Université de Montréal

Groupe et supergroupe conformes de l'espace-temps et contractions

par
Valérie Hudon

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

Mai, 2005

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Groupe et supergroupe conformes de l'espace-temps et contractions

présenté par:

Valérie Hudon

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Alfred Michel Grundland,	président-rapporteur
Véronique Hussin,	directrice de recherche
Manu Paranjape,	membre du jury

Mémoire accepté le: 14/06/05

RÉSUMÉ

Nous décrivons le groupe conforme sous ses représentations $SO(4,2)$ et $SU(2,2)$ et tentons d'établir un lien entre les deux en étudiant les relations entre leurs sous-groupes. Puis, nous définissons une méthode de contraction des algèbres sous leurs représentations matricielles. Nous appliquons cette méthode à l'algèbre du groupe conforme avec succès pour $so(4,2)$ et nous tentons de la transporter vers le cas $su(2,2)$ par différentes approches. Nous donnons aussi une méthode pour contracter une algèbre en utilisant seulement ses relations de commutation. Ensuite, nous donnons une forme pour les superalgèbres unitaires et nous construisons la superalgèbre conforme avec des générateurs physiques. Nous appliquons la méthode de contraction par les commutateurs à la superalgèbre conforme. Enfin, nous présentons brièvement des applications possibles de la supersymétrie en physique.

Mots-clés : Physique mathématique, groupes et algèbres de Lie, groupe conforme, supersymétries, supergroupe conforme, processus de contraction.

ABSTRACT

We describe the conformal group under its $SO(4,2)$ and $SU(2,2)$ representations and try to establish a relation between them by using the connections between their subgroups. Then, we define a method to contract algebras under their matricial representations. We apply this method to the algebra of the conformal group with success for $so(4,2)$ and we carry it to the $su(2,2)$ case by different approachs. We also present a method to contract an algebra using only its commutation relations. Next, we give a pattern for the unitary superalgebras and we construct the conformal superalgebras with physical generators. We apply the contraction method by the commutators to the conformal superalgebra. Finally, we present briefly some possible applications of supersymmetry in physics.

Keywords : Mathematical physics, Lie groups and algebras, conformal group, supersymmetries, superconformal group, contraction process.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

À ma mère

REMERCIEMENTS

J'aimerais d'emblée remercier ma directrice, Prof. Véronique Hussin, pour la proposition de projet d'abord, mais aussi pour son aide, son soutien, ses idées et ses commentaires constructifs.

Je suis également reconnaissante à ma famille ainsi qu'à mon copain, Xavier, pour tout ; leur présence, leur appui, leurs encouragements.

Merci aussi à mes collègues et amis pour les discussions constructives et divertissantes de même que l'aide dans les cours.

Enfin, j'aimerais souligner le soutien financier du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada par une *Bourse d'études supérieures du CRSNG*.

Introduction

En physique, plusieurs problèmes trouvent leurs sources et leurs solutions dans un pan ou un autre de la théorie des groupes. En particulier, les structures de groupe et d'algèbre de Lie sont utilisées dans plusieurs domaines comme la physique théorique des particules pour étudier par exemple les symétries sous rotation de particules [10], ou encore dans l'étude des équations différentielles pour étudier leur invariance sous symétrie [27].

En tant que groupe d'invariance des équations de champs sans masse, le groupe conforme est très présent dans les théories physiques. En fait, le groupe conforme contient les transformations de Lorentz (rotations et transformations pures (ou *boosts*)), les translations, les dilatations et les transformations conformes [2,5,6] dans l'espace de Minkowski.

Il est possible d'agrandir toutes les structures de groupe et d'algèbre pour passer au cas supersymétrique. Pour ce faire, il faut introduire un espace vectoriel de degré 2 afin d'obtenir une graduation [10,13]. Les superalgèbres sont utilisées entre autres dans la physique des particules pour mélanger les bosons (partie paire) et les fermions (partie impaire) dans une même représentation [14]. Elles sont également utiles dans la théorie des cordes et des supercordes [10,30]. En fait, les théories supersymétriques pourraient unir les forces électrofaible et forte avec la gravité [23]. De là l'intérêt qu'elles suscitent depuis quelques années.

