

Université de Montréal

**Détermination des coefficients de transport turbulent et analyse des cycles
magnétiques produits dans un modèle dynamo en champ moyen avec et sans
rétroaction magnétique**

par

Corinne Simard

Département de physique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiae Doctor (Ph.D.)
en physique

Décembre, 2016

©Corinne Simard, 2016

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée :

**Détermination des coefficients de transport turbulent et analyse des cycles
magnétiques produits dans un modèle dynamo en champ moyen avec et sans
rétroaction magnétique**

présentée par :

Corinne Simard

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Nicole St-Louis,	Président-rapporteur
Paul Charbonneau,	Directeur de recherche
David Lafrenière,	Membre du jury
Andres Munoz-Jaramillo,	Examineur externe
Nicole St-Louis,	Représentant du Doyen de la FES

Thèse acceptée le : 20 juin 2017

Sommaire

Avec les récents développements obtenus grâce aux modèles globaux magnétohydrodynamiques en trois dimensions (3D-MHD) de la convection solaire, il est désormais possible de simuler des champs magnétiques structurés à grande échelle et présentant des inversions de polarité bien synchronisées dans chaque hémisphère. Ces modèles qui n'incluent, pour la plupart, aucune modélisation de la surface du Soleil génèrent donc leur dynamo avec l'action de la force électromotrice turbulente (FEM) et de la rotation différentielle uniquement. À partir de cette FEM, différentes techniques peuvent être utilisées pour extraire les coefficients de transport turbulent. Notamment, différents auteurs ont obtenu un tenseur α (coefficient du premier ordre) dont les 9 composantes présentent des amplitudes du même ordre, remettant en doute l'approximation faite dans le cas des modèles dynamo de type $\alpha\Omega$. À partir d'un code d'analyse par décomposition en valeurs singulières (DVS) développé par Racine et al. (2011) pour évaluer les coefficients du tenseur α , nous avons généralisé la procédure pour extraire 18 des composantes du tenseur de deuxième ordre (tenseur β). Les tenseurs α et β obtenus par cette nouvelle procédure tel qu'appliquée aux sorties de EULAG-MHD, sont similaires aux tenseurs α et β équivalant obtenus en utilisant l'approximation *Second Order Correlation Approximation* (SOCA).

À l'aide des coefficients de transport turbulent du premier ordre introduit dans un modèle dynamo en champ moyen, nous avons ensuite étudié certaines solutions magnétiques présentant des doubles dynamos. Cette analyse avait pour but de comparer les résultats obtenus par ce modèle simplifié caractérisé par la FEM provenant de EULAG-MHD aux résultats de EULAG-MHD directement. Cette preuve de concept nous a permis de démontrer que l'oscillation observée dans le champ magnétique en surface de EULAG-MHD pouvait provenir

de l'action inductive d'une seconde dynamo. Une oscillation biennale est également observée dans plusieurs indices d'activité solaire dont l'origine n'est toujours pas établie. Il est évident que les deux modèles décrits ci-haut et le Soleil opèrent dans des régimes physiques différents. Toutefois, malgré leurs différences, le fait qu'il soit relativement facile de produire une seconde dynamo dans EULAG-MHD et dans le modèle en champ moyen indique que l'action inductive de la FEM peut facilement générer deux dynamos.

Finalement, dans le but d'étudier les périodes de grands minima, phénomène encore non reproduit par les modèles globaux, nous avons ajouté une rétroaction magnétique sur l'écoulement azimuthal au modèle dynamo cinématique en champ moyen décrit ci-haut. En analysant les solutions de ce modèle dynamo de type $\alpha^2\Omega$ non cinématique, nous avons pu reproduire la tendance observée jusqu'ici uniquement dans les modèles de type $\alpha\Omega$ selon laquelle le nombre de nombre de Prandtl (Pm) contrôle le rapport des périodes générées. Plus spécifiquement, une relation inverse est obtenue entre le Pm et le rapport entre le cycle principal et la période d'occurrence des grands minima. De plus, en analysant une solution sur 50 000 ans présentant des périodes de grands minima et maxima non périodiques, nous avons obtenu une distribution de temps de séparation (DTS) des grands minima presque exponentielle, caractéristique observée dans les reconstructions de l'activité solaire. La rotation différentielle associée à ces périodes de grands minima présente un niveau de fluctuation de 1% par rapport au profil moyen. Ce niveau de fluctuation est d'ailleurs comparable avec les reconstructions historiques de la rotation différentielle en surface obtenues lors du grand minimum de Maunder.

Mots clefs: Effet Alpha - Diffusivité turbulente - Dynamo - Modèle dynamo en champ moyen - Coefficient de transport turbulent - Grand minimum

Abstract

The recent developments achieved by tri-dimensional magnetohydrodynamic (3D-MHD) global simulations of solar convection allow us to generate an organized large-scale magnetic fields with well-synchronized hemispheric polarity reversal. Because the vast majority of these simulations do not include a modelization of the Sun's surface layer, the generation of their dynamo is thus solely due to the action of the turbulent electromotive force (EMF) in conjunction with differential rotation. From this EMF, different methods can be used to extract the turbulent transport coefficients. In particular, various authors found a full 9 component α -tensor (first order coefficients) where all the components are of the same order of magnitude. This finding calls into question the $\alpha\Omega$ approximation made by the vast majority of mean field dynamo models. We generalized a first order (α -tensor) singular value decomposition (SVD) analysis procedure as developed by Racine et al. (2011) to extract the 18 additional components of the second order tensor (β -tensor). The α and β tensors obtained by this new procedure as applied to the EULAG-MHD outputs, are similar to the equivalent α and β tensors obtained using the second order correlation approximation (SOCA).

By introducing the first order turbulent transport coefficients in a mean field dynamo model, we study the magnetic solutions where double dynamo modes were observed. This analysis allows us to compare the mean field dynamo solutions produced with the EMF, as extracted from EULAG-MHD, with the real magnetic output of EULAG-MHD. This proof of concept demonstrated that the quasi-biennial oscillation observed in the surface toroidal magnetic field in EULAG-MHD can be produced by the inductive action of a secondary dynamo. A similar quasi-biennial oscillation signal is also observed in multiple proxies of the solar activity whose origin is still not confirmed. Although the physical set of properties under

which the two numerical models described above operate are different from the Sun, the fact that both models can reproduce a secondary dynamo shows us that the inductive action of the EMF can easily produce two dynamos.

Finally, in order to study epochs of grand minima that still cannot be reproduced in global 3D-MHD simulations of convection, we added a magnetic feedback on the mean azimuthal flow in our kinematic mean field model. This non-kinematic $\alpha^2\Omega$ model was able to reproduce the tendency of the Prandtl number (Pm) to control the ratio of the modulation period. More specifically, we found an inverse relation between Pm and the ratio of the main magnetic cycle period to the grand minima occurrence period. Moreover, by analyzing a simulation of a length of 50 000 years, where aperiodic periods of grand minima and maxima are observed, we found a waiting time distribution (WTD) of the grand minima close to an exponential, a characteristic also observed in the reconstruction of the solar activity. Finally, the level of fluctuation in the surface differential rotation associated with epochs of grand minima is $\sim 1\%$. This level of fluctuation was also observed in historical reconstructions of the surface differential rotation during the Maunder minimum.

Keywords: Alpha effect - Turbulent diffusivity - Dynamo - Mean field dynamo model - Turbulent transport coefficients - Grand minima

Table des matières

Sommaire	ii
Abstract	iv
Table des matières	v
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xii
Remerciements	xv
1 INTRODUCTION	1
1.1 Les observations du Soleil	2
1.1.1 Généralités	2
1.1.2 Rotation différentielle, circulation méridienne et turbulence	2
1.1.3 Magnétisme et cycle solaire	6
1.2 Modélisation de la dynamo solaire	11
1.2.1 Équation de l'induction MHD	11
1.2.2 De Poloïdal à Toroïdal	12
1.2.3 De Toroïdal à Poloïdal; le mécanisme de Babcock-Leighton	13
1.2.4 De Toroïdal à Poloïdal; l'effet- α	14
1.2.5 Diffusivité turbulente	17
1.2.6 Saturation de l'amplitude	18

1.3	Fluctuations et modulations à long terme de l'activité solaire	19
1.3.1	Fluctuations et grand minimum de Maunder	20
1.3.2	Reconstruction de l'activité solaire	22
1.3.3	Caractéristiques de la variabilité de l'activité solaire sur des millénaires	23
1.4	Modélisation des fluctuations et de l'intermittence	25
1.4.1	Fluctuations d'amplitude par le bruit stochastique	25
1.4.2	Modulation d'amplitude par la force de Lorentz	27
1.5	Simulation 3D-MHD globale	28
1.5.1	Les équations de la MHD	29
1.5.2	EULAG-MHD	31
1.6	Contexte de la recherche actuelle	32
1.7	Contribution aux articles	35
2	CHARACTERISATION OF THE TURBULENT EMF	37
2.1	Abstract	38
2.2	Introduction	38
2.3	Mean-field electrodynamics	41
2.4	Extracting the \mathbf{a} - and \mathbf{b} -tensors	44
2.4.1	The singular value decomposition procedure	45
2.4.2	Results for the α -tensor	48
2.4.3	Results for the β -tensor	49
2.4.4	Comparison with SOCA	53
2.5	Magnetic quenching of the turbulent emf	55
2.5.1	α Quenching	55
2.5.2	Diffusivity quenching	63
2.6	Discussion and conclusion	64
3	DOUBLE DYNAMO SIGNATURES	69
3.1	Abstract	70
3.2	Introduction	70

3.3	Global MHD simulation results	74
3.4	Mean-field simulation results	79
3.5	Thermal response in the global MHD simulation	87
3.6	Concluding Remarks	91
3.A	Appendix	93
4	CHARACTERISATION OF A NON-KINEMATIC DYNAMO MODEL	99
4.1	Abstract	100
4.2	Introduction	100
4.3	A non-kinematic mean-field model	103
4.3.1	Mean-field dynamo equation	103
4.3.2	Magnetic backreaction	105
4.3.3	A non-kinematic $\alpha^2\Omega$ mean-field dynamo model	106
4.4	Simulation 0: a kinematic, linear solution	109
4.5	Simulation 1: amplitude saturation	111
4.6	Simulations 2, 3, and 4: amplitude modulation	113
4.7	Characteristics of Grand Minima	118
4.7.1	Parity switch across Grand Minima	120
4.7.2	Statistics of Grand Minima and Maxima	121
4.7.3	Surface differential rotation during Grand Minima and Maxima	124
4.8	Discussion and conclusion	125
5	Conclusion	129
5.1	Bilan des modèles	129
5.2	Recherche future	131
A	Dérivation des termes de la FEM turbulente	134
A.1	Transformation latitudinale du tenseur α	138
B	Dérivation de l'équation de vitesse angulaire	139
B.1	Dérivation du terme de diffusion	142

TABLE DES MATIÈRES

viii

Liste des références

144

Liste des figures

1.1	Profil de rotation interne du Soleil	3
1.2	Oscillation torsionnelle du Soleil	5
1.3	Profil de circulation méridienne du Soleil	6
1.4	Schématisation et image d'une tache solaire	7
1.5	Série temporelle du nombre de taches solaires	8
1.6	Diagramme latitude-temps du pourcentage de couverture surfacique de taches solaires.	9
1.7	Diagramme latitude-temps du champ magnétique solaire radiale en surface . .	10
1.8	Schématisation des mécanismes physiques à l'origine de la régénération du champ magnétique solaire	13
1.9	Diagramme latitude-temps des taches solaires à l'époque du minimum de Maunder	21
1.10	Reconstruction de l'activité solaire sur des millénaires	24
1.11	Distribution du temps de séparation des grands minima	25
1.12	Diagramme papillon provenant d'un modèle avec rétroaction magnétique	28
1.13	Champ magnétique toroïdal généré par EULAG-MHD	32
1.14	Comparaison entre trois composantes $\alpha_{\phi\phi}$ extraites à partir de différentes simulations globales 3D-MHD.	34
2.1	Time series of the turbulent electromagnetic force	46
2.2	Illustration of the α -tensor with and without β in the SVD procedure	50

2.3	Radial cuts of four selected α -tensor components with their corresponding 1σ region of significance	51
2.4	Reconstruction of the β -tensor	52
2.5	Mean azimuthal turbulent electromotive force and its reconstruction	53
2.6	SOCA-based reconstructions	54
2.7	Bar diagram of the $\alpha_{\phi\phi}$ tensor component	56
2.8	$\alpha_{\phi\phi}$ as extracted from epoch of min and max	57
2.9	Variation of the $\alpha_{\phi\phi}$ versus magnetic energy of the zonal magnetic component .	58
2.10	Phase space portrait of the joint variations of the kinetic and current helicities	61
2.11	$\beta_{\phi\phi}$ as extracted from epoch of min and max	64
3.1	Longitudinally averaged toroidal magnetic field of EULAG-MHD	76
3.2	Temporal evolutions of the longitudinally averaged toroidal magnetic field and its detrended profile	78
3.3	Mollweide diagrams of the toroidal magnetic field of EULAG-MHD	79
3.4	Temporally averaged differential rotation profiles extracted from EULAG-HD/MHD conjointly with two α -tensor components	82
3.5	Toroidal magnetic field produced by a mean-field model where two dynamo modes coexist	83
3.6	Frequency ratio of the long cycle (f_L) over the short cycle (f_S) versus R_m . . .	86
3.7	Time-latitude diagram of $\langle\Theta'\rangle - \langle\bar{\Theta}'\rangle$ conjointly with the power spectral density both computed from EULAG-MHD	88
3.8	Total power of $\langle\Theta'\rangle$ contained inside the frequency bands f_1 and f_3	89
3.9	Time series of the mean emf components extracted from the millenium simulation and as reconstructed using Equations (3.7) and (3.18)	96
3.10	Toroidal magnetic field from two kinematic mean-field models using the turbulent emf and Equation (3.7)	97
4.1	Steady angular velocity component and during epoch of Grand Maximum and Grand Minimum	107

4.2	Kinematic $\alpha^2\Omega$ dynamo solution	110
4.3	Nonkinematic dynamo solution in the $Pm > 1$ regime	112
4.4	$\alpha^2\Omega$ configuration where the energy is modulated via parity	114
4.5	3D phase portrait between parity, toroidal magnetic field and Ψ	115
4.6	$\alpha^2\Omega$ solution at low Pm	117
4.7	Variation of the ratio between the long-term modulation period (P_2) and the primary magnetic cycle period (P_1) versus Pm	118
4.8	$\alpha^2\Omega$ solution exhibiting strongly aperiodic behavior	119
4.9	Snapshot of an epoch of a Grand Maximum followed by a Grand Minimum . . .	121
4.10	3D phase portrait between parity, toroidal magnetic field and Ψ	122
4.11	Amplitude distribution histogram of the toroidal magnetic field maxima	122
4.12	Time series of total magnetic energy and histograms of duration of Grands Maxima and Minima duration	127
4.13	Surface differential rotation during epoch of Grands Maxima and Minima . . .	128

Liste des tableaux

3.1	Growth rates (λ) and periods (P) for various mean-field dynamo cases.	85
4.1	Dynamo parameters for each solution run analysed	109
A.1	Table de transformation lors du changement de coordonnées colatitudinales vers latitudinales.	138

Abréviation

DVS	Décomposition en Valeurs Singulières
EULAG	Eulerian-LAGrangian
EULAG-MHD	Eulerian-LAGrangian Magnétohydrodynamique
EMF	Electromotive force
FEM	Force Électromotrice
GONG	Global Oscillation Network Group
GSN	Group Sunspot Number
GRPS	Groupe de Recherche en Physique Solaire
HD	Hydrodynamique
ILES	Implicit Large Eddy Simulation
LES	Large Eddy Simulation
MDI	Michelson Doppler Imager
MHD	Magnétohydrodynamique
NCAR	National Center for Atmospheric Research
SOHO	Solar and Heliospheric Observatory

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur Paul Charbonneau sans lequel cette thèse n'aurait pu voir le jour. Paul a toujours été présent sans jamais me juger, en étant très patient avec moi et en me donnant tout le support dont j'avais besoin. Je suis clairement tombée sur le meilleur directeur. Je tiens également à remercier grandement mon collègue physicien solaire de longue date, compagnon de conférence, fidèle ami et voisin Patrice Beaudoin, avec qui j'ai passé les sept dernières années de ma vie universitaire et qui m'a toujours soutenue durant ces années. Je n'oublierai jamais les rennes de la Norvège. Merci également à tous les membres du GRPS : Alexandre Lemerle, Nicolas Lawson, Antoine Strugarek, Roxane Barnabé, Benoit Tremblay, Cassandra Bolduc, Jean-François Cossette, Caroline Dubé, ainsi que mes collaborateurs Dario Passos et Robertus von Fay-Siebenburgen.

Merci à mes nouveaux collègues et superviseurs : Amadou Bokoye, Ahmed Mahidjiba et Nicole Bois d'Environnement et Changement climatique Canada. Vous avez été d'une souplesse incroyable pour me permettre de finir cette thèse. Sans votre aide et votre support, la fin de celle-ci aurait été beaucoup plus difficile.

Merci à tous mes amis : François-René Lachapelle, Amélie Simon, Jonathan Gagné, Patrice Beaudoin, Laura-Isabelle Dion-Bertrand, Simon Coudé, Nicolas Michaud, Jean-François Désilets, Noé Aubin-Cadot, Cassandra Bolduc, Roxane Barnabé, Anne Boucher, Nicolas Lawson, Mychel Pineault, Sophie Charbonneau pour votre soutien inconditionnel et pour toutes ces soirées si mémorables. Je vous aime à l'infini.

À mon grand frère Jonathan Belletête, merci d'avoir toujours été là pour moi. On ne s'est pas beaucoup vu durant les dernières années, surtout depuis ton départ en France, mais je t'aime beaucoup et je pense souvent à toi. Reviens vite à Montréal.

Un merci également à mes amis de longue date du Navire canadien de Sa Majesté Donnacona : Audrey Janelle, Anne-Marie Ducharme, Félix Charest-Trudel; ainsi qu'à mes superviseurs : Maître Baribeau, Adjudant Toll, Adjudant Shaw, Adjudant Lavallé et particulièrement Lieutenant Parent. Vous avez mis un brin de fraîcheur dans ma vie, en me faisant décrocher de la science à coup de soirées d'entraînement. Vous m'avez permis de développer mes qualités de leadership qui étaient auparavant inexistantes et qui finalement m'ont été utiles pour l'accomplissement de cette thèse.

Un merci également à Matelot Ducharme qui a assuré ma position au fonds non publics de l'unité pendant l'année 2016. Elle m'a permis de me concentrer entièrement sur l'écriture de ma thèse en sachant que les fonds des Mess étaient entre bonnes mains.

Merci également à mes mères montréalaises Dorice Simard et Johanne Lavoie, vous êtes toujours là pour m'offrir le meilleur pain de viande (sans sucre, sans sel et sans gras) et la meilleure écoute lorsque je suis dans le jus et que rien ne va. Vous êtes fantastiques. Je vous aime.

Merci à la personne qui partage mes jours et mes angoisses, Olivier Latendresse. Tu es ma source d'inspiration constante, tu me pousses à me dépasser et à faire de moi une meilleure personne. Merci d'être à mes côtés, l'écriture de cette thèse aurait été beaucoup plus difficile sans toute ton aide.

Finalement, les personnes qui ont été là depuis le début : ma famille. Vous êtes la raison de ma motivation, vous êtes ceux qui ont toujours cru en moi, même si la physique était loin d'être mon point fort. Mario, Chantale, Michèle, Maude et les beaux-frères Francis et Dave, merci d'être des gens aussi extraordinaires. Je suis la personne la plus choyée de vous avoir dans ma vie.

À Olivier, Chantale, Mario, Michèle et Maude

Chapitre 1

INTRODUCTION

Les premiers registres d'observations continues de taches sombres à la surface du Soleil remontent déjà à plus de 400 ans. Ces ombres de formes irrégulières sont connues sous le nom de taches solaires et le compte de ces taches constitue la plus longue série temporelle d'observations astronomiques à ce jour. Ces taches situées en surface du Soleil sont la manifestation d'un cycle magnétique situé dans sa zone de convection, structuré à grande échelle et appelée cycle solaire. Bien que nous disposions de 400 ans d'observations continues de ces taches, les mécanismes internes qui sont à l'origine de ce cycle demeurent un casse-tête pour les physiciens solaires contemporains.

La première section de ce chapitre fera une brève revue de la structure interne du Soleil parallèlement avec une description générale de nos connaissances actuelles sur son magnétisme et ses écoulements. La section 1.2 fera un survol des différents concepts centraux à la théorie de la dynamo solaire. Quelques analyses de mesures relatives aux fluctuations à long terme observées dans le cycle solaire seront discutées à la section 1.3, suivies par la description de certains mécanismes pouvant être à l'origine de ces fluctuations (§1.4). Finalement, les concepts de base des modèles globaux 3D-MHD de la convection solaire seront présentés à la section 1.5, suivis par une brève discussion de l'état de la recherche actuelle (§1.6) et de ma contribution aux articles à la section 1.7.

1.1 Les observations du Soleil

1.1.1 Généralités

Le Soleil est une étoile âgée de ~ 4.6 milliards d'années composée principalement d'hydrogène ($\sim 74\%$) et d'hélium ($\sim 24\%$). La température effective ou température corps noir de sa photosphère est de 5777 K . Il a atteint environ la moitié de sa phase séquence principale, et est de type spectral G2V selon la classification Morgan-Keenan (Morgan & Keenan 1973). L'intérieur du Soleil est également divisé en plusieurs régions où différents mécanismes physiques dominent. Le coeur du Soleil qui s'étend jusqu'à environ $0.25 R_{\odot}$ est le lieu où se produisent les réactions nucléaires de fusion, source d'énergie thermique du Soleil, qui sont effectuées principalement sous la chaîne proton-proton (Clayton 1968). La zone radiative transporte l'énergie thermique du coeur jusqu'à environ $0.7 R_{\odot}$ par transport radiatif. Cependant, dépassé ce rayon, la densité et la température chutent suffisamment pour créer une augmentation de l'opacité causée par la recombinaison partielle de l'hélium et de l'hydrogène. Ce changement fera passer le gradient de température sous la limite du gradient adiabatique ce qui aura pour conséquence de déclencher la convection. Cette zone de convection très peu dense ($< 1\text{ g/m}^3$) s'étend de $0.7 R_{\odot}$ jusqu'à la surface et est le lieu où le champ magnétique responsable du cycle solaire est généré. La zone de convection est séparée de la zone radiative par la tachocline. Cette dernière est une mince zone de transition entre la rotation solide de la zone radiative et la rotation différentielle de la zone de convection. La tachocline joue un rôle central dans la régénération du champ magnétique à grande échelle du Soleil en raison de son fort gradient en vitesse angulaire (Guerrero et al. 2016). Toutefois, des études récentes démontrent qu'il est possible de générer des cycles magnétiques sans la présence de cette région (voir par exemple Brown et al. 2011; Strugarek et al. 2016b).

1.1.2 Rotation différentielle, circulation méridienne et turbulence

Les écoulements de plasma présents dans la zone de convection jouent un rôle central dans la génération du champ magnétique solaire. Ils sont divisés principalement en deux catégories: les écoulements structurés à l'échelle du Soleil et ceux aux plus petites échelles.

Dans le cas du Soleil, on retrouve deux écoulements structurés aux grandes échelles: la rotation différentielle en direction azimutale ($\hat{\phi}$) et la circulation méridienne en direction radiale (\hat{r}) et latitudinale ($\hat{\theta}$). La rotation différentielle se caractérise par une accélération à l'équateur et une diminution aux pôles de la vitesse angulaire par rapport à la vitesse aux mi-latitudes. Sur la figure 1.1 de gauche sont présentées les mesures obtenues sur une coupe méridienne par le groupe GONG à partir d'une inversion héliosismique. Cette technique permet de dériver les mesures en vitesse à l'intérieur du Soleil. Elle se base sur l'héliosismologie

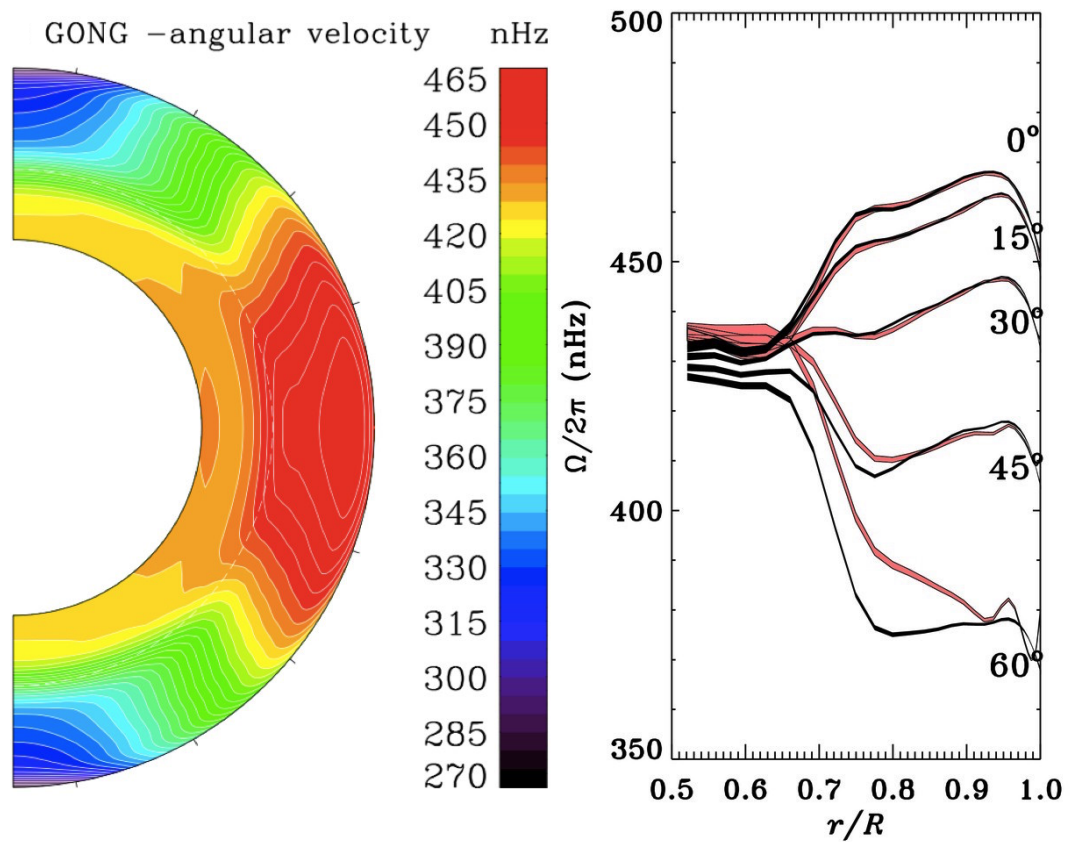


FIGURE 1.1 – Gauche: Coupe polaire en rayon latitude du profil de rotation différentielle calculé à partir de l'inversion de données héliosismiques provenant du groupe GONG. Droite: Coupes radiales à latitudes constantes de la fréquence angulaire provenant de GONG (noir) et de MDI (rouge). Figure provenant de http://www.aip.de/image_archive/Sun.html

qui décompose en harmoniques sphériques les modes acoustiques de vibrations (onde p) mesurés à la surface du Soleil. La vitesse de propagation de ces modes peut être obtenue à partir de leur degré d'harmonique sphérique ℓ . Par contre, si ce n'était pas de la rotation du Soleil, la dégénérescence du nombre azimutal $-\ell \leq m \leq \ell$ ne pourrait être levée. Ceci est dû au

fait que les ondes acoustiques se propageant avec et contre la direction de la rotation auront des fréquences plus élevées et plus basses respectivement. C'est finalement à partir de ces fréquences qu'il est possible de déterminer le profil de vitesse azimutale à l'intérieur de la zone de convection. La figure 1.1 de droite illustre la dépendance en rayon de la vitesse angulaire extraite à différentes latitudes et où la transition entre la région de rotation solide ($< 0.7 R_{\odot}$) et celle de la rotation différentielle ($> 0.7 R_{\odot}$) est bien visible. Ce profil particulier de rotation où les pôles tournent plus lentement que l'équateur semble contre intuitif au premier abord. En fait, ce sont les composantes hors diagonales du tenseur des stress de Reynolds qui font en sorte qu'un déplacement net de quantité de mouvement vers l'équateur est possible. Ces stress sont créés par la présence de super-cellules convectives non axisymétriques situées près des pôles et pouvant vivre plus de 6 mois (Hathaway et al. 2013). Les stress de Reynolds (τ') sont calculés à partir de la corrélation des différentes composantes de la vitesse turbulentes (u'_i) et sont essentiels au maintien du profil de rotation différentielle. Ils sont définis comme:

$$\tau'_{ij} = \rho \langle u'_i u'_j \rangle , \quad (1.1)$$

où ρ est le profil en densité du Soleil et $\langle \dots \rangle$ l'opérateur de moyenne azimutale. Bien que la figure 1.1 montre un profil de rotation différentielle indépendant du temps, celui-ci varie légèrement avec les années. La différence entre le profil moyen $\Omega(r, \theta)$ et la série temporelle des inversions héliosismiques de la vitesse angulaire $\Omega(r, \theta, t)$ montre certaines structures à l'échelle d'un cycle magnétique. Ces structures de faibles amplitudes (~ 1 nHz) sont appelées oscillations torsionnelles (voir figure 1.2) et se concentrent principalement en deux branches; une aux mi-latitudes se propageant vers l'équateur et une autre à hautes latitudes se propageant vers les pôles.

L'inversion héliosismique est une technique particulièrement précise et a récemment permis de mesurer sous la surface du Soleil la circulation méridienne malgré sa faible amplitude. Ce deuxième écoulement structuré à grande échelle transporte en surface les éléments de fluide de l'équateur vers les pôles à une vitesse moyenne de ~ 15 m/sec, soit plus de 100 fois moins rapide que sa vitesse azimutale. Elle serait le résultat d'un déséquilibre entre les stress de

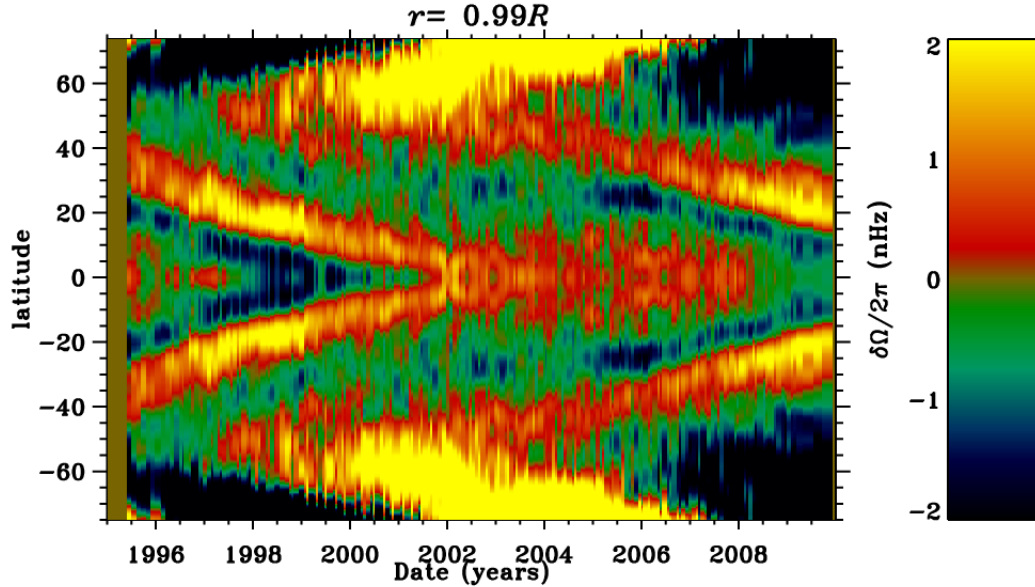


FIGURE 1.2 – Diagramme latitude-temps des oscillations torsionnelles de la vitesse angulaire près de la surface ($0.99R$) et extraite du cycle 23 (Howe 2009).

Reynolds et la force de flottaison. De plus, une différence de température d'environ 2.5 K (Rast et al. 2008) est observée entre les pôles et l'équateur ce qui est également favorable au maintien de cet écoulement. Malgré la puissance de l'inversion héliosismique, sa faible amplitude limite grandement la précision des mesures. La figure 1.3 illustre deux exemples de profils de vitesse radiale (Zhao et al. 2013; Rajaguru & Antia 2015) obtenus récemment à partir de cette technique, mais où les mesures de la vitesse en profondeur diffèrent considérablement¹. La façon dont la circulation méridienne se comporte sous la surface (une ou plusieurs cellules hémisphériques) demeure une question encore ouverte aujourd'hui et est un enjeu d'importance pour la modélisation du cycle solaire. Bien que la circulation méridienne joue un rôle dans la dynamo solaire, c'est plutôt la rotation différentielle qui constitue une des sources principales d'énergie à l'origine du cycle magnétique solaire. Elle est un ingrédient essentiel au maintien de la dynamo solaire.

Finalement, on retrouve également dans la zone de convection du Soleil des mouvements provenant des cellules de convections ainsi que des mouvements reliés à la turbulence du milieu. Ces mouvements n'ont pas de structures particulières à l'échelle du Soleil. Leurs amplitudes

¹Attention au code de couleur inversé d'une figure à l'autre.

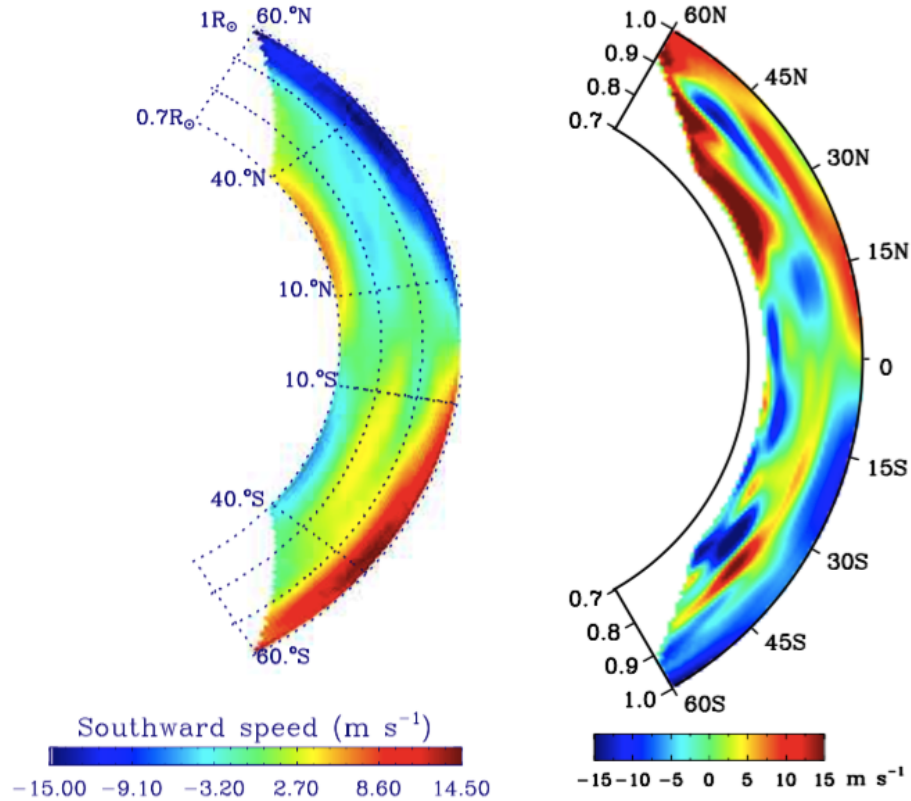


FIGURE 1.3 – Résultats d’une analyse d’inversion héliosismique réalisée par Rajaguru & Antia (2015) sur la figure de gauche et Zhao et al. (2013) sur la figure de droite. Le code de couleur est inversé d’une figure à l’autre: la couleur rouge de la figure de gauche représente une vitesse vers le pôle Sud alors que sur la figure de droite le rouge correspond à une vitesse vers le pôle Nord.

atteignent des valeurs de ~ 10 m/sec en profondeur dans la zone de convection, de ~ 100 m/sec sous la photosphère et peuvent même atteindre des valeurs de ~ 1000 m/sec à la surface. Ce sont ces mouvements turbulents (u'_i) qui sont à l’origine des stress de Reynolds (voir équation (1.1)) et peuvent également contribuer à la régénération du champ magnétique à grande échelle.

1.1.3 Magnétisme et cycle solaire

De toutes les manifestations liées au magnétisme du Soleil, les taches solaires sont certainement celles ayant reçu le plus d’attention. Elles se forment lorsqu’un tube de flux magnétique formé dans la zone de convection devient instable et remonte à la surface par force de flottaison (Moreno-Inertis 1997; Fan 2009). Cette instabilité est créée par un déséquilibre entre la

pression totale du tube de flux (pression magnétique et pression gazeuse) et celle du milieu ambiant. Les plus gros tubes de flux réussiront à émerger à la surface pour former les taches alors que ceux de plus faibles amplitudes seront détruits par les mouvements turbulents lors de leur traversée à travers la zone convective. L'émergence d'un tube de flux à la surface du Soleil inhibera localement la convection. Ceci aura comme effet de diminuer l'apport d'énergie provenant du coeur et conséquemment une baisse de température sera observée à cet endroit. Par contraste avec le reste de la surface du Soleil, l'endroit où la température est localement plus froide émettra moins de lumière, et paraîtra donc plus sombre créant ainsi une tache solaire (voir figure 1.4). Puisque ces taches sont produites par des tubes de flux magnétique, celles-ci émergent toujours par paire de polarités opposées.

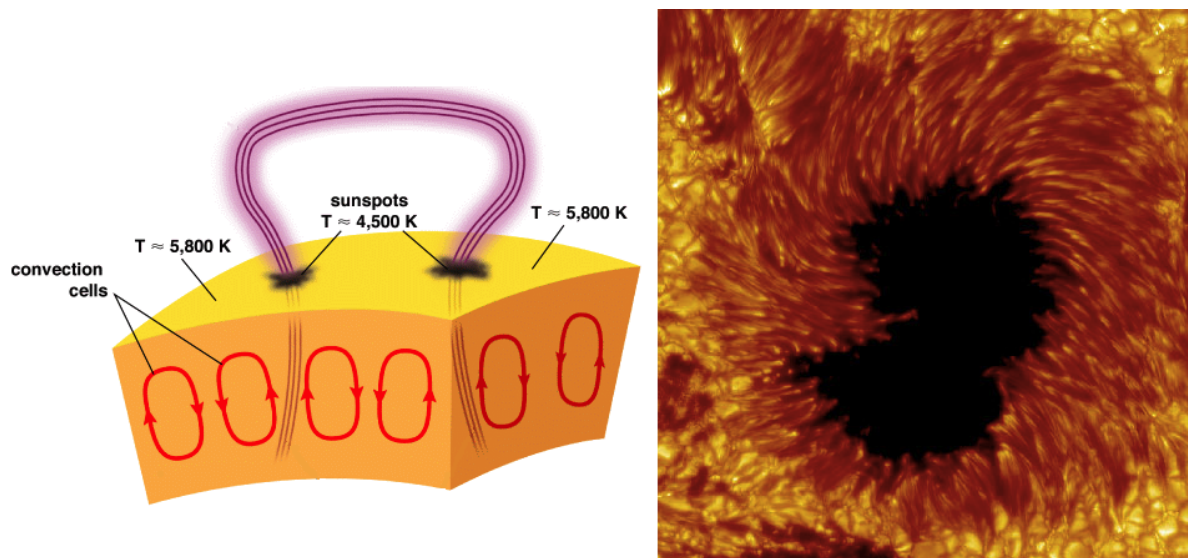


FIGURE 1.4 – Gauche: Schéma de l'émergence d'un tube de flux magnétique créant ainsi un couple de taches solaires. Droite: Image rapprochée d'une tache solaire observée par le télescope solaire suédois à La Palma. <http://scientificgamer.com/how-is-sunspot-formed/>

Le compte du nombre de taches solaires en fonction du temps fait apparaître un cycle de 11 ans connu aujourd'hui sous le nom de cycle solaire. Ce cycle est présenté à la figure 1.5 sur une période de plus de 400 ans d'observation. Les observations du nombre de taches solaires sont régulièrement assujetties à des corrections. Le fait que ces observations soient recueillies sur une si longue période de temps requiert un grand nombre d'observateurs. Puisque le compte des taches à la surface du Soleil dépend, entre autres, des techniques et du maté-

riel d’observation utilisés, ce nombre doit être calibré en fonction des différents observateurs. Malheureusement, ces ajustements sont souvent complexes et inexacts étant donné l’âge des observations. Un re-calibrage complet de la série temporelle du nombre de taches a été récemment effectué indépendamment par différents auteurs. Ceux-ci ont trouvé des résultats avec certaines différences significatives (Clette et al. 2014; Lockwood et al. 2016). Aucun consensus n’a encore été obtenu quant à la meilleure façon de procéder. Par contre, la vaste majorité des re-calibrages du nombre de taches solaires semblent tous présenter une période temporelle entre 1645 et 1715 où presque aucune tache solaire n’a été observée. Cette période est appelée grand minimum de Maunder et sera décrite plus en détail à la section 1.3.1.

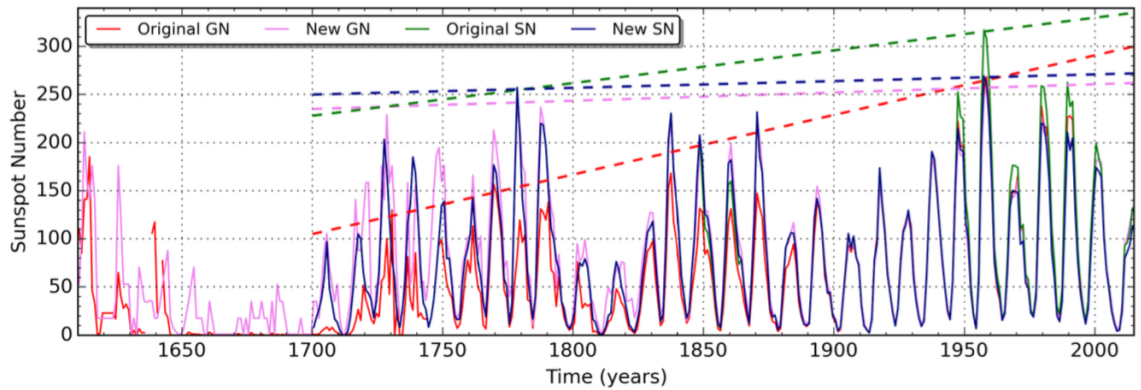


FIGURE 1.5 – Comparaison entre l’ancienne et la nouvelle calibration de la série temporelle du nombre de taches solaires en vert & bleu et du nombre de groupe de taches (GSN) en rouge & rose respectivement. Analyse effectuée par Clette & Lefèvre (2015).

En plus de la série temporelle du nombre de taches solaires, les observations modernes du Soleil nous permettent d’analyser l’émergence des taches selon leur latitude. La figure 1.6 présente un diagramme latitude-temps du pourcentage de la couverture de tache où une structure en aile de papillon est visible. Les taches solaires n’émergent pas complètement aléatoirement à la surface du Soleil au cours d’un cycle; elles commencent par émerger autour de $\sim 30^\circ$ au début de celui-ci, et vers $\sim 2^\circ$ à la fin d’un cycle. Cette structure particulière nous renseigne sur la distribution spatiale possible du champ magnétique à grande échelle à l’intérieure de la zone de convection. Puisque ce sont les tubes de flux qui sont à l’origine des taches solaires, si leurs émergences forment une branche à mi-latitude se propageant vers l’équateur sur le cours d’un cycle, alors il est naturel de penser que le champ magnétique

interne en fait de même. Contrairement aux observations des écoulements à grande échelle, il n'est pas possible de mesurer le champ magnétique sous la surface du Soleil. Pour cette raison, les taches solaires sont généralement utilisées comme proxy pour le champ magnétique interne à grande échelle dans une vaste majorité des modèles de la dynamo solaire.

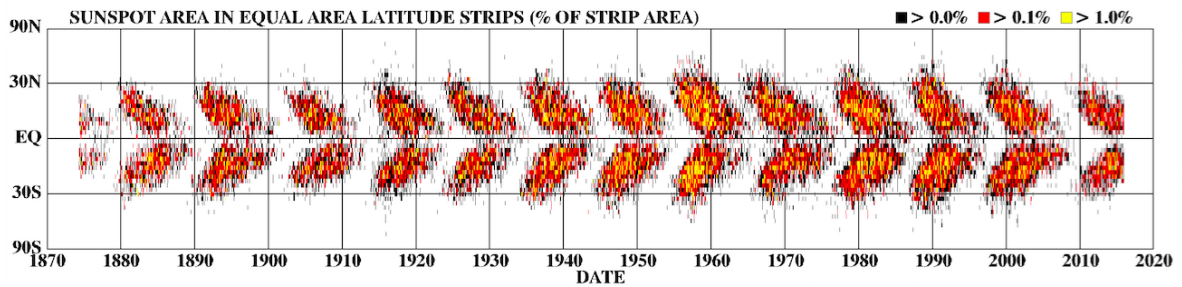


FIGURE 1.6 – Diagramme latitude-temps du pourcentage de couverture de taches solaires. <http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/bfly.gif>

Depuis environ 40 ans, des satellites en orbites autour du Soleil mesurent en continu le champ magnétique à sa surface. L'amplitude de la composante radiale de son champ est illustrée sur le diagramme latitude-temps de la figure 1.7. Sur cette figure, en plus de voir la migration équatoriale des taches au cours d'un cycle, de nouvelles caractéristiques sont visibles. Tout d'abord, il y aura une polarité préférentielle au cours d'un même cycle pour la tache qui émergera en tête par rapport au sens de la rotation solaire en comparaison avec sa tache soeur de polarité inverse. Cette caractéristique est connue sous le nom de loi de Hale (Hale et al. 1919). Une inversion de la polarité des taches en tête se produit également d'un hémisphère à l'autre, nous indiquant que le champ magnétique interne est lui aussi antisymétrique par rapport à l'équateur. La polarité des taches en tête s'inverse également d'un cycle à l'autre, manifestation encore une fois du champ magnétique interne qui inverse sa polarité à chaque cycle. De plus, une migration vers les pôles du flux magnétique de la polarité des taches de derrières est aussi visible sur la figure 1.7. Cette dérive est possible grâce à la présence de la circulation méridienne qui transporte ce flux vers les pôles plus rapidement que la diffusion les annihileraient. Le flux des taches avant sera annihilé par diffusion avec le flux magnétique de polarité inverse près de l'équateur. Cet effet ne serait également pas possible si l'émergence de paires de taches se faisait parallèlement avec l'équateur. Les paires de taches "obéissent" à

la loi de Joy (Hale et al. 1919) qui veut que, majoritairement, les paires de taches émergent avec une inclinaison d'environ 4° par rapport à l'équateur. Cette caractéristique se manifeste sur la figure 1.7 par une séparation temporelle de la polarité positive (jaune) et négative (bleu) sur un même cycle. De plus, cette migration du flux magnétique aux pôles contribuera à régénérer la composante dipolaire (ou poloïdale) du Soleil. Cette composante poloïdale atteindra son amplitude maximale lors des minimums du cycle solaire et inversement, aura une valeur minimale au maximum d'activité solaire.

Conjointement avec le cycle principal de 11 ans, plusieurs indices suggérant la présence d'une seconde périodicité (~ 2 ans) ont été obtenus récemment (Benevolenskaya 1998; Bazilevskaya et al. 2014). Une oscillation de période similaire (~ 1.3 ans) est également observée dans les mesures héliosismiques de la rotation différentielle (Howe et al. 2000), dans la série temporelle du nombre de taches (Norton & Gallagher 2010), dans des mesures du champ magnétique héliosphérique ainsi que dans certains indices de l'activité géomagnétique (Mursula et al. 2003). L'origine de ce signal biennal n'est toujours pas établie, mais une des hypothèses possibles serait que ce signal soit causé par l'action d'une seconde dynamo située près de la surface (voir chapitre 3) du Soleil.

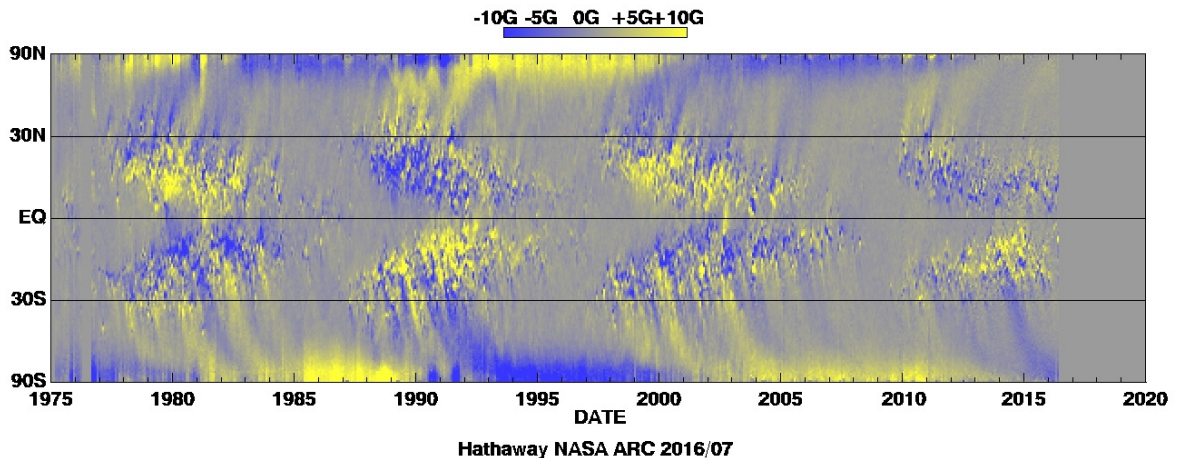


FIGURE 1.7 – Diagramme latitude-temps de la distribution du champ magnétique solaire en direction radiale à la surface du Soleil. Le bleu (jaune) représente les lignes de champ entrant (sortant) à la surface du Soleil. <http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/magbfly.jpg>

1.2 Modélisation de la dynamo solaire

La régénération du champ magnétique du Soleil se produit grâce à l'action inductive des écoulements de plasma à travers le champ magnétique présent dans sa zone convective. Le détail des mécanismes générant ce champ magnétique reste encore aujourd'hui un enjeu d'importance dans la compréhension de la dynamo solaire. Dans cette section, seront présentées les équations et les mécanismes physiques invoqués dans la majorité des modèles dynamo.

