groupe abélien L. Si G a n éléments, alors $f(x) = [\frac{1}{n}] \in T$ définira un homomorphisme de G vers T. Si G a une infinité d'éléments, alors on prendra $f(x) = [\frac{1}{2}] \in T$. Dans les deux cas, comme T est injectif, on pourra prolonger f à un homomorphisme (de $\mathbb{Z}$-modules) de L vers T. Donc, $f \in L'$ et $\varphi(x)(f) = f(x) \neq 0$. L'homomorphisme $\varphi(x)$ n'est donc pas nul. Cela nous permet de conclure que φ est injectif.

Ensuite, remarquons que si M est un R-module à droite projectif, alors M' est injectif. En effet, soit X un R-module à gauche et soit f un homomorphisme d'un sous-module Y de X vers M'. On a donc l'homomorphisme $\hat{f} \doteq \mathrm{Hom}(f, \mathrm{Id}_T) : M'' \to Y'$ avec lequel on peut construire l'homomorphisme $\tilde{f} \doteq \hat{f} \circ \varphi_M : M \to Y'$. De plus, on a une inclusion $\iota : Y \hookrightarrow X$ et, de le même façon, on obtient l'homomorphisme $\rho \doteq \mathrm{Hom}(\iota, \mathrm{Id}_T) : X' \twoheadrightarrow Y'$ (où la surjectivité vient du fait que T est injectif). Or, comme M est projectif, il doit exister un homomorphisme $\psi : M \to X'$ tel que $\rho \circ \psi = \tilde{f}$. On prend encore le dual et on obtient $\hat{\psi} : X'' \to M'$. Cet homomorphisme prolonge f à X'' (et donc à X). Soient $y \in Y$ et $x \in M$, alors on a :

$$\begin{aligned}\hat{\psi} \circ \varphi_X \circ \iota(y)(x) &= \varphi_X \circ \iota(y)(\psi(x)) = \psi(x)(\iota(y)) = \rho \circ \psi(x)(y) \\ &= \tilde{f}(x)(y) = \hat{f} \circ \varphi_M(x)(y) = \varphi_M(x)(f(y)) \\ &= f(y)(x).\end{aligned}$$

Cela démontre bien que $f = \hat{\psi} \circ \varphi_X \circ \iota$ et que $\hat{\psi}$ est un prolongement de f.

Finalement, on sait que L' peut être vu comme le quotient d'un module projectif F (et on a un homomorphisme $\rho : F \twoheadrightarrow L'$). Cela nous donne un homomorphisme injectif $\iota \doteq \operatorname{Hom}(\operatorname{Id}_T, \rho) : L'' \hookrightarrow F'$. En composant avec φ, on a que L est isomorphe à un sous-module de F', qui est injectif car F est projectif. □

2.2. Faisceau injectif

On peut définir des concepts similaires pour les faisceaux.

Définition. Un faisceau $\mathcal{F}$ (de groupes abéliens, d'anneaux, de $\mathcal{O}_X$-modules, etc.) sur un espace X est dit *injectif* si, pour toute paire de faisceaux $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ (de même structure algébrique) sur X reliés par un morphisme injectif $\varphi : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ et pour tout morphisme $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$, il existe un morphisme $\theta : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ tel que $\psi = \theta \circ \varphi$.

À noter que la structure algébrique est très importante. Un faisceau qui est injectif en tant que $\mathcal{O}_X$-module pourrait ne pas l'être en tant que faisceau de groupes abéliens.

Une question légitime serait de se demander si tout faisceau est contenu dans un faisceau injectif (comme c'est le cas pour les modules.) Nous allons le montrer dans le cas qui nous intéresse : les $\mathcal{O}_X$-modules.

Proposition 2.3. *Soit $\mathcal{O}_X$ un faisceau d'anneau sur l'espace X. Alors, tout $\mathcal{O}_X$-module est sous-faisceau d'un $\mathcal{O}_X$-module injectif.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module. Pour chaque $x \in X$, la fibre $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module. Il est donc inclut dans un $\mathcal{O}_{X,x}$-module injectif I_x. Remarquons que pour tout ouvert $U \subseteq X$ contenant x, l'opération $r \cdot i_x \doteq r_x \cdot i_x$ fait de I_x un $\mathcal{O}_X(U)$-module. On peut construire ainsi le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{I}^x$ par $\mathcal{I}^x(U) = I_x$ si $x \in U$ et $\mathcal{I}^x(U) = 0$ sinon (le faisceau gratte-ciel de I_x). Les restrictions sont évidentes : l'identité si x est contenu dans nos deux ouverts et le morphisme constant 0 sinon.

Soit maintenant le faisceau $\mathcal{J} \doteq \prod_{x \in X} \mathcal{I}^x$. C'est un $\mathcal{O}_X$-module et pour tout ouvert $U \subseteq X$, on a $\mathcal{J}(U) = \prod_{x \in U} I_x$. C'est en fait le faisceau des sections (pas forcément continues) au-dessus de X à valeur dans $\bigsqcup_{x \in X} I_x$. Les inclusions $\mathcal{F}_x \subseteq I_x$ nous donne une famille d'applications $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{J}$ définie par $\iota(U)(s) = \prod_{x \in U} s_x$. Il préserve clairement la somme. Aussi, soit un ouvert $U \subseteq X$ et soient $s \in \mathcal{F}(U)$ et $r \in \mathcal{O}_X(U)$. On aura

$$\iota(U)(r \cdot s) = \prod_{x \in U} (r \cdot s)_x = \prod_{x \in U} r_x \cdot s_x = \prod_{x \in U} r \cdot s_x = r \cdot \prod_{x \in U} s_x = r \cdot \iota(U)(s).$$

Finalement, soient deux ouverts $V \subseteq U \subseteq X$ et soit $s \in \mathcal{F}(U)$. Alors,

$$\iota(V)(s|_V) = \prod_{x \in V} (s|_V)_x = \prod_{x \in V} s_x = \iota(U)(s)|_V.$$

C'est donc bien un morphisme de $\mathcal{O}_X$-module. De plus, il est facile de vérifier que ι est injectif : pour tout ouvert $U \subseteq X$ et pour tout $s,t \in \mathcal{F}(U)$, $\iota(U)(s) = \iota(U)(t)$ si et seulement si $s_x = t_x$ pour tout $x \in U$, ce qui ne peut arriver que si $s = t$.

Il ne nous reste qu'à démontrer que $\mathcal{J}$ est injectif. Prenons deux $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, un morphisme injectif $\varphi : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ et un morphisme $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{J}$ et commençons par étudier ψ. Celui-ci se décompose en morphismes $\phi^x : \mathcal{G} \to \mathcal{I}^x$. Pour chaque ouvert $U \subseteq X$, on sait que le morphisme $\mathcal{I}^x(U) \to \mathcal{I}^x_x$ est simplement l'identité $I_x \to I_x$. Alors, pour tout $s \in \mathcal{G}(U)$, on obtient que $\phi^x(U)(s) = \phi^x(U)(s)_x = \phi^x_x(s_x)$. Le morphisme ϕ^x est donc uniquement déterminé par le morphisme $\phi^x_x : \mathcal{G}_x \to I_x$ qu'il engendre.

Or, comme I_x est injectif et comme le morphisme $\varphi : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ induit une inclusion $\varphi_x : \mathcal{G}_x \hookrightarrow \mathcal{H}_x$, il doit exister un morphisme $\theta_x : \mathcal{H}_x \to I_x$ tel que $\phi^x_x = \theta_x \circ \varphi_x$. Ce morphisme nous donne une famille d'applications $\theta : \mathcal{H} \to \mathcal{J}$ définie par $\theta(U)(s) = \prod_{x \in U} \theta_x(s_x)$. Tout comme ι, c'est un morphisme de $\mathcal{O}_X$-module. De plus, pour tout ouvert $U \subseteq X$ et $s \in \mathcal{G}(U)$:

$$\begin{aligned} \theta \circ \varphi(U)(s) &= \prod_{x \in U} \theta_x(\varphi(U)(s)_x) = \prod_{x \in U} \theta_x \circ \varphi_x(s_x) \\ &= \prod_{x \in U} \phi^x_x(s_x) = \prod_{x \in U} \phi^x(U)(s) = \psi(U)(s). \end{aligned}$$

Ceci nous donne bien que $\psi = \theta \circ \varphi$ et que donc $\mathcal{J}$ est injectif. $\square$

On dira alors que la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules a *suffisamment d'injectifs*.

Bien que l'on n'ait montré ce résultat que pour les $\mathcal{O}_X$-modules, on peut prendre le cas particulier où $\mathcal{O}_X$ est le faisceau d'anneaux constant R. Cela démontrera le résultat vrai pour les faisceaux de R-modules. En effet, si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-module, alors on a une action de R sur chaque $\mathcal{F}(U)$ en prenant les éléments diagonaux de $\mathcal{O}_X(U)$, action qui commute avec les restrictions.

À l'inverse, si $\mathcal{F}$ est un faisceau de R-module, alors on a une action de R sur chacune des fibres $\mathcal{F}_x$. Mais rappelons-nous que R est aussi la fibre de $\mathcal{O}_X$ en tout point. Cela induit donc une action de $\mathcal{O}_X(U)$ sur chaque $\tilde{\mathcal{F}}(U) = \mathcal{F}(U)$. De même, on peut montrer qu'un morphisme de faisceau de $\mathcal{O}_X$-module induit un morphisme de faisceau de R-module (et vice versa).

En prenant le cas plus particulier où $R = \mathbb{Z}$, un $\mathbb{Z}$-module est exactement un groupe abélien. Cela démontrera aussi le résultat pour les faisceaux de groupes abéliens.

Prenons donc un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$. Par le résultat qu'on vient de démontrer, on peut le voir comme le sous-faisceau d'un $\mathcal{O}_X$-module injectif $\mathcal{J}^0$. D'après l'annexe A.3, on peut alors construire la suite courte exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{J}^0 \longrightarrow \mathcal{J}^0/\mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Mais le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{G}^1 \doteq \mathcal{J}^0/\mathcal{F}$ est lui aussi contenu dans un $\mathcal{O}_X$-module injectif $\mathcal{J}^1$. Par induction, on construit ainsi une suite de $\mathcal{O}_X$-modules injectifs $\{\mathcal{J}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{G}^{n+1} \doteq \mathcal{J}^n/\mathcal{G}^n$ est contenu dans $\mathcal{J}^{n+1}$. Ceci nous donne une suite de faisceau :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{J}^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

qui est exacte. (Ici, d^n est la composition de la projection de $\mathcal{J}^n$ vers le quotient $\mathcal{J}^n/\mathcal{G}^n$ et de l'inclusion de $\mathcal{J}^n/\mathcal{G}^n$ dans $\mathcal{J}^{n+1}$.) En effet, à chaque étape de la suite, l'image de d^n et le noyau de d^{n+1} sont égaux à $\mathcal{G}^{n+1} = \mathcal{J}^n/\mathcal{G}^n$ (ou à $\mathcal{G}^1 = \mathcal{J}^0/\mathcal{F}$).

On appelle la suite $\{\mathcal{F}^n,d^n\}$ une *résolution injective* de $\mathcal{F}$. On pourrait définir les groupes de cohomologie de $\mathcal{F}$ à partir de cette suite (tel que fait dans [**10**]). Toutefois, il existe une méthode plus simple qui utilise une propriété moins forte que l'injectivité : la résolution flasque.

2.3. Faisceaux flasques

Définissons d'abord ce qu'est un faisceau flasque.

Définition. Un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace X est dit *flasque* si, pour tout ouvert $U \subseteq X$, l'application de restriction $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ est surjective.

Intuitivement, un faisceau est flasque si on peut toujours prolonger une section à tout l'espace.

Il est facile de se convaincre que toutes les fonctions de restriction d'un faisceau flasque sont surjectives, pas seulement celles partant de l'espace X. Il suffit pour cela d'étendre la section à X, pour ensuite la restreindre à l'ouvert de notre choix. En particulier, la restriction d'un faisceau flasque à un ouvert de X sera aussi flasque.

Si on a une fonction continue $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques et que $\mathcal{F}$ est un faisceau flasque sur X, alors son image directe $f_*(\mathcal{F})$ sera aussi flasque, car elle partage ses fonctions de restriction avec $\mathcal{F}$.

De même, si on a une famille $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ de faisceaux flasques sur X, alors le faisceau produit $\mathcal{F} \doteq \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i$ sera aussi flasque, car le produit de fonctions surjectives est aussi surjectif.

Un exemple un peu trivial de faisceau flasque :

Exemple. Soit X un espace topologique. Associons à chaque $x \in X$ un ensemble Y_x non-vide et posons $Y = \bigsqcup\limits_{x\in X} Y_x$. On peut définir le faisceau $\mathcal{F}$ sur X ainsi : pour chaque ouvert $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U)$ sera l'ensemble des fonctions $s : U \to Y$ telles que pour tout $x \in U$, $s(x) \in Y_x$.

Les restrictions seront simplement les restrictions classiques. Notre définition nous donne directement les conditions de recollement.

Ce faisceau sera évidemment flasque, puisqu'on peut compléter toute section sur U en lui donnant des valeurs arbitraires sur $X \setminus U$. La continuité n'étant pas un problème, ce sera bien une section sur tout X.

On verra plus loin l'importance de cet exemple.

Proposition 2.4. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace X et soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert de X. Si $\mathcal{F}|_U$ est flasque pour tout $U \in \mathfrak{U}$, alors $\mathcal{F}$ est flasque. Être flasque est donc une propriété locale.*

Démonstration. Soit un ouvert $U \subseteq X$ et soit $s \in \mathcal{F}(U)$. Considérons l'ensemble E des couples (U',s') où $U \subseteq U' \subseteq X$ et $s \in \mathcal{F}(U')$ est un prolongement de s. On peut équiper E de la relation d'ordre suivante : $(U_1,s_1) \leq (U_2,s_2)$ si et seulement si $U_1 \subseteq U_2$ et s_2 prolonge s_1. La condition (F2) des faisceaux nous garantit que toute chaîne de E admet un majorant. E est donc un ensemble inductif.

Soit (U',s') un élément maximal de E et supposons que $U' \neq X$ (sinon on a terminé). Il existe alors $V \in \mathfrak{U}$ qui n'est pas contenu dans U'. Comme $\mathcal{F}|_V$ est flasque, il existe $s'' \in \mathcal{F}(V)$ qui prolonge la restriction de s' à $U' \cap V$. Par (F2), on a donc un prolonge de s' à $U' \cup V$, ce qui contredit la maximalité de (U',s'). $\square$

Une propriété importante (possiblement la plus importante) des faisceaux flasques est la suivante :

Proposition 2.5. *Soit $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ une suite courte exacte de faisceaux de groupes abéliens. Si $\mathcal{F}'$ est flasque, alors pour tout ouvert $U \subseteq X$, on a la suite courte exacte :*

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U) \to 0$$

Démonstration. On a montré dans l'annexe A.3 que la suite $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)$ était exacte. Il ne nous reste donc qu'à montrer qu'une section $s'' \in \mathcal{F}''(U)$ provient d'une section de $\mathcal{F}$. Or, soit E l'ensemble des couples (V,s) où $V \subseteq U$ et $s \in \mathcal{F}(V)$ est envoyé vers la restriction à V de s''. On peut ordonner E de la même façon qu'à la proposition précédente et obtenir un ensemble inductif.

Soit (V,s) un élément maximal de E et supposons que $V \neq U$ (sinon on a terminé). Soit $x \in U \setminus V$. Comme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ est exacte, il doit exister un voisinage W de x (qu'on peut assumer $\subseteq U$) et une section $t \in \mathcal{F}(W)$ qui est envoyée vers la restriction à W de s''. Dans $V \cap W$, s et t ne diffère que par l'image d'une section de $\mathcal{F}'$, laquelle, puisque $\mathcal{F}'$ est flasque, se prolonge à W. Quitte à modifier t, on peut donc supposer que s et t coïncident sur $V \cap W$. Cela nous donne un prolongement de s à $V \cup W$, ce qui contredit la maximalité de (V,s).

Il faut donc avoir que $V = U$. Il existera alors $s \in \mathcal{F}(U)$ qui est envoyée vers s''. Cela nous permet de conclure qu'on a la surjectivité du dernier homomorphisme, et donc l'exactitude de la suite. $\square$

Corollaire 2.6. *Si $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ sont flasques, alors $\mathcal{F}''$ l'est aussi.*

Démonstration. Une section $s'' \in \mathcal{F}''(U)$ est l'image d'une section $s \in \mathcal{F}(U)$, laquelle se prolonge à $\mathcal{F}(X)$. Son image dans $\mathcal{F}''(X)$ sera donc un prolongement de s''. $\square$

La condition étant plutôt forte, il n'existe pas beaucoup d'exemples concrets de faisceaux flasques qui soient intéressants. Un exemple important est le suivant :

Proposition 2.7. *Soit $\mathcal{O}_X$ un faisceau d'anneaux sur un espace X. Alors, tout $\mathcal{O}_X$-module injectif est flasque.*

Démonstration. Soit un ouvert $U \subseteq X$ et définissons $\mathcal{O}_U$ ainsi : $\mathcal{O}_U(V) = \mathcal{O}_X(V)$ si $V \subseteq U$ et $\mathcal{O}_U(V) = 0$ sinon. On prend les restrictions naturelles. Cela nous donnera un sous-faisceau de $\mathcal{O}_X$. On peut toutefois aussi le voir comme un $\mathcal{O}_X$-module : lorsque $V \subseteq U$, on prend l'action de $\mathcal{O}_X(V)$ sur lui-même donné par le produit et lorsque $V \nsubseteq U$, $\mathcal{O}_X(V)$ agit trivialement sur 0.

Prenons maintenant un $\mathcal{O}_X$-module injectif $\mathcal{J}$. Pour toute section $s \in \mathcal{J}(U)$, on peut construire le morphisme $\varphi_s : \mathcal{O}_U \to \mathcal{J}$ définie par : $\varphi_s(V)(r) \doteq r \cdot s|_V$ si $V \subseteq U$ et φ_s est l'inclusion de 0 dans $\mathcal{J}(V)$ sinon. Il est clair que chaque $\varphi_s(V)$ est un morphisme de $\mathcal{O}_X(V)$-module. Pour ce qui est de commuter avec les restrictions, c'est évident lorsqu'un des ouverts n'est pas contenu dans U. Lorsque $W \subseteq V \subseteq U$, il suffit de voir que $(r \cdot s|_V)|_W = r|_W \cdot s|_W$.

Comme $\mathcal{J}$ est injectif, on peut prolonger ce morphisme à un morphisme $\psi : \mathcal{O}_X \to \mathcal{J}$. Posons $t \doteq \psi(X)(1) \in \mathcal{J}(X)$ où 1 est le neutre multiplicatif de $\mathcal{O}_X(X)$. Alors, $t|_U = \psi(X)(1)|_U = \psi(U)(1|_U) = \varphi_s(U)(1|_U) = 1|_U \cdot s$. Or, comme les restrictions de $\mathcal{O}_X$ en tant qu $\mathcal{O}_X$-module sont les mêmes que ses restrictions en tant que faisceau d'anneaux, il faut que $1|_U$ soit le neutre multiplicatif de $\mathcal{O}_X(U)$. Donc, $t|_U = s$ et $\mathcal{J}$ est bien flasque. $\square$

Corollaire 2.8. *Soit $\mathcal{O}_X$ un faisceau d'anneaux sur un espace X. Alors, tout $\mathcal{O}_X$-module est sous-faisceau d'un $\mathcal{O}_X$-module flasque.*

Démonstration. Dans la section 2.2, on a démontré que tout $\mathcal{O}_X$-module est sous-faisceau d'un $\mathcal{O}_X$-module injectif. Ce résultat découle donc directement de la proposition précédente. $\square$

Comme mentionné dans la section 2.2, ce résultat s'applique aussi aux faisceaux de groupes abéliens. Toutefois, une certaine construction de tels faisceaux flasques nous intéressera particulièrement.

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens et $\tilde{\mathcal{F}}$ son espace étalé. Dénotons par $C^0(\mathcal{F})$ le faisceau des sections (pas forcément continues) à valeur dans $\tilde{\mathcal{F}}$. Alors, pour chaque ouvert

$U \subseteq X$, $C^0(\mathcal{F})(U)$ contiendra $\tilde{\mathcal{F}}(U)$. C'est en fait un faisceau flasque du type décrit dans l'exemple au début de la section.

De plus, la structure de groupe abélien des $\mathcal{F}_x$ nous permet de faire de $C^0(\mathcal{F})$ un faisceau de groupes abéliens : pour tout ouvert $U \subseteq X$, pour tout $s,t \in C^0(\mathcal{F})(U)$ et pour tout $x \in U$, on définit $(s+t)(x) \doteq s(x)+t(x)$. Cette définition correspond exactement à celle du faisceau $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$. Ce-dernier sera donc bien un sous-faisceau de $C^0(\mathcal{F})$.

2.4. Cohomologie de faisceaux

Dans cette section, notre objectif est de définir les groupes de cohomologie pour les faisceaux. Ce faisant, nous n'aurons pas besoin de structure algébrique plus complexe que celle des groupes. Nous considérerons donc les faisceaux de groupes abéliens sur un espace X.

De la même façon que dans la section 2.2, on peut construire une résolution flasque pour tout faisceau de groupes abéliens. On prend d'abord l'inclusion $\iota : \mathcal{F} \to C^0(\mathcal{F})$ et on définit ainsi le faisceau quotient $C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F}$. Celui-ci est inclut dans un faisceau $C^1(\mathcal{F}) \doteq C^0(C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F})$. On définit $\delta^0 : C^0(\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{F})$ comme la composition de la projection $C^0(\mathcal{F}) \to C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F}$ et de l'inclusion $C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F} \to C^1(\mathcal{F})$. Le deuxième morphisme étant injectif, le noyau de δ^0 sera simplement le noyau de la projection, c'est-à-dire $\mathcal{F}$.

On définit ainsi récursivement le faisceau $C^{n+1}(\mathcal{F}) \doteq C^0(C^n(\mathcal{F})/\operatorname{Im}(\delta^{n-1}))$ et le morphisme $\delta^n : C^n(\mathcal{F}) \to C^{n+1}(\mathcal{F})$ comme la composition de la projection $C^n(\mathcal{F}) \to C^n(\mathcal{F})/\operatorname{Im}(\delta^{n-1})$ et de l'inclusion $C^n(\mathcal{F})/\operatorname{Im}(\delta^{n-1}) \to C^{n+1}(\mathcal{F})$. Avec cette définition, le noyau de δ^n sera bien $\operatorname{Im}(\delta^{n-1})$.

Formellement, une *résolution flasque* du faisceau $\mathcal{F}$ est une suite exacte de faisceau

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{J}^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

où chaque faisceau $\mathcal{J}^n$ est flasque. Pour faire court, on notera $\{\mathcal{J}^n,d^n\}$ pour parler de la résolution. On appellera le cas particulier où $\mathcal{J}^n = C^n(\mathcal{F})$ et où $d^n = \delta^n$ la *résolution flasque canonique* de $\mathcal{F}$.

Commençons par énoncer quelques propriétés sur ces résolutions.

Proposition 2.9. *Soit $\{\mathcal{J}^n,d^n\}$ une résolution flasque d'un faisceau $\mathcal{F}$ lui-même flasque. Alors, pour tout ouvert $U \subseteq X$, la suite*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{J}^0(U) \longrightarrow \mathcal{J}^1(U) \longrightarrow \mathcal{J}^2(U) \longrightarrow \dots$$

est exacte.

Démonstration. À partir de la résolution, on obtient la suite courte exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d^0} \operatorname{Im}(d^0) \longrightarrow 0.$$

Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{J}^0$ sont flasques, $\mathrm{Im}(d^0)$ l'est aussi (par la proposition 2.6). De plus, par la proposition 2.5, on a la suite courte exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\iota(U)} \mathcal{J}^0(U) \xrightarrow{d^0(U)} \mathrm{Im}(d^0)(U) \longrightarrow 0.$$

En particulier, le début de notre suite,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\iota(U)} \mathcal{J}^0(U) \xrightarrow{d^0(U)} \mathcal{J}^1(U),$$

est exacte.

Ensuite, en utilisant nos résultats de l'annexe A.3 et en définissant le faisceau $\mathcal{G}$ par $\mathcal{J}^1/\operatorname{Im}(d^0) = \mathcal{J}^1/\operatorname{Ker}(d^1)$, on obtient la projection $\pi : \mathcal{J}^1 \to \mathcal{G}$ et un morphisme injectif $\hat{d}^1 : \mathcal{G} \to \mathcal{J}^2$ tels que $d^1 = \hat{d}^1 \circ \pi$ et nous donnant les deux suites courtes exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d^0) \longrightarrow \mathcal{J}^1 \xrightarrow{\pi} \mathcal{G} \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\hat{d}^1} \mathcal{J}^2 \xrightarrow{d^2} \mathrm{Im}(d^2) \longrightarrow 0.$$

Comme $\mathrm{Im}(d^0)$, $\mathcal{J}^1$ et $\mathcal{J}^2$ sont flasques, $\mathcal{G}$ et $\mathrm{Im}(d^2)$ le seront aussi. On obtient ainsi les deux suites courtes exactes :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d^0)(U) \longrightarrow \mathcal{J}^1(U) \xrightarrow{\pi(U)} \mathcal{G}(U) \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\hat{d}^1(U)} \mathcal{J}^2(U) \xrightarrow{d^2(U)} \mathrm{Im}(d^2)(U) \longrightarrow 0.$$

Ceci nous permet de compléter notre suite exacte jusqu'à $d^2(U)$. De là, il suffit de répéter l'argument précédent pour obtenir l'exactitude complète de la suite. $\square$

Maintenant, revenons à notre résolution canonique. Soit $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme entre deux faisceaux. Celui-ci induit un morphisme $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ pour tout $x \in X$. Cela nous donne $\varphi^0 : C^0(\mathcal{F}) \to C^0(\mathcal{G})$ défini par $\varphi(U)(s)(x) \doteq \varphi_x(s(x))$ pour tout ouvert $U \subseteq X$, pour tout $x \in U$ et pour tout $s \in C^0(\mathcal{F})(U)$. Ce morphisme est simplement un prolongement du morphisme $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$.

De là, regardons les quotients $C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F}$ et $C^0(\mathcal{G})/\mathcal{G}$. On sait que φ^0 envoie $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ (car c'est un prolongement de $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$). On a donc que $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{Ker}(\pi_{\mathcal{G}} \circ \varphi^0)$ (où $\pi_{\mathcal{G}}$ est la projection de $C^0(\mathcal{G})$ sur son quotient par $\mathcal{G}$). Il existe donc un morphisme $\bar{\varphi}^0 : C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F} \to C^0(\mathcal{G})/\mathcal{G}$ tel que $\bar{\varphi}^0 \circ \pi_{\mathcal{F}} = \pi_{\mathcal{G}} \circ \varphi^0$ (où $\pi_{\mathcal{F}}$ est l'analogue de $\pi_{\mathcal{G}}$ pour $\mathcal{F}$).

On peut ainsi répéter cette construction à partir de $\bar{\varphi}^0$ et on obtiendra une suite de morphismes $\varphi^n : C^n(\mathcal{F}) \to C^n(\mathcal{G})$ qui commute avec les morphismes des deux résolutions.

Remarquons que cette définition est naturelle. En effet, prenons un autre morphisme $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. On sait déjà que $(\psi \circ \varphi)_x = \psi_x \circ \varphi_x$, ce qui implique que $(\psi \circ \varphi)^0 = \psi^0 \circ \varphi^0$. Donc, avec les quotients, le morphisme $\bar{\psi}^0 \circ \bar{\varphi}^0$ est tel que

$$\bar{\psi}^0 \circ \bar{\varphi}^0 \circ \pi_{\mathcal{F}} = \bar{\psi}^0 \circ \pi_{\mathcal{G}} \circ \varphi^0 = \pi_{\mathcal{H}} \circ \psi^0 \circ \varphi^0 = \overline{(\psi^0 \circ \varphi^0)} \circ \pi_{\mathcal{F}}.$$

Cela signifie donc que $\bar{\psi}^0 \circ \bar{\varphi}^0$ et $\overline{(\psi^0 \circ \varphi^0)}$ coïncident sur le préfaisceau image de $\pi_{\mathcal{F}}$ (le préfaisceau quotient). Ils induisent alors le même morphisme de fibre, et donc le même morphisme sur le faisceau engendré. On a donc bien que $\bar{\psi}^0 \circ \bar{\varphi}^0 = \overline{(\psi^0 \circ \varphi^0)}$. Par récurrence, on réapplique ce résultat et on obtient que $(\psi \circ \varphi)^n = \psi^n \circ \varphi^n$ pour tout n.

Proposition 2.10. *Soit la suite exacte de faisceau :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

Alors, pour tout $n \geq 0$ et pour tout ouvert $U \subseteq X$, la suite de groupes

$$0 \longrightarrow C^n(\mathcal{F})(U) \xrightarrow{\varphi^n(U)} C^n(\mathcal{G})(U) \xrightarrow{\psi^n(U)} C^n(\mathcal{H})(U) \longrightarrow 0$$

est exacte. En particulier, la suite des faisceaux associés sera aussi exacte.

Démonstration. Commençons par $n = 0$. Notre suite induit une suite exacte sur les fibres pour tout $x \in X$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0.$$

Vérifions alors l'exactitude.

i) Si $s \in C^0(\mathcal{G})(U)$, $\psi^0(U)(s)$ sera nul si et seulement si $\psi_x(s(x)) = 0$ pour tout $x \in U$. Mais $\psi_x(s(x))$ est nul si et seulement s'il existe $t(x) \in \mathcal{F}_x$ tel que $\varphi_x(t(x)) = s(x)$ (par exactitude). Comme toute section (continue ou non) est élément de C^0, la section $t \in C^0(\mathcal{F})(U)$ ainsi définie (et donc telle que $\varphi^0(U)(t) = s$) existera si et seulement si $\psi^0(U)(s) = 0$. On a donc que $\mathrm{Ker}(\psi^0(U)) = \mathrm{Im}(\varphi^0(U))$.

ii) De la même façon, si $s \in C^0(\mathcal{F})(U)$ est telle que $\varphi^0(U)(s) = 0$, alors $\varphi_x(s(x)) = 0$ pour tout $x \in U$. Comme chaque φ_x est injectif, cela signifie que $s_x = 0$ pour tout $x \in U$ et donc que $s = 0$. Le morphisme $\varphi^0(U)$ est donc injectif.

iii) De façon similaire, prenons $s \in C^0(\mathcal{H})(U)$. Pour tout $x \in U$, par surjectivité de ψ_x, il existe $t(x) \in \mathcal{G}_x$ tel que $\psi_x(t(x)) = s(x)$. La section $t \in C^0(\mathcal{G})$ ainsi définie sera telle que $\psi^0(U)(t) = s$. Cela nous donne la surjectivité de ψ^0.

La suite

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{F})(U) \xrightarrow{\varphi^0(U)} C^0(\mathcal{G})(U) \xrightarrow{\psi^0(U)} C^0(\mathcal{H})(U) \longrightarrow 0$$

sera donc exacte. En particulier, la suite de faisceaux sera courte exacte.

Jusque là, on a construit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{F}}"] & \mathcal{G} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{G}}"] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{H}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{F}) \arrow[r, "\varphi^0"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{F}}"] & C^0(\mathcal{G}) \arrow[r, "\psi^0"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{G}}"] & C^0(\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{H}}"] & 0 \\
 & C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F} \arrow[r, "\bar{\varphi}^0"] \arrow[d] & C^0(\mathcal{G})/\mathcal{G} \arrow[r, "\bar{\psi}^0"] \arrow[d] & C^0(\mathcal{H})/\mathcal{H} \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où les trois colonnes et les deux premières lignes sont exactes. On aimerait compléter le diagramme en montrant que la troisième et dernière ligne est courte exacte. Pour ce faire, on prendra le diagramme induit sur les fibres (qui est aussi exact). De là, il suffit de chasser le diagramme («diagram chasing» en anglais). Prenons donc $x \in X$.

i) Prenons $s_x \in (C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F})_x$ telle que $\bar{\varphi}^0_x(s_x) = 0$. Alors, par surjectivité de $(\pi_{\mathcal{F}})_x$, il existe $t_x \in C^0(\mathcal{F})_x$ tel que $(\pi_{\mathcal{F}})_x(t_x) = s_x$. On a donc que $(\pi_{\mathcal{G}})_x \circ \varphi^0_x(t_x) = \bar{\varphi}^0_x \circ (\pi_{\mathcal{F}})_x(t_x) = 0$. La germe $\varphi^0_x(t_x)$ est donc dans le noyau de $(\pi_{\mathcal{G}})_x$ qui est égal (par exactitude) à l'image de $(\iota_{\mathcal{G}})_x$. Il existe ainsi une germe $t'_x \in \mathcal{G}_x$ telle que $\varphi^0_x(t_x) = (\iota_{\mathcal{G}})_x(t'_x)$.