D'autre part, il existe des groupes relativistes et d'autres non. Le groupe conforme est relativiste tout comme celui de Poincaré alors que le groupe de Galilée ne l'est pas. Il est possible de ramener les théories et les groupes relativistes à leurs équivalents non-relativistes par un processus que l'on appelle contraction [1,5,21]. En général, la contraction permet de transformer une algèbre par un mécanisme de limite sur des paramètres introduits dans la structure pour lui donner plus de degrés de liberté. Dans le cas particulier des théories relativistes, nous faisons tendre la vitesse de la lumière vers l'infini pour obtenir le cas non-relativiste. Notons que le processus de contraction peut aussi s'appliquer aux superalgèbres [20].

Nous nous intéresserons donc au groupe conforme et à sa version supersymétrique. Il est possible de donner l'algèbre du groupe conforme sous deux représentations matricielles, soit $so(4,2)$ dans le cas réel et $su(2,2)$ dans le cas complexe [6]. Nous analyserons leurs sous-groupes de même que les homomorphismes qui les relient [4]. Nous nous proposons également de voir sur quelle structure la contraction porte le groupe conforme.

Puis, nous examinerons le formalisme supersymétrique, en particulier la superalgèbre conforme et nous regarderons ce qu'elle devient sous la contraction. Pour finir, nous exposerons quelques applications physiques possibles.

Ce travail est donc divisé comme suit.

Dans le chapitre 1, nous présentons des définitions de base et des éléments théoriques concernant les groupes et algèbres de Lie, le processus de contraction et le formalisme supersymétrique. En plus, nous exposons quelques groupes reliés à la physique, en particulier les groupe et supergroupe conformes et nous donnons leurs générateurs sous forme différentielle.

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons à différentes représentations du groupe conforme, soit $SO(4,2)$ qui est orthogonale et $SU(2,2)$ qui est unitaire. Nous donnons une base physique de leurs générateurs sous forme matricielle et les relations de commutation qui les caractérisent. Après, nous étudions le lien entre deux sous-groupes de $SO(4,2)$, $SO(3,1)$ et $SO(2,2)$, de même que leurs relations respectives avec les groupes unitaires $SL(2,\mathbb{C})$ et $SU(1,1)\otimes SU(1,1)$. Nous allons utiliser ces homomorphismes de sous-groupes afin de tenter d'établir un lien algorithmique entre les deux représentations du groupe conforme.

Puis, dans le chapitre 3, nous présentons quelques exemples d'applications de la contraction et nous établissons une méthode pour effectuer la contraction. Nous l'appliquons ensuite aux deux représentations de l'algèbre du groupe conforme. Le cas $so(4,2)$ se termine avec succès, nous obtenons bien une algèbre contractée contenant le groupe non-relativiste de Galilée. Cependant, le cas $su(2,2)$ se fait avec plus de difficultés et nous force à adapter notre méthode afin de donner plus de libertés aux matrices. Nous terminons en présentant une autre méthode de contraction qui utilise seulement les relations de commutation sans égard à la représentation utilisée et nous l'appliquons à l'algèbre du groupe conforme.

Dans le chapitre 4, nous introduisons une forme générale matricielle pour les superalgèbres unitaires. Nous bâtissons une base physique pour le cas particulier de la superalgèbre conforme et donnons les relations de commutation qui la déterminent. Puis, nous utilisons ces relations de commutation pour effectuer la contraction de la superalgèbre conforme en nous inspirant de la contraction de l'algèbre conforme.

Enfin, dans le chapitre 5, nous considérons brièvement quelques applications du formalisme supersymétrique en physique, soit les superchamps, les supercordes et la supergravité.

Chapitre 1

Définitions et éléments théoriques

Nous allons débuter par la présentation des éléments théoriques nécessaires pour la suite. Nous donnons d'abord les propriétés des groupes et algèbres de Lie, puis, nous discutons du processus de contraction. Ensuite, nous présentons le formalisme supersymétrique et les groupes et supergroupes que l'on retrouve en physique.