1.2.1 Équation de l'induction MHD

L'évolution du champ magnétique à grande échelle dans les modèles dynamo est décrite par l'équation d'induction magnétohydrodynamique:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (1.2)$$

où \mathbf{B} représente le champ magnétique, \mathbf{u} l'écoulement et η [m²/sec] la diffusivité magnétique. Cette équation est obtenue à partir de la combinaison de la loi d'Ohm dans sa forme la plus simple avec l'équation de Maxwell-Ampère où la composante du courant de déplacement de Maxwell dans cette dernière est mise à zéro. L'équation d'induction MHD est valide dans la mesure où la vitesse du fluide est sous-relativiste, la fréquence de collision du plasma est très élevée et le plasma est électriquement neutre, critères qui sont tous respectés dans la zone convective du Soleil.

La plupart des observations liées au cycle solaire (magnétogramme de la fig. 1.7, diagramme papillon de la fig. 1.6, cycle solaire, etc.) sont, en première approximation, indépendantes de la longitude. Plus précisément, les quantités physiques variant sur des échelles spatiales comparables à celle du Soleil sont axisymétriques. Pour cette raison, on supposera que le champ magnétique \mathbf{B} et l'écoulement \mathbf{u} sont tous deux indépendants de ϕ . De plus, pour faciliter l'écriture des équations, on séparera généralement ces deux quantités en une composante en direction toroïdale (B et $u_\phi = r \sin \theta \Omega$) et une en direction poloïdale ($\nabla \times (A \hat{\mathbf{e}}_\phi)$ et \mathbf{u}_p). Cette décomposition aura pour conséquence de séparer l'équation (1.2) en deux équations d'évolution temporelle pour le potentiel vecteur $A(r, \theta, t)$ et la composante toroïdale $B(r, \theta, t)$

tel que:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A - \frac{\mathbf{u}_p}{\varpi} \cdot \nabla(\varpi A), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial(\varpi B)}{\partial r} - \varpi \nabla \cdot \left(\frac{B}{\varpi} \mathbf{u}_p \right) + \varpi (\nabla \times A \hat{\mathbf{e}}_\phi) \cdot (\nabla \Omega), \quad (1.4)$$

en géométrie sphérique où $\varpi = r \sin \theta$. La rotation différentielle $\Omega(r, \theta)$ et la circulation méridienne $\mathbf{u}_p(r, \theta)$ seront généralement intégrées à ces deux équations en tant que paramétrisation indépendante du temps, inspirées des observations telles que décrites à la section 1.1.2. Cette procédure a pour but de laisser seulement A et B comme quantités inconnues à résoudre. Une dynamo oscillatoire sera obtenue si les mécanismes présents sont en mesure de régénérer la composante toroïdale en composante poloïdale et vice versa.

1.2.2 De Poloïdal à Toroïdal

En analysant l'équation (1.4) pour B , on remarque que le seul terme pouvant agir comme terme source à la composante toroïdale est celui faisant intervenir le gradient de la vitesse angulaire (voir le quatrième terme au membre de droite de l'éq. (1.4)). Ce mécanisme est appelé effet- Ω puisqu'il provient de l'étirement en direction toroïdale des lignes de champ en direction poloïdale par la rotation différentielle (voir figure 1.8 (a)-(c)). Cet étirement est causé par le fait que les lignes de champ magnétique de la zone convective doivent bouger avec le plasma. Cet effet se produit en régime MHD-idéal lorsque l'on suppose que la diffusivité magnétique microscopique est négligeable. En d'autres mots, on considère le plasma comme un conducteur parfait, hypothèse bien respectée dans le Soleil. L'effet- Ω est un mécanisme très bien connu, accepté et utilisé dans la vaste majorité des modèles de la dynamo solaire. Bien que le profil exact de $\Omega(r, \theta)$ puisse varier d'un modèle à l'autre, la différence majeure dans les différents modèles dynamo provient du mécanisme à l'origine de la régénération de la composante poloïdale. En observant l'équation pour A (voir éq. (1.3)), on remarque qu'aucun terme source n'apparaît a priori dans celle-ci et d'autres stratégies doivent donc être adoptées.

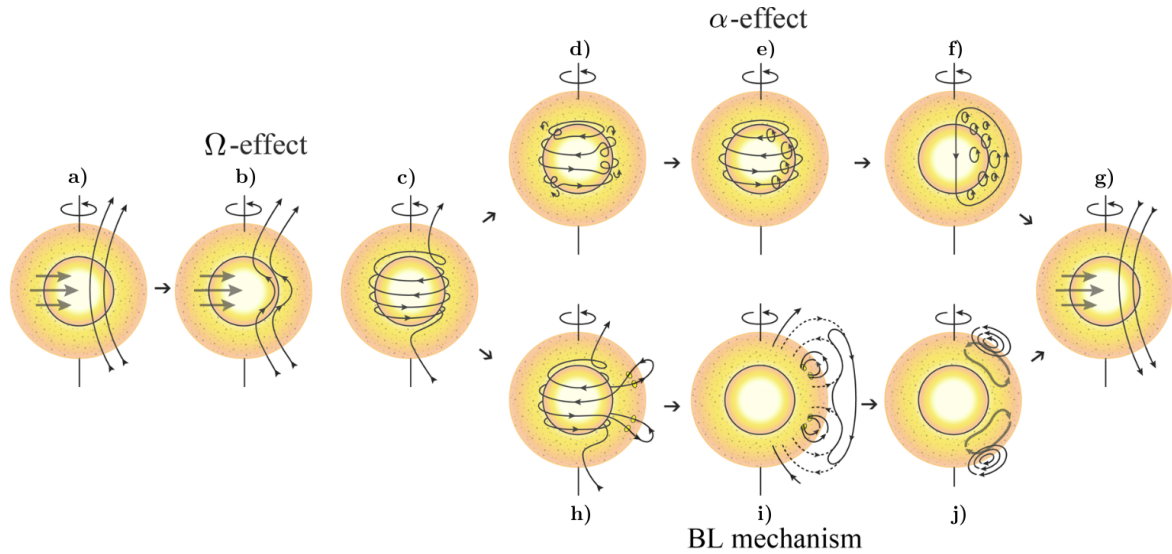


FIGURE 1.8 – Schématisation de l’effet- Ω responsable de la régénération de la composante toroïdale du champ magnétique (a)-(c) et de la composante poloïdale selon deux mécanismes différents. L’effet- α est présenté sur les diagrammes (d)-(f) et le mécanisme Babcock-Leighton de (h)-(j). Se référer aux sections 1.2.2 à 1.2.4 pour plus de détails. Image provenant de Sanchez et al. (2014).

1.2.3 De Toroïdal à Poloïdal; le mécanisme de Babcock-Leighton

Le mécanisme à la source de la régénération du champ magnétique en direction poloïdale ayant probablement reçu le plus d’attention dans les dernières années est celui proposé par Horace Babcock (Babcock 1961) et Robert Leighton (Leighton 1964, 1969) vers la fin des années soixante. L’inspiration de ce mécanisme provient de l’observation des magnétogrammes du Soleil (voir fig. 1.7) où l’on remarque que la composante poloïdale du champ en surface provient de la désintégration des régions actives (voir §1.1.3). Puisque l’on suppose que ces taches sont le résultat de la déstabilisation des tubes de flux provenant d’un champ magnétique toroïdal antisymétrique (fig. 1.8-(h)), elles représentent donc un mécanisme de régénération de la composante poloïdale lorsqu’elles se désintègrent. Ce flux magnétique poloïdal est ensuite transporté par la circulation méridienne vers l’intérieur de la zone convective (fig. 1.8-(i-j)). De cet endroit, il pourra se faire amplifier par cisaillement causé par la rotation différentielle et constituer la source du prochain cycle (fig. 1.8-(g)).

1.2.4 De Toroïdal à Poloïdal; l'effet- α

Parallèlement au mécanisme de Babcock-Leighton, un second mécanisme a été proposé par Parker (1955) pour régénérer la composante poloïdale. Ce mécanisme a été développé dans le contexte de l'électromagnétisme des champs moyens (Steenbeck et al. 1966) et se base sur une séparation du champ magnétique \mathbf{B} et de l'écoulement \mathbf{u} en une composante moyenne $\langle \mathbf{B} \rangle$ et $\langle \mathbf{u} \rangle$ et une composante fluctuante \mathbf{B}' et \mathbf{u}' . L'opérateur de moyenne utilisé dans le contexte des modèles dynamo est celle de la moyenne azimutale, représentée ici par les crochets $\langle \dots \rangle$.

L'introduction de cette séparation d'échelle (c.-a.-d $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}'$ et $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$) dans l'équation d'induction (1.2) où la moyenne est ensuite effectuée sur l'équation résultante, fait apparaître une force électromotrice turbulente (FEM) \mathcal{E} :

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathcal{E} - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) . \quad (1.5)$$

Cette FEM est induite par la partie fluctuante de l'écoulement et du champ magnétique tel que $\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle$. Conjointement avec cette nouvelle version de l'équation d'induction, lorsqu'on soustrait l'équation (1.5) à l'équation d'induction originale (1.2), une équation d'évolution pour la partie fluctuante du champ magnétique est obtenue:

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \mathbf{B}' + \mathbf{u}' \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{G} - \eta \nabla \times \mathbf{B}') , \quad (1.6)$$

où $\mathbf{G} = \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' - \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle$. Par contre, la résolution des composantes fluctuantes du champ magnétique impliquerait l'ajout de trois nouvelles équations au système (une pour chaque direction) en plus de faire intervenir les composantes de \mathbf{u}' qui sont également inconnues. Puisque l'on s'intéresse principalement à la composante à grande échelle du champ magnétique et non aux détails des composantes fluctuantes, la plupart du temps l'équation (1.6) ne sera pas explicitement résolue. Par contre, dans le but d'obtenir la fermeture de l'équation (1.5) et pour capturer la statistique de ces composantes fluctuantes sans avoir à les résoudre directement, on réécrira la FEM comme une série tensorielle en fonction de $\langle \mathbf{B} \rangle$ et de ses dérivées:

$$\mathcal{E} = \mathbf{a} \cdot \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b} \cdot \nabla \langle \mathbf{B} \rangle + \text{termes d'ordre supérieur.} \quad (1.7)$$

La plupart du temps, cette série sera tronquée après le deuxième terme dont les quantités \mathbf{a} et \mathbf{b} représentent des pseudo-tenseurs d'ordre 2 et 3 respectivement. Ce développement en série est valide tant que la séparation d'échelles pour \mathbf{B} et \mathbf{u} , telle que décrite précédemment, tient (Moffatt 1978). Pour simplifier l'interprétation de la série (1.7), on réécrit souvent les deux premiers termes comme:

$$\mathcal{E} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \langle \mathbf{B} \rangle + \boldsymbol{\gamma} \times \langle \mathbf{B} \rangle - \boldsymbol{\beta} \cdot (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) - \boldsymbol{\delta} \times (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) - \boldsymbol{\kappa} \cdot (\nabla \langle \mathbf{B} \rangle)^{sym}, \quad (1.8)$$

où le tenseur $\boldsymbol{\alpha}$ et le vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ représentent la partie symétrique et antisymétrique du tenseur \mathbf{a} respectivement. La décomposition du tenseur \mathbf{b} est un peu plus complexe et se décompose en trois parties; un tenseur d'ordre 2 ($\boldsymbol{\beta}$), un vecteur ($\boldsymbol{\delta}$) et un tenseur d'ordre 3 ($\boldsymbol{\kappa}$). En remplaçant l'expression (1.8) dans l'éq. (1.5) et en négligeant les contributions des quantités $\boldsymbol{\kappa}$ et $\boldsymbol{\delta}$ (voir §2.3 pour plus de détails), on obtient:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times \left[(\langle \mathbf{u} \rangle + \boldsymbol{\gamma}) \times \langle \mathbf{B} \rangle + \boldsymbol{\alpha} \cdot \langle \mathbf{B} \rangle - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle - \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle \right]. \quad (1.9)$$

À partir de l'équation (1.9), il devient désormais plus facile d'interpréter chacune de ces contributions. Le vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ est appelé pompage turbulent et joue le rôle d'une vitesse additionnelle au champ de vitesse moyen $\langle \mathbf{u} \rangle$. Le terme $\boldsymbol{\alpha} \cdot \langle \mathbf{B} \rangle$ est celui permettant la régénération de la dynamo dans les modèles de champ moyen et est appelé effet- α . Finalement, le tenseur $\boldsymbol{\beta}$ joue le rôle d'une diffusivité supplémentaire et sera discuté plus en détail dans la prochaine section.

En séparant l'équation (1.9) en une partie toroïdale et poloïdale à la manière de la section 1.2.1, on retrouve des équations similaires aux équations (1.3) et (1.4). Par contre, ces deux nouvelles équations (voir éq. (3.5) et (3.6)) présentent désormais deux termes sources supplémentaires. Le mécanisme physique décrivant l'effet de ces deux nouveaux termes sources, tel que mentionné plus tôt, est appelé l'effet- α . L'effet- α décrit comment les lignes de champ magnétique présentes dans la zone de convection se feront tordre par les tourbillons cycloniques convectifs. Ainsi, étant donné le bris de symétrie causé par la force de Coriolis, les lignes de champ auront statistiquement un sens préférentiel de torsion dans l'un ou l'autre

des hémisphères. De cette façon, ces lignes de champs magnétiques contribueront à régénérer la composante poloidale au détriment de la composante toroïdale (voir fig. 1.8 (d) à (g)). Cet effet- α est décrit mathématiquement par les neuf composantes du tenseur α dont chacune des composantes a une dépendance latitudinale et radiale. Malheureusement, la forme exacte de ce tenseur n'est pas bien connue et est difficilement mesurable. Pour cette raison, ce type de modèle a reçu moins d'attention dans les dernières années que ceux de type Babcock-Leighton. Une des façons couramment utilisées pour déterminer les coefficients du tenseur α est celle où les corrélations croisées entre deux composantes fluctuantes sont négligées; c'est-à-dire $\mathbf{G} \simeq 0$ dans l'équation (1.6). Ainsi, l'équation (1.6) peut être résolue et il est possible de trouver la relation suivante pour α^* (Krause & Rädler 1980):

$$\alpha^* = -\frac{1}{3}\tau_c \langle \mathbf{u}' \cdot (\nabla \times \mathbf{u}') \rangle . \quad (1.10)$$

Cette approximation est appelée SOCA de l'anglais *Second Order Correlation Approximation* et suppose une turbulence homogène et isotrope dans lequel cas on peut poser de manière générale que $\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij}$. L'approximation SOCA est valide dans la mesure où le nombre de Strouhal (St), mesurant le ratio du temps de corrélation des cellules convectives (τ_c) versus leur temps de retournement, est plus petit que 1. L'approximation SOCA montre également que l'effet- α est intimement lié à l'hélicité cinétique turbulente $\mathbf{u}' \cdot (\nabla \times \mathbf{u}')$ et proportionnel au temps de corrélation τ_c . Le problème avec cette approximation est que la condition du petit nombre de Strouhal n'est pas vraiment, ou pas partout, respectée dans la zone convective du Soleil. D'autres méthodes peuvent être utilisées pour déterminer les coefficients du tenseur α en utilisant d'autres types d'hypothèses (voir par exemple Rogachevskii & Kleeorin 2003; Brandenburg & Subramanian 2005; Pipin & Proctor 2008), mais ne seront pas abordées ici.

La détermination des coefficients de transport turbulent, autant du tenseur α que du tenseur de diffusion β , est importante pour approfondir notre compréhension de la dynamo solaire. Jusqu'à récemment, il était supposé que la contribution du second terme source relié à l'effet- α dans l'équation (3.6) était négligeable par rapport à la contribution de l'effet- Ω (nommé modèle de type $\alpha\Omega$). Négliger ce second terme source revient à simplifier $\alpha_{ij} =$

$\alpha_{i\phi}$ ou encore $\alpha_{ij} = \alpha_{\phi\phi}$, cette dernière expression étant utilisée dans la vaste majorité des modèles dynamo en champ moyen. Par contre, avec la venue des modèles globaux 3D-MHD de la convection solaire, une nouvelle méthode numérique pour déterminer ces coefficients est désormais accessible (décrite en détail à la section 2.4). Plusieurs analyses montrent que, non seulement les composantes hors diagonales ne sont pas nulles, mais également que la composante présentant la plus grande amplitude serait α_{rr} (Racine et al. 2011; Augustson et al. 2015; Warnecke et al. 2016; Simard et al. 2016). Encore aujourd’hui, la grande majorité des analyses dynamo en champ moyen suppose un α scalaire en mode $\alpha\Omega$. Presque aucune étude n’a été faite dans le cas où le second terme source dans l’équation (3.6) est pris en compte, c’est-à-dire en mode $\alpha^2\Omega$. Ceci est dû à la difficulté de dériver une expression analytique pour les 9 composantes du tenseur $\boldsymbol{\alpha}$ à la manière de l’approximation SOCA. Quelques tentatives ont été faites dans ce sens par le passé (voir par exemple Choudhuri 1992; Moss et al. 1992; Meunier et al. 1996), mais requièrent l’utilisation de plusieurs hypothèses sur l’écoulement et le champ magnétique. Le mode $\alpha^2\Omega$ reste encore aujourd’hui très peu étudié et utilisé dans les modèles dynamo contemporains.

1.2.5 Diffusivité turbulente

La diffusivité magnétique microscopique représentée par η dans l’équation (1.2), décrit comment les courants électriques responsables des champs magnétiques seront éventuellement soumis à la dissipation ohmique. Dans le Soleil, la conductivité (σ) du plasma dans la zone convective est très élevée, et par conséquent la diffusivité magnétique très faible puisque $\eta = 1/\mu_0\sigma$. L’inclusion de la FEM telle que définit par l’éq. (1.8), ajoute dans les équations dynamo une contribution supplémentaire à la diffusivité magnétique (voir éq. (1.9)). En supposant une turbulence homogène et isotrope, le tenseur $\boldsymbol{\beta}$ se réduit à une quantité scalaire β et on peut ainsi réécrire le terme de diffusion dans l’équation (1.9) comme: $(\eta + \beta)\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle$. On retrouve donc une diffusivité effective totale définie comme $\eta_e = \eta + \beta$. Cette nouvelle contribution représente la diffusivité turbulente et domine en amplitude par rapport à la diffusivité microscopique; $\beta \gg \eta$. Pour cette raison, dans plusieurs modèles dynamo on supposera que $\eta_e \simeq \beta$. De la même façon qu’il a été possible de déterminer une expression pour α^* , on peut

réécrire cette diffusivité selon l'approximation SOCA comme:

$$\beta_* = \frac{1}{3} \tau_c \langle (u')^2 \rangle . \quad (1.11)$$

En utilisant les résultats provenant des modèles de longueur de mélange, on peut estimer $u' \simeq 10 \text{ m s}^{-1}$ et avec τ_c estimé à environ 1 mois dans la moitié inférieure de la zone convective du Soleil, on trouve une diffusivité turbulente de l'ordre de $10^8 - 10^9 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Cette valeur est beaucoup plus élevée que celle de la diffusivité microscopique qui est de l'ordre de $1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Malheureusement, une diffusivité magnétique aussi élevée dans les modèles dynamo nuit considérablement à l'amplification d'un champ magnétique oscillatoire. Encore aujourd'hui, ce paramètre reste l'un des moins bien contraints par les modèles en champ moyen (Muñoz-Jaramillo et al. 2011).

1.2.6 Saturation de l'amplitude

En observant l'équation (1.9), on remarque que celle-ci est linéaire en $\langle \mathbf{B} \rangle$. Étant donné que les quantités α , β , γ et \mathbf{u} sont indépendantes du temps, il est donc possible de trouver des solutions de type fonction propre pour le potentiel vecteur A et la composante toroïdale B dont les taux de croissance exponentielle représentent les valeurs propres. Malheureusement, il n'y a aucun mécanisme qui apparaît naturellement dans l'équation (1.9) pour limiter l'amplitude de ces champs magnétiques générés. Pour contourner ce problème, différents mécanismes de saturation peuvent être ajoutés *ad hoc*. Dans le cas des modèles en champ moyen décrits par les équations (3.5) et (3.6) présentées au chapitre 3, on limitera l'amplitude de la dynamo en diminuant l'effet- α . Cette hypothèse provient du fait que la force de Lorentz, non présente dans les équations (3.5) et (3.6), devrait éventuellement limiter l'amplitude de la vitesse turbulente responsable de l'effet- α . Une méthode souvent utilisée pour saturer la dynamo est celle où l'effet- α est réduit lorsque le champ magnétique atteint une valeur comparable à la valeur du champ magnétique d'équipartition (B_{eq}). B_{eq} est atteint lorsque l'énergie magnétique par

unité de volume est comparable à l'énergie cinétique reliée à la vitesse turbulente du fluide:

$$\frac{B_{eq}^2}{2\mu_0} = \frac{\rho(u')^2}{2} \rightarrow B_{eq} = u' \sqrt{\mu_0 \rho} . \quad (1.12)$$

Au bas de la zone de convection, B_{eq} est estimé à ~ 1 T en utilisant les valeurs typiques de $\rho = 100 \text{ kg m}^{-3}$ et de $u' = 10 \text{ m s}^{-1}$. Cette valeur de champ magnétique d'équipartition descend autour de $\sim 0,1$ T près de la surface. Cette saturation de l'effet- α faisant intervenir B_{eq} peut se définir comme:

$$\alpha(\langle \mathbf{B} \rangle) = \frac{\alpha_0}{1 + (\langle \mathbf{B} \rangle / B_{eq})^2} . \quad (1.13)$$

Contraint par les limites des modèles dynamo, cette équation est malheureusement une version très simplifiée d'un processus physique beaucoup plus complexe. Une version similaire de cette équation peut être également appliquée à la diffusivité turbulente qui, elle aussi, est sujette au même phénomène physique². Pour plus de détails sur les mécanismes de saturation, voir la section 2.5.1.

1.3 Fluctuations et modulations à long terme de l'activité solaire

La reproduction des caractéristiques générales du cycle solaire telles que décrites à la section 1.1.3 est une tâche relativement facile lorsque l'on considère des modèles simples décrits uniquement par les équations de la section précédente. Par contre, réussir à modéliser les caractéristiques des fluctuations présentes dans la série temporelle des taches et des reconstructions de l'activité solaire est beaucoup plus difficile. Dans cette section, les différentes caractéristiques des fluctuations observées dans les mesures du nombre de taches (§1.3.1) ainsi que dans les reconstructions de l'activité solaire (§1.3.2 et §1.3.3) seront présentées.

²On utilise le mot anglais *quenching* pour décrire la réduction de l'amplitude des différents paramètres lors des périodes où l'activité magnétique est maximale.

1.3.1 Fluctuations et grand minimum de Maunder

Un bon nombre de relations et de règles ont été trouvées parmi les différentes caractéristiques de la série temporelle de taches solaires (voir figure 1.5). Toutefois, avec les années, la plupart de ces relations se sont avérées être non statistiquement significatives. Une des seules relations toujours acceptées aujourd’hui est la règle de Waldmeier (Waldmeier 1935). Cette règle établit une anti-corrélation ($r \simeq -0.7$, voir Charbonneau 2013 §4.1) entre l’amplitude maximale d’un cycle et le temps pris pour celui-ci à passer du minimum au maximum suivant. Bien que certains modèles soient parvenus à reproduire cet effet (voir par exemple Hoyng 1993; Ossendrijver & Hoyng 1996; Pipin & Sokoloff 2011; Karak & Choudhuri 2011), des études ont démontré que cette corrélation était grandement diminuée lors de l’utilisation du GSN au lieu du traditionnel nombre de taches solaires (Hathaway et al. 2002). De plus, cette corrélation ne serait également pas observée dans la série temporelle de la surface de couverture des taches solaires (Dikpati et al. 2008).

Une caractéristique importante à reproduire dans les modèles dynamo simulant sur de longues périodes est la présence de grands minima. Ces périodes durant lesquelles le niveau d’activité solaire est significativement plus bas que la moyenne sont observées non seulement dans la série temporelle du nombre de taches solaires, mais également dans les reconstructions de l’activité solaire (voir §1.3.3).

Le seul grand minimum à avoir été observé directement est nommé grand minimum de Maunder (voir figure 1.5) et correspond à la période entre 1645 et 1715 où presque aucune tache n’a été répertoriée par les observateurs. Une première étude faite par Eddy (1976) a démontré que les scientifiques de l’époque avaient bel et bien la technologie et la connaissance pour reconnaître la présence ou l’absence de taches à la surface du Soleil. Par la suite, Ribes & Nesme-Ribes (1993) ont étudié les journaux des différents observateurs de cette époque pour faire le registre des jours où des observations ont été relevées. Les auteurs ont fini par conclure que cette plage temporelle avait été couverte régulièrement par des observations malgré l’absence de taches et ainsi, correspond véritablement à une période où l’activité solaire était significativement réduite. De plus, une forte asymétrie nord-sud (Ribes & Nesme-Ribes 1993; Sokoloff & Nesme-Ribes 1994) a été observée lors de la reprise du cycle (voir

figure 1.9) conjointement avec une émergence de taches située sous 20° latitude. Des analyses complémentaires ont été faites à partir des quelques taches solaires observées durant et après le minimum de Maunder dans le but de déterminer la vitesse de rotation à la surface du Soleil. Plusieurs analyses montrent une différence entre la vitesse de rotation moderne et celle observée lors du minimum de Maunder (Eddy et al. 1976; Ribes & Nesme-Ribes 1993; Arlt & Fröhlich 2012). Cet effet est prévisible puisque la force de Lorentz produite par le champ magnétique module la rotation différentielle. Ainsi, un changement significatif dans le champ magnétique sera également ressenti dans la rotation différentielle. Bien que les observations de l'époque du minimum de Maunder restent peu précises et éparées, il semble clair que le Soleil soit tombé dans un état d'activité magnétique particulier et différent de celui observé aujourd'hui.

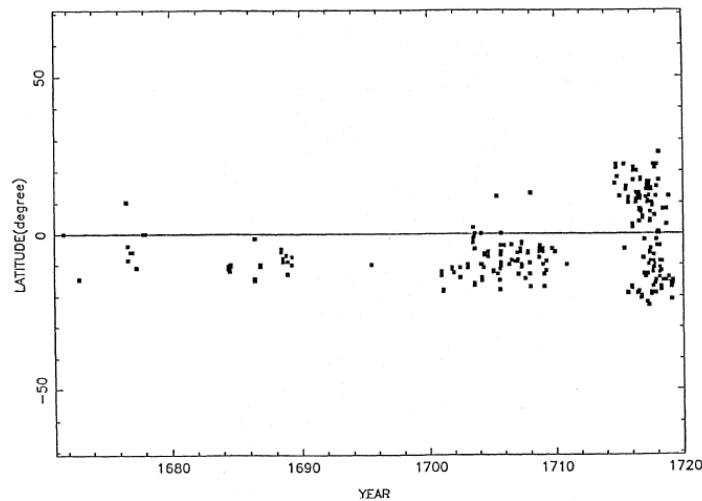


FIGURE 1.9 – Diagramme latitude-temps des taches solaires à l'époque du minimum de Maunder tel que reconstruit à partir des données historiques analysées par Ribes & Nesme-Ribes (1993) et Sokoloff & Nesme-Ribes (1994).

Récemment, le débat de l'existence du grand minimum de Maunder a été rouvert dans un article écrit par Zolotova & Ponyavin (2015) dans lequel les auteurs ont effectué une nouvelle analyse des données historiques. Les auteurs concluent qu'il y aurait eu une omission volontaire dans les registres d'observations des taches causée par le climat social et religieux de l'époque et que la période entre 1645-1715 n'était pas très différente du reste de la série temporelle des taches. En réponse à cet article, Usoskin et al. (2015) ont effectué plusieurs

analyses indépendantes faites sur différents indices d'activités. Dans chacune de ces analyses, le minimum de Maunder reste visible et significatif.

Depuis la découverte de ce grand minimum, beaucoup de travail a été effectué dans le but de comprendre quels sont les mécanismes physiques à la source de cette diminution de l'activité solaire et comment ces grands minima se manifestent dans le champ magnétique produit dans la zone de convection. Bien qu'il n'y ait encore aucune preuve, il n'est pas exclu que les périodes de grands minima puissent affecter le climat terrestre. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la période du grand minimum de Maunder coïncide temporellement avec celle du petit âge glaciaire (*Little Ice Age*) observée en Europe.

1.3.2 Reconstruction de l'activité solaire

L'activité magnétique du Soleil ne se réduit pas seulement à la série temporelle du nombre de taches, mais peut également être reconstruite des millénaires dans le passé grâce aux isotopes cosmogéniques. Le vent solaire, qui emporte avec lui une partie du champ magnétique du Soleil, module le flux de rayons cosmiques pénétrant dans notre système solaire. Ce vent est lui-même couplé à l'activité magnétique à la surface du Soleil et est par conséquent modulé par le cycle de 11 ans. Ce champ magnétique interplanétaire nous protège ainsi plus efficacement des particules cosmiques lors d'un maximum d'activité que lors d'un minimum. Des rayons cosmiques qui réussiront à pénétrer la magnétosphère terrestre, certains interagiront avec des particules présentes dans l'atmosphère. En particulier, la spallation d'un atome d'azote ou d'oxygène atmosphérique par un rayon cosmique produira le Be^{10} , isotope cosmogénique ayant une demi-vie de 1.5×10^6 ans. Après sa production, le Be^{10} s'agglomérera aux aérosols de l'atmosphère et voyagera en moyenne de 1-2 ans avant de se déposer au sol majoritairement sous forme de précipitations. La quantité de Be^{10} ayant été produite des milliers d'années dans le passé peut être déterminée à partir de forages dans les calottes glaciaires où il s'emmagasine. À partir de ces mesures, un nombre de rayons cosmiques à l'origine de cette production peut être calculé. Finalement, puisque ce dernier porte la signature de l'activité magnétique du Soleil, il est possible d'en extraire la modulation à long terme dans laquelle le signal de 11 ans n'est généralement pas visible. La résolution temporelle des reconstructions permet de

distinguer le cycle solaire sur environ 500 ans. Dépassé cette valeur, seule la modulation à long terme de l'activité solaire est perceptible. Un processus similaire est également utilisé à partir des mesures de l'isotope cosmogénique C^{14} obtenues dans les anneaux de croissance des arbres.

1.3.3 Caractéristiques de la variabilité de l'activité solaire sur des millénaires

Les reconstructions de l'activité solaire effectuées à partir d'isotopes cosmogéniques sont malheureusement soumises à beaucoup de sources d'incertitude. Toutefois, certaines caractéristiques générales ressortent. La figure 1.10 présente un exemple de ces reconstructions réalisé à partir du C^{14} par Usoskin et al. (2007). À noter que les mesures obtenues à partir du C^{14} ne permettent pas de distinguer l'oscillation du cycle de 11 ans. On capture seulement la modulation à long terme de son amplitude. Les zones en rouges et bleues représentent les périodes de grands maxima et grands minima respectivement. De ces analyses, on observe que le Soleil passe entre 15 à 20% de son temps dans des périodes de faible activité (grands minima) et un peu moins pour les périodes de haute activité (grands maxima), soit environ 10% (Usoskin 2013). Une des questions les plus importantes dans la compréhension de l'activité solaire à long terme est de savoir comment ces événements sont organisés dans le temps. Plusieurs analyses de décomposition spectrale en ondelette (*wavelet spectral decomposition*) effectuées sur ces séries temporelles ont montré la présence de quasi-périodicités (Vasiliev & Dergachev 2002; Peristykh & Damon 2003; Usoskin et al. 2007; Steinhilber et al. 2012). Bien que celles-ci varient légèrement en fonction du type de reconstruction, certaines semblent ressortir systématiquement. Entre autres, le cycle de Hallstatt d'environ 2 000 - 2 400 ans a été mesuré par plusieurs analyses indépendantes (Damon & Sonett 1991; Vasiliev & Dergachev 2002; Usoskin et al. 2007). Ce cycle jouerait le rôle d'une enveloppe de modulation regroupant les grands minima et grands maxima lors des phases de minimum et maximum respectivement (Usoskin et al. 2016).

En parallèle à ces analyses, les études de la distribution du temps de séparation (DTS) entre deux grands minima successifs présentent une distribution presque exponentielle (voir figure

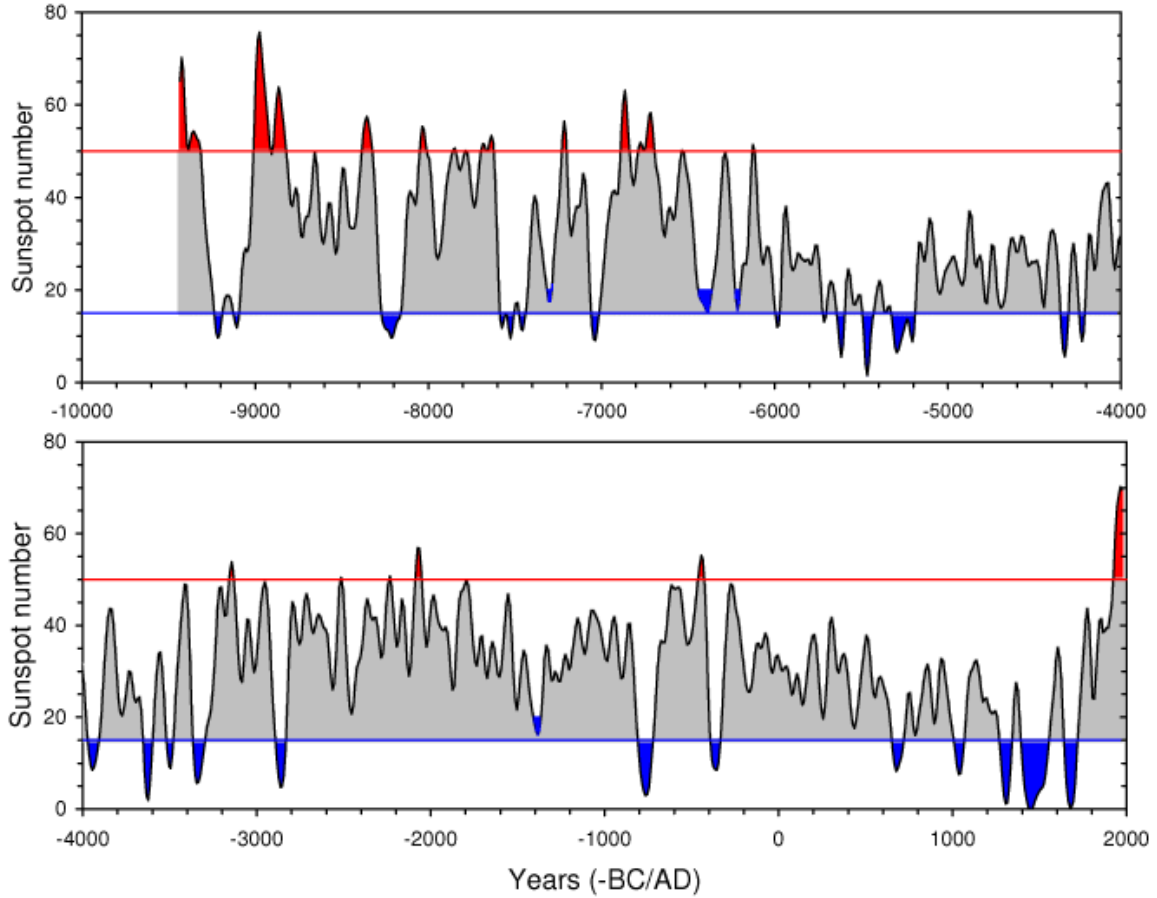


FIGURE 1.10 – Reconstruction du nombre de taches solaires réalisée par Usoskin et al. (2007) à partir de l’abondance du C^{14} basée sur les données géomagnétiques de Yang et al. (2000). Les zones en bleues et rouges représentent les périodes de grands minima et maxima respectivement.

1.11). Une distribution parfaitement exponentielle de la DTS signifie que l’occurrence des grands minima est régie par un processus sans mémoire de type Poisson. Ainsi, la probabilité d’occurrence des événements régis par ce type de processus est indépendante du temps. Bien que la distribution présentée à la figure 1.11 de gauche compte peu de grands minima, la déviation observée dans sa loi exponentielle pourrait indiquer que sa probabilité d’occurrence est non uniforme. Cette caractéristique serait d’ailleurs cohérente avec les résultats d’analyses faites sur la tendance aux grands minima à se regrouper (Usoskin et al. 2016). De plus, l’histogramme de la durée des grands minima présenté à la figure 1.11 de droite montre une distribution bimodale suggérant que les grands minima se séparent en deux types selon leur durée (Usoskin et al. 2012). Finalement, malgré la mesure de certaines quasi-périodicités,

les analyses des reconstructions de l'activité solaire semblent montrer que l'occurrence des grands maxima et minima est principalement régie par des processus stochastiques avec une probabilité d'apparition dépendante du temps (Usoskin et al. 2007, 2012).

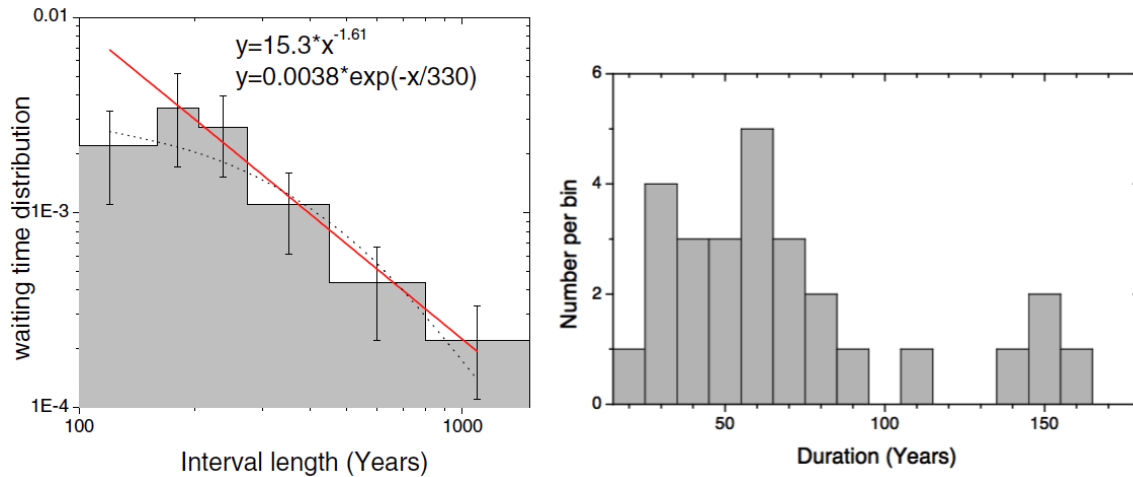


FIGURE 1.11 – Gauche: distribution du temps de séparation des grands minima à partir d'une reconstruction de l'activité solaire (Usoskin et al. 2007). Droite: histogramme de la durée des grands minima effectué à partir de la même reconstruction que la figure de gauche.

1.4 Modélisation des fluctuations et de l'intermittence

Tel qu'il a été discuté à la section précédente, en plus de présenter des périodes de grands minima et maxima, tant l'amplitude que la période du cycle solaire fluctuent. Pour essayer de reproduire les statistiques de ces fluctuations ainsi que les périodes d'arrêt du cycle, d'autres mécanismes doivent être ajoutés à ceux décrits à la section 1.2 responsables seulement de la régénération du champ magnétique. Dans cette section seront discutés deux des mécanismes les plus couramment invoqués dans les modèles dynamo en champ moyen pour reproduire certaines de ces caractéristiques.

1.4.1 Fluctuations d'amplitude par le bruit stochastique

L'une des façons les plus directes pour générer des fluctuations d'amplitude dans un cycle magnétique est d'inclure une source de bruit stochastique dans l'une des contributions inductives susceptibles de fluctuer. Dans le cas de la zone convective du Soleil, puisque c'est

un milieu dominé par la turbulence, on peut facilement imaginer que les écoulements, tant à grande échelle qu'à petite échelle, présenteront des fluctuations stochastiques. Plusieurs auteurs ont choisi d'intégrer une composante aléatoire à la FEM (voir §1.2.4) via l'effet- α puisque la FEM provient du produit des composantes fluctuantes de l'écoulement et du champ magnétique. Une technique souvent utilisée est celle où l'on ajoute une composante fluctuante de moyenne nulle à la valeur fixe de α_0 tel que:

$$\alpha = \alpha_0 + \xi \times \delta\alpha , \quad (1.14)$$

où ξ est un nombre aléatoire uniformément distribué entre $[-1,1]$ et $\delta\alpha$ est une constante contrôlant le niveau d'amplitude des fluctuations. La valeur du nombre aléatoire ξ est redéfinie après chaque intervalle de temps τ_c caractérisant le temps de corrélation typique d'une cellule convective. Selon le niveau de fluctuation que l'on veut intégrer dans le modèle, on peut ajuster la valeur de $\delta\alpha$ en conséquence.

Cette technique a été utilisée, entre autres, par Hoyng (1993) et Ossendrijver & Hoyng (1996) où ceux-ci ont réussi à reproduire des périodes d'arrêt de la dynamo, de fortes modulations d'amplitude et une corrélation prononcée entre la durée du cycle et son amplitude (semblable à la loi de Waldmeier). La particularité de leur modèle provient du fait que leur nombre dynamo³ se trouve tout juste au-dessus du nombre dynamo critique (D_{crit}). Des grands minima sont donc observés lorsque le nombre dynamo tombe en dessous de D_{crit} . Malheureusement pour cette classe de modèle, il semble peu probable que la dynamo solaire opère tout juste à la criticalité. Dans le cas d'un modèle utilisant un nombre dynamo légèrement supercritique, Moss et al. (2008) ont réussi à reproduire une DTS exponentielle des grands minima. Par contre, la plupart des modèles récents introduisant du bruit stochastique ont été développés dans le contexte des modèles Babcock-Leighton (voir par exemple Choudhuri & Karak 2012; Olemskoy & Kitchatinov 2013; Passos et al. 2014) et relativement peu dans le contexte des champs moyens.

³Le nombre dynamo est le produit de C_α et C_Ω tel que défini à la section §3.4.

1.4.2 Modulation d'amplitude par la force de Lorentz

La production d'un champ magnétique produira généralement une force de Lorentz qui tentera de s'opposer au mouvement du fluide. Dans le cas des modèles dynamo décrits plus haut, puisque l'écoulement est cinématique, cet effet est systématiquement négligé. Cependant, la rétroaction magnétique sur l'écoulement est un mécanisme jouant un rôle important sur la dynamo. Elle peut interagir de plusieurs façons; les composantes du champ magnétique aux petites ou aux grandes échelles peuvent chacune affecter l'écoulement turbulent et/ou l'écoulement aux grandes échelles. Dans cette section, l'interaction du champ magnétique aux grandes échelles affectant la rotation différentielle sera discuté. La méthode utilisée dans la majorité des articles incluant cette rétroaction sur la rotation est celle où l'écoulement azimutal total est séparé en un profil fixe temporellement $\Omega(r, \theta)$ et un profil pouvant fluctuer $\Omega'(r, \theta, \langle \mathbf{B} \rangle(r, \theta, t))$. La partie statique représente le profil de vitesse angulaire lorsque aucun champ magnétique ne vient perturber l'écoulement et la partie fluctuante prend en compte la force de Lorentz en direction azimutale et l'atténuation de Ω' causée par la viscosité du plasma (voir éq. (4.9) présentée au chapitre 4). Chacune de ces deux contributions est contrôlée par les nombres adimensionnels Λ et P_m (nombre de Prandtl magnétique) dont le premier mesure l'influence de la force de Lorentz, et le second contrôle le ratio de la dissipation visqueuse versus la dissipation ohmique. Pour une description mathématique plus complète, voir §4.3.2 et l'appendice B.

L'ajout de l'équation (4.9) à l'ensemble défini par l'éq. (3.5) et l'éq. (3.6) présentée au chapitre 3 a pour conséquence d'introduire une non-linéarité au système. Une des caractéristiques qui ressort régulièrement de cette classe de modèle est l'apparition de deux types de modulation de l'énergie magnétique. Le premier type est celui où l'énergie est modulée à travers un changement de la parité de la solution avec relativement peu de variation dans la perturbation de la rotation différentielle (Ω'). Le deuxième type est celui où un échange significatif entre les réservoirs d'énergie magnétique et cinétique est effectué. Dans cette seconde classe de modulation, de grandes perturbations en vitesse sont généralement produites conjointement avec des épisodes périodiques de grands minima. L'intervalle de temps entre les grands minima est contrôlé le paramètre P_m . Lorsque $P_m > 1$, aucun grand minima n'est

produit alors que plus Pm diminue ($Pm < 1$), plus la période d'apparition entre deux grands minima sera grande. Ce nombre introduit un temps caractéristique supplémentaire au modèle et est associé au fait que l'écoulement est influencé par le champ magnétique.

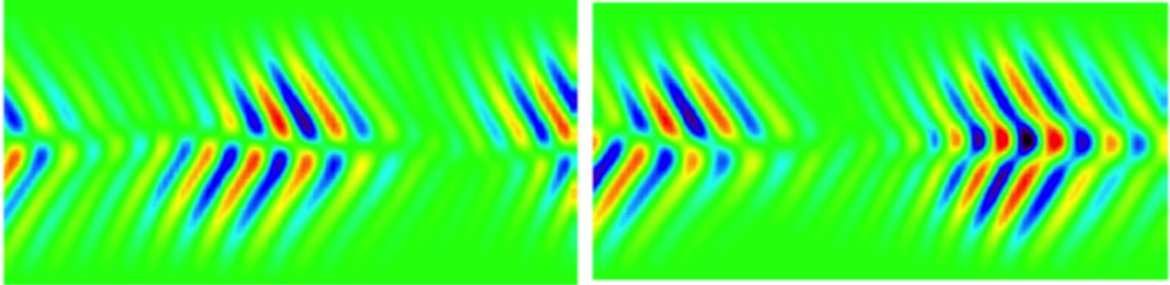


FIGURE 1.12 – Diagramme latitude-temps du champ magnétique en direction toroïdale produit par un modèle 1D en géométrie cartésienne incluant la rétroaction magnétique dans lequel les deux types de modulations d'énergie sont observés. Figure provenant de Tobias (2002).

La figure 1.12 montre un exemple du champ magnétique toroïdal en diagramme latitude-temps où les deux types de modulation sont observés simultanément. Une particularité intéressante de cette simulation est le changement de parité de la solution lors de la sortie d'un grand minimum. Cette caractéristique pourrait même expliquer l'asymétrie observée à la fin du minimum de Maunder. Malheureusement, bien que l'on retrouve certaines quasi-périodicités dans les reconstructions de l'activité solaire, l'occurrence des grands minima reste aperiodique. Un deuxième point faible de ces modèles est que les fluctuations produites dans Ω' par les grands minima sont substantielles et ne sont pas cohérentes avec les observations héliosismiques modernes. Ces deux types de modulation ont été observés par plusieurs auteurs dans le contexte des modèles de type $\alpha\Omega$ (Tobias 2002, 1996a; Knobloch et al. 1998; Küker et al. 1999; Brooke et al. 2002; Bushby 2006) mais encore une fois, la classe $\alpha^2\Omega$ reste inexplorée.

1.5 Simulation 3D-MHD globale

Avec le développement de la puissance des superordinateurs, une nouvelle classe de modèle devient accessible: les modèles globaux 3D-MHD de la convection solaire. Bien que les premiers modèles remontent déjà à plus de trente ans (Gilman 1983; Glatzmaier 1985), ce n'est que

depuis quelques années que ce type de modèle a réussi à générer des champs magnétiques présentant des structures à grandes échelles et des caractéristiques semblables à celles du Soleil (voir par exemple: Ghizaru et al. 2010; Brown et al. 2010, 2011; Käpylä et al. 2012; Masada et al. 2013; Nelson et al. 2013; Fan & Fang 2014; Augustson et al. 2015; Käpylä et al. 2016; Guerrero et al. 2016; Hotta et al. 2016). Les modèles 3D-MHD globaux représentent la classe de modèle le plus proche physiquement à un "vrai" Soleil. Contrairement aux modèles dynamo qui solutionnent seulement l'équation d'induction pour un écoulement \mathbf{u} donné, ces modèles résolvent l'ensemble complet des équations MHD. Ainsi, non seulement les modèles globaux solutionnent pour les trois composantes du champ magnétique sur une sphère creuse (seulement dans la zone de convection), mais également pour l'énergie et les trois composantes de la vitesse.

1.5.1 Les équations de la MHD

Comme discuté plus tôt, il est maintenant bien accepté que le champ magnétique du Soleil est généré par l'action dynamo de son intérieur conducteur. Le problème de la dynamo du Soleil, dans sa forme complète, consiste à trouver des écoulements qui sont cohérents avec nos observations tout en étant capable de générer un champ magnétique qui oscille et qui ne soit pas contraint à décroître avec le temps. La description de ce problème est obtenue avec les équations de la MHD où, dans le cas de la zone convective du Soleil, on retrouve les conditions physiques suivantes:

1. plasma très fortement ionisé avec un libre parcours moyen très court;
2. écoulements sous-relativistes; il est donc possible d'utiliser les transformations de Galilée et de négliger le courant de déplacement de Maxwell;
3. la fréquence de collision est très haute et le plasma presque neutre; la loi d'Ohm s'applique ainsi dans sa forme la plus simple.

Sous ces conditions physiques, il est possible d'écrire les trois autres équations (en plus de l'équation d'induction (1.2)) de la MHD: l'équation de continuité, l'équation de Navier-Stokes et finalement l'équation d'énergie interne:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 , \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + 2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} , \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) e + (\gamma - 1) e \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \left[\nabla \cdot ((\chi + \chi_r) \nabla T) + \phi_B \right] + \phi_\nu . \quad (1.17)$$

Dans ces équations, p représente la pression, \mathbf{g} la gravité, μ_0 la perméabilité du vide, $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur de stress visqueux et e l'énergie interne. Ces équations sont décrites dans un référentiel tournant à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ où le terme de force centrifuge est absorbé dans le terme de gradient de pression. De plus, on retrouve dans l'équation pour l'énergie interne (1.17) le facteur γ défini par le ratio des chaleurs spécifiques c_p/c_v , les termes χ et χ_r représentant les coefficients de conductivité thermique et radiative respectivement et finalement les paramètres ϕ_ν et ϕ_B représentant la fonction de dissipation visqueuse et le chauffage de joule. La fonction de dissipation visqueuse décrit le gain en énergie interne dû à la viscosité du plasma en mouvement, et se définit comme:

$$\phi_\nu = \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \right)^2 + \mu_\theta \frac{\partial u_s^2}{\partial x_s} , \quad (1.18)$$

où ν est le coefficient de viscosité cinématique et μ_θ la viscosité de volume du plasma. Finalement, le chauffage de joule qui décrit le gain en énergie interne associé à la dissipation des courants électriques présents dans la zone convective est défini comme:

$$\phi_B = \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B})^2 . \quad (1.19)$$

C'est à partir de cet ensemble d'équations couplées auquel on ajoute la relation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ qu'il est possible de bâtir un modèle global magnétohydrodynamique en trois dimensions de la dynamo solaire.