   On a alors que $(\iota_{\mathcal{H}})_x \circ \psi_x(t'_x) = \psi^0_x \circ (\iota_{\mathcal{G}})_x(t'_x) = \psi^0_x \circ \varphi^0_x(t_x) = 0$. Mais comme $(\iota_{\mathcal{H}})_x$ est injectif, cela signifie que $\psi_x(t'_x) = 0$ et donc qu'il existe $t''_x \in \mathcal{F}_x$ telle que $\varphi_x(t''_x) = t_x$. En particulier, $\varphi^0_x \circ (\iota_{\mathcal{F}})_x(t''_x) = \varphi^0_x(t_x)$, mais comme φ^0_x est injectif, cela implique que $(\iota_{\mathcal{F}})_x(t''_x) = t_x$ et donc que $s_x = (\pi_{\mathcal{F}})_x(t_x) = 0$. Le morphisme $\bar{\varphi}^0_x$ est donc bien injectif.

ii) Remarquons que $\bar{\psi}^0_x \circ \bar{\varphi}^0_x \circ (\pi_{\mathcal{F}})_x = (\pi_{\mathcal{H}})_x \circ \psi^0_x \circ \varphi^0_x = 0$ (par exactitude). En d'autres termes, $\mathrm{Im}((\pi_{\mathcal{F}})_x) \subseteq \mathrm{Ker}(\bar{\psi}^0_x \circ \bar{\varphi}^0_x)$. Or, $(\pi_{\mathcal{F}})_x$ est surjectif et son image est donc $(C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F})_x$ au complet. La composition $\bar{\psi}^0_x \circ \bar{\varphi}^0_x$ est donc le morphisme 0.

iii) Prenons maintenant une germe $s_x \in (C^0(\mathcal{G})/\mathcal{G})_x$ telle que $\bar{\psi}^0_x(s_x) = 0$. Comme $(\pi_{\mathcal{G}})_x$ est surjectif, il existe $t_x \in C^0(\mathcal{G})_x$ telle que $(\pi_{\mathcal{G}})_x(t_x) = s_x$. Cette germe est telle que $(\pi_{\mathcal{H}})_x \circ \psi^0_x(t_x) = \bar{\psi}^0_x \circ (\pi_{\mathcal{G}})_x(t_x) = \bar{\psi}^0_x(s_x) = 0$. Par exactitude de la troisième colonne, cela signifie qu'il existe $t'_x \in \mathcal{H}_x$ telle que $(\iota_{\mathcal{H}})_x(t'_x) = \psi^0_x(t_x)$. La surjectivité de ψ_x nous donne l'existence d'une germe $t''_x \in \mathcal{G}_x$ telle que $\psi_x(t''_x) = t'_x$.

   Bien que l'on n'ait pas forcément que $(\iota_{\mathcal{G}})_x(t''_x) = t_x$, on sait du moins que ψ^0_x envoie ces deux germes vers le même terme (c'est-à-dire $(\iota_{\mathcal{H}})_x(t'_x)$). Quitte à changer t_x (en le remplaçant par $t_x - (\iota_{\mathcal{G}})_x(t''_x)$), on peut assumer qu'il est dans le noyau de ψ^0_x et donc dans l'image de φ^0_x. Il existe donc $t'''_x \in C^0(\mathcal{F})_x$ telle que $\varphi^0_x(t'''_x) = t_x$. En particulier,

$(\pi_{\mathcal{F}})_x(t'''_x)$ est envoyée par $\bar{\varphi}^0_x$ vers s_x, qui est donc dans l'image de ce morphisme. Ceci, combiné avec le point précédent, nous donne que $\mathrm{Im}(\bar{\varphi}^0_x) = \mathrm{Ker}(\bar{\psi}^0_x)$.

iv) Soit $s_x \in (C^0(\mathcal{H})/\mathcal{H})_x$. Par surjectivité de $(\pi_{\mathcal{H}})_x$, il existe $t_x \in C^0(\mathcal{H})_x$ telle que $(\pi_{\mathcal{H}})_x(t_x) = s_x$. De même, la surjectivité de ψ^0_x nous donne un $t'_x \in C^0(\mathcal{G})_x$ telle que $\psi^0_x(t'_x) = t_x$. La germe $(\pi_{\mathcal{G}})_x(t'_x)$ est donc envoyée par $\bar{\psi}^0_x$ vers s_x. Le morphisme $\bar{\psi}^0_x$ est donc surjectif.

Ces quatre points nous donnent bien que la troisième ligne est courte exacte pour chacun des diagrammes de fibre. Elle est donc aussi exacte dans notre diagramme de faisceau.

Rappelons-nous qu'on a définit $C^1(\mathcal{F})$ comme $C^0(C^0(\mathcal{F})/\mathcal{F})$. On peut donc prendre notre suite courte exacte de quotient et répéter l'argument précédent pour obtenir l'exactitude en $n = 1$. En réappliquant cet argument $n-1$ fois, on obtient l'exactitude pour chaque n. En d'autres mots, on procède par récurrence pour conclure. □

Corollaire 2.11. *Soit la suite exacte de faisceaux de groupes abéliens suivante :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

Alors les résolutions canoniques de chaque $\mathcal{F}^n$ nous donnent le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\iota_1"] & \mathcal{F}_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\iota_2"] & \mathcal{F}_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\iota_3"] & \mathcal{F}_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "\iota_4"] & \dots \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{F}_1) \arrow[r, "\varphi_1^0"] \arrow[d, "\delta_1^0"] & C^0(\mathcal{F}_2) \arrow[r, "\varphi_2^0"] \arrow[d, "\delta_2^0"] & C^0(\mathcal{F}_3) \arrow[r, "\varphi_3^0"] \arrow[d, "\delta_3^0"] & C^0(\mathcal{F}_4) \arrow[r, "\varphi_4^0"] \arrow[d, "\delta_4^0"] & \dots \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{F}_1) \arrow[r, "\varphi_1^1"] \arrow[d, "\delta_1^1"] & C^1(\mathcal{F}_2) \arrow[r, "\varphi_2^1"] \arrow[d, "\delta_2^1"] & C^1(\mathcal{F}_3) \arrow[r, "\varphi_3^1"] \arrow[d, "\delta_3^1"] & C^1(\mathcal{F}_4) \arrow[r, "\varphi_4^1"] \arrow[d, "\delta_4^1"] & \dots \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathcal{F}_1) \arrow[r, "\varphi_1^2"] \arrow[d, "\delta_1^2"] & C^2(\mathcal{F}_2) \arrow[r, "\varphi_2^2"] \arrow[d, "\delta_2^2"] & C^2(\mathcal{F}_3) \arrow[r, "\varphi_3^2"] \arrow[d, "\delta_3^2"] & C^2(\mathcal{F}_4) \arrow[r, "\varphi_4^2"] \arrow[d, "\delta_4^2"] & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

où chaque ligne et chaque colonne sont exactes.

Démonstration. On sait déjà que chaque colonne (ainsi que la première ligne) est exacte.

De la même façon que précédemment, on peut séparer la première ligne en suite courte exacte. On a d'abord la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\hat{\varphi}_2} \mathrm{Im}(\varphi_2) \longrightarrow 0.$$

Puis, pour chaque $n \geq 1$, posons $\mathcal{G}_{2n+1} \doteq \mathcal{F}_{2n+1}/\operatorname{Im}(\varphi_{2n})$. On aura les deux suites courtes exactes :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}(\varphi_{2n}) \xrightarrow{i_{2n}} \mathcal{F}_{2n+1} \xrightarrow{\pi_{2n+1}} \mathcal{G}_{2n+1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_{2n+1} \xrightarrow{\hat{\varphi}_{2n+1}} \mathcal{F}_{2n+2} \xrightarrow{\hat{\varphi}_{2n+2}} \operatorname{Im}(\varphi_{2n+2}) \longrightarrow 0$$

où i_{2n} est l'inclusion, π_{2n+1} est la projection sur le quotient et les deux autres morphismes sont tels que $\varphi_{2n+1} = \hat{\varphi}_{2n+1} \circ \pi_{2n+1}$ et $\varphi_{2n} = i_{2n} \circ \hat{\varphi}_{2n}$.

On applique alors la proposition précédente à ces suites courtes exactes. Pour tout m et pour tout ouvert $U \subseteq X$, on aura que $i^m_{2n}(U)$ et $\hat{\varphi}^m_{2n+1}(U)$ sont injectifs, que $\pi^m_{2n+1}(U)$ et $\hat{\varphi}^m_{2n}(U)$ sont surjectifs, que $\operatorname{Im}(i^m_{2n}(U)) = \operatorname{Ker}(\pi^m_{2n+1}(U))$ et que $\operatorname{Im}(\hat{\varphi}^m_{2n+1}(U)) = \operatorname{Ker}(\hat{\varphi}^m_{2n+2}(U))$ (ou dans le cas $n = 0$, on aura que $\operatorname{Im}(\varphi^m_1(U)) = \operatorname{Ker}(\hat{\varphi}^m_2(U))$.

Or, grâce aux propriétés de surjectivité et d'injectivité, on a les égalités suivantes :

$$\operatorname{Ker}(\varphi^m_{2n}(U)) = \operatorname{Ker}(i^m_{2n}(U) \circ \hat{\varphi}^m_{2n}(U)) = \operatorname{Ker}(\hat{\varphi}^m_{2n}(U));$$

$$\operatorname{Ker}(\varphi^m_{2n+1}(U)) = \operatorname{Ker}(\hat{\varphi}^m_{2n+1}(U) \circ \pi^m_{2n+1}(U)) = \operatorname{Ker}(\pi^m_{2n+1}(U));$$

$$\operatorname{Im}(\varphi^m_{2n}(U)) = \operatorname{Im}(i^m_{2n}(U) \circ \hat{\varphi}^m_{2n}(U)) = \operatorname{Im}(i^m_{2n}(U));$$

$$\operatorname{Im}(\varphi^m_{2n+1}(U)) = \operatorname{Im}(\hat{\varphi}^m_{2n+1}(U) \circ \pi^m_{2n+1}(U)) = \operatorname{Im}(\hat{\varphi}^m_{2n+1}(U)).$$

Combinées avec les égalités précédentes, on obtient donc l'exactitude des suites de groupes au-dessus de chaque ouvert $U \subseteq X$ pour chacune des lignes de notre diagramme (excepté la première). En particulier, chaque ligne de notre diagramme est exacte. $\square$

Nous sommes maintenant prêts à définir nos groupes de cohomologie.

Définition. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur un espace X et soit $\{\mathcal{J}^n, d^n\}$ une résolution flasque de $\mathcal{F}$. Celle-ci induit la suite :

$$\mathcal{J}^0(X) \xrightarrow{d^0(X)} \mathcal{J}^1(X) \xrightarrow{d^1(X)} \mathcal{J}^2(X) \xrightarrow{d^2(X)} \mathcal{J}^3(X) \xrightarrow{d^3(X)} \dots$$

qui n'est pas forcément exacte. On a toutefois que $d^n(X) \circ d^{n-1}(X) = 0$ pour tout n. On définira alors le *n-ième groupe de cohomologie* de cette résolution par $H^n(X,\mathcal{J}) \doteq \operatorname{Ker}(d^n(X))/\operatorname{Im}(d^{n-1}(X))$ (où $d^{-1}(X)$ sera le morphisme $0 \to \mathcal{J}^0(X)$).

On aimerait maintenant avoir une définition qui ne dépend pas de la résolution. Toutefois, avant de s'atteler à cette tâche, nous allons démontrer deux propriétés qui sont vraies, peu importe le choix de la résolution.

Lemme 2.12. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur l'espace X et soit $\{\mathcal{J}^n, d^n\}$ une résolution de $\mathcal{F}$. Si on voit $\mathcal{F}$ comme un sous-faisceau de $\mathcal{J}^0$, alors $H^0(X,\mathcal{J}) = \mathcal{F}(X)$.*

Démonstration. La suite exacte de faisceau

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{J}^1$$

nous donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\iota(X)} \mathcal{J}^0(X) \xrightarrow{d^0(X)} \mathcal{J}^1(X).$$

En particulier, $H^0(X,\mathcal{J}) = \mathrm{Ker}(d^0(X)) = \mathrm{Im}(\iota(X)) = \mathcal{F}(X)$. $\square$

Lemme 2.13. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau flasque sur l'espace X. Alors, pour tout $n \geq 1$, $H^n(X,\mathcal{J}) = 0$.*

Démonstration. Prenons une résolution $\{\mathcal{J}^n,d^n\}$ quelconque de $\mathcal{F}$. On applique la proposition 2.9 à cette résolution pour obtenir la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\iota} \mathcal{J}^0(X) \xrightarrow{d^0} \mathcal{J}^1(X) \xrightarrow{d^1} \mathcal{J}^2(X) \xrightarrow{d^2} \dots$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a que $\mathrm{Ker}(d^n(X)) = \mathrm{Im}(d^{n-1}(X))$. En d'autres mots, $H^n(X,\mathcal{J}) = 0$. $\square$

On peut maintenant s'occuper du gros morceau.

Théorème 2.14. *Soient X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens. Alors, peu importe la résolution $\{\mathcal{J}^n,d^n\}$ de $\mathcal{F}$, les groupes de cohomologie $H^n(X,\mathcal{J})$ (pour n fixé) sont tous isomorphes.*

Démonstration. Soit $\{\mathcal{J}^n,d^n\}$ une résolution flasque de $\mathcal{F}$. Il nous suffit de construire un isomorphisme entre les groupes de cohomologie associés à cette résolution et ceux associé à la résolution canonique. En appliquant le corollaire 2.11 à cette résolution, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{J}^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "i^0"] & \mathcal{J}^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "i^1"] & \mathcal{J}^2 \arrow[r, "d^2"] \arrow[d, "i^2"] & \dots \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{F}) \arrow[r, "\iota^0"] \arrow[d, "\delta^0"] & C^0(\mathcal{J}_0) \arrow[r, "d^{0,0}"] \arrow[d, "\delta^{0,0}"] & C^0(\mathcal{J}_1) \arrow[r, "d^{0,1}"] \arrow[d, "\delta^{0,1}"] & C^0(\mathcal{J}_2) \arrow[r, "d^{0,2}"] \arrow[d, "\delta^{0,2}"] & \dots \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{F}) \arrow[r, "\iota^1"] \arrow[d, "\delta^1"] & C^1(\mathcal{J}_0) \arrow[r, "d^{1,0}"] \arrow[d, "\delta^{1,0}"] & C^1(\mathcal{J}_1) \arrow[r, "d^{1,1}"] \arrow[d, "\delta^{1,1}"] & C^1(\mathcal{J}_2) \arrow[r, "d^{1,2}"] \arrow[d, "\delta^{1,2}"] & \dots \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathcal{F}) \arrow[r, "\iota^2"] \arrow[d, "\delta^2"] & C^2(\mathcal{J}_0) \arrow[r, "d^{2,0}"] \arrow[d, "\delta^{2,0}"] & C^2(\mathcal{J}_1) \arrow[r, "d^{2,1}"] \arrow[d, "\delta^{2,1}"] & C^2(\mathcal{J}_2) \arrow[r, "d^{2,2}"] \arrow[d, "\delta^{2,2}"] & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

où chaque ligne et chaque colonne sont exactes et où tous les faisceaux sont flasques sauf $\mathcal{F}$. Ce diagramme en induit un similaire sur les groupes de sections globales. Afin de simplifier la notation un peu, on posera pour tout $i,j \geq 0$, $A^j \doteq \mathcal{J}^j(X)$, $B^i \doteq C^i(\mathcal{F})(X)$ et $C^{i,j} \doteq$

$C^i(\mathcal{J}^j)(X)$. Par abus de notation, on oubliera aussi le (X) après les morphismes. On obtient alors le diagramme de groupes abéliens suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & A^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "i^0"] & A^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d, "i^1"] & A^2 \arrow[r, "d^2"] \arrow[d, "i^2"] & \dots \\
0 \arrow[r] & B^0 \arrow[r, "\iota^0"] \arrow[d, "\delta^0"] & C^{0,0} \arrow[r, "d^{0,0}"] \arrow[d, "\delta^{0,0}"] & C^{0,1} \arrow[r, "d^{0,1}"] \arrow[d, "\delta^{0,1}"] & C^{0,2} \arrow[r, "d^{0,2}"] \arrow[d, "\delta^{0,2}"] & \dots \\
0 \arrow[r] & B^1 \arrow[r, "\iota^1"] \arrow[d, "\delta^1"] & C^{1,0} \arrow[r, "d^{1,0}"] \arrow[d, "\delta^{1,0}"] & C^{1,1} \arrow[r, "d^{1,1}"] \arrow[d, "\delta^{1,1}"] & C^{1,2} \arrow[r, "d^{1,2}"] \arrow[d, "\delta^{1,2}"] & \dots \\
0 \arrow[r] & B^2 \arrow[r, "\iota^2"] \arrow[d, "\delta^2"] & C^{2,0} \arrow[r, "d^{2,0}"] \arrow[d, "\delta^{2,0}"] & C^{2,1} \arrow[r, "d^{2,1}"] \arrow[d, "\delta^{2,1}"] & C^{2,2} \arrow[r, "d^{2,2}"] \arrow[d, "\delta^{2,2}"] & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

où, par la proposition 2.9, chaque ligne (sauf la première) et chaque colonne (sauf la première) sont exactes. On cherche alors à construire pour chaque $n \geq 0$ un isomorphisme $f^n : \operatorname{Ker} \delta^n / \operatorname{Im} \delta^{n-1} \to \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$ (où les images de degré -1 sont simplement le groupe trivial 0).

Commençons par le cas $n = 0$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & & A^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "i^0"] & A^1 \arrow[d, "i^1"] \\
0 \arrow[r] & B^0 \arrow[r, "\iota^0"] \arrow[d, "\delta^0"] & C^{0,0} \arrow[r, "d^{0,0}"] \arrow[d, "\delta^{0,0}"] & C^{0,1} \arrow[d, "\delta^{0,1}"] \\
0 \arrow[r] & B^1 \arrow[r, "\iota^1"] & C^{1,0} \arrow[r, "d^{1,0}"] & C^{1,1}
\end{tikzcd}$$

où chaque ligne et chaque colonne sont exactes. Comme ι^0 est injectif, il induit un isomorphisme entre $\operatorname{Ker}(\delta^0)$ et $\iota^0(\operatorname{Ker}(\delta^0))$. De même, i^0 induit un isomorphisme entre $\operatorname{Ker}(d^0)$ et $i^0(\operatorname{Ker}(d^0))$. Comparons maintenant ces deux sous-groupe de $C^{0,0}$.

Si $b \in \operatorname{Ker}(\delta^0)$, alors $\delta^{0,0} \circ \iota^0(b) = \iota^1 \circ \delta^0(b) = \iota^1(0) = 0$. Donc, $\iota^0(b)$ est dans $\operatorname{Ker}(\delta^{0,0}) = \operatorname{Im}(i^0)$ et il existe $a \in A^0$ tel que $\iota^0(b) = i^0(a)$. De plus, on a que $\iota^1 \circ d^0(a) = d^{0,0} \circ \iota^0(a) = d^{0,0} \circ \iota^0(b) = 0$. Comme i^1 est injectif, $d^0(a) = 0$, c'est-à-dire que $a \in \operatorname{Ker}(d^0)$. En particulier, $\iota^0(b) \in i^0(\operatorname{Ker}(d^0))$ et $\iota^0(\operatorname{Ker}(\delta^0)) \subseteq i^0(\operatorname{Ker}(d^0))$.

En appliquant le même argument au diagramme transposé, on obtient que $i^0(\mathrm{Ker}(d^0)) \subseteq \iota^0(\mathrm{Ker}(\delta^0))$. C'est deux ensembles sont donc égaux et on obtient un isomorphisme f^0 entre $\mathrm{Ker}(d^0)$ et $\mathrm{Ker}(\delta^0)$ tel que recherché.

Construisons maintenant notre isomorphisme f^n pour $n \geq 1$. Pour se faire, on aimerait construire pour chaque $\bar{b} \in \mathrm{Ker}(\delta^n)/\,\mathrm{Im}(\delta^{n-1})$ une chaîne de la forme $\{b,c^1,c^2,\ldots,c^n,a\}$ où b est un représentant de $\bar{b}$, où $c^m \in C^{n-m,m-1}$ pour chaque m et où $a \in \mathrm{Ker}(d^n)$. On demandera que $\iota^n(b) = \delta^{n-1,0}(c^1)$, que $d^{n-m,m-1}(c^m) = \delta^{n-m-1,m}(c^{m+1})$ et que $d^{0,n-1}(c^n) = i^n(a)$. On définira alors $f^n(\bar{b})$ par $\bar{a}$. Afin de simplifier l'argument, il nous arrivera d'écrire $C^{m,-1}$, $\delta^{m,-1}$, $d^{m,-1}$, $C^{-1,m}$, $\delta^{-1,m}$ et $d^{-1,m}$ pour parler (respectivement) de B^m, δ^m, ι^m, A^m, i^m et d^m.

Considérons la section suivante de notre diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & C^{n-2,0} \arrow[d, "\delta^{n-2,0}"] \\
B^{n-1} \arrow[r, "\iota^{n-1}"] \arrow[d, "\delta^{n-1}"] & C^{n-1,0} \arrow[d, "\delta^{n-1,0}"] \\
B^n \arrow[r, "\iota^n"] \arrow[d, "\delta^n"] & C^{n,0} \arrow[d, "\delta^{n,0}"] \\
B^{n+1} \arrow[r, "\iota^{n+1}"] & C^{n+1,0}
\end{tikzcd}$$

et fixons un $\bar{b} \in \mathrm{Ker}(\delta^n)/\,\mathrm{Im}(\delta^{n-1})$. Pour chaque représentant $b \in \mathrm{Ker}(\delta^n)$, on remarque comme précédemment que $\delta^{n,0} \circ \iota^n(b) = \iota^{n+1} \circ \delta^n(b) = \iota^{n+1}(0) = 0$. On a donc que $\iota^n(b)$ est dans $\mathrm{Ker}(\delta^{n,0}) = \mathrm{Im}(\delta^{n-1,0})$ et qu'il existe $c^1 \in C^{n-1,0}$ tel que $\delta^{n-1,0}(c^1) = \iota^n(b)$. Toutefois, le choix de b n'est pas unique : toutes les sections de la forme $b + \delta^{n-1}(b')$ (où $b' \in B^{n-1}$) auraient pu être choisies. Dans ce cas, $c^1 + \iota^{n-1}(b')$ remplacera c^1. De plus, même en fixant b, c^1 n'est pas unique : on peut lui ajouter un élément de $\mathrm{Im}(\delta^{n-2,0}) = \mathrm{Ker}(\delta^{n-1,0})$ sans changer que $\delta^{n-1,0}(c^1) = \iota^n(b)$. Ce sera toutefois l'ensemble des c^1 possibles avec ce b.

Construisons le reste de la chaîne par récurrence. Assumons qu'on a construit c^1 à c^m et qu'on a montré que tous les candidats possibles pour c^m (en ayant fixé $\bar{b}$) sont de la forme $c^m + \delta^{n-m-1,m-1}(c) + d^{n-m,m-2}(c')$ et regardons la section suivante de notre diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & C^{n-m-2,m} \arrow[d, "\delta^{n-m-2,m}"] \\
 & C^{n-m-1,m-1} \arrow[r, "d^{n-m-1,m-1}"'] \arrow[d, "\delta^{n-m-1,m-1}"] & C^{n-m-1,m} \arrow[d, "\delta^{n-m-1,m}"] \\
C^{n-m,m-2} \arrow[r, "d^{n-m,m-2}"'] \arrow[d, "\delta^{n-m,m-2}"] & C^{n-m,m-1} \arrow[r, "d^{n-m,m-1}"'] \arrow[d, "\delta^{n-m,m-1}"] & C^{n-m,m} \arrow[d, "\delta^{n-m,m}"] \\
C^{n-m+1,m-2} \arrow[r, "d^{n-m+1,m-2}"'] & C^{n-m+1,m-1} \arrow[r, "d^{n-m+1,m-1}"'] & C^{n-m+1,m}
\end{tikzcd}$$

Toujours de la même façon, on remarque que

$$\begin{aligned}\delta^{n-m,m} \circ d^{n-m,m-1}(c^m) &= d^{n-m+1,m-1} \circ \delta^{n-m,m-1}(c^m)\\ &= d^{n-m+1,m-1} \circ d^{n-m+1,m-2}(c^{m-1}) = 0\end{aligned}$$

où $c^{-1} \doteq b$.

Par exactitude, on a l'existence d'une section $c^{m+1} \in C^{n-m-1,m}$ telle que $\delta^{n-m-1,m}(c^{m+1}) = d^{n-m,m-1}(c^m)$. Toutefois, on sait que c^m n'est pas unique, mais le terme $d^{n-m,m-2}(c')$ ne changera pas $d^{n-m,m-1}(c^m)$ et donc n'influencera pas c^{m+1}. Quant au terme $\delta^{n-m-1,m-1}(c)$, il nous suffira d'ajouter $d^{n-m-1,m-1}(c)$ à c^{m+1}. Maintenant, si on fixe un c^m, l'ensemble des c^{m+1} qui fonctionne, c'est-à-dire qui sont envoyés vers $d^{n-m,m-1}(c^m)$, est $c^{m+1} + \mathrm{Ker}(\delta^{n-m-1,m}) = c^{m+1} + \mathrm{Im}(\delta^{n-m-2,m})$. Cela complète la démonstration de l'hypothèse de récurrence pour $m+1$.

Il ne reste maintenant qu'à s'occuper de a. Prenons la section suivante de notre diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "i^{n-1}"] & A^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "i^n"] & A^{n+1} \arrow[d, "i^{n+1}"] \\
C^{0,n-2} \arrow[r, "d^{0,n-2}"] \arrow[d, "\delta^{0,n-2}"] & C^{0,n-1} \arrow[r, "d^{0,n-1}"] \arrow[d, "\delta^{0,n-1}"] & C^{0,n} \arrow[r, "d^{0,n}"] \arrow[d, "\delta^{0,n}"] & C^{0,n+1} \\
C^{1,n-2} \arrow[r, "d^{1,n-2}"] & C^{1,n-1} \arrow[r, "d^{1,n-1}"] & C^{1,n}.
\end{tikzcd}$$

Une dernière fois, on remarque que $\delta^{0,n} \circ d^{0,n-1}(c^n) = 0$ et donc qu'il existe $a \in A^n$ tel que $i^n(a) = d^{0,n-1}(c^n)$. Ce a est tel que $i^{n+1} \circ d^n(a) = d^{0,n} \circ d^{0,n-1}(c^n) = 0$. Comme i^{n+1} est injectif, cela signifie que $a \in \mathrm{Ker}(d^n)$ tel que souhaité. Maintenant, on sait que d'ajouter un élément de $\mathrm{Im}(d^{0,n-2})$ ne changera pas a et que lui ajouter un élément de $\mathrm{Im}(i^{n-1})$ ne fera qu'ajouter à a un élément de $\mathrm{Im}(d^{n-1})$ (et donc ne changera pas $\bar{a}$). Remarquons en plus que l'injectivité de i^n nous garantit que, pour c^n fixé, le choix de a est unique.

On a donc montré non seulement l'existence d'une chaîne pour tout $\bar{b}$, mais que notre fonction $f^n(\bar{b}) \doteq \bar{a}$ ne dépend pas du choix de la chaîne. En effet, dès que $\bar{b}$ est fixé, peu importe nos choix de b, des c^m ou de a, $\bar{a}$ restera identique.

Donc, soient deux chaînes $\{b_1,c_1^1,c_1^2,\ldots,c_1^n,a_1\}$ et $\{b_1,c_1^1,c_1^2,\ldots,c_1^n,a_1\}$. Alors, $\{b_1+b_2,c_1^1+c_2^1,c_1^2+c_2^2,\ldots,c_1^n+c_2^n,a_1+a_2\}$ sera aussi une chaîne, ce qui signifie que $f^n(\bar{b}_1+\bar{b}_2) = f^n(\bar{b}_1)+f^n(\bar{b}_2)$. Notre fonction est donc bien un homomorphisme.

Finalement, en prenant le diagramme transposé, on peut construire une chaîne $\{a,c^n,c^{n-1},\ldots,c^1,b\}$ pour chaque $\bar{a}$ et un homomorphisme $g^n(\bar{a}) \doteq \bar{b}$. Étant donné qu'une chaîne de $\bar{a}$ est simplement une chaîne de $\bar{b}$ où l'ordre a été inversée, on a bien que f^n et g^n sont inverses l'un de l'autre.

On a ainsi construit des isomorphismes f^n entre les groupes $\operatorname{Ker}(\delta^n)/\operatorname{Im}(\delta^{n-1})$ et $\operatorname{Ker}(d^n)/\operatorname{Im}(d^{n-1})$ (c'est-à-dire les groupes de cohomologie de la résolution $\{\mathcal{J}^n,d^n\}$ et ceux de la résolution canonique). On a donc bien que tous ces groupes (peu importe la résolution) sont isomorphes. □

Malheureusement, contrairement à la méthode des résolutions injectives, ces isomorphismes ne sont pas forcément fonctoriels. Nous sommes donc forcés de faire le choix suivant :
Définition. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur l'espace X. On dénotera les groupes de cohomologie de la résolution canonique de $\mathcal{F}$ par $H^n(X,\mathcal{F})$. C'est ce groupe qu'on qualifiera de *n-ième groupe de cohomologie* de $\mathcal{F}$.

En homologie, on s'intéresse généralement à construire des suites longues exactes de groupes de cohomologie à partir d'une suite courte exacte de complexes de cochaînes. (Un complexe de cochaînes est une suite de groupes abéliens M^i et d'homomorphismes $\delta^i : M^i \to M^{i+1}$ tels que $\delta^{i+1} \circ \delta^i = 0$. On les note généralement par $(M^\bullet,\delta^\bullet)$. Par exemple, nos suites $(C^\bullet(\mathcal{F})(X),\delta^\bullet)$ forment des complexes de cochaînes. Les groupes de cohomologie d'un complexe de cochaînes sont définis comme on l'a fait : $H^i(M^\bullet) \doteq \operatorname{Ker}(\delta^i)/\operatorname{Im}(\delta^{i-1})$.) Les suites longues exactes étant très utiles pour calculer nos groupes, on introduira le théorème suivant d'algèbre homologique :

Proposition 2.15. *Soient $(F^\bullet,d_F^\bullet)$, $(G^\bullet,d_G^\bullet)$ et $(H^\bullet,d_H^\bullet)$ trois complexes de cochaînes et soient des homomorphismes $\varphi^i : F^i \to G^i$ et $\psi^i : G^i \to H^i$ pour tout $i \geq 0$ tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^0 \arrow[r, "\varphi^0"] \arrow[d, "d_F^0"] & G^0 \arrow[r, "\psi^0"] \arrow[d, "d_G^0"] & H^0 \arrow[r] \arrow[d, "d_H^0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^1 \arrow[r, "\varphi^1"] \arrow[d, "d_F^1"] & G^1 \arrow[r, "\psi^1"] \arrow[d, "d_G^1"] & H^1 \arrow[r] \arrow[d, "d_H^1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^2 \arrow[r, "\varphi^2"] \arrow[d, "d_F^2"] & G^2 \arrow[r, "\psi^2"] \arrow[d, "d_G^2"] & H^2 \arrow[r] \arrow[d, "d_H^2"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

est commutatif et tels que chacune de ses lignes est exacte. Alors, il existe une suite longue exacte des groupes de cohomologie :

$$\begin{gathered}
0 \longrightarrow H^0(F^\bullet) \longrightarrow H^0(G^\bullet) \longrightarrow H^0(H^\bullet) \longrightarrow H^1(F^\bullet) \longrightarrow \\
\longrightarrow H^1(G^\bullet) \longrightarrow H^1(H^\bullet) \longrightarrow H^2(F^\bullet) \longrightarrow \dots
\end{gathered}$$

où les homomorphismes de $H^i(F^\bullet)$ vers $H^i(G^\bullet)$ et ceux entre $H^i(G^\bullet)$ et $H^i(H^\bullet)$ sont directement induits par les homomorphismes φ^i et ψ^i (respectivement).

Démonstration. La commutativité du diagramme nous donne que φ^n envoie $\operatorname{Ker} d_F^n$ vers $\operatorname{Ker} d_G^n$ et qu'il envoie $\operatorname{Im} d_F^{n-1}$ vers $\operatorname{Im} d_G^{n-1}$. Il induit donc un morphisme

$$\bar{\varphi}^n : \operatorname{Ker} d_F^n / \operatorname{Im} d_F^{n-1} \to \operatorname{Ker} d_G^n / \operatorname{Im} d_G^{n-1}$$

(c'est-à-dire $\bar{\varphi}^n : H^n(F^\bullet) \to H^n(G^\bullet)$). De même, ψ^n induit un morphisme $\bar{\psi}^n : H^n(G^\bullet) \to H^n(H^\bullet)$. Ces morphismes sont tels que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} d_F^n \arrow[r, "\varphi^n"] \arrow[d, "\pi_F^n"] & \operatorname{Ker} d_G^n \arrow[r, "\psi^n"] \arrow[d, "\pi_G^n"] & \operatorname{Ker} d_H^n \arrow[d, "\pi_H^n"] \\
H^n(F^\bullet) \arrow[r, "\bar{\varphi}^n"] & H^n(G^\bullet) \arrow[r, "\bar{\psi}^n"] & H^n(H^\bullet)
\end{tikzcd}$$

commute. Dans le cas $n = 0$, $\bar{\varphi}^0 = \varphi^0$ et $\bar{\psi}^0 = \psi^0$.