1.1 Groupes et algèbres de Lie

Nous discutons d'abord des structures générales de groupe et d'algèbre et de leurs propriétes. Puis, nous présentons les groupes de Lie, leur structure de variété différentiable et leur algèbre comme plan tangent. Enfin, nous établissons le lien entre les groupes et les algèbres de Lie à l'aide de l'application exponentielle.

1.1.1 Groupes et algèbres

Définition 1.1 *Un* groupe G *est un ensemble qui possède une loi de multiplication* $\circ$ *ayant les propriétés suivantes* [15] *:*

- *fermeture :* $\forall g,\ h \in G,\ g \circ h \in G$ *;*
- *associativité : Si* $g,\ h,\ k \in G$*, alors* $g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$ *;*

- *élément neutre :* $\forall g \in G$, $\exists!\ e \in G$ *tel que* $e \circ g = g = g \circ e$ *;*
- *inverse :* $\forall g \in G$, $\exists!\ g^{-1}$ *tel que* $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$ *.*

Un sous-groupe est un sous-ensemble d'un groupe qui possède les mêmes propriétés que le groupe. Signalons que, par la suite et pour simplifier l'écriture, le produit sera noté de la façon suivante : $g \circ h \equiv gh$.

Il est possible d'ajouter des propriétés au groupe pour en faire un groupe particulier. Voici quelques exemples de groupes de matrices particuliers qui vont nous intéresser :

-Orthogonal Un groupe réel est dit *orthogonal* s'il respecte la relation :

$$G^t H G = H, \tag{1.1.1}$$

où G est une matrice carrée réelle, t est pour la transposée de cette matrice et H est une matrice symétrique, $H^t = H$ (dont nous reparlerons à la section 1.1.4.1).

-Unitaire Un groupe complexe est dit *unitaire* s'il respecte la relation :

$$G^\dagger H' G = H', \tag{1.1.2}$$

où G est une matrice carrée complexe, $\dagger$ est pour la transposée conjuguée de cette matrice et H' est une matrice hermitienne, $H'^\dagger = H'$ (dont nous reparlerons aussi à la section 1.1.4.1).

-Spécial Un groupe est dit *spécial* si le déterminant de la matrice qui le représente est égal à 1.

Définition 1.2 *Un* espace vectoriel V *sur un corps* K *(*$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) est un ensemble d'éléments possédant une loi interne d'addition ainsi qu'une loi externe de multiplication. Il obéit à quelques lois bien connues* [15] *:*

- *commutativité :* $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$, $\forall v_1, v_2 \in V$ *;*
- *associativité :* $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$, $v_1, v_2, v_3 \in V$ *et* $c(dv) = (cd)v$, $v \in V$, $c, d \in K$ *;*
- *neutre pour l'addition :* $\exists!\ 0 \in V$, *tel que* $0 + v = v + 0 = v$, $\forall v \in V$ *;*
- *opposé :* $v + (-1)v = 0$, $(-1)v$ *noté* $-v$ *est l'opposé de* v *;*
- *unité pour la multiplication :* $1v = v$, $\forall v \in V$ *;*
- *distributivité :* $c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$ *et* $(c + d)v = cv + dv$, $c, d \in K$, $v_1, v_2, v \in V$.

Définition 1.3 *Une algèbre* $\mathfrak{g}$ *est un espace vectoriel* V *sur un corps* K *(*$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) auquel on ajoute une loi interne de multiplication notée* $\diamond$. *Cette loi satisfait certains axiomes* [15] *:*

- *fermeture :* $\forall v_1, v_2 \in V$, *on a* $v_1 \diamond v_2 \in V$ *;*
- *distributivité à gauche et à droite sur l'addition :* $(v_1 + v_2) \diamond v_3 = v_1 \diamond v_3 + v_2 \diamond v_3$ *et* $v_1 \diamond (v_2 + v_3) = v_1 \diamond v_2 + v_1 \diamond v_3$, $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$.