1.5.2 EULAG-MHD

Le modèle EULAG-MHD est un exemple particulier de la classe des modèles globaux. EULAG-MHD a été développé à partir du code EULAG (Prusa & Smolarkiewicz 2003; Prusa et al. 2008) qui était à l'origine un modèle atmosphérique anélastique où le Groupe de Recherche en Physique Solaire (GRPS) en collaboration avec le National Center for Atmospheric Research (NCAR) ont ajouté l'aspect MHD. Plusieurs articles couvrent déjà différents aspects techniques de ce code très complexe, pour cette raison seulement les caractéristiques générales seront discutées ici. Pour plus de détails et d'analyses, voir Ghizaru et al. (2010); Racine et al. (2011); Beaudoin et al. (2013); Smolarkiewicz & Charbonneau (2013); Cossette et al. (2013); Passos & Charbonneau (2014); Lawson et al. (2015).

EULAG-MHD résout l'ensemble des équations MHD dans l'approximation anélastique dans lequel aucune dissipation visqueuse explicite n'est implémentée. En partie pour ces raisons, les équations résolues diffèrent légèrement de celles présentées à la section 1.5.1 (voir Smolarkiewicz & Charbonneau (2013) pour l'ensemble exact des équations). Les termes visqueux sont implémentés de façon implicite selon la classe de modèle *Implicit Large Eddy Simulation* (ILES). Cette catégorie de modèles utilise le fait que l'erreur produite par les dérivées numériques d'ordre supérieur à 2 imite la cascade d'énergie cinétique vers les petites échelles et ainsi, joue le rôle d'un modèle sous-maille de dissipation d'énergie. De plus, même en utilisant un maillage plutôt modeste ($128 \times 64 \times 47$ en longitude, latitude et rayon), cette méthode permet de générer un plus grand spectre d'échelle caractéristique en vitesse que pour un maillage semblable utilisé par les LES conventionnelles. Grâce à ce gain en résolution, un temps de calcul appréciable peut être sauvé.

À partir du code EULAG-MHD, il a été possible de générer une solution où l'on observe un champ magnétique structuré à grande échelle et présentant des inversions de polarité à chaque ~ 40 ans. À la figure 1.13, un diagramme latitude-temps de la composante toroïdale de $\langle \mathbf{B} \rangle$ extraite à 0.718% du rayon est présentée ainsi que la composante radiale extraite relativement près de la surface. Le champ magnétique toroïdal généré dans cette simulation est situé entre 30° et 60° degrés de latitude et l'amplitude de ces cycles est relativement constante. De plus, le profil moyen de rotation différentielle obtenu dans cette simulation

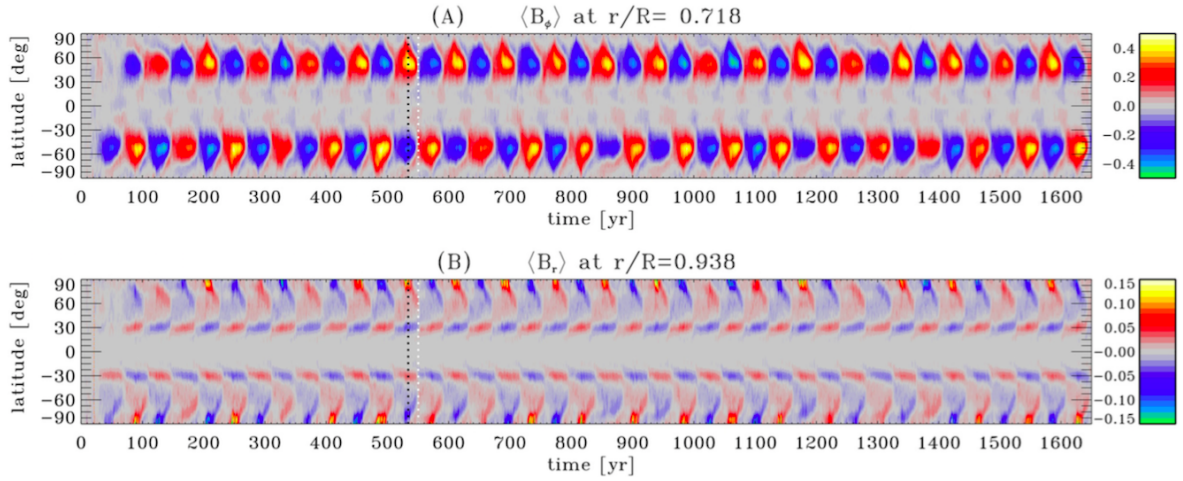


FIGURE 1.13 – Champ magnétique tel que généré par une simulation globale 3D-MHD de la convection solaire EULAG-MHD illustré en diagramme latitude-temps. Le panneau (A) illustre la composante toroïdale extraite à 0.718% rayon solaire et le panneau (B) la composante radiale extraite à 0.938%. Les résultats proviennent des analyses faites par Passos & Charbonneau (2014).

présente également des similarités avec le profil solaire de la figure 1.1. Les plus grandes différences sont l’absence d’une région de cisaillement située aux mi-latitudes et l’alignement des iso-contours avec l’axe de rotation près de l’équateur (voir figure 3.4B). Des analyses faites par Passos & Charbonneau (2014) montrent également que la distribution en amplitude et en période obtenues à partir d’un proxy utilisant B_ϕ présente une structure bimodale, et ce, pour chaque hémisphère indépendamment. Ceci représente une caractéristique intéressante, puisque des études récentes faites par Usoskin et al. (2014) ont également trouvé une structure bimodale à partir d’une reconstruction de l’activité solaire faite sur des milliers d’années (voir §1.3.3). Bien que les modèles globaux 3D-MHD constituent la classe de modèles les plus réalistes, même les simulations les plus longues à ce jour (Passos & Charbonneau 2014; Augustson et al. 2015; Käpylä et al. 2016) ne sont pas suffisantes pour étudier les modulations produites sur des temps caractéristiques beaucoup plus longs que la période du cycle.

1.6 Contexte de la recherche actuelle

Le modèle global EULAG-MHD tel que décrit à la section 1.5.2 est le premier de son type à avoir pu produire un champ magnétique structuré à grande échelle, présentant des inver-

sions de polarité régulières et ayant un bon synchronisme hémisphérique (Ghizaru et al. 2010). Dans EULAG-MHD, la surface n'est pas modélisée et par conséquent le terme source relié à la désintégration du flux magnétique des taches solaires (mécanisme de Babcock-Leighton décrit à la §1.2.3) n'est aucunement responsable de la régénération de son champ magnétique. Le mécanisme responsable de la dynamo dans EULAG-MHD ainsi que dans plusieurs autres modèles globaux est causé par la force électromotrice turbulente uniquement. Cette observation relativement récente a ravivé l'intérêt de l'étude des composantes des tenseurs α et β . Dans cette optique, une analyse numérique par décomposition en valeurs singulières (DVS) a été développée par Racine et al. (2011) dans laquelle une extraction des coefficients du tenseur α à partir des données d'une simulation globale (EULAG-MHD) a été obtenue pour la première fois. Puisque le grand point faible des modèles de champ moyen provenait du manque de connaissance sur la structure spatiale du tenseur α , mon projet de maîtrise consistait à analyser l'impact de l'inclusion du tenseur α complet tel qu'extraît par Racine et al. (2011) dans un modèle en champ moyen. Les analyses produites par Simard et al. (2013) ont montré qu'il est possible de relativement bien reproduire les caractéristiques générales du champ magnétique à grande échelle de EULAG-MHD à partir de ce modèle en champ moyen. Celles-ci constituent donc une démonstration empirique de la fiabilité de la méthode de Racine et al. (2011). De plus, les analyses comparatives entre un modèle simplifié (modèle dynamo en champ moyen avec tenseur α complet) et un modèle global 3D-MHD nous aident à mieux comprendre le rôle des différents mécanismes physiques à l'origine de la dynamo. Les modèles globaux sont très complexes à analyser et il n'est pas facile de décomposer les contributions et de comprendre les rôles de chaque mécanisme. Cette technique a donc été utilisée dans le but d'analyser l'origine du signal biennal observé dans le champ magnétique toroïdal d'EULAG-MHD et est présentée au chapitre 3.

Récemment, différentes analyses ont utilisé les résultats des données de simulations globales 3D-MHD pour extraire certains coefficients de transport turbulent (tenseur α et β). Les résultats pour la composante $\alpha_{\phi\phi}$ sont présentés à la figure 1.14 pour trois simulations globales différentes. Leur profil spatial ainsi que leur amplitude (fig. 1.14 droite et fig. 1.14 gauche) sont étonnamment comparables, et ce, malgré les différences significatives entre les

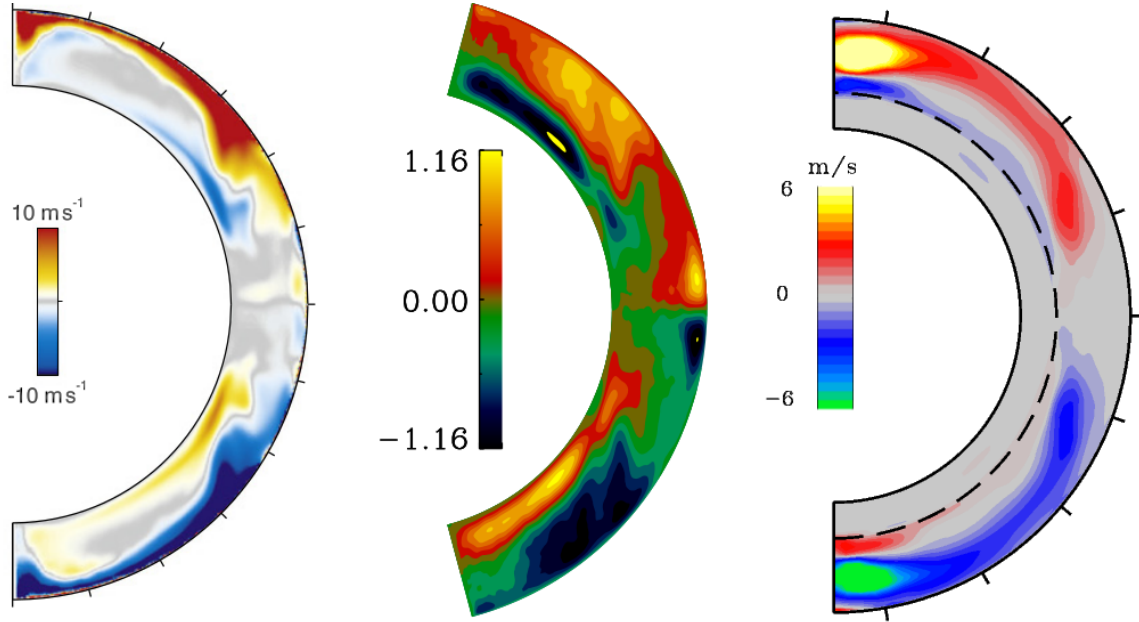


FIGURE 1.14 – Comparaison entre trois composantes $\alpha_{\phi\phi}$ extraites à partir de différentes simulations globales 3D-MHD de la convection solaire. De gauche à droite: résultats obtenus par Augustson et al. (2015), Warnecke et al. (2016) et Simard et al. (2016) illustrés sur un plan méridien. À noter que la figure du milieu a été normalisée et son amplitude ne peut donc pas être comparée aux deux autres composantes.

trois modèles. Ainsi, dans le but d’approfondir les résultats obtenus par Racine et al. (2011) et Simard et al. (2013), nous avons étendu l’extraction des composantes du tenseur α à celle du tenseur β également. Les résultats sont présentés au chapitre 2, avec les détails de la méthode d’extraction par DVS utilisée.

Dans un contexte où les modèles globaux 3D-MHD sont limités par, au maximum, quelques dizaines de cycles et où l’extraction des coefficients de transport turbulent devient facile, nous avons décidé de développer un modèle en champ moyen non cinématique incluant ces coefficients. Ce modèle est construit de manière à intégrer le tenseur α complet (type $\alpha^2\Omega$) ainsi que la rétroaction magnétique sur la rotation différentielle. Ce modèle peut également simuler une dynamo sur des dizaines de milliers d’années et reproduire des époques de grands minima et grands maxima. Pratiquement aucune autre analyse d’un modèle de type $\alpha^2\Omega$ incluant la rétroaction magnétique sur la rotation différentielle (voir Nigro et al. 2013) n’a encore été faite. L’analyse de certaines solutions obtenues par ce modèle est détaillée dans le

chapitre 4.

1.7 Contribution aux articles

Dans le but de pousser l'analyse faite par Racine et al. (2011), j'ai modifié le code numérique utilisé pour extraire les 9 composantes du tenseur α pour inclure les 27 composantes du tenseur β . La généralisation de la routine d'extraction de α et β ainsi que les résultats obtenus sont présentés au chapitre 2. En parallèle à l'extraction du tenseur β , j'ai effectué une analyse sur la diminution de l'amplitude des composantes β (§2.5) aidée par Caroline Dubé qui a analysé et créé les figures sur la diminution de l'amplitude des composantes du tenseur α . J'ai effectué toutes les autres analyses présentées dans le chapitre 2 et rédigé en majorité l'article dont les coauteurs ont assuré la révision et fait des suggestions d'ajouts aux manuscrits. Cet article a été publié le 15 octobre 2016 dans le journal *Advance in Space Research* pour l'édition spéciale *Solar Dynamo Frontiers*.

Le chapitre 3 étudie la possibilité qu'une seconde dynamo soit à l'origine des oscillations d'environ 2 ans observées dans plusieurs indices de l'activité solaire (voir §1.1.3) en faisant le parallèle avec les résultats de simulation obtenus avec EULAG-MHD. Dans cet article, dont le premier auteur est Patrice Beaudoin, nous avons analysé le signal d'une seconde oscillation magnétique en surface observée dans les données de simulation de EULAG-MHD. Dans le but de prouver que cette oscillation biennale puisse aussi être causée par l'action d'une seconde dynamo et non seulement par des phénomènes dynamiques plus complexes, j'ai utilisé le modèle de champ moyen développé durant ma maîtrise comme point de comparaison cinématique à EULAG-MHD. Plusieurs solutions obtenues par mon modèle de champ moyen montrent la coexistence de deux modes dynamos. De plus, j'ai développé une nouvelle version du modèle dynamo où le tenseur α est remplacé par la force électromotrice exacte provenant de EULAG-MHD telle que calculée par l'équation (2.3). Encore une fois, deux modes dynamos sont observés supportant l'hypothèse d'une double dynamo observée dans EULAG-MHD. Ces deux modèles ont contribué à démontrer que l'origine de l'oscillation biennale observé dans le champ magnétique en surface de EULAG-MHD est cohérente avec l'hypothèse d'une seconde dynamo. J'ai également rédigé la majorité de la section 3.4 ainsi que l'annexe 3.A. Cet article

a été publié dans l'*Astrophysical Journal* le 27 juillet 2016.

Finalement, le chapitre 4 présente une analyse détaillée des résultats obtenus par une nouvelle version du modèle de champ moyen incluant la rétroaction magnétique. Ce nouveau modèle a été grandement modifié par rapport à sa version originale pour résoudre conjointement avec les équations d'évolution pour A et B (voir §1.2 ainsi que les éq. (3.5) et éq. (3.6)), une équation prenant en compte la rétroaction magnétique sur l'écoulement en direction azimutale. Ce nouveau modèle inclut également une version complète du tenseur α et permet d'analyser sur des millénaires les périodes de grands minima et maxima. Pour cet article, j'ai implémenté toutes les modifications au modèle original, effectué les différentes analyses telles que décrites au chapitre 4, créé toutes les figures et écrit en partie le texte que le coauteur a révisé et auquel il a suggéré certains ajouts. Cet article en préparation sera soumis sous peu dans le journal *Solar Physics*.

Comme projet secondaire j'ai également participé à une collaboration avec Robertus von Fay-Siebenburgen, de *Syracuse University*, et Dario Passos, de *Instituto Superior Técnico*. Ce projet portait sur l'analyse d'une double dynamo à l'origine des variations spatiotemporelles des propriétés des spicules observées à la surface du Soleil. Pour ce projet, j'ai modifié la version cinématique de mon modèle de champ moyen pour inclure le profil de rotation différentielle du Soleil tel que mesuré par GONG. Un article est actuellement en préparation dans le but de présenter les résultats de ces analyses.

En parallèle avec ces articles, j'ai présenté les analyses du chapitre 2 lors d'un séminaire tenu dans le contexte des séminaires hebdomadaires du département de physique de l'Université de Montréal le 13 octobre 2016. J'ai également présenté les différents résultats du chapitre 4 aux conférences du *NASA LWS Workshop on Solar Dynamo Frontiers* le 12 juin 2015 à Boulder et lors d'une affiche présentée durant la rencontre du *Space Climate 6* le 4 avril 2016 à Levi en Finlande.

Chapitre 2

CHARACTERISATION OF THE TURBULENT ELECTROMOTIVE FORCE AND ITS MAGNETICALLY-MEDIATED QUENCHING IN A GLOBAL EULAG-MHD SIMULATION OF SOLAR CONVECTION

Corinne Simard, Paul Charbonneau, and Caroline Dubé

*Département de Physique, Université de Montréal, C.P. 6128 Succ. Centre-ville, Montréal,
Qc H3C 3J7, Canada*

Received 2015 December 31; accepted 2016 March 21

Published in *Advances in Space Research*,
15 October 2016, Vol. 58-8, page 1522–1537

2.1 Abstract

We perform a mean-field analysis of the EULAG-MHD millenium simulation of global magnetohydrodynamical convection presented in Passos & Charbonneau (2014). The turbulent electromotive force operating in the simulation is assumed to be linearly related to the cyclic axisymmetric mean magnetic field and its first spatial derivatives. At every grid point in the simulation's meridional plane, this assumed relationship involves 27 independent tensorial coefficients. Expanding on Racine et al. (2011), we extract these coefficients from the simulation data through a least-squares minimization procedure based on singular value decomposition. The reconstructed α -tensor shows good agreement with that obtained by Racine et al. (2011), who did not include derivatives of the mean-field in their fit, as well as with the α -tensor extracted by Augustson et al. (2015) from a distinct ASH MHD simulation. The isotropic part of the turbulent magnetic diffusivity tensor β is positive definite and reaches values of $5.0 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ in the middle of the convecting fluid layers. The spatial variations of both $\alpha_{\phi\phi}$ and $\beta_{\phi\phi}$ component are well reproduced by expressions obtained under the Second Order Correlation Approximation, with a good matching of amplitude requiring a turbulent correlation time about five times smaller than the estimated turnover time of the small-scale turbulent flow. By segmenting the simulation data into epochs of magnetic cycle minima and maxima, we also measure α - and β -quenching. We find the magnetic quenching of the α -effect to be driven primarily by a reduction of the small-scale flow's kinetic helicity, with variations of the current helicity playing a lesser role in most locations in the simulation domain. Our measurements of turbulent diffusivity quenching are restricted to the $\beta_{\phi\phi}$ component, but indicate a weaker quenching, by a factor of $\simeq 1.36$, than of the α -effect, which in our simulation drops by a factor of three between the minimum and maximum phases of the magnetic cycle.

2.2 Introduction

A proper understanding of the physical mechanism(s) underlying solar dynamo action and regulating the cycle's amplitude and duration are crucial components of long term prediction of

space weather (also known as “space climate”), and of research on solar-terrestrial interaction in general (Weiss 2010). We are still a long way from physically-based prediction of solar cycle characteristics, even though significant progress has been made in recent years (for a recent review see Petrovay 2010). Part of the difficulty lies with the fact that no consensus currently exists as to the mode of operation of the solar cycle; the shearing of the solar magnetic field by differential rotation is usually considered as a key process, but what drives the regeneration of the solar dipole moment remains ill-understood. Some dynamo models invoke the electromotive force associated with turbulent convection, others the surface decay of active regions (the Babcock-Leighton mechanism), while others yet focus on various rotationally-influenced (magneto)hydrodynamical instabilities taking place immediately beneath the base of the solar convection zone. A survey of these different types of dynamo models can be found in Charbonneau (2010). Such models make use of geometrical and dynamical simplifications, most notably perhaps the use of the so-called kinematic approximation, in which the dynamical backreaction of the magnetic field on the inductive flows is neglected or parametrized through largely ad hoc prescriptions. Proper tuning of these ad hoc functionals and associated model parameters can in many cases lead to cyclic behavior showing reasonably solar-like variability patterns in the amplitude and duration of magnetic cycles (see, e.g., Karak & Choudhuri (2011); Kitchatinov & Olemskoy (2012) and references therein)

An alternate approach is made possible by global magnetohydrodynamical simulations of solar convection, which recently have succeeded in producing magnetic fields well-organized on large spatial scales and undergoing more or less regular polarity reversals (Brown et al. 2010, 2011; Ghizaru et al. 2010; Käpylä et al. 2010; Racine et al. 2011; Käpylä et al. 2012; Masada et al. 2013; Beaudoin et al. 2013; Passos & Charbonneau 2014; Fan & Fang 2014; Augustson et al. 2015). There are no active regions in such simulations (but do see Nelson et al. 2013, 2014), and therefore no Babcock-Leighton mechanism, but the turbulent electromotive force associated with thermally-driven convection is captured in a dynamically consistent manner at spatial and temporal scales resolved by the computational grid. Evidence for the development of MHD instabilities has also been found in some of these simulations (see Lawson et al. 2015; Miesch 2007).

The availability of such simulation data allows to bridge the gap between simplified kinematic models and MHD simulations of solar convection. More specifically, the latter can be used to measure turbulent coefficients usually specified in largely ad hoc fashion in the former. Of particular interest is the turbulent electromotive force, its associated α -effect and turbulent diffusivity, and variations of these as a function of the magnetic field strength. Such measurements can assist in the interpretation of simulation results, and may help in clarifying some puzzling differences in the characteristics of cycles generated by simulations that are generally alike and differ primarily in what one would have hoped are only computational and algorithmic detail (see, e.g., §3.2 Charbonneau 2014). Moreover, mean-field models incorporating source terms and physical coefficients derived from numerical simulations can be useful in exploring long timescale behaviors that remain inaccessible to full MHD simulations, due to limitations in computing resources.

The aim of this paper is twofold. First, we document and validate a generalization of the least-squares minimization technique introduced by Racine et al. (2011) (see also Brandenburg & Sokoloff 2002) for extracting mean-field coefficients from the output of global MHD simulations of solar convection. Second, we use this methodology to measure the level of magnetically-mediated quenching of the α -effect and turbulent diffusivity operating in the simulation. Section 2.3 presents a minimal overview of classical mean-field electrodynamics, focusing on aspects necessary to properly frame the analyses to follow. In section 2.4.1 we describe the least-squares minimization method used to extract the α - and β -tensors, and present the results of this procedure in §2.4.2 and 2.4.3, applied to the “millenium simulation” described in Passos & Charbonneau (2014). We also compare in §2.4.4 the isotropic part of these two tensors to reconstructions using analytical forms obtained under the second-order correlation approximation. In sections 2.5 we turn to an investigation of the magnetic suppression of the α -effect and turbulent diffusivity. We close in §2.6 by summarizing our conclusions and discussing the limitation of our analyses.

2.3 Mean-field electrodynamics

The mathematical and physical underpinnings of mean-field electrodynamics are well-covered in many textbooks and review articles (see, e.g., Moffatt 1978; Krause & Rädler 1980; Ossendrijver 2003; Brandenburg & Subramanian 2005; Charbonneau 2010). What follows is only a brief overview, focusing on definitions and reformulations of the $\boldsymbol{\alpha}$ - and $\boldsymbol{\beta}$ -tensors on which the analyses presented in this paper are based. The starting point of classical mean-field electrodynamics is the separation of the magnetic field (\mathbf{B}) and flow (\mathbf{u}) into a spatially large-scale, slowly varying mean component, and a small-scale, rapidly varying fluctuating component:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}', \quad \mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}', \quad (2.1)$$

where the prime quantities represent the fluctuating part and the brackets $\langle \dots \rangle$ denote an intermediate averaging scale over which the fluctuating parts vanish, i.e., $\langle \mathbf{u}' \rangle = 0$ and $\langle \mathbf{B}' \rangle = 0$. Inserting eq. (2.1) into the magnetohydrodynamical induction equation and applying this averaging operator yields:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathcal{E} - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle), \quad (2.2)$$

where

$$\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle, \quad (2.3)$$

is the mean electromotive force (*emf*) due to the fluctuation of the flow and the magnetic field, and η is the magnetic diffusivity. The next step is to develop this *emf* in terms of the mean magnetic component and its derivatives. Because we are working here with vector fields, such a development is written as:

$$\mathcal{E} = \mathbf{a} \cdot \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b} \cdot \nabla \langle \mathbf{B} \rangle + \text{higher order derivatives}, \quad (2.4)$$

where the tensors \mathbf{a} and \mathbf{b} appearing in this expression are assumed to depend only on the statistical properties of the small-scale flow and field (see, e.g., Krause & Rädler 1980). Trun-

cation of the higher order derivatives is justified provided a good separation of spatial and/or temporal scale exists between the fluctuating velocity and magnetic fields on one hand, and the large-scale magnetic and flow field on the other. The first term in the expansion involves a rank-two tensor capturing (among other effects) the so-called α -effect, which can act as a source term in the mean-field equation (2.2). The second term in the series is a rank-three tensor and embodies (among other effects) the destructive action of turbulent diffusion on the mean magnetic field (see Rädler 1980, 2000; Rädler & Stepanov 2006). It is convenient —and physically meaningful— to separate out the symmetric part of these tensors, so that with the higher-order terms neglected eq. (2.4) can be rewritten as ¹:

$$\mathcal{E} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \langle \mathbf{B} \rangle + \boldsymbol{\gamma} \times \langle \mathbf{B} \rangle - \boldsymbol{\beta} \cdot (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) - \boldsymbol{\delta} \times (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) - \boldsymbol{\kappa} \cdot (\nabla \langle \mathbf{B} \rangle)^{sym}, \quad (2.5)$$

where

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), \quad \gamma_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}a_{ij}. \quad (2.6)$$

The $\boldsymbol{\alpha}$ -term now describes the classical α -effect, which in the present context is related to the kinetic helicity of the unmagnetized flow, and the vectorial quantity $\boldsymbol{\gamma}$ acts on the mean field as an additional (pseudo)velocity known as turbulent pumping. The \mathbf{b} tensor is separated into three components; a rank-two tensor $\boldsymbol{\beta}$, a vectorial quantity $\boldsymbol{\delta}$, and a rank-three tensor $\boldsymbol{\kappa}$. The first two can be interpreted as anisotropic contributions to the mean-field resistivity, and the last one embodies other more complex influences of the mean field. The $\boldsymbol{\beta}$ -tensor is the symmetric part of the more general \mathbf{b} -tensor and is defined as follows:

$$\beta_{ij} = \frac{1}{4}(\epsilon_{i\mu\nu}b_{j\mu\nu} + \epsilon_{j\mu\nu}b_{i\mu\nu}). \quad (2.7)$$

Working in spherical polar coordinate (r, θ, ϕ) and assuming that $\langle \mathbf{B} \rangle$ varies only weakly in space and by construction is axisymmetric ($\partial/\partial\phi \equiv 0$), the *emf* can be rewritten as:

$$\mathcal{E}_m = \tilde{a}_{mk}\langle B_k \rangle + \tilde{b}_{mkr}\frac{\partial\langle B_k \rangle}{\partial r} + \frac{\tilde{b}_{mk\theta}}{r}\frac{\partial\langle B_k \rangle}{\partial\theta}, \quad (2.8)$$

¹Note that the sign convention we use for $\boldsymbol{\alpha}$ differs from Schrunner et al. (2007), who introduce minus signs on the $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\gamma}$ terms in both eqs. 2.5 and 2.6; the final signs of the $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\gamma}$ components remains the same under either convention.

where \tilde{a} and \tilde{b} are pseudo-tensors, which can be related to the true tensors \mathbf{a} and \mathbf{b} by introducing proper covariant differentiation for the $\partial\langle B_j\rangle/\partial x_k$, so as to account for the curvilinear nature of the (spherical) coordinate system and its associated unit vectors. Because our adopted averaging is a zonal average, all $\partial\langle B_j\rangle/\partial x_\phi$ are zero, and consequently only 18 out of the 27 components of the $\tilde{\mathbf{b}}$ pseudo-tensor are accessible (see Schrunner et al. (2007) for further details). In spherical geometry we thus have:

$$\alpha_{rr} = \tilde{a}_{rr} - \frac{\tilde{b}_{r\theta\theta}}{r}, \quad (2.9a)$$

$$\alpha_{r\theta} = \alpha_{\theta r} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{r\theta} + \tilde{a}_{\theta r} + \frac{\tilde{b}_{rr\theta}}{r} - \frac{\tilde{b}_{\theta\theta\theta}}{r}), \quad (2.9b)$$

$$\alpha_{r\phi} = \alpha_{\phi r} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{r\phi} + \tilde{a}_{\phi r} - \frac{\tilde{b}_{\phi rr}}{r}), \quad (2.9c)$$

$$\alpha_{\theta\theta} = \tilde{a}_{\theta\theta} + \frac{\tilde{b}_{\theta r\theta}}{r}, \quad (2.9d)$$

$$\alpha_{\theta\phi} = \alpha_{\phi\theta} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_{\theta\phi} + \tilde{a}_{\phi\theta} + \frac{\tilde{b}_{\phi r\theta}}{r}), \quad (2.9e)$$

$$\alpha_{\phi\phi} = \tilde{a}_{\phi\phi}. \quad (2.9f)$$

Note here the appearance of \tilde{b} -related contributions to the α -tensor, a direct consequence of spatial derivatives acting on unit vectors of the spherical coordinate system. Similar expressions relating the components of β to those of $\tilde{\mathbf{b}}$ are given by equations (12a) through (15k) in Schrunner et al. (2007), and are not replicated in full here, except for the diagonal components:

$$\beta_{rr} = -\frac{1}{2}\tilde{b}_{r\phi\theta}, \quad \beta_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\tilde{b}_{\theta\phi r}, \quad \beta_{\phi\phi} = \frac{1}{2}(\tilde{b}_{\phi r\theta} - \tilde{b}_{\phi\theta r}). \quad (2.10)$$

Note finally that the isotropic part of the β -tensor, i.e.:

$$\beta \equiv \frac{1}{3}(\beta_{rr} + \beta_{\theta\theta} + \beta_{\phi\phi}), \quad (2.11)$$

corresponds to the coefficient of turbulent diffusivity introduced in the vast majority of published mean-field and mean-field-like dynamo models of the solar cycle, including those relying

on inductive source terms distinct from the turbulent electromotive embodied in the $\boldsymbol{\alpha}$ -tensor.

2.4 Extracting the \boldsymbol{a} - and \boldsymbol{b} -tensors

The numerical data used in what follows is taken from the EULAG-MHD “millenium simulation” described in Passos & Charbonneau (2014); (see also Ghizaru et al. 2010; Beaudoin et al. 2013; Charbonneau & Smolarkiewicz 2013; Smolarkiewicz & Charbonneau 2013). This global simulation of thermally-driven MHD convection spans 1600yr of simulated time, and generates an axisymmetric large-scale magnetic field undergoing regular polarity reversals on a $\simeq 40$ yr cadence.

A number of distinct approaches have been designed to extract the \boldsymbol{a} - and \boldsymbol{b} -tensors from the output of MHD turbulence simulations. The test-field method (Schrinner et al. 2007, see also Käpylä et al. 2009) solves a set of evolution equations for the turbulent fluctuations \boldsymbol{B}' produced by the kinematic action of the flow on a set of imposed large-scale “test magnetic field”. The turbulent emf is then calculated directly via eq. (2.3), and with the test fields playing the role of the large-scale magnetic field $\langle \boldsymbol{B} \rangle$, the tensorial components of the emf development (2.4) can be obtained.

An alternate, direct approach is possible in the case of simulations which generate autonomously a large-scale magnetic field, as in the EULAG-MHD millenium simulation. Subtracting this large-scale field from the total magnetic field yields \boldsymbol{B}' , and a similar procedure applied to the total flow provides \boldsymbol{u}' , at which point the turbulent emf is directly computed via eq. (2.3). In the case of axisymmetric large-scale magnetic fields, the large-scale component are defined through zonal averaging. This results, for every spatial grid point (r_b, θ_c) in a meridional plane of the simulation, in a time series of $\boldsymbol{\mathcal{E}}(r_b, \theta_c, t)$, which is linked to the corresponding time series for the components of the mean field and its first order spatial derivatives via eq. (2.4). For example, in the case of the zonal component \mathcal{E}_ϕ this would read:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_\phi(r_b, \theta_c, t) &= \tilde{a}_{\phi r} \langle B_r \rangle(r_b, \theta_c, t) \\
 &+ \tilde{a}_{\phi \theta} \langle B_\theta \rangle(r_b, \theta_c, t) \\
 &+ \tilde{a}_{\phi \phi} \langle B_\phi \rangle(r_b, \theta_c, t) \\
 &+ \tilde{b}_{\phi rr} \frac{\partial \langle B_r \rangle}{\partial r} + \tilde{b}_{\phi \theta r} \frac{\partial \langle B_\theta \rangle}{\partial r} + \tilde{b}_{\phi \phi r} \frac{\partial \langle B_\phi \rangle}{\partial r} \\
 &+ \frac{\tilde{b}_{\phi r \theta}}{r} \frac{\partial \langle B_r \rangle}{\partial \theta} + \frac{\tilde{b}_{\phi \theta \theta}}{r} \frac{\partial \langle B_\theta \rangle}{\partial \theta} + \frac{\tilde{b}_{\phi \phi \theta}}{r} \frac{\partial \langle B_\phi \rangle}{\partial \theta}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Values for the $\tilde{a}(r_b, \theta_c)$ and $\tilde{b}(r_b, \theta_c)$ components are then sought by least-squares minimization of the residual of the above expression. At every grid point in the meridional plane, for each component of \mathcal{E} this involves 9 independent coefficients defining the linear combination of the 9 time series of the mean magnetic field and its spatial derivatives on the RHS that best fit the *emf* time series on the LHS, for a grand total of 27 unknown coefficients per spatial grid point.

Figure 2.1 shows a representative 400 yr segment of *emf* time series, taken from the 1600 yr long EULAG-MHD millenium simulation described in Passos & Charbonneau 2014, used in the analyses to follow. The components of the turbulent *emf* calculated directly from the simulation output via eq. (2.3), extracted at 45° latitude in the N-hemisphere at mid-convection zone depth, are plotted in black. Even with the zonal averaging implied by eq. (2.3), the *emf* components are quite noisy, but all shows a very well-defined periodic signal. The colored time series are *emf* reconstructions produced by the SVD-based least-square scheme described in what follows.

2.4.1 The singular value decomposition procedure

The procedure employed here to extract the \mathbf{a} and \mathbf{b} -tensor components is a generalization of the method originally introduced by Racine et al. (2011). The idea is to take the *emf* and the mean (zonally-averaged) magnetic field from the simulation output of EULAG-MHD and seek time-independent numerical coefficients, specifically the components of $\tilde{\mathbf{a}}$ and $\tilde{\mathbf{b}}$, which provide the best possible match to eq. (2.8). This defines an optimization problem, which is

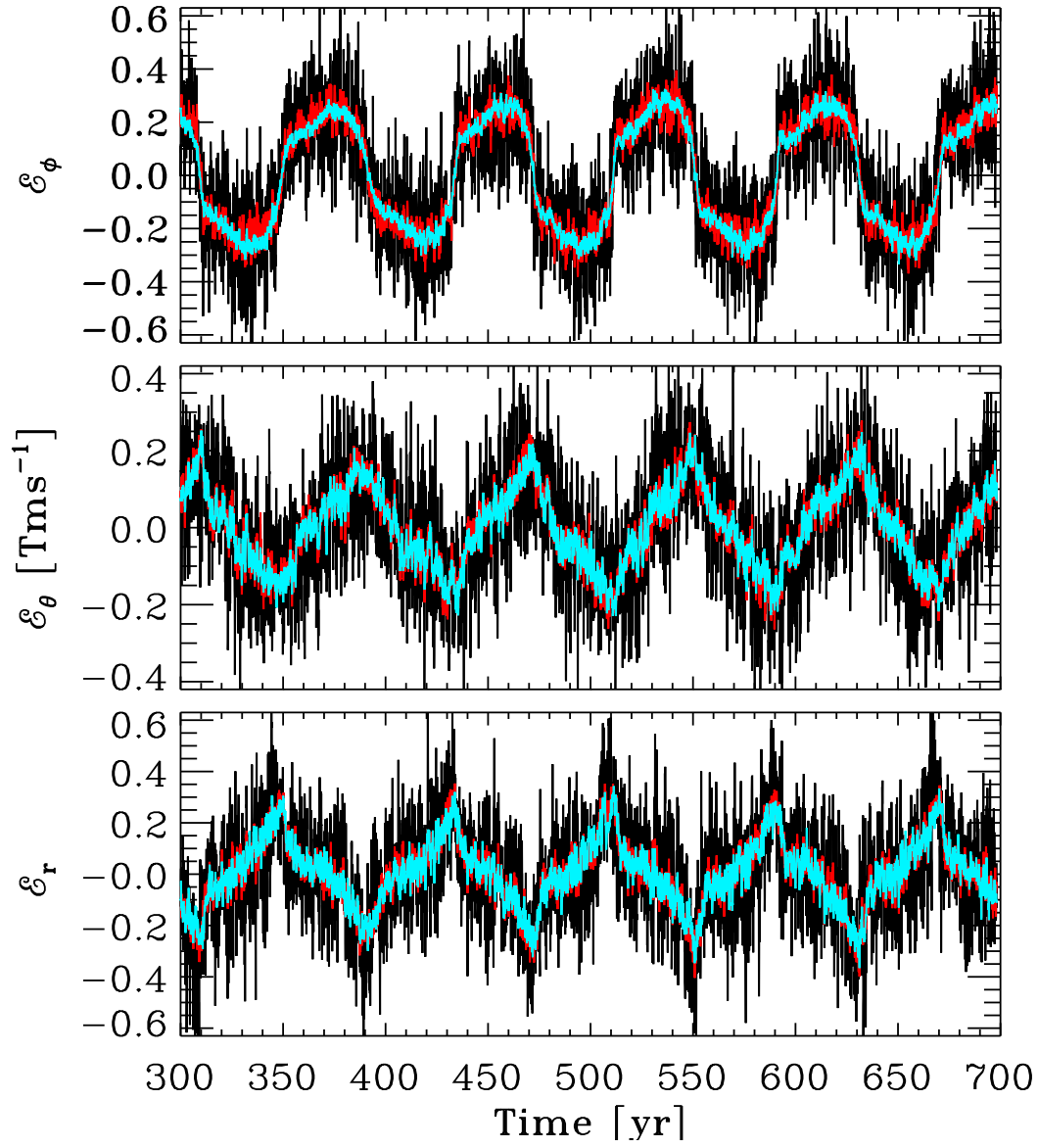


FIGURE 2.1 – Time series of the turbulent electromagnetic force (black) extracted directly from EULAG-MHD simulation output (viz. eq. (2.3)) in the course of 5 complete magnetic cycles. The light blue time series show the *emf* reconstructed using the original procedure of Racine et al. (2011), i.e., fitting only the α -tensor, while the red time series are the *emf* components reconstructed from the expanded SVD procedure detailed below, in which both α and β are fitted to the *emf* (see text).

tackled as a least-squares minimisation using Singular Value Decomposition (see Press et al. 1992, Section 15.4).

For a given component $m = (r, \theta, \phi)$ of the *emf* at a specific node of the computational

grid (r_b, θ_c) , we first define the time-dependent functions $y(t)$ and $X(t)$:

$$y(t) = \mathcal{E}_m(t, r_b, \theta_c) , \quad (2.13)$$

and

$$X(t) = [\langle B_k(t, r_b, \theta_c) \rangle, \partial_r \langle B_k(t, r_b, \theta_c) \rangle, \partial_\theta \langle B_k(t, r_b, \theta_c) \rangle] \text{ for } k = r, \theta, \phi , \quad (2.14)$$

where for each time step of the simulation output, $X(t)$ at (r_b, θ_c) is a 9 components vector containing the mean magnetic field and its derivatives, as appearing on the RHS of eq. (2.8).

We then define the vector φ at fixed m as:

$$\varphi_j = [\tilde{a}_{mk}(r_b, \theta_c), \tilde{b}_{mkr}(r_b, \theta_c), \tilde{b}_{mk\theta}(r_b, \theta_c)] , \text{ for } k = r, \theta, \phi , \quad (2.15)$$

containing the value of $\tilde{\mathbf{a}}$ for $j = 1-3$ and $\tilde{\mathbf{b}}$ for $j = 4-9$ corresponding to a single component of the *emf*. In this notation, the parameterization of the *emf* is written as:

$$y(t) = \sum_{j=1}^9 \varphi_j X_j(t) , \quad (2.16)$$

and the goal here is to find the 9 values of φ_j that minimize the least-squares merit function:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_t} \left[y(t_i) - \sum_{j=1}^9 \varphi_j X_j(t_i) \right]^2 , \quad (2.17)$$

where N_t is the number of time-steps t_i . The design matrix \mathbf{A} used in singular value decomposition procedure is constructed as $A_{ij} = X_j(t_i)$. In the present context this $N_t \times 9$ matrix depends on the large scale magnetic field and its spatial derivatives in r and θ , as per eq. (2.8).

It can be decomposed as:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{V}^T , \quad (2.18)$$

where \mathbf{U} is an $N_t \times 9$ orthogonal matrix, \mathbf{w} is a 9×9 diagonal matrix containing the so-called

singular values, and \mathbf{V} is a 9×9 orthogonal matrix. The solution of $\boldsymbol{\varphi}$ is then given by;

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{w}^{-1} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{y} , \quad (2.19)$$

which is where the *emf* finally enters the problem, through the $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{N_t})$ time series.

This whole procedure is repeated three times for $m = r, \theta$ and ϕ and at all grid points in the meridional plane so as to construct the spatial profiles of all 9 components of the $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ pseudotensor, and of the 18 components of the $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ pseudotensor accessible in a system axisymmetric on the large scales.

A great practical advantage of the SVD decomposition is that it also returns the standard deviation (σ) via:

$$\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^9 \left(\frac{V_{ji}}{w_{ii}} \right)^2 . \quad (2.20)$$

For each component of $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta}$ computed, we can thus recover an error estimate. In all results presented in what follows, a measurement of a tensor component is deemed significant if it deviates from zero by more than its associated standard deviation. Note that σ is a function of \mathbf{V} and \mathbf{w} , both originating from the decomposition of the design matrix, which therefore implies that σ is set by fluctuations of the mean magnetic field and its derivatives, but not by fluctuations of the *emf* components. Typically, the inclusion of the $\boldsymbol{\beta}$ -tensor in the SVD procedure tends to increase the standard deviation with respect to reconstruction fitting only the $\boldsymbol{\alpha}$ -tensor, as in Racine et al. (2011), because the time series of mean field spatial derivatives tend to be noisier than those of the mean field components.

2.4.2 Results for the $\boldsymbol{\alpha}$ -tensor

Racine et al. (2011) extracted the $\boldsymbol{\alpha}$ -tensor from the output of an earlier EULAG-MHD simulation of much shorter duration, retaining only the first term in the *emf* development given by eq. (2.4). Including now the second term, proportional to first derivatives of the mean field not only introduces additional explicit contributions to the $\boldsymbol{\alpha}$ -tensor components (see eqs. (2.9a)–(2.9f)), but also alters the fit altogether. In either cases the reconstructed *emf* offers a very good representation of the *emf* measured directly from the simulation output via

eq. (2.3) herein, as shown by the red and blue time series superimposed on the measured emf on Figure 2.1. However, as we shall see presently, including the β -tensor does reduce the rms residual with respect to the measured emf .

It will prove interesting to first quantify the differences between the α -tensors, extracted with and without the β -terms so as to reassess the reliability and accuracy of the Racine et al. (2011) α -tensor extraction. Such a comparison is presented on Figure 2.2, for two of the diagonal components of the α -tensor (two leftmost columns) and two components of the turbulent pumping speed (two rightmost columns, viz. eq. (2.6)). The top row shows results where only the \mathbf{a} term is retained in eq. (2.4), while in the bottom row both \mathbf{a} and \mathbf{b} are used in the SVD fitting procedure, as described in §2.4.1. A white mask is applied to show only regions of the meridional plane where the measured tensor components deviate from zero by more than one standard deviation. Both sets of tensor component are morphologically quite similar, the primary difference being a small reduction in overall magnitude when the \mathbf{b} term is retained in the analysis, ranging from $\simeq 15\%$ for γ_r , up to 50% for $\alpha_{\phi\phi}$, this latter, larger difference being dominated by variations in the polar regions.

Figure 2.3 shows radial cuts for four α -tensor components extracted at different latitudes with and without the inclusion of the β -tensor. The sets of cuts usually stand within each other's one- σ standard deviation returned by the SVD fit, the most significant difference being found with the $\alpha_{\phi\phi}$ component, which stand between 1 and $\simeq 2\sigma$ of each other at high latitudes (viz. Fig. 2.3A).

2.4.3 Results for the β -tensor

Figure 2.4 shows the nine β -tensor components reconstructed via eqs. (15d)—(15e) in Schrunner et al. (2007) from the $\tilde{\mathbf{b}}$ components extracted using our SVD least-squares minimization method. Once again a white mask is used to show only the regions of the meridional plane where the tensor components exceed the one standard deviation level, as returned by the SVD procedure. As self-consistency check, we also applied a modified form of the SVD procedure, retaining only the $\tilde{\mathbf{b}}$ coefficients, to the residual $\mathcal{E} - \alpha\langle\mathbf{B}\rangle$ of a SVD extraction carried out only with the $\tilde{\mathbf{a}}$ terms, as in Racine et al. (2011). The resulting β -tensor closely

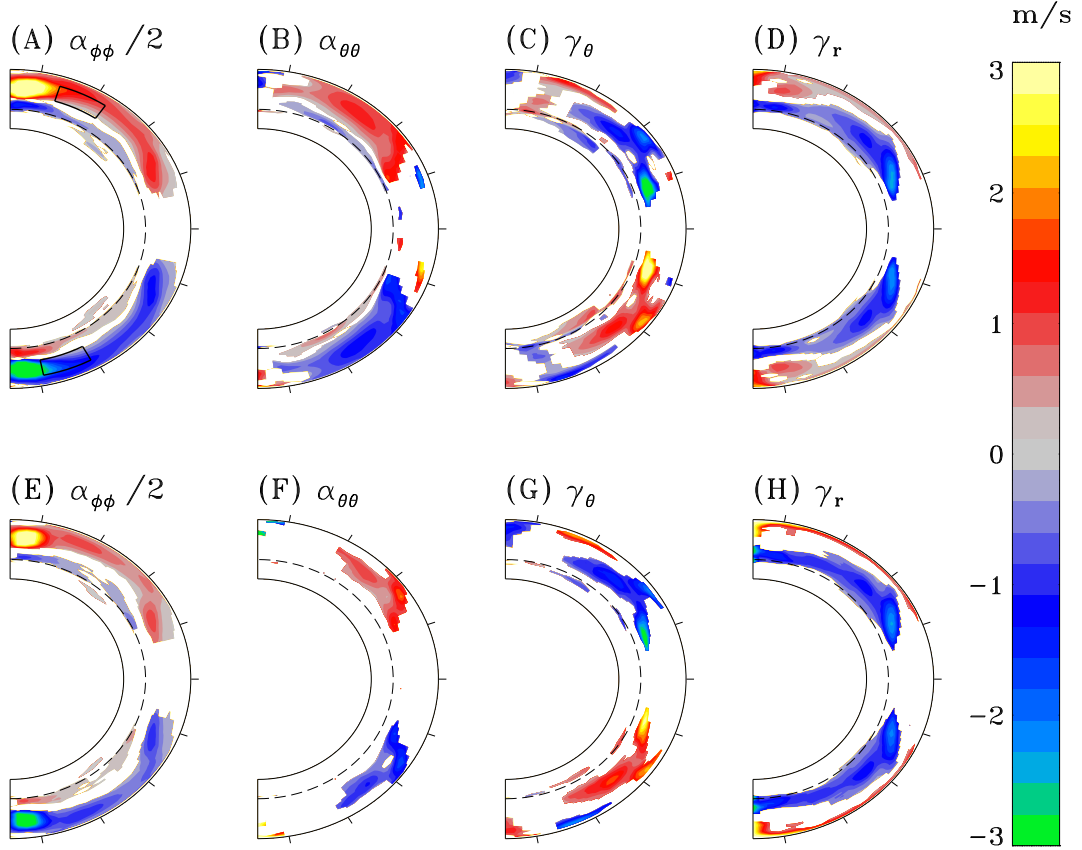


FIGURE 2.2 – Illustration of the $\alpha_{\phi\phi}$ (leftmost column) and $\alpha_{\theta\theta}$ (second column) components, together with the turbulent pumping components γ_{θ} (third column) and γ_r (rightmost column) as extracted from the 1600 yr long EULAG-MHD millenium simulation. The top row shows results when only the first term is retained on the RHS of eq. (2.4), while the bottom row shows the corresponding results when the first two terms are retained. A white mask is applied in regions of the meridional plane where the signals is lower than one standard deviation. On each panel, the dash-line indicates the base of the convectively unstable fluid layer, and the tickmarks on the outer boundary of each diagram are drawn at intervals of 20° . The box drawn in panel (A) shows the integration domain used in the α -quenching analysis of §2.5.1 below.

resembles its counterpart returned by the complete extraction procedure described in § 2.4.1 (viz. Fig. 2.4).