Comme $\psi^n \circ \varphi^n = 0$, alors forcément $\bar{\psi}^n \circ \bar{\varphi}^n = 0$. Pour $n \geq 1$, montrons qu'on a en fait que $\operatorname{Im} \bar{\varphi}^n = \operatorname{Ker} \bar{\psi}^n$. (On a déjà l'inclusion $\subseteq$.)

Soit $\bar{g} \in \operatorname{Ker} \bar{\psi}^n$ et représentons le par $g \in \operatorname{Ker} d_G^n$. On a donc que $\psi^n(g) \in \operatorname{Im} d_H^{n-1}$ et qu'il existe $h \in H^{n-1}$ tel que $d_H^{n-1}(h) = \psi^n(g)$. Par surjectivité de ψ^{n-1}, il existe $g' \in G^{n-1}$ tel que $\psi^{n-1}(g') = h$. On aura alors que $d_G^{n-1}(g')$ est un élément de $\operatorname{Im} d_G^{n-1}$ qui est envoyé par ψ^n vers la même chose que g. En particulier, on peut assumer sans perte de généralité que notre représentant g est dans $\operatorname{Ker} \psi^n = \operatorname{Im} \varphi^n$. Il existe donc $f \in F^n$ tel que $\varphi^n(f) = g$. On se retrouve alors avec :

$$\varphi^{n+1} \circ d_F^n(f) = d_G^n \circ \varphi^n(f) = d_G^n(g) = 0.$$

Comme φ^{n+1} est injectif, on a donc bien que $f \in \operatorname{Ker} d_F^n$. L'élément $\bar{f}$ sera donc envoyé par $\bar{\varphi}^n$ vers $\bar{g}$ ce qui nous donne bien que $\operatorname{Im} \bar{\varphi}^n = \operatorname{Ker} \bar{\psi}^n$.

Dans le cas $n = 0$, le fait que $\bar{\psi}^n(\bar{g}) = 0$ implique déjà que $\psi^n(g) = 0$. On peut donc directement appliquer la deuxième partie de l'argument pour avoir que $\operatorname{Im} \bar{\varphi}^0 = \operatorname{Ker} \bar{\psi}^0$. De plus, comme φ^0 est injectif, $\bar{\varphi}^0$ le sera aussi.

Il ne nous reste maintenant qu'à construire une famille de morphismes $\delta^n : H^n(H^\bullet) \to H^{n+1}(F^\bullet)$ pour chaque n qui complète notre suite longue exacte.

Soit $h \in \operatorname{Ker} d_H^n$. Alors, par surjectivité de ψ^n, il existe $g \in G^n$ tel que $\psi^n(g) = h$. Ce g est tel que

$$\psi^{n+1} \circ d_G^n(g) = d_H^n \circ \psi^n(g) = d_H^n(h) = 0.$$

Il existe donc un $f \in F^{n+1}$ tel que $\varphi^{n+1}(f) = d_G^n(g)$. On souhaiterait définir $\delta^n(\bar{h}) \doteq \bar{f}$. Vérifions tout d'abord que cette définition ne dépend de rien d'autre que $\bar{h}$.

Tout d'abord, le choix de g n'est pas unique. Toutefois, tout autre choix $\tilde{g}$ aurait été tel que $\psi^n(g - \tilde{g}) = h - h = 0$. On aurait donc eu que $g - \tilde{g} \in \operatorname{Ker} \psi^n = \operatorname{Im} \varphi^n$ et il aurait existé $a \in F^n$ tel que $\tilde{g} = g + \varphi^n(a)$. Toutefois, cela nous aurait donné $\tilde{f} \doteq f + d_F^n(a)$, qui nous donne le même $\bar{f}$. De plus, comme φ^{n+1} est injectif, une fois g fixé, il n'y a qu'un seul choix possible pour f. On a donc que $\bar{f}$ est uniquement déterminé par h. Dans le cas $n = 0$, c'est suffisant car h est uniquement déterminé par $\bar{h}$.

Pour $n \geq 1$, prenons maintenant un autre représentant $\hat{h} \doteq h + d_H^{n-1}(b)$ et fixons $\hat{g}$ et $\hat{f}$ associés à ce représentant. Par surjectivité de ψ^{n-1}, il existe $c \in G^{n-1}$ tel que $\psi^{n-1}(c) = b$. On aura donc que $\hat{g} - g - d_G^{n-1}(c) \in \operatorname{Ker} \psi^n = \operatorname{Im} \varphi^n$ et qu'il existe $a \in F^n$ tel que $\varphi^n(a) = \hat{g} - g - d_G^{n-1}(c)$. On aura alors :

$$\varphi^{n+1} \circ d_F^n(a) = d_G^n \circ \varphi^n(a) = d_G^n(\hat{g}) - d_G^n(g) = \varphi^{n+1}(\hat{f} - f).$$

Par injectivité de φ^{n+1}, $\hat{f} = f + d_F^n(a)$ et h et $\hat{h}$ engendrent le même $\bar{f}$. Notre fonction est donc bien définie.

De plus, si on a deux éléments h_1 et h_2 (avec leur g_1, g_2, f_1 et f_2 associé), alors $g_1 + g_2$ et $f_1 + f_2$ sont des choix qui fonctionnent pour $h_1 + h_2$. Notre fonction δ^n est donc bien un morphisme.

Vérifions maintenant que ce morphisme complète notre suite longue exacte. Remarquons d'abord que si $g \in \operatorname{Ker} d_G^n$, alors on peut choisir $\psi^n(g)$ comme représentant de $\bar{\psi}^n(\bar{g})$ et on peut choisir g comme élément de G^n envoyé vers $\psi^n(g)$. On aura alors que le seul choix possible de f tel que $\varphi^{n+1}(f) = d_G^n(g) = 0$ est 0. On a donc bien que $\delta^n \circ \bar{\psi}^n = 0$ et que $\operatorname{Im} \bar{\psi}^n \subseteq \operatorname{Ker} \delta^n$.

Pour l'inclusion inverse, prenons $\bar{h} \in \operatorname{Ker} \delta^n$. Fixons un choix de h, g et f et la condition $\delta^n(\bar{h}) = 0$ reviendra à dire que $f \in \operatorname{Im} d_F^n$, c'est-à-dire qu'il existe $a \in F^n$ tel que $d_F^n(a) = f$. Posons maintenant $g' \doteq g - \varphi^n(a)$ et remarquons que $d_g^n(g') = d_G^n(g) - \varphi^{n+1}(f) = 0$, c'est-à-dire que $g' \in \operatorname{Ker} d_G^n$. De plus, on a que $\psi^n(g') = \psi^n(g) - \psi^n \circ \varphi^n(a) = h$ et donc que $\bar{h} = \bar{\psi}^n(\bar{g}') \in \operatorname{Im} \bar{\psi}^n$. On en conclut l'égalité :$\operatorname{Im} \bar{\psi}^n = \operatorname{Ker} \delta^n$.

De même, pour tout $h \in \operatorname{Ker} d_H^n$ (peu importe le choix de g et f), on aura que $\varphi^{n+1}(f) = d_G^n(g) \in \operatorname{Im} d_G^n$. En particulier, $\bar{\varphi}^{n+1} \circ \delta^n(\bar{h}) = \bar{\varphi}^{n+1}(\bar{f}) = 0$ et $\operatorname{Im} \delta^n \subseteq \operatorname{Ker} \bar{\varphi}^{n+1}$.

Pour l'inclusion inverse, prenons $f \in \operatorname{Ker} d_F^{n+1}$ tel que $\bar{\varphi}^{n+1}(\bar{f}) = 0$, c'est-à-dire que $\varphi^{n+1}(f) \in \operatorname{Im} d_G^n$. Il existe alors $g \in G^n$ tel que $d_G^n(g) = \varphi^n(f)$. Posons $h \doteq \psi^n(g)$ et remarquons alors que g et f sont des choix possibles dans notre construction de $\delta^n(\bar{h})$. On a donc que $\bar{f} = \delta^n(h) \in \operatorname{Im} \delta^n$ et on en conclut l'égalité : $\operatorname{Im} \delta^n = \operatorname{Ker} \bar{\varphi}^{n+1}$. $\square$

Corollaire 2.16. *Soit*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

une suite courte exacte de faisceau. Alors, on a une suite longue exacte de groupe :

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

Démonstration. D'après la proposition 2.10, on a que la suite

$$0 \longrightarrow C^n(\mathcal{F})(X) \xrightarrow{\varphi^n} C^n(\mathcal{G})(X) \xrightarrow{\psi^n} C^n(\mathcal{H})(X) \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout n. En posant $F^n \doteq C^n(\mathcal{F})(X)$, $G^n \doteq C^n(\mathcal{G})(X)$, $H^n \doteq C^n(\mathcal{H})(X)$, $d_F^i \doteq \delta_{\mathcal{F}}^i$, $d_G^i \doteq \delta_{\mathcal{G}}^i$ et $d_H^i \doteq \delta_{\mathcal{H}}^i$, on aura bien le diagramme de la proposition précédente. □

2.5. Faisceau mou

L'espace étalé de préfaisceau qu'on a construit dans l'annexe A.2 peut aussi servir à renforcer le concept de faisceau.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace X et soit M un sous-espace (pas forcément ouvert) de X. On peut définir $\mathcal{F}(M)$ comme l'ensemble des sections $s : M \to \tilde{\mathcal{F}}$ continues. On peut définir les fonctions de restrictions de façon naturelle et on aura un préfaisceau défini sur tout sous-ensemble de X. La façon qu'on a défini $\mathcal{F}(M)$ nous garantit que la condition F1 est respectée sur ces nouveaux ensembles. Quant à F2, elle sera respectée si on recouvre M par des $U \cap M$ (ouvert dans M), mais pas lorsqu'on a un recouvrement quelconque. (En particulier, $\mathcal{F}|_M$ sera un faisceau.)

Toutefois, on a la propriété suivante :

Proposition 2.17. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur l'espace X et soit $(M_i)_{i\in I}$ un recouvrement fermé localement fini de X. Prenons un $s_i \in \mathcal{F}(M_i)$ pour chaque $i \in I$ tel que $s_i|_{M_i\cap M_j} = s_j|_{M_i\cap M_j}$ pour tout $i,j \in I$. Alors, il existe un unique $s \in \mathcal{F}(X)$ tel que $s|_{M_i} = s_i$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Étant donné comment on a construit les $\mathcal{F}(M_i)$, il est clair qu'on peut recoller nos s_i en une section $s : X \to \tilde{\mathcal{F}}$. Cette section sera le seul candidat potentiel pour l'élément $s \in \mathcal{F}(X)$, mais est-elle continue ? (C'est-à-dire, est-elle dans $\mathcal{F}(X)$?)

Soit $x \in X$. Comme le recouvrement est localement fini, il existe un ouvert U_x contenant x qui n'intersecte qu'un nombre fini de M_i (qu'on dénotera $M_{i_1}, \ldots, M_{i_k}$). On a donc que $s|U_x$ est continue. En effet, pour tout fermé $F \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$, on a que

$$\left(s|_{U_x}\right)^{-1}(F) = U_x \cap \bigcup_{j=1}^{k} s_{i_j}^{-1}(F)$$

qui est un fermé dans U_x.

On peut ainsi recouvrir X par des ouverts sur lesquels s est continue. La section s est donc bien continue sur tout X. □

Les morphismes $\mathcal{F}(M) \to \mathcal{G}(M)$ sont définis de la même façon que pour $\tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$.

On peut identifier l'espace étalé de $\mathcal{F}|_M$ à la partie de l'espace étalé de $\mathcal{F}$ qui est au-dessus de M (qu'on dénotera $\tilde{\mathcal{F}}_M$) : pour tout $x \in M$ et pour tout ouvert $U \subseteq X$ contenant x, si $s \in \mathcal{F}(M \cap U)$, alors on définit $\psi_x(s_x) \doteq s(x) \in \mathcal{F}_x$. Cette application est bien définie, car si

t est un autre représentant de s_x, alors il existe un ouvert $V \subseteq U$ contenant x sur lequel s et t coïncident. En particulier, $s(x) = t(x)$.

On a donc un morphisme $\psi_x : (\mathcal{F}|_M)_x \to \mathcal{F}_x$ pour chaque $x \in M$. Remarquons que chacun des ψ_x est bijectif. En effet, chacun des $s_x \in \mathcal{F}_x$ est clairement atteint par $(s|_M)_x$. Pour l'injectivité, prenons un ouvert $U \subseteq X$ contenant x et $s,t \in \mathcal{F}(U \cap M)$ tels que $s(x) = t(x)$. Choisissons maintenant une section $s' \in \mathcal{F}(V)$ (où V est un ouvert de X contenant x) telle que $s'_x = s(x) = t(x)$. Comme s et t sont continues, il faut que les ensembles $s^{-1}(s'(V))$ et $t^{-1}(s'(V))$ des points où ils coïncident avec la section s' soient ouverts. En particulier, on a un ouvert contenant x sur lequel s et t coïncident et donc $s_x = t_x$.

Maintenant, dénotons $\mathcal{F}|_M$ par $\mathcal{G}$ afin d'alléger la notation. Il ne nous reste qu'à montrer que la fonction $\psi : \tilde{\mathcal{G}} \to \tilde{\mathcal{F}}$ engendrée par les ψ_x est un homéomorphisme entre $\tilde{\mathcal{G}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_M$. Commençons par montrer qu'elle est continue. Soit $A \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ un ouvert. Alors pour tout $s_x \in \psi^{-1}(A)$, on a une section $t \in \mathcal{F}(U)$ (avec $U \subseteq X$ un ouvert contenant x) telle que $t_x = s(x)$. Comme A est ouvert, $\tilde{t}^{-1}(A)$ est ouvert. On peut donc prendre $t' \doteq \tilde{t}|_{\tilde{t}^{-1}(A)\cap M} \in \mathcal{G}(\tilde{t}^{-1}(A) \cap M)$. Cette section est telle que $t'_x = s_x$ et son image est un ouvert contenant s_x et contenu dans $\psi^{-1}(A)$. Ce-dernier est donc ouvert et ψ est continu.

Pour l'autre condition à vérifier, prenons $A \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$ ouvert. Pour tout $s_x \in \psi(A)$ (où $s \in \mathcal{F}(U)$ avec $U \subseteq X$ contenant x), posons $s' \doteq \tilde{s}|_{U\cap M} \in \mathcal{G}(U \cap M)$. Comme A est ouvert, $\tilde{s}'^{-1}(A)$ est un ouvert de M. Il existe donc un ouvert $V \subseteq X$ (qu'on peut assumer contenu dans U) tel que $\tilde{s}'^{-1}(A) = V \cap M$. Ainsi, s_x est contenue dans l'ensemble $\tilde{\mathcal{F}}_M \cap \tilde{s}(V) = \tilde{s}(\tilde{s}'^{-1}(A)) \subseteq \psi(A)$ où $\tilde{s}(V)$ est ouvert dans $\tilde{\mathcal{F}}$. $\psi(A)$ est donc ouvert dans $\tilde{\mathcal{F}}_M$.

On peut donc bien identifier l'espace étalé de $\mathcal{F}|_M$ et $\tilde{\mathcal{F}}_M$. La façon dont on a défini cette identification nous garantit qu'elle commute avec les morphismes φ_x. Elle est en d'autres mots fonctorielle.

En particulier, on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.18. *Soit $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ une suite exacte de faisceaux sur l'espace X et soit $M \subseteq X$ un sous-espace. Alors la suite*

$$\mathcal{F}|_M \to \mathcal{G}|_M \to \mathcal{H}|_M$$

associée est aussi exacte.

Démonstration. On a démontré dans l'annexe A.3 que l'hypothèse implique que la suite

$$\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$$

est exacte pour tout $x \in X$. En particulier, c'est le cas pour tout $x \in M$, ce qui nous donne la conclusion. □

Maintenant, on peut définir le sujet de cette section :

Définition. Un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace X est dit *mou* si pour tout fermé $M \subseteq X$, la restriction ρ_M^X est surjective.

Si $M \subseteq X$ est fermé, alors $\mathcal{F}|_M$ sera flasque. En effet, si E est un fermé de M, alors ce sera un fermé de X et toute section dans $\mathcal{F}(E)$ se prolongera à une section dans $\mathcal{F}(X)$ (et donc dans $\mathcal{F}(M)$.

On voit bien la similitude avec les faisceaux flasques. Celle-ci sera particulièrement visible sur certains types d'espace.

Définition. Soit X un espace de Hausdorff. On dit que X est *paracompact* si tout recouvrement ouvert de X admet un recouvrement ouvert plus fin qui est *localement fini* (c'est-à-dire que chaque point possède un voisinage n'intersectant qu'un nombre fini d'éléments du recouvrement).

Tout sous-espace fermé d'un espace paracompact est paracompact. (Pour le montrer, il suffit de transformer le recouvrement du sous-espace à un recouvrement de X en y ajoutant son complément.)

Proposition 2.19. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace X paracompact. Alors toute section s sur un fermé $M \subseteq X$ peut être prolongée à un voisinage de M dans X.*

Démonstration. Pour chaque $x \in M$, on sait qu'il existe un ouvert $U_x \subseteq X$ contenant x et une section $t \in \mathcal{F}(U_x)$ qui coïncide avec s sur $U \cap M$. Prenons un ouvert $V_x \subseteq U_x$ contenant x et tel que $\bar{V}_x \subseteq U_x$ (on peut, car X est de Hausdorff) et recouvrons M avec les V_x. Comme M est paracompact (c'est un fermé dans un espace paracompact), on peut prendre un sous-recouvrement $\{V_i\}_{i \in I}$ localement fini. On notera par s_i la section associée à V_i. Soit W l'ensemble des $x \in X$ tels que pour tout $i,j \in I$, si $x \in V_i \cap V_j$, alors $s_i(x) = s_j(x)$. Cette ensemble contient clairement M. En appliquant la proposition précédente au faisceau $\mathcal{F}|_W$, on peut recoller toutes les s_i à une section au-dessus de W qui prolongera alors s.

Il nous reste à montrer que W est bien un voisinage de M. Soit $x \in M$. Comme notre recouvrement est localement fini, il existe un ouvert W_x qui n'intersecte qu'un nombre fini de V_i, qu'on dénotera $V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}$. En particulier, il ne rencontrera aucune fermeture $\bar{V}_i$ autre que celles des V_{i_j}. Quitte à prendre un ouvert W_x plus petit, on peut assumer que $x \in \bar{V}_{i_j}$ et $W_x \subseteq U_{i_j}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$. Les sections $s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}$ coïncident tous au point x et, comme elles sont en nombre fini, on peut prendre W_x suffisamment petit pour qu'elles coïncident toutes sur W_x. On aura alors que $W_x \subseteq W$, ce qui conclut notre preuve. □

Corollaire 2.20. *Tout faisceau $\mathcal{F}$ flasque sur un espace X paracompact est mou.*

Démonstration. Soit $M \subseteq X$ un ensemble fermé et soit une section $s \in \mathcal{F}(M)$. La proposition précédente nous assure qu'il existe un ouvert $U \subseteq X$ contenant M et une section $s' \in \mathcal{F}(U)$ telle que $s'|_M = s$. Comme $\mathcal{F}$ est flasque, il existe une section $s'' \in \mathcal{F}(X)$ telle que $s''|_U = s'$. En particulier, $s''|_M = s$. □

On a aussi un résultat similaire à celui des faisceaux flasques :

Proposition 2.21. *Soit*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

une suite courte exacte de faisceaux de groupes abéliens sur un espace X paracompact. Si $\mathcal{F}'$ est mou, alors pour tout fermé $M \subseteq X$, on a la suite courte exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(M) \xrightarrow{\psi(M)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\varphi(M)} \mathcal{F}''(M) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. On a déjà montré que que l'hypothèse implique que la suite de faisceau

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'|_M \xrightarrow{\psi|_M} \mathcal{F}|_M \xrightarrow{\varphi|_M} \mathcal{F}''|_M \longrightarrow 0$$

est exacte. Le faisceau $\mathcal{F}'|_M$ étant mou et le sous-espace M étant paracompact, on peut se restreindre au cas où $M = X$. Comme le foncteur $\Gamma(X,\cdot)$ est exact à gauche, il nous suffit de montrer que le morphisme $\varphi(X)$ est surjectif.

Prenons donc une section $s'' \in \mathcal{F}''(X)$ et montrons qu'elle est l'image d'une section dans $\mathcal{F}(X)$. Comme φ est surjectif, il existera un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de X et des sections $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tels que $\varphi(U_i)(s_i) = s''|_{U_i}$ pour tout $i \in I$. Comme X est paracompact (et donc de Hausdorff), on peut prendre un raffinement ouvert $\{V_i\}_{i\in I}$ tel que $\bar{V}_i \subseteq U_i$ pour tout $i \in I$, quitte à ajouter quelques copies d'ouverts U_i dans le recouvrement originel. On peut aussi supposer que le recouvrement par les V_i est localement fini.

On posera $F_i \doteq \bar{V}_i$ pour tout $i \in I$ et, pour tout $J \subseteq I$, $F_J \doteq \bigcup_{i\in J} F_i$. Comme une union localement finie de fermés est fermée, tous les F_J seront fermés.

Prenons maintenant l'ensemble E de tous les couples (J,s) où $J \subseteq I$ et $s \in \mathcal{F}(F_J)$ est telle que $\varphi(F_J)(s) = s''|_{F_J}$. E sera clairement non-vide, car il contient les éléments $(\{i\},s_i)$. Donnons-lui la relation d'ordre : $(J,s) \leq (\bar{J},\bar{s})$ si et seulement si $J \subseteq \bar{J}$ (et donc $F_J \subseteq F_{\bar{J}}$) et $s = \bar{s}|_{F_J}$. Cela fera de E un ensemble inductif.

En effet, si on a une chaîne croissante $(\bar{J}_1,\bar{s}_1) \leq (\bar{J}_2,\bar{s}_2) \leq \ldots$, alors on aura l'élément $\bar{J} \doteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bar{J}_i$ qui sera tel que $F_{\bar{J}} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_{\bar{J}_i}$. De plus, pour tout $i \in \bar{J}$, il existera $k \in \mathbb{N}$ tel que $i \in \bar{J}_k$, et on définira alors $t_i \doteq \bar{s}_k|_{F_i}$. Notre relation d'ordre nous garantit que cette définition ne dépend pas de l'entier k. De plus, si $i,j \in \bar{J}$, on aura que $t_i|_{F_i\cap F_j} = t_j|_{F_i\cap F_j}$. Pour le voir, il suffit de prendre $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $i,j \in \bar{J}_k$. Par la proposition 2.17, il devra alors exister $\bar{s} \in F_{\bar{J}}$ telle que $\bar{s}|_{F_i} = t_i$ pour tout $i \in \bar{J}$.

On peut donc prendre un élément maximal (J,s). Supposons que $J \neq I$ et prenons $i \in I \setminus J$. Si on restreind s et s_i à $F_J \cap F_i$, leur différence sera envoyée par $\varphi(F_J \cap F_i)$ vers $(s'' - s'')|_{F_J\cap F_i} = 0$. Cette différence est donc dans $\mathrm{Ker}(\varphi(F_J \cap F_i)) = \mathrm{Im}(\psi(F_J \cap F_i))$ et il existe $t \in \mathcal{F}'(F_J \cap F_i)$ qui est envoyée vers celle-ci. Comme $\mathcal{F}'$ est mou (et que $F_J \cap F_i$ est fermé), on peut prolonger t à X et donc à F_i. En ajoutant t à s_i, on peut donc assumer que cette-dernière est telle que $s_i|_{F_J \cap F_i} = s|_{F_J \cap F_i}$. En appliquant la proposition 2.17, on obtient un prolongement de s à $F_J \cup F_i = F_{J \cup \{i\}}$. Or, comme $J \cup \{i\}$ contient strictement J, cela contredit la maximalité de (J,s).

Donc, on a que $J = I$ et que $s'' = \varphi(X)(s)$ est alors bien dans l'image de $\varphi(X)$. □

Corollaire 2.22. *Si $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ sont mous, alors $\mathcal{F}''$ l'est aussi.*

Démonstration. Une section $s'' \in \mathcal{F}''(M)$ est l'image d'une section $s \in \mathcal{F}(M)$, laquelle se prolonge à $\mathcal{F}(X)$. Son image dans $\mathcal{F}''(X)$ sera donc un prolongement de s''. □

Pour finir, un exemple important d'espace paracompact est celui de l'espace métrisable. On sait qu'un espace métrisable est toujours paracompact. En particulier, tout sous-espace d'un espace métrisable est aussi métrisable, et donc paracompact. Un tel espace est dit *héréditairement paracompact* (de l'anglais «hereditarily paracompact»). Bien que ce n'est que cette propriété qui nous intéresse, nous nous restreindrons au cas des espaces métrisables. Étant donné le peu d'exemples existant d'espaces héréditairement paracompacts mais non-métrisables, ce ne sera pas une trop grosse restriction.

Pour une preuve que tout espace métrisable est paracompact, le papier de Stone [**18**] démontre qu'un espace complètement normal est paracompact et le théorème 8.12 de [**20**] implique que tout espace métrisable est complètement normal.

Si on ajoute cette condition à X, on obtient le résultat suivant découlant directement de la proposition 2.19 :

Corollaire 2.23. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau flasque sur l'espace métrisable X. Alors pour tout fermé $M \subseteq X$, $\mathcal{F}|_M$ est flasque.*

Démonstration. Soit V un ouvert de M. Il peut donc s'écrire comme $V = U \cap M$ pour un certain ouvert $U \subseteq X$. Comme U est paracompact, toute section sur le fermé $U \cap M$ de U se prolonge sur un voisinage ouvert de $U \cap M$ dans U. Le faisceau $\mathcal{F}$ étant flasque, on peut alors la prolonger à une section sur tout X. En restreignant à M, on a donc bien que $\mathcal{F}|_M$ est flasque. □

Remarque. Dans la preuve de la proposition 2.19, la seule fois où on utilise le fait que M est fermé est pour pouvoir dire qu'il est paracompact. Dans un espace métrisable, on pourrait donc démontrer qu'une section sur tout sous-ensemble E de X se prolonge sur un voisinage ouvert. En particulier, $\mathcal{F}|_E$ sera toujours flasque si $\mathcal{F}$ l'est. Toutefois, nous n'aurons pas besoin de cette généralité.

2.6. Cohomologie de Čech

Bien que notre définition abstraite de cohomologie de faisceau est plutôt facile à utiliser dans les démonstrations, nous aurons besoin d'une meilleure méthode pour calculer nos groupes. C'est là que survient la cohomologie de Čech. Pour faire simple, si on a un faisceau

$\mathcal{F}$ défini sur l'espace X, on cherchera à recouvrir X par des ensembles U_i sur lesquels la cohomologie de $\mathcal{F}|_{U_i}$ est beaucoup plus facile à calculer (généralement tous nuls sauf le premier). De là, on aimerait retrouver la cohomologie de $\mathcal{F}$ à partir des $\mathcal{F}|_{U_i}$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau (de groupes abéliens) sur l'espace X et soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i=1}^{l}$ un recouvrement fini de X. On se restreindra ici à deux cas de recouvrements : celui où tous les U_i sont ouverts et celui où ils sont tous fermés. Le cas fermé étant un peu plus difficile à gérer, on supposera dans ce cas que X est métrisable. Posons $[l] \doteq \{1, \ldots, l\}$ et dénotons par $[l]_p$ l'ensemble des $(p+1)$-tuplets $(i_0, \ldots, i_p)$ de $[l]$ satisfaisant $i_0 < \ldots < i_p$. Afin de simplifier la notation, on posera $U_{i_0,\ldots,i_p} \doteq U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}$.
Définition. On appelle *p-ième cochaîne de Čech* le groupe :

$$\check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \doteq \bigoplus_{(i_0,\ldots,i_p)\in[l]_p} \mathcal{F}(U_{i_0,\ldots,i_p}).$$

Un élément α de ce groupe sera un choix de section dans $\mathcal{F}(U_{i_0,\ldots,i_p})$ pour chaque $(i_0, \ldots, i_p) \in [l]_p$, choix qu'on dénotera par $\alpha(i_0, \ldots, i_p)$.

On définit l'application $d^p : \check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^{p+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ par :

$$d^p(\alpha)(i_0, \ldots, i_{p+1}) \doteq \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha(i_0, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_{p+1})|_{U_{i_0,\ldots,i_{p+1}}}$$

qui est clairement un homomorphisme de groupe. On appellera ces homomorphismes les *opérateurs de bord.*

Dans le cas où $p = 0$, on aura que $d^0(\alpha)(i,j) = \alpha(j)|_{U_i \cap U_j} - \alpha(j)|_{U_i \cap U_j}$. Le noyau de d^0 sera donc exactement les choix de section $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ qui coïncident sur les intersections $U_i \cap U_j$. Or, si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement d'ouverts, la propriété de recollement des faisceaux nous garantit que ces choix correspondent à une unique section $s \in \mathcal{F}(X)$ telle que $s_i = s|_{U_i}$ pour tout $i \in [l]$. Si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement de fermés, ce sera la proposition 2.17 qui nous garantit ceci. À l'inverse, s'il existe $s \in \mathcal{F}(X)$ telle que $\alpha(i) = s|_{U_i}$ pour tout $i \in [l]$, alors on voit bien que $d^0(\alpha) = 0$.

On a donc une inclusion de $\mathcal{F}(X)$ dans $\check{C}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ dont l'image est exactement le noyau de d^0. De plus, un petit calcul nous permet de vérifier que pour tout $p > 0$, la composition $d^p \circ d^{p-1}$ est nulle (quoiqu'on n'aura pas forcément que $\operatorname{Im}(d^{p-1}) = \operatorname{Ker}(d^p)$). Cela nous permet de faire les définitions suivantes :
Définition. On définit le *p-ième groupe de cohomologie de Čech* par :

$$\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \doteq \operatorname{Ker}(d^p) / \operatorname{Im}(d^{p-1})$$

où d^{-1} est simplement l'inclusion du groupe trivial $\{0\}$ dans $\check{C}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ (et donc $\operatorname{Im}(d^{-1}) = \{0\}$).

On remarque, par le raisonnement précédent, que $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) = H^0(X,\mathcal{F})$. Il faudra toutefois travailler pour avoir l'égalité pour $p > 0$ (qui ne sera pas toujours vraie).

Remarquons d'abord qu'on peut refaire nos définitions avec la théorie des faisceaux. Pour tout ouvert $V \subseteq X$ et pour tout $p \geq 0$, on définit le groupe :

$$\mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})(V) \doteq \bigoplus_{(i_0,\dots,i_p)\in[l]_p} \mathcal{F}(U_{i_0,\dots,i_p} \cap V).$$

Ici, la restriction de l'ouvert V à l'ouvert $W \subseteq V$ sera simplement le produit des restrictions de $U_{i_0,\dots,i_p} \cap V$ à $U_{i_0,\dots,i_p} \cap W$. Cela nous donne bien une structure de préfaisceau de groupes abéliens sur X.

Une autre façon de voir ce produit est en posant $\iota_{i_0,\dots,i_p}$ comme l'inclusion de $U_{i_0,\dots,i_p}$ et en voyant notre préfaisceau comme le produit des images directs :

$$\mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \prod_{(i_0,\dots,i_p)\in[l]_p} (\iota_{i_0,\dots,i_p})_* \left(\mathcal{F}|_{U_{i_0,\dots,i_p}}\right).$$

On voit bien ainsi que c'est un faisceau.

On définit les applications d^p de la même façon que précédemment : pour tout $\alpha = \sum \alpha_{i_0,\dots,i_p} \in \mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})(V)$, alors

$$d^p(V)(\alpha) \doteq \sum_{(i_0,\dots,i_{p+1})\in[l]_{p+1}} \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \, \alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+1}}\Big|_{U_{i_0,\dots,i_{p+1}}\cap V}.$$

Ces applications forment visiblement des morphismes de faisceaux et, tout comme précédemment, on peut vérifier par un simple calcul que $d^p \circ d^{p-1} = 0$ pour $p > 0$.

De plus, pour tout ouvert $V \subseteq X$, on a un recouvrement $\mathfrak{U}_V = \{U_i \cap V\}_{i=1}^l$ de V. On remarque alors que la construction qu'on vient de faire pour $\mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})(V)$ est exactement la même que $\check{C}^p(\mathfrak{U}_V,\mathcal{F}|_V)$. On peut donc voir $\mathcal{F}$ comme un sous faisceau de $\mathscr{C}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ qui correspond exactement au noyau de d^0. Dans le cas particulier où $V = X$, on a que $\mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})(X) = \check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ pour tout p.

Nous sommes donc prêts à prouver la première propriété de ces faisceaux :

Proposition 2.24. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur l'espace X. Si $\iota : \mathcal{F} \to \mathscr{C}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ est l'inclusion mentionnée plus haut, alors la suite de faisceaux suivante*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\ \iota\ } \mathscr{C}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\ d^0\ } \mathscr{C}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\ d^1\ } \dots$$

est exacte.