Une sous-algèbre est un sous-espace fermé sous la loi interne de multiplication. Les exemples d'algèbres de matrices particulières qui suivent sont reliés à ceux donnés plus haut :

-Orthogonale Une algèbre réelle est dite *orthogonale* si elle respecte la relation :

$$\mathfrak{g}^t H + H\mathfrak{g} = 0, \tag{1.1.3}$$

où H est la même matrice symétrique que pour le groupe.

-Unitaire Une algèbre complexe est dite *unitaire* si elle respecte la relation :

$$\mathfrak{g}^\dagger H' + H'\mathfrak{g} = 0, \tag{1.1.4}$$

où H' est la même matrice hermitienne que pour le groupe.

-Spéciale Une algèbre est dite *spéciale* si la trace de la matrice qui la représente est nulle.

Les propriétés de déterminant égal à un et de trace nulle sont reliées par l'application exponentielle (voir la proposition 1.1).

1.1.2 Variétés différentiables

Nous allons maintenant passer au cas des groupes de Lie qui sont des groupes continus. Pour qu'un groupe soit dit de Lie, il doit posséder une structure de variété différentiable telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient des applications différentiables [32].

Essentiellement, une variété différentiable de dimension n est une structure localement euclidienne (homéomorphe à $\mathbb{R}^n$). Par exemple, en une dimension, le cercle est une variété localement homéomorphe à la droite $\mathbb{R}$.

Définition 1.4 *Soit G, un* groupe de Lie *muni d'une structure de variété différentiable. Les deux conditions suivantes sont respectées :*

- *la multiplication $\circ : G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto g \circ h$ est C^∞ ;*
- *le passage à l'inverse $i : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ est C^∞.*

En fait, il est équivalent et suffisant de dire que l'application $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ est C^∞. C^∞ signifie que toutes les dérivées existent et sont continues, c'est-à-dire que la structure est lisse.

Pour qu'une algèbre soit dite de Lie, sa loi de multiplication doit satisfaire certaines conditions données dans la définition suivante [32].

Définition 1.5 *Une* algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *est un espace vectoriel sur un corps K muni d'une loi interne de multiplication appelée crochet de Lie, notée $[X,Y]$, qui satisfait les propriétés de :*

- *bilinéarité : $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X,Z] + \beta[Y,Z]$ et $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X,Y] + \beta[X,Z],\ \forall\ X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{g}$ et $\forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$;*

- *antisymétrie :* $[X, Y] = -[Y, X], \forall\ X,\ Y \in \mathfrak{g}$ *;*
- *identité de Jacobi :* $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \forall\ X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{g}$.

Dans la suite, nous appellerons *commutateur* le crochet de Lie entre deux éléments particuliers. Les commutateurs jouent un rôle important puisqu'ils déterminent en quelque sorte la structure de l'algèbre.

Géométriquement, l'algèbre de Lie est le plan tangent à l'identité d'un groupe de Lie (vu comme une variété différentiable). En choisissant une courbe passant par l'identité sur la variété, il est possible de la différentier pour obtenir une droite tangente et d'évaluer le tout à l'identité pour avoir une droite (un générateur) du plan tangent à l'identité. C'est comme cela que l'on obtient l'algèbre du groupe.

1.1.3 Lien entre les groupes et les algèbres de Lie

Sous certaines conditions, il est possible de passer d'une algèbre à un groupe et vice-versa. Pour obtenir l'algèbre à partir du groupe, il faut différentier et évaluer à l'identité comme il a été discuté à la section précédente. Dans le sens inverse, c'est moins évident.

En fait, c'est l'application exponentielle [32] qui permet d'obtenir le groupe à partir de l'algèbre. Cette application de l'algèbre vers le groupe s'écrit $G = e^{tg}$, où G est l'élément du groupe, t un paramètre et g l'élément de l'algèbre correspondant à G. En utilisant la représentation matricielle des groupes et algèbres de Lie, il est aisé de travailler avec cette application en utilisant l'exponentiation des matrices.

L'utilisation de l'exponentielle permet de montrer un lien intéressant entre la trace d'un élément de l'algèbre et le déterminant de l'élément correspondant du groupe.