The tensor is noisier, and typically shows smaller significance regions than the α -tensor. Note however that the diagonal elements are positive definite almost everywhere, which offers some confidence that the results are physically meaningful. Moreover, the overall amplitudes are in the range 10^7 – 10^8 m^2/s , which is consistent with other estimates of dissipation in

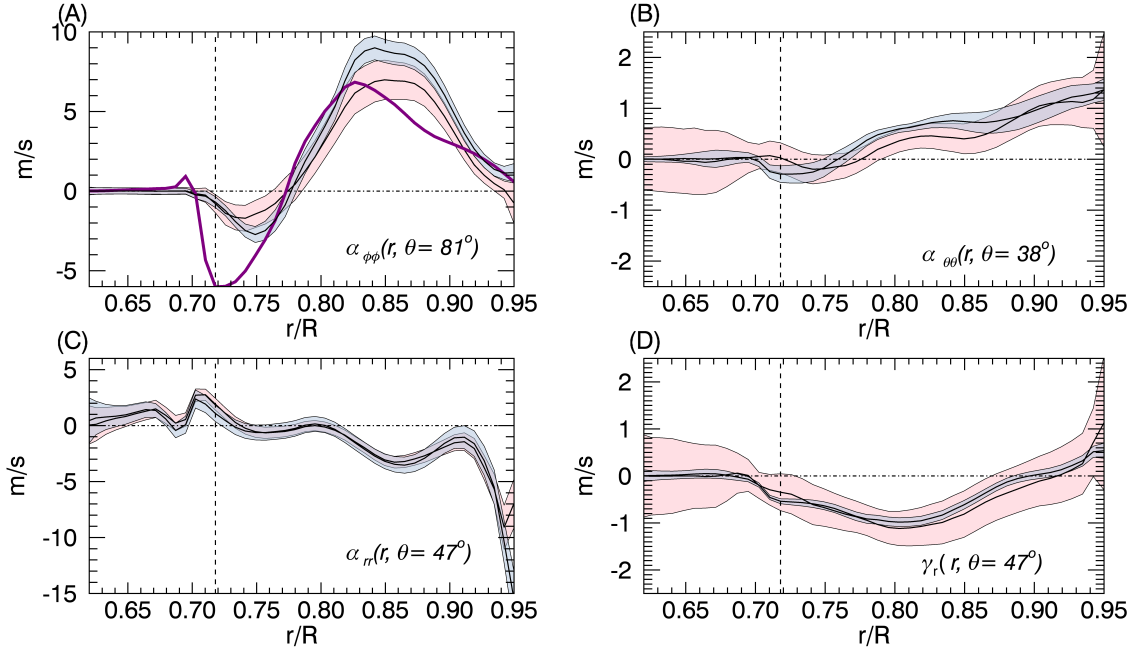


FIGURE 2.3 – Radial cuts of four selected α -tensor components taken at different latitudes without (blue) and with (pink) the inclusion of β in the SVD fitting procedure. The colored area indicates the corresponding 1σ region of significance, and the vertical dashed line the location of the core-envelope interface. Panel (A) also includes (in purple) a radial profile of the SOCA α^* (eq. (2.21)) extracted at the same latitude and divided by a factor 4.5 (see text).

similar EULAG simulations (see, e.g., Strugarek et al. 2016a). The largest amplitude, peaking at $\simeq 10^8 \text{ m}^2/\text{s}$, are obtained for the $\beta_{\phi\phi}$ component, with most of the domain returning a signal well above our one standard deviation mask. This component thus dominates the diagonal, and will be used preferentially in what follows when comparing to SOCA reconstructions and measuring magnetically-mediated quenching.

While many β -tensor components lie below the 1σ threshold in extended portions of the meridional plane, the rms residual between the *emf* (Fig. 2.5A) and the reconstructed *emf* (Fig. 2.5B) is reduced after the inclusion of the β -tensor in the SVD procedure. This residual is plotted in Fig. 2.5D together with the residual for a SVD fit using only the α -tensor (Fig. 2.5C). Comparison of those two panels reveals a slight decrease of the residual when β is included in the SVD procedure of the *emf*: averaged over the meridional plane, the residual drops from 0.046 (Fig. 2.5C) to 0.043 Tm/s (Fig. 2.5D), amounting to a 6.5% decrease. This

indicates that the slightly higher level of fluctuations observed in the red time series on Fig. 2.1 does not result from a noisier reconstruction, but rather from the fitting procedure capturing more of the physical variability present in the extracted *emf* components.

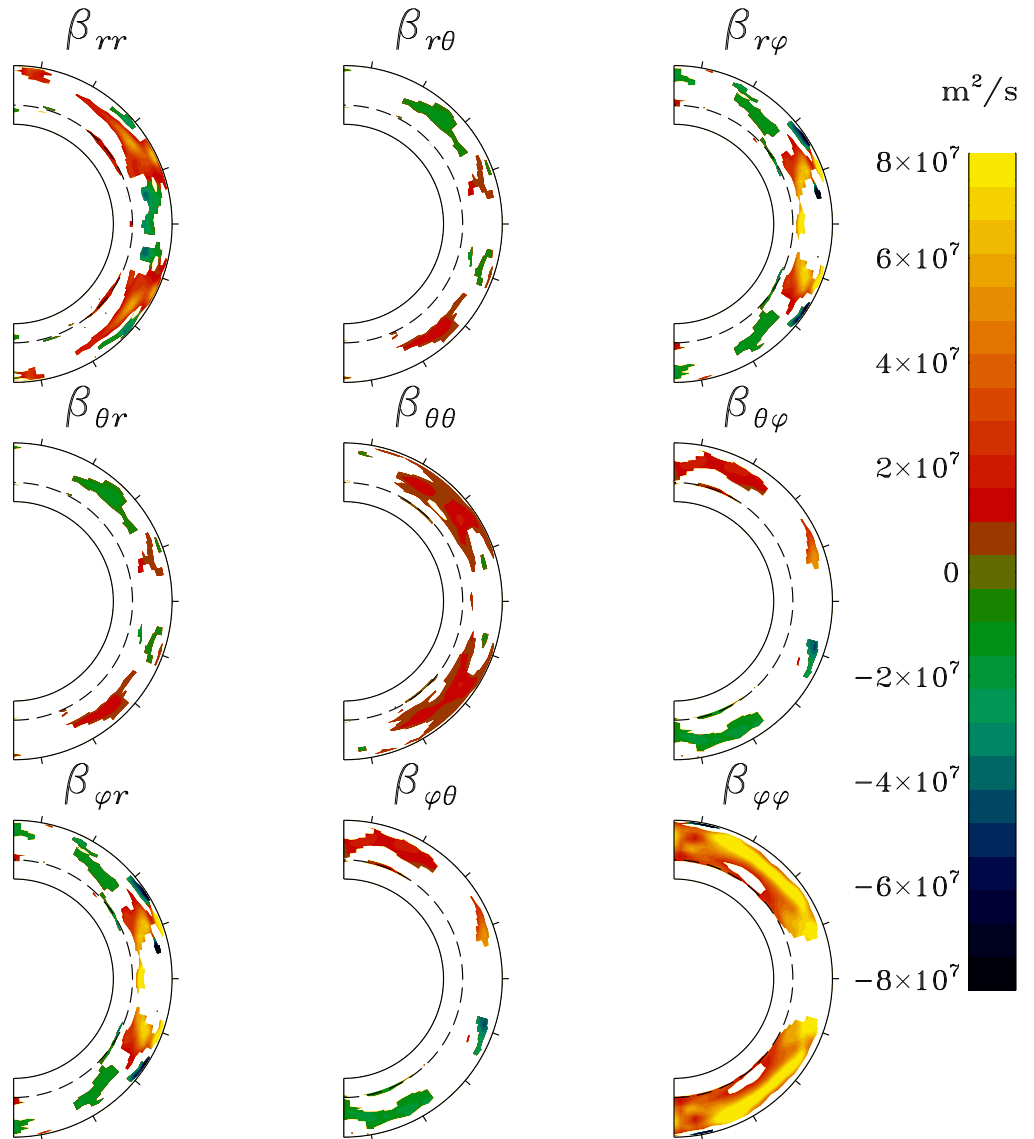


FIGURE 2.4 – Reconstruction of the β -tensor from the 18 accessible components of the pseudo-tensor $\tilde{\mathbf{b}}$ extracted from the EULAG-MHD millenium simulation. The format is similar to Fig. 2.2, with the dashed line indicating the base of the convectively unstable fluid layers. A white mask applied to regions of the meridional plane where the tensor components fall below the one-standard deviation level.

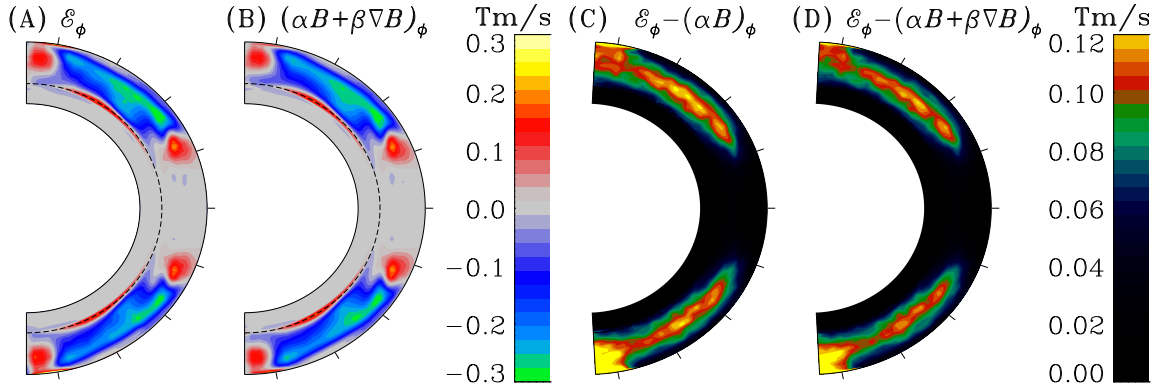


FIGURE 2.5 – Mean azimuthal turbulent electromotive force in a meridional plane for the concatenated set of cycle maximum 14 month-wide block as computed via eq. (2.3) in panel (A) and as reconstructed via eq. (2.8) in panel (B). Rms residuals averaged over the same concatenated set for the reconstructed *emf* where in the first (panel (C)) or both (panel (D)) term are retained in the SVD procedure.

2.4.4 Comparison with SOCA

In the case of isotropic, homogeneous turbulence, the α and β -tensors simplify to $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ and $\beta_{ij} = \beta \epsilon_{ijk}$. The scalar coefficients α and β can be computed under the Second Order Correlation Approximation (SOCA) as:

$$\alpha^* = -\frac{\tau_c}{3} \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}' \rangle, \quad (2.21)$$

and

$$\beta^* = \frac{\tau_c}{3} \langle (\mathbf{u}')^2 \rangle, \quad (2.22)$$

where τ_c is the coherence time of the turbulence, and the terms in the averaging brackets on the RHSs are, respectively, the mean kinetic helicity and the turbulent intensity of the small-scale flow component (see, e.g., Ossendrijver 2003; Schrijver & Siscoe 2009). Figure 2.6A and D show the corresponding α and β coefficients, assuming a coherence time equal to the turnover time of the convective flow; the latter is estimated as H_ρ/u' , where H_ρ is the density scale height and u' is the rms small-scale flow speed. The resemblance with the actual $\alpha_{\phi\phi}$, as extracted from the simulation via the SVD least-squares method in Fig. 2.2E and Fig. 2.3A, is quite good: both tensor components peak at polar latitudes, show a secondary

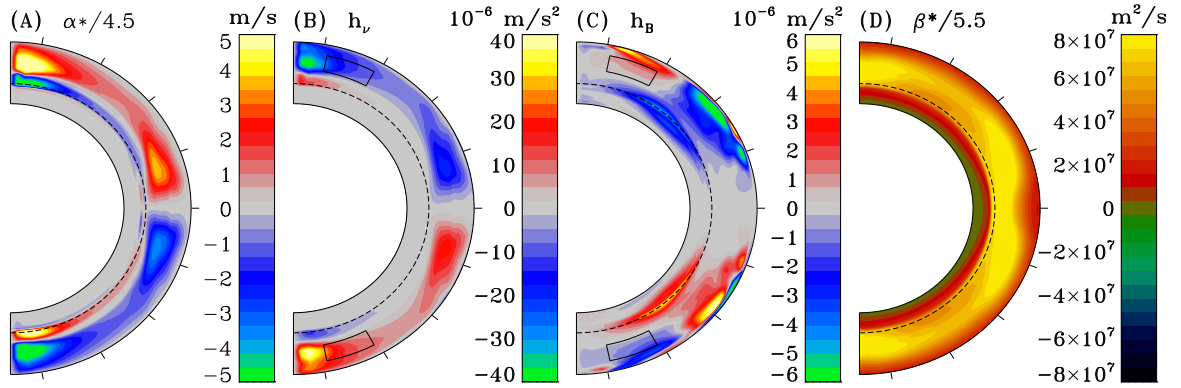


FIGURE 2.6 – SOCA-based reconstructions of the isotropic part of the α -tensor (in A) from the kinetic helicity (in B) as given by eq. (2.21); compare with Fig. 2.2A and E. Panel C illustrate the current helicity as computed by the second term on the RHS of equation (2.26), note the different ranges of the color scales in (B) and (C). Panel D shows the corresponding reconstruction for the isotropic part of the β -tensor via eq. (2.22); compare with $\beta_{\phi\phi}$ at bottom right in Fig. 2.4. The dashed line indicates the base of the convectively unstable fluid layers and the boxes drawn in panels (B) and (C) shows again the integration domain used in the following α -quenching analysis of §2.5.1.

maximum at low latitude, and undergo a sign change just above the core-envelope interface. The main discrepancy resides in the absolute magnitudes, with α^* being larger than $\alpha_{\phi\phi}$ in its region of significance by an average factor of $\simeq 4.5$.

Figure 2.6D shows the corresponding SOCA coefficient β^* computed via eq. (2.22), which is best compared to the $\beta_{\phi\phi}$ component in the lower right of Fig. 2.4. Here also the general spatial variations of the two quantities are similar, the main difference being one of overall amplitude, with the SOCA expression exceeding the extracted $\beta_{\phi\phi}$ by an average factor of $\simeq 5.5$ over its region of significance. That we recover a scaling factor almost identical to that characterizing the ratio of α^* to $\alpha_{\phi\phi}$ suggests that the discrepancy may lie with our choice of correlation time τ_c in eqs. (2.21)–(2.22), indicating in turn that equating τ_c to the convective turnover time may be a large overestimate. Interestingly, a short correlation time is one of the physical regimes under which the SOCA approximation can be expected to hold (Ossendrijver 2003).

2.5 Magnetic quenching of the turbulent *emf*

In the nonlinearly saturated regime of dynamo action, one would expect the Lorentz force associated with the magnetic field to impact the inductive flows, including at the turbulent scales. Starting with the pioneering study of Pouquet et al. (1976), this magnetic quenching of the *emf* has by now been measured in a variety of MHD turbulence simulations. Karak et al. (2014) §1 give a good survey of these various quenching measurements. In most cases what is being measured is the suppression of the *emf* in response to the application of an external large-scale magnetic field. This is also the case for the rotating convection simulations for which Karak et al. (2014) report quenching results: quenching is measured with respect to the strength of imposed large-scale “test-fields”. One important exception is the analyses of Brandenburg et al. (2008), who investigated quenching of the α -effect and turbulent diffusivity, both in full tensorial form, in a cartesian box MHD simulation of helically forced turbulence autonomously generating a large-scale magnetic component. The EULAG-MHD millenium simulation introduced above also generates autonomously its own large-scale magnetic field, and so offers the possibility to measure directly the quenching of the *emf*, without the artificial introduction of external large-scale field components.

2.5.1 α Quenching

We first repeat the SVD fitting procedure used to obtain the $\alpha_{\phi\phi}$ tensor component plotted on Fig. 2.2A, this time over disjoint 100-month wide temporal blocks (about one fifth of the half-cycle duration) centered on epochs of cycle maxima and minima, the latter determined on the basis of the time series of magnetic energy associated with the large-scale magnetic component waxing and waning in the course of the simulation. We opted to integrate the $\alpha_{\phi\phi}$ component over the domain indicated on Figure 2.2A. This selected area is one where $\alpha_{\phi\phi}$ does not change sign, has a magnitude much larger than its standard deviation, and is located at high latitude, where the large-scale dipole moment is building up (see Fig. 1B in Passos & Charbonneau 2014). Henceforth, unless explicitly stated otherwise, spatial averaging is always carried out over this domain, separately for each hemisphere. The results are shown on Fig. 2.7, in the form of bar charts, one bar per temporal block, color-coded to indicate min/max cycle

phase. The error bars assigned to each measurement are obtained by integrating the standard deviation over the same spatial domain as $\alpha_{\phi\phi}$, assuming that fluctuations at each grid point are uncorrelated. With only a few exceptions, the $\alpha_{\phi\phi}$ component extracted from each of the 34 cycles in the simulation show a statistically significant difference between epochs of maxima and minima. Qualitatively similar results are obtained for the other components of the α -tensor.

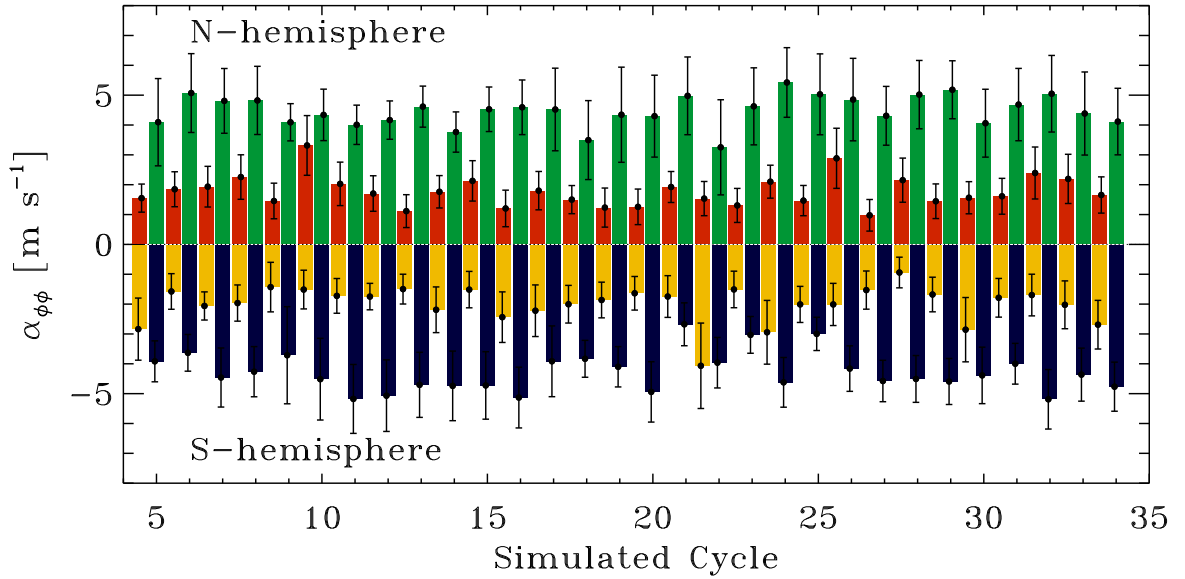


FIGURE 2.7 – Bar diagram showing the magnitude of the $\alpha_{\phi\phi}$ tensor component, averaged over the domain shown on Fig. 2.2A. The top (bottom) half of the diagram correspond to the Northern (Southern) hemisphere. The SVD fitting procedure was applied here over 100-month wide segments centered over successive cycle maxima (red and yellow) or minima (green and black). Error bars are estimated by averaging the standard deviation over the same domain, assuming spatially uncorrelated statistics. With only a few exceptions, cycle maxima show a level of α -quenching significantly exceeding the error bars.

Figure 2.8 shows, in meridional planes, the spatial profile of the $\alpha_{\phi\phi}$ tensor component for the concatenated set of cycle minimum 100 month-wide blocks in (A), cycle maximum blocks in (B), and the full simulation in (C), for comparison purposes. In all cases white contours delineate the 1σ significance regions, as returned from the SVD algorithm. Comparing panels (A) and (B) reveals that quenching of this tensor component involves an overall reduction of its amplitude, leaving its spatial profile largely invariant. The $\alpha_{\theta\theta}$ tensor component behaves similarly in this respect.

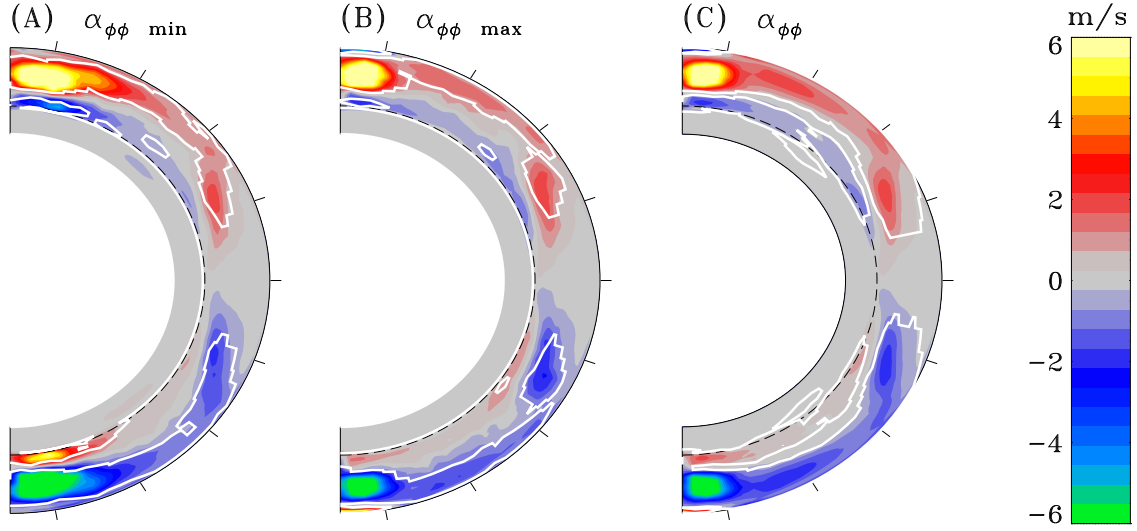


FIGURE 2.8 – The $\alpha_{\phi\phi}$ in the meridional plane, extracted from (A) the concatenation of all “minimum” blocks on Fig. 2.7, (B) the “maximum” blocks, and the full simulation in (C). White contours delineate the regions of significance (1σ).

Next, we carry out a similar exercise, this time extracting the α -tensor over successive 100-month long temporal block, extending over the whole simulation with a 50% overlap from block to block. For each such block we average the $\alpha_{\phi\phi}$ component and the magnetic energy over the same spatial domain as previously described. The $\alpha_{\phi\phi}$ component shows a clear decrease with magnetic energy, dropping from a mean value $\simeq 4.4 \text{ m s}^{-1}$ at cycle minima, down to 1.8 m s^{-1} at cycle maxima, amounting to a reduction by a substantial factor of three. Similar levels of quenching are observed with other α -tensor components, e.g., the averaged $\alpha_{r\theta}$ drops from 1.5 to 0.7 m s^{-1} from cycle minimum to maximum.

An α -quenching parametric formula commonly used in mean-field dynamo models is based on the assumption that the α -effect becomes suppressed once turbulent fluid motions reach energy equipartition with the large-scale magnetic field, i.e.,

$$\frac{1}{2}\rho(u'_{\text{rms}})^2 = \frac{\langle \mathbf{B} \rangle^2}{2\mu_0}, \quad (2.23)$$

where μ_0 is the permeability of free space and ρ is the density of the plasma. The field strength at which this equality is satisfied defines the equipartition field strength (hereafter denoted B_{eq}). Note that here the small-scale flow u'_{rms} is extracted from the simulation output of

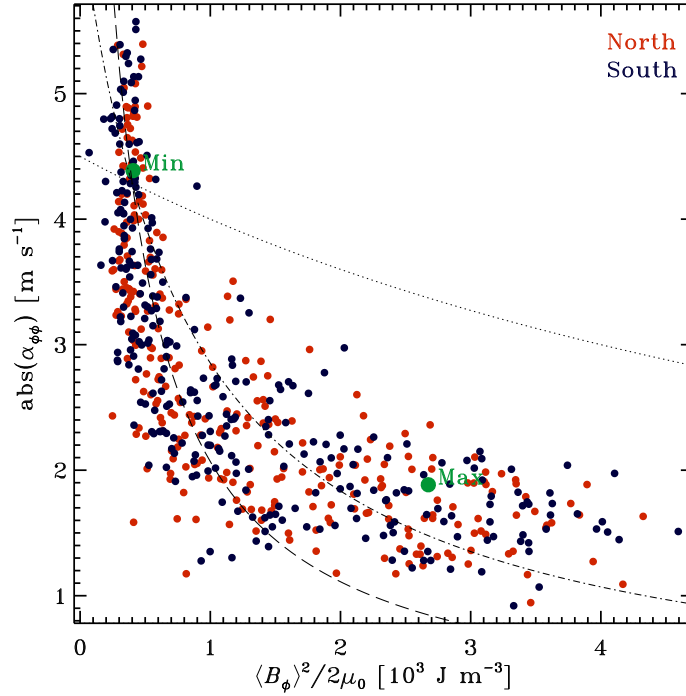


FIGURE 2.9 – Variation of the $\alpha_{\phi\phi}$ component versus magnetic energy of the zonal magnetic component, both again averaged over the domain shown on Fig. 2.2A. The SVD fit is carried out over successive 100-month wide time blocks, with 50% overlap between successive blocks, and the magnetic energy is averaged similarly in space and time. The larger green solid dots indicate the mean values for these quantities at cycle maxima and minima, taken directly from Fig. 2.7. α -quenching is again quite obvious here, with $\alpha_{\phi\phi}$ decreasing by a factor of ~ 3 over the range of magnetic energy density sampled throughout the cycles. The dotted curve shows the variation expected from the standard algebraic quenching formula (eq. (2.24)), and the dash-dotted and dashed curves result from the alternate strong quenching expression (viz. eq. (2.25)), with $R_m = 10$ and 50 respectively.

EULAG-MHD, and therefore is distinct from the small-scale flow that would characterize a purely hydrodynamical simulation operating in the same parameter regime. Such hydrodynamical flows are typically used as baseline in many quenching analyses using externally-imposed magnetic fields (see e.g., Karak et al. 2014).

The working hypothesis embodied in eq. (2.23) is most often introduced in mean-field models by adding an explicit algebraic dependence on $\langle \mathbf{B} \rangle$ to the $\boldsymbol{\alpha}$ -tensor components:

$$\alpha \rightarrow \frac{\alpha_0}{1 + (\langle \mathbf{B} \rangle^2 / B_{\text{eq}}^2)}, \quad (2.24)$$

where α_0 is the magnitude of the α -tensor in the absence of large-scale magnetic field. This ad hoc expression obviously “does the right thing”, in that it ensures $\alpha \rightarrow 0$ as $\langle \mathbf{B} \rangle \gg B_{\text{eq}}$. However, attempts to validate such expression against MHD numerical simulations of forced helical flows have instead lead to the alternate “strong quenching” expression (Vainshtein & Cattaneo 1992):

$$\alpha \rightarrow \frac{\alpha_0}{1 + R_m (\langle \mathbf{B} \rangle^2 / B_{\text{eq}}^2)}, \quad (2.25)$$

where R_m is the magnetic Reynolds number characterizing the flow. With $R_m \sim 10^8$ – 10^{10} in the solar convection zone, α -quenching then sets in at a magnitude of $\langle \mathbf{B} \rangle$ four to five orders of magnitude below equipartition. The difference between eqs. (2.24) and (2.25) hinges on the fact that at high- R_m , the turbulent flow first reaches energy equipartition with \mathbf{B}' , not $\langle \mathbf{B} \rangle$; eq. (2.25) then follows from the scaling ratio $\mathbf{B}' / \langle \mathbf{B} \rangle \sim \sqrt{R_m}$, expected in the limit $R_m \gg 1$ (see Cattaneo & Hughes 1996; Hubbard & Brandenburg 2012). This catastrophic quenching is believed to reflect a cascade of magnetic helicity to small scales, required under the constraint of total magnetic helicity conservation (Brandenburg 2001; Field & Blackman 2002). It can be alleviated by allowing a flux of helicity through the simulation boundaries (see, e.g., Käpylä et al. (2008) and discussion therein).

In the simulation analyzed in this paper $\rho = 42 \text{ kg m}^{-3}$ and $u'_{\text{rms}} \simeq 20 \text{ m s}^{-1}$ in the middle of the averaging domain used for the α -quenching analysis, which leads to a kinetic energy density $e_k \simeq 8000 \text{ J m}^{-3}$, corresponding to an equipartition field strength of $\simeq 0.15 \text{ T}$, in good agreement with the energy density of the small-scale magnetic component averaged over the same subdomain. Fig. 2.9 indicates that quenching is already well underway at $\langle B_\phi \rangle^2 / 2\mu_0 \simeq 10^3 \text{ J m}^{-3}$. This suggests that α -quenching in our simulation is mediated primarily by the small-scale magnetic field, even though the magnetic Reynolds number characterizing this simulation is only a few tens.

Attempts to fit the classical quenching expression given by eq. (2.24) to the simulation data presented in Figure 2.9 yield an extremely poor fit (dotted line), due to the strong concavity of the observed trend. Similar attempts using the strong quenching expression (2.25)

fare definitely better, although no single combination of α_0 and R_m fits the simulation data well over its full range. The dash-dotted and dashed curves on Fig. 2.9 show the quenching predicted by eq. (2.25) for $R_m = 10$ and $R_m = 50$, respectively, with α_0 adjusted to fit approximately the mean $\alpha_{\phi\phi}$ value at cycle minima. The rapid initial drop of $\alpha_{\phi\phi}$ is best reproduced by picking a higher R_m , but the flat, extended tail is better fit with a lower R_m . Note that a magnetic Reynolds number of a few tens is actually consistent with other estimates obtained for this simulation by different means, e.g. from the turbulent spectrum, and thus presents a form of internal consistency with the strong quenching interpretation.

Whether in their weak or strong form, the algebraic quenching expressions (2.24) and (2.25) remain extreme simplifications of the complexity of turbulent flow-field interactions. The numerical simulations of Pouquet et al. (1976) suggest that for MHD turbulence with short coherence time, eq. (2.21) should be replaced by:

$$\alpha^* = -\frac{\tau_c}{3}(\langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}' \rangle - \rho^{-1} \langle \mathbf{j}' \cdot \mathbf{B}' \rangle). \quad (2.26)$$

The first term in parentheses on the RHS of this expression is again the kinetic helicity h_v , and the second is its magnetic equivalent, namely the current helicity, where $\mu_0 \mathbf{j}' = \nabla \times \mathbf{B}'$, a quantity closely related to the usual magnetic helicity. Note that this magnetic contribution to the α -effect has a sign opposite to that of the kinetic contribution, and reflects the small-scale magnetic helicity will tend to counteract the kinetic helicity of the small-scale flow, a general property of flow-field interactions in the MHD limit.

We can take advantage of the fact that eq. (2.26) offers a good representation of the $\alpha_{\phi\phi}$ component extracted from the simulation (viz. Fig. 2.2) to investigate the physical origin of the α -quenching measured in the simulation. The formulation known as dynamical α -quenching assumes that reduction of the α -effect takes place through the growth of the magnetic term on the RHS of eq. (2.26). This growth is seen as an unavoidable consequence of magnetic helicity conservation, which requires accumulation of magnetic helicity of one sign at small scales, if a large-scale magnetic component with helicity of opposite sign is to be produced by turbulent dynamo action (Brandenburg 2001).

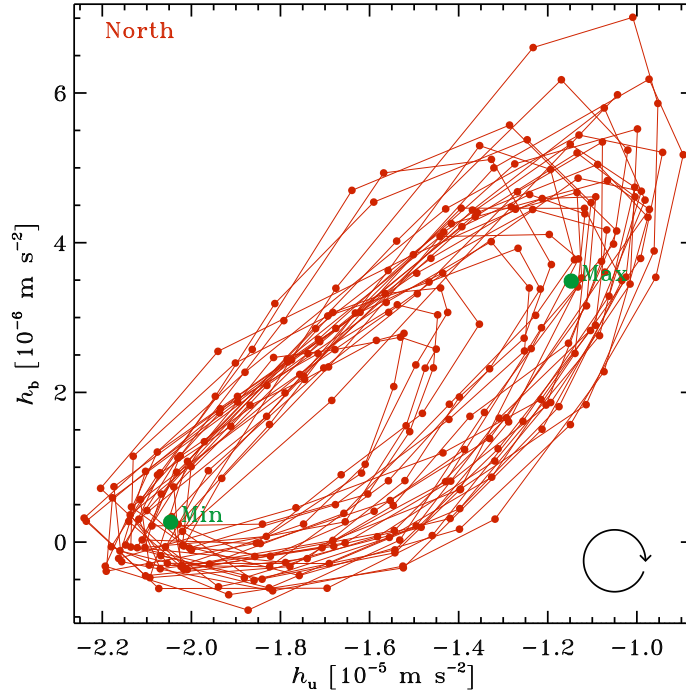


FIGURE 2.10 – Phase space portrait of the joint variations of the kinetic and current helicities in the Northern hemisphere. As in previous Figures, h_v and h_b are averaged over the domain shown on Fig. 2.6B and C and averaged over successive 100-month wide temporal blocks with 50% overlap (solid dots), with consecutive blocks connected by a line segment. The trajectory runs clockwise on this plot, with mean values over cycle maxima and minima indicated by solid green dots.

Figure 2.10 shows the temporal variations of the kinetic helicity h_v and magnetic helicity h_b over the course of the 34 cycles in the simulation, in the form of a trajectory in the 2D phase space $[h_v, h_b]$. Both helicities are averaged over the high latitude domain depicted on Fig. 2.6B and C, as well as in time, over 100-month wide temporal blocks overlapping by 50%, as on Figure 2.9. The plot shows the trajectory associated with the Northern hemisphere, but the Southern hemisphere trajectory is similar, except for being reflected about the origin. One full magnetic cycle corresponds here to two clockwise circuits along the loop-like path, and the solid green dots show the locii corresponding to the averages of maxima and minima on Fig. 2.7.

The cyclic growth of the current helicity h_b from cycle minimum to subsequent maximum, followed by a decrease to the next minimum, actually contributes an *increase* of the α -effect in the integration domain considered here (box on Fig. 2.6C). This happens because in this

region, the current helicity has a sign opposite to the kinetic helicity, unlike in most other regions of the domain, where the opposite situation prevails and the current helicity opposes the kinetic helicity, as per eq. (2.26). This latter behavior is generally consistent with the picture of dynamical α -quenching, according to which the cascade of magnetic helicity to small-scale during the growth phase of the cycle eventually leads to a saturation of the large-scale dynamo. Nonetheless, here the increase of α mediated by the growing current helicity is erased by a far more substantial variation of the kinetic helicity, which drops by almost a factor of two between minima and maxima. Repeating the same analysis with the integration region moved to lower latitude yields different patterns, but in all cases the kinetic helicity shows a reduction by factors in the range $\simeq 1.5$ – 2 between the minimum and maximum phases of the magnetic cycle.

In view of the relative magnitudes of h_v and h_b (cf. Fig. 2.6B and C), if eq. (2.26) is taken at face value then one would conclude that the cyclic variations of kinetic helicity dominates variations of current helicity in quenching the α -effect at most locations in our simulation domain. This is a different pattern of quenching than measured by Brandenburg et al. (2008) in their helically forced simulation, in which the kinetic helicity remained essentially constant and the reduction of the α -effect could be traced to a corresponding increase of the current helicity. The difference is perhaps not surprising, since their simulation is helically forced whereas in our case the forcing is thermal and helicity is introduced through the action of the Coriolis force.

The EULAG-MHD “millenium” simulation providing the numerical data used for all analyses presented in this paper achieves stability through implicit diffusivities associated with the numerical advection scheme, which here is the same for the advection of fluid velocity and magnetic field; in other words, here the magnetic Prandtl number is expected to be of order unity. The rather complex variation of kinetic versus current helicity is therefore unexpected, and must originate not with the dissipative properties of the simulation, but rather with changes in the character of the small-scale flows, presumably mediated by the large-scale magnetic field and perhaps also time-varying large-scale flows.

2.5.2 Diffusivity quenching

Measurements of the quenching of turbulent diffusivity in MHD simulations received comparatively less attention than α -quenching. Section 1 of Karak et al. (2014) provides again a good survey of these measurements. Parametric diffusivity quenching, often akin to eq. (2.24) herein, have been incorporated into some mean-field dynamo models (e.g., Rüdiger et al. 1994), with goals as diverse as producing interface dynamos (Tobias 1996a), achieving strong amplification to toroidal magnetic fields in the tachocline (Gilman & Rempel 2005), effecting the transition from diffusion-dominated to advection-dominated regimes in flux transport dynamos (Guerrero et al. 2009), or producing a strong radial diffusivity gradient in the outer convective envelope (Muñoz-Jaramillo et al. 2011).

In view of the β -tensor measurements displayed on Fig. 2.4, we focus here only on the $\beta_{\phi\phi}$ component, for which a statistically significant determination is obtained over 70% of the meridional plane. Following the same strategy just used for measuring α -quenching, we segment the simulation output into two sets of disjoint 100-month wide blocks centered respectively on magnetic energy minima and maxima. We then repeat the SVD least-squares fit on the concatenation of each of these two sets of segments. In this manner we generate two “average” $\beta_{\phi\phi}$ components, respectively characterizing epochs of maxima or minima of the magnetic cycle. The result of this procedure is shown on panels A and B of Fig. 2.11, with panel (C) replicating the $\beta_{\phi\phi}$ extracted from the full simulation run. In all three panels the white contours marks the 1σ region of significance as returned by the SDV procedure. As expected, the corresponding level of noise for $\beta_{\phi\phi}$ in epochs of minima and maxima are higher due to the reduced length of the simulation data.

Evidently, the overall amplitude of $\beta_{\phi\phi}$ is reduced at times of cycle maxima, as compared to epochs of cycle minima. To quantify this level of reduction we average $\beta_{\phi\phi}$ within the statistically significant region located within the 1σ contour, leading to values $6.0 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ for minima, and $4.4 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ for maxima, a $\simeq 36\%$ reduction. In comparison, the same average carried out for the $\beta_{\phi\phi}$ extracted over the full simulation yields $5.0 \times 10^7 \text{ m}^2/\text{s}$. The Min-to-Max ratio is thus $\simeq 1.36$, much smaller than the reduction by a factor of ~ 3 determined for the components of the α -tensor (see Fig. 2.9). This is qualitatively consistent with

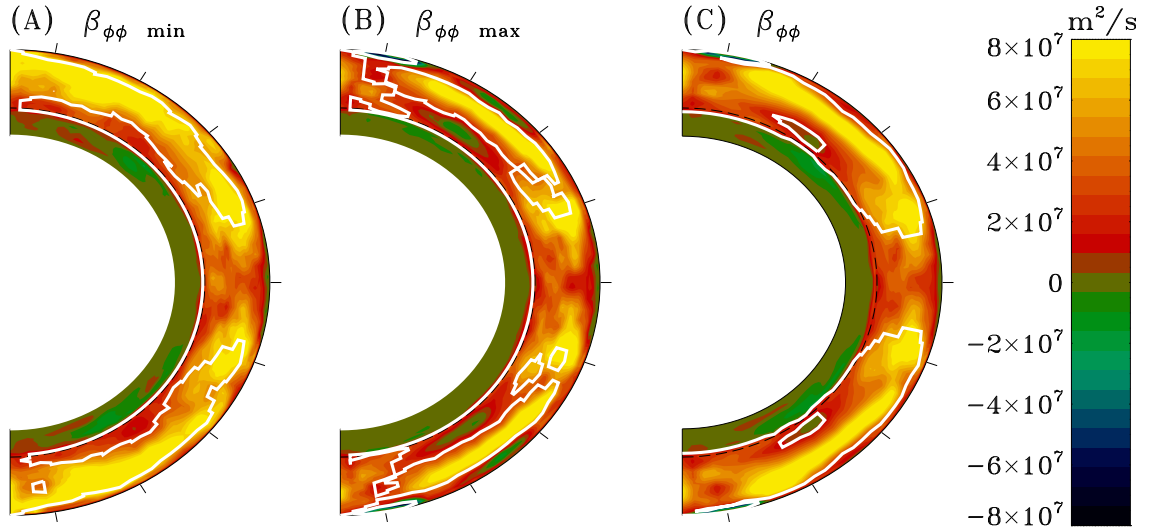


FIGURE 2.11 – The $\beta_{\phi\phi}$ component extracted from the sets of disjoint 100-month wide temporal segments centered either on (A) minima or (B) maxima of the large-scale magnetic cycle. For comparison, panel (C) shows the corresponding plot for the whole simulation output, replicated from Fig. 2.4. The white contour marks the level where $\beta_{\phi\phi}$ is equal to the standard deviation returned by the SVD fitting procedure.

other determinations of α - and β -quenching in various types of 3D turbulent MHD simulations (see Karak et al. (2014), §1, and references therein).

2.6 Discussion and conclusion

We presented in this paper a reconstruction of the α and β -tensor characterizing the mean turbulent electromotive force operating in a EULAG-MHD global simulation of thermally-driven convection, specifically the “millenium simulation” presented in Passos & Charbonneau (2014). We generalized the original singular value decomposition-based least-squares minimization procedure of Racine et al. (2011), which was restricted to the α - tensor, to include also the simultaneous reconstruction of the β -tensor.

Including the β -tensor in the extraction procedure yields results for the α -tensor that are quite similar to the earlier extractions of Racine et al. (2011), who truncated the emf development eq. (2.4) already at the first term. The primary difference is in the amplitude of the α -tensor components, which tend to be smaller with the β -tensor included. Interestingly, Augustson et al. (2015) report a similar level of variation when using their implementation of

the SVD least-squares extraction scheme on their ASH simulation results, with the β -tensor included or not in the extraction process. Indeed, for the bulk of the convecting layers the α -tensor extracted from Augustson et al. (2015)’s ASH simulation is quite similar to that characterizing our EULAG-MHD simulations (cf. Fig. 9 in Racine et al. 2011 to Fig. 13 in Augustson et al. 2015), keeping in mind that our θ is latitude, which leads to a sign difference for $\alpha_{(r\theta)}$, $\alpha_{(\theta\phi)}$, and γ_{θ}). This was not necessarily to be expected, considering that the two simulations show some significant design differences, notably the presence of stably stratified fluid layer underlying the convecting layer in EULAG-MHD, distinct boundary conditions, very different numerical and temporal resolutions and, more importantly, different numerical diffusivities implicitly introduced at the smallest scales.

In a recent submission to ArXiv, Warnecke et al. (2016) apply their preferred test-field method, as well as a least-squares-based method analogous to that used in the present paper, to extract the α -tensors from the output of a spherical wedge MHD simulations of solar convection. Even though no error bars are provided for either method, the authors claim that these yield conflicting results (as per their Fig. 16), and on this basis conclude that the least-square-based method is “unreliable” (p 15) and “incorrect” (p 16). This conclusion stems from an additional a priori assumption being made, namely that the test-field results are by definition correct. Even if that were the case, comparisons of this nature require quantitative error estimates (cf. their Fig. 16 to Fig. 2.3 herein), to assess whether the differences measured are statistically significant to begin with.

The β -tensor we extract from our EULAG-MHD millenium simulation is quite noisy, with limited regions of 1σ significance. Nonetheless, the diagonal is clearly positive definite, with values $\sim 10^7$ – $10^8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, commensurate with dissipation coefficient for similar EULAG simulations estimated by other means (see Strugarek et al. 2016a), as well as with values typically used in mean-field dynamo models.

Our analysis of α -quenching yields results in general qualitative agreement with the so-called strong quenching formulation, in which it is the small-scale magnetic field that first reaches equipartition with turbulent fluid motions and quenches the turbulent α -effect. Note however that the magnetic Reynolds number characterizing our MHD simulation is relatively

low, of the order of a few tens, with the consequence that energy density of the small-scale magnetic components exceeds that of the large-scale field by less than a factor of ten in the region of the simulation domain used for this quenching calculation. Although cyclic variations of the small-scale current helicity are measured in the simulation, the greater part of the α -quenching appears to result from a reduction of the turbulent kinetic helicity. Approximately half of this decrease is due to a drop in the rms turbulent flow speed, while the other half results from a decrease in the alignment of the small-scale flow with respect to its vorticity vector. These results indicate that, at least in this simulation, quenching of the α -effect is a fully magnetohydrodynamical phenomenon, finding its roots in magnetically-mediated changes in the patterns of turbulent convection (on this latter point see also Cossette et al. (2016), submitted to ApJ).

Independently of the applicability (or lack thereof) of the SOCA expressions for the α -tensor, our analysis indicates that even in the minimum phase of the magnetic cycles our α -effect shows a strong dependence on magnetic energy, indicating that significant magnetic quenching is acting already then. Our α -effect evidently operates in a strongly nonlinear regime at all phases of the large-scale magnetic cycles unfolding in the simulations, as seems to also be the case in the simulations of Käpylä et al. (2012, 2013).

We also carried out measurements of diffusivity quenching, limited at this point in time to the $\beta_{\phi\phi}$ component. We find the turbulent diffusivity to suffer much less quenching than the α -effect, specifically $\simeq 36\%$ versus a factor of $\simeq 3$ for α . This much weaker magnetic quenching of the turbulent diffusivity is in qualitative agreement with the findings of Brandenburg et al. (2008), even though the simulation analyzed by these authors used a geometrical setup and turbulent forcing quite different from ours.

Under a strictly scriptural interpretation of mean-field electrodynamics, the α - and β -tensors are fundamentally linear, hydrodynamical quantities which characterize the inductive properties of a flow unaffected by the presence of magnetic fields at any scale. Here, in contrast, we are fitting eq. (2.8) to numerical data taken from a MHD simulation having reached its nonlinearly saturated stage. The α - and β -tensor extracted in this manner are thus not, a priori, the same physical objects. They must be interpreted as coefficients quantifying an

empirical parametrization of the nonlinearly saturated turbulent electromotive force in terms of the large-scale magnetic field and its derivatives. That they do so in a meaningful manner is supported by the fact that upon being inserted in a conventional axisymmetric kinematic $\alpha^2\Omega$ mean-field model, they produce a large-scale magnetic field exhibiting a spatiotemporal evolution resembling reasonably well that observed in the original MHD simulation from which the tensors are extracted (see §3.2 in Simard et al. 2013).

More surprising is the fact that the isotropic parts of the α and β -tensors extracted from the simulation show fairly good agreement with their linear forms, as computed under the second order correlation approximation. The most prominent discrepancy, namely the overall amplitude of the (isotropic) SOCA α^* and β^* being larger by a factor of about 5, may hold a clue as to why the general spatial form of the tensors are otherwise so similar. The SOCA estimates require the specification of the correlation time of the turbulence flow (τ_c in eqs. (2.21), (2.22) and (2.26)), a quantity notoriously difficult to extract from numerical simulations. As a first cut we simply followed Brown et al. (2010) and set τ_c equal to the mean turnover time τ_u of the small-scale flow, the latter estimated from the density scale height H_ρ and rms turbulent flow speed u'_{rms} ; in other words, we have assumed the Strouhal number $\text{St} = \tau_c/\tau_u$ to be unity. Matching the amplitude of the SOCA coefficient to those of the tensors extracted from the simulation requires reducing the Strouhal number by a factor of $\simeq 5$, which then puts us in the regime $\text{St} < 1$, in which the SOCA approximation is actually expected to hold (Pouquet et al. 1976). We view this as an encouraging indication of internal consistency in our analysis and interpretation, notwithstanding the fact that the results presented here pertain to a single simulation carried out at relatively low Reynolds number, and that our turbulent diffusivity results remain at this writing limited in scope.

We wish to thank Antoine Strugarek for useful discussions, and two anonymous referees for some useful comments and suggestions.

This work was supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada, the Fond Québécois pour la Recherche – Nature et Technologie, the Canadian Foundation for Innovation, and time allocation on the computing infrastructures of Calcul Québec, a member of the Compute Canada consortium. CS is also supported in part through a gra-

duate fellowship from FRQNT/Québec.

Chapitre 3

DOUBLE DYNAMO SIGNATURES IN A GLOBAL MHD SIMULATION AND MEAN-FIELD DYNAMOS

Patrice Beaudoin, Corinne Simard, Jean-François Cossette and Paul Charbonneau
*Département de Physique, Université de Montréal, C.P. 6128 Succ. Centre-ville, Montréal,
Qc H3C 3J7, Canada*

Received 2015 January 28; accepted 2016 March 13

Published in *Astrophysical Journal*,
27 July 2016, Vol. 826-2, page 138

3.1 Abstract

The 11-yr solar activity cycle is the most prominent periodic manifestation of the magnetohydrodynamical (MHD) large-scale dynamo operating in the solar interior, yet (quasi-)periodicities longer and shorter are also present. The so-called “quasi-biennial” signal appearing in many proxies of solar activity is gaining increasing attention since its detection in p -mode frequency shifts, which suggests a subphotospheric origin. A number of candidate mechanisms have been proposed, including beating between co-existing global dynamo modes, dual-dynamos operating in spatially separated regions of the solar interior, and Rossby waves driving short-period oscillations in the large-scale solar magnetic field produced by the 11-yr activity cycle. In this article, we analyze a global MHD simulation of solar convection producing regular large-scale magnetic cycles, and detect and characterize shorter periodicities developing therein. By constructing kinematic mean-field $\alpha^2\Omega$ dynamo models incorporating the turbulent electromotive force (emf) extracted from that same simulation, we find that dual dynamo behavior materializes in fairly wide regions of the model’s parameters space. This suggests that the origin of the similar behavior detected in the MHD simulation lies with the joint complexity of the turbulent emf and differential rotation profile, rather than with dynamical interactions such as mediated by Rossby waves. Analysis of the simulation also reveals that the dual-dynamo operating therein leaves a double-period signature in the temperature field, consistent with a dual-period helioseismic signature. Order-of-magnitude estimates for the magnitude of the expected frequency shifts are commensurate with helioseismic measurements. Taken jointly, our results support the hypothesis that the solar quasi-biennial oscillations are associated with a secondary dynamo process operating in the outer reaches of the solar convection zone.

3.2 Introduction

The cyclic variation of the large-scale solar magnetic field provides the pulse modulating all phenomena collectively defining solar activity. The most prominent periodicity has a 22-yr period, translating into the well-known 11-yr activity cycle since global magnetic polarity is

largely irrelevant to solar activity. This cycle, first noted in the nineteenth century on the basis of sunspot counts, has since been reconstructed back to the seventeenth century, and traced much further back in time through indirect proxies such as cosmogenic radioisotopes. These reconstructions have revealed the presence of significant variations, some possibly cyclic, developing on much longer timescales than the primary 22-yr magnetic cycle (Usoskin 2013).

Solar activity also varies on much shorter timescales than its primary cycle. The bulk of these variations is likely due to the stochastic vagaries of magnetic flux emergence through the photosphere, and subsequent evolution through magnetic reconnection and, more generally, interaction with existing coronal structures and plasma flows. Nonetheless, evidences for systematic, cyclic variability on a ~ 2 -yr timescale in a number of activity indicators have been accumulating for a number of years (Benevolenskaya 1998; Bazilevskaya et al. 2014). Interest in such “quasi-biennial” cycles was also rekindled by the helioseismic detection of a ~ 1.3 -yr oscillation in the zonal flow at the very base of the solar convection zone and in the underlying tachocline (Howe et al. 2000).

Various analyses of the sunspot number and/or area time series have uncovered periodicities ranging from 1.3 to 2.8 years, which do not appear to be higher harmonics of the primary 22-yr magnetic cycle (see, *e.g.*, Krivova & Solanki 2002; and Norton & Gallagher 2010). A similar signal was found in the F10.7 cm radio flux (Broomhall et al. 2009) and total solar irradiance (Penza et al. 2006). Commensurate periodicities are also found in various measures of the heliospheric magnetic field and geomagnetic activity, with the corresponding oscillation amplitude varying with that of the primary 11-yr activity cycle (Mursula et al. 2003). This quasi-biennial modulation of the solar heliospheric magnetic field translates into a corresponding modulation of galactic cosmic rays flux measured at Earth (Laurenza et al. 2012).