Démonstration. Par ce qu'on vient de dire, la seule chose restant à montrer est que $\operatorname{Im}(d^{p-1}) = \operatorname{Ker}(d^p)$ pour tout $p > 0$. De façon équivalente, on peut montrer que $\operatorname{Im}(d^{p-1})_x = \operatorname{Ker}(d^p)_x$ pour tout $x \in X$. Mais comme on sait déjà que $d^p_x \circ d^{p-1}_x = (d^p \circ d^{p-1})_x = 0$, il nous suffit en fait de démontrer l'inclusion de droite à gauche.

Prenons donc $x \in X$ et $p > 0$ quelconques, fixons un $j \in [l]$ tel que $x \in U_j$ et définissons une application $k^p : \mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})_x \to \mathscr{C}^{p-1}(\mathfrak{U},\mathcal{F})_x$. Tout élément $\alpha_x \in \mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})_x$ peut être représenté par une section $\alpha \in \mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})(V)$ définie sur un voisinage ouvert V de x. Quitte à rétrécir V, on peut supposer que $V \subseteq U_j$. On définit alors la section $k^p\alpha \in \mathscr{C}^{p-1}(\mathfrak{U},\mathcal{F})(V)$ par :

$$k^p\alpha \doteq \sum_{\substack{(i_0,\dots,i_{p-1})\in[l]_{p-1}\\ j\notin\{i_0,\dots,i_{p-1}\}}} \operatorname{sgn}_{i_0,\dots,i_{p-1}} \alpha_{i_0,\dots,j,\dots,i_{p-1}}$$

où $\operatorname{sgn}_{i_0,\dots,i_{p-1}}$ est le signe de la permutation qui envoie $(j,i_0,\dots,i_{p-1})$ vers $(i_0,\dots,j,\dots,i_{p-1})$.

Cette section est bien définie car $V \cap U_{i_0,\dots,i_{p-1}} = V \cap U_{i_0,\dots,j,\dots,i_{p-1}}$. On voit bien que cette application commute avec les restrictions et est un homormorphisme de groupes. En particulier, si on définit $k^p(\alpha_x)$ par $(k^p\alpha)_x$, on aura que cette définition ne dépend pas du choix du représentant de α_x et nous donne un homomorphisme.

Comparons maintenant les compositions des k^p et des d^p. Si $\alpha_x \in \mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})_x$ est représenté par $\alpha \in \mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})(V)$ où $V \subseteq U_j$, alors la composante $(i_0,\dots,i_p)$ de $d^{p-1}(V)\circ k^p(\alpha)$ sera :

$$\sum_{l=0}^{p} (-1)^l \operatorname{sgn}_{i_0,\dots,\hat{i}_l,\dots,i_p} \alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_l,\dots,j,\dots,i_p}\Big|_{U_{i_0,\dots,i_p}\cap V}$$

si j n'est pas dans $(i_0,\dots,i_p)$. (Ici, l'ordre décrite entre i_l et j est purement pour simplifier la notation.) Si $j = i_l$, ce sera :

$$(-1)^l \operatorname{sgn}_{i_0,\dots,\hat{i}_l,\dots,i_p} \alpha_{i_0,\dots,i_p} = \alpha_{i_0,\dots,i_p}.$$

Quant à l'autre composition, la composante en $(i_0,\dots,i_p)$ de $k^{p+1}\circ d^p(V)(\alpha)$ sera nulle si j est dans $(i_0,\dots,i_p)$. Sinon, on peut écrire $i_0 < \ldots < i_s < j < i_{s+1} < \ldots < i_p$ et on aura :

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}_{i_0,\dots,i_p}\Bigg(\sum_{l=0}^{s} (-1)^l\, \alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_l,\dots,j,\dots,i_p}\Big|_{U_{i_0,\dots,i_p}\cap V} &\\ + (-1)^{s+1}\alpha_{i_0,\dots,i_p} &\\ + \sum_{l=s+1}^{p} (-1)^{l+1}\, \alpha_{i_0,\dots,j,\dots,\hat{i}_l,\dots,i_p}\Big|_{U_{i_0,\dots,i_p}\cap V}\Bigg).\end{aligned}$$

Or, si $i_0 < \ldots < i_s < j < i_{s+1} < \ldots < i_p$, alors $\operatorname{sgn}_{i_0,\dots,i_p} = (-1)^{s+1}$ et $\operatorname{sgn}_{i_0,\dots,\hat{i}_l,\dots,i_p}$ vaut $(-1)^s$ si $l \le s$ et $(-1)^{s+1}$ sinon. On obtient donc que $d^{p-1}(V)\circ k^p(\alpha) + k^{p+1}\circ d^p(V)(\alpha) = \alpha$. En prenant les germes, on a que $d_x^{p-1}\circ k_x^p(\alpha_x) + k_x^{p+1}\circ d_x^p(\alpha_x) = \alpha_x$.

En particulier, si $\alpha_x \in \operatorname{Ker}(d^p)_x = \operatorname{Ker}(d_x^p)$, alors $\alpha_x = d_x^{p-1}(k_x^p(\alpha_x)) \in \operatorname{Im}(d^{p-1})_x$. Ceci nous donne l'inclusion qu'on recherchait pour conclure. □

En particulier, les $\mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ forment une résolution (pas forcément injective ou flasque) de $\mathcal{F}$. De la même façon que pour les résolutions flasques, on peut définir les groupes de cohomologie de cette résolution par : $\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \doteq \operatorname{Ker}(d^p(X)/\operatorname{Im}(d^p(X))$ (où d^{-1} est le morphisme $0 \to \mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$). Ce groupe est en fait exactement le groupe de cohomologie défini plus haut (d'où la notation).

Comme on l'a fait remarquer précédemment, ces groupes ne correspondront pas toujours à la cohomologie du faisceau $\mathcal{F}$. Toutefois, plusieurs propriétés qu'on a démontré pour H^p

sont aussi vraies pour $\check{H}^p$. Tout d'abord, on a vu que $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. Ensuite, on a la propriété suivante :

Proposition 2.25. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau flasque sur l'espace X et soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i=1}^{l}$ un recouvrement fini de X qui est, ou bien ouvert, ou bien fermé avec X métrisable. Alors, pour tout $p > 0$, $\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = 0$.*

Démonstration. Nos conditions nous permettent de dire que pour chaque $(p+1)$-tuplet $(i_0, \ldots, i_p) \in [l]_p$, le faisceau $\mathcal{F}|_{U_{i_0,\ldots,i_p}}$ sera flasque. Comme le produit et l'image directe de faisceaux flasques sont flasques, tous nos faisceaux $\mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ seront eux aussi flasques. Dans ce cas, notre résolution sera en fait une résolution flasque et, par le lemme 2.13, nos groupes de cohomologie de Čech $\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ seront tous nuls pour $p > 0$. □

On aimerait donc construire une suite longue exacte de groupes de cohomologie pour chaque suite courte exacte de faisceau : $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$. Lorsque $H^1(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{F}) = 0$ pour chaque $(i_0, \ldots, i_p) \in [l]_p$, on pourra faire cette construction.

Commençons tout d'abord par construire une collection d'homomorphisme $\varphi^p : \check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{G})$ à partir d'un morphisme de faisceau $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. C'est en fait assez simple. Le morphisme φ nous donne un homomorphisme $\varphi(U_{i_0,\ldots,i_p}) : \mathcal{F}(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to \mathcal{G}(U_{i_0,\ldots,i_p})$ pour tout $(i_0, \ldots, i_p) \in [l]_p$. En prenant le produit de ces homomorphismes, on obtient un homomorphisme $\varphi^p : \check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{G})$. Comme les $\varphi(U)$ sont tous des homomorphismes et commutent avec les restrictions, on aura que les φ^p commuteront avec les homomorphismes d^p de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$. Dans le cas $p = 0$, $\varphi^0 = \varphi(X)$.

Maintenant, prenons la suite longue exacte qu'on a construit pour la cohomologie de faisceaux. On aura alors que :

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{F}) \to H^0(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{G}) \to H^0(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{H}) \to \\ \to H^1(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{F}) \to H^1(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{G}) \to H^1(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{H}) \to \ldots \end{aligned}$$

où les termes de la première ligne sont simplement les groupes de sections. Comme les groupes H^1 de $\mathcal{F}$ sont nuls, on aura la suite courte exacte :

$$0 \to \mathcal{F}(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to \mathcal{G}(U_{i_0,\ldots,i_p}) \to \mathcal{H}(U_{i_0,\ldots,i_p},) \to 0.$$

En prenant le produit sur tous les $(p+1)$-tuplets, on obtient que la suite

$$0 \to \check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \to \check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \to 0$$

est aussi exacte pour tout $p \geq 0$.

On se retrouve alors avec le même diagramme commutatif que dans la proposition 2.15. On a donc une suite longue exacte pour nos groupes $\check{H}^p$.

De là, on peut démontrer le résultat tant attendu :

Proposition 2.26. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur l'espace X et soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i=1}^{l}$ un recouvrement fini de X qui est, ou bien ouvert, ou bien fermé avec X métrisable. Si $H^p(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{F}) = 0$ pour tout $p > 0$ et tout $(i_0,\ldots,i_p) \in [l]_p$, alors on a un isomorphisme $\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X,\mathcal{F})$ pour tout $p \geq 0$.*

Démonstration. Prenons un faisceau flasque $\mathcal{G}$ sur X tel que $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{G}$ et posons $\mathcal{H}$ le faisceau quotient $\mathcal{F}/\mathcal{G}$. Alors, on a une suite courte exacte $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$. Pour tout $(i_0,\ldots,i_p) \in [l]_p$, on a alors une suite longue exacte des groupes de cohomologie des faisceaux $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sur $U_{i_0,\ldots,i_p}$. Mais comme $H^p(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{F}) = H^p(U_{i_0,\ldots,i_p},\mathcal{G}) = 0$ pour tout $p > 0$, les groupes de $\mathcal{H}$ seront eux aussi nuls. Ici, les groupes de $\mathcal{F}$ sont nuls par hypothèse et ceux de $\mathcal{G}$ le sont car $\mathcal{G}$ (et donc $\mathcal{G}|_{U_{i_0,\ldots,i_p}}$) est flasque.

Ensuite, prenons la suite longue exacte qu'on a construit pour la cohomologie de Čech. Comme $\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{G}) = 0$ pour tout $p > 0$, on a alors la suite exacte

$$0 \to \check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{G}) \to \check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \to \check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to 0$$

et une collection d'isomorphisme $\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^{p+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ pour tout $p > 0$.

La suite longue exacte de la cohomologie de faisceaux nous donne exactement les mêmes homomorphismes pour les groupes H^p. En particulier, si π est la projection de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H} = \mathcal{G}/\mathcal{F}$, alors les groupes $H^1(X,\mathcal{F})$ et $\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ seront tous les deux isomorphes au conoyau de $\pi(X)$. On a donc un isomorphisme de construit pour $p = 0$ et $p = 1$.

Pour le reste, on peut y aller simplement par induction sur p. Supposons qu'un isomorphisme existe entre $\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}')$ et $H^p(X,\mathcal{F}')$ pour tout faisceau $\mathcal{F}'$ respectant les hypothèses de la proposition. Alors remarquons qu'on a vérifié que le faisceau $\mathcal{H}$ respecte ces hypothèses. On a donc une suite d'isomorphisme :

$$\check{H}^{p+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} H^p(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} H^{p+1}(X,\mathcal{F})$$

ce qui nous donne notre isomorphisme pour $p + 1$ et conclut notre preuve. □

Remarque. Il est à noter ici que cette proposition est beaucoup moins forte qu'elle ne pourrait l'être. Bien que l'on n'aura pas toujours de tels isomorphismes, il existera toujours un collection d'homomorphismes naturels $\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to H^p(X,\mathcal{F})$ pour chaque $p \geq 0$. Ces homomorphismes seront de plus fonctoriels : ils commuteront entre autres avec nos suites longues exactes. Sous les conditions de la proposition précédente, ces homomorphismes seront tous bijectifs.

Toutefois, comme notre objectif est de démontrer des théorèmes d'annulation, nous n'utiliseront pas cette propriété de fonctorialité. Le lecteur intéressé par la version forte de cette proposition sera renvoyé au théorème original de Hartshorne [**10**, Thm. III.4.5] qui se base sur les résultats de [**11**, § IV.4].

Pour un premier exemple d'application de la cohomologie de Čech, prenons X un espace métrisable et localement contractile (par exemple, une variété ou un CW-complexe) et posons $\mathcal{F}$ le faisceau constant sur X à valeur dans un groupe abélien G. Selon [**2**, Thm III.1.1], les groupes de cohomologie de $\mathcal{F}$ d'un tel faisceau correspondent à la cohomologie singulière de X à coefficients dans G. (Dans ce théorème, $\mathscr{A}$ est notre faisceau $\mathcal{F}$. On peut prendre Φ comme l'ensemble des fermés de X, et $H^*_\Phi(X,\mathcal{F})$ sera alors simplement notre cohomologie de faisceau $H^*(X,\mathcal{F}) = \{H^p(X,\mathcal{F})\}$. De même, ${}_\Delta H^*_\Phi(X,\mathcal{F})$ sera simplement les groupes de cohomologie singulière de X à coefficients dans G. Comme X est paracompact et localement contractile, on aura un isomorphisme naturel entre ces groupes.)

Une autre preuve un peu plus accessible a été faite par Cibotaru [**3**, Prop. 2.1] (dans le cas où $G = \mathbb{Z}$, mais elle se généralise facilement). L'idée est de définir un préfaisceau C^p_{sing} qui associe à chaque ouvert $U \subseteq X$ le groupe des p-cochaînes singulières à coefficients dans G de U. Les opérateurs de bords de ces groupes nous donneront alors des morphismes de préfaisceaux. Les groupes de cohomologie de cette suite de préfaisceaux seront alors simplement les groupes de cohomologie singulière de X.

En prenant toutefois les faisceaux engendrés par ces préfaisceaux (et les morphismes de faisceaux associés aux opérateurs de bords), on peut montrer que cela nous donne une résolution flasque du faisceau localement constant $\mathcal{F}$. Les groupes de cohomologie de cette suite de faisceaux seront alors isomorphes aux groupes de cohomologie de $\mathcal{F}$. La partie restante (et la plus difficile) de la preuve sera donc de démontrer que les groupes obtenus en prenant la suite de préfaisceaux et celle de faisceaux seront isomorphes.

On notera alors généralement le faisceau $\mathcal{F}$ simplement par G. Le plus souvent, on s'intéresse au cas où G est un anneau.

Revenons donc à notre exemple. Si on a un tel espace X et qu'on arrive à recouvrir X par des ouverts (ou des fermés) contractiles tels que toutes les intersections sont aussi contractiles (ou au moins que leurs composantes connexes soient toutes contractiles), alors on peut calculer la cohomologie singulière de X à partir des groupes $\tilde{H}^0(U_{i_0,\ldots,i_p},G)$.

Cela reste toutefois une condition difficile à vérifier.

Chapitre 3

THÉORÈMES D'ANNULATION

Maintenant que les bases ont été jetées et que la majorité des concepts importants ont été définis, nous nous occuperons dans ce chapitre de démontrer quelques théorèmes d'annulation de la cohomologie des variétés toriques. Mais avant cela, nous ferons un dernier détour pour définir un concept reliant les deux premiers chapitres.

Le livre de Cox [**5**] sera la source principale de ce chapitre. On utilisera toutefois quelques résultats de [**10**] et [**21**] dans la section 3.1.

3.1. Faisceau cohérent

Soient X une variété affine et M un $\mathbb{C}[X]$-module. Il existe une méthode pour construire un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-module tel que $\mathcal{F}(X) = M$. Pour ce faire, on construira pour toute fonction $f \in \mathbb{C}[X]$ un $\mathbb{C}[X]_f$-module M_f en prenant l'ensemble $\{m/f^l \mid m \in M,\ l \geq 0\}$ quotienté par la relation d'équivalence : $m_1/f^{l_1} \sim m_2/f^{l_2}$ si et seulement s'il existe un $n \geq 0$ tel que $f^{l_2+n} \cdot m_1 = f^{l_1+n} \cdot m_2$ dans M. La somme et le produit par $\mathbb{C}[X]_f$ sont donnés de façon naturelle :$m_1/f^{l_1} + m_2/f^{l_2} = (f^{l_2} \cdot m_1 + f^{l_1} \cdot m_2)/f^{l_1+l_2}$ et $(g/f^{l_1}) \cdot (m/f^{l_2}) = (g \cdot m)/f^{l_1+l_2}$.

À noter que, pour l'anneau $\mathbb{C}[X]_f$ fixé, cette définition ne dépend pas du choix de f. En effet, si $f' \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $\mathbb{C}[X]_f = \mathbb{C}[X]_{f'}$, alors il existe des fonctions $g,g' \in \mathbb{C}[X]$ et des entiers $n,n' \geq 0$ tels que $1/f = g/f'^n$ et $1/f' = g'/f^{n'}$. En particulier, on aura des isomorphismes naturels $m/f^l \mapsto g^l \cdot m/f'^{nl}$ et $m/f'^l \mapsto g'^l \cdot m/f^{n'l}$.

En particulier, si $f,g \in \mathbb{C}[X]$, on a un homomorphisme naturel h de module de M_f dans M_{fg} : $h(m/f^l) \doteq (g^l \cdot m)/(fg)^l$ qui sera effectivement tel que $h(x+y) = h(x) + h(y)$ et que pour tout $r \in \mathbb{C}[X]_f \subseteq \mathbb{C}[X]_{fg}$, $h(r \cdot x) = r \cdot h(x)$.

On souhaiterait définir un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-modules tel que $\mathcal{F}(X_f) = M_f$ pour tout $f \in \mathbb{C}[X]$ où les restrictions seraient les homomorphismes h. Comme les ouverts X_f forment une base de la topologie de X, on peut tout de même calculer les fibres que devraient avoir ce faisceau : pour tout $x \in X$, $\mathcal{F}_x$ sera l'ensemble $\{m/f \mid m \in M$ et $f \in \mathbb{C}[X]$ tel que $f(x) \neq 0\}$ quotienté par la relation d'équivalence $m_1/f_1 \sim m_2/f_2$ si et seulement s'il existe $g \in \mathbb{C}[X]$ avec $g(x) \neq 0$ tel que $(gf_2) \cdot m_1 = (gf_1) \cdot m_2$ dans M.

Comme dans l'annexe A.2, pour chaque $x \in X$, on définit la germe de $s = m/f^l \in M_f$ où $f(x) \neq 0$ (ce qui est équivalent à dire que $x \in X_f$) par $s_x = m/f^l \in \mathcal{F}_x$. Cela nous donne une section $\tilde{s}(x) \doteq s_x$ qui va de X_f vers $\tilde{\mathcal{F}} \doteq \bigsqcup_{x\in X} \mathcal{F}_x$. On prendra alors la topologie la plus fine qui garde toutes les fonctions $\tilde{s}$ continues et on définira $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ (pour $U \subseteq X$ ouvert) comme le $\mathcal{O}_X(U)$-module des sections $f : U \to \tilde{\mathcal{F}}$ continues. Cela nous donnera un faisceau avec les restrictions évidentes.

Les homomorphismes $M_f \to \tilde{\mathcal{F}}(X_f)$ qui envoient s vers $\tilde{s}$ seront en fait des isomorphismes pour tout $f \in \mathbb{C}[X]$. Pour le démontrer, il suffit de réutiliser la preuve de la proposition A.2, de se rappeler que les X_f forment une base de la topologie de X et d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soient $f \in \mathbb{C}[X]$ et une collection de $f_\alpha \in \mathbb{C}[X]$ tels que $X_f = \bigcup_{\alpha\in\Delta} X_{f_\alpha}$. Prenons des $s_\alpha = m_\alpha/f_\alpha \in M_{f_\alpha}$ tels que pour tout $\alpha,\beta \in \Delta$, il existe $n \geq 0$ tel que $(f_\alpha^n f_\beta^{n+1}) \cdot m_\alpha = (f_\beta^n f_\alpha^{n+1}) \cdot m_\beta \in M$. Alors, il existe un unique $s = m/f^l \in M_f$ tel que pour tout $\alpha \in \Delta$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $(f^k f_\alpha^{k+1}) \cdot m = (f_\alpha^k f^{k+l}) \cdot m_\alpha \in M$.*

Démonstration. Comme $X_f = \bigcup_{\alpha\in\Delta} X_{f_\alpha}$, on a que $\mathbf{V}(f) = \bigcap_{\alpha\in\Delta} \mathbf{V}(f_\alpha)$. Or, un point sera un point de cette intersection si et seulement si c'est un zéro de chacun des f_α, ce qui revient à dire que c'est un zéro de l'idéal $\sum(f_\alpha)$ engendré par les f_α. Donc $\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}(\sum(f_\alpha))$. En particulier, f sera dans le radical de cet idéal : il existe un entier $l \geq 0$ tel que $f^l \in \sum(f_\alpha)$. Il existe donc un sous-ensemble fini $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subseteq \Delta$ et des fonctions $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{C}[X]$ tels que $f^l = \sum_{i=1}^r h_i f_i$ (où $f_i \doteq f_{\alpha_i}$).

En particulier, $X_{f^l} = X_f = \bigcup_{i=1}^r X_{f_i}$. En effet, la première égalité découle directement de la définition des ouverts principaux. Quant à la deuxième égalité, l'inclusion de droite à gauche est évidente par les hypothèses du lemme. Pour l'inclusion de gauche à droite, il suffit de remarquer que si $f(x) \neq 0$ (c'est-à-dire que $x \in X_f$), alors il faut que $f_i(x) \neq 0$ pour au moins un des i (et donc que $x \in X_{f_i}$). Nous nous concentrerons donc sur le cas où Δ est fini pour le moment.

Comme notre ensemble Δ est fini, on peut prendre k suffisamment grand pour que pour tout $i,j \in [r]$, $(f_i^k f_j^{k+1}) \cdot m_i = (j_j^k f_i^{k+1}) \cdot m_j$. Comme $X_{f_i^{k+1}} = X_{f_i}$, on peut changer l'entier l et les fonctions h_i de sorte que $f^l = \sum_{i=1}^r h_i f_i^{k+1}$. On posera alors $m \doteq \sum_{i=1}^r (h_i f_i^k) \cdot m_i$ et $s \doteq m/f^l$. On aura donc bien que pour tout $j \in [r]$,

$$(f^k f_j^{k+1}) \cdot m = f^k \cdot \sum_{i=1}^r (h_i f_j^{k+1} f_i^k) \cdot m_i = f^k \cdot \sum_{i=1}^r (h_i f_i^{k+1} f_j^k) \cdot m_j = (f^{k+l} f_j^k) \cdot m_j.$$

Bien que l'on n'ait pas vérifié que cette propriété est vraie pour tous les éléments de Δ, on sait qu'il en existe un pour tout recouvrement fini. Si on arrive à démontrer l'unicité, on aura que cet élément est partout le même et donc qu'il existe aussi pour un recouvrement quelconque.

Supposons donc qu'on a $s_1 = m_1/f^{l_1}$ et $s_2 = m_2/f^{l_2}$ de tels éléments. On a que pour tout $\alpha \in \Delta$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$$(f_\alpha^{k+1} f^k) \cdot (f^{l_2} \cdot m_1 - f^{l_1} \cdot m_2) = (f_\alpha^k f^k) \cdot (f^{l_1+l_2} \cdot m_\alpha - f^{l_1+l_2} \cdot m_\alpha) = 0.$$

Prenons alors l'idéal (non-vide) I des $g \in \mathbb{C}[X]$ tels que $g \cdot (f^{l_2} \cdot m_1 - f^{l_1} \cdot m_1) = 0$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, comme $X_{f_\alpha} \subseteq X_f$, on a que pour tout entier $k > 0$ et tout entier $l \geq 0$, $X_{f_\alpha^k f^l} = X_{f_\alpha}$. On a alors montré que $\mathbf{V}(I) \subseteq \mathbf{V}(f_\alpha^{k+1} f^k) = \mathbf{V}(f_\alpha)$ et donc que $X_{f_\alpha} \cap \mathbf{V}(I) = \emptyset$. En prenant l'union des X_{f_α}, on obtient que $X_f \cap \mathbf{V}(I) = \emptyset$. La fonction f s'annule donc sur tout $\mathbf{V}(I)$ et est contenu dans $\sqrt{I}$: il existe $n \geq 0$ tel que $f^{n+l_2} \cdot m_1 - f^{n+l_1} \cdot m_2 = 0$. En particulier, $s_1 = s_2$. Ceci conclut notre preuve. □

On laissera le lecteur vérifier que ce lemme est suffisant pour dire que nos homomorphismes de M_f vers $\tilde{\mathcal{F}}(X_f)$ sont bijectifs. Une conséquence de ceci est qu'il n'y a qu'un seul faisceau (à isomorphisme près) $\mathcal{F}$ sur X tel que $\mathcal{F}(X_f) = M_f$ pour tout $f \in \mathbb{C}[X]$ (avec les restrictions qu'on a décrit). On le dénotera alors par $\tilde{M}$. À noter que notre construction nous permet aussi d'affirmer que $\tilde{M}$ est un $\mathcal{O}_X$-module.

Définition. Soit X une variété algébrique et soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules sur X. On dira que $\mathcal{F}$ est *quasi-cohérent* si pour tout ouvert affine U_α, il existe un $\mathbb{C}[U_\alpha]$-module M_α tel que $\mathcal{F}|_{U_\alpha} = \tilde{M}_\alpha$.

On dira qu'il est *cohérent* si chaque module M_α est de type fini.

On vera plus loin que cette condition nous garantit de pouvoir utiliser la cohomologie de Čech dans nos calculs. Pour le démontrer, on aura besoin de quelques lemmes.

Le premier lemme est un résultat connu de l'algèbre commutative :

Lemme 3.2 (Artin-Rees)**.** *Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R, M un R-module de type fini et N un sous-module de M. Alors, il existe un entier $k > 0$ tel que pour tout $n \geq k$, on a :*

$$(I^n M) \cap N = I^{n-k}((I^k M) \cap N)$$

où I^n est l'idéal engendré par les produits de n éléments de I et $I^n M$ est l'image dans M du produit de I^n sur M.

Bien que la preuve de ce lemme ne soit pas très complexe, elle nécessite l'introduction de nouveaux concepts. On acceptera donc simplement ce résultat. Le lecteur sera redirigé vers [**1**, Cor. 10.10] ou [**6**, Lem. 5.1] pour la preuve de ce lemme.

Lemme 3.3. *Soient R un anneau noethérien, I un idéal de R et M un R-module à gauche injectif. Alors le sous-module suivant est aussi injectif :*

$$N \doteq \{m \in M \mid I^n m = 0 \textit{ pour un certain entier } n > 0\}.$$

Démonstration. Par la proposition 2.1, il nous suffit de montrer que pour tout idéal J de R, l'homomorphisme $\mathrm{Hom}(R,N) \to \mathrm{Hom}(J,N)$ induit par l'inclusion $J \subseteq R$ est surjectif. Prenons alors un $f \in \mathrm{Hom}(J,N)$.

Pour chaque élément $j \in J$, il existe un entier $n > 0$ tel que $I^n f(j) = 0$(par définition de N). L'idéal J étant engendré par un nombre fini d'éléments (car R est noethérien), on peut supposer que l'entier n est tel que $I^n f(j) = 0$ pour tout $j \in J$.

Par le lemme précédent (où les modules M et N de ce lemme sont respectivement l'anneau R et l'idéal J), il existe un entier $k > 0$ tel que $I^m \cap J = I^{m-k}(I^k \cap J)$ pour tout entier $m \geq k$. Alors, pour tout $m \geq n + k$, on a :

$$f(I^m \cap J) = f(I^{m-k}(I^k \cap J)) = I^{m-k} f(I^k \cap J) \subseteq I^{m-k} f(J) = 0.$$

C'est-à-dire que f induit un homomorphisme $\bar{f} : J/(J \cap I^m) \to N \subseteq M$. Le module M étant injectif, cet homomorphisme se prolonge à un homomorphisme $\bar{g} : R/I^m \to M$. Posons $g \doteq \bar{g} \circ p : R \to M$ où p est la projection de R dans R/I^m.

Alors, pour tout $r \in R$, on a que $I^m g(r) = g(I^m r) \subseteq g(I^m) = \bar{g}(\bar{0}) = 0$, c'est-à-dire que $g(r) \in N$. C'est donc en fait un homomorphisme dans $\mathrm{Hom}(R,N)$ et la façon dont on a construit g nous garantit que c'est un prolongement de f. On en conclut que N est injectif. $\square$

Lemme 3.4. *Soient X une variété affine et M un $\mathbb{C}[X]$-module injectif. Si l'anneau $\mathbb{C}[X]$ est noethérien, alors le faisceau $\tilde{M}$ sur X est flasque.*

Démonstration. Commençons par montrer que les restrictions $\tilde{M}(X) \to \tilde{M}(X_f)$ sont surjectives pour tout $f \in \mathbb{C}[X]$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout entier $k \geq 0$ et tout $m \in M$, il existe un entier $n \geq 0$ et un $m' \in M$ tel que $f^{n+k} \cdot m' = f^n \cdot m$.

Soit l'idéal $I \doteq \{g \in \mathbb{C}[X] \mid f^n g = 0 \text{ pour un entier } n > 0\}$. Si $I = \mathbb{C}[X]$, alors il existe un $n > 0$ tel que $f^n 1 = 0$. Donc, f est un élément nilpotent et $M_f = 0$. Notre restriction est donc trivialement surjective.

Si $I \subsetneq \mathbb{C}[X]$, alors I est de type fini (car $\mathbb{C}[X]$ est noethérien) et il existe un entier n tel que $f^n I = 0$. Alors, l'homomorphisme $\phi : \mathbb{C}[X]/I \to \mathbb{C}[X]$ défini par $[g] \mapsto f^{n+k} g$ (où $[g]$ est la classe d'équivalence de g dans $\mathbb{C}[X]/I$) est injectif. Définissons alors $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[X]/I, M)$ par $\varphi([g]) \doteq (g f^n) \cdot m$. Comme M est injectif et que ϕ est un homomorphisme injectif, il doit exister $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[X],M)$ tel que $\psi \circ \phi = \varphi$. Soit $m' \doteq \psi(1)$. Alors, on aura bien que :

$$f^n \cdot m = \varphi([1]) = \psi(\phi([1])) = \psi(f^{n+k}) = f^{n+k} \cdot m'$$

où la dernière égalité provient du fait que, comme on l'a mentionné dans la section 2.1, les éléments de $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}[X],M)$ ont tous la forme $g \mapsto g \cdot m'$ pour un m' fixé (qui sera la valeur de cet homomorphisme en 1).

On peut donc écrire tout élément m/f^k de M_f comme $m'/1$ avec $m' \in M$. Notre restriction est donc bien surjective.

Maintenant, nous allons démontrer que la restriction de $\tilde{M}(X)$ à $\tilde{M}(U)$ est surjective pour tout ouvert $U \subseteq X$.

Soit $\xi \in \tilde{M}(U)$. On cherche $\eta \in M$ tel que $\eta|_U = \xi$. Prenons un ouvert principal $X_1 \doteq X_{f_1} \subseteq U$ tel que $\xi|_{X_1} \neq 0$. (Si cet ouvert n'existe pas, alors $\xi = 0$ et on peut prendre $\eta = 0$.) Par ce qu'on vient de démontrer, il existe $\eta_1 \in M$ tel que $\eta_1|_{X_1} = \xi|_{X_1}$ et donc que $(\xi - \eta_1|_U)|_{X_1} = 0$. Si $\eta_1|_U = \xi$, on a terminé.

Sinon, on posera $\mathcal{F}_1$ le sous-préfaisceau de $\tilde{M}$ défini par : $\mathcal{F}_1(V) \doteq \{m \in \tilde{M}(V) \mid m|_{V\cap X_1} = 0\}$ pour tout ouvert $V \subseteq X$. C'est clairement un sous-préfaisceau. De plus, si $V = \bigcup_i V_i$ (avec les V_i ouverts) et si on a des sections $s_i \in \mathcal{F}_1(V_i)$ coïncidant sur les intersections, alors le recollement s existe dans $\tilde{M}$. Or, on peut aussi écrire $V \cap X_1 = \bigcup_i (V_i \cap X_1)$ et $s|_{V\cap X_1}$ sera un recollement des $s_i|_{V_i\cap X_1} = 0$. Par unicité du recollement, il faut que $s|_{V\cap X_1} = 0$ et donc que $s \in \mathcal{F}_1(V)$. On a donc un faisceau.

Soit $N_1 \doteq \mathcal{F}_1(X)$. Remarquons que pour tout $g \in \mathbb{C}[X]$, $(N_1)_g$ est l'ensemble des m/g^n où $m \in N_1$ et $n \geq 0$ avec la même relation d'équivalence que M_g. On peut donc le voir comme un sous-module de de M_g. Comparons-le avec le sous-module $\mathcal{F}_1(X_g)$.