Proposition 1.1 *Soit g un élément d'une algèbre sous sa forme matricielle, sa* *trace satisfait la propriété suivante :*

$$det(exp(g)) = e^{tr(g)}.$$

PREUVE Écrivons g sous sa forme de Jordan :

$$g = C^{-1}DC + C^{-1}NC,$$

où D est diagonale, N est nilpotente et C est une matrice de passage pour obtenir la bonne forme. Puisque D est diagonale, elle commute avec N, donc $C^{-1}DC$ et $C^{-1}NC$ commutent aussi. Calculons l'exponentielle de g :

$$\begin{aligned} exp(g) &= exp(C^{-1}DC + C^{-1}NC) \\ &= exp(C^{-1}DC)exp(C^{-1}NC) && \text{car ils commutent} \\ &= C^{-1}exp(D)CC^{-1}exp(N)C && \text{par la série de Taylor} \\ &= C^{-1}exp(D)exp(N)C. \end{aligned}$$

Prenons son déterminant :

$$\begin{aligned} det(exp(g)) &= det(C^{-1}exp(D)exp(N)C) \\ &= det(C^{-1})det(exp(D))det(exp(N))det(C) \\ &= det(C)^{-1}det\begin{pmatrix} e^{d1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{dn} \end{pmatrix} det(\mathbb{I} + N + \frac{N^2}{2} + \cdots)det(C) \\ &= exp(d1)\cdots exp(dn) \times 1 && \text{car N est nilpotent} \\ &= exp(d1 + \cdots + dn) \\ &= exp^{tr(D)} \end{aligned}$$

D'un autre côté, la trace de g est :

$$\begin{aligned} tr(g) &= tr(C^{-1}DC + C^{-1}NC) \\ &= tr(C^{-1}DC) + tr(C^{-1}NC) \\ &= tr(CC^{-1}D) + tr(CC^{-1}N) \qquad \text{par cyclicité} \\ &= tr(D) + tr(N) \\ &= tr(D) \qquad \text{car N est nilpotent} \end{aligned}$$

Nous avons donc bien que $det(exp(g)) = e^{tr(g)}$.

Remarquons qu'à partir de maintenant, nous noterons les groupes et leurs éléments par des majuscules et les algèbres et leurs éléments par des minuscules.

1.1.4 Notes sur les matrices hermitiennes

1.1.4.1 Métrique

Dans les relations (1.1.1) et (1.1.2), les matrices symétrique (H) et hermitienne (H') sont appelées métriques. Elles jouent un rôle particulier en physique.

En effet, la métrique donne la signature de l'espace-temps dans lequel on travaille. Par le fait même, elle détermine le produit scalaire puisque la signature représente le nombre de signes positifs et négatifs dans la forme quadratique.

Par exemple, dans l'espace de Minkowski, la métrique est la matrice diagonale $\mathrm{H} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$ de signature $(1, 3)$ et la forme quadratique invariante par rapport au groupe orthogonal réel $O(3, 1)$ ou $O(1, 3)$ est donnée par $x^t H x = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

1.1.4.2 Matrices de Pauli

L'ensemble des matrices hermitiennes de format $n \times n$ constitue un espace vectoriel réel de dimension n^2, c'est-à-dire le nombre de paramètres réels qui servent à caractériser l'ensemble. Dans le cas où $n = 2$, on trouve les matrices de Pauli auxquelles on ajoute la matrice identité :

$$\sigma_0 = \mathbb{I}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.1.5}$$

Dans la suite, nous noterons σ_μ l'ensemble formé de l'identité et des matrices de Pauli.

Toute matrice hermitienne M de format 2×2 peut s'écrire comme une combinaison linéaire des matrices σ_μ : $M = x_\mu \sigma_\mu$, où les x_μ sont réels. Elle a donc explicitement la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_1 \end{pmatrix}.$$

De même pour son conjugué transposé :

$$M^\dagger = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que M est bien hermitienne.