Periodicities at both 11 and ~ 2.8 years have also been observed in the depth of some photospheric spectral lines (Penza et al. 2006), and according to these authors cannot be explained by variations in active region coverage. Vecchio & Carbone (2008) used a proper orthogonal decomposition to analyze variations observed in the Fe XIV green coronal emission line at 530 nm, which also shows 11-yr and quasi-biennial cyclic variations. Their analysis

indicates that very few modes are needed to properly characterize the temporal variations, suggesting that the 11-yr cycle and shorter 2.8-yr oscillation are physically independent or only weakly coupled.

Since the solar activity cycle is magnetic in origin, it is natural to assume that this may be the case for the quasi-biennial signal as well. This idea is supported by the analysis of the solar photospheric magnetic field carried out by Benevolenskaya (1995, 1998) and more recently by Ulrich & Tran (2013). Working with synoptic magnetograms for the zonally-averaged radial magnetic field component at the surface, these latter authors subtract a 2.5-yr running average from the raw signal, producing a synoptic representation of the residual that shows a well-defined cyclic signal at low- to mid-latitudes (see their Figure 9). The period is again in the quasi-biennial range and, according to Ulrich & Tran (2013), cannot be ascribed to the evolution and decay of active regions.

Further support for a subphotospheric origin of the quasi-biennial oscillations is found in the temporal variations of p -mode frequencies (Broomhall et al. 2009; Fletcher et al. 2010). Broomhall et al. (2009) detect the quasi-biennial signal throughout the descending phase of cycle 23 and the subsequent activity minimum, while the signal typically vanishes at activity minima in most surface activity proxies. These authors therefore suggest that p -mode frequency shifts may track deep-seated subsurface changes in magnetic flux at cycles minima, preceding the onset of activity in the subsequent cycle. Later investigations have attempted to better characterize the location and amplitude of the helioseismic quasi-biennial signal (Broomhall et al. 2012; Simoniello et al. 2012, 2013b). These various authors, working with different datasets, all come to the tentative conclusion that the magnetic flux responsible for the quasi-biennial oscillation must be located between $\pm 45^\circ$ latitude, and that this phenomenon is independent of the mechanism that causes the emergence of active regions. Simoniello et al. (2013b) further suggest that the quasi-biennial signal could result from the beating between a magnetic dipole and quadrupole.

One obvious explanation for the observation of dual cycles in solar activity indicators is that two distinct dynamos operate simultaneously in the solar interior. This hypothesis, at first glance somewhat arbitrary, is actually supported by the fact that the solar internal differential

rotation profile is characterized by multiple, spatially segregated regions or rotational shear, each capable in principle of supporting an oscillatory dynamo in conjunction with a turbulent electromotive force (*emf*) (see, e.g., Charbonneau 2010, Figure 8B). Multiple dynamo cycles have also been observed in some recent magnetohydrodynamical (MHD) simulations of solar convection (Käpylä et al. 2010; Simard et al. 2013; Käpylä et al. 2016). Benevolenskaya (1995, 1998) developed a simple thin-layer mean-field model in which two spatially segregated dynamo regions are coupled via nonlinear differential equations. For weak coupling between the two dynamo source regions, the dual-cycles observed in solar activity indicators can be reproduced reasonably well. Further support for this dual-dynamo hypothesis can also be found in stellar cycle data, specifically the stars HD 76151 and HD 190406 in the Mt-Wilson Ca H+K data, which in addition to their primary cycle show secondary chromospheric variability with periods of 2.52 and 2.60 years respectively (Baliunas et al. 1995). Metcalfe et al. (2010) also reports the identification of a short 1.6-yr magnetic cycle from synoptic Ca HK measurements in the solar-type star ι Horologii, although in this case no evidence for a longer cycle has yet been uncovered.

Non-dynamo-based explanations of the solar quasi-biennial oscillations have also been proposed. Increasing attention is recently being paid to the possibility that this oscillation arises from the interaction between Rossby waves and the large-scale solar magnetic field (Kuhn et al. 2000; Zaqarashvili et al. 2010). This idea was originally formulated by Gilman (1969a,b), who used a simplified model defined in terms of two superimposed layers of fluids. Under plausible parameter settings, magnetic fields could be supported and polarity reversals produced on a ~ 2 -yr timescale. At any rate, a better understanding of these quasi-biennial oscillations might provide a new probe into the solar interior (D’Alessi et al. 2013), or perhaps be useful as a cycle predictor (Simoniello et al. 2013a).

In this paper we examine dual-dynamo action taking place in a global MHD simulation of solar convection as well as in a kinematic mean-field dynamo model. In § 3.2 the existence of a spatially disjointed dual magnetic cycle is first established in the global simulation. In § 3.3, kinematic mean-field $\alpha^2\Omega$ dynamo models are constructed, using the α -tensor extracted from the same MHD simulation analyzed in § 3.2. We identify regions in the parameters space

of the $\alpha^2\Omega$ model that are characterized by dual-dynamo behavior akin to that observed in the simulation. The temperature field of the global MHD simulation is investigated in § 3.4, revealing signatures related to both magnetic cycles. We conclude in § 3.5 by speculating on the physical origins of the solar quasi-biennial oscillation in light of these modelling results.

3.3 Global MHD simulation results

We use the MHD generalization of the geophysical flow simulation code EULAG (Prusa et al. 2008, and references therein) to carry out numerical simulations of solar convection. The global, implicit, large-eddy simulation (ILES) of MHD solar convection used to generate these results is presented in Ghizaru et al. (2010), and the mathematical and computational frameworks are described in Smolarkiewicz & Charbonneau (2013). This simulation succeeds in generating a large-scale axisymmetric magnetic component, undergoing regular, hemispherically well-synchronized polarity reversals on a timescale of a few decades (see Passos and Charbonneau 2014 for a detailed analysis of the “millenium simulation” used here). Dissipation in EULAG and EULAG-MHD is delegated to the underlying advection scheme, which effectively provides an adaptive subgrid model ensuring numerical stability and concentrating artificial dissipation to the scale of a few grid points. Reasonably turbulent regimes can then be attained on relatively low-resolution spatial meshes, in turn allowing very long time integrations in a reasonable amount of computing time.

The foregoing analysis uses the four-dimensional numerical dataset (longitude ϕ , latitude θ , radius r and time t) returned by the simulation. To better illustrate the fast-oscillating signal, it is advantageous to remove the primary 40-yr cycle, which we carry out through the following detrending procedure :

$$\mathbf{X}_d(\phi, \theta, r, t) = \mathbf{X}(\phi, \theta, r, t) - \bar{\mathbf{X}}(\phi, \theta, r, t) , \quad (3.1)$$

where \mathbf{X} is an original dataset coming from the simulation, $\bar{\mathbf{X}}$ is the smoothed dataset using a 5-yr-wide running boxcar averaging, and \mathbf{X}_d is the detrended quantity. Most of the quantities represented here are averaged in longitude (thus representing the large-scale axisymmetric

components), defined by

$$\langle X_i \rangle(\theta, r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_i(\phi, \theta, r, t) d\phi, \quad i = \phi, \theta, r, \quad (3.2)$$

where $\langle \mathbf{X} \rangle = \langle X_\phi \rangle \mathbf{e}_\phi + \langle X_\theta \rangle \mathbf{e}_\theta + \langle X_r \rangle \mathbf{e}_r$.

Panel (A) of Figure 3.1 represents the evolution of the longitudinally averaged toroidal magnetic field taken near the top of the simulated domain during roughly ~ 240 years. The regular polarity reversals of the main cycle are readily seen at mid- to high latitudes on this diagram, along with the antisymmetric polarity maintained between the two hemispheres. We also clearly detect a short-period oscillation located between $\pm 30^\circ$ superimposed on the primary cycle, akin to the quasi-biennial cycle found in helioseismology. This signal is present throughout most of the convecting layers but peaks above $r/R \simeq 0.9$, as illustrated on the time-radius diagram in panel (B).

A time series of the azimuthally averaged toroidal magnetic field extracted at radius $r/R = 0.92$ and latitude 18° is shown as a black curve on the top half of Figure 3.1C, along with a time series of the magnetic energy of the large-scale, axisymmetric magnetic field:

$$E_{\langle B \rangle}(t) = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \langle B \rangle^2 dV, \quad (3.3)$$

with the integral carried out over the whole domain. This time series is plotted in blue on Figure 3.1C, and serves here as a proxy of the activity cycle. The presence of at least two periodic signals is clearly apparent : the main ~ 40 -yr half-period cycle and a rapidly oscillating ~ 2 -yr signal. When using the aforementioned detrending procedure in Equation (3.1) (which consists concretely of subtracting the red, smoothed curve, from the black), we obtain the black curve plotted on the bottom half of panel (C). The green curve traces the oscillation envelope, obtained via a smoothing of 40 solar days ($\simeq 3.3$ yr) of the black curve, and the grey shaded regions delimit the periods of minimal magnetic activity. For many cycles in the simulation the amplitude of the 2-yr signal waxes and wanes with the amplitude of the primary magnetic cycle, as observed in p -mode frequency shifts for cycles 22 and 23 (see Figure 1 in Fletcher et al. 2010), but this pattern is not always clearly present in our simulated cycles.

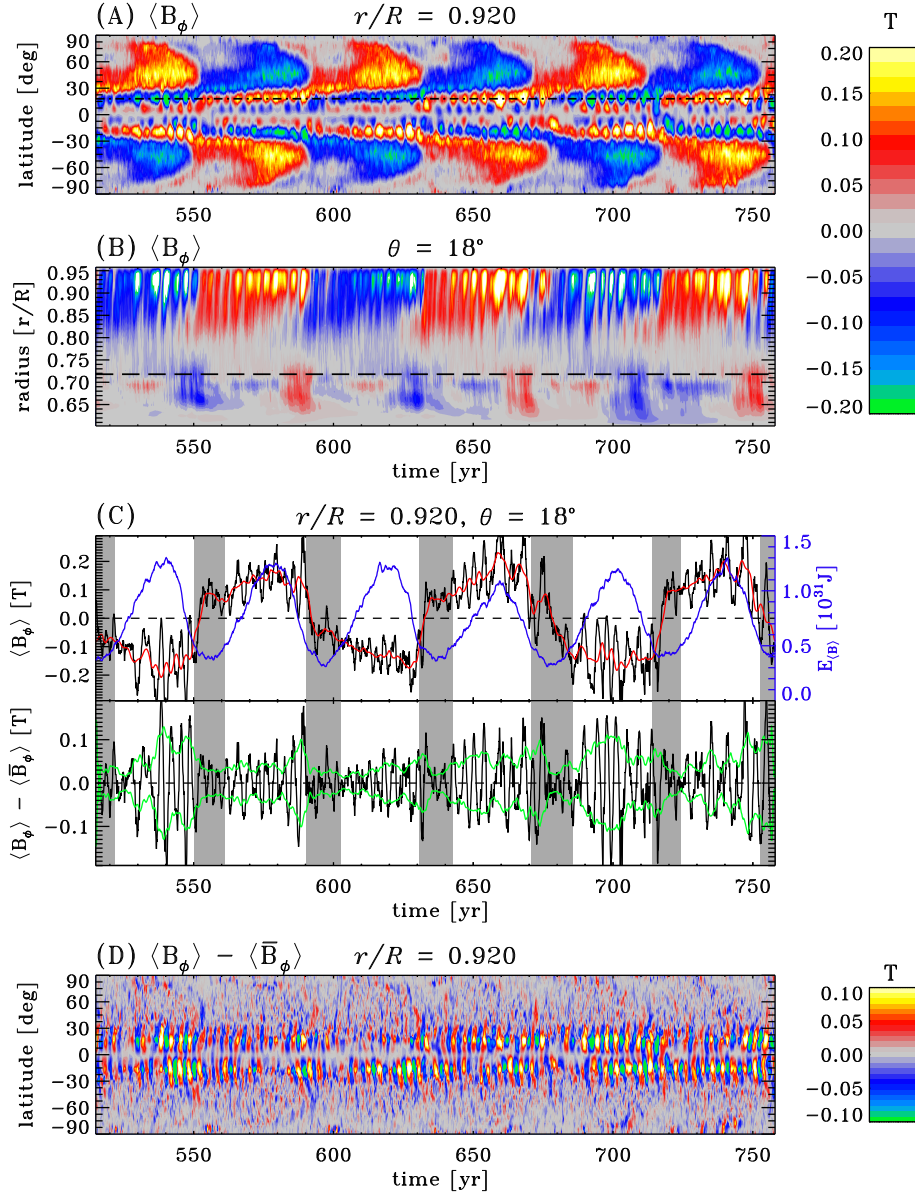


FIGURE 3.1 – Longitudinally averaged toroidal magnetic field. Panel (A) shows a time-latitude diagram of this quantity sampled near the top of the domain at $r/R = 0.92$, with the dot-dashed line corresponding to the latitude (18°) at which the radius-time diagram displayed in panel (B) is sampled. The dashed line in that panel indicates the interface between the convectively unstable fluid, and the underlying stably stratified layers. The black curve in the top section of panel (C) depicts the mean toroidal magnetic field extracted at depths and latitudes consistent with panels (A) and (B). The red curve is the smoothed mean toroidal magnetic field taken at this same latitude and depth, smoothed with a running 5-yr boxcar filter. Large-scale magnetic energy ($E_{\langle B \rangle}$) is plotted in blue and provides a proxy of the magnetic cycle. The bottom section of panel (C) shows the detrended toroidal magnetic field at this same location, with the green curve being the oscillation envelope calculated using a smoothing process over 40 solar days on the black curve ($\simeq 3.3$ yr). The grey shaded regions indicate when the simulation is in a minimum phase of the magnetic cycle ($E_{\langle B \rangle} < 5 \times 10^{30}$ J). Panel (D) is a time-latitude diagram of the detrended toroidal magnetic field at $r/R = 0.92$.

This suggests that in our simulation, the two signals are generated from two independent or weakly coupled dynamos, in a manner perhaps similar to the weak interaction case discussed in Benevolenskaya (1998). Repeating this entire analysis for latitudes located in the region $\pm 30^\circ$ and depths near the surface (between $r/R = 0.89$ and $r/R = 0.94$) yields similar results.

Panel (D) in Figure 3.1 gives another perspective of the short-period cycle in the simulation. This is obtained when removing the 40-yr half-period signal from the total mean toroidal field in Figure 3.1A. Once again, the secondary signal is clearly seen and strongly confined at low latitudes. Note also the mild tendency for poleward propagation of the associated low-latitudes magnetic structures.

The spatiotemporal unfolding of this secondary dynamo mode is depicted on Figure 3.2 in the form of meridional slices. Panels (A) through (D) show the longitudinally averaged toroidal magnetic field evolving over a half-cycle of the rapidly oscillating dynamo (between $t = 653$ yr and $t = 654.5$ yr). Panels (E) through (H) show the detrended toroidal magnetic field over the same timespan. In both representations, the fast-oscillating signal is clearly seen at low latitudes in the bulk of the convection zone through the top of the integration domain. The magnetic field related to this signal takes shape in the middle of the convection zone, then propagates toward the surface while moving at slightly higher latitudes, effectively replacing the magnetic field from the previous cycle. The fast-oscillating signal is confined outside of the tangent cylinder (dash-dotted line) to the sphere of radius $r/R = 0.718$ corresponding to the base of the convecting fluid layer, with the main cycle being mostly present inside that cylinder and effectively only modulating the polarity of the secondary dynamo signal. This suggests that differential rotation might be the important factor separating the two dynamos, as one is located in the midst of the equatorial acceleration and the other in a region subjected to a much weaker, primary latitudinal shear (see Figure 3.4, panels (A) and (B) for differential rotation profiles).

Figure 3.3 shows snapshots of the toroidal magnetic component displayed in Mollweide projection, and extracted at (A) $r/R = 0.92$ and (B) $r/R = 0.718$. The strong, deep-seated toroidal magnetic field associated with the primary ~ 40 yr half-cycle appears prominently in panel (B), and persists at mid- to high latitudes all the way to the top of the simulation domain

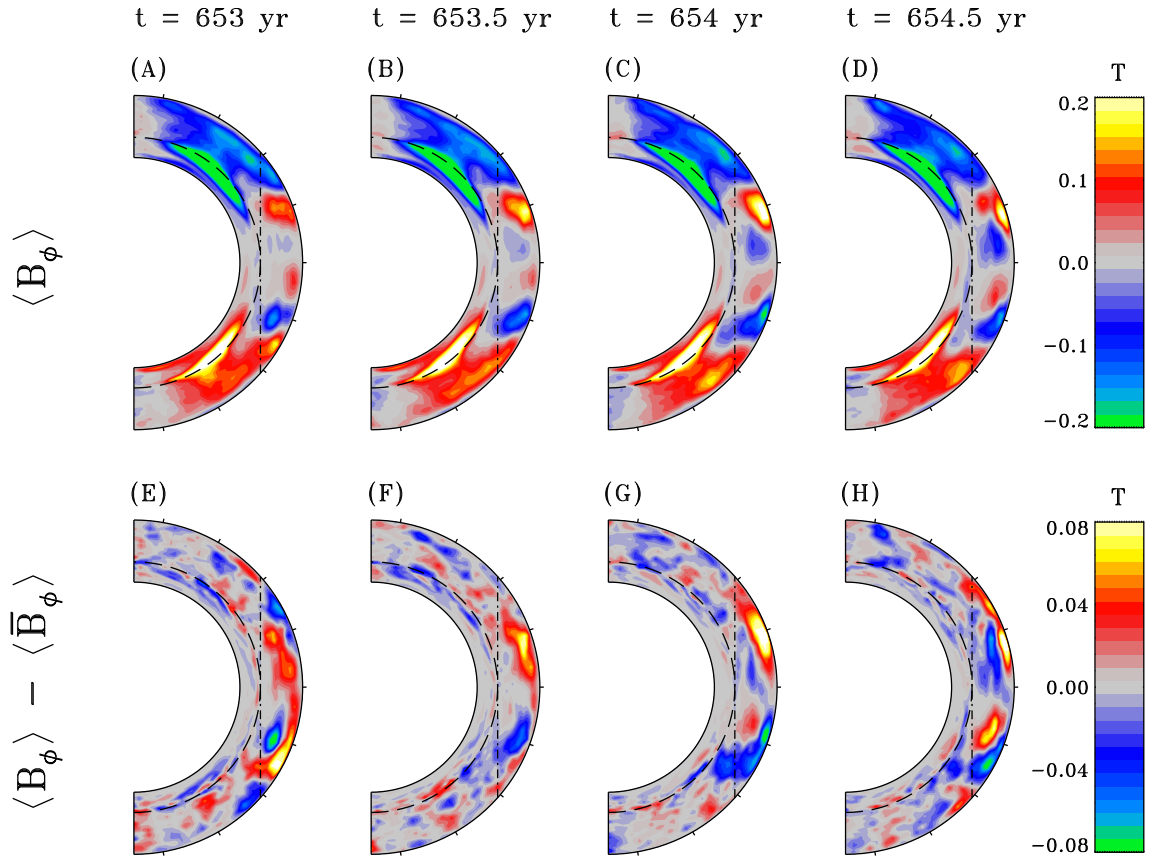


FIGURE 3.2 – Temporal evolutions of the longitudinally averaged toroidal magnetic field ((A) to (D)) and its detrended profile ((E) to (H)), plotted in a meridional plane at times ranging from $t = 653$ yr to $t = 654.5$ yr (covering a half-cycle of the fast-oscillating magnetic signal). Each sequence has its own color scale, indicated at the right. On each panel, the dashed circular arc locates the base of the convectively unstable fluid layer, while the vertical dot-dashed line delineates the tangent cylinder to the base of the convection zone. This last feature delimits the two dynamo signals. The tickmarks on the outer boundary of each diagram indicate latitudes by steps of 20° , the rightmost tick always representing the equator ($\theta = 0^\circ$).

(cf. panel (A)). The thin, longitudinally-oriented bands at low latitudes are associated with the more rapidly oscillating signal detected in the simulation. The higher amplitude bands mark the current cycle and the low amplitude ones located closer to the equator herald the onset of the next half-cycle of the rapid magnetic oscillation. These structures may be akin to the so-called toroidal wreaths characterizing the higher-resolution MHD numerical simulations of Brown et al. (2010, 2011) (see also Nelson et al. 2013). Note in particular that when these simulations are run in a parameter regime leading to polarity reversals, latitudinal propagation

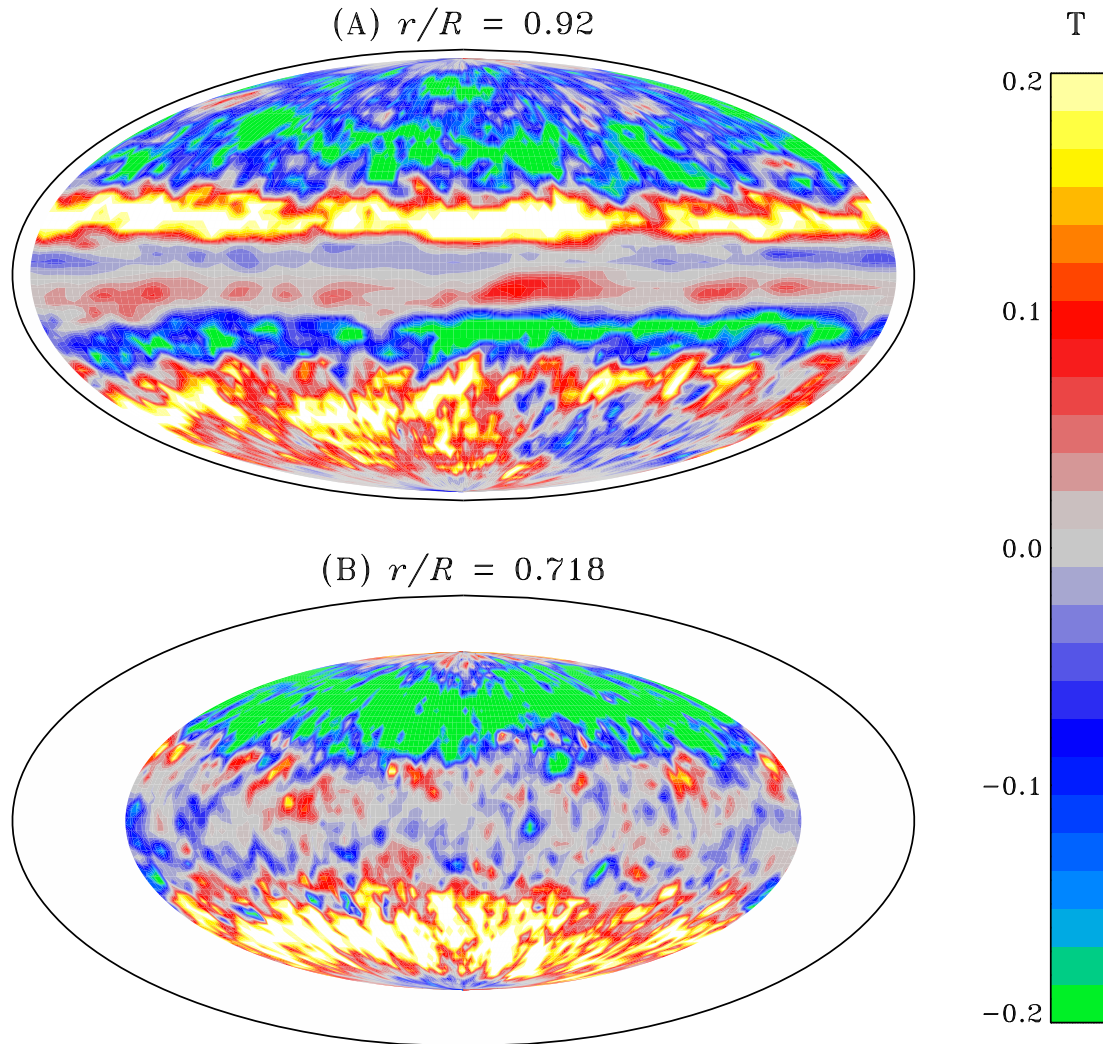


FIGURE 3.3 – Mollweide diagrams of the toroidal magnetic field, both taken at $t = 654$ yr. Panel (A) shows this quantity in the top tier of the integration domain ($r/R = 0.92$), while panel (B) focuses on magnetic field found at the base of the convectively unstable fluid layer ($r/R = 0.718$).

away from the equator is also observed (see, e.g., Figure 3 in Nelson et al. 2013).

3.4 Mean-field simulation results

Section 3.2 has established the existence of a double periodicity in the large-scale, axisymmetric magnetic field building up in the simulation, localized in spatially distinct regions

of the domain. This double periodicity could equally well be due to a double dynamo, or to the inductive effect of coherent, large-scale waves superimposed on a single dynamo cycle. In an attempt to distinguish between these two possibilities we turn to the construction of kinematic mean-field dynamo models, using the turbulent emf extracted from our simulation. Our objective is not to construct a detailed mean-field equivalent to the millenium simulation just discussed, but rather to establish, in the spirit of a proof-of-concept, whether the spatial complexity of the turbulent emf characterizing this MHD simulation can support dual dynamo action.

Following Simard et al. (2013), we construct kinematic, axisymmetric mean-field dynamo solutions operating in the $\alpha^2\Omega$ regime, i.e., the turbulent emf contributes to the regeneration of both the poloidal and toroidal magnetic component, with shearing by differential rotation also contributing to the latter. The $\alpha^2\Omega$ model solves only the mean-field induction equation with the large-scale, axisymmetric magnetic field written as

$$\langle \mathbf{B} \rangle(\theta, r, t) = \nabla \times A(\theta, r, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi + B(\theta, r, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi . \quad (3.4)$$

Similarly, the mean flow $\langle \mathbf{u} \rangle$ in Equation (3.16) is decomposed into steady meridional ($\mathbf{u}_p(r, \theta)$) and azimuthal components ($u_\phi = \varpi \Omega(r, \theta)$), where Ω is the rotational angular velocity and $\varpi = r \cos \theta$, θ being the latitude. Substitution of these expressions into the mean-field induction equation leads to the following two (dimensionless) evolution equations for A and B :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A - \frac{R_m}{\varpi} \mathbf{u}_p \cdot \nabla (\varpi A) + C_\alpha \mathcal{E}_\phi , \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = & \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial (\varpi B)}{\partial r} \\ & - R_m \varpi \nabla \cdot \left(\frac{B}{\varpi} \mathbf{u}_p \right) + C_\Omega \varpi (\nabla \times A \hat{\mathbf{e}}_\phi) \cdot (\nabla \Omega) \\ & + C_\alpha \nabla \times [\mathcal{E}_r \hat{\mathbf{e}}_r + \mathcal{E}_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta] . \end{aligned} \quad (3.6)$$

with length scaled in terms of the solar radius R , and time expressed in unit of the diffusion time $\tau = R^2/\eta_0$. The dimensionless function $\eta(r)$ has a value unity within the modeled

convection zone, and falls smoothly to 10^{-2} below.

The components of the turbulent $emf(\mathcal{E})$ are related here to the large-scale magnetic field via the linear tensorial relation :

$$\mathcal{E}_j(\theta, r, t) = \alpha_{jk}(\theta, r)\langle B_k \rangle(\theta, r, t), \quad j, k = \phi, \theta, r, \quad (3.7)$$

This is akin to the usual development introduced in mean-field electrodynamics (*e.g.* Moffatt 1978), except that here both \mathcal{E} and $\langle \mathbf{B} \rangle$ are extracted from the numerical simulation, and the components of the α -tensor computed by least-squares fit. Further details and validation of this procedure are presented in the Appendix (see also Simard et al. 2016).

The following three dimensionless numbers control the behavior of the model :

$$C_\alpha = \frac{\alpha_0 R}{\eta_0}, \quad C_\Omega = \frac{\Omega_0 R^2}{\eta_0}, \quad R_m = \frac{u_0 R}{\eta_0}, \quad (3.8)$$

where α_0 , η_0 , Ω_0 and u_0 represent typical values of the corresponding physical (dimensional) quantities; C_α measures the overall amplitude of the α -effect, C_Ω the magnitude of differential rotation, the magnetic Reynolds number R_m gives the relative importance of advection by the meridional circulation versus the diffusive transport of the mean magnetic field, and η_0 is a representative value for the (turbulent) magnetic diffusivity in the convecting layers. A simple algebraic α -quenching nonlinearity is applied to all 9 α -tensor components, in order to achieve amplitude saturation. Further details on the formulation of this $\alpha^2\Omega$ mean-field model can be found in Simard et al. (2013).

The differential rotation and meridional flow characterizing the EULAG-MHD simulation of § 3.2 show significant temporal variability, including rotational torsional oscillations and the development of secondary meridional flow cells, which cannot be readily incorporated in our kinematic $\alpha^2\Omega$ mean-field model. We opted to use the differential rotation profile from a parent hydrodynamical (HD) simulation, as plotted on Figure 3.4A. Following Simard et al. (2013), we also opted for a minimal quadrupolar meridional flow pattern characterized by a single flow cell per hemisphere (see their Figure 2A).

Figure 3.5 shows a representative solution, with parameter values $C_\alpha = 15$, $C_\Omega = 50000$

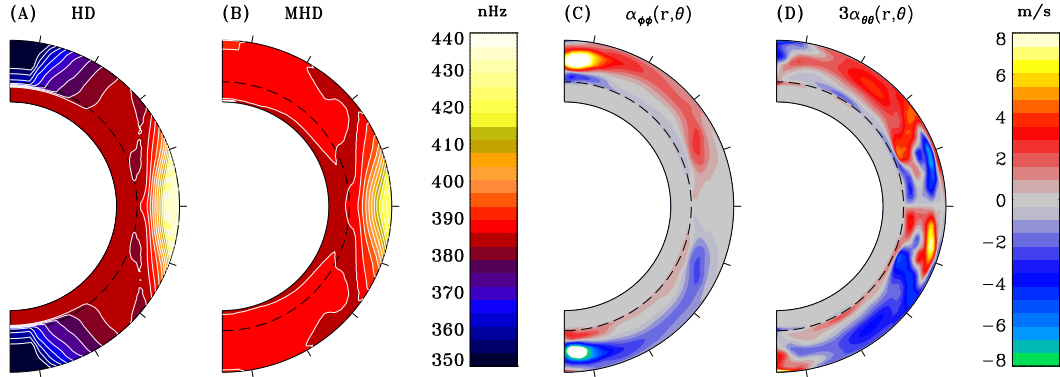


FIGURE 3.4 – Temporally averaged differential rotation profiles for HD (A) and MHD (B) simulations using the global MHD simulation EULAG-MHD, the first of these being implemented in our mean-field model. Panels (C) and (D) show two of the nine α -tensor components included in the mean-field model.

and $R_m = 225$. Panel (A) shows a time-latitude diagram taken within the convection zone, where the coexistence of two distinct dynamo modes is clearly visible. In order to match the long-term cycle to the 40-yr half-period characterizing the EULAG-MHD simulation of § 3.2, we use a value of $\eta_0 = 9.8 \times 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ for the isotropic (turbulent) magnetic diffusivity. This is within a factor of two of the spatially averaged value for the isotropic part of the diffusivity tensor extracted from the same EULAG-MHD simulation by Simard et al. (2016). This choice sets the timescale, but it does not affect the ratio of periods for multiple dynamo modes. Note also that $R_m = 225$ implies a surface meridional flow speed $u_0 \simeq 3 \text{ m s}^{-1}$, comparable to the mid-latitude surface meridional flow speed in the simulation of § 3.2, but a factor of ~ 5 lower than observed at the solar surface.

The longer period cycle peaks between $|50^\circ|$ and $|80^\circ|$ in latitude while the rapidly oscillating signal is located between $|15^\circ|$ and $|40^\circ|$. In this mean-field dynamo solution, both cycles are located at somewhat higher latitudes than those observed in the EULAG-MHD simulation. Examination of the time-radius diagram for the toroidal magnetic component plotted on Figure 3.5 reveals that the short-periodicity dynamo mode peaks around $r/R = 0.85$, deeper than in the EULAG-MHD simulation (cf. Figure 3.1B).

Panels (C) through (F) of Figure 3.5 are the mean-field model’s equivalent to panels (E)

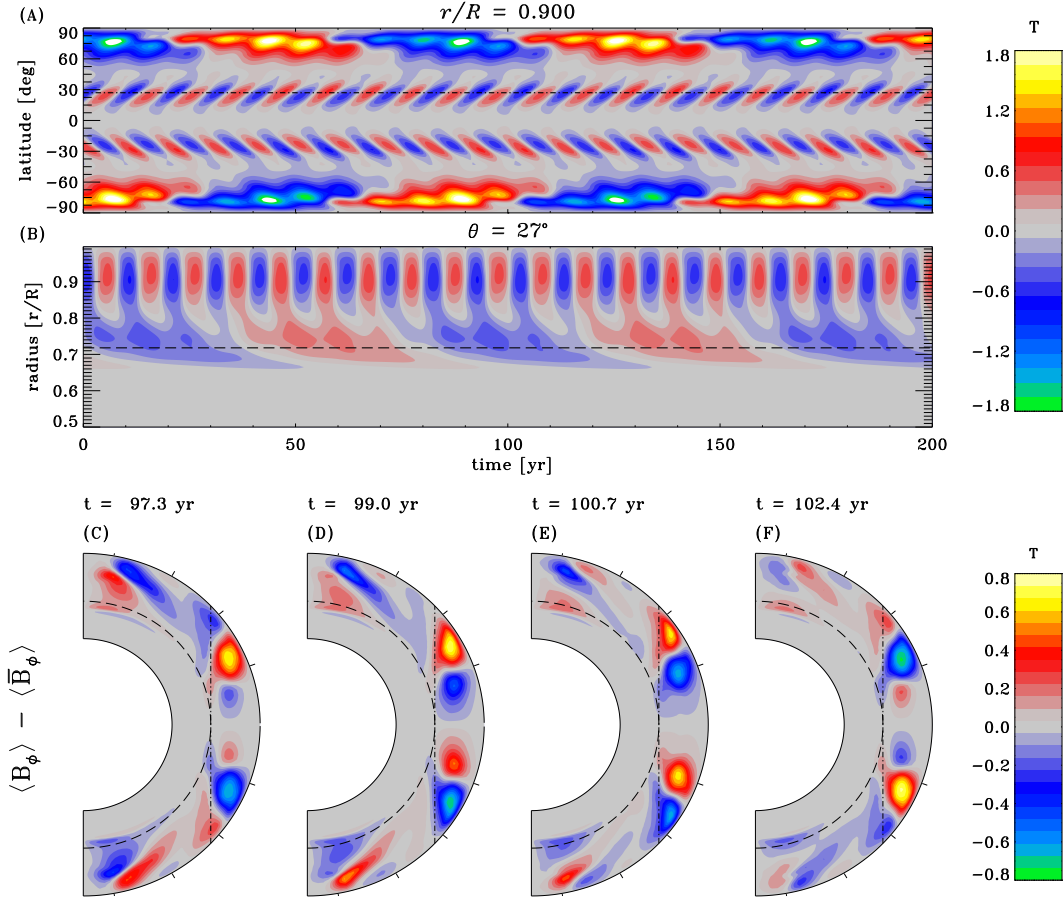


FIGURE 3.5 – Toroidal magnetic field produced by a mean-field model where two distinct dynamo modes are observed. Panel (A) shows a time-latitude diagram at $r/R = 0.90$ where the dot-dashed line corresponds to the latitude at which the time-radius diagram of panel (B) is extracted ($\theta = 27^\circ$). The dashed line in panels (B) through (F) indicates the base of the convectively unstable fluid layers. Panels (C)-(F) show the temporal evolution of the detrended toroidal magnetic field, focusing on the propagation of the rapid oscillations. The dot-dashed lines delimit the tangent cylinder, as in Figure 3.2. The tickmarks on the outer boundary of the diagrams indicate latitudes by steps of 20° . This solution is defined by the parameters $C_\alpha = 15$, $C_\Omega = 50\,000$ and $R_m = 225$.

through (H) of Figure 3.2; they show the detrended toroidal magnetic component, in order to better illustrate the spatiotemporal evolution of the shorter cycle over a half-cycle period. A dynamo wave-like pattern is apparent, propagating vertically upwards from the vicinity of the equatorial plane. This direction of propagation is along the lines of constant angular velocity (cf. Figure 3.4A) and in agreement with the classical Parker-Yoshimura sign rule for linear kinematic $\alpha\Omega$ dynamos. This also applies to kinematic $\alpha^2\Omega$ dynamos provided differential

rotation remains significant (see, e.g., Choudhuri 1990; Charbonneau & MacGregor 2001).

A short-period amplitude modulation of the long-period cycle is also apparent at high latitudes on Figure 3.5A. This modulation is driven by the short-period dynamo, which amplifies (same polarity) or reduces (inverse polarity) the magnetic field produced by the long cycle, with the meridional flow acting as a poleward transport mechanism for the magnetic field generated at low latitudes.

In the absence of differential rotation (i.e. $C_\Omega = 0$, yielding an α^2 mean-field model), no dual-cycle solution can be found, but a single-mode oscillatory solution does persist, concentrated at low latitudes and propagating toward the equator. Such oscillatory α^2 solutions have been found previously for sufficiently complex α -tensor showing sign changes within hemispheres (see also § 3.3 in Simard et al. (2013), and references therein).

In order to assess the degree of coupling between the two dynamo modes materializing in the mean-field model, we have carried out the following numerical experiment : the magnetic diffusivity η_0 is artificially increased by a factor 10^3 either within or outside the tangent cylinder. This suppresses dynamo action in the region of enhanced diffusivity, thus isolating the other mode. Working with the same parameter values as on the solution of Figure 3.5, we first calculate solutions with α -quenching turned off, resulting in exponential growth of each dynamo mode. The first two lines of Table 1 list their associated growth rates and cycle half-periods. The third line lists the equivalent quantities without enhancement of the magnetic diffusivity anywhere in the domain. Differences with the artificially isolated modes are present, but remain at a low level, suggesting weak coupling between the two modes. Time-latitude diagrams of the two isolated modes resemble the equatorial and high-latitude portion of Figure 3.5A, respectively, the primary difference being a shorter period for the high-latitude mode. The latter also lacks the shorter period modulation visible on Figure 3.5A, consistent with lack of dynamo action in equatorial regions. As expected, with α -quenching included, the cycle periods increase, quite significantly so in the case of the high-latitude, long-period mode (cf. fourth and fifth line in Table 1), but again do not change much when both modes are allowed to simultaneously grow and saturate (sixth line).

The dual-dynamo behavior observed in Figure 3.5 materializes in a fairly large portion of

Case	λ_1 [yr ⁻¹]	P_1 [yr]	λ_2 [yr ⁻¹]	P_2 [yr]
Linear $\alpha^2\Omega$, η_0 enhanced inside	0.067	3.6	-	-
Linear $\alpha^2\Omega$, η_0 enhanced outside	-	-	0.0620	6.5
Linear $\alpha^2\Omega$, no enhancement	0.043	3.6	0.0618	6.3
α -quenched $\alpha^2\Omega$, η_0 enhanced inside	N/A	5.6	-	-
α -quenched $\alpha^2\Omega$, η_0 enhanced outside	-	-	N/A	44.8
α -quenched $\alpha^2\Omega$, no enhancement	N/A	5.2	N/A	44.8

 TABLE 3.1 – Growth rates (λ) and periods (P) for various mean-field dynamo cases.

our $\alpha^2\Omega$ model's parameter space (namely, between $R_m = 75 - 275$, $C_\alpha = 5 - 35$ and $C_\Omega = 50\,000 - 75\,000$) and thus, can be considered a robust feature. The ratio of cycle frequencies for the long (f_L) and short (f_S) cycles does show a significant variation across this part of parameter space, ranging from 1 : 10 to 1 : 1. It can be influenced both by C_α and C_Ω but the primary determinant of the frequency ratio is the meridional flow speed, as measured here by R_m . This is illustrated in Figure 3.6, where this ratio is plotted as a function of R_m for three different values of C_Ω . The corresponding values of u_0 using Equation (3.8) for R_m are given along the top horizontal axis. The decrease of f_L/f_S with increasing R_m is due to both a decrease of f_L and increase of f_S with increasing R_m , but at a given R_m the frequency ratio shows only a weak dependence on C_Ω . With R_m and C_Ω held fixed, an increase in C_α leads to an increase in the frequency of both the long and short-period dynamos. On the other hand, with R_m and C_α held fixed, the frequency of the long-period cycle increases with C_Ω , while that of the short-period cycle diminishes, the latter again in agreement with classical $\alpha\Omega$ mean-field dynamos operating not too far from criticality.

The magnetic solutions for which the spatiotemporal evolution of the magnetic field shows the most similarities with the axisymmetric magnetic component in the global simulation are those in the range $R_m = 150 - 225$, or $u_0 \simeq 2 - 3 \text{ m s}^{-1}$; this is consistent with the surface and subsurface meridional flow speeds extracted from the simulation. It is noteworthy that in this $\alpha^2\Omega$ model the frequency of the primary, long cycle decreases with increasing meridional

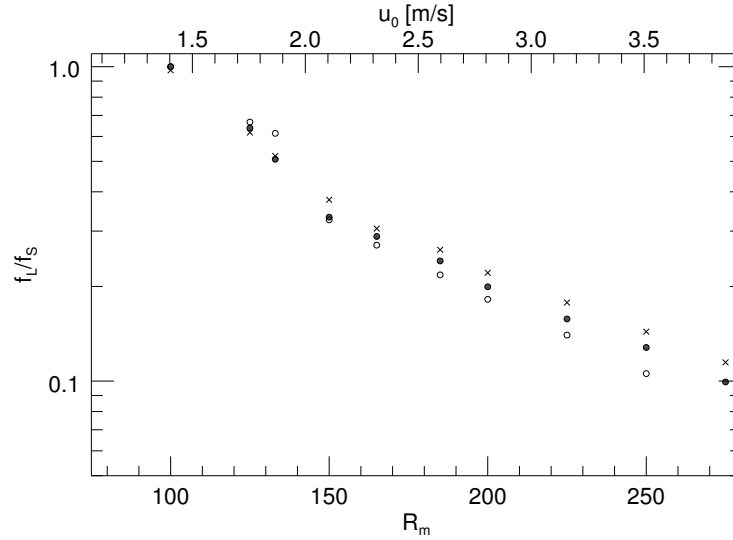


FIGURE 3.6 – Frequency ratio of the long cycle (f_L) over the short cycle (f_S) versus R_m , with the top axis showing the corresponding value for the mid-latitude surface meridional flow u_0 , using $\eta_0 = 9.8 \times 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ in Equation (3.8). Sets of $\alpha^2\Omega$ solutions were computed for $C_\Omega = 50\,000$ (open circles) $C_\Omega = 55\,000$ (closed circles) and $C_\Omega = 60\,000$ (\times), in all cases with $C_\alpha = 15$.

flow speed; this is the opposite trend from what is observed in the so-called flux transport dynamos, in which advection by the meridional flow drives the equatorward propagation of the deep-seated magnetic field and sets the cycle period (see, e.g., Dikpati & Charbonneau 1999).

To sum up the results obtained in this section : the complexity of the α -tensor extracted from the EULAG-MHD simulation, acting in conjunction with a solar-like differential rotation, naturally produces two spatially separated mean-field dynamos operating simultaneously within the interior, the total magnetic field resulting from the superimposition of the magnetic fields produced by these two dynamos. The primary, long-period dynamo peaks at mid- to high latitudes at the bottom of the convective envelope, and appears to be of the $\alpha^2\Omega$ variety. The short-period dynamo peaks at low latitudes and within the convective envelope, where it feeds on the strong shear sustained there, leading to dynamo wave propagation similar to that arising in classical $\alpha\Omega$ mean-field dynamos.

3.5 Thermal response in the global MHD simulation

We have established in the preceding sections that dual turbulent dynamo modes characterized by distinctly different cycle frequencies are likely operating in our MHD simulations. In order to invoke this dual-dynamo phenomenon as a possible explanatory framework for the corresponding dual periodicity observed in p -mode frequency splittings, a detectable signature must be produced in the temperature field. Working with the same EULAG-MHD simulation as used here, Cossette et al. (2013) already documented a clear cyclic modulation of the convective energy (enthalpy) flux at twice the primary magnetic cycle’s frequency, and in phase with magnetic energy. We now investigate whether this modulation carries over to the temperature field, and if a significant signature of the higher frequency magnetic cycle can also be identified.

Our simulation setup solves for the potential temperature perturbation¹ Θ' about a spherically symmetric ambient state (see, e.g., Cossette et al. 2013). Our first step is to zonally average this quantity for every grid point in a meridional plane, and subtract from it its temporal average over the 1600-yr duration of the simulation, excluding the ~ 100 -yr initial transient phase. The top panel of Figure 3.7 shows a time-latitude diagram of this zonally-averaged temperature deviation, on a spherical surface located at $r/R = 0.92$, slightly below the top of the simulation domain ($r/R = 0.96$). The signature of the long (~ 40 -yr) magnetic cycle is clearly visible at mid- and high latitudes, with polar regions lagging behind the mid-latitudes. In equatorial regions, the signal shows an aperiodic modulation, but a shorter-period signal (3 to 5 years) is also visible.

We opted to extract the temperature perturbation time series at latitude $\theta = 15^\circ$, as indicated by the dashed line on the top panel of Figure 3.7. The bottom panel shows the corresponding power spectrum, as calculated from the discrete Fourier transform of this time series. Here the dash-dotted line denotes the 99.5% significance threshold, which is computed according to Equation (12) in Frescura et al. (2007). The hatched regions labeled f_1 , f_2 and f_3 correspond to, respectively, frequency bands $0.022 - 0.029 \text{ yr}^{-1}$, $0.045 - 0.056 \text{ yr}^{-1}$ and

¹In this section we use primes to denote deviations from the ambient state, following standard EULAG notation; this is not to be confused with the use of primes in the Appendix to denote the small-scale, non-axisymmetric flow and field.

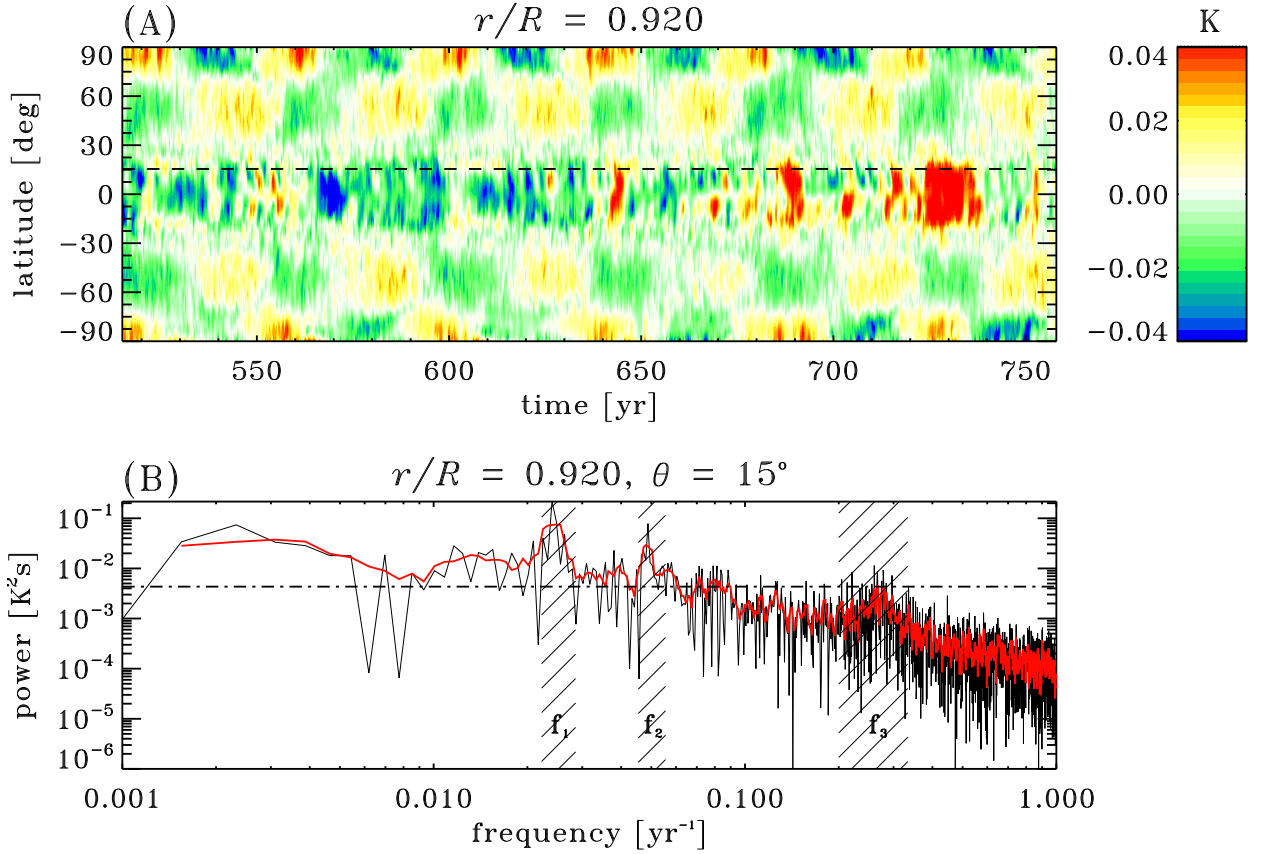


FIGURE 3.7 – Panel (A) shows a time-latitude diagram of $\langle \Theta' \rangle - \langle \bar{\Theta}' \rangle$ at $r/R = 0.92$, where $\langle \Theta' \rangle$ is the longitudinally averaged potential temperature perturbation and the overbar denotes a 5-yr-wide running boxcar average over the duration of the simulation, with the dashed line marking the latitude $\theta = 15^\circ$. Panel (B) illustrates the power spectral density (black curve) and its boxcar average (red curve) corresponding to the temperature signal extracted at $\theta = 15^\circ$ in panel (A), where the dash-dotted line indicates the 99.5% significance threshold. The hatched regions identify, respectively, the frequency bands $0.022 - 0.029 \text{ yr}^{-1}$, $0.045 - 0.056 \text{ yr}^{-1}$ and $0.20 - 0.33 \text{ yr}^{-1}$.

$0.20 - 0.33 \text{ yr}^{-1}$. Bands f_1 and f_2 capture the first and second harmonics corresponding to the long-period dynamo mode, while f_3 spans the range corresponding to the 3- to 5-yr signal component. The power peak appearing in the $0.20 - 0.33 \text{ yr}^{-1}$ frequency band does exceeds the 99.5% significance threshold, and therefore testifies to the robustness of the short-term cycle at this particular latitude and radius. It is noteworthy that the signature of the long, ~ 40 -yr dynamo mode dominates the spectrum even at this low latitude, subsurface location, considering that the amplitude of this dynamo mode peaks at mid-latitudes and immediately

beneath the base of the convective envelope (see Figure 3.2).