Un élément $m/g^n \in M_g$ sera dans $(N_1)_g$ si et seulement si $g^k m|_{X_1} = 0$ pour un certain $k \geq 0$ (ce qui équivaut à dire qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $(gf_1)^k \cdot m = 0$). Un élément de M_g sera dans $\mathcal{F}_1(X_g)$ si et seulement si $(m/g^n)|_{X_{gf_1}} = 0$ (ce qui équivaut à dire qu'il existe un entier $l > 0$ tel que $(f_1^{n+l} g^l) \cdot m = 0$). En prenant $k = n + l$, on obtient clairement que $\mathcal{F}_1(X_g) \subseteq (N_1)_g$. À l'inverse, si on prend $l = k$, on obtient que $(N_1)_g \subseteq F_1(X_g)$. On a donc l'égalité entre ces deux sous-modules.

Par unicité du faisceau $\tilde{N}_1$, on a donc que $\tilde{N}_1 = \mathcal{F}_1$. De plus, on a montré que $N_1 = \{m \in M \mid f_1^n \cdot m = 0 \text{ pour un certain entier } n > 0\}$ qui est injectif par le lemme précédent.

De là, on refait ce qu'on vient de faire : on sait que $\xi - \eta_1|_U \in \tilde{N}_1(U)$ et on veut montrer qu'il existe $\eta \in N_1 \subseteq M$ tel que $\eta|_U = \xi - \eta_1|_U$. On prend donc un ouvert principal $X_2 \doteq X_{f_2} \subseteq U$ tel que $(\xi - \eta_1|_U)|_{X_2} \neq 0$. Il existera alors $\eta_2 \in N_1$ tel que $(\xi - \eta_1|_U - \eta_2|_U)|_{X_2} = 0$. Si $\xi = \eta_1|_U + \eta_2|_U$, on a terminé.

Sinon, on pose $\mathcal{F}_2$ le sous-faisceau de $\tilde{N}_1$ des sections qui, lorsque restreintes à X_2, s'annulent. On démontre que $\mathcal{F}_2 = \tilde{N}_2$, où $N_2 = \mathcal{F}_2(X) = \{m \in N_1 \mid f_2^n \cdot m = 0 \text{ pour un certain entier } n > 0\}$. Puis, on répète encore l'algorithme.

À chaque étape, la section $\xi - \eta_1|_U - \ldots - \eta_k|_U$ s'annule sur $Y_k \doteq X_1 \cup \ldots \cup X_k$. Or, le fait de prendre à chaque fois une fonction f_k tel que $(\xi - \eta_1|_U - \ldots - \eta_{k-1}|_U) \neq 0$ signifie qu'on a alors une chaîne strictement croissante d'ouverts :$Y_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_k \subseteq \ldots$. Celle-ci correspond à une chaîne décroissante de fermés : $X \setminus Y_1 \supsetneq \ldots \supsetneq X \setminus Y_k \supsetneq \ldots$. On obtient alors une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{C}[X]$: $\mathbf{I}(X \setminus Y_1) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbf{I}(X \setminus Y_k) \subsetneq \ldots$. Or, $\mathbb{C}[X]$ est nilpotent. Cette chaîne ne peut donc pas être infinie !

À un certain moment, il était donc impossible de trouver un ouvert principal $X_{k+1} = X_{f_{k+1}} \subseteq U$ tel que $(\xi - \eta_1|_U - \ldots - \eta_k|_U)|_{X_k} \neq 0$. En recouvrant U par des ouverts principaux, on a donc que $\xi = \eta_1|_U + \ldots + \eta_k|_U = (\eta_1 + \ldots + \eta_k)|_U$, ce qui nous permet de conclure. $\square$

Nous sommes donc prêts à démontrer notre théorème :

Théorème 3.5. *Soit X une variété algébrique et soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Alors pour tout ouvert affine U_α et pour tout entier $i > 0$, $H^i(U_\alpha, \mathcal{F}) = 0$.*

Démonstration. On sait qu'il existe un $\mathbb{C}[U_\alpha]$-module M_α tel que $\mathcal{F}_{U_\alpha} = \tilde{M}_\alpha$. Il nous faut donc montrer que $H^i(U_\alpha, \tilde{M}_\alpha) = 0$ pour tout $i > 0$.

Prenons alors une résolution injective du module M_α :

$$0 \longrightarrow M_\alpha \xrightarrow{\iota} N_0 \xrightarrow{d_0} N_1 \xrightarrow{d_1} N_2 \xrightarrow{d_2} \ldots$$

C'est-à-dire que chaque des N_i est un $\mathbb{C}[U_\alpha]$-module et que la suite ci-haut est exacte. Une telle résolution existe, car on a montré dans la section 2.1 que les R-modules ont suffisamment d'injectifs. On la construira donc de la même façon que pour la résolution injective de faisceaux de la section 2.2.

Remarquons qu'un homomorphisme φ entre deux $\mathbb{C}[U_\alpha]$-modules M et N nous donne un homomorphisme φ_f entre M_f et N_f pour chaque $f \in \mathbb{C}[U_\alpha]$: on envoit chaque m/f^n vers $\varphi(m)/f^n$. En particulier, cela induit des homomorphismes entre chaque fibre et donc un morphisme de faisceaux $\tilde{\varphi} : \tilde{M} \to \tilde{N}$ où $\tilde{\varphi}((U_\alpha)_f) = \varphi_f$.

On a donc une suite de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \tilde{M}_\alpha \xrightarrow{\tilde{\iota}} \tilde{N}_0 \xrightarrow{\tilde{d}_0} \tilde{N}_1 \xrightarrow{\tilde{d}_1} \tilde{N}_2 \xrightarrow{\tilde{d}_2} \ldots$$

Cette suite est en faite exacte.

En effet, soit $\varphi : M \to N$ et $\psi : L \to M$ deux homomorphismes de $\mathbb{C}[U_\alpha]$-modules tels que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$. On veut montrer que l'exactitude est passée aux morphismes $\tilde{\psi}$ et $\tilde{\varphi}$. Il suffira donc de montrer que $\mathrm{Im}(\psi_x) = \mathrm{Ker}(\varphi_x)$ pour tout $x \in U_\alpha$. Tout d'abord, on sait déjà que $\varphi_f \circ \psi_f = 0$ pour tout f. L'homomorphisme induit par la composition sur les fibres est donc aussi nul : $\varphi_x \circ \psi_x = 0$ et on a l'inclusion de gauche à droite.

Pour l'inclusion inverse, prenons $s_x \in \mathrm{Ker}(\varphi_x)$. Il existera alors un ouvert principal X_f contenant x et un représentant $s = m/f^n \in M_f$ de s_x tel que $\varphi_f(s) = \varphi(m)/f^n = 0$ (dans M_f). Il existe donc un entier $k > 0$ tel que $0 = f^k \cdot \varphi(m) = \varphi(f^k \cdot m)$ et l'élément $f^k \cdot m$ est dans $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\psi)$: il existe $m' \in L$ tel que $\psi(m') = f^k \cdot m$. En particulier, $\psi_f(m'/f^{k+n}) = \psi(m')/f^{k+n} = (f^k \cdot m)/f^{k+n} = m/f^n$. En retournant aux germes, on a donc que $\psi_x((m'/f^{k+n})_x) = \varphi_x(s_x)$ et on a bien l'exactitude. Or, l'exactitude sur les fibres nous garantit qu'on a l'exactitude entre les faisceaux.

De plus, remarquons que le théorème de la base de Hilbert mentionné à la section 1.1 dit que $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est noethérien. En particulier, en plongeant U_α dans $\mathbb{C}^n$ (pour un certain n), $\mathbb{C}[U_\alpha] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_]/\mathbf{I}(U_\alpha)$ sera aussi noethérien. On peut alors appliquer le lemme précédent pour affirmer que les faisceaux $\tilde{N}_i$ sont tous flasques.

Maintenant qu'on a montré que notre suite est un fait une résolution flasque du faisceau $\tilde{M}$, on sait que les groupes de cohomologie obtenus par cette résolution sont isomorphes aux groupes de cohomologie de $\tilde{M}$. La suite des modules de sections globales $\Gamma(U_\alpha, \cdot)$ étant elle aussi exacte, on a bien que $H^i(U_\alpha, \mathcal{F}) = H^i(U_\alpha, \tilde{M}) = 0$ pour tout $i > 0$. □

Comme on l'a mentionné précédemment, c'est exactement la condition de la cohomologie de Čech.

L'autre raison pour laquelle on s'intéresse à de tels faisceaux est la proposition suivante :

Proposition 3.6. *Soient X une variété algébrique normale et D un diviseur de Weil. Alors le faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ est cohérent.*

Démonstration. Soit $M_\alpha \doteq \mathcal{O}_X(D)(U_\alpha)$ le $\mathbb{C}[U_\alpha]$-module. Montrons d'abord qu'il est de type fini. On sait déjà que $\mathcal{O}_X(0)(U_\alpha) = \mathcal{O}_X(U_\alpha) = \mathbb{C}[U_\alpha]$ est noethérien. On cherchera donc un $h \in \mathbb{C}[U_\alpha] \setminus \{0\}$ tel que $h \cdot \mathcal{O}_X(D)(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}[U_\alpha]$.

Écrivons $D = \sum_{i=1}^s a_i D_i$ dans sa décomposition en diviseurs premiers. Comme le support de $D|_{U_\alpha}$, $(D_1 \cup \ldots \cup D_s) \cap U_\alpha$, est une sous-variété de U_α (propre, car X et U_α sont irréductibles), on peut trouver $g \in \mathbb{C}[U_\alpha] \setminus \{0\}$ s'annulant sur chacun des D_i. En particulier, $\nu_{D_i}(g) > 0$ pour tout i et il existera un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $m\nu_{D_i}(g) > a_i$ pour tout i. Comme $\operatorname{div}(g)|_{U_\alpha} \geq 0$ (car $g \in \mathbb{C}[U_\alpha]$), on a donc que $(\operatorname{div}(g^m) - D)|_{U_\alpha} = (m \operatorname{div}(g) - D)|_{U_\alpha} \geq 0$.

Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{O}_X(D)(U_\alpha) \setminus \{0\}$, on a que :

$$\operatorname{div}(g^m f)|_{U_\alpha} = (m \operatorname{div}(g) + \operatorname{div}(f))|_{U_\alpha} = (m \operatorname{div}(g) - D)|_{U_\alpha} + (\operatorname{div}(f) + D)|_{U_\alpha} \geq 0.$$

On en conclut donc que $g^m f \in \mathcal{O}_X(0)(U_\alpha) = \mathbb{C}[U_\alpha]$.

En posant $h \doteq g^m$, on obtient que $h \cdot \mathcal{O}_X(D)(U_\alpha)$ est un idéal de l'anneau noethérien $\mathbb{C}[U_\alpha]$. Il est donc engendré par un nombre fini d'éléments. En divisant ces générateurs par h, on obtiendra que $\mathcal{O}_X(D)(U_\alpha)$ est effectivement de type fini.

Deuxièmement, on doit montrer que $\mathcal{O}_X(D)|_{U_\alpha} = \tilde{M}_\alpha$. Il suffit de montrer que pour tout $f \in \mathbb{C}[U_\alpha]$, $(M_\alpha)_f = \mathcal{O}_X(D)((U_\alpha)_f)$.

Remarquons d'abord que $M_\alpha \subseteq \mathbb{C}(X)$, qui est un corps. On peut donc écrire $(M_\alpha)_f = \{g/f^m \in \mathbb{C}(X) \mid g \in \mathcal{O}_X(D)(U_\alpha), m \geq 0\}$. Remarquons que f est défini et non-nul sur $(U_\alpha)_f$. Donc, $\operatorname{div}(f)|_{(U_\alpha)_f} = 0$ et $1/f \in \mathcal{O}_X(D)((U_\alpha)_f)$. En particulier, $(M_\alpha)_f \subseteq \mathcal{O}_X(D)((U_\alpha)_f)$.

Pour l'inclusion inverse, écrivons $D|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^s a_i D_i \cap U_\alpha$ et séparons les indices en deux : $\{1, \ldots, d\} = I \sqcup J$ où $i \in I$ si $(U_\alpha)_f \cap D_i \neq 0$ et $i \in J$ sinon. Soit $h \in \mathcal{O}_X(D)((U_\alpha)_f)$. Alors, $(\operatorname{div}(h) + D)|_{(U_\alpha)_f}$ et pour tout $i \in I$, $\nu_{D_i}(h) \geq -a_i$. Il n'y a pas de contraintes sur les $j \in J$, mais on sait que f s'annule sur tous les $D_j \cap U_\alpha$ tels que $j \in J$. On peut donc trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $m\nu_{D_j}(f) + \nu_{D_j}(h) > -a_j$ pour tout $j \in J$.

Comme $\operatorname{div}(f)|_{U_\alpha} \geq 0$, on en conclut que $(\operatorname{div}(f^m h) + D)|_{U_\alpha} \geq 0$. En particulier, en posant $g \doteq f^m h \in \mathcal{O}_X(D)(U_\alpha)$, on a que $h = g/f^m \in (M_\alpha)_f$.

On a donc bien égalité entre ces deux ensembles. Par unicité du faisceau $\tilde{M}_\alpha$, on a que $\mathcal{O}_X(D)|_{U_\alpha} = \tilde{M}_\alpha$ et $\mathcal{O}_X(D)$ est cohérent. □

En particulier, par la proposition 2.26, la cohomologie de Čech obtenue avec le recouvrement $\{U_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ (ou plus simplement, le recouvrement $\{U_\sigma\}$ des cônes σ maximaux) coïncide avec la cohomologie du faisceau $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$.

3.2. Premier théorème

Soient Σ un éventail, X_Σ la variété torique associée et $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ un diviseur de Weil T_N-invariant de X_Σ. Posons $\mathfrak{U}$ comme l'ensemble des ouverts affines U_σ où σ est un cône maximal de Σ. On aimerait faciliter le calcul de la cohomologie de Čech de $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$. Pour ce faire, souvenous-nous que la proposition 1.16 nous dit que, si on pose pour tout $m \in M$ et pour tout $\sigma \in \Sigma$

$$H^0(U_\sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \doteq \begin{cases} \mathbb{C}\chi^m & \text{si } \langle m,v_\rho\rangle \geq -a_\rho \text{ pour tout } \rho \in \sigma(1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors on aura la décomposition

$$H^0(U_\sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = \bigoplus_{m\in M} H^0(U_\sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m.$$

Cela nous donnera une graduation sur les groupes $\check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$. Comme les applications d^p sont des combinaisons de restrictions, ils préservent cette graduation. On a donc une décomposition naturelle :

$$\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = \bigoplus_{m\in M} \check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m.$$

C'est avec cette décomposition qu'on calculera la cohomologie de notre faisceau. On associera à chaque indice de cette décomposition un (ou deux) sous-ensemble(s) de $|\Sigma|$:

Définition. Pour chaque $m \in M$, on définit :

$$V_{D,m} \doteq \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \operatorname{Conv}(v_\rho \mid \rho \in \sigma(1), \langle m,v_\rho\rangle < -a_\rho)$$

où Conv est l'enveloppe convexe.

Si D est $\mathbb{Q}$-Cartier, alors on peut utiliser la fonction de support de D pour définir un ensemble similaire, mais ouvert :

$$V_{D,m}^{\text{supp}} \doteq \{v \in |\Sigma| \mid \langle m,v\rangle < \varphi_D(u)\}.$$

Le premier ensemble est compact, car l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$ est toujours compact et $V_{D,m}$ est un union fini de tels ensembles. La fonction φ_D étant linéaire par morceaux, elle (ainsi que le produit $\langle m,\cdot\rangle$) est continue et l'ensemble $V_{D,m}^{\text{supp}}$ sera alors ouvert dans $|\Sigma|$.

Le plus simple des deux à visualiser est $V_{D,m}$. Il s'agit simplement d'une union de polytopes de dimension au plus $n-1$, recollés le long de leurs faces. Dans $\mathbb{R}^1$, les seules possibilités sont l'ensemble vide, un singleton ou un ensemble à deux points. Ce n'est donc pas très intéressant. Dans $\mathbb{R}^2$, on peut aussi facilement catégoriser les possibilités. L'ensemble $V_{D,m}$ (s'il est non-vide) sera composé d'un nombre fini de points, vaguement répartis en forme de cercle, avec certains des points consécutifs reliés par un segment de droite.

Quant à $V_{D,m}^{\text{supp}}$, c'est un ouvert qui contient clairement $V_{D,m}$. On peut aussi remarquer qu'il a une forme de cône : si $x \in V_{D,m}^{\text{supp}}$, alors $\lambda x \in V_{D,m}^{\text{supp}}$ pour tout $\lambda > 0$. En fait, on pourrait démontrer que $V_{D,m}$ est un rétract par déformation de $V_{D,m}^{\text{supp}}$.

Notre objectif est de relier la cohomologie de notre faisceau et la cohomologie singulière réduite de ces ensembles. Rappelons qu'on a dit que la cohomologie singulière (à coefficients dans un groupe G) d'un espace topologique Y est isomorphe à $H^p(Y,G)$.

On a un homomorphisme naturel de G vers $H^0(Y,G) = G(Y)$ qui envoie chaque $g \in G$ vers la section constante g. On dénote le conoyau de cet homomorphisme par $\tilde{H}^0(Y,G)$. De plus si Y est non-vide, on définira $\tilde{H}^{-1}(Y,G) \doteq H^{-1}(Y,G) = 0$. Sinon, $\tilde{H}^{-1}(\emptyset,G) \doteq G$. Cette dernière définition nous garantit que la suite

$$0 \to \tilde{H}^{-1}(Y,G) \to R \to H^0(Y,G) \to \tilde{H}^0(Y,G) \to 0$$

sera toujours exacte, même lorsque $Y = \emptyset$.

Définition. On appelera la suite de groupes $\{\tilde{H}^p(Y,G)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ (où $\tilde{H}^p(Y,G) \doteq H^p(Y,G)$ si $p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0\}$) la *cohomologie singulière réduite* de Y.

On peut maintenant démontrer le théorème qui sera la base de nos théorèmes d'annulation.

Théorème 3.7. *Soit $D = \sum_\rho a_\rho D_\rho$ un diviseur de Weil T_N-invariant sur X_Σ. Pour tout $m \in M$ et $p \geq 0$, on aura que $\check{H}^p(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\sigma}(D))_m \simeq \tilde{H}^{p-1}(V_{D,m},\mathbb{C})$. De plus, si D est de $\mathbb{Q}$-Cartier, on aura que $\check{H}^p(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\sigma}(D))_m \simeq \tilde{H}^{p-1}(V_{D,m}^{\text{supp}},\mathbb{C})$.*

Démonstration. Pour commencer, remarquons que pour tout $\sigma \in \Sigma$, $V_{D,m} \cap \sigma = \operatorname{Conv}(v_\rho \mid \rho \in \sigma(1), \langle m,v_\rho\rangle < -a_\rho)$. En effet, l'inclusion de droite à gauche découle directement de la définition de $V_{D,m}$. Quant à l'inclusion inverse, prenons un autre cône $\sigma' \in \Sigma$ et des $\rho_1,\ldots,\rho_s \in \sigma'(1)$. S'il existe une combinaison strictement positive des v_{ρ_i} se trouvant dans σ (et donc dans l'intersection $\tau = \sigma \cap \sigma'$ qui est une face de σ'), alors on sait que les ρ_i seront tous dans $\tau \subseteq \sigma$.

Quant à $V_{D,m}^{\text{supp}}$, comme $\langle m,\cdot\rangle$ et φ_D sont linéaires sur σ, l'intersection $V_{D,m}^{\text{supp}} \cap \sigma$ est égale à l'intersection de σ et d'un demi-espace ouvert. En particulier, c'est un convexe fermé de $V_{D,m}^{\text{supp}}$.

On a donc que :

$$\begin{aligned} H^0(U_\sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \neq \{0\} &\Leftrightarrow \langle m,v_\rho\rangle \geq -a_\rho \text{ pour tout } \rho \in \sigma(1) \\ &\Leftrightarrow V_{D,m} \cap \sigma = \emptyset \Leftrightarrow V_{D,m}^{\text{supp}} \cap \sigma = \emptyset \end{aligned}$$

où la première équivalence découle de la définition de $H^0(U_\sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m$ et où la deuxième provient de l'égalité qu'on vient de montrer. La dernière équivalence est en fait avec le deuxième énoncé. En effet, un point de σ ne pourra être dans le demi-espace ouvert que si au moins un des v_ρ le composant y est aussi. En particulier, $V_{D,m}^{\text{supp}}$ sera vide si et seulement si aucun des v_ρ (pour $\rho \in \sigma(1)$ n'est dans $V_{D,m}^{\text{supp}}$ (c'est-à-dire que $\langle m,v_\rho\rangle \geq \varphi_D(v_\rho) = -a_\rho$).

On sait que $V_{D,m} \cap \sigma$ et $V_{D,m}^{\text{supp}} \cap \sigma$ sont convexes (et donc connexes). Il en résulte que $H^0(V_{D,m} \cap \sigma,\mathbb{C}) = H^0(V_{D,m}^{\text{supp}} \cap \sigma,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ lorsque qu'ils sont non-vides. Comme $H^0(U_\sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m = \mathbb{C}\chi^m$ lorsqu'il n'est pas $\{0\}$, on a une suite courte exacte naturelle :

$$0 \to H^0(U_\sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \to \mathbb{C} \to H^0(V_{D,m} \cap \sigma,\mathbb{C}) \to 0$$

et une identique pour $V_{D,m}^{\text{supp}}$, où l'homomorphisme non-trivial est simplement l'identité sur $\mathbb{C}$.

De là, on se concentrera sur $V_{D,m}$, mais le reste de la preuve est identique pour $V_{D,m}^{\text{supp}}$.

Remarquons que si τ est une face de σ, alors les restrictions de $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(U_\sigma)$ à $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(U_\tau)$ et celles de $\mathbb{C}(V_{D,m} \cap \sigma)$ à $\mathbb{C}(V_{D,m} \cap \tau)$ n'ont que quatre formes possibles : les identités sur $\mathbb{C}$ ou sur $\{0\}$ ou les uniques homomorphisme $\{0\} \to \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C} \to \{0\}$. Dans tous les cas, nos suites courtes exactes commutent avec les restrictions.

En prenant la somme directe, on obtient donc pour tout $p \geq 0$ la suite courte exacte :

$$0 \to \bigoplus_{\gamma\in[l]_p} H^0(U_{\sigma_\gamma},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \to \bigoplus_{\gamma\in[l]_p} \mathbb{C} \to \bigoplus_{\gamma\in[l]_p} H^0(V_{D,m} \cap \sigma_\gamma,\mathbb{C}) \to 0$$

qu'on réécrira comme

$$0 \to \check{C}^p(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \to \check{C}^p(\Sigma_{\max},\mathbb{C}) \to \check{C}^p(\mathfrak{V},\mathbb{C}) \to 0$$

où $\Sigma_{\max}$ est le sous-ensemble des cônes maximaux de Σ et $\mathfrak{V}$ est le recouvrement de $V_{D,m}$ par les fermés $V_{D,m} \cap \sigma$ avec σ maximal.

Par le raisonnement qu'on vient de faire, ces homomorphismes commutent avec les opérateurs de bord et, comme dans la section 2.6, on a le diagramme commutatif de la proposition 2.15, ce qui nous donne une suite longue exacte entre les groupes de cohomologie de Čech des ces trois faisceaux. Or, l'espace $|\Sigma|$ est contractible. Ces groupes sont donc tous nuls, sauf le premier qui est $\mathbb{C}(|\Sigma|) = \mathbb{C}$.

On a donc la suite exacte

$$0 \to \check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \to \mathbb{C} \to \check{H}^0(\mathfrak{V},\mathbb{C}) \to \check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \to 0$$

et des isomorphismes $\check{H}^{p-1}(\mathfrak{V},\mathbb{C}) \simeq \check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m$ pour tout $p \geq 2$.

Or, $\mathfrak{V}$ est un recouvrement de fermés de l'espace métrisable $V_{D,m}$ où chaque $V_{D,m} \cap \sigma$ est convexe, et donc contractile (ce qui implique que leurs groupes de cohomologie singulière s'annulent pour $p > 0$). On a donc que

$$\tilde{H}^{p-1}(V_{D,m},\mathbb{C}) = H^{p-1}(V_{D,m},\mathbb{C}) \simeq \check{H}^{p-1}(\mathfrak{V},\mathbb{C}) \simeq \check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m$$

pour tout $p \geq 2$. Il nous reste à montrer l'isomorphisme pour $p \in \{0,1\}$.

Pour cela, nous utiliserons la suite exacte ci-haut. Remarquons d'abord que $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \neq \{0\}$ si et seulement si $V_{D,m} = \emptyset$. En effet, le premier énoncé est équivalent à dire qu'il existe $s_\sigma \in H^0(U_\sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \setminus \{0\}$ pour tout $\sigma \in \Sigma$ maximal tel que leurs intersections coïncident. Comme aucun de ces s_σ ne peut être nul (car aucune fonction rationnelle non-nulle de X_Σ ne s'annule sur un ouvert non-vide de X_Σ), cela implique donc que $H^0(U_\sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \neq 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma$ maximal. La réciproque est aussi vraie, car on peut simplement prendre χ^m.

Par ce qu'on a montré au début de la preuve, cela est équivalent à dire que $V_{D,m} \cap \sigma = \emptyset$ pour tout $\sigma \in \Sigma$ maximal. Comme ces σ recouvrent $|\Sigma|$ (et donc $V_{D,m}$), c'est donc bien équivalent à $V_{D,m} = \emptyset$.

Donc, si $V_{D,m} = \emptyset$, on a que $\check{H}^0(\mathfrak{V},\mathbb{C})$=0 et donc que $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \simeq \mathbb{C} = \tilde{H}^{-1}(V_{D,m},\mathbb{C})$ par la suite exacte. Sinon, on a que $\check{H}^0(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m = 0 = \tilde{H}^{-1}(V_{D,m},\mathbb{C})$. Dans tous les cas, on a notre isomorphisme pour $p = 0$.

Finalement, pour le cas $p = 1$, remarquons que l'homomorphisme $\mathbb{C} \to \check{H}^0(\mathfrak{V},\mathbb{C}) = H^0(V_{D,m},\mathbb{C})$ est exactement l'homomorphisme dont on avait parlé avant ce théorème : celui qui envoie chaque $c \in \mathbb{C}$ vers la section constante c. On a donc que $\check{H}^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m$ est isomorphe au conoyau de cet homomorphisme, qui est exactement $\tilde{H}^0(V_{D,m},\mathbb{C})$. Cela nous donne le dernier isomorphisme et nous permet de conclure. $\square$

À noter ici que $\mathfrak{U}$ est un recouvrement d'ouverts de X_Σ où les groupes de cohomologie des U_σ s'annulent pour $p > 0$. On sait donc que $\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\sigma}(D)) \simeq H^p(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\sigma}(D))$. La graduation des groupes de Čech qu'on vient de calculer dans ce théorème permet aussi de décomposer (et donc de calculer) les groupes de cohomologie de $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$.

Exemple. Pour revenir à ce qu'on a dit plus haut, dans $\mathbb{R}^2$, on peut séparer $V_{D,m}$ en trois possibilités. La première est lorsqu'il est vide : $H^0(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m = \mathbb{C}$ et $H^p(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m = 0$ pour tout $p > 0$.

Le deuxième cas est celui où $V_{D,m}$ est une union disjointe de courbes compactes. Alors, $H^1(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m$ sera un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension égale au nombre de composante connexe, moins une. Tous les autres groupes sont nuls.

Le dernier cas est celui où $V_{D,m}$ est homéomorphe au cercle. Alors, $H^2(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m = \mathbb{C}$ et tous les autres groupes seront nuls.

En général, on peut utiliser ce théorème afin de construire des variétés toriques X_Σ tels que, pour un certain diviseur D et un $m \in M$, on puisse obtenir ce que l'on veut comme groupes de cohomologie $H^p(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m = \mathbb{C}$. Il suffit pour cela de prendre un nombre fini de points sur la sphère $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ et de les relier par des «enveloppes convexes» (projetées sur la sphère). Cette construction est très similaire à celle des CW-complexes compactes, mais avec quelques contraintes supplémentaires : outre le fait d'être contenu dans une sphère, on veut que nos enveloppes convexes ne s'intersectent qu'en leurs faces.

Ces contraintes ne sont toutefois pas trop grandes et nous laissent un ample choix de CW-complexes pour nos constructions. De là, on devra légèrement déformer notre objet pour que les sommets soient tous sur un réseau (qu'on peut choisir) et que les enveloppes soient réellement convexes. Mais on voit ainsi que les groupes $H^p(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m$ peuvent avoir pratiquement n'importe quelles valeurs. Cela ne nous permet toutefois pas de facilement choisir les valeurs de la cohomologie $H^p(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$, mais on peut au moins se convaincre qu'il existe des exemples de variétés toriques et de diviseurs dont la cohomologie a autant de groupes non-nuls (toujours en nombre fini) que l'on veut.

De plus, ce théorème nous permettra de montrer notre premier théorème d'annulation :

Théorème 3.8 (Demazure)**.** *Soit D un diviseur de $\mathbb{Q}$-Cartier T_N-invariant sur X_Σ. Si $|\Sigma|$ est convexe et si φ_D est une fonction convexe, alors pour tout $p > 0$, $H^p(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = 0$.*

Démonstration. Comme φ_D est convexe, pour tout $m \in M$, pour tout $u,v \in V^{\text{supp}}_{D,m}$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a que :

$$\begin{aligned}\langle m,(1-t)u + tv\rangle &= (1-t)\langle m, u\rangle + t\langle m,v\rangle \\ &\qquad < (1-t)\varphi_D(u) + t\varphi_D(v) \leq \varphi_D((1-t)u + tv).\end{aligned}$$

On a donc que $(1-t)u+tv \in V^{\text{supp}}_{D,m}$ et que $V^{\text{supp}}_{D,m}$ est convexe. En particulier, il est contractile et pour tout $p \geq 0$, on a que

$$\check{H}^{p+1}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))_m \simeq \tilde{H}^p(V^{\text{supp}}_{D,m},\mathbb{C}) = 0.$$

On a donc bien que $\check{H}^p(\mathfrak{U},\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ (et donc $H^p(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$) est nul pour tout $p > 0$. □

Bien que la condition que φ_D soit convexe semble plutôt abstraite, elle est équivalente à des propriétés plus concrètes de D lorsque ce-dernier est de Cartier.

La première propriété de ce genre est que pour tout $x \in X_\Sigma$, l'image de $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)(X_\Sigma)$ dans sa fibre $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)_x$ engendre cette-dernière en tant que $\mathcal{O}_{X,x}$-module. On dit alors que $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$ est engendré par ses sections globales.

Pour notre deuxième propriété, il existe une notion de «produit» d'un diviseur de Cartier sur une courbe complète dans X_Σ qui correspond intuitivement au nombre de points dans l'intersection (avec multiplicité). Ici, une courbe est une sous-variété de X_Σ de dimension 1 et elle sera complète si elle est compacte dans la topologie classique (ou, dans le cas d'une sous-variété torique, si le support $|\Sigma'|$ de son éventail est $N'_\mathbb{R}$ au complet). On dira alors que D est *numériquement effectif* (ou *nef*) si son produit avec toute courbe complète irréductible est positif. Cette propriété est équivalente à ce que φ_D soit convexe.

Dans le cas où D est de $\mathbb{Q}$-Cartier avec lD de Cartier (pour $l > 0$), on remarque que φ_D sera convexe si et seulement si $\varphi_{lD} = l\varphi_D$ est convexe. Ce sera donc équivalent à dire que le faisceau $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(lD)$ est engendré par ses sections globales (ce qui n'est toutefois pas forcément le cas pour $\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)$). Par contre, pour la deuxième propriété, on peut définir le produit de D sur la courbe complète C par $D \cdot C \doteq \frac{1}{l}(lD) \cdot C \in \mathbb{Q}$. On aura alors que φ_D est convexe si et seulement si D est nef.

Cox [5, Ch. 6] démontre l'équivalence de ces propriétés (et de plusieurs autres) en détail.

3.3. Deuxième théorème

Avant de présenter notre second théorème d'annulation, on introduira un certain faisceau : le *faisceau canonique*. Il y a plusieurs façons de le définir, mais dans le cas torique, on peut simplement prendre :

$$\omega_{X_\Sigma} \doteq \mathcal{O}_{X_\Sigma}(-\sum_{\rho\in\Sigma(1)} D_\rho).$$

On dénotera par K_{X_Σ} le *diviseur canonique* $-\sum_{\rho\in\Sigma(1)} D_\rho$. On peut voir ce diviseur comme un analogue au diviseur canonique des surfaces de Riemann, celui utilisé dans le théorème de Riemann-Roch. En effet, le théorème de dualité de Serre (que nous ne démontrerons pas) dit que si X_Σ est de dimension n, alors pour tout diviseur de Cartier D, il existe un isomorphisme naturel entre le dual (en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel) de $H^p(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D))$ et $H^{n-p}(X_\Sigma,\mathcal{O}_{X_\Sigma}(K_{X_\Sigma} - D))$.

Notre deuxième théorème concerne ce faisceau.