1.2 Processus de contraction

Le principe du processus de contraction est de passer d'une algèbre de Lie à une autre en utilisant un mécanisme de passage à la limite sur des paramètres que l'on introduit dans la structure. En effet, il faut donner plus de degrés de liberté à la métrique et aux générateurs en leur ajoutant des paramètres. Puis, il est nécessaire de faire tendre certains de ces paramètres vers 0 tout en s'assurant de ne pas créer de singularités afin d'obtenir l'algèbre contractée. Il faut aussi maintenir le nombre de générateurs indépendants présents dans la structure. La matrice utilisée pour introduire les paramètres dans la métrique et les générateurs est présentée à la section 3.2.

D'une façon plus générale, on peut voir la contraction comme un changement de base singulier dans l'espace vectoriel que constitue notre algèbre. Elle permet d'obtenir une structure aux propriétés différentes avec des générateurs et des commutateurs tout de même bien définis. Les algèbres originale et contractée ne seront pas isomorphes. Par exemple, certains commutateurs peuvent changer. Il arrive cependant que des sous-algèbres demeurent inchangées.

D'un point de vue physique, la contraction permet de faire un lien entre les structures relativiste et non-relativiste. Par exemple, on peut partir du groupe de Poincaré pour obtenir le groupe de Galilée. Dans ce cas, le paramètre qui tend vers 0 est l'inverse de la vitesse de la lumière puisque celle-ci peut tendre vers l'infini dans le cas non-relativiste. La contraction peut aussi être utilisée pour prendre la limite non-cosmologique, c'est-à-dire laisser le rayon de l'Univers aller vers l'infini.

Nous donnerons quelques exemples de processus de contraction à la section 3.1.

1.3 Supersymétrie

Nous exposons les principes du formalisme supersymétrique. D'abord, nous présentons les notions de graduation et de variables de Grassmann. Puis, nous énonçons les définitions de certains objets dans le cadre du formalisme supersymétrique.

1.3.1 Graduation et variables de Grassmann

À la base, les *super* objets sont des espaces vectoriels gradués de degré 2 auxquels on ajoute des propriétés. Dans un espace vectoriel gradué de degré 2 [10], il y a deux types d'éléments appelés pair et impair qui obéissent à la règle suivante sous la loi interne d'addition :

$$\begin{aligned} pair + pair &= pair, \\ pair + impair &= impair, \\ impair + impair &= pair. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Plusieurs structures obéissent à ces règles, par exemple, les entiers sous l'addition ou encore le groupe cyclique d'ordre 2 ($\mathbb{Z}_2$).

Supposons que notre espace vectoriel V est de dimension $m+n$ et que les vecteurs $a_1, a_2, ..., a_{m+n}$ en forment une base. Alors, tout élément de V peut s'écrire :

$$a = \sum_{j=1}^{m+n} \mu_j a_j, \tag{1.3.2}$$

où les μ_j sont des coefficients réels ou complexes selon le contexte. Nous pouvons graduer cet espace en imposant que les éléments de la forme :

$$a = \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_j \tag{1.3.3}$$

soient dits pairs et que ceux de la forme :

$$a = \sum_{j=m+1}^{n} \mu_j a_j \tag{1.3.4}$$

soient dits impairs. En fait, il suffit de bien ordonner les éléments.

Il est possible de définir le degré d'un élément homogène (c'est-à-dire pair ou impair, mais pas un mélange) de la façon suivante :

$$\deg a = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } a \text{ est impair.} \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Nous appelons aussi les éléments pairs, bosoniques, et les impairs, fermioniques. Ces définitions sont bien sûr liées à la signification physique de bosonique et fermionique.

Nous pouvons maintenant définir les variables de Grassmann qui servent comme paramètres lors de l'exponentiation d'une superalgèbre pour obtenir un supergroupe.