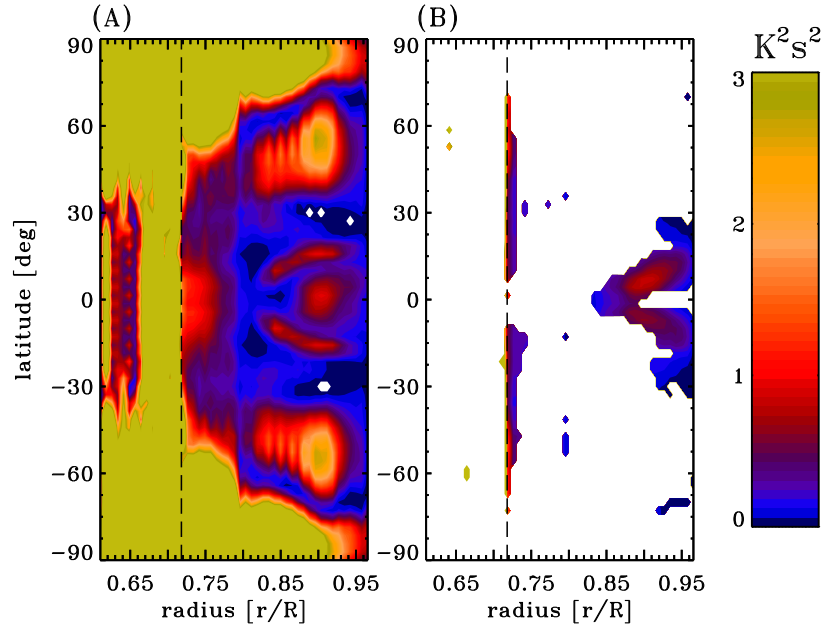


FIGURE 3.8 – Color maps displaying the total power of $\langle \Theta' \rangle$ contained inside the frequency bands f_1 (panel (A)) and f_3 (panel (B)) displayed in a radius-latitude Cartesian plane covering the full simulation domain. For f_1 , the signal here is mostly everywhere significant above the 99.95% significance level excepted in regions colored in white. Visible regions in panel (B) identify where the maximum power taken inside the f_3 band is above the 95% significance threshold. For the sake of intercomparison, both color maps were saturated at a total power of $3 K^2 s^2$.

To obtain the spatial distribution of power associated with both long-term and short-term signals, we compute the total power contained inside bands f_1 and f_3 for similar power spectra computed for every grid point in the meridional plane (θ_i, r_i) . The result of this procedure is displayed in Figure 3.8. Panel (A) shows the power distribution associated with f_1 . Here, the signal's intensity is the strongest close to the poles and at latitudes greater than $\simeq |45^\circ|$ in the convection zone. By contrast, the short-period signal displayed in panel (B) is confined to a region that spans 30° on each side of the equator near the surface, as well as close to the interface (vertical dashed line). To determine the signal's robustness as a function of space, we masked the regions where the maximum power in band f_3 is below the 95% significance threshold. Therefore, here only the signals contained in the equatorial region may

be considered robust, in addition to those located along the interface below $|60^\circ|$. Virtually all the domain is significant to 99.95% for band f_1 (panel A).

Although there is only partial correspondence between the spatial locations of peak dynamo activity and peak thermal response, Figures 3.7 and 3.8 demonstrate that a dual-frequency subsurface signal can be produced by two dynamo modes operating in spatially distinct regions of the simulation domain. The resulting sound speed variations could in principle produce a corresponding dual-frequency signal in the frequencies of p -modes sampling these locations.

It is possible to estimate the frequency shift that we would observe if we considered the data generated by the simulation as observational quantities. EULAG-MHD returns profiles of pressure deviations (p') with respect to an ambient state (p_e) (Ghizaru et al. 2010; Smolarkiewicz & Charbonneau 2013), which is sufficient to establish a frequency shift approximation. Taking the definition of adiabatic sound speed of the ambient state

$$c_S = \sqrt{\gamma \frac{p_e}{\rho_e}} , \quad (3.9)$$

with ρ_e the ambient density profile, differentiating this expression and dividing by c_S , one gets

$$\frac{dc_S}{c_S} = \frac{1}{2} \left(\frac{dp}{p_e} - \frac{d\rho}{\rho_e} \right) . \quad (3.10)$$

As a first approximation, a p -mode frequency ν can be related to the sound speed through

$$c_S = \ell \nu , \quad (3.11)$$

where ℓ is the acoustic path within the mode's resonant cavity. Differentiating this last expression, dividing by c_S and combining the result with Equation (3.10) yields

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{dp}{p_e} - \frac{d\rho}{\rho_e} \right) . \quad (3.12)$$

Finally, using the adiabatic identity for a perfect monoatomic gas $p \propto \rho^\gamma$ as a first approximation (meaning $\gamma = 5/3$) to obtain an expression depending only on the pressure

perturbations gives

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{p'}{p_e} = \frac{1}{5} \frac{p'}{p_e}, \quad (3.13)$$

where dp has been replaced by p' since EULAG solves for deviations from the prescribed ambient state, which is precisely what we are looking for.

Evaluating Equation (3.13) at the top of our simulation domain, we estimate the maximal amplitude of the frequency shift to be roughly 400 nHz for a mode with a reference frequency of $\nu = 2.8$ mHz, which is within a factor of 2 of the shifts detected via helioseismology (~ 250 nHz according to Figure 1 of Fletcher et al. 2010). Applying the same procedure to the detrended potential temperature profile leads to residual shifts of order ~ 20 nHz for the short-period mode, a factor of about 2.5 smaller than the ~ 50 nHz inferred helioseismically (still from Figure 1 of Fletcher et al. 2010). These numbers depend significantly of the depth used to extract the temperature and pressure perturbation; we used here the outermost layers of the simulation, since this is where acoustic modes would spend most of their time because of the lower local sound speed. Nevertheless, the order-of-magnitude agreement between estimated and observed frequency shifts is certainly encouraging.

3.6 Concluding Remarks

Motivated by the presence of a well-defined “quasi-biennial” oscillation showing up in a variety of solar activity indicators, as well as in p -mode frequency splittings, we have searched for, and found, evidence for the unfolding of such shorter periodicities in a EULAG-MHD convection simulation producing large-scale magnetic cycles that present a number of solar-like features. Based on a parallel analysis using a kinematic mean-field dynamo model incorporating the α -tensor extracted from the simulation and a solar-like differential rotation profile, we have argued that the shorter periodicity is associated with a secondary $\alpha\Omega$ dynamo mode powered by the strong rotational shear present at low latitudes within the convecting layers, more specifically outside of a tangent cylinder to the equatorial base of the convection zone. Because this mean-field model is purely kinematic, there can be no waves or other dynamical oscillations building up therein. Consequently the “double-dynamo” behavior is entirely as-

sociated with the inductive effect of the flows at small and large spatial scales. Interestingly, the 1 : 8 frequency ratio observed in the simulation is roughly comparable to the 1 : 5 ratio characterizing the Sun.

Moreover, we have shown that the dual magnetic cycles generated by the simulation interact with turbulent energy transport so as to lead to a corresponding dual-periodicity signal in the temperature field. This could provide a natural explanation for the shorter periodicity also observed in p -mode frequency shifts in the course of the primary 11-yr activity cycle. Even though the primary cycle peaks near the tachocline and at mid-latitudes in the simulation, its presence is still felt in the low-latitude subsurface layers, where the secondary, higher-frequency cycle reaches its peak amplitude. The helioseismic implications are important, since this indicates that the spatial localisation of the p -mode shifts in the solar subphotospheric layers does not necessarily imply that the dynamo mechanism(s) leading to these changes must necessarily be co-spatial with the region where the helioseismic signal reaches its peak amplitude.

The $\alpha^2\Omega$ mean-field dynamo models constructed in § 3.3 indicate that the ratio of the frequencies of the two dynamo cycles varies significantly with the amplitude of the meridional flow included in the model (see Figure 3.6). While this result pertains to a purely kinematic model that does not incorporate any magnetic backreaction on the meridional flow, it does represent an observationally testable prediction. Magnetic feature tracking (Hathaway & Rightmire 2010) has revealed that the poleward meridional flow in the late descending phase of cycle 23 was significantly faster than in the descending phase of cycle 22; cycle 23 was also significantly longer (12.58 yr) than cycle 22 (9.75 yr). With the biennial periodicity roughly the same in these two cycles, this implies that the frequency ratio f_L/f_S decreased with increasing meridional flow speed, in qualitative agreement with the trend observed on Figure 3.6. It would be interesting to examine more closely the observed cycle-to-cycle variations of the surface meridional flow speed and biennial cycle frequency, in order to better quantify this trend.

The analysis presented in this paper refers to numerical simulations, not to the real Sun. However, the magnetic cycle developing in the simulation of § 3.2 resembles at least in some

aspects that unfolding in the Sun (see, e.g., Beaudoin et al. 2013; Cossette et al. 2013; Passos & Charbonneau 2014). Taken as a MHD analog of the Sun, our simulation results indicate that superimposed dual magnetic cycles with distinct natural frequencies can be generated through the interactions of different inductive effects operating in spatially distinct regions of the solar interior, yielding double-dynamo behavior, essentially as suggested by Benevolenskaya (1995, 1998). Obviously, this cannot in itself rule out the existence of MHD wave-induced periodicities in the solar interior; but it does indicate that such dynamical effects are not necessarily required to explain the existence of the ubiquitous quasi-biennial cyclic variations superimposed on the 11-yr magnetic activity cycle.

We thank an anonymous referee for some useful comments and suggestions. This work was supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada, the Fond Québécois pour la Recherche – Nature et Technologie, the Canadian Foundation for Innovation, and time allocation on the computing infrastructures of Calcul Québec, a member of the Compute Canada consortium.

3.A Appendix

We follow the fundamental *Ansatz* of mean-field electrodynamics, in that we assume the total flow \mathbf{U} and magnetic field \mathbf{B} to be separable in terms of large-scale, slowly varying “mean” components $\langle \mathbf{u} \rangle$ and $\langle \mathbf{B} \rangle$, and small-scale, rapidly varying “turbulent” components \mathbf{u}' and \mathbf{B}' . We associate the mean component with the axisymmetric (zonally-averaged) magnetic field building up in the simulation, which is directly computable from the simulation output through zonal averaging. The small-scale components are then calculated by subtracting the zonal mean from the simulation output :

$$\mathbf{B}'(\theta, r, \phi, t) = \mathbf{B}(\theta, r, \phi, t) - \langle \mathbf{B} \rangle(\theta, r, t) , \quad (3.14)$$

$$\mathbf{u}'(\theta, r, \phi, t) = \mathbf{u}(\theta, r, \phi, t) - \langle \mathbf{u} \rangle(\theta, r, t) , \quad (3.15)$$

where the angular brackets represent a zonal averaging operator, so that $\langle \mathbf{u}' \rangle = 0$ and $\langle \mathbf{B}' \rangle = 0$. Substituting Equations (3.14)-(3.15) in the MHD induction equation and applying the zonal averaging operator leads to an evolution equation for $\langle \mathbf{B} \rangle$ known as the mean-field induction equation :

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \boldsymbol{\mathcal{E}} - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) , \quad (3.16)$$

where

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle \quad (3.17)$$

is the (mean) turbulent *emf*, also computable from the simulation output via Equations (3.14)-(3.15).

Closure of the mean-field induction equation (Equation (3.16)) is usually achieved by developing the turbulent *emf* (Equation (3.17)) in terms of the mean magnetic field :

$$\mathcal{E}_j = \alpha_{jk} \langle B_k \rangle + \beta_{jkl} \frac{\partial \langle B_k \rangle}{\partial x_l} + \dots , \quad (3.18)$$

(see, e.g., Moffatt 1978). Traditionally, only the first two terms in this infinite series are retained for the development of mean-field dynamo models. In the analysis of the millenium simulation presented in §3.3 we use an even more severe truncation, retaining only the first term on the RHS of Equation (3.18), leading directly to Equation (3.7). Following Racine et al. (2011), the components of the tensor $\boldsymbol{\alpha}$ in Equation (3.7) are then extracted from a linear least-squares fit of the time series of $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ against $\langle \mathbf{B} \rangle$ at each grid point (r, θ) in a meridional plane, carried out via singular value decomposition (see also Simard et al. 2016). Unlike the classical α -effect of mean-field electrodynamics, which is a kinematic property of the unmagnetized flow, here $\boldsymbol{\alpha}$ quantifies the linear tensorial relationship characterizing the dependence of $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ on $\langle \mathbf{B} \rangle$ in the nonlinearly saturated state of the simulation.

As with the similar EULAG-MHD simulation analyzed originally by Racine et al. (2011), the $\boldsymbol{\alpha}$ -tensor extracted from the millenium simulation used herein is full, with off-diagonal components of significant magnitudes. Similarly full $\boldsymbol{\alpha}$ -tensors have also been obtained in analyses of other 3D MHD simulations by different means (cf. Augustson et al. 2015, Warnecke et al. 2016). This suggests that these simulations operate as $\alpha^2\Omega$ dynamos, in the sense that

the turbulent *emf* and shearing by differential rotation both contribute, with comparable magnitude, to the induction of the large-scale toroidal magnetic component, while cyclic regeneration of the large-scale poloidal magnetic component is driven only by the ϕ -component of the turbulent *emf*. This motivated our use of the $\alpha^2\Omega$ modelling framework in §3.3.

The fit defined by Equation (3.7) is based on a rather severe truncation of the conventional series development of \mathcal{E} in terms of $\langle \mathbf{B} \rangle$. Yet Simard et al. (2016) could show that retaining the next term in the development (3.18) yields an α -tensor closely resembling that obtained via fitting Equation (3.7). Indeed, both fits capture very well the cyclic behavior of the *emf*. This is shown on Figure 3.9 for a short segment of the EULAG-MHD simulation used in this paper. The top panels show time series of each *emf* component (black), together with the corresponding *emf* components reconstructed via either Equation (3.7), in blue, or (3.18), in red. The bottom panels show the residuals obtained by subtracting the simulation *emf* from these two reconstructions. Including the second term in the *emf* development does reduce the residuals by some 5% (in the r.m.s. sense), but in both cases the cyclicity and overall shape of the simulation *emf* is very well captured. For more on these matters see Simard et al. (2016).

Simard et al. (2013) also showed that upon inserting the α -tensor so extracted into a conventional kinematic axisymmetric $\alpha^2\Omega$ mean-field dynamo model, the spatiotemporal evolution of the large-scale, axisymmetric component of the magnetic field produced by the simulation could be well reproduced (see their Figure 5). This offers confidence that Equation (3.7) is indeed capturing the essence of the turbulent *emf*'s dependence on the mean magnetic field over timescales commensurate with that of the cycle, at least for the MHD simulation under consideration.

As a further consistency test we have carried out the following numerical experiment. Rather than closing Equation (3.16) via the use of Equation (3.7), we have used the time series of $\mathcal{E}(r, \theta, t)$ as direct input to Equations (3.5)—(3.6). The resulting pseudo-mean-field dynamo solution is plotted on Figure 3.10A, in the form of time-latitude diagrams of the zonally-averaged toroidal component, as on Figure 3.4A. Panel (B) shows the same time-latitude diagram, now with the long cycle removed following the detrending procedure described in §3.3. These should be compared to panels (A) and (D) from Figure 3.1, showing

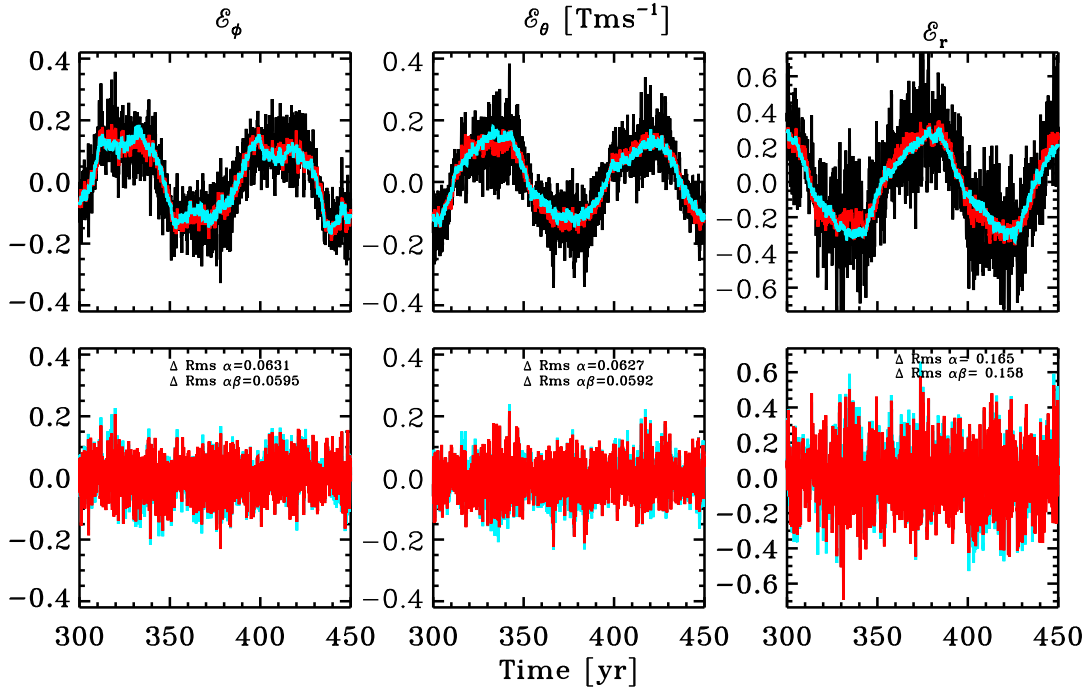


FIGURE 3.9 – Comparison of the time series of the mean *emf* components extracted from the millenium simulation (in black) and as reconstructed using Equations (3.7) and (3.18), in blue and red respectively. The bottom row shows the corresponding residuals, obtained by subtracting the simulation *emf* from each reconstruction. While the reconstructed *emfs* both show lower amplitudes for the short timescale variability than the simulation’s *emf*, both reconstructions capture very well its cyclicity and overall variations on timescales commensurate with the magnetic cycle. The temporally-averaged values of the rms residuals are listed for the fits including or not the β -tensor, as color-coded.

the equivalent diagrams for the millenium simulation introduced in §3.3. While substantial differences exist between these two sets of diagrams, the same global features are present in both, namely : (1) dual dynamo cycles well separated in frequency; (2) a “slow” mode peaking at high latitude; (3) a “fast” mode peaking in equatorial regions and exhibiting poleward propagation.

Consider now panels (C) and (D) of Figure 3.10, showing a mean-field dynamo solution in which the turbulent *emf* has been expressed in terms of the mean field via Equation (3.7). Comparing them to panels (A) and (B) reveals again the same global features, with the fast equatorial cycle now being more prominent. The degree of similarity between these two alternate mean-field models is in fact significantly better than between either and the equivalent

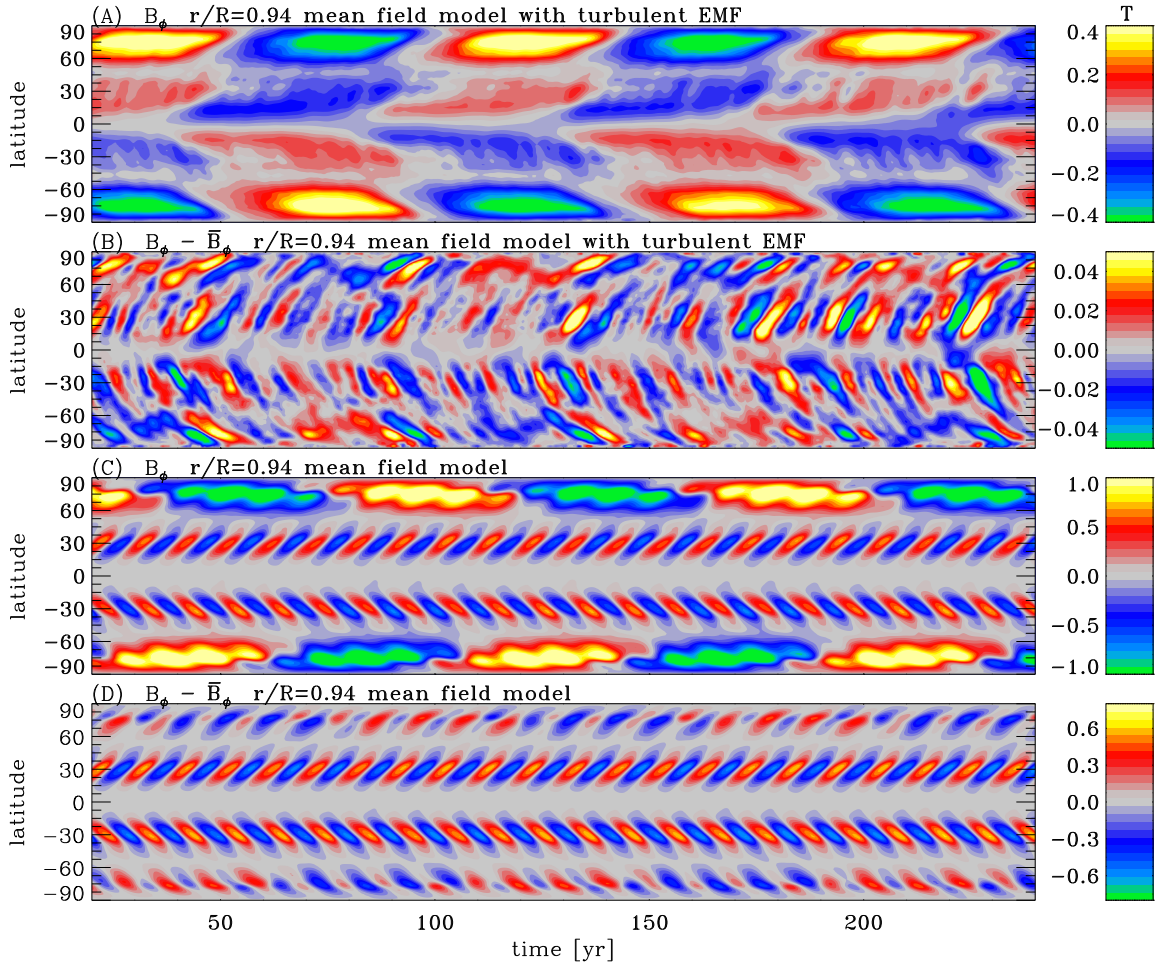


FIGURE 3.10 – Comparison of the toroidal magnetic field in a time-latitude diagram near the surface between two different kinematic mean-field models. Panel (A) corresponds to the model incorporating the (time-dependent) turbulent emf time series (viz. black curves on Figure 3.9) inserted directly in Equations (3.5)–(3.6). Panel (C) shows the toroidal field at the same depth in a true mean-field dynamo model computed with the time-independent α -tensor extracted from fitting Equation (3.7) to the simulation data. Panels (B) and (D) show the corresponding detrended toroidal magnetic field, as calculated via Equation (3.1).

diagrams for the MHD simulation, namely Figure 3.1A and 3.1D. The most significant dissimilarity is at the level of the relative amplitudes of the two dynamo modes, with the solution using Equation (3.7) being characterized by a ratio closer to unity than in either the MHD simulation, or the pseudo-mean-field solution of Figure 3.10A and 3.10B. Nonetheless, this numerical experiment indicates that the dissimilarities between the large-scale magnetic field generated in our millenium simulation and the mean-field models constructed in §3.4 are not

due to our use of Equation (3.7) to relate the turbulent *emf* to the mean-magnetic field. This conclusion, once again, pertains only to the specific 3D MHD numerical simulation analyzed in this paper.

Chapitre 4

CHARACTERIZATION OF A SPHERICAL-2D NON-KINEMATIC $\alpha^2\Omega$ MEAN-FIELD DYNAMO MODEL

Corinne Simard, and Paul Charbonneau

*Département de Physique, Université de Montréal, C.P. 6128 Succ. Centre-ville, Montréal,
Qc H3C 3J7, Canada*

To be submitted to *Solar Physics*

4.1 Abstract

We present a non-kinematic axisymmetric $\alpha^2\Omega$ mean-field dynamo model in which the complete α -tensor and mean differential rotation profile are both extracted from a global magnetohydrodynamical simulation of solar convection producing cycling large-scale magnetic fields. The nonlinear backreaction of the Lorentz force on differential rotation is the only amplitude-limiting mechanism present in the mean-field model. We compare and contrast the amplitude modulation patterns characterizing this mean-field dynamo, to those already well-studied in the context of non-kinematic $\alpha\Omega$ models using a scalar α -effect. As with the latter, we find that large quasi-periodic modulation of the primary cycle are produced at low magnetic Prandtl number (Pm), with the ratio of modulation period to the primary cycle period scaling inversely with Pm. In contrast to $\alpha\Omega$ models, the variations of differential rotation remain well within the bounds set by observed solar torsional oscillations. In this low-Pm regime, moderately supercritical solutions can also exhibit aperiodic Maunder Minimum-like periods of strongly reduced cycle amplitude. The inter-event waiting time distribution is approximately exponential, in agreement with solar activity reconstruction based on cosmogenic radioisotopes. Secular variations in low-latitude surface differential rotation during Grand Minima, as compared to epochs of normal cyclic behavior, are commensurate in amplitude with historical reconstructions based on sunspot drawings. Our modelling results suggest that the low levels of observed variations in the solar differential rotation in the course of the activity cycle may nonetheless contribute to, or even dominate, the regulation of the magnetic cycle amplitude.

4.2 Introduction

The past decade has witnessed remarkable progress in the design of global magnetohydrodynamical simulations of solar convection and dynamo action. Many different such simulations, relying on distinct physical and algorithmic designs, have now managed to produce magnetic fields well-organized on large spatial scales, and undergoing more-or-less regular polarity reversals resembling to some extent solar behavior (Brown et al. 2010, 2011; Ghizaru

et al. 2010; Racine et al. 2011; Käpylä et al. 2012, 2013; Masada et al. 2013; Nelson et al. 2013; Fan & Fang 2014; Passos & Charbonneau 2014; Augustson et al. 2015; Simatev et al. 2015; Duarte et al. 2016; Guerrero et al. 2016; Hotta et al. 2016; Käpylä et al. 2016). While some of these simulations show occasional episodes of suppressed magnetic activity perhaps analogous to the seventeenth century Maunder Minimum (e.g., Augustson et al. 2015), even the most temporally extended simulation runs carried out as yet (e.g. Passos & Charbonneau 2014; Käpylä et al. 2016) remain akin to “case studies” and cannot be used to systematically assess the occurrence frequency of cycle fluctuation patterns developing on timescales much longer than the primary magnetic cycle developing therein. Towards this end, geometrically- and/or dynamically-simplified dynamo models remain the most practical approach.

Solar cycle models based on mean-field electrodynamics have indeed been used for many years to study long-term cycle variability (see, e.g., §5 in Charbonneau (2010), and references therein). Most often such models solve only for the large-scale, axisymmetric component of the solar magnetic field, with the effects of small-scale, turbulent convective motions subsumed in coefficients capturing the effects of turbulent induction and dissipation. Specifying the form of these coefficients, and their dependencies on rotation rate, magnetic field strength, etc, becomes a crucial aspect of this approach. Here global MHD simulations can provide useful guidance, as it is possible to extract the turbulent electromotive force from the output of such simulations, and thus calculate the α -tensor and turbulent diffusivity tensor. The former is a key component of many solar cycle models, as it provides a source term for the large-scale magnetic field, which allows to circumvent Cowling’s theorem. The isotropic part of the latter is an ubiquitous ingredients even in solar cycle models that rely on other inductive effects, most notably perhaps the Babcock-Leighton mechanism of dipole regeneration through the surface decay of active regions.

The extraction of the mean-field tensors has been carried out in a subset of the aforesaid MHD simulations (Racine et al. 2011; Augustson et al. 2015; Simard et al. 2016; Warnecke et al. 2016). The corresponding simulations are distinct in overall design, treatment of small-scales, parameter regimes, and the techniques used to extract the mean-field coefficients also differ. While results differ at various levels, some common features nonetheless emerge. Most

notably perhaps, the α -tensor is full, with off-diagonal components of magnitude comparable to diagonal elements. The antisymmetric component of the tensor is also of comparable magnitude to the off-diagonal symmetric components, indicating that turbulent pumping represents a significant transport mechanism for the large-scale magnetic field.

In contrast, mean-field dynamo models of the solar cycle are often designed in the so-called $\alpha\Omega$ regime: the poloidal large-scale magnetic component is generated by the α -effect, while the toroidal magnetic component grows only through the shearing of the poloidal component by differential rotation. In such models the α -tensor is thus effectively reduced to its $\alpha_{\phi\phi}$ component, and turbulent diffusivity is deemed isotropic, reducing to a scalar quantity. This $\alpha\Omega$ approximation is usually justified through order-of-magnitude estimates of the relative importance of turbulent induction and differential rotation shear.

To the extent that the aforementioned global MHD simulations are applicable to the Sun and stars, the full α -tensor extracted from these simulations suggests that dynamos therein are operating in what is usually dubbed the $\alpha^2\Omega$ regime: both shearing by differential rotation and turbulent inductive effects contribute to the production of the large-scale toroidal magnetic component. Even in the kinematic regime, in which large-scale flows are assumed steady, $\alpha^2\Omega$ mean-field models have received far less attention than their $\alpha\Omega$ counterparts. Some well-known solar-like properties of $\alpha\Omega$ models do carry over to the $\alpha^2\Omega$ regime, notably the generation of dynamo waves (e.g. Choudhuri 1990; Moss et al. 1991; Ruediger & Brandenburg 1995; Charbonneau & MacGregor 2001).

Hardly studied thus far in the $\alpha^2\Omega$ context is the dynamical backreaction of the large-scale magnetic field produced by dynamo action on the large-scale inductive flows, specifically the differential rotation. This so-called Malkus-Proctor mechanism (Malkus & Proctor 1975) has received a lot of attention in the context of $\alpha\Omega$ models, as it has been shown capable to produce long timescale modulation of the primary cycle, including recurrent epochs of very low cycle amplitudes, possibly reminiscent of Maunder Minimum-like episodes of suppressed surface magnetic activity (Tobias 1996b, 1997; Küker et al. 1999; Brooke et al. 2002; Bushby 2006). This long timescale modulation is associated with the suppression of differential rotation by the Lorentz force, which eventually leads to a quenching of the dynamo. The

large-scale magnetic field then dissipates, eventually allowing the re-establishment of differential rotation, and renewed dynamo action. Investigations of these effects in geometrically simple slab configurations has evidenced rich dynamical behavior, characterized by two basic modes of cycle amplitude variation: parity modulation and energy exchange between the field and flow (Tobias 1996b; Knobloch et al. 1998). These findings appear robust, in that their equivalents have been observed in a variety of geometrically more realistic $\alpha\Omega$ model setups.

The primary aim of this paper is to extend these studies to the $\alpha^2\Omega$ regime. Towards this end we make use of the full α -tensor extracted from the millenium simulation of Passos & Charbonneau (2014), as described in Simard et al. (2013, 2016). The mathematical formulation and physical input to our non-kinematic mean-field model are described in §4.3. In §4.4 we present a linear, kinematic reference dynamo solution. Representative high- and low-Prandtl number non-kinematic dynamo solutions are then presented and analyzed in sections 4.5 and 4.6, respectively. Section 4.7 focuses on the long timescale modulations materializing in the low Prandtl number regime. We close in §4.8 by examining the similarity and differences with non-kinematic mean-field models of the $\alpha\Omega$ variety, and seek the origin of the most striking differences in the interactions between the various inductive effects operating in our $\alpha^2\Omega$ model.

4.3 A non-kinematic mean-field model

In this section, we briefly summarize the mathematical development of our non-kinematic mean-field model. Our formulation of $\alpha^2\Omega$ axisymmetric mean-field dynamo equations is in itself entirely conventional, the model's novelty lying with the inclusion of dynamical backreaction on the differential rotation and inclusion of an α -tensor extracted from a global MHD simulation of solar convection.

4.3.1 Mean-field dynamo equation

Following the usual mean-field electrodynamics Ansatz, we introduce a scale separation of the flow and magnetic field, their substitution into the MHD induction equation leading

straightforwardly, upon averaging, to the mean-field field dynamo equation:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathcal{E} - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) , \quad (4.1)$$

where

$$\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle \quad (4.2)$$

is the turbulent electromotive force (*emf*) and η is the magnetic diffusivity (see, e.g., Moffatt 1978; Krause & Rädler 1980; Ossendrijver 2003; Brandenburg & Subramanian 2005; Charbonneau 2010). The prime quantities in the above expression represent the small-scale, fluctuating parts of the total flow and magnetic field. Closure is achieved by developing \mathcal{E} in terms of the mean magnetic field $\langle \mathbf{B} \rangle$:

$$\mathcal{E} = \mathbf{a} \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b} \nabla \langle \mathbf{B} \rangle + \text{higher order derivatives} , \quad (4.3)$$

where the tensor \mathbf{a} and \mathbf{b} appearing in this expression are assumed to depend only on the statistical properties of the small-scale flow and field (see, e.g., Moffatt 1978). Truncation of the higher order derivatives is justified provided a good separation of spatial and/or temporal scale exists between the fluctuating velocity and magnetic field on one hand, and the large-scale magnetic and flow field on the other. The first term in the expansion involves a rank-two tensor capturing (among other effects) the so-called α -effect, which arises from the symmetric part of the \mathbf{a} tensor and can act as a source term in the mean-field equations (4.5) and (4.6) (see Rädler 1980; Simard et al. 2016).

The axisymmetric form of the mean-field dynamo equation (4.1) is obtained by separating the mean magnetic field $\langle \mathbf{B} \rangle$ into a toroidal and a vector potential components:

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \nabla \times (A(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi , \quad (4.4)$$

Inserting this expression into the mean-field dynamo equation yields the two evolution equations:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A + \mathcal{E}_\phi , \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B + \frac{1}{\varpi} \frac{d\eta}{dr} \frac{\partial(\varpi B)}{\partial r} \\ &+ \varpi (\nabla \times A \hat{e}_\phi) \cdot (\nabla \Omega_t) + \nabla \times [\mathcal{E}_r \hat{e}_r + \mathcal{E}_\theta \hat{e}_\theta] , \end{aligned} \quad (4.6)$$

where $\varpi = r \sin \theta$, and Ω_t is the total rotational angular velocity. The latter is the only contribution to the large-scale flow, i.e., we do not include any large-scale meridional circulation in the model. Note that here the mean electromotive force \mathcal{E} is retained in eq. (4.6), which yields the so-called $\alpha^2\Omega$ mean-field dynamo model (see i.e Simard et al. 2013 for more details).

For the purpose of the numerical solution, it is convenient to express lengths in units of the solar radius R and time in units of the magnetic dissipation time $\tau = R^2/\eta_0$. This leads to the appearance of two dimensionless numbers, which measure the inductive strength of the mean-electromotive force and large-scale shear, respectively:

$$C_\alpha = \frac{\alpha_0 R}{\eta_0} , \quad C_\Omega = \frac{\Omega_0 R^2}{\eta_0} , \quad (4.7)$$

where α_0 , η_0 , and Ω_0 represent typical values of the corresponding unsubscripted quantities.

4.3.2 Magnetic backreaction

With the magnetic field generated by the dynamo is associated a Lorentz force opposing the inductive large-scale flows. Since the Sun's convection zone is a strongly turbulent environment, this dynamical backreaction can operate at all spatial scales. In the present non-kinematic dynamo model, we only include the backreaction of the mean magnetic field on the large-scale flow, also known as the Malkus-Proctor mechanism (Malkus & Proctor 1975). This requires solving the ϕ -component of the equations of motion, which in principle must include the Reynolds stresses powering differential rotation. Following Tobias (1996b), we circumvent the specification of Reynolds stresses by separating the angular velocity into a temporally steady component $\Omega(r, \theta)$, and a time-dependent contribution $\Omega'(r, \theta, \langle \mathbf{B} \rangle(r, \theta, t))$ driven by the Lorentz force:

$$\Omega_t(r, \theta, t) = \Omega(r, \theta) + \Omega'(r, \theta, \langle \mathbf{B} \rangle(r, \theta, t)) . \quad (4.8)$$

Underlying this separation is the implicit assumption that the Reynolds stresses powering the steady part of the differential rotation remain unaffected by the large-scale magnetic field produced by the dynamo, so that Ω represents a stationary solution of the unmagnetized momentum equation. The governing equation for the time-varying contribution Ω' then becomes:

$$\frac{\partial(\varpi\Omega'\hat{e}_\phi)}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0\rho}(\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \times \langle \mathbf{B} \rangle + \nu\nabla^2(\varpi\Omega'\hat{e}_\phi), \quad (4.9)$$

where ν is the viscous dissipation and $\rho(r)$ the density. Again, by developing the mean magnetic field into axisymmetric poloidal (A) and toroidal (B) components, the dimensionless form of equation (4.9) can be written as:

$$\begin{aligned} r^4 \sin^3 \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial t} &= \text{Pm} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \sin^3 \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r^2 \sin^3 \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta} \right) \right] \\ &+ \frac{r \sin^2 \theta \Lambda}{\mu_0 \rho} \left[r \left(\frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right. \\ &\left. + \left(B \frac{\partial A}{\partial \theta} - A \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) + \frac{r \cos \theta}{\sin \theta} \left(A \frac{\partial B}{\partial r} - B \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Two new dimensionless parameters have appeared. The magnetic Prandtl number $\text{Pm} = \nu/\eta$ sets the relative magnitudes of viscous (ν) versus Ohmic (η) dissipation. The parameter $\Lambda = B_0^2/(\Omega_0\eta\rho_0\mu_0)$ measures the influence of Lorentz force. The coupled axisymmetric dynamo equations (4.5)–(4.6) being linear in A, B , the parameter Λ thus sets the scale of the magnetic field amplitude in the model.

4.3.3 A non-kinematic $\alpha^2\Omega$ mean-field dynamo model

Our non-kinematic mean-field dynamo model is formulated in spherical polar coordinates (r, θ, ϕ) and solves for the axisymmetric ($\partial/\partial\phi \equiv 0$) vector potential $A(r, \theta, t)$, toroidal magnetic field $B(r, \theta, t)$ and angular velocity deviation $\Omega'(r, \theta, t)$ in a full meridional plane restricted in radius to the interval $0.5 \leq r/R \leq 1.0$. The solution is matched to a potential field in $r/R > 1$, and the bottom boundary is rigid ($\Omega' = 0$) and perfectly conducting ($A = 0$ and $B = 0$). The nonlinearly coupled system of dimensionless PDEs (4.5), (4.6) and (4.10) is solved using the the finite element-based dynamo model described in Simard et al. (2013),

extended to include the Lorentz backreaction on the zonal flow, as embodied in eq. (4.10).

The steady component $\Omega(r, \theta)$ has been extracted from the output of a purely hydrodynamical EULAG simulation of solar convection, specifically an unmagnetized version of the millenium simulation discussed in Passos & Charbonneau (2014). The corresponding angular velocity profile is displayed in figure 4.1 (A). It includes a number of solar-like features, including a rapidly rotating equatorial region and slowly rotating poles, and a thin tachocline-like rotational shear layer immediately beneath the core-envelope interface, indicated in Fig. 4.1(A) by the white dashed line. Non-solar features at low latitudes include alignment of the isocontours with the rotation axis, and shear peaking within the convective envelope rather than at its base, and lack of a near-surface shear layer.

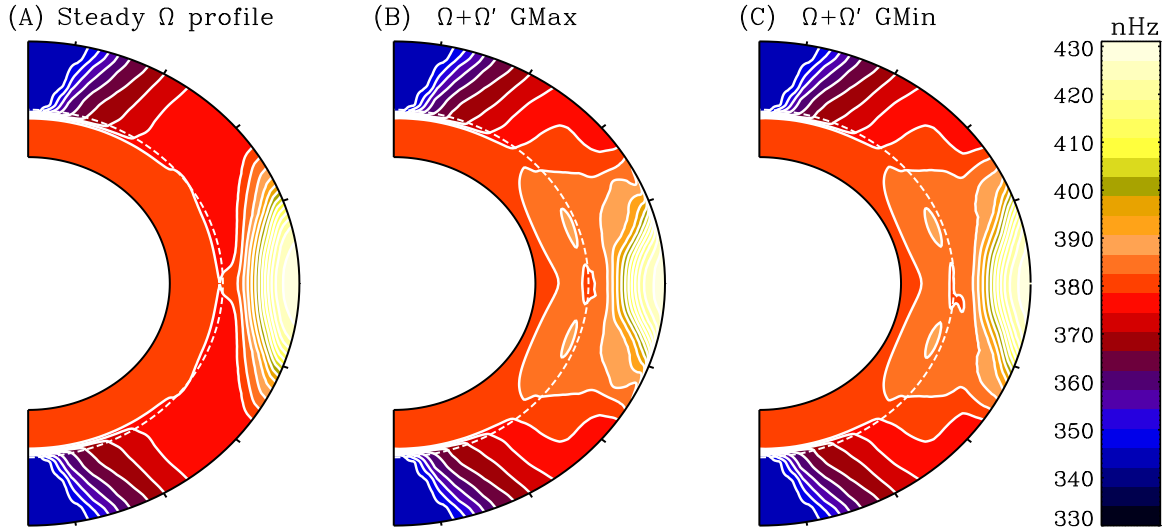


FIGURE 4.1 – (A) Steady angular velocity component (see eq. 4.8) as extracted from a hydrodynamical EULAG simulation, plotted as isocontours of rotational frequency. Panels (B) and (C) show the total angular velocity at epoch of Grand Maximum and Minimum respectively, as produced by our non-kinematic $\alpha^2\Omega$ mean-field dynamo model (specifically, simulation 4 in Table 1 below). The interface between the convection zone and underlying radiative zone is indicated by the white dashed line.

As in Simard et al. (2013), our mean-field dynamo model uses an α -tensor extracted from a reference EULAG-MHD simulation of solar convection (Passos & Charbonneau 2014) through a least-square fit to eq. (4.3), as described in Racine et al. (2011) and Simard et al. (2016). This yields the full 3×3 α -tensor, in which off-diagonal components are roughly of the same

order of magnitude as the diagonals components (see Figure 1 in Simard et al. 2013).

The (turbulent) diffusivity η appearing in eqs. (4.5)–(4.6) corresponds to the isotropic part of the turbulent diffusivity tensor embodied in the \mathbf{b} tensor on the right hand side (RHS) of eq. (4.3). We use values in the $2\text{--}8 \times 10^{11} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ range, commensurate with the values extracted from our reference EULAG-MHD simulation (see Simard et al. 2016, Fig. 6). This value is held fixed throughout our convection zone, and then smoothly ramps down to a much smaller value below, across a thin layer coinciding with the core-envelope interface. This variation is parametrized via an error function profile (see eq. (14) in Simard et al. 2013). All dynamo solutions in what follow use a core-to-envelope diffusivity ratio of 10^{-2} .

The density $\rho(r)$ in eq. (4.10) follows the same polytropic profile as used in the EULAG-MHD from which the α -tensor and mean differential rotation are extracted. Likewise, the core-envelope interface is set at $r/R = 0.718$. We do set a floor on the density at $\rho = 0.021 \text{ kg m}^{-3}$ in the subsurface layers, in order to help maintain numerical stability in the low Pm regime.

The backreaction of the Lorentz force on the differential rotation, as described by equation (4.9), is the only nonlinearity present in the model. No additional mechanism, such as α -quenching, is introduced to achieve amplitude saturation.

As shown in what follows, this non-kinematic $\alpha^2\Omega$ mean-field model can generate a rich spectrum of dynamo behavior, including parity modulation, rotational torsional oscillations, and amplitude modulation on long time scales. In the remainder of this paper we discuss in some detail a small subset of representative dynamo solutions that exemplifies these behaviors. Although all simulations make use of the α -tensor and differential rotation profile extracted from the EULAG-MHD millenium simulation, we emphasize that our primary aim here is not to produce a close mean-field equivalent, but rather to explore the range of possible dynamical behavior associated with magnetic backreaction on differential rotation in a mean-field $\alpha^2\Omega$ dynamo formulated in spherical geometry. Table 1 lists the defining parameters of the set of representative simulations discussed in the remainder of the paper.

Solution run	C_α	C_Ω	Λ	Pm	τ [year]	Section
0	15	35 000	0	N/A	377	4.4
1	20	20 000	1	2	215	4.5
2	15	35 000	1	0.08	377	4.6
3	20	20 000	1	0.005	215	4.6
4	15	35 000	1	0.01	377	4.6,4.7

TABLE 4.1 – Dynamo parameters for each solution run analysed.

4.4 Simulation 0: a kinematic, linear solution

As background to the analyses and discussion to follow, we first consider a representative kinematic solution in which the backreaction of the magnetic field on differential rotation has been removed, by setting $\Lambda = 0$ in eq. (4.10). The problem then reduces to solving the linear but coupled system defined by equations (4.5) and (4.6), with Ω' set to zero. Holding $C_\Omega = 35\,000$ and varying C_α , the critical dynamo number is found to be $D_{\text{crit}} \equiv C_\alpha \times C_\Omega = 87\,500$, for $C_\alpha \simeq 2.5$. Figure 4.2 displays a moderately supercritical solution ($C_\alpha = 15$, $C_\Omega = 35\,000$), in which exponential growth has been scaled out. The top panel shows a time-latitude diagram of the toroidal component extracted at mid-depth ($r/R = 0.85$). Four snapshots in the meridional plane are plotted at bottom, at times corresponding to the dashed lines on the top panel.

This kinematic solution shows concentration of the toroidal magnetic field at low latitudes, consistent with the presence of the strongest differential rotation shear at these latitudes. A clear dynamo wave pattern is also present, characteristic of $\alpha\Omega$ mean-field models and also materializing in $\alpha^2\Omega$ models in which differential rotation contributes significantly to toroidal field induction (e.g., Choudhuri 1990; Charbonneau & MacGregor 2001), which is the case here. The dynamo waves propagate along the isocontours of angular velocity (cf. Fig. 4.1), in a direction set by the sign of the product of the $\alpha_{\phi\phi}$ tensor component and angular velocity shear. Here at low latitudes we have $\partial\Omega/\partial r > 0$ and $\alpha_{\phi\phi} > 0$, leading to propagation away from the equatorial plane, as per the Parker-Yoshimura sign rule. We calculate the solution parity P through

$$P = (B_q^2 - B_p^2)/(B_q^2 + B_p^2), \quad (4.11)$$

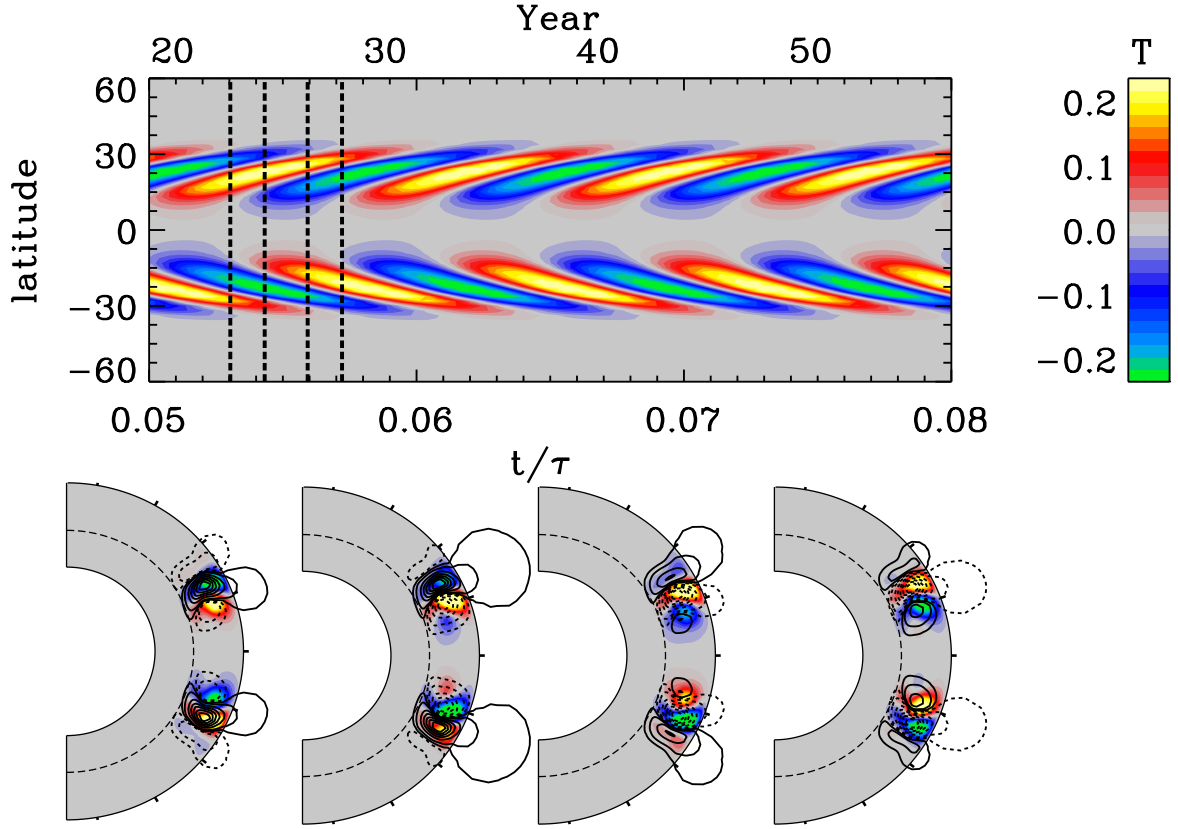


FIGURE 4.2 – A kinematic $\alpha^2\Omega$ dynamo solution. Defining parameters are listed in Table 1. The toroidal field component is plotted as a time-latitude diagram at depth $r/R = 0.85$ in the top panel, and meridional plane snapshots extracted at times corresponding to the dotted lines on the top panel, and spanning a magnetic half-cycle, are displayed at bottom. The color scale encodes the toroidal magnetic field, and poloidal field-lines are plotted as solid (dashed) lines for counterclockwise (clockwise) orientation.

with

$$B_p = \frac{B_N - B_S}{2(B_N + B_S)}, \quad (4.12)$$

$$B_q = \frac{B_N + B_S}{2(B_N + B_S)}, \quad (4.13)$$

where the toroidal magnetic components B_N, B_S are extracted at $\pm 15^\circ$ latitude and $r/R = 0.85$, corresponding to the region of peak toroidal field in the course of the magnetic cycle. Under these definitions, antisymmetric and symmetric parity correspond to $P = -1$ and $P = +1$, respectively. For the solution of Fig. 4.2 the preferred equatorial parity is antisymmetric

(i.e., dipole-like).