Théorème 3.9. *Soit Σ un éventail tel que pour tout cône $\sigma \in \Sigma$, les générateurs v_ρ (pour $\rho \in \sigma(1)$) sont linéairement indépendants dans $N_\mathbb{R}$ et soit X_Σ sa variété torique. Si de plus $|\Sigma|$ est fortement convexe, alors pour tout $p > 0$, $H^p(X_\Sigma,\omega_{X_\Sigma}) = 0$.*

Démonstration. D'après la proposition 3.7, on a un isomorphisme de groupes entre $H^p(X_\Sigma,\omega_{X_\Sigma})_m$ et $\tilde{H}^{p-1}(V_{K_{X_\Sigma},m},\mathbb{C})$ pour tout $m \in M$ avec

$$\begin{aligned} V_{K_{X_\Sigma},m} &= \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Conv}(v_\rho \mid \rho \in \sigma(1),\langle m,v_\rho\rangle < 1) \\ &= \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \mathrm{Conv}(v_\rho \mid \rho \in \sigma(1),\langle m,v_\rho\rangle \leq 0) \end{aligned}$$

où la seconde égalité vient du fait que le produit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est toujours un entier.

Comparons cet ensemble avec $W \doteq \{v \in |\Sigma| \setminus \{0\} \mid \langle m,v \rangle \leq 0\}$. Comme $|\Sigma|$ est fortement convexe, $|\Sigma| \setminus \{0\}$ est convexe. L'ensemble W est donc lui aussi convexe car il est simplement l'intersection entre $|\Sigma|\setminus\{0\}$ et le demi-espace $-m^\vee$. De plus, on a clairement que $V_{K_{X_\Sigma},m} \subseteq W$. On veut montrer que cette inclusion est en fait un rétract par déformation.

Pour chaque $\sigma \in \Sigma$ qui intersecte W, posons l'ensemble $A_\sigma \doteq \{\rho \in \sigma(1) \mid \langle m,v_\rho \rangle \leq 0\}$. Comme $W \cap \sigma \neq \emptyset$, l'ensemble A_σ sera aussi non-vide. En effet, si $A_\sigma = \emptyset$, alors pour tout $\rho \in \sigma(1)$, $\langle m,v_\rho \rangle > 0$. Par linéarité, cette inégalité sera aussi vraie pour tout $v \in \sigma$ et σ ne pourra pas intersecter W.

Construisons alors une rétraction $r_\sigma : W \cap \sigma \to V_{K_{X_\Sigma},m} \cap \sigma$. Notre condition sur σ nous garantit que tout élément $v \in \sigma$ s'écrit de façon unique comme $v = \sum_{\rho\in\sigma(1)} \lambda_\rho v_\rho$, avec chaque λ positif. On définira alors pour tout $v \in W \cap \sigma$, $r_\sigma(v) \doteq \left(\sum_{\rho\in A_\sigma} \lambda_\rho\right)^{-1} \sum_{\rho\in A_\sigma} \lambda_\rho v_\rho$. La somme $\sum_{\rho\in A_\sigma} \lambda_\rho$ n'est jamais nulle, car sinon, x serait une combinaison positive de v_ρ telle que $\langle m,v_\rho \rangle > 0$, ce qui est impossible car $\langle m,v \rangle \leq 0$ et $v \neq 0$. De plus, les coefficients de $r_\sigma(v)$ somment à 1 et on aura que $r_\sigma(v) \in \mathrm{Conv}(v_\rho \mid \rho \in A_\sigma) = V_{K_{X_\Sigma},m} \cap \sigma$. (On a montré cette égalité au début de la preuve de la proposition 3.7.) Notre fonction est donc bien définie.

Si $v \in V_{K_{X_\Sigma},m} \cap \sigma = \mathrm{Conv}(v_\rho \mid \rho \in A_\sigma)$, alors $v = \sum_{\rho\in A_\sigma} \lambda_\rho v_\rho$ avec $\sum_{\rho\in A_\sigma} \lambda_\rho = 1$. On aura donc bien que $r_\sigma(v) = v$ et donc que r_σ est une rétraction. L'homotopie $r_{\sigma,t}(v) \doteq (1-t)v + tr_\sigma(v) \in W \cap \sigma$ nous dit que c'est même une rétraction par déformation.

Remarquons ensuite que si τ est une face de σ, alors la restriction de r_σ (et donc de $r_{\sigma,t}$) à $W \cap \tau$ est exactement r_τ (respectivement, $r_{\tau,t}$). En effet, on a que $A_\tau = A_\sigma \cap \tau(1)$. On a aussi que si $v \in \tau$, alors $\lambda_\rho = 0$ pour tout $\rho \in A_\sigma \setminus A_\tau$. Le reste en découle directement.

On peut donc recoller les rétractions r_σ (et leurs homotopies $r_{\sigma,t}$) en une rétraction $r : W \to V_{K_{X_\Sigma},m}$ (respectivement en une homotopie $r_t : W \to W$). L'homotopie $r_t(v) = (1-t)v + tr(v)$ nous confirme que r sera une rétraction par déformation entre W et $V_{K_{X_\Sigma}}$.

Par les propriétés de la cohomologie singulière, leurs groupes de cohomologie (réduites) seront isomorphes. On aura donc que $H^p(X_\Sigma,\omega_{X_\Sigma}) \simeq \tilde{H}^{p-1}(V_{K_{X_\Sigma},m},\mathbb{C}) \simeq \tilde{H}^{p-1}(W,\mathbb{C})$ qui est nul pour $p > 0$ car W est convexe, donc contractile. Comme tous les termes de la décomposition de $H^0(X_\Sigma,\omega_{X_\Sigma})$ sont nuls, il le sera aussi. $\square$

La condition que les v_ρ d'un cône σ soient linéairement indépendants est équivalente à simplement dire qu'on peut engendrer σ par des éléments linéairement indépendants (ou par $\dim(\sigma)$ éléments). On dit alors que σ est simplicial. Lorsque tous les cônes de Σ sont simpliciaux, on dira que Σ est lui-même simplicial.

Le cas principal où ce théorème est utilisé est lorsque qu'on veut découper un cône σ en plusieurs cônes simpliciaux. Ce sera le cas entre autres avec les résolutions de singularités $\varphi : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$. On utilisera ce théorème pour démontrer le théorème de Grauert-Riemenschneider disant que, sous certaines conditions, l'image directe $\varphi_*(\omega_{X_\Sigma})$ sera isomorphe à $\omega_{X_{\Sigma'}}$.

Annexe A

FAISCEAU

Cette annexe introduit la théorie des faisceaux et ses résultats importants (du moins, importants pour nous). Les sources principales sont [8] et [14].

Intuitivement, les faisceaux sont une généralisation du concept de classe de fonctions. À chaque ouvert d'un espace topologique fixé, un faisceau décrira un ensemble de fonctions définies sur cet ouvert. Un faisceau aura aussi des notions de restriction à un plus petit ouvert et de «recollement» de plusieurs fonctions.

A.1. Définitions et propriétés de bases

Définition. Soit X un espace topologie. Un *préfaisceau* $\mathcal{F}$ est une application qui associe à chaque ouvert U de X un ensemble $\mathcal{F}(U)$. On veut aussi que pour chaque paire d'ouverts $U \subseteq V$ de X, il y a une fonction *restriction* ρ_U^V allant de $\mathcal{F}(V)$ vers $\mathcal{F}(U)$ qui respecte les conditions suivantes :

1. $\rho_U^U = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$
2. Si $U \subseteq V \subseteq W$, alors on a $\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W$.

On appellera les éléments de $\mathcal{F}(U)$ les *sections* de $\mathcal{F}$ au-dessus de U. Les notations $\rho_{U,V}(s)$ et $s|_U$ existent aussi pour parler de la restriction $\rho_U^V(s)$.

Généralement, on donnera une structure algébrique aux ensembles $\mathcal{F}(U)$. Dans ce cas, on le mentionnera dans le nom du préfaisceau (e.g., préfaisceau de groupes, préfaisceau d'anneaux ou préfaisceau de R-modules).

Exemple. Pour X et Y deux espaces topologiques fixés et pour tout ouvert $U \subseteq X$, on peut définir $\mathcal{F}(U)$ comme l'ensemble des fonctions continues de U vers Y. Avec les restrictions classiques, on obtiendra un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X. Si Y a de plus une structure algébrique (comme un groupe, un anneau ou un R-module), alors celle-ci induira la même structure sur les ensembles $\mathcal{F}(U)$. On peut facilement vérifier que les restrictions sont des morphismes et donc qu'on a un préfaisceau de cette structure.

Selon les structures de X et Y, on pourrait aussi se restreindre aux fonctions homéomorphiques, différentiables, holomorphes ou méromorphes, etc. Ce seront tous des préfaisceaux.

Exemple. Mais on peut aussi construire des préfaisceaux plus abstraits. Un exemple trivial est de prendre le même ensemble E pour chaque ouvert, avec pour restriction la fonction identité. Clairement, les deux conditions sur les restrictions sont remplies. Si E a de plus une structure algébrique, alors les restrictions seront automatiquement des morphismes et la structure s'étendra au préfaisceau.

On peut aussi modifier un peu cet exemple. On pourrait changer $\mathcal{F}(X)$ pour être $E \times E$ au lieu de E. Les restrictions partant de X (mais n'allant pas vers X) seraient alors la projection sur la première composante. On pourrait aussi changer $\mathcal{F}(\emptyset)$ pour être un singleton. Dans ce cas, les restriction à $\emptyset$ seraient l'unique fonction possible : celle qui envoie tout vers ce point.

Exemple. Prenons un espace topologique X et un ensemble quelconque E et fixons $p \in X$ et $e \in E$. On peut définir le préfaisceau qui associe à chaque ouvert $U \subseteq X$ l'ensemble E si $p \in U$ et le singleton $\{e\}$ sinon. Les restrictions sont l'identité si p est contenant dans les deux (ou aucun des) ouverts. Ce sera l'unique fonction qui envoie tous vers e sinon p n'est contenu que dans le plus grand ouvert.

On qualifiera ce préfaisceau de *gratte-ciel*. On le note parfois par E_p.

Les conditions d'un préfaisceau étant plutôt simples, il n'est pas difficile de construire des exemples. On recommandera au lecteur qui appréhende ce concept pour la première fois d'essayer de construire quelques exemples par lui-même.

On peut voir l'ensemble des ouverts de X comme une catégorie, où les morphismes sont les inclusions. Alors, un préfaisceau sera simplement un foncteur contravariant entre cette catégorie et une autre catégorie de notre choix.

Dans notre cas, nos préfaisceaux seront toujours au minimum des préfaisceaux de groupes abéliens. Le type de faisceau le plus complexe qu'on utilisera se définit comme suit :

Définition. Soit $\mathcal{O}_X$ un préfaisceau d'anneaux sur un espace X. Alors un préfaisceau de $\mathcal{O}_X$-modules est un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur l'espace X tel que pour tout ouvert $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$-module. Pour toute paire d'ouverts $U \subseteq V$, la fonction de restriction $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ est un homomorphisme de groupes abéliens tel que pour tout $r \in \mathcal{O}_X(V)$ et pour tout $s \in \mathcal{F}(V)$, $\rho_U^V(rv) = \rho_U'^V(r)\rho_U^V(v)$ (où ρ' est la fonction restriction de $\mathcal{O}_X$).

Exemple. Si on revient à l'exemple des fonctions méromorphes entre X et $\mathbb{C}$ (où X serait, par exemple, une surface de Riemann), on peut voir ce préfaisceau comme un préfaisceau d'anneaux, à partir de la structure de corps de $\mathbb{C}$. Mais on pourrait le voir aussi comme un préfaisceau de $\mathcal{O}_X$-modules où $\mathcal{O}_X$ serait le préfaisceau des fonctions holomorphes entre X et $\mathbb{C}$. L'action serait simplement le produit.

Définition. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux préfaisceaux sur un espace X. On définit un *morphisme* de préfaisceaux $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ comme une famille de morphismes $\psi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ qui préserve les restrictions. C'est-à-dire qu'on a le diagramme commutatif suivant pour chaque paire d'ouverts $U \subseteq V$ de X :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\psi(V)} & \mathcal{G}(V) \\ \Big\downarrow \rho_U^V & & \Big\downarrow \rho_U^V \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\psi(U)} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

Si nos préfaisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont une structure algébrique, on demandera qu'ils aient la même structure et que les $\psi(U)$ soient des morphismes pour cette structure. Par exemple, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des préfaisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules, on demandera à ce que chaque $\psi(U)$ soit un homomorphisme de $\mathcal{O}_X(U)$-modules.

Définition. Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur un espace X. Un *sous-préfaisceau* de $\mathcal{F}$ est un préfaisceau $\mathcal{G}$ tel que pour tout ouvert $U \subseteq X$, $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ et tel que ses fonctions restrictions soient les restrictions à $\mathcal{G}(U)$ des fonctions restrictions de $\mathcal{F}$. Si on a une structure algébrique associée à notre préfaisceau, on remplacera la condition d'être sous-ensemble par l'équivalent de la structure (e.g., être sous-groupe, sous-anneau ou sous-module). La deuxième condition revient à dire qu'on veut que l'inclusion de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$ soit un morphisme de préfaisceau.

Définition. Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur un espace X. Par la propriété de transivité des restrictions, on peut définir la limite inductive $\mathcal{F}_x \doteq \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$ pour chaque $x \in X$. De façon plus détaillée, $\mathcal{F}_x$ est l'union de tous les $\mathcal{F}(U)$ où $x \in U$, quotientée par la relation d'équivalence suivante : $s \in \mathcal{F}(V)$ et $t \in \mathcal{F}(W)$ sont équivalents si et seulement s'il existe $U \subseteq V \cap W$ tel que $\rho_U^V(s) = \rho_U^W(t)$. On appelera $\mathcal{F}_x$ la *fibre* de $\mathcal{F}$ en x. On notera par s_x l'image de $s \in \mathcal{F}(U)$ (où $x \in U$) dans $\mathcal{F}_x$ et on l'appelera *germe* de s au point x.

En général, les fibres d'un préfaisceau sont difficiles à calculer. Toutefois, il arrive qu'on puisse utiliser des propriétés du préfaisceau pour simplifier les calcul :

Exemple. Soit $\mathcal{F}$ le préfaisceau sur $\mathbb{C}$ des fonctions holomorphes (ou méromorphes) à valeur dans $\mathbb{C}$. On sait que si deux telles fonctions, définies sur le même domaine, coïncident sur un ouvert, alors les deux fonctions coïncident sur tout leur domaine. Les fonctions restrictions sont donc injectives. De plus, on sait que toute fonction holomorphe (respectivement méromorphe) peut s'écrire localement comme une série entière (resp. une série de Laurent).

En combinant ces deux propriétés, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{C}$, la fibre de $\mathcal{F}$ en x est l'anneau des séries de Laurent en x convergeant sur un disque (resp. un disque pointé) centré en x.

On peut définir une structure algébrique sur les fibres à partir de celle du préfaisceau. Par exemple, dans le cas d'un préfaisceau de groupes abéliens, si $s \in \mathcal{F}(U)$ et $t \in \mathcal{F}(V)$ (avec $U,V \subseteq X$ ouverts contenant x), on définit $s_x + t_x \doteq (s|_{U\cap V} + t|_{U\cap V})_x$. Il n'est pas difficile de se convaincre que cette opération est bien définie et donne une structure de groupe abélien à $\mathcal{F}_x$. Dans le cas d'un préfaisceau d'anneau, on définit $s_x \cdot t_x$ similairement.

Dans le cas d'un préfaisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, $\mathcal{O}_{X,x}$ sera la fibre de $\mathcal{O}_X$ en x et on donnera à $\mathcal{F}$ une structure de $\mathcal{O}_{X,x}$-module. On fonctionnera de la même façon : si $r \in \mathcal{O}_X(U)$ et $s \in \mathcal{F}(V)$ (avec $U,V \subseteq X$ ouverts contenant x), on définit $r_x \cdot s_x \doteq (r|_{U\cap V} \cdot s|_{U\cap V})_x$.

Définition. Un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur un espace X est appelé un *faisceau* s'il satisfait aux conditions de recollement. Soit $\{V_i\}_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X et prenons un $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ pour chaque $i \in I$. Si $s_i|_{V_i\cap V_j} = s_j|_{V_i\cap V_j}$ pour tout $i,j \in I$, alors il doit exister un unique $s \in \mathcal{F}(V)$ (où $V = \bigcup_{i\in I} V_i$) tel que $s_i = s|_{V_i}$ pour chaque $i \in I$. La condition d'unicité sera notée F1 et la condition d'existence sera notée F2.

Il est important de noter que dans le cas $I = \emptyset$, nos conditions forcent $\mathcal{F}(\emptyset)$ à toujours être un singleton.

De la même façon qu'avec les préfaiceaux, on peut définir les faisceaux de groupes (ou faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules), les morphismes de faisceaux et les sous-faisceaux. Dans le cas où $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'anneaux, on dira simplement $\mathcal{O}_X$*-module* pour parler d'un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules.

Exemple. Tous les préfaisceaux qu'on a construit à partir de classes de fonctions sont en fait des faisceaux. Du moment que ce qui caractérise ces fonctions est une propriété locale, le recollement devrait toujours exister. Si on a un recouvrement de U par des ouverts et si deux fonctions définies sur U ont les mêmes restrictions sur chacun de ces ouverts, alors leurs valeurs coïncideront en tout point de U. Elles seront donc la même fonction et le recollement sera donc toujours unique.

Exemple. Dans le cas du préfaisceau constant (où $\mathcal{F}(U) = E$ pour tout ouvert $U \subseteq X$), ce ne sera pas un faisceau, car $\mathcal{F}(\emptyset)$ n'est pas un singleton. De même, si on remplace E par $E \times E$ pour $\mathcal{F}(X)$, la condition F1 ne sera pas respectée (mais F2 oui). En effet, toutes les paires (x,y) pour x fixé auront exactement les mêmes restrictions à tout ouvert autre que X.

Pour l'autre modification, il suffit de prendre deux ouverts non-vides et disjoints. Si on prend deux éléments distincts de E pour ces deux ouverts, la restriction à leur intersection, $\emptyset$, coïncidera mais il n'existera pas de recollement. Dans ce cas, ce sera la condition F2 qui n'est pas respectée (mais F1 l'est).

L'exception principal à cet exemple est le cas où E est déjà un singleton : on aura alors un faisceau. (Les modifications ne changeront pas ce faisceau et seront donc aussi des faisceaux.) On dénotera l'unique élément de E, ainsi que le faisceau, par 0 et on l'appellera le *faisceau nul*. Il aura trivialement toutes les structures algébriques qu'on a mentionné jusqu'à présent.

Exemple. Les préfaisceaux gratte-ciels sont en fait des faisceaux. En effet, si p n'est contenu dans aucun des ouverts, alors il n'est pas non plus dans l'union U. L'unique recollement sera alors le seul élément de $\mathcal{F}(U) = \{e\}$.

Si p est contenu dans au moins un des ouverts (et donc dans U), alors les sections de chacun de ces ouverts doivent être le même élément de E (car les restrictions aux intersections coïncident) et le même élément de $E = \mathcal{F}(U)$ sera l'unique recollement.

Il existe plusieurs méthodes pour construire des faisceaux à partir de faisceaux plus simples. Prenons $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux sur un espace X.

On peut définir à partir de $\mathcal{F}$ un faisceau sur l'ouvert $U \subseteq X$: si $V \subseteq U$ est ouvert, alors $\mathcal{F}|_U(V) \doteq \mathcal{F}(V)$. On l'appellera le *faisceau induit* par $\mathcal{F}$ sur U et on le dénotera par $\mathcal{F}|_U$.

On définit la somme directe $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ par $U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$. En définissant les restrictions de la façon naturelle (comme la somme des restrictions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$), on obtiendra un faisceau. De la même façon, si on a une famille de faisceaux $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$, alors on peut définir le produit direct $\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$, du moment que celui-ci existe dans la catégorie image (ce qui est le cas pour les groupes abéliens, les modules et les anneaux). Il sera lui aussi un faisceau.

Soit Y un espace topologique et soit f une fonction continue entre X et Y. Alors, on peut définir un faisceau $\mathcal{H}$ sur Y par $\mathcal{H}(V) \doteq \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ pour tout ouvert $V \subseteq Y$. Pour $U \subseteq V \subseteq Y$ ouverts, la restriction $\mathcal{H}(V) \to \mathcal{H}(U)$ sera simplement la restriction $\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(U))$. On appellera $\mathcal{H}$ l'image directe de $\mathcal{F}$ par f et on le notera par $f_*(\mathcal{F})$.

Si $\mathcal{G}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}$, alors on peut définir le préfaisceau quotient $\mathcal{F}/\mathcal{G}(U) \doteq \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$. (Ici, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ pourrait aussi être des préfaisceaux.) À faire attention : un quotient de faisceau n'est pas forcément un faisceau ; il respectera la condition F1, mais pas nécessairement F2.

Soit U un ouvert de X. Une autre notation pour $\mathcal{F}(U)$ sera $\Gamma(U,\mathcal{F})$. L'application $\Gamma(U,\cdot)$ sera alors un foncteur entre la catégorie des faisceaux de groupes abéliens (resp. faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules) sur X vers la catégorie des groupes abéliens (resp. la catégorie des $\mathcal{O}_X(U)$-modules). De même pour les faisceaux ayant une autre structure. On notera aussi $\Gamma(\mathcal{F})$ pour parler de $\mathcal{F}(X)$.

Soit f un morphisme entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Alors, le préfaisceau $\mathrm{Im}(f)$ défini par $U \mapsto \mathrm{Im}(f(U)) \subseteq \mathcal{G}(U)$ ne sera pas toujours un faisceau. De même, si nos faisceaux sont de groupes abéliens, le préfaisceau $\mathrm{Coker}(f)(U) \doteq \mathrm{Coker}(f(U))$ ne sera pas forcément un faisceau. Toutefois, le préfaisceau $\mathrm{Ker}(f)$ défini par $U \mapsto \mathrm{Ker}(f(U)) \subseteq \mathcal{F}(U)$ sera un faisceau (et donc un sous-faisceau de $\mathcal{F}$).

Il existe par contre des moyens d'en faire des faisceaux.

A.2. Faisceautisation

Un concept important à comprendre est celui de la «faisceautisation» : la construction d'un faisceau à partir d'un préfaisceau.

Prenons $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur un espace X et définissons l'*espace étalé* associé à $\mathcal{F}$ par $\tilde{\mathcal{F}} \doteq \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$. On a une application naturelle $p : \tilde{\mathcal{F}} \to X$ qui envoie $\mathcal{F}_x$ vers x. Aussi, pour chaque $U \subseteq X$ ouvert et chaque $x \in U$, on a une application $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ qui envoie s vers s_x. À chaque $s \in \mathcal{F}(U)$, on peut alors associer une application $\tilde{s} : X \to \tilde{\mathcal{F}}$ qui est définie par $\tilde{s}(x) \doteq s_x$. Celle-ci vérifie $p(\tilde{s}(x)) = x$ pour tout $x \in U$.

Les $\tilde{s}$ sont donc des «sections» (au sens topologique du terme) de la «projection» p et leurs restrictions correspondent aux restrictions des s. En effet, prenons $V \subseteq U$ ouverts dans X et $s \in \mathcal{F}(U)$ et posons $t \doteq \rho_V^U(s)$. Par la définition même de $\mathcal{F}_x$ (pour $x \in V$), on aura que $s_x = t_x$. Donc, $\tilde{t}$ est une fonction définie sur V qui correspond à $\tilde{s}$ sur tout V, c'est donc la restriction de $\tilde{s}$ à V.

De là, si on veut renforcer la comparaison avec les sections topologiques, il faudra donner une topologie à $\tilde{\mathcal{F}}$ rendant les $\tilde{s}$ continues. On prendra simplement la topologie suivante : un sous-ensemble $G \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ est ouvert si et seulement si pour tout $U \subseteq X$ ouvert et pour tout $s \in \mathcal{F}(U)$, $\tilde{s}^{-1}(G)$ est ouvert. Pour se convaincre que cette topologie rend les $\tilde{s}$ continues, il suffit de vérifier que pour toutes sections $\tilde{s}$ et $\tilde{t}$, le domaine maximale sur lequel elles coïncident est ouvert. En effet, $\tilde{s}(x) = \tilde{t}(x)$ si et seulement si il existe un ouvert U dans X contenant x tel que $s|_U = t|_U$ (et donc $\tilde{s}|_U = \tilde{t}|_U$).

De plus, sous cette topologie, l'application p est elle aussi continue. En effet, si $U \subseteq X$ est ouvert, alors

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\substack{V \subseteq U \\ V \text{ ouvert}}} \bigcup_{s \in \mathcal{F}(V)} \tilde{s}(V)$$

où tous les $\tilde{s}(V)$ sont ouverts. Cela montre non seulement que p est continue, mais que c'est un homéomorphisme local.

De là, pour chaque ouvert $U \subseteq X$, notons par $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ l'ensemble des fonctions continues $f : U \to \tilde{\mathcal{F}}$ telles que $p \circ f = \mathrm{Id}_U$ (qu'on appellera sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de U). Cela nous donne un faisceau (qu'on notera aussi $\tilde{\mathcal{F}}$) ayant la même structure algébrique que $\mathcal{F}$. (On définit la structure sur $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ à partir de la structure sur $\mathcal{F}_x$.) Si $U = \emptyset$, il n'y aura qu'une seule section $\emptyset \to \tilde{\mathcal{F}}$.

De plus, l'application $s \mapsto \tilde{s}$ nous donne un morphisme de préfaisceau $\mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$. En effet, on a déjà vérifié que les $\tilde{s}$ sont dans $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ (elles sont continues) et que les restrictions correspondaient. Pour ce qui est de la structure algébrique, le fait que les restrictions de $\mathcal{F}$ soient des morphismes impliquent que l'application $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ en est aussi un.

On appelera $\tilde{\mathcal{F}}$ le faisceau engendré par $\mathcal{F}$.

Exemple. Soit $\mathcal{F}$ le préfaisceau constant ($\mathcal{F}(U) = E$ pour tout ouvert $U \subseteq X$). On peut facilement calculer les fibres. Comme tous les ensembles sont identiques et que les restrictions sont l'identité, la relation d'équivalence revient à : $s \in \mathcal{F}(U)$ est équivalent à $t \in \mathcal{F}(W)$ si et seulement s'ils sont le même élément de E. On se retrouve donc avec les fibres $\mathcal{F}_x = E$ pour tout $x \in X$. L'espace étalé sera alors $\tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x = E \times X$.

À noter qu'on obtient exactement les mêmes fibres (et donc le même espace étalé) avec les deux modifications de ce préfaisceau.

Les images des sections $\tilde{s}$ ont toutes la forme $\{e\} \times U$, pour $e \in E$ et U un ouvert de X. En particulier, la topologie de $\tilde{\mathcal{F}}$ sera : $G \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ sera ouvert si et seulement si pour tout $e \in E$, $G \cap (\{e\} \times X)$ est ouvert.

Prenons un ouvert $U \subseteq X$. S'il est connexe, $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ sera l'ensemble des sections constantes, qu'on peut réécrire comme E. Toutefois, si U n'est pas connexe, une section peut avoir des valeurs différentes sur des parties disconnexes de U et elle restera continue. $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ sera alors un produit de copies de E, une pour chaque composante connexe de U.

Ce qu'on obtient est donc le faisceau des fonctions localement constantes à valeur dans E. On l'appellera tout de même le *faisceau constant* (ou *faisceau simple*) sur X à valeur dans E.

Proposition A.1. *Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau respectant la condition F1, alors l'application $\mathcal{F}(U) \to \tilde{\mathcal{F}}(U)$ est injective pour tout ouvert $U \subseteq X$.*

Démonstration. Soient s et s' deux sections dans $\mathcal{F}(U)$ définissant la même section dans $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ et prenons $x \in U$. Comme $\tilde{s}(x) = \tilde{s}'(x)$, il existe un ouvert $V_x \subseteq U$ contenant x tel que s et s' coïncident sur V_x. En recouvrant U de tels ouverts V_x, on voit que la condition F1 oblige s et s' à être égales. □

Par exemple, si $\mathcal{F}$ est contenu dans un faisceau, alors il respecte F1. On peut donc aussi le voir comme un sous-préfaisceau de $\tilde{\mathcal{F}}$.

Proposition A.2. *$\mathcal{F}(U) \to \tilde{\mathcal{F}}(U)$ est bijectif pour tout ouvert $U \subseteq X$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est un faisceau.*

Démonstration.

- $\Rightarrow$: Dans ce cas, on a un isomorphisme entre un faisceau et $\mathcal{F}$. C'est donc forcément un faisceau.
- $\Leftarrow$: Il nous suffit de montrer que si $\mathcal{F}$ respecte les conditions F1 et F2, alors $\mathcal{F}(U) \to \tilde{\mathcal{F}}(U)$ sera surjectif. Soit $f : U \to \tilde{\mathcal{F}}$ une section. Pour chaque $x \in U$, $f(x) = \tilde{s}(x)$ pour une section s au-dessus d'un voisinage de x. Comme f est continue, $V_x \doteq f^{-1}(\mathrm{Im}(\tilde{s})) = p(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(\tilde{s}))$ est un ouvert de U contenant x. Ainsi, on peut recouvrir U avec des ouverts U_i et trouver des $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tels que $\tilde{s}_i = f$ sur U_i. Comme $\tilde{s}_i = \tilde{s}_j$ sur $U_i \cap U_j$ et comme F1 est respectée, les restrictions de s_i et s_j à $U_i \cap U_j$ doivent être égales. Par la condition F2, il existe $s \in \mathcal{F}(U)$ telle que $s|_{U_i} = s_i$ pour tout i. Donc, $\tilde{s} = f$.

□

En particulier, on peut toujours voir un faisceau comme le faisceau des sections d'un espace au-dessus de X, ce qui explique notre terminologie jusqu'à présent. Cette façon de visualiser les faisceaux nous sera utile plus tard.

Prenons maintenant deux préfaisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur un espace X et un morphisme $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Celui-ci induit un morphisme sur les fibres $\psi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ pour tout $x \in X$ défini ainsi : pour $U \subseteq X$ ouvert contenant x et $s \in \mathcal{F}(U)$, $\psi_x(s_x) \doteq (\psi(U)(s))_x$. Comme ψ commute avec les restrictions, notre fonction ne dépend pas du représentant de s_x et est donc bien définie. De plus, il est claire que si φ est un morphisme de $\mathcal{G}$ vers un autre préfaisceau $\mathcal{H}$, alors $(\varphi \circ \psi)_x = \varphi_x \circ \psi_x$.

On construit ainsi une application ψ entre les espaces étalés $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\mathcal{G}}$ compatible avec les projections et qui est un morphisme sur chaque fibre. De plus, cette fonction est un homéomorphisme local.

En effet, pour tout $\tilde{s}(x) \in \tilde{\mathcal{F}}$ (où $s \in \mathcal{F}(U)$ avec $U \subseteq X$ ouvert), $\tilde{s}(x)$ est contenu dans l'ouvert $\tilde{s}(U)$ qui est envoyé vers $\tilde{\psi} \circ \tilde{s}(U) = \widetilde{\psi(U)(s)}(U)$ par $\tilde{\psi}$. On se retrouve alors avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \tilde{s}(U) \arrow[r, "\tilde{\psi}"] \arrow[dr, "p_{\tilde{\mathcal{F}}}"', "\simeq"] & \widetilde{\psi(U)(s)}(U) \arrow[d, "p_{\tilde{\mathcal{G}}}", "\simeq"'] \\ & U \end{tikzcd}$$

qui implique que $\tilde{\psi}|_{\tilde{s}(U)}$ est un homéomorphisme.

Soit maintenant $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ une fonction continue compatible avec les projections et qui est un morphisme sur les fibres. Par abus de notation, on utilisera aussi $\tilde{f}$ pour parler du morphisme de faisceau $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ défini par $\tilde{f}(t) \doteq \tilde{f} \circ t$. Dans le cas où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux, on a ainsi une correspondance entre les morphismes de faisceaux et les fonctions de ce genre.

Prenons le cas particulier où ψ est l'inclusion. Alors, ψ_x (et donc $\tilde{\psi}$) seront des inclusions. En effet, soient U et V deux ouverts de X contenant x et soient $s \in \mathcal{F}(U)$ et $t \in \mathcal{F}(V)$ tels que $\psi_x(s_x) = \psi_x(t_x)$. Alors, il existe un ouvert $W \subseteq U \cap V$ contenant x tel que $\psi(W)(s|_W) = \psi(W)(t|_W)$. Or, comme $\psi(W)$ est injectif, on a que $s|_W = t|_W$ et donc que $s_x = t_x$. Donc, ψ_x est injectif pour tout x. L'espace étalé $\tilde{\mathcal{F}}$ peut donc être identifié à l'union des images des ψ_x, qui est exactement l'union des images $\tilde{s}(U)$ pour $s \in \mathcal{F}(U) \subseteq \mathcal{G}(U)$. (En particulier, $\tilde{\mathcal{F}}$ est un ouvert dans $\tilde{\mathcal{G}}$.) De là, le morphisme de faisceau $\tilde{\psi}$ qui lui est associé ($\tilde{\psi}(f)(x) = \psi_x(f(x))$) est aussi injectif et nous donne une inclusion du faisceau $\tilde{\mathcal{F}}$ dans $\tilde{\mathcal{G}}$.