Définition 1.6 *Les* variables de Grassmann, *notées θ_j, ont les propriétés suivantes :*
- *associativité : $(\theta_j\theta_k)\theta_l = \theta_j(\theta_k\theta_l)$,*
- *anticommutativité : $\theta_j\theta_k = -\theta_k\theta_j$,*
- *chaque produit non-nul de r générateurs est linéairement indépendant des produits de moins de r générateurs.*

Nous pouvons ajouter un élément identité aux produits non-nuls et indépendants de L générateurs pour obtenir une base de 2^L éléments. L'algèbre qui résulte de ces variables est appelée algèbre extérieure [10]. Un élément de la base est dit pair s'il est l'identité ou un produit d'un nombre pair des θ_i, il est dit impair dans le cas contraire.

1.3.2 Définitions dans le formalisme supersymétrique

Les superalgèbres de Lie sont définies sur un espace vectoriel gradué de degré 2. L'ensemble des éléments pairs forme lui-même un espace vectoriel (V^0), celui des éléments impairs aussi (V^1). Leur seul élément commun est le 0.

Définition 1.7 *Une* superalgèbre de Lie, *notée s, obéit aux trois axiomes suivants [13] :*

(i) *s est un espace vectoriel gradué de degré 2 sur $\mathbb{C}$;*

(ii) *s est muni d'un crochet de Lie généralisé qui :*

- **a)** *est bilinéaire,*
- **b)** *est superanticommutatif, c'est-à-dire que le crochet est $[A, B] \equiv AB - BA$ dans tous les cas, sauf si A* **et** *B sont impairs, alors il est l'anticommutateur $\{A, B\} \equiv AB + BA$,*
- **c)** *obéit aux règles suivantes $\forall v_0 \in V_0$* et *$v_1 \in V_1$:*
  - $[v_0, v_0] \in V_0$,
  - $[v_0, v_1] \in V_1$,
  - $\{v_1, v_1\} \in V_0$;

(iii) *le crochet obéit à l'identité de Jacobi généralisée : Soit A, B, C des éléments de la superalgèbre et a, b, c leurs degrés respectifs, alors ils obéissent à la relation suivante :*

$$(-1)^{ac}[A, [B, C]] + (-1)^{ba}[B, [C, A]] + (-1)^{cb}[C, [A, B]] = 0, \qquad (1.3.6)$$

où le $[,]$ est le commutateur sauf si les deux éléments sont impairs, auquel cas c'est l'anticommutateur.

Nous pouvons représenter une superalgèbre associative comme une matrice en bloc [10] :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad (1.3.7)$$

où A est de dimension $m \times m$, B, $m \times n$, C, $n \times m$ et D, $n \times n$.

Si $B = C = 0$, la matrice est dite paire, alors que si $A = D = 0$, la matrice est dite impaire. L'ensemble formé des matrices paires est appelé partie paire (ou bosonique) et est de degré 0 ; celui formé des matrices impaires est la partie impaire (ou fermionique) de degré 1.

Étant donné la présence de ces parties paires et impaires, il faut redéfinir la trace.

Définition 1.8 *La* supertrace *d'une matrice M est* str $M = \mathrm{tr}\ A - \mathrm{tr}\ D$, *où* tr *est pour la trace usuelle.*

Nous pouvons également définir la supertransposée d'une matrice de la façon suivante :

$$M^{st} = \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ -B^t & D^t \end{pmatrix}, \tag{1.3.8}$$

où t est pour la transposée usuelle.

Nous pouvons ici également ajouter des propriétés pour avoir des superalgèbres particulières. Voici quelques exemples de superalgèbres de matrices qui vont nous intéresser :

Définition 1.9 -Super unitaire *Une superalgèbre est dite unitaire si :*

$$u^\dagger \mathbb{H} + (-i)^{\mathbf{deg}\ u} \mathbb{H} u = 0$$

où u est un élément de la superalgèbre et $\mathbb{H}$ est la métrique,

-Spéciale *Une superalgèbre est dite spéciale si la supertrace de la matrice qui la représente est nulle.*

Dans le formalisme supersymétrique, le supergroupe vient aussi de l'exponentiation de la superalgèbre [19], mais cette fois-ci, les paramètres sont des variables de Grassmann. Cette exponentiation ne donne malheureusement pas un espace vectoriel, mais plutôt un supermodule [13]. Il faut donc revoir le processus et exponentier la partie paire de la superalgèbre.