4.5 Simulation 1: amplitude saturation

We now turn to a non-kinematic solution, similar otherwise to the linear solution displayed in Figure 4.2. We now solve the nonlinearly coupled system defined by equations (4.5), (4.6), and (4.10), setting $\Lambda = 1$ and magnetic Prandtl number $\text{Pm} = 2$ in the latter. In this $\text{Pm} > 1$ regime, the second term on the RHS of equation (4.10) operates on a time scale shorter than the magnetic cycle period, and thus restricts the perturbation of differential rotation to very low amplitudes. As displayed in Figure 4.3, the magnetic field grows exponentially but rapidly saturates to a cyclic state of constant cycle amplitude and period similar to that characterizing the linear regime for these parameter values. The nonlinearly saturated dynamo remains locked on antisymmetric equatorial parity (blue time series on panel A), and dynamo wave propagation closely resembles the linear regime, except for a faint equatorially-propagating branch at high latitudes, associated with the perturbation of differential rotation.

The bottom panel on Figure 4.3 shows a time-latitude diagram of the differential rotation perturbation Ω'/Ω , extracted at the same depth $r/R = 0.85$ as the time-latitude diagram for the toroidal component (middle panel). In response to the initial exponential growth of the magnetic amplitude, rotational torsional oscillations develop at twice the frequency of the magnetic cycle, as expected, eventually leading to saturation of the magnetic amplitude. In this saturation states, torsional oscillations remain at a very low amplitude, peaking at a mere $\sim 0.3\%$ of the steady differential rotation component. From the inductive point of view, however, what matters is the shear, not the rotation rate per se. Accordingly, we define a local measure of the absolute shear as:

$$\Psi(r, \theta, t) = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial\Omega'}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega'}{\partial\theta}\right)^2\right)}. \quad (4.14)$$

A global version of this proxy is constructed by integrating the above quantity over the solution domain at each time step, and normalizing by the integration of eq. (4.14) computed with

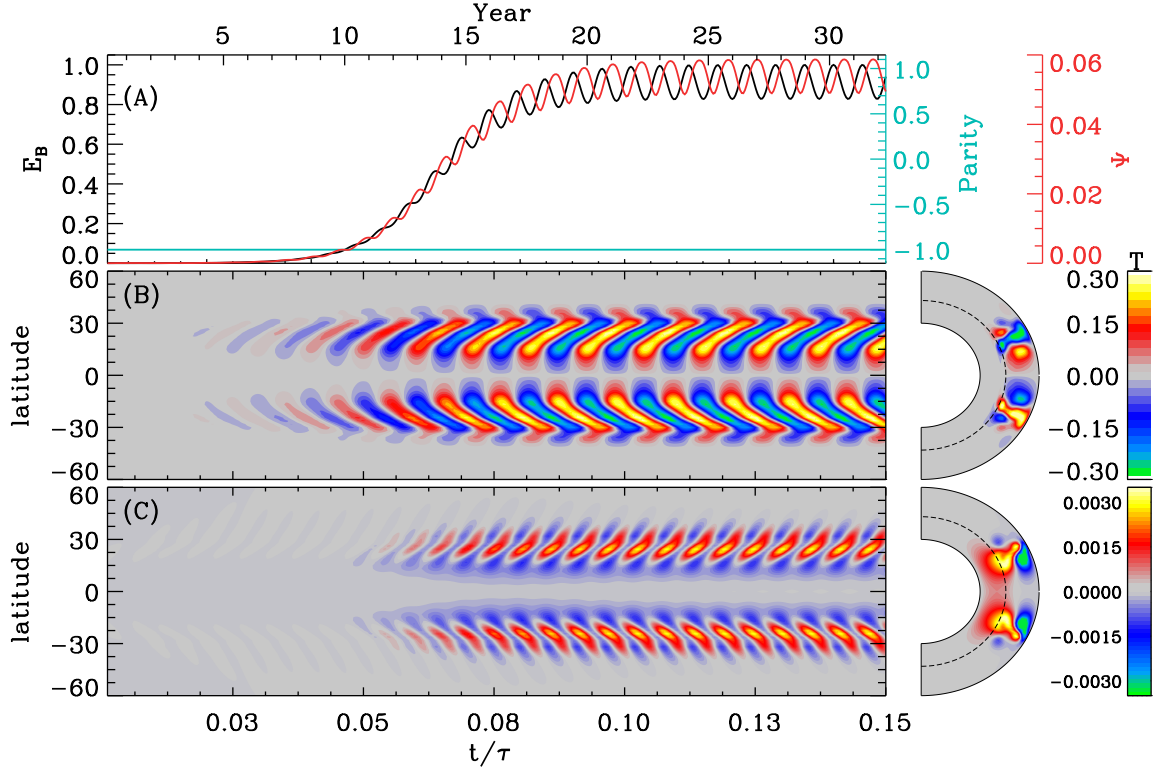


FIGURE 4.3 – Simulation 1, a nonkinematic dynamo solution in the $\text{Pm} > 1$ regime. Its defining parameters are listed in the second line of Table 1. The top panel shows time series of magnetic energy (black), integrated shear proxy (red) and equatorial parity (blue), starting from a seed magnetic field and $\Omega' = 0$ at $t = 0$. The middle panel shows a time-latitude diagram of the toroidal magnetic component extracted at $r/R = 0.85$, with a meridional plane snapshot at right. The bottom panel shows a similar time-latitude diagram at $r/R = 0.85$ and meridional snapshot, but for the angular velocity perturbation normalized to the background angular velocity profile, i.e., $\Omega'(r, \theta, t)/\Omega(r, \theta)$.

the steady profile $\Omega(r, \theta)$ replacing $\Omega'(r, \theta, t)$. The corresponding time series, plotted in red on Fig. 4.3A, thus gives a measure of the relative variation of the global shear. This measure oscillates with the magnetic cycle frequency, remaining nearly in antiphase with the latter, as measured by total magnetic energy (in black); in other words, the rotational shear is globally reduced at magnetic cycle maximum, reflecting the backreaction of the magnetic force on the inductive large-scale flow.

4.6 Simulations 2, 3, and 4: amplitude modulation

While our non-kinematic $\alpha^2\Omega$ dynamo solutions stabilize on a constant-amplitude cyclic behavior at high (> 1) values of the magnetic Prandtl number P_m , large cycle amplitude fluctuations materialize in the $P_m < 1$ regime. An analogous behavior has been studied extensively in a wide range of non-kinematic $\alpha\Omega$ dynamo models, in which the turbulent electromotive force is zeroed out in eq. (4.6). Geometrically, these models have ranged from spatially-integrated dynamical systems, through one-dimensional cartesian slab models, all the way to axisymmetric models in spherical geometry (see, e.g., Tobias 1996b; Knobloch et al. 1998; Küker et al. 1999; Brooke et al. 2002; Bushby 2006). In particular, Knobloch et al. (1998) have argued that cycle amplitude modulation in such non-kinematic models can be divided into two generic classes: type 1 modulation takes place through parity oscillation, i.e., energy is cyclically exchanged between the fundamental symmetric and antisymmetric modes through nonlinear interactions with the large scale flow, without significantly affecting the kinetic energy of the latter; type 2 modulation, in contrast, involves energy exchange between the magnetic and kinetic energy reservoirs, at fixed parity. The co-existence of both types of modulation in geometrically more complex models can then lead to a wide range of modulation patterns.

The aforementioned results were obtained in the context of mean-field models of the $\alpha\Omega$ variety. We now turn to non-kinematic $\alpha^2\Omega$ dynamo solutions (solutions 2, 3 and 4 in Table 1) that exhibit behavior akin to the type 1 and type 2 modulations identified by Knobloch et al. (1998).

Figure 4.4 shows a representative solution exhibiting parity modulation (type 1). The overall format is the same as on Figure 4.3, except that the portion of the solution plotted is restricted to the saturated phase of the simulation, i.e., it excludes the initial phase of exponential growth to saturation. This solution shows a short primary cycle of period $\simeq 2.5$ yr, undergoing an amplitude modulation by a factor $\simeq 2$ on a timescale $\simeq 30$ yr. This amplitude modulation is associated with a clear parity modulation, with transition from antisymmetric ($P = -1$) to symmetric ($P = +1$) parity leading to a growth of the modulation envelope, the opposite transition driving instead a decrease of the modulation amplitude. Despite variations

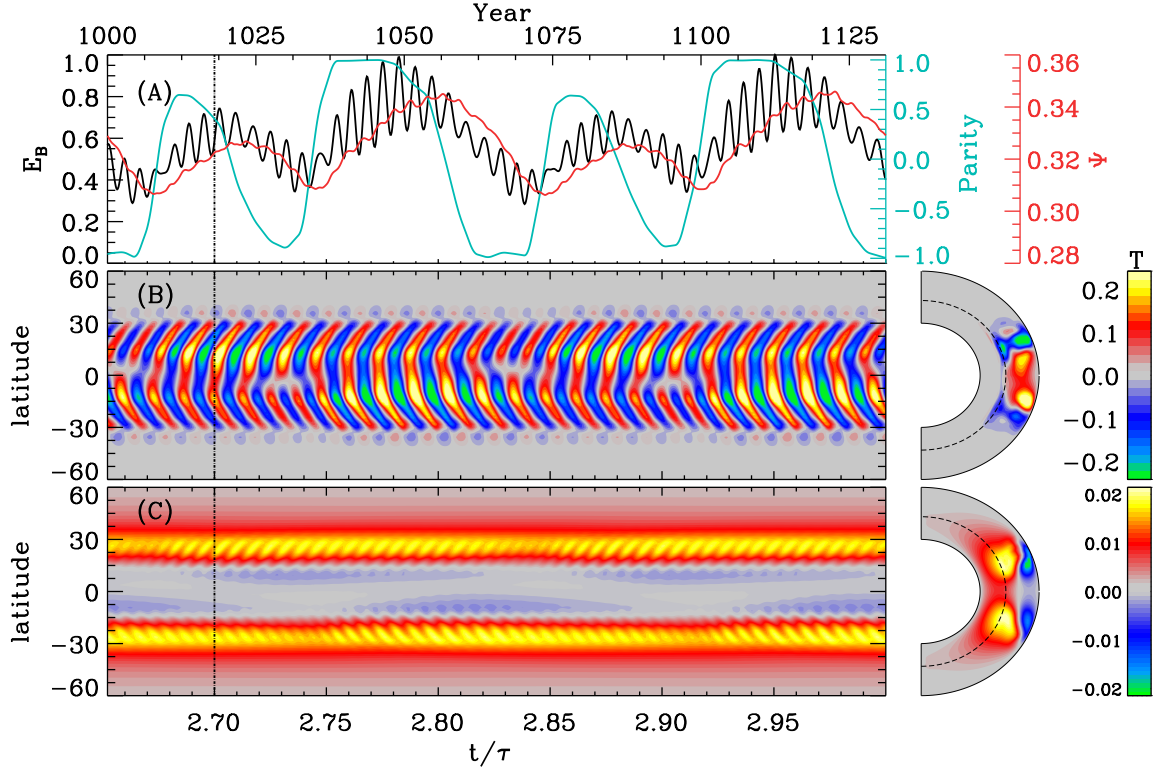


FIGURE 4.4 – Solution run 2 in a $\alpha^2\Omega$ configuration where the energy is modulated via parity. The top panel shows the total magnetic energy in black, the Ω proxy (Ψ) integrated in the meridional plane in red and the parity in light blue. Note that magnetic energy has been normalized. Panel (B) shows the toroidal magnetic field in a time-latitude diagram extracted at $0.85R$ and the panel (C) the angular velocity fluctuation ($\Omega'(r, \theta, t)/\Omega(r, \theta)$) in the same configuration. The meridional cuts of the toroidal field B and angular velocity perturbation Ω' plotted at right of the time-latitude diagrams are extracted at $t/\tau = 2.7$, as indicated by the dash-dotted line segments on the corresponding time-latitude diagrams.

by a factor of ~ 2 in magnetic energy, the zonal flows are hardly affected, with the global shear proxy varying by about 10% between peaks and troughs of the modulating envelope.

As can be seen on Fig. 4.4B, parity modulation leads here to an alternating pattern of hemispheric dominance in the time-latitude diagram of the internal toroidal magnetic component, evidence that the fundamental symmetric and antisymmetric modes reach comparable energy levels in this dynamo solution. With the symmetric mode now building up to high amplitudes, toroidal magnetic fields now extend across the equatorial plane, even though peak amplitudes are still reached around latitudes $\pm 15^\circ$.

Although still modest in absolute terms, the differential rotation perturbation, plotted in

Fig. 4.4B, now reaches a much larger amplitude than it did in the high-Pm regime (cf. Fig. 4.3), but with only a very faint cyclic signal on the timescales of either the primary cycle or modulation envelope. Nonetheless, an overall reduction of the differential shear in the dynamo region remains the mechanism saturating the overall amplitude of the dynamo, even though the magnitude of the flow perturbation is at the $\sim 1\%$ level. As in the case of the $Pm = 2$ solution of Figure 4.3, comparing the meridional cuts at bottom right to the mean differential rotation profile on 4.1 reveals immediately that at low latitudes, the zonal flow perturbation is negative (positive) where the angular velocity is highest (lowest), i.e., the magnetically-driven flow perturbation reduces the shear characterizing the background differential rotation profile.

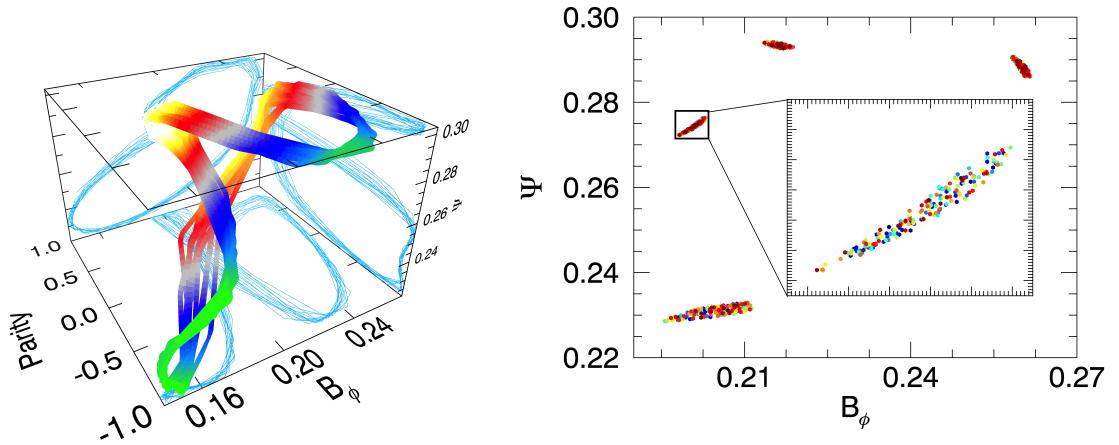


FIGURE 4.5 – Left panel: 3D phase portrait between parity, toroidal magnetic field and the differential rotation proxy (see eq. 4.14) from solution 2. Each of these three quantity is extracted at $r/R = 0.85$ and 15° latitude. Only the modulation envelope of those quantities are used for plotting, i.e., the primary cycle is removed. The color code represents the magnitude of the parity from -1 in blue to +1 in red. The right panel is a Poincaré section in the $P = 0$ plane, with the inset focusing on one of the four crossing locations. The trajectory therein is space-filling, indicating that the modulation is chaotic (see text).

Figure 4.5 offers a different view of the amplitude modulation pattern, in the form of a trajectory in a three-dimensional space defined by parity, magnetic field and the Ω proxy from the solution run 2 presented in figure 4.4. In order to have a clean path in the phase space, we extract only the modulation envelope for the toroidal magnetic field to avoid sign change. The result is a well-defined path where the solution does not change much in magnetic

amplitude ($\sim 25\%$) or in shearing ($\sim 35\%$) but varies from -1 to $+1$ in parity. One lap in this attractor lasts ~ 0.175 in diffusion time (see figure 4.4 top panel). In this global phase space, the attractor is a thin, twisted tube bounding the trajectory. The right panel on Fig. 4.5 is a Poincaré section computed by plotting the points where the trajectory on the left panel crosses the $P = 0$ plane, with the colors now coding time (blue \rightarrow green \rightarrow yellow \rightarrow red). While the four crossing regions in the $P = 0$ plane each cover only a small surface, as shown on the inset within these regions the trajectory is space-filling, consistent with the expected chaotic nature of the cycle modulation.

Figure 4.6 shows yet another example of a non-kinematic $\alpha^2\Omega$ dynamo solution (run 3 from Table 1), this time obtained at a much lower value of the magnetic Prandtl number, $Pm = 5 \times 10^{-3}$. Magnetic activity is now peaking at mid-latitudes in both hemisphere, with much less trans-equatorial coupling than on the $Pm = 0.08$ solution of Fig. 4.4. Variations of differential rotation are again quite small, well below the 1% level, and are developing on the long timescale of the cycle amplitude modulation, without any significant signal at the primary cycle frequency. Variations in parity are again quite large, but mostly reflect a phase drift between hemisphere, setting in during the rising phase of the magnetic cycle modulation. The two solutions of Fig. 4.4 and 4.6 exhibits a property already well-known of non-kinematic $\alpha\Omega$ mean-field models operating in the low- Pm regime, namely their ability to generate periodic amplitude modulations on timescales much longer than the period of the primary magnetic cycle. More specifically, the ratio between the long-term modulation period (P_2) and the primary cycle period (P_1) is observed to increase when Pm is decreased (Tobias 1997; Bushby 2006). A similarly robust trend also emerges from our non-kinematic $\alpha^2\Omega$ model. This is shown in Fig. 4.7, for a sequence of solutions of varying Pm but otherwise identical to solution 3 (Fig. 4.6). The period ratio P_2/P_1 is found to scale as $\propto Pm^{-1}$ over one order-of-magnitude in Pm .

The solutions of Figs. 4.4 and 4.6 both show quasiperiodic long term modulations, but more strongly aperiodic modulation also develops in many regions of the model's parameter space, in particular at higher dynamo numbers and small values of Pm . Figure 4.8 shows an example (solution 4 in Table 1), in the now usual format. Once again magnetic activity is concentrated

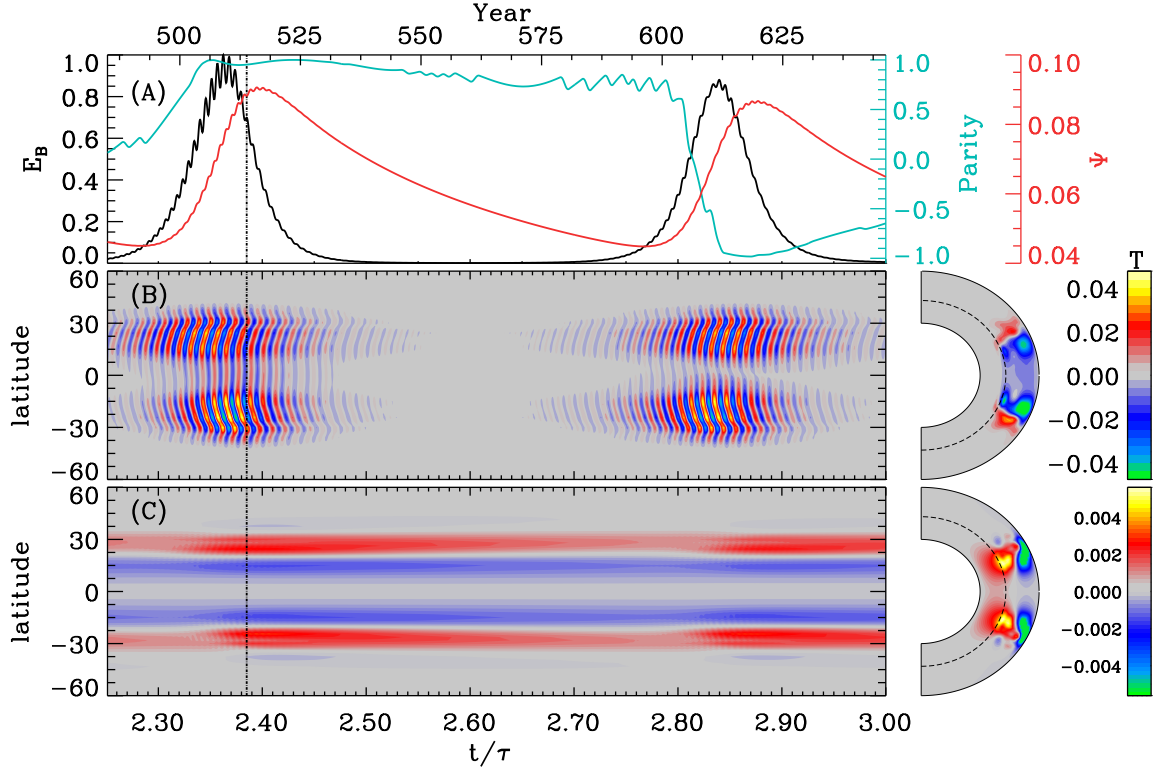


FIGURE 4.6 – As in format to Fig. 4.4, but showing now a very low Pm solution ($Pm = 5 \times 10^{-3}$; solution run 3 in Table 1).

in low latitudes, and is characterized by parity modulation, hemispheric decoupling, and variations of differential rotation reminiscent of type 2 modulation.

In this solution, extended epochs of high amplitude in magnetic energy (such as beginning here at $\simeq 9150$ yr) tend to be of symmetric equatorial parity, while periods during which antisymmetric parity prevails almost always coincide with low magnetic energy.

Interestingly, in all of our non-kinematic $\alpha^2\Omega$ solutions the variations in angular velocity remain quite small, within the observed level of solar rotational torsional oscillations (Howe 2009). This remains the case even when large variations of the shear proxy are taking place over the long modulation period, as in Fig. 4.6, in contrast to non-kinematic $\alpha\Omega$ model undergoing type 2 modulation in the low Pm regime (Bushby 2006). The discussion of the physical origin of this behavioral difference is deferred to §4.8.

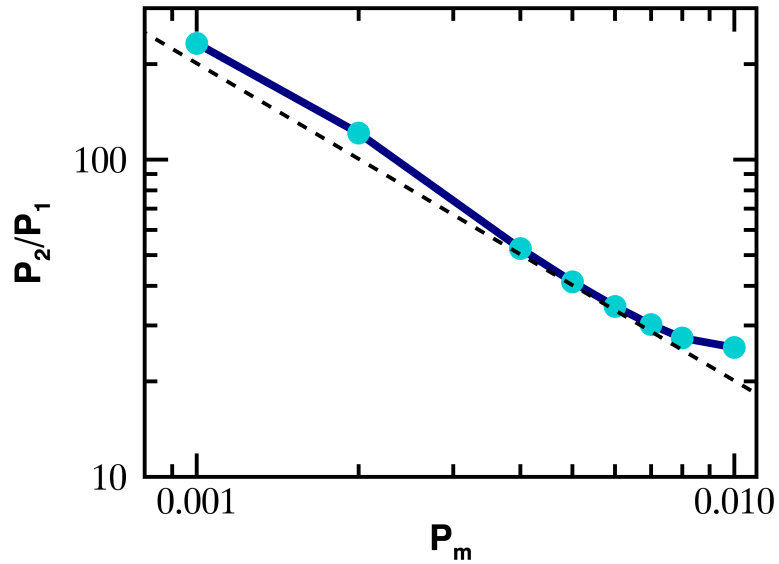


FIGURE 4.7 – Variation of the ratio between the long-term modulation period (P_2) and the primary magnetic cycle period (P_1) versus the magnetic Prandtl number P_m . Except for the latter, all solutions use the same parameter values as solution 3 in Table 1 (see also Fig. 4.6). The dashed line indicates a P_m^{-1} scaling.

4.7 Characteristics of Grand Minima

The occurrence of extended periods of strongly suppressed activity, of which the 1645-1715 Maunder Minimum remains the archetype (Eddy 1976), is one of the most intriguing feature of the solar activity record. With only one such event present in the 400-yr sunspot record, the statistical study of these Grand Minima is better carried out via indirect proxies of solar activity, namely the abundances of cosmogenic radioisotopes in natural archives (see Usoskin et al. 2007; Usoskin 2013, and references therein). Reconstructions of solar activity based on ^{14}C or ^{10}Be extends back over 10 000 years, and reveal important variations in the overall level of solar activity. While these reconstructions are model dependent to some degree, some robust features do emerge (Damon & Sonett 1991; Vasiliev & Dergachev 2002; Peristykh & Damon 2003; Usoskin & Kovaltsov 2004; Usoskin et al. 2007). These include a number of Maunder Minimum-like episodes of suppressed activity, as well as periods of much higher than average activity (dubbed Grand Maxima). Because of the wide disparity of timescales

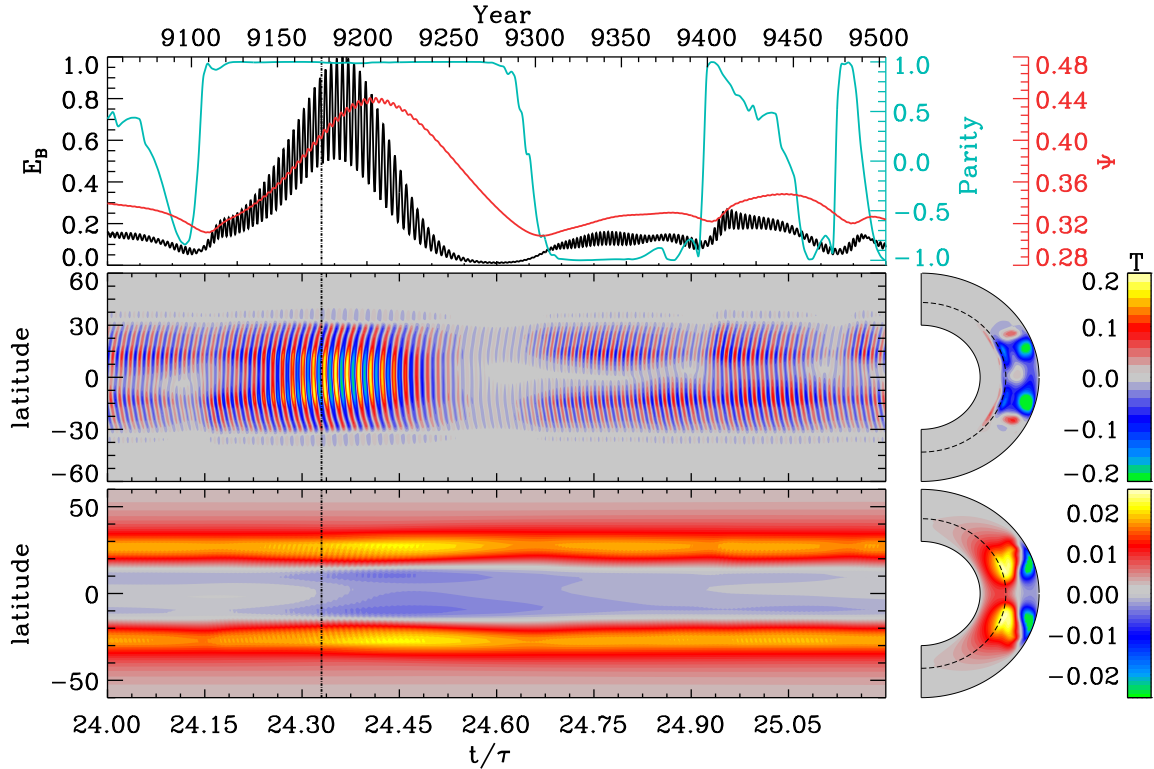


FIGURE 4.8 – Identical in format to Fig. 4.4, but for a solution exhibiting strongly aperiodic behavior. This is solution run 4 in Table 1.

involved, mean-field dynamo models remain the primary modelling tool used to explore the underlying physical mechanisms.

Strong amplitude modulation, as exemplified by solutions 3 and 4 above (Figs. 4.6 and 4.8) acting in conjunction with a field strength threshold for the destabilization and emergence of sunspot-forming magnetic flux ropes, represent one potential physical explanation for Grand Minima. In such a scenario, the underlying magnetic cycle never stops, but simply falls sometimes below the threshold at which sunspot formation is possible. This notion is supported by the ^{10}Be radioisotope record, which shows a sustained cyclic signal across the Maunder Minimum (see Beer et al. 1998; Cliver et al. 1998; Usoskin et al. 2015), presumably driven by a weak, global solar magnetic field undergoing cyclic polarity reversals even in the near absence of sunspots.

In the remainder of this section we present a detailed analysis of a 50 000 long extension of simulation 4 (Table 1; and Fig. 4.8), in which Grand Minima appear in an aperiodic fashion. In

this simulation the epochs of very high modulation amplitude, referred to as “Grand Maxima” in what follows, are of equatorially symmetric parity, and are almost invariably followed by a Grand Minimum. Parity then usually switches to antisymmetric in the recovery to normal cyclic behavior upon exiting Grand Minima. Observational evidence exists for a qualitatively similar behavior occurring at the end of the Maunder Minimum (Ribes & Nesme-Ribes 1993; Sokoloff & Nesme-Ribes 1994).

4.7.1 Parity switch across Grand Minima

Figure 4.9 focuses on a representative Grand Minimum occurring in solution 4. The top panel is again a time-latitude diagram of the toroidal magnetic field, while the four meridional snapshots at bottom show the evolving structure of the complete axisymmetric magnetic field. The transition from symmetric to antisymmetric equatorial parity going in and out of the Grand Minimum is strikingly apparent on the top panel. For this specific Grand Minimum the return to symmetric parity occurs rather rapidly upon recovery to normal cyclic behavior, but in other cases antisymmetric parity can persist for many tens of cycles (cf. the Grand Minimum on Fig. 4.8).

Figure 4.10 shows a phase portrait of the dynamo solution during the time interval spanned by Figure 4.9. The solution is plotted as a trajectory in a 3D space defined by the parity, and local values of the toroidal magnetic field and shear proxy (eq. 4.14) evaluated at $(r/R, \theta) = (0.85, 15^\circ)$. The direction of time follows the color shading, from blue to red. The parity transition is quite smooth and follows a well-defined oscillatory path in this three-dimensional phase space, in which the solution first undergoes a collapse of the magnetic cycle amplitude (dark to light blue) as the shear is reduced, followed by a slow parity transition with marginal growth of the amplitude (green), which picks up once dominantly antisymmetric parity is reached. The growth of the angular velocity perturbation then saturates the dynamo (yellow to orange), which then transits rapidly back to symmetric parity (orange to red).

The general dependence of cycle amplitude on parity is not restricted to epochs of Grand Minima and Maxima. The distribution of cycle amplitudes for the full simulation is plotted on Fig. 4.11A, and appears roughly symmetrical about its mean, in gaussian-like fashion.

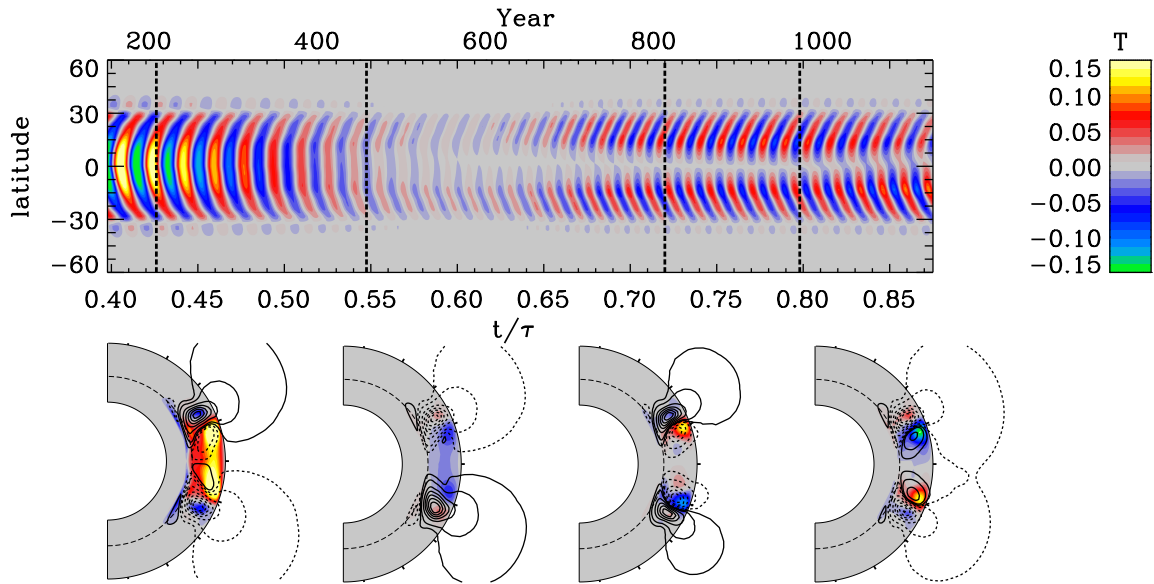


FIGURE 4.9 – Snapshot of an epoch of a Grand Maximum followed by a Grand Minimum for solution run 4. Top panel shows the toroidal magnetic field in a time-latitude diagram extracted at $r/R = 0.85$. The bottom row shows four meridional planes snapshots extracted from the simulation at times indicated by the dashed lines on the upper panel. The color scale encodes the toroidal magnetic field, and poloidal field-lines are plotted as solid (dashed) lines for counterclockwise (clockwise) orientation.

However, if one extracts cycles for which the parity is either predominantly dipole-like or quadrupole-like, the two data subsets show markedly distinct distributions. These are plotted on Fig. 4.11B, using only cycles with $P \leq -0.7$ (dominantly antisymmetric, in purple) or $P \geq +0.7$ (dominantly symmetric, in yellow). These differences reflect the spatially distinct patterns of Lorentz force altering the internal differential rotation under the two parity states of the dynamo.

4.7.2 Statistics of Grand Minima and Maxima

Figure 4.12A shows a 11 000 yr segment of a $\sim 50\,000$ years-long simulation where episodes of Grand Maxima/Minima are observed. Panel (A) illustrates the modulation envelope of normalized total magnetic energy, where the colored regions in red (blue) represent period of Grand Maxima (Minima). This time series is constructed by plotting only the peak amplitude of each individual energy peak associated with the primary (short) cycle (cf. black line on Fig. 4.8). The threshold values used to delineate epochs of Grand Minima and Maxima from

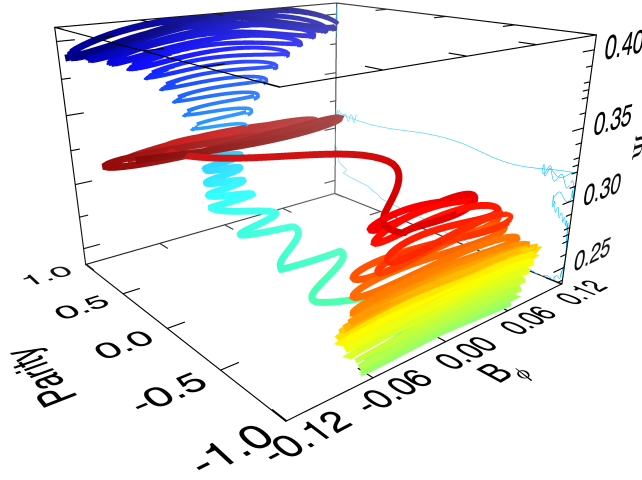


FIGURE 4.10 – 3D phase portrait between parity, toroidal magnetic field and Ω' proxy (Ψ) from solution 4 taken at the same time span as figure 4.9 and extracted at $0.85R$ radius and 15° latitude. The color code represent the advance of time from blue to red.

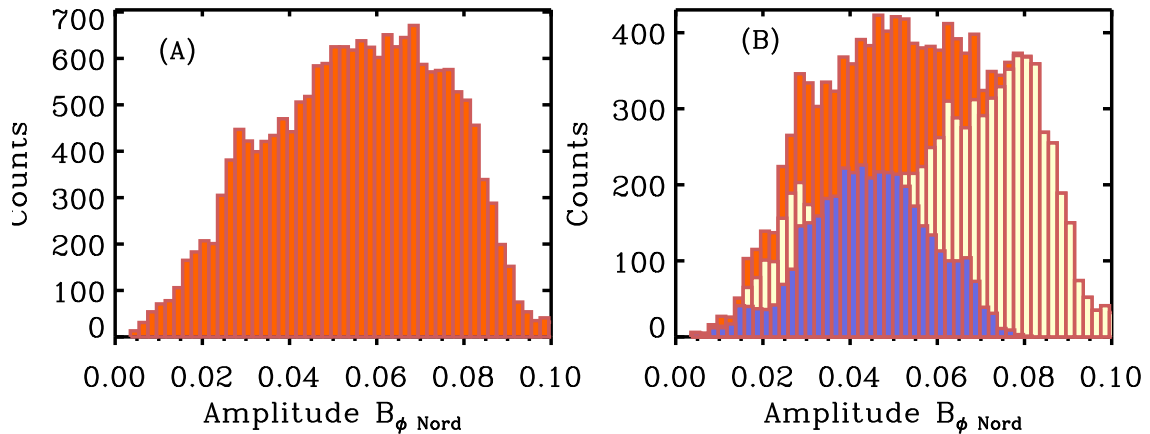


FIGURE 4.11 – Panel (A) shows the amplitude distribution of the toroidal magnetic field maxima extracted from the primary cycle in simulation run 4. Panel (B) separates these amplitude by parity, considering only cycles for which $|P| \geq 0.7$. The corresponding distribution for symmetric and antisymmetric parity are plotted in yellow and purple, respectively, with their total in red.

“normal” cyclic behavior, are indicated by the two horizontal dashed lines. These thresholds are set here so that the fraction of simulation time spent in either state is roughly the same

($\sim 10\%$) as inferred from radioisotope-based reconstructions (see Fig. 3 in Usoskin et al. 2007). As in those reconstructions, the oscillation associated with the primary cycle is lost and only the long-term activity modulation trend remains.

The fact that this simulation exhibits markedly aperiodic long term modulation results entirely from the primary cycle operating in the chaotic regime, and of the relatively weak coupling between hemispheres characterizing the parameter regime in which it operates.

Figure 4.12B plots the distribution of Grand Minima durations, as extracted from the time series of panel (A). This distribution is built from 132 measured Grand Minima, and its low duration end is influenced to some extent by our adopted lower threshold value. Nonetheless, the distribution shows a distinct, broad peak for durations spanning the range 11–23 periods of the primary cycle. That Grand Minima should be characterized by a moderately well-defined mean value. As discussed already in the context of Fig. 4.10, Grand Minima are triggered when the cycle amplitude becomes high enough to reduce differential rotation close to criticality. The transition back to normal cyclic behavior is controlled by two processes: dissipation of the magnetic field, accompanied by dissipation of the differential rotation perturbation Ω' , the timescale of latter process being controlled by the magnetic Prandtl number Pm on the RHS of eq. (4.10).

Figure 4.12C plots the waiting time distribution (WTD) for Grand Minima, waiting time being defined as the time elapsed between the end of a Grand Minimum and the onset of the next. The WTD has an exponential shape, indicative of a stationary memoryless Poisson process, i.e., the onset of a Grand Minimum is not influenced by the occurrence of earlier Grand Minima. This is in partial agreement with inferences based on analyses of radioisotope data, which to first order reveal an exponential WTD, but also small deviations from pure exponential behavior ascribed to a tendency for Grand Minima to cluster (see Usoskin et al. 2007, 2009, 2016).

Similar statistical trends are observed for Grand Maxima, as shown on panels D and E of Fig. 4.12. Grand Maxima durations show again a well-defined peak centred on 25–30 primary cycle periods. This characteristic timescale is governed by the time taken for the growing magnetic field to quench differential rotation, and is controlled by the parameter Λ in

eq. (4.10). The inter-event waiting time for Grand Maxima is again approximately exponential, indicating that the triggering of a Grand Maximum is independent of the time elapsed since the preceding Grand Maximum.

Our simulation 4 exhibits one robust pattern which has no counterpart in the reconstructions based on radioisotopes: a Grand Maximum is almost always followed by a Grand Minimum. This is again a direct reflection of the manner in which the dynamo enters a Grand Minimum, through a magnetically-driven reduction of differential rotation associated with a high amplitude excursion of the magnetic field.

4.7.3 Surface differential rotation during Grand Minima and Maxima

Another interesting feature accessible from this simulation, and with a potential observational counterpart, is the variation of surface differential rotation during Grand Minima. Panels B and C of Figure 4.1 display respectively the total angular velocity at epochs of a Grand Maximum and Minimum in simulation 4. Differences with the steady profile in (A) are hard to distinguish on such a plot, but are present at a significant level at latitudes below $\pm 30^\circ$ in the outer convection zone. Accordingly, we plot on Fig. 4.13A the surface angular velocity difference between the equator and latitude $\pm 20^\circ$ at times of Grand Minima and Maxima, as labeled. The corresponding quantity averaged over the whole simulation is indicated by the green asterisk (*). This plot indicates that low-latitude surface differential rotation is reduced (increased) during Grand Minima (Maxima). Figure 4.13B displays the latitudinal profiles of this variation for two representative Grand Minima and Maxima. These are obtained by subtracting the latitudinal profile averaged over the whole simulation from the profiles at times of the selected Grand Minima and Maxima. It is noteworthy that the order of magnitude of these variations, ± 8 nHz peak-to-peak, is of the same order of magnitude as inferences based on sunspot drawings during the Maunder Minimum (Casas et al. 2006). This agreement should not be overinterpreted, however, as our internal differential rotation profile shows significant departures from helioseismic inferences, notably the alignment of low-latitude isocontours with the rotation axis, strong cylindrical shear peaking in the middle of the low-latitude convection zone rather than at its base, and the lack of a surface shear layer

(cf. Fig. 4.1 herein and Fig. 1 in Howe 2009).

4.8 Discussion and conclusion

We have developed a non-kinematic axisymmetric mean-field dynamo model of the $\alpha^2\Omega$ variety, i.e., a mean field model in which both the turbulent electromotive force and shearing by differential rotation contribute to the induction of the toroidal magnetic component. The motivation underlying this work originates with analyses of global MHD simulations of solar convection producing large-scale magnetic cycles, which indicate that the turbulent electromotive force characterizing these simulations can be well described by a full α -tensor (e.g. Racine et al. 2011; Augustson et al. 2015; Simard et al. 2016; Warnecke et al. 2016). Taken at face value, these inferences from numerical simulations raise doubts on the applicability of the $\alpha\Omega$ regime commonly used to model solar and stellar dynamos.

A number of well-known properties characterizing non-kinematic $\alpha\Omega$ mean-field models are found to carry over to the $\alpha^2\Omega$ regime:

1. at high magnetic Prandtl number ($Pm > 1$), nonlinear magnetically-mediated backreaction on the differential rotation can produce stable magnetic cycles;
2. for $Pm < 1$, modulation of the amplitude of the primary cycle materializes, with the modulation period increasing with decreasing Pm ;
3. amplitude modulation can take place either through parity changes, or energy exchange with the large-scale flow, or a combination of both.

One feature distinguishing our non-kinematic $\alpha^2\Omega$ model from its $\alpha\Omega$ counterparts, however, is the fact that magnetically-driven variations of differential rotation remains quite small, at the level of a few percent or less, independently of the value of Pm . This novel feature demands an explanation. The analyses of Racine et al. (2011) indicates that in the EULAG-MHD simulations used here to extract the α -tensor, the turbulent contribution to the induction of the mean toroidal field is of opposite sign and almost exactly balances the shearing of the large-scale poloidal component by differential rotation; in other words, the two last terms in eq. (4.6) almost cancel each other, with their residual driving the production of the

mean toroidal component (see Racine et al. (2011), Fig. 14). Under such circumstances, even a small change in one of these two contributions —here shearing by differential rotation— can thus lead to a large change in the residual net EMF. Consequently, even a very small change in differential rotation can saturate the dynamo, or induce large changes in overall cycle amplitude.

As a mechanisms for generating Grand Minima, our simulations in the $Pm < 1$ regime do reproduce some features inferred from long-term reconstructions based on the cosmogenic radioisotope records, including in particular an exponential distribution of inter-event waiting times (Usoskin et al. 2007), as well as parity changes upon exiting Grand Minima (Ribes & Nesme-Ribes 1993). The simulation analyzed in detail in §4.7 presents one clearly non-solar feature, namely the fact that Grand Minima are almost invariably preceded by Grand Maxima. We are currently pursuing our exploration of the model’s parameter space, to assess whether or not this is an ubiquitous feature of our non-kinematic $\alpha^2\Omega$ model. Experience with other types of nonlinear dynamo models also suggests that this undesirable characteristic could be eliminated by the introduction of low amplitude stochastic noise (see, e.g., Olemskoy & Kitchatinov 2013).

This work was supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada, the Fond Québécois pour la Recherche – Nature et Technologie, the Canadian Foundation for Innovation, and time allocation on the computing infrastructures of Calcul Québec, a member of the Compute Canada consortium.

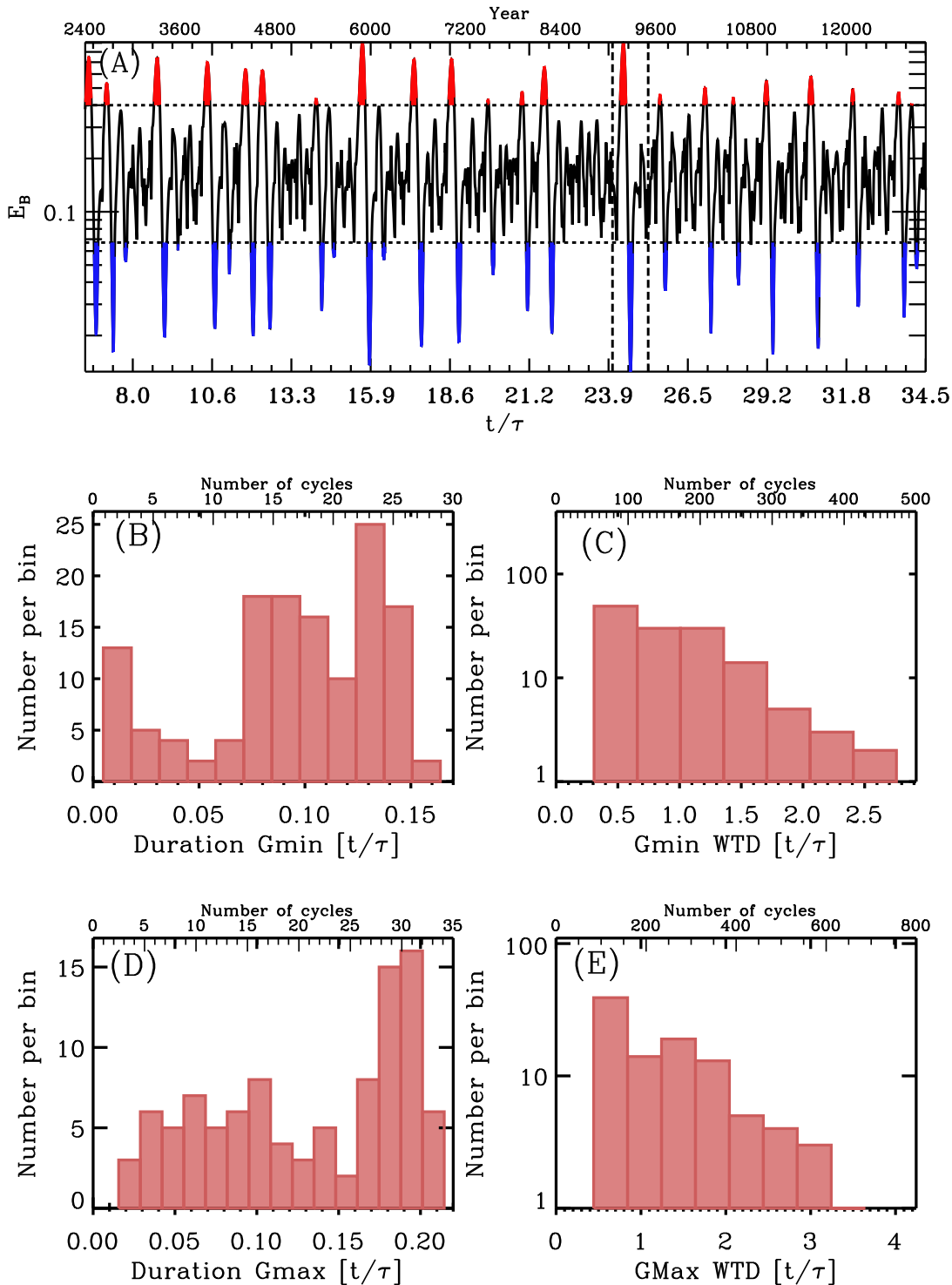


FIGURE 4.12 – (A) Time series of total magnetic energy in a 11 000 yr segment of a 50 000 yr realization of simulation 4. Time is expressed both in units diffusion time (bottom axis) and in years (top axis). The oscillations from the primary cycle have been removed, leaving only the long term modulation envelope. Epochs of Grand Maxima and Minima are indicated in red and blue, respectively. Compare to Fig. 3 in Usoskin et al. (2007). The vertical dashed lines delineate the time interval spanned by Fig. 4.8. The four other panels show histograms of (B) Grand Minima durations, (C) waiting times between successive Grand Minima, (D) Grand Maxima durations, and (E) waiting times between successive Grand Maxima (see text).

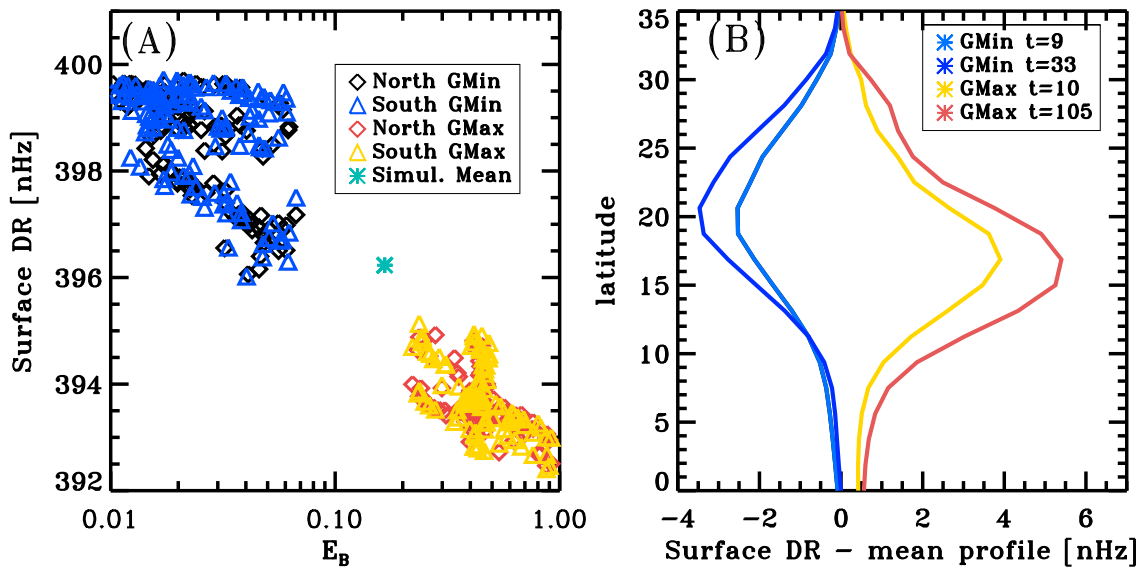


FIGURE 4.13 – Panel (A) shows the difference in surface angular velocity between the equator and latitude 20° for every Grand Maxima (Minima) in red and yellow (blue and black) measured in simulation 4, i.e., at extrema of the magnetic energy time series (E_B) plotted on Fig. 4.12A. The green asterisk indicates the simulation mean for this quantity. Panel (B) shows the surface differential rotation against latitude for two Grand Maxima in red and yellow and two Grand Minima in blue, with the simulation mean again subtracted.