Dans le cas où $\mathcal{G}$ est un faisceau (et est donc isomorphe à $\tilde{\mathcal{G}}$), on peut identifier $\tilde{\mathcal{F}}$ à un sous-faisceau de $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{F}$. (Ce sera en fait le plus petit sous-faisceau contenant $\mathcal{F}$.)

Proposition A.3. *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur un espace X respectant la condition F1 et soit $\tilde{\mathcal{F}}$ son faisceau associé. Alors, $\mathcal{F}_x = \tilde{\mathcal{F}}_x$ pour tout $x \in X$.*

Démonstration. On a vu précédemment que la condition F1 nous permet de voir $\mathcal{F}$ comme un sous-préfaisceau de $\tilde{\mathcal{F}}$. Or, on vient de voir que cela nous donne une inclusion $\mathcal{F}_x \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_x$. Il suffit maintenant de remarquer que pour chaque $s_x \in \tilde{\mathcal{F}}_x$ (où $s \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ avec $U \subseteq X$

ouvert contenant x), on peut prendre une section $s' \in \mathcal{F}(V)$ (avec $V \subseteq X$ ouvert contenant aussi x) tel que $s'_x = s(x)$. Comme s est continue, on a un ouvert $W = s^{-1}(\tilde{s}'(V)) \subseteq V \cap U$ contenant x sur lequel s et $\tilde{s}'$ coïncident. On aura donc que $s'|_W$ correspond à $s|_W$ et donc que s'_x correspond à s_x. On a ainsi notre égalité. $\square$

Revenons maintenant sur les préfaisceaux qu'on a construit à la fin de la section précédente : les préfaisceaux quotient, image et conoyau. On peut maintenant construire un faisceau à partir de ces préfaisceaux. Dans le cas du préfaisceau image, le faisceau qui lui est associé sera contenu dans le faisceau d'arrivé. On appelera ces faisceaux les faisceaux quotient, image et conoyau. En général, comme les préfaisceaux ne nous intéressent pas, on ne fera pas la distinction dans la notation.

Exemple. Prenons $\mathcal{F}$ le faisceau constant sur X à valeur dans E et fixons deux points $p,q \in X$. Soit $\mathcal{G}$ le produit des faisceaux gratte-ciels E_p et E_q (c'est-à-dire que $\mathcal{G}(U)$ vaut $E \times E$, $E \times \{e\}$, $\{e\} \times E$ ou $\{(e,e)\}$ dépendamment de si U contient p et/ou q).

Pour chaque ouvert $U \subseteq X$, on peut construire une fonction $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. Pour toute section $s \in \mathcal{F}(U)$, la première composante de $\varphi(U)(s)$ est déterminé par p : s'il n'est pas dans U, ce sera e, sinon ce sera la valeur de s sur la composante connexe de U contenant p. De même, si $q \in U$, la deuxième composante de $\varphi(U)(s)$ sera la valeur de s sur la composante connexe de U contenant q. Sinon, ce sera e.

Il n'est pas très difficile de vérifier que cette famille de fonctions commutent avec les restrictons (et forment donc un morphisme de faisceaux). Il suffit de se concentrer sur si p est retiré de U dans la restriction ou non et si q est retiré de U ou non.

Si X est connexe et de Hausdorff, alors le préfaisceau image de ce morphisme ne sera pas un faisceau. En effet, prenons les deux ouverts $U_p \doteq X \setminus \{q\}$ et $U_q \doteq X \setminus \{p\}$. L'image de $\varphi(U_p)$ sera simplement $E \times \{e\}$ (c'est-à-dire tout $\mathcal{G}(U_p)$) et l'image de $\varphi(U_q)$ sera $\{e\} \times E$ (tout $\mathcal{G}(U_q)$). Or, $\mathcal{G}(U_p \cap U_q) = \{(e,e)\}$ et donc tout choix de section dans $\mathcal{G}(U_p)$ et $\mathcal{G}(U_q)$ devrait être recollable à une section de $\mathcal{G}(X)$. Mais l'image de $\varphi(X)$ est l'ensemble diagonal $\{(x,x) \in E \times E\}$ et ne contient donc pas tous les recollements possibles. La condition F2 n'est pas respectée (mais F1 oui).

Proposition A.4. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux sur l'espace X et soit un morphisme $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Pour tout $x \in X$, l'image du morphisme $\psi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ est $(\mathrm{Im}(\psi))_x$ et, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux de groupes abéliens, son noyau est $(\mathrm{Ker}(\psi))_x$.*

Démonstration. On a défini $\psi_x(s_x) \doteq (\psi(U)(s))_x$ pour tout $s \in \mathcal{F}(U)$ (avec $U \subseteq X$ ouvert contenant x). Un élément de $\mathcal{G}_x$ sera donc dans l'image de ψ_x si et seulement s'il peut s'écrire comme $(\psi(U)(s))_x$, ce qui est exactement la définition de $(\mathrm{Im}(\psi))_x$.

Pour ce qui est du noyau, un élément $s_x \in \mathcal{F}_x$ sera dans le noyau de ψ_x si et seulement si $\psi_x(s_x) = 0$ (par définition). Cela arrivera si et seulement s'il existe un ouvert $U \subseteq X$ contenant x et un représentant $s \in \mathcal{F}(U)$ tels que $\psi(U)(s) = 0$. Or, c'est exactement l'ensemble $(\mathrm{Ker}(\psi))_x$. □

On remarque que par la proposition précédente, $\mathrm{Im}(\psi)$ peut être le préfaisceau ou le faisceau image, cela ne changera pas l'énoncé.

A.3. Suites exactes

Maintenant qu'on a bien défini le faisceau image, on peut parler de suite exacte de faisceaux.

Définition. Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ trois faisceaux de groupes abéliens sur l'espace X et soient $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ et $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ deux morphismes de faisceaux. On dit que la suite

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H}$$

est *exacte* si le faisceau image de ψ est égale au faisceau noyau de φ.

En d'autres termes, il faut d'abord que $\varphi \circ \psi = 0$. Cela nous donnera que le préfaisceau image ψ est contenu dans le faisceau noyau de φ. Pour avoir l'exactitude, il faudra que le faisceau engendré par $\mathrm{Im}(\psi)$, qu'on peut voir comme un sous-faisceau de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, soit exactement $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

On définit de façon similaire une suite exacte à plus de trois faisceaux.

Remarquons aussi qu'on a la suite

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{H}_x$$

pour chaque $x \in X$. Par ce qu'on a montré à la fin de la section précédente, cette suite est exacte.

La réciproque est vraie :

Proposition A.5. *Soit la suite de faisceaux décrite plus haut. Si la suite de fibre*

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{H}_x$$

est exacte pour tout $x \in X$, alors notre suite de faisceaux l'est aussi.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\varphi_x \circ \psi_x = 0$ pour tout $x \in X$. Donc, $\mathrm{Im}(\varphi \circ \psi) = 0$ et $\varphi \circ \psi = 0$.

Regardons maintenant l'inclusion $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. On sait que $(\mathrm{Im}(\psi))_x = (\mathrm{Ker}(\varphi))_x$ pour tout $x \in X$. Alors forcément, le faisceau engendré par $\mathrm{Im}(\psi)$ est exactement le faisceau engendré par $\mathrm{Ker}(\varphi)$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(\varphi)$. □

Quelques définitions sur les morphismes :

Définition. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux de groupes abéliens sur l'espace X et soit $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux.

i) On dit que ψ est *injectif* si $\operatorname{Ker}(\psi) = 0$ (où 0 est le faisceau nul). Une autre façon de le dire est que la suite de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathcal{G}$$

est exacte. Une définition équivalente serait que $\psi(U)$ soit injectif pour tout ouvert $U \subseteq X$.

ii) On dit que ψ est *surjectif* si $\operatorname{Im}(\psi) = \mathcal{G}$. Une autre façon de le dire est que la suite

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

est exacte. Toutefois, cela n'implique pas que les $\psi(U)$ soient tous surjectifs. (Sinon, les préfaisceaux images seraient toujours des faisceaux.)

iii) On dit que ψ est un *isomorphisme* s'il est injectif et surjectif. Une autre façon de le dire est que la suite de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

est exacte. Une définition équivalente serait que $\psi(U)$ soit bijectif pour tout ouvert $U \subseteq X$.

Une petite propriété des suites exactes :

Proposition A.6. *Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ trois faisceaux de groupes abéliens sur l'espace X et soient $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ et $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ deux morphismes de faisceaux tels que la suite*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\ \psi\ } \mathcal{G} \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathcal{H}$$

est exacte. Alors pour tout ouvert $U \subseteq X$, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\ \psi(U)\ } \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\ \varphi(U)\ } \mathcal{H}(U)$$

est elle aussi exacte.

Démonstration. On a déjà fait remarqué que comme ψ est injectif, $\psi(U)$ l'est aussi. Il suffit donc de montrer que $\operatorname{Im}(\psi(U)) = \operatorname{Ker}(\varphi(U))$. Étudions donc le préfaisceau image de ψ qui engendre $\operatorname{Im}(\psi)$. Comme il est contenu dans un faisceau, on sait déjà qu'il respecte la condition F1 des faisceaux. Mais comme ψ est injectif et comme $\mathcal{F}$ est un faisceau, la condition F2 est elle aussi respectée. En effet si on a une collection d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$ et des sections $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tels que pour tout $i,j \in I$, $\psi(U_i)(s_i)|_{U_i\cap U_j} = \psi(U_j)(s_j)|_{U_i\cap U_j}$, alors on obtient que $\psi(U_i \cap U_j)(s_i|_{U_i\cap U_j}) = \psi(U_i \cap U_j)(s_j|_{U_i\cap U_j})$ et, par injectivité de ψ, on a $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$. Par F2, on a une section $s \in \mathcal{F}(\bigcup_{i\in I} U_i)$ qui recolle les s_i. Son image sera donc un recollement pour tous les $\psi(U_i)(s_i)$.

Donc, le préfaisceau image est déjà un faisceau et il est alors égale au faisceau $\mathrm{Im}(\psi)$. On a donc que $\mathrm{Im}(\psi(U)) = \mathrm{Im}(\psi)(U) = \mathrm{Im}(\mathrm{Ker})(U) = \mathrm{Im}(\mathrm{Ker}(U))$, ce qui conclut la preuve. $\square$

On dit alors que le foncteur $\Gamma(U,\cdot)$ est exact à gauche.

Un exemple important de suite exacte est celui de la suite *exacte courte* :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

(où $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des faisceaux sur un espace X).

À partir d'un morphisme injectif $\iota : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$, on peut toujours construire une suite courte exacte. Voyons d'abord $\mathcal{F}$ comme un sous-faisceau de $\mathcal{G}$ et prenons le préfaisceau quotient entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Remarquons qu'il respecte la condition F1.

En effet, soient un ensemble d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$ de X, $U \doteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ et $s \in \mathcal{G}(U)$ tels que pour tout $i \in I$, $s|_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$. Alors, comme toutes ces restrictions coïncident et comme $\mathcal{F}$ est un faisceau, il existe $t \in \mathcal{F}(U)$ tel que $t|_{U_i} = s|_{U_i}$ pour tout $i \in I$. Or, par la condtion F1 de $\mathcal{G}$, cela implique que $s = t \in \mathcal{F}(U)$.

Dans le quotient, cela signifie que si toutes les restrictions aux U_i d'une section s'annulent, alors la section est nulle. C'est une variante de la condition F1 qui est équivalent pour les faisceaux de groupes abéliens.

Donc, le préfaisceau quotient est contenu dans le faisceau qu'il engendre, c'est-à-dire le faisceau $\mathcal{G}/\mathcal{F}$. La projection $\mathcal{G}(U) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ pour chaque ouvert $U \subseteq X$ nous donne un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{F}$ qui sera surjectif. Le noyau de ce morphisme est exactement $\mathcal{F}$ (car le noyau de chaque $\varphi(U)$ est $\mathcal{F}(U)$). On a donc bien que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\ \iota\ } \mathcal{G} \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathcal{G}/\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Prenons maintenant deux faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de groupes abéliens sur un espace X, un morphisme $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ et un sous-faisceau $\mathcal{F}' \subseteq \mathrm{Ker}(\psi) \subseteq \mathcal{F}$. Pour chaque ouvert $U \subseteq X$, l'inclusion $\mathcal{F}'(U) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi(U))$ nous donne un morphisme $\varphi(U) : \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) \to \mathcal{G}(U)$ tel que $\psi(U) = \varphi(U) \circ \pi(U)$ (où $\pi(U)$ est la projection de $\mathcal{F}(U)$ sur $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$). Cela nous donne un morphisme de préfaisceaux entre le préfaisceau $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ et $\mathcal{G}$ qui engendra un morphisme de faisceaux $\varphi : \widetilde{\mathcal{F}/\mathcal{F}'} \to \tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$. Or, on vient de voir qu'un quotient de préfaisceaux est contenu dans le faisceau qu'il engendre. En particulier, si $\pi : \mathcal{F} \to \widetilde{\mathcal{F}/\mathcal{F}'}$ est notre morphisme (de faisceaux) projection, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, two heads, "\pi"] & \mathcal{G} \\ \widetilde{\mathcal{F}/\mathcal{F}'}. \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{F}' = \operatorname{Ker}(\psi)$, φ sera injectif (car chaque $\varphi(U)$ le sera) et on aura donc un isomorphisme entre le faisceau quotient $\mathcal{F}/\operatorname{Ker}(\psi)$ et le faisceau image $\operatorname{Im}(\psi)$.

Annexe B

CÔNES CONVEXES DE TYPE FINI

Dans cette annexe, on démontrera les propriétés importantes des cônes convexes de type fini. On commencera par accepter un résultat de base de géométrie sur ce type d'objet, puis on suivra [7, §1.2] pour le reste. La seule exception étant la section B.4, qui n'a pas été fait par Fulton, ni par aucune autre source que j'ai pu trouver.

Intuitivement, on peut voir les cônes convexes de type fini comme des enveloppes convexes de demi-droites partant de l'origine. Ils sont similaires à la notion usuelle de cône, si ce n'est que ceux-ci n'ont pas de base (ils se prolongent à l'infini) et n'ont pas de courbe, leurs faces sont des objets convexes. Il y a aussi quelques exemples (tels que les espaces vectoriels) qui sont inclus dans cette définition, mais que nous essaierons de distinguer.

B.1. Définitions et propriétés de base

Prenons un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $N_{\mathbb{R}}$ et son dual $M_{\mathbb{R}}$. On se restreindra au cas où $N_{\mathbb{R}}$ (et donc $M_{\mathbb{R}}$) est de dimension finie.

Définition. Un *cône convexe de type fini* (en anglais, «Convex polyhedral cone» ou «finitely generated convex cone») dans $N_{\mathbb{R}}$ est un ensemble

$$\sigma = \operatorname{Cone}(S) = \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0 \right\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

où $S \subseteq N_{\mathbb{R}}$ est fini. On dit alors que σ est engendré par S. Si $S = \emptyset$, on posera $\operatorname{Cone}(\emptyset) = \{0\}$.

La *dimension* de σ est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}\sigma$ engendré par σ.

Exemple. Le quadrant dans $\mathbb{R}^2$ (engendré par e_1 et e_2) et l'octant dans $\mathbb{R}^3$ (engendré par e_1, e_2 et e_3) sont des cônes convexes de type fini. Tout comme le sont les droites (engendrées par x et $-x$), les plans (engendrés par x, y, $-x$ et $-y$) et les demi-plans (engendrés par x, y et $-x$) dans $\mathbb{R}^3$. Toutefois, on aimerait d'ici la fin de cet annexe pouvoir faire la différence entre les cônes comme les deux premiers (qui ont une «pointe») et les autres.

Définition. Le *dual* de n'importe quel ensemble $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble

$$\sigma^\vee \doteq \{u \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle u,v \rangle \geq 0 \ \forall v \in \sigma\}.$$

Exemple. Si on voit $\mathbb{R}^3$ comme le dual de lui-même et si on plonge tous les cônes de l'exemple précédent dans $\mathbb{R}^3$, alors le dual du quadrant est $\mathrm{Cone}(\{e_1,e_2,e_3,-e_3\})$, l'octant est son propre dual, le dual de la droite est le plan orthogonal à celle-ci et vice versa. Quant au demi-plan $\mathrm{Cone}(\{x,y,-x\})$, son dual est le demi-plan $\mathrm{Cone}(\{z,y,-z\})$ (où z est un vecteur orthogonal à x et y).

Nous utiliserons dans cette section le théorème suivant sans le démontrer :

Théorème B.1. *Si σ est un cône convexe de type fini et si $v_0 \in N_\mathbb{R} \setminus \sigma$, alors il existe un $u_0 \in \sigma^\vee$ tel que $\langle u_0,v_0\rangle < 0$.*

On peut tout de même donner une idée de la preuve.

Le théorème 1 de [**9**, §2.2] (ou le théorème 11.4 de [**16**]) nous dit qu'il existe un hyperplan séparant strictement le point v_0 du cône σ. En prenant $u_0 \in M_\mathbb{R}$ tel que cet hyperplan est le noyau de $\langle u_0,\cdot\rangle$, on aura (quitte a remplacer u_0 par $-u_0$) que $\langle u_0,v_0\rangle < 0$ et que $\langle u_0,v\rangle > 0$ pour tout $v \in \sigma$. En particulier, u_0 sera dans $\sigma^\vee$.

Toutefois, ce théorème nécessite qu'on sache déjà que σ est fermé. Pour le montrer, on utilisera le corollaire 9.1.1 de [**16**]. Prenons un ensemble fini S qui génère le cône σ et retirons-lui les éléments qui sont des multiples d'un autre élément de S (y compris 0). Pour chaque élément $s \in S$, on lui associera le convexe C_s qui est la droite $\mathbb{R}s$ si $-s \in \sigma$ et la demi-droite $\mathbb{R}_{\geq 0}s$ sinon. Ces convexes sont tous fermés. Le cône σ pourra alors s'écrire comme la somme des C_s. Dans l'hypothèse du corollaire, $0^+(\mathrm{cl}\, C_s) = C_s$ et le «lineality space» de C_S est C_S si C_S est une droite et $\{0\}$ si c'est une demi-droite. Il n'est ainsi pas très difficile de vérifier qu'on peut utiliser ce corollaire.

Une autre façon d'écrire le théorème précédent est de dire que $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$.

Définition. Un sous-ensemble $\tau \subseteq \sigma$ est appelé une *face* de σ s'il s'écrit comme l'intersection de σ et d'un hyperplan $u^\perp$ (le noyau de l'application linéaire $\langle u,\cdot\rangle$) pour un $u \in \sigma^\vee$.

En prenant $u = 0$, on remarque que σ sera toujours une face de lui-même. Les autres faces seront dites *propres*.

Les faces étant l'intersection entre un espace vectoriel et un cône convexe, elles sont fermées sous l'addition. Plus que cela, si τ est une face d'un cône convexe de type fini σ et si $v,w \in \sigma$ sont tels que $v + w \in \tau$, alors $v,w \in \tau$. En effet, soit $u \in \sigma^\vee$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp$. Alors, $\langle u,v\rangle$ et $\langle u,w\rangle$ sont tous les deux positifs, mais leur somme est $\langle u,v+w\rangle = 0$. La seule façon que ce soit possible est que ces deux produits soient nuls, c'est-à-dire que $v,w \in \tau$.

Cette propriété reviendra plus tard.

Exemple. Les faces de l'octant dans $\mathbb{R}^3$ sont : l'octant lui-même, les trois faces (au sens géométrique), les trois arêtes et l'origine (son seul sommet). Les plans et les droites (ou en général, les espaces vectoriels) n'ont qu'une seule face, l'objet lui-même. Le demi-plan a deux faces : lui-même et sa frontière.

Proposition B.2. *Toute face d'un cône convexe de type fini est aussi un cône convexe de type fini.*

Démonstration. Soient σ un tel cône et $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ une de ses faces et soit S un ensemble fini de générateurs de σ. Soit S_u l'ensemble des éléments s de S tels que $\langle u,s \rangle = 0$. Alors S_u engendre τ.

En effet, soit $v \in \tau \subseteq \sigma$. Alors, $v = \sum_{s \in S} \lambda_s s$ pour des λ_s dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et donc $0 = \langle u,v \rangle = \sum_{s \in S} \lambda_s \langle u,s \rangle$. Or, comme tous les éléments de la somme sont positifs, si un seul des λ_s pour $s \in S \setminus S_u$ est non-nul, la somme ne pourra pas donner 0. On a donc bien que v s'écrit comme une somme d'éléments de S_u. Comme S_u est clairement contenu dans τ, on a bien qu'il engendre τ, et donc que ce-dernier est un cône convexe de type fini. $\square$

À noter que ce qu'on a à montrer dans cette preuve est très important. Toutes les faces de $\sigma = \mathrm{Cone}(S)$ sont engendrées par un sous-ensemble de S. (Quoique la réciproque est fausse : ce n'est pas tous les sous-ensembles de S qui engendrent des faces de σ.) En particulier, σ aura toujours un nombre fini de faces (au plus $2^{\#S}$).

De plus, on comparera souvent la dimension de τ à celle de σ. (On appellera la différence la *codimension* de τ.) Toutefois, la seule face de σ qui est de codimension 0 (de dimension égale à $\dim(\sigma)$) sera σ. En effet, si $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ (pour $u \in \sigma^{\vee}$), on sait que l'espace engendré par τ est contenu dans $u^{\perp}$ et dans l'espace engendré par σ. Comme il est de même dimension que ce-dernier, il doit lui être égal. En particulier, $\sigma \subseteq u^{\perp}$ et $\tau = \sigma \cap u^{\perp} = \sigma$.

Proposition B.3. *Toute intersection de faces est une face.*

Démonstration. Soient $\{u_i\}_{i \in I}$ un ensemble d'éléments de $\sigma^{\vee}$ et $\{\tau_i\}_{i \in I}$ les faces associées. Alors, l'intersection des τ_i peut s'écrire $\sigma \cap (\sum u_i)^{\perp}$. En effet, si v est dans tous les τ_i, alors son produit avec chacun des u_i est 0. En particulier, son produit avec leur somme sera aussi 0. À l'inverse, soit $v \in \sigma$ tel que $0 = \langle \sum u_i,v \rangle = \sum \langle u_i,v \rangle$. Comme $v \in \sigma$ et comme chaque u_i est dans $\sigma^{\vee}$, chaque élément de la somme est positif. Pour que celle-ci vaille 0, il faudra donc que chaque terme soit 0. On a donc bien que v est dans tous les τ_i. $\square$

Proposition B.4. *La face d'une face de σ est aussi une face de σ.*

Démonstration. Soit $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ une face de σ ($u \in \sigma^{\vee}$) et soit $\gamma = \tau \cap (u')^{\perp}$ une face de τ ($u' \in \tau^{\vee}$). Soit S un ensemble fini de générateurs de σ. Alors, on sait que $\langle u,s \rangle \geq 0$ pour tout $s \in S$. Ce n'est pas forcément le cas pour u'. Toutefois, si $\langle u,s \rangle = 0$, alors $s \in \tau$ et $\langle u',s \rangle \geq 0$. On peut donc prendre $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ suffisamment grand pour que $\langle u' + pu,s \rangle \geq 0$ pour tout $s \in S$ (et donc pour tout $s \in \sigma$). C'est-à-dire que $u' + pu \in \sigma^{\vee}$. De plus, on demandera que si $\langle u,s \rangle > 0$, alors $\langle u' + pu,s \rangle > 0$ (quitte à augmenter encore un peu p).

On affirme que $\gamma = \sigma \cap (u' + pu)^{\perp}$. En effet, si $v \in \gamma = \tau \cap (u')^{\perp} \subseteq \sigma$, alors on a directement que $\langle u',v \rangle = 0$ (car $v \in (u')^{\perp}$) et que $\langle u,v \rangle = 0$ (car $v \in \tau$). On a donc bien que $v \in \sigma \cap (u' + pu)^{\perp}$. À l'inverse, si $v \in \sigma$ est tel que $\langle u' + pu,v \rangle = 0$, alors en écrivant v comme une somme de $\lambda_s s$ (pour $s \in S$), on aura que pour tous les s où $\lambda_s \neq 0$, $\langle u' + pu,s \rangle = 0$. En particulier, par la condition qu'on a demandé sur p, $\langle u,s \rangle = 0$. On a alors que $\langle u,v \rangle = 0$ et donc que $\langle u',v \rangle = 0$ ($v \in \gamma$).

Ceci nous permet de conclure que γ est une face de σ. $\square$

Définition. Une face de σ de codimension 1 (c'est-à-dire de dimension $\dim(\sigma) - 1$) est appelée une *facette*.

Bien que notre définition de face soit un peu abstraite, la notion de facette concorde avec l'idée intuitive qu'on a d'une face : un objet convexe de codimension 1 qui délimite la frontière de notre cône (ce qu'on démontrera dans la prochaine section). Notre définition de face inclue simplement σ et les faces de faces afin de regrouper toutes les codimensions.

Proposition B.5. *Toute face propre est contenue dans une facette.*

Démonstration. Soit τ une face propre de σ. Si c'est une facette, on a déjà terminé alors assumons qu'elle est de codimension au moins 2. Posons V l'espace vectoriel engendré par σ et W l'espace vectoriel engendré par τ. Regardons leurs duaux $V^\perp, W^\perp \subseteq M_\mathbb{R}$. Ce seront des sous-espaces vectoriels de codimension $\dim \sigma$ et $\dim \tau$ (respectivement). De plus, $V^\perp$ sera un sous-espace de $W^\perp$ de codimension égale à la codimension de τ dans σ.

Prenons $u_0 \in \sigma^\vee \subseteq M_\mathbb{R}$ tel que $\tau = \sigma \cap u_0^\perp$ et remarquons que u_0 doit être un élément de $W^\perp \setminus V^\perp$ (car il s'annule sur tout τ, mais pas sur tout σ). Comme $V^\perp$ est de codimension au moins 2 par rapport à $W^\perp$, il doit exister $u_1 \in W^\perp$ qui n'est pas dans l'espace engendré par $V^\perp$ et u_0. Il existera un $v \in \sigma$ tel que $\langle u_1,v \rangle \neq 0$. Quitte à remplacer u_1 par $-u_1$, on peut assumer que $u_1 \notin \sigma^\vee$.

Définissons donc $u_t \doteq tu_1 + (1-t)u_0 \in W^\perp$ (pour $t \in [0,1]$), prenons $t_* \doteq \sup\{t \in [0,1] \mid u_t \in \sigma^\vee\}$ (ce suprémum existe car $u_0 \in \sigma^\vee$) et posons $u_* \doteq u_{t_*}$. Remarquons d'abord que $u_* \in \sigma^\vee$. En effet, supposons au contraire qu'on a un $v \in \sigma$ tel que $\langle u_*,v \rangle < 0$. Alors, pour t suffisamment proche de t_*, $\langle u_t,v \rangle$ sera aussi strictement négatif. Ceci contredit la définition de suprémum de t_*, car aucun t dans un interval centré en t_* ne serait tel que $u_t \in \sigma^\vee$. En particulier, $t \neq 1$.

Soit S un ensemble fini de générateur de σ. Remarquons aussi qu'il doit exister un $s \in S$ tel que $s \notin \tau$, mais $\langle u_*,s \rangle = 0$. En effet, supposons au contraire que $\langle u_*,s \rangle > 0$ pour tout $s \in S \setminus \tau$. Alors comme S est fini, on aura que pour t suffisamment proche de t_*, $\langle u_t,s \rangle > 0$ pour tout $s \in S \setminus \tau$. Or, on sait que $\langle u_t,v \rangle = 0$ pour tout $v \in \tau$ (car $u_t \in W^\perp$). Ceci nous donnera un interval centré en t_* dans lequel tous les t sont tels que $u_t \in \sigma^\vee$. Ceci contredit la définition de suprémum de t_*. En particulier, $t \neq 0$.

On a donc bien que $\sigma \cap u_*^\perp$ est une face (par définition) de σ qui contient strictement τ. Cette face ne peut pas être σ, car on aurait sinon que $u_* \in V^\perp$ et donc que $u_1 = \frac{1}{t_*}((1-t_*)u_0 - u_*)$ est dans l'espace engendré par $V^\perp$ et u_0 (alors qu'on a choisi u_1 spécifiquement pour que ceci soit faux).

Comme σ est de dimension fini, on peut appliquer ce raisonnement sur la nouvelle face obtenue et ce, jusqu'à obtenir une facette. □

Proposition B.6. *Toute face est égale à l'intersection de toutes les facettes le contenant.*

Démonstration. Prenons le cas particulier où $\tau = \sigma \cap u^\perp$ ($u \in \sigma^\vee$) est une face de σ de codimension 2. Comme pour la proposition précédente, posons W l'espace engendré par τ, V l'espace engendré par σ et S un ensemble fini de générateurs de σ.

Le quotient V/W sera alors un espace vectoriel de dimension 2. La projection de σ dans cet espace sera aussi un cône convexe de type fini. (Il sera engendré par les vecteurs $\bar{s}$ pour $s \in S$.) Le demi-espace $u^\vee$ contenant σ nous donnera un demi-plan dans V/W contenant ce cône. Aucun vecteur de ce cône (autre que 0) n'est contenu dans la frontière de cet hyperplan (car sinon, il correspondrait à un point de $\tau = \sigma \cap u^\perp$ qui n'est pas dans W, ce qui est impossible par définition de W).

Or, les cônes dans un demi-plan sont plutôt simples à décrire. En effet, si on a trois vecteurs d'un tel cône, alors les deux formant le plus grand angle engendre le troisième. La seule exception serait le cas où ces deux vecteurs sont opposés l'un à l'autre, mais cela ne peut arriver vu que la seule droite de cet hyperplan est sa frontière et que notre cône ne contient pas de point de cette droite (sauf 0). On peut donc retirer tous les générateurs $\bar{s}$ qui sont des combinaisons positives d'autres générateurs. On se retrouvera à la fin avec seulement deux vecteurs. Notre cône a donc deux facettes, engendrées par des vecteurs $\bar{s}_1$ et $\bar{s}_2$, non-colinéaires.

Regardons maintenant les hyperplans W_1 et W_2 (dans $N_\mathbb{R}$) engendrés par W et s_1 et par W et s_2 (respectivement). Le cône σ se trouve du même côté de ces deux hyperplans (il n'est pas coupé par eux). L'hyperplan W_1 contient W et s_1, mais pas s_2. À l'inverse, W_2 contient W et s_2, mais pas s_2. Leur intersection est donc W.

On peut donc conclure qu'on a deux facettes $\tau_1 \doteq \sigma \cap W_1$ (le cône engendré par τ et s_1) et $\tau_2 \doteq \sigma \cap W_2$ (le cône engendré par τ et s_2). Leur intersection sera bien τ. L'intersection des facettes contenant τ est donc contenu dans τ qui est lui-même clairement contenu dans l'intersection.

Pour les autres faces, il suffit de faire une petite preuve par induction sur la codimension. On a déjà montré l'énoncé vrai pour la codimension 1 et 2. Supposons qu'on l'a démontré pour toutes les faces de codimension $k - 1$ et prenons une face τ de codimension k. Par la proposition précédente, il existe une facette γ contenant τ. En particulier, τ est une face de γ de codimension $k-1$. L'hypothèse d'induction nous dit que τ s'écrit comme une intersection de facettes de γ, qui sont des faces de σ de codimension 2. On peut donc toutes les écrire comme des intersections de facettes de σ, ce qui nous permet de conclure. □

B.2. Topologie

Définition. Parfois, on aura besoin de parler d'*intérieur relatif* d'un cône σ, dénoté $\mathrm{Relint}(\sigma)$. On le définira comme l'intérieur (au sens topologique) de σ dans l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ engendré par σ. Lorsque $V = N_{\mathbb{R}}$, il s'agira simplement de l'intérieur usuel. Le sous-espace V étant un fermé de $N_{\mathbb{R}}$, il n'y aura pas de distinction à faire entre la fermeture de σ et sa fermeture «relative».

On définira ensuite la *frontière* de σ comme la différence entre sa fermeture et son intérieur relative.

Proposition B.7. *Si σ est un cône (convexe de type fini), alors sa frontière est l'union de toutes ses faces propres (ou de toutes ses facettes).*

Démonstration. Sans perdre de généralité, on peut assumer que σ engendre $N_{\mathbb{R}}$. Dans le cas contraire, on vera simplement σ comme un cône dans l'espace V engendré par $N_{\mathbb{R}}$. Cela ne changera pas les faces de σ et notre notion de frontière correspondra alors à la définition topologique usuelle.

Remarquons d'abord que si v est un élément d'une face $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ de σ, alors il se trouve dans la frontière $u^{\perp}$ du demi-espace $u^{\vee}$ contenant σ. En particulier, on peut trouver des points de $N_{\mathbb{R}} \setminus u^{\vee} \subseteq N_{\mathbb{R}} \setminus \sigma$ aussi proches que l'on veut de v. Il se trouve donc dans la fermeture de $N_{\mathbb{R}} \setminus \sigma$. Étant dans σ, il est alors dans la frontière de σ.