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Bilan des modèles

Comme il a été expliqué dans cette thèse, notre compréhension de la dynamo solaire reste encore incomplète malgré la multitude de modèles existants. De plus, nous sommes également loin de pouvoir atteindre dans ces modèles numériques le régime de paramètres dans lequel le Soleil opère sa dynamo. D'autre part, même avec la puissance actuelle des superordinateurs, il est toujours impossible de capturer l'ensemble des mécanismes magnétohydrodynamiques couvrant sur plus de 6 ordres de grandeur dans le Soleil. Malgré ces difficultés, les récents progrès réalisés par les modèles globaux 3D-MHD de la convection solaire sont tout de même remarquables.

Le modèle EULAG-MHD nous a entre autres permis d'extraire à partir d'une méthode par DVS, les coefficients de transport turbulent de premier et deuxième ordre. Par contre, les coefficients que nous avons calculés diffèrent de leur définition mathématique originale. Les tenseurs α et β tels que définis dans la formulation classique de l'électrodynamique des champs moyens sont des quantités linéaires et hydrodynamiques, caractérisant l'action inductive d'un écoulement non magnétisé. Les tenseurs α et β tels que calculés au chapitre 2 sont extraits d'une simulation magnétohydrodynamique dont le champ magnétique a atteint son état non linéairement saturé et diffère donc significativement de leur définition originale. Cette différence entre les deux définitions et la manière dont nous extrayons nos coefficients

turbulents restent encore très controversées. Entre autres, une méthode nommée *Test field* utilise une technique différente et certainement plus complexe pour obtenir les coefficients de transport turbulent tels que définis originalement. Le groupe utilisant cette méthode a posé beaucoup de résistance lors de la soumission d'articles utilisant notre méthode d'extraction des tenseurs α et β par DVS. Il va sans dire que leur méthode *Test field* est plus complexe qu'un simple ajustement par moindres carrés, mais la beauté de la méthode d'extraction par DVS réside justement dans sa simplicité. De plus, cette technique utilisant la décomposition en valeurs singulières permet de calculer l'incertitude sur les tenseurs α et β , quantité qui n'est malheureusement pas calculée par la méthode *Test field*. Les tenseurs que nous calculons n'ont jamais prétendu correspondre exactement à la définition originale des coefficients de transport turbulent. Ils constituent plutôt un outil d'analyse pour les résultats de simulation EULAG-MHD. En fait, des analyses effectuées par Strugarek et al. (2016a) montrent que les valeurs estimées de la diffusivité turbulente dans des simulations soeurs à EULAG-MHD sont comparables à celles de la composante diagonale du tenseur β . De plus, il a été démontré par Simard et al. (2013) que l'inclusion du tenseur α dans un modèle de champ moyen reproduit bien les caractéristiques générales du champ magnétique toroïdal généré par EULAG-MHD aux grandes échelles spatiales et c'est précisément le but recherché. Il semble donc que, malgré la différence dans notre définition de ces tenseurs, les tenseurs α et β capturent tout de même l'essentiel de la FEM et de la diffusivité turbulente provenant de EULAG-MHD et leur utilisation est, dans ce sens, tout à fait justifiée.

Une des importantes questions ouvertes liées aux mécanismes entourant la dynamo du Soleil est celle liée à la saturation du cycle. En fait, dans le cas de la simulation globale EULAG-MHD, même après plusieurs analyses, il n'est pas encore évident quels mécanismes dominant la saturation de son cycle magnétique. À la lumière des analyses faites dans le chapitre 2, il serait tentant de dire que la saturation dans EULAG provient du *quenching* de la FEM. Si on suppose que l'approximation SOCA est exacte, nos analyses montrent que le tenseur α réduirait son amplitude dans les phases maximales d'activité majoritairement à travers la réduction de l'amplitude de l'écoulement turbulent \mathbf{u}' (voir éq. (2.26)). Cet écoulement qui est lui-même affecté par la présence du champ magnétique fait de ce phénomène un processus

pleinement MHD. Par contre, en analysant la vitesse azimutale, on observe également un patron d'oscillations torsionnelles (Beaudoin et al. 2013) causé par la rétroaction magnétique de la force de Lorentz associée aux grandes échelles du champ magnétique. Même si les amplitudes de celles-ci sont plutôt faibles (~ 3 nHz), ces oscillations jouent fort probablement un rôle dans la saturation du cycle. Pour isoler les mécanismes responsables de cette saturation, une analyse plus approfondie du transfert d'énergie entre les différents réservoirs d'énergie devrait être effectuée. Un travail en ce sens est en cours, mené par Dario Passos, de *Instituto Superior Técnico* et Patrice Beaudoin, de l'Université de Montréal.

5.2 Recherche future

Nous présentons dans le chapitre 4 plusieurs analyses effectuées sur différentes simulations obtenues avec un modèle dynamo en champ moyen incluant la rétroaction magnétique. Même si une quantité substantielle de solutions ont été générées (près de 4000) à partir de ce modèle, il reste toutefois encore énormément de solutions et de régimes de paramètres à explorer. Entre autres, des tests incluant le profil EULAG-MHD comme rotation différentielle (contrairement aux chapitres 3 et 4 qui utilisent le profil HD) ont été réalisés, mais sans explorer en détail l'espace des paramètres. Il serait intéressant de mesurer l'impact que ce changement de rotation différentielle aurait sur les cycles magnétiques produits. Cela nous permettrait de mesurer l'impact sur la dynamo lors d'un changement dans la zone de cisaillement polaire (voir figure 3.4). De plus, les dynamos de type α^2 n'ont pas été explorées en profondeur avec notre modèle non cinématique. Ce type de dynamo est caractérisé par un champ magnétique régénéré uniquement par l'action inductive de la FEM sans aucune rotation différentielle. Ce type de dynamo est entre autres observé dans les coeurs planétaires. Étant donné que notre modèle est de type $\alpha^2\Omega$, il serait donc facile d'enlever la partie rotation différentielle pour voir si une dynamo en mode uniquement α^2 pourrait être produite. La différence avec une dynamo α^2 classique serait la possibilité pour le modèle de se bâtir une rotation différentielle à partir d'aucun profil statique de base. Un autre projet intéressant serait d'inclure au modèle dynamo non cinématique une source de bruit stochastique dans les composantes du tenseur α . Comme il a déjà été mentionné plus tôt, la routine d'extraction par DVS ne donne pas

seulement les valeurs des composantes du tenseur α mais également la déviation standard associée. La mécanique pour ajouter une composante aléatoire dans les composantes du tenseur α selon cette valeur de déviation standard est déjà implémentée dans le code dynamo. L'ajout de bruit stochastiques dans ce modèle pourrait d'ailleurs aider à briser le cycle observé dans la simulation à long terme (voir §4.7) où la présence d'un grand maxima est toujours suivie par un grand minima. Finalement, il serait également très intéressant de voir les différences produites dans la dynamo en changeant le profil de EULAG-HD pour celui de la rotation différentielle solaire provenant des inversions héliosismiques (voir par exemple le profil GONG à la figure 1.1). Bien qu'il n'y ait pas de façon de calculer les composantes du tenseur α dans le Soleil, il serait tout de même intrigant de voir quels champs magnétiques peuvent être générés et quelles seraient les fluctuations produites dans le profil de vitesse angulaire.

Cette thèse avait comme but d'approfondir certains mécanismes à l'origine de la dynamo solaire à travers les résultats de simulation EULAG-MHD. La caractérisation des coefficients de transport turbulent et leur insertion dans un modèle dynamo avec et sans rétroaction magnétique, nous ont permis de mieux comprendre la génération de cycles magnétiques dans un contexte solaire. Évidemment, ces modèles sont encore loin de caractériser l'ensemble des mécanismes physiques présents à toutes les échelles spatiales du Soleil. Néanmoins, cela nous a permis de générer des périodes de grands minima et maxima apériodiques en introduisant seulement la rétroaction magnétique sur l'écoulement azimutal comme mécanisme de saturation. L'étude de ces grands minima, dont la statistique présente plusieurs caractéristiques similaires avec celle des reconstructions de l'activité solaire, est un pas de plus vers une meilleure compréhension du climat spatial. L'intérêt pour la prédiction du climat spatial devient par ailleurs de plus en plus pertinent plus on s'approche de la planification des missions spatiales vers Mars. En pouvant prédire une période de forte activité magnétique solaire, il serait ainsi possible d'éviter aux astronautes d'être surexposés au climat solaire très actif et présentant un danger d'irradiation. De plus, il n'est toujours pas clair si les périodes de grands minima ont un impact sur le climat terrestre. En pouvant prédire ces périodes, il serait même possible de quantifier les impacts potentiels sur la Terre. Bien sûr, tout ceci englobe beaucoup plus que le sujet limité de cette thèse. Par contre, il n'est pas impossible

d’imaginer que les modèles globaux 3D-MHD seront très bientôt capables de reproduire des périodes de grands minima et maxima. En fait, bien qu’il est possible qu’un modèle global en génère par hasard, un modèle dynamo tel que décrit dans le chapitre 4 pourrait nous aider à trouver le bon ensemble de paramètres dans lequel EULAG-MHD pourrait générer des grands minima permettant ainsi d’en analyser l’origine au niveau de la dynamique des écoulements. La recherche de grands minima dans les résultats de simulation de EULAG-MHD en utilisant comme balise le modèle dynamo tel que décrit dans le chapitre 4 serait une des suites logiques des analyses présentées dans cette thèse.

Appendice A

Dérivation des termes de la force électromotrice turbulente

Il sera présenté dans cet appendice la dérivation en coordonnées sphériques de la force électromotrice turbulente lorsqu'elle est développée en série tensorielle en fonction d'un champ magnétique moyen axisymétrique ($\langle \mathbf{B} \rangle$). Dans le but d'implémenter les deux termes sources de l'effet- α tels qu'ils apparaissent dans les équations (3.5) et (3.6) dans le code numérique du modèle dynamo, nous devons dériver ces termes en fonction de B_ϕ , de A_ϕ et de leurs dérivées spatiales. Ces deux termes sont définis comme:

$$\mathcal{E}_\phi = \alpha_{\phi\phi} B_\phi + \alpha_{\phi\theta} B_\theta + \alpha_{\phi r} B_r , \quad (\text{A.1})$$

et

$$\nabla \times (\mathcal{E}_\theta + \mathcal{E}_r)_\phi = \frac{\mathcal{E}_\theta}{r} + \frac{\partial \mathcal{E}_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \theta} , \quad (\text{A.2})$$

où l'opérateur de moyenne sur toutes les composantes du champ magnétique a été enlevé par souci de clarté. À noter que pour le reste de la dérivation, $B_\phi = B$ et $A_\phi = A$. Puisque nous utilisons le potentiel vecteur A , nous avons que:

$$B_\theta = (\nabla \times A)_\theta = -\frac{A}{r} - \frac{\partial A}{\partial r} , \quad (\text{A.3})$$

et

$$B_r = (\nabla \times A)_r = \frac{\cot \theta A}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} . \quad (\text{A.4})$$

L'expression (A.1) est simple à dériver, il nous suffit d'utiliser directement la définition de B_θ et de B_r pour trouver l'expression en fonction de A , B et du tenseur α :

$$\mathcal{E}_\phi = \alpha_{\phi\phi} B - \alpha_{\phi\theta} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\alpha_{\phi\theta} A}{r} + \frac{\alpha_{\phi r}}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta \alpha_{\phi r} A}{r} . \quad (\text{A.5})$$

La forme finale implémentée dans le modèle dynamo en champ moyen doit être multipliée par r^2 et les dérivées latitudinales doivent être transformées pour être dans le même système de coordonnées que celui-ci. C'est-à-dire que nous devons effectuer le changement de variable suivant:

$$\mu = \cos \theta , \quad (\text{A.6})$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \mu} . \quad (\text{A.7})$$

On retrouve donc après ces transformations que la forme finale pour l'équation (A.1) telle qu'implémentée dans notre modèle dynamo (eq. (3.5)) en champ moyen est:

$$r^2 \mathcal{E}_\phi = r^2 \alpha_{\phi\phi} B - r^2 \alpha_{\phi\theta} \frac{\partial A}{\partial r} - r \alpha_{\phi\theta} A - r \sin \theta \alpha_{\phi r} \frac{\partial A}{\partial \mu} + r \cot \theta \alpha_{\phi r} A . \quad (\text{A.8})$$

La dérivation de l'expression (A.2) est plus longue à développer et sera par conséquent divisée par ses trois contributions au membre de droite. Encore une fois, chaque contribution est multipliée par r^2 . Le premier terme est défini comme:

$$r \mathcal{E}_\theta = r \alpha_{\theta r} B_r + r \alpha_{\theta\theta} B_\theta + r \alpha_{\theta\phi} B , \quad (\text{A.9})$$

et en remplaçant par les définitions de B_r et B_θ on trouve:

$$r \mathcal{E}_\theta = r \alpha_{\theta r} \left(\frac{\cot \theta A}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + r \alpha_{\theta\theta} \left(-\frac{A}{r} - \frac{\partial A}{\partial r} \right) + r \alpha_{\theta\phi} B . \quad (\text{A.10})$$

En faisant le changement de variable $\mu = \cos \theta$, on obtient finalement:

$$r\mathcal{E}_\theta = \cot \theta \alpha_{\theta r} A - \sin \theta \alpha_{\theta r} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \alpha_{\theta\theta} A - r \alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} + r \alpha_{\theta\phi} B . \quad (\text{A.11})$$

Le deuxième terme au membre de droite de l'équation (A.2) se décompose comme:

$$r^2 \frac{\partial \mathcal{E}_\theta}{\partial r} = r^2 \frac{\partial}{\partial r} (\alpha_{\theta r} B_r) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} (\alpha_{\theta\theta} B_\theta) + r^2 \frac{\partial \alpha_{\theta\phi}}{\partial r} B + r^2 \alpha_{\theta\phi} \frac{\partial B}{\partial r} , \quad (\text{A.12})$$

$$= r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\alpha_{\theta r} \left(\frac{\cot \theta A}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) \right] + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\alpha_{\theta\theta} \left(-\frac{A}{r} - \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right] + r^2 \frac{\partial \alpha_{\theta\phi}}{\partial r} B + r^2 \alpha_{\theta\phi} \frac{\partial B}{\partial r} . \quad (\text{A.13})$$

En réorganisant les termes et en dérivant, on obtient:

$$\begin{aligned} &= r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\alpha_{\theta r}}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + r \cot \theta \alpha_{\theta r} \frac{\partial A}{\partial r} + r \cot \theta \frac{\partial \alpha_{\theta r}}{\partial r} A - \cot \theta \alpha_{\theta r} A \\ &- r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) - r \frac{\partial \alpha_{\theta\theta}}{\partial r} A - r \alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} + \alpha_{\theta\theta} A + r^2 \frac{\partial \alpha_{\theta\phi}}{\partial r} B + r^2 \alpha_{\theta\phi} \frac{\partial B}{\partial r} . \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Finalement, en faisant le changement de variable de $\mu = \cos \theta$, on obtient pour le deuxième terme à l'équation (A.2):

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial \mathcal{E}_\theta}{\partial r} &= -r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{\alpha_{\theta r}}{r} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) + r \cot \theta \alpha_{\theta r} \frac{\partial A}{\partial r} + r \cot \theta \frac{\partial \alpha_{\theta r}}{\partial r} A - \cot \theta \alpha_{\theta r} A \\ &- r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) - r \frac{\partial \alpha_{\theta\theta}}{\partial r} A - r \alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} + \alpha_{\theta\theta} A + r^2 \frac{\partial \alpha_{\theta\phi}}{\partial r} B + r^2 \alpha_{\theta\phi} \frac{\partial B}{\partial r} . \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Le troisième terme au membre de droite de l'équation (A.2) se décompose comme:

$$\begin{aligned} -r \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \theta} &= -r \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\alpha_{rr} \left(\frac{\cot \theta A}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) \right] - r \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\alpha_{r\theta} \left(-\frac{A}{r} - \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right] \\ &- r \frac{\partial \alpha_{r\phi}}{\partial \theta} B - r \alpha_{r\phi} \frac{\partial B}{\partial \theta} . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

En développant les dérivées, on trouve:

$$\begin{aligned} &= -r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\alpha_{rr}}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - \cot \theta \alpha_{rr} \frac{\partial A}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial \alpha_{rr}}{\partial \theta} A + \frac{\alpha_{rr} A}{\sin^2 \theta} \\ &+ r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\alpha_{r\theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \alpha_{r\theta} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial \alpha_{r\theta}}{\partial \theta} A - r \frac{\partial \alpha_{r\phi}}{\partial \theta} B - r \alpha_{r\phi} \frac{\partial B}{\partial \theta} , \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

et finalement en faisant le changement de variable $\mu = \cos \theta$:

$$\begin{aligned}
-r \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sin \theta \frac{\alpha_{rr}}{r} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) + \mu \alpha_{rr} \frac{\partial A}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \alpha_{rr}}{\partial \mu} A + \frac{\alpha_{rr} A}{\sin^2 \theta} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\alpha_{r\theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \\
&\quad - \sin \theta \alpha_{r\theta} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \sin \theta \frac{\partial \alpha_{r\theta}}{\partial \mu} A + r \sin \theta \frac{\partial \alpha_{r\phi}}{\partial \mu} B + r \sin \theta \alpha_{r\phi} \frac{\partial B}{\partial \mu} .
\end{aligned} \tag{A.18}$$

La dernière étape consiste à transformer les termes impliquant des dérivées secondes ou croisées pour enlever les termes multiplicatifs devant eux. Cette manipulation doit être faite étant donnée la manière dont le code dynamo est implémenté. Pour ce faire, nous utilisons la dérivée en chaîne sur les quatre termes (éq. (A.15) et éq. (A.18)) en dérivées secondes telles que:

$$\begin{aligned}
-r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{\alpha_{\theta r}}{r} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{r^2 \alpha_{\theta r}}{r} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) + 2 \sin \theta \alpha_{\theta r} \frac{\partial A}{\partial \mu} , \\
-r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + 2r \alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} , \\
-r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sin \theta \frac{\alpha_{rr}}{r} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) &= -\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sin^2 \theta \alpha_{rr} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) - \mu \alpha_{rr} \frac{\partial A}{\partial \mu} , \\
-r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\alpha_{r\theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) &= -\frac{\partial}{\partial \mu} \left(r \sin \theta \alpha_{r\theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) - r \cot \theta \alpha_{r\theta} \frac{\partial A}{\partial r} .
\end{aligned} \tag{A.19}$$

En remplaçant ces expressions et en regroupant les trois termes ensemble pour obtenir l'expression complète de $\nabla \times (\mathcal{E}_\theta + \mathcal{E}_r)_\phi$, on trouve:

$$\begin{aligned}
r^2 \nabla \times (\mathcal{E}_\theta + \mathcal{E}_r)_\phi &= \cot \theta \alpha_{\theta r} A - \sin \theta \alpha_{\theta r} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \alpha_{\theta\theta} A - r \alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} + r \alpha_{\theta\phi} B \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta r \alpha_{\theta r} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) + 2 \sin \theta \alpha_{\theta r} \frac{\partial A}{\partial \mu} + r \cot \theta \alpha_{\theta r} \frac{\partial A}{\partial r} + r \cot \theta \frac{\partial \alpha_{\theta r}}{\partial r} A - \cot \theta \alpha_{\theta r} A \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) + 2r \alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} - r \frac{\partial \alpha_{\theta\theta}}{\partial r} A - r \alpha_{\theta\theta} \frac{\partial A}{\partial r} + \alpha_{\theta\theta} A + r^2 \frac{\partial \alpha_{\theta\phi}}{\partial r} B + r^2 \alpha_{\theta\phi} \frac{\partial B}{\partial r} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sin^2 \theta \alpha_{rr} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) - \mu \alpha_{rr} \frac{\partial A}{\partial \mu} + \mu \alpha_{rr} \frac{\partial A}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \alpha_{rr}}{\partial \mu} A + \frac{\alpha_{rr} A}{\sin^2 \theta} - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(r \sin \theta \alpha_{r\theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \\
&\quad - r \cot \theta \alpha_{r\theta} \frac{\partial A}{\partial r} - \sin \theta \alpha_{r\theta} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \sin \theta \frac{\partial \alpha_{r\theta}}{\partial \mu} A + r \sin \theta \frac{\partial \alpha_{r\phi}}{\partial \mu} B + r \sin \theta \alpha_{r\phi} \frac{\partial B}{\partial \mu} .
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Finalement, en réduisant certains termes ensembles, on trouve que le terme source dû à l'effet- α dans l'équation (3.6) se dérive comme:

$$\begin{aligned}
r^2 \nabla \times (\mathcal{E}_\theta + \mathcal{E}_r)_\phi &= \sin \theta \alpha_{\theta r} \frac{\partial A}{\partial \mu} + r \alpha_{\theta \phi} B \\
&- \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{r^2 \alpha_{\theta r}}{r} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) + r \cot \theta \alpha_{\theta r} \frac{\partial A}{\partial r} + r \cot \theta \frac{\partial \alpha_{\theta r}}{\partial r} A \\
&- \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \alpha_{\theta \theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) - r \frac{\partial \alpha_{\theta \theta}}{\partial r} A + r^2 \frac{\partial \alpha_{\theta \phi}}{\partial r} B + r^2 \alpha_{\theta \phi} \frac{\partial B}{\partial r} \\
&- \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sin^2 \theta \alpha_{r r} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) + \mu \frac{\partial \alpha_{r r}}{\partial \mu} A + \frac{\alpha_{r r} A}{\sin^2 \theta} - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(r \sin \theta \alpha_{r \theta} \frac{\partial A}{\partial r} \right) \\
&- r \cot \theta \alpha_{r \theta} \frac{\partial A}{\partial r} - \sin \theta \alpha_{r \theta} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \sin \theta \frac{\partial \alpha_{r \theta}}{\partial \mu} A + r \sin \theta \frac{\partial \alpha_{r \phi}}{\partial \mu} B + r \sin \theta \alpha_{r \phi} \frac{\partial B}{\partial \mu} .
\end{aligned} \tag{A.21}$$

A.1 Transformation latitudinale du tenseur α

Le code EULAG-MHD, étant donné ses origines de code atmosphérique, utilise un système de coordonnées colatitudinales. Les composantes du tenseur α doivent donc être transformées en coordonnées latitudinales avant de pouvoir les inclure dans le code dynamo en champ moyen. La table suivante énumère les composantes qui doivent changer de signe lors du changement de coordonnées ¹:

α_{rr}	$-\alpha_{r\theta}$	$\alpha_{r\phi}$
$-\alpha_{\theta r}$	$\alpha_{\theta\theta}$	$-\alpha_{\theta\phi}$
$\alpha_{\phi r}$	$-\alpha_{\phi\theta}$	$\alpha_{\phi\phi}$

TABLE A.1 – Table de transformation lors du changement de coordonnées colatitudinales vers latitudinales.

¹Par rapport aux composantes originales qui n'ont subi aucun changement de signe.

Appendice B

Dérivation de l'équation de vitesse angulaire

L'équation d'évolution pour Ω' telle que présentée dans le modèle dynamo non cinématique du chapitre 4 provient de la séparation d'échelle de l'équation de Navier-Stoke (voir éq. (1.16)) en version incompressible. Lorsque l'on fait ce changement d'échelle en remplaçant \mathbf{u} et \mathbf{B} par l'équation (2.1) on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} &= -\left((\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}') \cdot \nabla \right) (\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}') - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 (\langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}') \\ &+ \frac{1}{\mu_0 \rho} \left[(\nabla \times (\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}')) \times (\langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}') \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

En développant les termes on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} &= -(\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle - (\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla) \mathbf{u}' - (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle - (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' \\ &- \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle + \nu \nabla^2 \mathbf{u}' + \frac{1}{\mu_0 \rho} \left[(\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \times \langle \mathbf{B} \rangle \right. \\ &+ (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \times \mathbf{B}' + (\nabla \times \mathbf{B}') \times \langle \mathbf{B} \rangle + (\nabla \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}' \left. \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

En moyennant toute l'équation (B.2), on retrouve que tous les termes croisés en $\langle \mathbf{u} \rangle$ et \mathbf{u}' s'annulent et on retrouve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle}{\partial t} &= -(\langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{u} \rangle - (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \langle \mathbf{u} \rangle \\ &+ \frac{1}{\mu_0 \rho} [(\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \times \langle \mathbf{B} \rangle + (\nabla \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}'] . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Maintenant on veut séparer la composante moyenne de l'écoulement en une composante statique, c-à-d $\partial \mathbf{u}_s / \partial t = 0$, et une composante pouvant varier temporellement telle que:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_t , \quad (\text{B.4})$$

donnant ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} &= -((\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_t) \cdot \nabla) (\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_t) - (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' - \frac{1}{\rho} \nabla P \\ &+ \nu \nabla^2 (\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_t) + \frac{1}{\mu_0 \rho} [(\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \times \langle \mathbf{B} \rangle + (\nabla \times \mathbf{B}') \times \mathbf{B}'] . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En prenant seulement la composante azimutale et en regroupant ensemble les termes responsables du profil statique de la rotation différentielle entre eux on trouve finalement:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \rho} [(\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \times \langle \mathbf{B} \rangle] + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_t . \quad (\text{B.6})$$

Les composantes contribuant au profil statique de la rotation différentielle sont celles en \mathbf{u}_s . Pour le premier terme au membre de droite de l'équation (B.5), on suppose que la contribution de \mathbf{u}_t est petite en comparaison avec \mathbf{u}_s et est donc négligée. Finalement, le dernier terme au membre de droite faisant intervenir la partie fluctuante du champ magnétique peut également être mis comme contribution dans le profil statique de la rotation différentielle (Fan & Fang 2014). Finalement en changeant $u_t \hat{e}_\phi = r \sin \theta \Omega' \hat{e}_\phi$ on trouve:

$$\frac{\partial (r \sin \theta \Omega' \hat{e}_\phi)}{\partial t} = \frac{\Lambda_L}{\mu_0 \rho} [(\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \times \langle \mathbf{B} \rangle] + \text{Pm} \nabla^2 (r \sin \theta \Omega' \hat{e}_\phi) , \quad (\text{B.7})$$

où $\text{Pm} = \nu/\eta$ représente le ratio de la viscosité turbulente cinétique sur la diffusivité magnétique et $\Lambda = B_0^2/\Omega_0\eta_0\rho_0\mu_0$. Les quantités $\Omega_0, \eta_0, \rho_0, \mu_0$ représentent la grandeur caractéristique de chacune des variables physiques correspondantes. Ces deux nombres dynamos proviennent de l'adimensionalisation de l'équation en fonction du temps de diffusion $\tau = R^2/\eta_0$. Pour plus de détails voir §4.3.2.

En dérivant le premier terme au membre de droite de l'équation (B.7) en sachant que:

$$\mathbf{A} = A(r, \theta, t)\hat{e}_\phi \quad \mathbf{B} = B(r, \theta, t)\hat{e}_\phi \quad \text{et que} \quad \langle \mathbf{B} \rangle = \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad (\text{B.8})$$

on trouve:

$$\begin{aligned} &= \frac{\Lambda}{\mu_0\rho} \left[(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} \right. \\ &\quad \left. + (\nabla \times \mathbf{B}) \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right]_\phi. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Or $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}$ puisque \mathbf{A} est en direction azimutale et ne dépend pas explicitement de ϕ . De plus, nous pouvons choisir de nous mettre dans la gauge de Coulomb où $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ par définition. De l'expression (B.9), on retrouve que le seul terme en direction \hat{e}_ϕ est le troisième. Si on explicite ce terme, on trouve en direction azimutale:

$$= \frac{\Lambda}{\mu_0\rho} \left[(\nabla \times B\hat{e}_\phi)_r \cdot (\nabla \times A\hat{e}_\phi)_\theta - (\nabla \times B\hat{e}_\phi)_\theta \cdot (\nabla \times A\hat{e}_\phi)_r \right]. \quad (\text{B.10})$$

En coordonnées sphériques, on obtient:

$$= \frac{\Lambda}{\mu_0\rho} \left[-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B) \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A) \right) \right. \quad (\text{B.11})$$

$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta B) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A) \right) \right], \quad (\text{B.12})$$

et lorsque l'on explicite les dérivées, on trouve:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Lambda}{\mu_0 \rho} \left[-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial B}{\partial \theta} + \cos \theta B \right) \left(r \sin \theta \frac{\partial A}{\partial r} + \sin \theta A \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(r \sin \theta \frac{\partial B}{\partial r} + \sin \theta B \right) \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} + \cos \theta A \right) \right]. \tag{B.13}
\end{aligned}$$

Finalement, en regroupant les termes et lorsque l'on fait le changement de variable $\mu = \cos \theta$, l'expression (B.9) se réécrit comme:

$$= \frac{\Lambda}{\mu_0 \rho} \left[\frac{\sin \theta}{r} \left(\frac{\partial B}{\partial \mu} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) + \frac{\sin \theta}{r^2} \left(A \frac{\partial B}{\partial \mu} - B \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \left(A \frac{\partial B}{\partial r} - B \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right]. \tag{B.14}$$

B.1 Dérivation du terme de diffusion

En développant seulement le dernier terme au membre de droite de l'eq. (B.7) on obtient en géométrie sphérique:

$$\text{Pm} \nabla^2 (r \sin \theta \Omega' \hat{e}_\phi) = \text{Pm} \left[\nabla^2 (r \sin \theta \Omega') - \frac{\Omega'}{r \sin \theta} \right] \hat{e}_\phi. \tag{B.15}$$

La composante azimutale du Laplacien peut ensuite se développer comme:

$$= \text{Pm} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \Omega') \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \Omega') \right) - \frac{\Omega'}{r \sin \theta} \right]. \tag{B.16}$$

En dérivant une première fois, l'équation (B.16) peut se réécrire comme:

$$\begin{aligned}
&= \text{Pm} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta (\Omega' + r \frac{\partial \Omega'}{\partial r}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \sin \theta (\cos \theta \Omega' + \sin \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta}) \right) - \frac{\Omega'}{r \sin \theta} \right], \tag{B.17}
\end{aligned}$$

et lorsque dérivée une seconde fois comme:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{Pm}}{r^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \sin \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial r} \right) + 2r \sin \theta \Omega' + r^2 \sin \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial r} \right) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \sin^2 \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta} \right) + r \cos(2\theta) \Omega' + r \sin \theta \cos \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta} \right) - r \frac{\Omega'}{\sin \theta} \right]. \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

En réorganisant les termes semblables, on peut réécrire l'équation (B.18) comme:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{Pm}}{r^2} \left[\Omega' \left(2r \sin \theta + \frac{r \cos(2\theta)}{\sin \theta} - \frac{r}{\sin \theta} \right) + \frac{\partial \Omega'}{\partial r} (r^2 \sin \theta) + \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta} (r \cos \theta) \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \sin \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \sin^2 \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

Or, on trouve que:

$$2r \sin \theta + \frac{r \cos(2\theta)}{\sin \theta} - \frac{r}{\sin \theta} = 0. \quad (\text{B.20})$$

Le premier terme au membre de droite décrivant la partie diffusive de l'équation (B.7) peut finalement se réécrire comme:

$$= \frac{\text{Pm}}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \sin \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(r \sin^3 \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial \Omega'}{\partial r} (r^2 \sin \theta) - \frac{\partial \Omega'}{\partial \mu} (r \sin \theta \cos \theta) \right], \quad (\text{B.21})$$

lorsque l'on applique le changement de variable $\mu = \cos \theta$. Finalement, en rassemblant les termes (B.14) et (B.21) ensemble et que l'on multiplie le tout par r^2 , on trouve:

$$\begin{aligned}
r^3 \sin \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial t} &= \text{Pm} \left[\frac{\partial \Omega'}{\partial r} (r^2 \sin \theta) - \frac{\partial \Omega'}{\partial \mu} (r \sin \theta \cos \theta) \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \sin \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(r \sin^3 \theta \frac{\partial \Omega'}{\partial \mu} \right) \right] \\
&+ \frac{\Lambda}{\mu_0 \rho} \left[r \sin \theta \left(\frac{\partial B}{\partial \mu} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) \right. \\
&+ \left. \sin \theta \left(A \frac{\partial B}{\partial \mu} - B \frac{\partial A}{\partial \mu} \right) + \frac{r \cos \theta}{\sin \theta} \left(A \frac{\partial B}{\partial r} - B \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right]. \quad (\text{B.22})
\end{aligned}$$

Liste de Références

- Arlt, R., & Fröhlich, H.-E. 2012, *A&A*, 543, A7
- Augustson, K., Brun, A. S., Miesch, M., & Toomre, J. 2015, *ApJ*, 809, 149
- Babcock, H. W. 1961, *ApJ*, 133, 572
- Baliunas, S. L., Donahue, R. A., Soon, W. H., et al. 1995, *ApJ*, 438, 269
- Bazilevskaya, G., Broomhall, A.-M., Elsworth, Y., & Nakariakov, V. M. 2014, *Space Sci. Rev.*, 186, 359
- Beaudoin, P., Charbonneau, P., Racine, E., & Smolarkiewicz, P. K. 2013, *Sol. Phys.*, 282, 335
- Beer, J., Tobias, S., & Weiss, N. 1998, *Sol. Phys.*, 181, 237
- Benevolenskaya, E. E. 1995, *Sol. Phys.*, 161, 1
- . 1998, *ApJ*, 509, L49
- Brandenburg, A. 2001, *ApJ*, 550, 824
- Brandenburg, A., Rädler, K.-H., Rheinhardt, M., & Subramanian, K. 2008, *ApJ*, 687, L49
- Brandenburg, A., & Sokoloff, D. 2002, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 96, 319
- Brandenburg, A., & Subramanian, K. 2005, *Phys. Rep.*, 417, 1
- Brooke, J., Moss, D., & Phillips, A. 2002, *A&A*, 395, 1013
- Broomhall, A.-M., Chaplin, W. J., Elsworth, Y., Fletcher, S. T., & New, R. 2009, *ApJ*, 700, L162
- Broomhall, A.-M., Chaplin, W. J., Elsworth, Y., & Simoniello, R. 2012, *MNRAS*, 420, 1405
- Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2010, *ApJ*, 711, 424

- Brown, B. P., Miesch, M. S., Browning, M. K., Brun, A. S., & Toomre, J. 2011, *ApJ*, 731, 69
- Bushby, P. J. 2006, *MNRAS*, 371, 772
- Casas, R., Vaquero, J. M., & Vazquez, M. 2006, *Sol. Phys.*, 234, 379
- Cattaneo, F., & Hughes, D. W. 1996, *Phys. Rev. E*, 54, 4532
- Charbonneau, P. 2010, *Liv. Rev. Sol. Phys.*, 7
- . 2013, *Solar and Stellar Dynamos: Saas-Fee Advanced Course 39 Swiss Society for Astrophysics and Astronomy, Saas-Fee Advanced Courses, Volume 39*. ISBN 978-3-642-32092-7. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, 39
- . 2014, *ARA&A*, 52, 251
- Charbonneau, P., & MacGregor, K. B. 2001, *ApJ*, 559, 1094
- Charbonneau, P., & Smolarkiewicz, P. K. 2013, *Science*, 340, 42
- Choudhuri, A. R. 1990, *ApJ*, 355, 733
- . 1992, *A&A*, 253, 277
- Choudhuri, A. R., & Karak, B. B. 2012, *Physical Review Letters*, 109, 171103
- Clayton, D. D. 1968, *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis*
- Clette, F., & Lefèvre, L. 2015, *ArXiv e-prints*
- Clette, F., Svalgaard, L., Vaquero, J. M., & Cliver, E. W. 2014, *Space Sci. Rev.*, 186, 35
- Cliver, E. W., Bounar, K. H., & Boriakoff, V. 1998, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 140, Synoptic Solar Physics*, ed. K. S. Balasubramaniam, J. Harvey, & D. Rabin, 437
- Cossette, J. F., Charbonneau, P., Smolarkiewicz, P. K., & Rast, M. 2016, Submitted to *ApJ*
- Cossette, J.-F., Charbonneau, P., & Smolarkiewicz, P. K. 2013, *ApJ*, 777, L29
- D’Alessi, L., Vecchio, A., Carbone, V., Laurenza, M., & Storini, M. 2013, *Journal of Modern Physics*, 4, 49
- Damon, P. E., & Sonett, C. P. 1991, in *The Sun in Time*, ed. C. P. Sonett, M. S. Giampapa, & M. S. Matthews, 360–388

- Dikpati, M., & Charbonneau, P. 1999, *ApJ*, 518, 508
- Dikpati, M., Gilman, P. A., & de Toma, G. 2008, *ApJ*, 673, L99
- Duarte, L. D. V., Wicht, J., Browning, M. K., & Gastine, T. 2016, *MNRAS*, 456, 1708
- Eddy, J. A. 1976, *Science*, 192, 1189
- Eddy, J. A., Gilman, P. A., & Trotter, D. E. 1976, *Sol. Phys.*, 46, 3
- Fan, Y. 2009, *Living Reviews in Solar Physics*, 6
- Fan, Y., & Fang, F. 2014, *ApJ*, 789, 35
- Field, G. B., & Blackman, E. G. 2002, *ApJ*, 572, 685
- Fletcher, S. T., Broomhall, A.-M., Salabert, D., et al. 2010, *ApJ*, 718, L19
- Frescura, F. A. M., Engelbrecht, C. A., & Frank, B. S. 2007, *ArXiv e-prints*
- Ghizaru, M., Charbonneau, P., & Smolarkiewicz, P. K. 2010, *ApJ*, 715, L133
- Gilman, P. A. 1969a, *Sol. Phys.*, 8, 316
- . 1969b, *Sol. Phys.*, 9, 3
- . 1983, *ApJS*, 53, 243
- Gilman, P. A., & Rempel, M. 2005, *ApJ*, 630, 615
- Glatzmaier, G. A. 1985, *ApJ*, 291, 300
- Guerrero, G., Dikpati, M., & de Gouveia Dal Pino, E. M. 2009, *ApJ*, 701, 725
- Guerrero, G., Smolarkiewicz, P. K., de Gouveia Dal Pino, E. M., Kosovichev, A. G., & Mansour, N. N. 2016, *ApJ*, 819, 104
- Hale, G. E., Ellerman, F., Nicholson, S. B., & Joy, A. H. 1919, *ApJ*, 49, 153
- Hathaway, D. H., & Rightmire, L. 2010, *Science*, 327, 1350
- Hathaway, D. H., Upton, L., & Colegrove, O. 2013, *Science*, 342, 1217
- Hathaway, D. H., Wilson, R. M., & Reichmann, E. J. 2002, *Sol. Phys.*, 211, 357
- Hotta, H., Rempel, M., & Yokoyama, T. 2016, *Science*, 351, 1427
- Howe, R. 2009, *Living Reviews in Solar Physics*, 6
- Howe, R., Christensen-Dalsgaard, J., Hill, F., et al. 2000, *Science*, 287, 2456

- Hoyng, P. 1993, *A&A*, 272, 321
- Hubbard, A., & Brandenburg, A. 2012, *ApJ*, 748, 51
- Käpylä, M. J., Käpylä, P. J., Olsper, N., et al. 2016, *A&A*, 589, A56
- Käpylä, P. J., Korpi, M. J., & Brandenburg, A. 2008, *A&A*, 491, 353
- . 2009, *A&A*, 500, 633
- Käpylä, P. J., Korpi, M. J., Brandenburg, A., Mitra, D., & Tavakol, R. 2010, *Astronom. Nach.*, 331, 73
- Käpylä, P. J., Mantere, M. J., & Brandenburg, A. 2012, *ApJ*, 755, L22
- Käpylä, P. J., Mantere, M. J., Cole, E., Warnecke, J., & Brandenburg, A. 2013, *ApJ*, 778, 41
- Karak, B. B., & Choudhuri, A. R. 2011, *MNRAS*, 410, 1503
- Karak, B. B., Rheinhardt, M., Brandenburg, A., Käpylä, P. J., & Käpylä, M. J. 2014, *ApJ*, 795, 16
- Kitchatinov, L. L., & Olemskoy, S. V. 2012, *Sol. Phys.*, 276, 3
- Knobloch, E., Tobias, S. M., & Weiss, N. O. 1998, *MNRAS*, 297, 1123
- Krause, F., & Rädler, K.-H. 1980, *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory* (Oxford, Pergamon Press, Ltd.)
- Krivova, N. A., & Solanki, S. K. 2002, *A&A*, 394, 701
- Kuhn, J. R., Armstrong, J. D., Bush, R. I., & Scherrer, P. 2000, *Nature*, 405, 544
- Küker, M., Arlt, R., & Rüdiger, G. 1999, *A&A*, 343, 977
- Laurenza, M., Vecchio, A., Storini, M., & Carbone, V. 2012, *ApJ*, 749, 167
- Lawson, N., Strugarek, A., & Charbonneau, P. 2015, *ApJ*, 813, 95
- Leighton, R. B. 1964, *ApJ*, 140, 1547
- . 1969, *ApJ*, 156, 1
- Lockwood, M., Owens, M. J., Barnard, L., & Usoskin, I. G. 2016, *ApJ*, 824, 54
- Malkus, W. V. R., & Proctor, M. R. E. 1975, *J. Fluid Mech.*, 67, 417
- Masada, Y., Yamada, K., & Kageyama, A. 2013, *ApJ*, 778, 11

- Metcalfe, T. S., Basu, S., Henry, T. J., et al. 2010, *ApJ*, 723, L213
- Meunier, N., Nesme-Ribes, E., & Sokolov, D. D. 1996, *Astronomy Reports*, 40, 415
- Miesch, M. S. 2007, *ApJ*, 658, L131
- Moffatt, H. K. 1978, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids* (Cambridge University Press, 1978. 353 p., Cambridge)
- Moreno-Insertis, F. 1997, *Mem. Soc. Astron. Italiana*, 68, 429
- Morgan, W. W., & Keenan, P. C. 1973, *ARA&A*, 11, 29
- Moss, D., Brandenburg, A., Tavakol, R., & Tuominen, I. 1992, *A&A*, 265, 843
- Moss, D., Brandenburg, A., & Tuominen, I. 1991, *A&A*, 247, 576
- Moss, D., Sokoloff, D., Usoskin, I., & Tutubalin, V. 2008, *Sol. Phys.*, 250, 221
- Muñoz-Jaramillo, A., Nandy, D., & Martens, P. C. H. 2011, *ApJ*, 727, L23
- Mursula, K., Zieger, B., & Vilppola, J. H. 2003, *Sol. Phys.*, 212, 201
- Nelson, N. J., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2013, *ApJ*, 762, 73
- Nelson, N. J., Brown, B. P., Sacha Brun, A., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2014, *Sol. Phys.*, 289, 441
- Nigro, G., Carbone, V., & Primavera, L. 2013, *MNRAS*, 433, 2206
- Norton, A. A., & Gallagher, J. C. 2010, *Sol. Phys.*, 261, 193
- Olemskoy, S. V., & Kitchatinov, L. L. 2013, *ApJ*, 777, 71
- Ossendrijver, A. J. H., & Hoyng, P. 1996, *A&A*, 313, 959
- Ossendrijver, M. 2003, *A&A Rev.*, 11, 287
- Parker, E. N. 1955, *ApJ*, 121, 491
- Passos, D., & Charbonneau, P. 2014, *A&A*, 568, A113
- Passos, D., Nandy, D., Hazra, S., & Lopes, I. 2014, *A&A*, 563, A18
- Penza, V., Pietropaolo, E., & Livingston, W. 2006, *A&A*, 454, 349
- Peristikh, A. N., & Damon, P. E. 2003, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, 108, 1003

- Petrovay, K. 2010, *Liv. Rev. Sol. Phys.*, 7, 6
- Pipin, V. V., & Proctor, M. R. E. 2008, *MNRAS*, 388, 367
- Pipin, V. V., & Sokoloff, D. D. 2011, *Phys. Scr*, 84, 065903
- Pouquet, A., Frisch, U., & Leorat, J. 1976, *J. Fluid Mech.*, 77, 321
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992, *Numerical recipes in C. The art of scientific computing* (Cambridge: University Press, c1992, 2nd ed., Cambridge)
- Prusa, J. M., & Smolarkiewicz, P. K. 2003, *Journal of Computational Physics*, 190, 601
- Prusa, J. M., Smolarkiewicz, P. K., & Wyszogrodzki, A. A. 2008, *Computers and Fluids*, 37, 1193
- Racine, É., Charbonneau, P., Ghizaru, M., Bouchat, A., & Smolarkiewicz, P. K. 2011, *ApJ*, 735, 46
- Rädler, K.-H. 1980, *Astronom. Nach.*, 301, 101
- Rädler, K.-H. 2000, in *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, Vol. 556, *From the Sun to the Great Attractor*, ed. D. Page & J. G. Hirsch (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg), 101–172
- Rädler, K.-H., & Stepanov, R. 2006, *Phys. Rev. E*, 73, 056311
- Rajaguru, S. P., & Antia, H. M. 2015, *ApJ*, 813, 114
- Rast, M. P., Ortiz, A., & Meisner, R. W. 2008, *ApJ*, 673, 1209
- Ribes, J. C., & Nesme-Ribes, E. 1993, *A&A*, 276, 549
- Rogachevskii, I., & Kleeorin, N. 2003, *Phys. Rev. E*, 68, 036301
- Rüdiger, G., Kitchatinov, L. L., Küker, M., & Schultz, M. 1994, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 78, 247
- Ruediger, G., & Brandenburg, A. 1995, *A&A*, 296, 557
- Sanchez, S., Fournier, A., & Aubert, J. 2014, *The Astrophysical Journal*, 781, 8
- Schrijver, C. J., & Siscoe, G. L. 2009, *Heliophysics: Plasma Physics of the Local Cosmos* (Cambridge University Press, Cambridge)

- Schrinner, M., Rädler, K.-H., Schmitt, D., Rheinhardt, M., & Christensen, U. R. 2007, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 101, 81
- Simard, C., Charbonneau, P., & Bouchat, A. 2013, *ApJ*, 768, 16
- Simard, C., Charbonneau, P., & Dube, C. 2016, ArXiv e-prints
- Simitev, R. D., Kosovichev, A. G., & Busse, F. H. 2015, *ApJ*, 810, 80
- Simoniello, R., Finsterle, W., Salabert, D., et al. 2012, *A&A*, 539, A135
- Simoniello, R., Jain, K., Tripathy, S. C., et al. 2013a, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 478, *Fifty Years of Seismology of the Sun and Stars*, ed. K. Jain, S. C. Tripathy, F. Hill, J. W. Leibacher, & A. A. Pevtsov, 167
- Simoniello, R., Jain, K., Tripathy, S. C., et al. 2013b, *ApJ*, 765, 100
- Smolarkiewicz, P. K., & Charbonneau, P. 2013, *Journal of Computational Physics*, 236, 608
- Sokoloff, D., & Nesme-Ribes, E. 1994, *A&A*, 288, 293
- Steenbeck, M., Krause, F., & Rädler, K.-H. 1966, *Zeitschrift Naturforschung Teil A*, 21, 369
- Steinhilber, F., Abreu, J. A., Beer, J., et al. 2012, *Proceedings of the National Academy of Science*, 109, 5967
- Strugarek, A., Beaudoin, P., Brun, A. S., et al. 2016a, *Advances in Space Research*, 58, 1538
- Strugarek, A., Beaudoin, P., Charbonneau, P., & Brun, A. S. Nascimento, J. D. 2016b, *Science*
- Tobias, S. M. 1996a, *ApJ*, 467, 870
- . 1996b, *A&A*, 307, L21
- . 1997, *A&A*, 322, 1007
- . 2002, *Astronomische Nachrichten*, 323, 417
- Ulrich, R. K., & Tran, T. 2013, *ApJ*, 768, 189
- Usoskin, I. G. 2013, *Living Reviews in Solar Physics*, 10, 1
- Usoskin, I. G., Gallet, Y., Lopes, F., Kovaltsov, G. A., & Hulot, G. 2016, *A&A*, 587, A150
- Usoskin, I. G., & Kovaltsov, G. A. 2004, *Sol. Phys.*, 224, 37
- Usoskin, I. G., Sokoloff, D., & Moss, D. 2009, *Sol. Phys.*, 254, 345

- Usoskin, I. G., Solanki, S. K., & Kovaltsov, G. A. 2007, *A&A*, 471, 301
- Usoskin, I. G., Solanki, S. K., & Kovaltsov, G. A. 2012, in *IAU Symposium*, Vol. 286, *Comparative Magnetic Minima: Characterizing Quiet Times in the Sun and Stars*, ed. C. H. Mandrini & D. F. Webb, 372–382
- Usoskin, I. G., Hulot, G., Gallet, Y., et al. 2014, *A&A*, 562, L10
- Usoskin, I. G., Arlt, R., Asvestari, E., et al. 2015, *A&A*, 581, A95
- Vainshtein, S. I., & Cattaneo, F. 1992, *ApJ*, 393, 165
- Vasiliev, S. S., & Dergachev, V. A. 2002, *Annales Geophysicae*, 20, 115
- Vecchio, A., & Carbone, V. 2008, *ApJ*, 683, 536
- Waldmeier, M. 1935, *Astron. Mitt. Eidgen. Sternw*, 14, 105
- Warnecke, J., Rheinhardt, M., Käpylä, P. J., Käpylä, M. J., & Brandenburg, A. 2016, *ArXiv e-prints*
- Weiss, N. 2010, *Astron. Geophys.*, 51, 9
- Yang, S., Odah, H., & Shaw, J. 2000, *Geophysical Journal International*, 140, 158
- Zaqarashvili, T. V., Carbonell, M., Oliver, R., & Ballester, J. L. 2010, *ApJ*, 724, L95
- Zhao, J., Bogart, R. S., Kosovichev, A. G., Duvall, Jr., T. L., & Hartlep, T. 2013, *ApJ*, 774, L29
- Zolotova, N. V., & Ponyavin, D. I. 2015, *ApJ*, 800, 42