À l'inverse, prenons un point v dans la frontière de σ et approchons-le par une suite $\{w_i\}$ de points dans $N_{\mathbb{R}} \setminus \sigma$. Par le théorème B.1, il existe une suite $\{u_i\}$ de points dans $\sigma^{\vee}$ tels que $\langle u_i, w_i \rangle < 0$. Quitte à diminuer la norme des u_i (ce qui ne changera pas le signe de $\langle u_i, w_i \rangle$), on peut assumer qu'ils sont tous dans la boule compacte de rayon 1. Cette suite possède donc une sous-suite convergeant vers u. Comme $\langle u_i, v' \rangle \geq 0$ pour tout $v' \in \sigma$ et tout i, ce sera aussi le cas de u (c'est-à-dire que $u \in \sigma^{\vee}$). Donc, $\langle u, v \rangle \geq 0$. En effet, on a déjà dit que σ est fermé (dans le résumé de la preuve du théorème B.1) et donc qu'il contient sa frontière. Or, on sait que $\langle u_i, w_i \rangle < 0$ pour tout i. En prenant la limite, on aura que $\langle u, v \rangle \leq 0$, ce qui nous donne l'égalité. Le point v est donc dans la face $\sigma \cap u^{\perp}$. $\square$

À remarquer que cela implique que l'intérieure relative n'est jamais vide, car une union finie de sous-espaces propres ne peut jamais couvrir l'espace au complet.

Corollaire B.8. *Si σ est un cône (convexe de type fini), alors on peut l'écrire comme l'union disjointe de tous les intérieurs relatifs de ses faces.*

Démonstration. Vérifions d'abord que cette union est bien disjointe. Supposons au contraire qu'on a deux faces τ_1, τ_2 distinctes telles qu'il existe $v \in \mathrm{Relint}(\tau_1) \cap \mathrm{Relint}(\tau_2)$. En particulier, $v \in \tau_1 \cap \tau_2$ qui est une face de τ_1 et de τ_2. Or, par la proposition précédente, la seule façon que v soit à la fois dans cette face et dans l'intérieur relatif de τ_1 et de τ_2, c'est que cette face ne soit pas propre. C'est-à-dire que $\tau_1 = \tau_1 \cap \tau_2 = \tau_2$, ce qui est une contraction, car on a pris ces faces distinctes.

Ensuite, l'union est clairement contenue dans σ. Montrons qu'on a l'inclusion inverse. Soit $v \in \sigma$ et regardons l'ensemble des faces de σ contenant v. Comme l'intersection de deux faces est une face et qu'il y a un nombre fini de faces, on peut prendre la plus petite face de σ contenant v. Dans cette face (qu'on voit maintenant comme un cône), v n'est contenu dans aucune face propre. Par la proposition précédente, v doit être dans l'intérieur relatif de cette face. Cela nous permet de conclure que σ est bien égal à notre union disjointe. □

Proposition B.9. *Si σ engendre l'espace $N_{\mathbb{R}}$ (mais n'est pas égal à $N_{\mathbb{R}}$), alors σ est égal à l'intersection de tous les demi-espaces $u_\tau^\vee$ où $u_\tau \in \sigma^\vee$ est tel que $\tau = \sigma \cap u_\tau^\perp$, avec τ une facette de σ.*

DÉMONSTRATION. Clairement, σ est contenu dans cette intersection. Supposons qu'on a un point v_0 de l'intersection qui n'est pas dans σ et prenons un point v_1 dans l'intérieur (relative) de σ. Définissons les points $v_t \doteq tv_1 + (1-t)v_0$ (pour $t \in [0,1]$) et posons $t_* \doteq \inf\{t \in [0,1] \mid v_t \in \sigma\}$ et $v_* \doteq v_{t_*}$. Le point v_* sera dans la frontière de σ et donc, par la proposition précédente, dans une facette τ. Comme v_1 est dans l'intérieur de σ, il n'est dans aucune facette et on a que $\langle u_\tau, v_1 \rangle > 0$. Comme $\langle u_\tau, v_* \rangle = 0$, cela signifie que $\langle u_\tau, v_0 \rangle < 0$ et que v_0 n'est pas dans le demi-espace $u_\tau^\vee$. Cela nous donne notre contradiction. □

Proposition B.10 (Théorème de Farkas)**.** *Le dual d'un cône convexe de type fini est un cône convexe de type fini.*

DÉMONSTRATION. Dans le cas où σ engendre $N_{\mathbb{R}}$, il nous suffit de montrer que les éléments $u_\tau \in \sigma^\vee$ (pour toutes les facettes τ) engendrent $\sigma^\vee$. En effet, on sait que σ a un nombre fini de facettes.

Soit γ le cône convexe engendré par les u_τ (qui sont contenus dans $\sigma^\vee$) et supposons qu'il existe $u \in \sigma^\vee$ qui n'est pas dans γ. En appliquant le théorème B.1 à γ, il existera un $v \in \gamma^\vee$ (c'est-à-dire tel que $\langle u_\tau, v \rangle \geq 0$ pour toute facette τ) tel que $\langle u, v \rangle < 0$. Or, par la proposition précédente, cela signifie que $v \in \sigma$ et donc que u ne peut pas être dans $\sigma^\vee$.

Prenons maintenant le cas général où V est le sous-espace de $N_{\mathbb{R}}$ engendré par σ. On identifiera alors de dual de V à $M_{\mathbb{R}}/V^\perp$ afin d'appliquer le raisonnement précédent à la projection de $\sigma^\vee$ dans $M_{\mathbb{R}}/V^\perp$. Pour chacun de nos générateurs de cette projection (en nombre fini), on choisira un représentant dans $M_{\mathbb{R}}$. Il suffit alors de remarquer que $\sigma^\vee$ contient $V^\perp$. En choisissant une base de $V^\perp$, on aura que $\sigma^\vee$ est engendré par nos représentants et par les vecteurs v et $-v$ pour chaque élément v de cette base. L'espace $M_{\mathbb{R}}$ étant de dimension fini, notre base sera finie et $\sigma^\vee$ sera effectivement engendré par un nombre fini d'éléments. □

Cela nous donne une autre façon d'écrire les cônes convexes de type fini : si $u_1, \ldots, u_t$ sont des générateurs de $\sigma^\vee$, alors

$$\sigma = \{v \in N_\mathbb{R} \mid \langle u_1,v\rangle \geq 0, \ldots \langle u_t,v\rangle \geq 0\}.$$

De plus, on sait déjà que la frontière de σ est l'union de ses facettes, qu'on peut réécrire comme l'union des $\sigma \cap u_i^\perp$ (sauf les $u_i \in \sigma^\perp$). Si on ordonne nos générateurs de sorte que $u_{i+1}, \ldots, u_t$ soient dans $\sigma^\perp$, mais pas $u_1, \ldots, u_i$, alors on aura que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Relint}(\sigma) &= \{v \in N_\mathbb{R} \mid \langle u_1,v\rangle > 0, \ldots \langle u_i,v\rangle > 0, \langle u_{i+1},v\rangle \geq 0, \ldots \langle u_t,v\rangle \geq 0\}\\ &= \{v \in N_\mathbb{R} \mid \langle u_1,v\rangle > 0, \ldots \langle u_i,v\rangle > 0, \langle u_{i+1},v\rangle = 0, \ldots \langle u_t,v\rangle = 0\}.\end{aligned}$$

B.3. Cône fortement convexe

Maintenant qu'on a une meilleure caractérisation d'un cône et de son dual, on pourra commencer à caractériser les cônes qui nous intéressent (ceux qui ont une pointe). Pour ce faire, nous aurons besoin d'exhiber un lien entre les faces d'un cône et celles de son dual.

Proposition B.11. *Si $\tau = \sigma \cap u^\perp$ est une face de σ ($u \in \sigma^\vee$),alors $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-u)$.*

Démonstration. Prenons des générateurs $u_1, \ldots, u_t$ de $\sigma^\vee$ et assumons sans perdre de généralité (quitte à ajouter un générateur) que $u_t = u$. Alors, on veut montrer que $u_1, \ldots, u_t, -u_t$ sont des générateurs de $\tau^\vee$. En effet, prenons un ensemble fini de générateurs S de σ et remarquons que $\langle u_t,s\rangle > 0$ pour tout $s \in S \setminus \tau$ (car $\tau = \sigma \cap (u_t)^\perp$). Donc, pour tout $u' \in \tau^\vee$, on peut prendre $p \in \mathbb{R}$ suffisamment grand pour que $\langle u' + pu_t, s\rangle \geq 0$ pour tout $s \in S$. Ce sera donc un élément de $\sigma^\vee$ et il s'écrira comme une combinaison de $u_1, \ldots, u_t$. Ceci démontre que $\tau^\vee$ est inclue dans le cône engendré par $u_1, \ldots, u_t, -u_t$ (c'est-à-dire $\sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-u)$). L'inclusion inverse est claire car ce sont tous des éléments de $\tau^\vee$. □

Proposition B.12. *Si τ est une face de σ, alors $\tau^* \doteq \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ sera une face de $\sigma^\vee$ telle que* $\dim(\tau) + \dim(\tau^*) = \dim(N_\mathbb{R})$. *Cela nous donnera une bijection entre les faces de σ et celles de $\sigma^\vee$ (qui inverse l'inclusion).*

En particulier, la plus petite face de σ est $\sigma \cap (-\sigma)$.

Démonstration. Remarquons d'abord que les faces de $\sigma^\vee$ sont exactement les sous-ensembles de la forme $\sigma^\vee \cap v^\perp$ où $v \in \sigma = (\sigma^\vee)^\vee$. Montrons alors que τ^* a cette forme en prenant $v \in \mathrm{Relint}(\tau)$ et en montrant que $\tau^* = \sigma^\vee \cap v^\perp$.

En effet, prenons des générateurs $u_1, \ldots, u_t$ de $\sigma^\vee$ et assumons sans perdre de généralité (quitte à ajouter un générateur) que $\tau = \sigma \cap u_t^\perp$. Alors, par la proposition précédente, $u_1, \ldots, u_t, -u_t$ seront des générateurs de $\tau^\vee$.

Donc, par ce qu'on a fait remarquer plus haut, le produit $\langle u_i,v\rangle$ sera nul si $u_i \in \tau^\perp$ et sera strictement positif sinon. En particulier, les seules générateurs contenus dans la face $\sigma^\vee \cap v^\perp$

sont ceux inclus dans $\tau^\perp$. Notre face étant engendrée par les générateurs qu'elle contient, on aura que $\sigma^\vee \cap v^\perp \subseteq \sigma^\vee \cap \tau^\perp = \tau^*$. Or, l'inclusion inverse est évidente, car $v \in \tau$.

Ensuite, l'application $\tau \mapsto \tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ inverse bien l'inclusion (car $\tau_1 \subseteq \tau_2$ implique que $\tau_2^\perp \subseteq \tau_1^\perp$). Afin de prouver que c'est une bijection, on montrera que la même fonction appliquée à $\sigma^\vee$ sera son inverse. En effet, remarquons d'abord que pour tout $v \in \tau$ et tout $u \in \tau^*$, $\langle u,v \rangle = 0$ (par définition). Alors, on a que $\tau \subseteq (\tau^*)^* = \sigma \cap (\tau^*)^\perp$. Or, prenons $u \in \sigma^\vee$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp$. Cela signifie que $u \in \tau^*$ et donc que $(\tau^*)^* = \sigma \cap (\tau^*)^\perp \subseteq \sigma \cap u^\perp = \tau$. Ceci nous permet de conclure que notre application est bijectif car elle admet un inverse.

En particulier, cela signifie que la plus petite face de σ est $(\sigma^\vee)^* = \sigma \cap (\sigma^\vee)^\perp$. Or, un élément v de $N_\mathbb{R}$ s'annulera sur tout $\sigma^\vee$ si et seulement si $v, -v \in \sigma$. En effet, l'implication $\Leftarrow$ est claire. Pour $\Rightarrow$, il suffit de remarquer que si v s'annule sur tout $\sigma^\vee$, alors $-v$ aussi. Donc, $v, -v \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma$. Et donc, notre plus petite face est bien $(\sigma^\vee)^* = \sigma \cap (-\sigma)$. Aussi, cela montre que $\sigma \cap (-\sigma) = (\sigma^\vee)^\perp$ et donc que $\dim(\sigma \cap (-\sigma)) + \dim(\sigma^\vee) = \dim(N_\mathbb{R})$.

De là, prenons une face τ_k de σ de codimension k et construisons une chaîne $\tau_0 \supsetneq \ldots \supsetneq \tau_s$ de faces de σ la contenant telle que τ_i est de codimension i pour chaque i et que $\tau_s = \sigma \cap (-\sigma)$. (En particulier, on voudra que $\tau_0 = \sigma$.) Pour la construire, on utilise la proposition B.5 disant que τ_k est contenue dans une facette τ_1 de σ. En voyant τ_k comme une face de τ_1, on peut réutiliser la même proposition pour trouver une facette τ_2 de τ_1 qui contient τ_k. Celle-ci sera donc de codimension 2 par rapport à σ. On réapplique ce raisonnement jusqu'à avoir $\tau_0, \ldots, \tau_k$. De là, on refait le tout une deuxième fois en voyant $\tau_s = \sigma \cap (-\sigma)$ comme un face de τ_k. ($\sigma \cap (-\sigma)$ est contenue dans τ_k, car τ_k^* est contenue dans $\sigma^\vee$.) Cela nous donne une chaîne maximale de faces de σ.

On applique ensuite $\tau \mapsto \tau^*$ à cette chaîne. Comme cette application est une bijection inversant l'inclusion, la chaîne de faces de $\sigma^\vee$ associée $\tau_0^* \subsetneq \ldots \subsetneq \tau_s^*$ doit être elle aussi maximale. (Car pouvoir ajouter une face à cette chaîne signifie pouvoir ajouter un élément à la chaîne initiale.) Ainsi, tout comme chaque τ_{i+1} était une facette de τ_i, on aura que chaque τ_i^* est une facette de τ_{i+1}^*. On obtient alors que $\dim(\tau_k) + \dim(\tau_k^*) = (\dim(\sigma \cap (-\sigma)) + s - k) + (\dim(\sigma^\vee) - (s-k)) = \dim(N_\mathbb{R})$ tel que recherché. □

Proposition B.13. *Si σ et σ' sont deux cônes convexes de type fini dans $N_\mathbb{R}$ tels que leur intersection τ est une face de σ et de σ', alors il existe $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$.*

Démonstration. Regardons le cône $\gamma = \sigma - \sigma' = \sigma + (-\sigma')$. Par ce qu'on a dit au début de la preuve précédente, en prenant un $u \in \mathrm{Relint}(\gamma^\vee)$, $\gamma \cap u^\perp$ sera la plus petite face de γ : $\gamma \cap u^\perp = \gamma \cap (-\gamma) = (\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma)$.

On veut montrer que ce u convient. En effet, comme σ et $-\sigma'$ sont contenus dans γ, u est bien un élément de $\sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$.

De plus, comme $\tau = \sigma \cap \sigma'$, il est contenu dans $(\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma) = \gamma \cap u^\perp \subseteq u^\perp$. Étant une face de σ, il est contenu dans $\sigma \cap u^\perp$. À l'inverse, prenons un $v \in \sigma \cap u^\perp \subseteq \gamma \cap u^\perp$. Alors, v sera un élément de $\sigma' - \sigma$ et il existera $w \in \sigma$ et $w' \in \sigma'$ tels que $v + w = w'$. On aura donc que $v + w$ est à la fois dans σ et dans σ' (c'est-à-dire qu'il est dans τ). Or, on a mentionné au tout début que cela signifiait que v (et w) est dans τ. Cela montre que $\tau = \sigma \cap u^\perp$ tel que voulu.

Pour montrer que $\tau = \sigma' \cap u^\perp$, on peut utiliser le même argument. Toutefois, on doit d'abord remarquer que $(-\gamma) \cap u^\perp = \gamma \cap u^\perp$. En effet, $u^\perp$ étant un espace vectoriel, on aura que $(-\gamma) \cap u^\perp = -(\gamma \cap u^\perp) = -(\gamma \cap (-\gamma)) = \gamma \cap (-\gamma) = \gamma \cap u^\perp$. Pour le reste, le passage de σ vers σ' se fait très bien. $\square$

Et finalement, la proposition tant attendue :

Proposition B.14. *Soit σ un cône convexe de type fini. Alors, les énoncés suivants sont équivalents :*

1. $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ *;*
2. *σ ne contient aucun espace vectoriel autre que $\{0\}$;*
3. *il existe un $u \in \sigma^\vee$ tel que $\sigma \cap u^\perp = \{0\}$;*
4. *$\sigma^\vee$ engendre $M_\mathbb{R}$.*

Démonstration. Le premier et le troisième point sont clairement équivalents, car on a vu que $\sigma \cap (-\sigma)$ est la plus petite face de σ.

Il en va de même pour le premier et le dernier point. En effet, étant donné que $\dim(\sigma \cap (-\sigma)) + \dim(\sigma^\vee) = \dim(N_\mathbb{R}) = \dim(M_\mathbb{R})$, la seule façon que $\sigma^\vee$ engendre $M_\mathbb{R}$ est que $\sigma \cap (-\sigma)$ soit de dimension 0 (c'est-à-dire que ce soit $\{0\}$).

Finalement, pour montrer l'équivalence entre le premier et le deuxième point, il suffit de démontrer que $\sigma \cap (-\sigma)$ est le plus grand espace vectoriel contenu dans σ. En effet, σ et $-\sigma$ sont tous les deux stables par l'addition et la multiplication par un scalaire positif. Il en va donc de même pour $\sigma \cap (-\sigma)$. De plus, $\sigma \cap (-\sigma)$ est aussi clairement stable par la multiplication par -1 et est donc bien un espace vectoriel.

Pour ce qui est d'être le plus grand espace vectoriel, on n'a qu'à remarquer que tout espace vectoriel doit être stable par la multiplication par -1. S'il est contenu dans σ, il doit donc aussi être contenu dans $-\sigma$ (et donc dans $\sigma \cap (-\sigma)$). $\square$

Définition. Un cône convexe de type fini respectant les conditions de la proposition précédente est dit *fortement convexe.*

En particulier, la troisième définition nous garantit que si σ est fortement convexe, alors toute face de σ est aussi fortement convexe.

Ce type de cône est ce qui se rapproche le plus de la notion intuitive de cône : un ensemble fini de demi-droite partant de l'origine (les faces de dimension 1 du cône) dont on prend l'enveloppe convexe. Cette propriété est décrite dans la proposition suivante :

Proposition B.15. *Soit σ un cône fortement convexe de type fini et soit $\mathscr{A}$ un ensemble contenant un point non-nul de chaque face de σ de dimension* 1*. Alors,* $\sigma = \operatorname{Cone}(\mathscr{A})$*.*

Démonstration. Posons $\sigma' \doteq \operatorname{Cone}(\mathscr{A})$ le cône en question et étudions son dual $\sigma'^{\vee}$. Comme σ' est engendré par $\mathscr{A}$, un élément $u \in M_{\mathbb{R}}$ sera dans $\sigma'^{\vee}$ si et seulement si $\langle u,a\rangle \geq 0$ pour tout $a \in \mathscr{A}$. C'est-à-dire que $\sigma'^{\vee} = \bigcap\limits_{a\in\mathscr{A}} a^{\vee}$.

Or, rappelons la proposition B.9 disant que comme $\sigma^{\vee}$ engendre $M_{\mathbb{R}}$, $\sigma^{\vee}$ est l'intersection des demi-espaces $v_{\tau}^{\vee}$ où $\tau = \sigma^{\vee} \cap v_{\tau}^{\perp}$ est une facette de $\sigma^{\vee}$ et $v_{\tau} \in (\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$. Or, on sait que chaque facette de $\sigma^{\vee}$ correspond à une face de dimension 1 de σ et on peut donc choisir chaque v_{τ} dans $\mathscr{A}$. Chaque face de dimension 1 de σ correspondant à une facette de $\sigma^{\vee}$, on parcourt tout $\mathscr{A}$ ainsi.

On obtient que

$$\sigma^{\vee} = \bigcap_{a\in\mathscr{A}} a^{\vee} = \sigma'^{\vee}$$

et donc que $\sigma = \sigma'$. □

Exemple. Dans l'exemple de l'octant de $\mathbb{R}^3$ (qui est fortement convexe), on a effectivement engendré le cône en prenant des points des faces de dimension 1 : $\{e_1,e_2,e_3\}$. Toutefois, n'importe quel trio dans $\mathbb{R}_{>0}e_1$, $\mathbb{R}_{>0}e_2$ et $\mathbb{R}_{>0}e_3$ aurait aussi pu faire office de générateurs.

Toutefois, lorsque notre cône n'est pas fortement convexe, cette propriété n'est pas respectée. Le plan en est un exemple trivial : il n'a pas de face de dimension 1. La droite, elle, nécessite deux points de sa face de dimension 1 (la droite elle-même) pour être engendré. Quant à notre exemple de demi-plan, peu importe le nombre de points qu'on prend dans sa frontière (la droite qui est sa seule face de dimension 1), on ne pourra jamais engendré les points de son intérieur relatif.

B.4. Cônes rationnels

Jusqu'à présent, nous ne nous sommes pas beaucoup intéressés aux générateurs de nos cônes. Du moment qu'ils étaient en nombre fini, cela nous suffisait. Dans cette dernière section, on se restreindra aux cônes qui peuvent être engendrés par des éléments «à coefficients entiers» (ou «à coefficients rationnels», ce qui reviendrait au même).

Définition. Un *réseau* est un groupe abélien libre de rang fini. C'est-à-dire qu'un réseau de rang n est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. Une *base* d'un réseau Λ est un sous-ensemble (fini) $B \subseteq \Lambda$ tel que tout élément de Λ s'écrit comme une unique combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de B. Il existe toujours une base à un réseau.

Les exemples les plus simples de réseaux sont les sous-groupes de $\mathbb{R}^n$ engendrés par des vecteurs linéairement indépendants (donc en nombre fini). On peut montrer que tout sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$ est un réseau.

Fixons ainsi un réseau $N < N_{\mathbb{R}}$ engendré par une base de $N_{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire que $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = N_{\mathbb{R}}$ et donc que $\mathrm{Span}(N) = N_{\mathbb{R}}$). Cela nous donne un réseau dual $M < M_{\mathbb{R}}$ défini par $M \doteq \{u \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle u,v\rangle \in \mathbb{Z}\ \forall v \in N\}$. Ce réseau est aussi engendré par une base de $M_{\mathbb{R}}$: si $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$ est la base de N, alors $B^* \doteq \{b_1^*, \ldots, b_s^*\}$ (où $\langle b_i^*, b_j\rangle$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon) est à la fois une base de M et de $M_{\mathbb{R}}$.

Définition. Un cône convexe de type fini σ sera dit *rationnel* si $\sigma = \mathrm{Cone}(S)$ pour un sous-ensemble fini S de N.

Remarquons que si σ est rationnel, alors toute face de σ est aussi rationnelle. En effet, on a déjà montré que les faces de σ sont engendrées par un sous-ensemble des générateurs S de σ. On aimerait démontrer que le dual de sigma sera aussi rationnel, c'est-à-dire qu'il est engendré par des éléments de M. De même, on aimerait s'assurer que tous les $u \in M_{\mathbb{R}}$ qu'on a introduit dans les propositions précédentes peuvent être choisis dans M.

Lemme B.16. *Soient Λ un réseau et E un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Alors $\Gamma \doteq E \cap \Lambda$ est aussi un réseau. De plus, toute base de Γ est contenue dans une base de Λ.*

Démonstration. Comme E et Λ sont fermés sous l'addition et l'inverse additif, Γ est un sous-groupe de Λ et est donc abélien et libre. Or, comme Λ est généré par un nombre fini d'éléments, Γ l'est aussi (voir le théorème 1.6, page 73 de [**13**]). C'est donc bien un réseau.

Ensuite, remarquons que le quotient Λ/Γ est sans torsion. En effet, supposons au contraire qu'on a $x \in \Lambda \setminus \Gamma$ et $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $kx \in \Gamma$. Alors $kx \in E$, mais $x \notin E$, ce qui est impossible car E est un espace vectoriel. Donc Λ/Γ est sans torsion et est engendré par les générateurs de Λ. C'est donc un réseau.

Prenons donc une base B_1 de Γ et une base $\bar{B}_2$ de Λ/Γ. Pour chaque élément de $\bar{B}_2$, prenons un représentant dans Λ. On dénotera l'ensemble de ces représentants par B_2. On veut alors montrer que $B \doteq B_1 \cup B_2$ est une base de Λ.

En effet, pour tout $x \in \Lambda$, $\bar{x} \in \Lambda/\Gamma$ s'écrira comme une combinaison d'éléments de $\bar{B}_2$. Alors, x sera une combinaison des éléments de B_2, plus un élément de Γ, qui s'écrit lui-même comme une combinaison d'éléments de B_1. On a donc que x s'écrit comme une combinaison d'éléments de B et donc que B engendre Λ.

Ensuite, écrivons $B_1 = \{b_1, \ldots, b_s\}$ et $B_2 = \{b_1', \ldots, b_r'\}$ et supposons qu'on a $c_1, \ldots, c_s, c_1', \ldots, c_r' \in \mathbb{Z}$ tels que $c_1 b_1 + \ldots + c_s b_s + c_1' b_1' + \ldots + c_r' b_r' = 0$. Alors on aura que $c_1' \bar{b}_1' + \ldots + c_r' \bar{b}_r' = 0$, mais $\bar{B}_2 = \{\bar{b}_1', \ldots, \bar{b}_r'\}$ étant une base, cela signifie que $c_i' = 0$ pour tout i. Donc, on a en fait que $c_1 b_1 + \ldots + c_s b_s = 0$, mais B_1 étant une base de Γ, cela signifie que $c_i = 0$ pour tout i. On a donc bien que B est une base de Λ. Comme elle contient B_1, cela nous permet de conclure. $\square$

Proposition B.17. *Si σ est rationnel, alors son dual $\sigma^\vee$ sera aussi rationnel.*

Démonstration. Dans la preuve du théorème de Farkas (B.10), on a explicité des générateurs de $\sigma^\vee$ en prenant les éléments u_τ (pour chaque facette τ de σ) et des générateurs de l'espace vectoriel $\mathrm{Span}(\sigma)^\perp$. Il nous suffit de montrer qu'on peut prendre ces générateurs dans M.

Commençons par les générateurs de $\mathrm{Span}(\sigma)^\perp$. Soit $V \doteq \mathrm{Span}(\sigma)$ et soit $\Lambda \doteq V \cap N$. Par le lemme précédent, Λ est un réseau et on peut prendre une base B de N (et donc de $N_\mathbb{R}$) et une base B_1 de Λ telles que $B_1 \subseteq B$. Remarquons que cela signifie que B_1 est linéairement indépendant et, comme σ est engendré par des éléments de Λ, il est une base de V.

Écrivons $B = B_1 \sqcup B_2$. Alors, posons B_2^* la base duale de B_2 et remarquons que c'est une base de $V^\perp$. (Car elle est linéairement indépendante, s'annule sur $V^\perp$ et contient exactement $\mathrm{codim}(V)$ éléments.) Or, ces éléments sont dans M.

Maintenant, pour le choix des u_τ, fixons une facette τ de σ. Soit $W \doteq \mathrm{Span}(\tau)$ et soit $\Gamma = W \cap N = W \cap \Lambda$. Par le lemme précédent, on peut prendre une base B_3 de Γ qui est contenue dans une base B_1 de Λ. En réappliquant le lemme, B_1 sera contenue dans une base B de N. Comme tout est linéairement indépendant (et engendre leur espace respectif), ce seront respectivement des bases de W, de V et de $N_\mathbb{R}$. Comme $\dim(W) = \dim(V) - 1$, il existe alors $v \in \Lambda$ tel que $B_1 = B_3 \cup \{v\}$. Regardons l'élément $u = v^*$ de M tel que $\langle u,b \rangle = 0$ pour $b \in B \setminus \{v\}$ et $\langle u,v \rangle = 1$. Celui-ci est dans $W^\perp = \tau^\perp$, mais n'est pas dans $V^\perp = \sigma^\perp$. Comme $\dim(W) = \dim(V) - 1$, cela signifie que $\tau = \sigma \cap u^\perp$. Donc, σ sera d'un seul côté de l'hyperplan $u^\perp$ et u ou $-u$ se trouvera dans $\sigma^\vee$. Cela nous donne un choix de u_τ se trouvant dans M. □

Ce dernier raisonnement nous permet aussi d'obtenir la propriété suivante :

Proposition B.18. *Si σ est rationnel, alors toute face τ de σ s'écrit comme $\tau = \sigma \cap u^\perp$ pour un certain $u \in \sigma^\vee \cap M$.*

Démonstration. On a vu que la face τ peut toujours s'écrire comme l'intersection $\bigcap \tau_i$ des facettes τ_i de σ contenant τ. Pour chacune d'elle, prenons $u_i \doteq u_{\tau_i} \in M \cap \sigma^\vee$ tel que $\tau_i = \sigma \cap u_i^\perp$ comme on l'a construit dans la preuve précédente. Alors, $u \doteq \sum u_i$ est un élément de M tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp$. (On l'a démontré dans la preuve de la proposition B.3.) □

Cela nous permet donc de généraliser la proposition B.11 :

Proposition B.19. *Si σ est rationnel, alors pour toute face $\tau = \sigma \cap u^\perp$ (où $u \in \sigma^\vee \cap M$), on a que $\tau^\vee \cap M = \sigma^\vee \cap M + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u)$.*

Démonstration. La proposition nous dit déjà que $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-u)$. Or, $\sigma^\vee \cap M + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u)$ est clairement contenu dans $(\sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-u)) \cap M = \tau^\vee \cap M$. Cela nous donne la première inclusion.

Pour l'inclusion inverse, prenons $w \in \tau^\vee \cap M$. Par la proposition, il existe $p \in \mathbb{R}$ suffisamment grand tel que $w + pu \in \sigma^\vee$. Quitte à prendre p légèrement plus grand ($w + pu$ restera dans $\sigma^\vee$), on peut supposer que c'est un entier positif. Ainsi, $w + pu \in \sigma^\vee \cap M$ et $w \in \sigma^\vee \cap M + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u)$. $\square$

En particulier, dans le cas où σ est aussi fortement convexe (c'est-à-dire que $\{0\}$ est une face de σ), on peut prendre $\tau = \{0\}$ et obtenir que $\tau^\vee \cap M = \{0\}^\vee \cap M = M$. Cela nous donnera le résultat suivant :

Corollaire B.20. *Si σ est rationnel et fortement convexe, alors $\sigma^\vee \cap M$ engendre M en tant que monoïde. C'est-à-dire que $M = (\sigma^\vee \cap M) - (\sigma^\vee \cap M)$.*

On rappelle qu'un monoïde est un ensemble doté d'une opération binaire interne et d'un élément neutre pour cette opération.

De même, on peut modifier légèrement la preuve de la proposition B.13 pour que si σ et σ' sont rationnels, alors le u peut être choisi dans M. En effet, on avait pris u dans la preuve pour que $(\sigma - \sigma') \cap u^\perp$ soit la plus petite face de $\sigma - \sigma'$. Or, on vient de montrer qu'on peut toujours choisir un tel u dans M.

Bibliographie

[1] Michael F. Atiyah et Ian G. MacDonald : *Introduction to Commutative Algebra*. Reading, MA, 1969.

[2] Glen E. Bredon : *Sheaf Theory*. New York, second édition, 1997.

[3] Daniel Cibotaru : Sheaf cohomology. Web, 2005.

[4] David Cox, John Little et Donal O'Shea : *Ideals, Varietie, and Algorithms*. New York, 1992.

[5] David Cox, John Little et Henry K. Schenck : *Toric Varieties*. Providence, RI, 2011.

[6] David Eisenbud : *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. New York, 1995.

[7] William Fulton : *Introduction to Toric Varieties*. Princeton, NJ, 1993.

[8] Roger Godement : *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Paris, 1964.

[9] Branko Grünbaum : *Convex Polytopes*. Hoboken, NJ, 1967.

[10] Robin Hartshorne : *Algebraic Geometry*. New York, 1977.

[11] Peter J. Hilton et Urs Stammbach : *A Course in Homological Algebra*. New York, second édition, 1997.

[12] James E. Humphreys : *Linear Algebraic Groups*. New York, 1975.

[13] Thomas W. Hungerford : *Algebra*. New York, 1974.

[14] Masaki Kashiwara et Pierre Schapira : *Sheaves on Manifolds*. Berlin, 1990.

[15] David Mumford : *The Red Book of Varieties and Schemes*. Berlin, second, expanded édition, 1999.

[16] R. Tyrrell Rockafellar : *Convex Analysis*. Princeton, NJ, 1970.

[17] Alexander Schrijver : *Theory of Linear and Integer Programming*. New York, 1986.

[18] Arthur H. Stone : Paracompactness and product spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54(10):977–982, 1948. Disponible électroniquement à `http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183512390`.

[19] Oda Tadao : *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. Berlin, 1988.

[20] John W. Tukey : *Convergence and Uniformity in Topology*. Princeton, NJ, 1940.

[21] Kenji Ueno : *Algebraic Geometry 2*. Providence, RI, 2001.