Cette procédure est assez complexe. Il est aussi possible de définir les supergroupes à partir des supervariétés. Cependant, dans ce travail, nous allons nous concentrer sur la structure de superalgèbre plus simple à manipuler.

Finalement, nous allons redéfinir le déterminant dans le contexte supersymétrique :

Définition 1.10 *Le* superdéterminant *d'une matrice M est donné par :*

$$\text{sdet } M = \frac{\det(A - BD^{-1}C)}{\det D} = \frac{\det A}{\det(D - CA^{-1}B)} \tag{1.3.9}$$

si la matrice est inversible, c'est-à-dire A^{-1} et D^{-1} existent.

1.3.2.1 Principes physiques

Avant de clore cette section sur le formalisme supersymétrique, nous allons présenter deux principes qui doivent être respectés pour qu'une superalgèbre soit physiquement admissible [13] :

- la partie paire doit être la somme directe d'une algèbre physique (Poincaré, conforme, ...) et d'une algèbre de symétrie interne ;
- tous les éléments de la partie impaire doivent se transformer comme des spineurs de Lorentz.

1.4 Groupes et supergroupes de la physique

Plusieurs groupes et supergroupes sont utilisés dans différents problèmes de la physique mathématique, nous en présentons quelques-uns ici.

1.4.1 Groupes de Galilée et de Poincaré

Le groupe de Galilée est le groupe d'invariance de la mécanique classique non-relativiste. Il contient quatre translations, trois rotations et trois *boosts* galiléens (transformations pures). C'est donc un groupe à dix paramètres. Voici sa représentation différentielle [26] :

$$\begin{aligned}
\text{translation temporelle :} \quad & P_0 = i\partial_0; \\
\text{translations spatiales :} \quad & P_i = -i\partial_i; \\
\textit{boosts} : \quad & B_i = it\partial_i \ (+mx_i); \\
\text{rotations :} \quad & L_i = -\frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k.
\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Si la masse est non-nulle, le facteur mx_i dans les *boosts* fait que l'on parle plutôt de l'extension centrale du groupe de Galilée ou de l'algèbre associée. Ici, nous allons travailler avec une masse nulle.

Le groupe de Poincaré quant à lui est le groupe d'invariance de la relativité restreinte. Il contient quatre translations (trois spatiales et une temporelle), trois rotations et trois *boosts* (transformations pures). C'est donc aussi un groupe à dix paramètres. Il contient le groupe de Lorentz en quatre dimensions spatio-temporelles, c'est-à-dire les rotations et les *boosts*. Nous connaissons bien la représentation différentielle de ses générateurs [2] :

$$\begin{aligned}
\text{translations :} \quad & P_\mu = \partial_\mu, \\
\text{transformations de Lorentz :} \quad & M_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu,
\end{aligned} \tag{1.4.2}$$

où $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Il est possible de contracter le groupe de Poincaré sur le groupe de Galilée.

1.4.2 Groupes de de Sitter

Les groupes de de Sitter et anti-de Sitter sont des groupes d'invariance pour un espace-temps de courbure constante, positive ou négative. Il sont représentés repectivement par $SO(4,1)$ et $SO(3,2)$. Ce sont aussi des groupes à dix paramètres relativistes. Cependant, contrairement à Poincaré et Galilée, ils ne sont pas locaux. En fait, il est possible d'obtenir le groupe de Poincaré à partir du groupe de de Sitter en laissant le rayon aller à l'infini.

Le groupe anti-de Sitter peut servir dans des théories gravitationnelle et quantique de petite dimension (deux dimensions spatiales)[22]. Notons également que la version supersymétrique du groupe anti-de Sitter est utilisée dans les théories de supergravité et de champs supersymétriques [31].

1.4.3 Groupe conforme

Le groupe conforme est le groupe de symétrie des équations de Maxwell ainsi que d'autres équations de champs pour des particules sans masse. Il contient les transformations du groupe de Poincaré en plus d'une dilatation et de quatre transformations conformes spéciales. C'est donc un groupe relativiste à quinze paramètres. Il contient aussi les deux groupes de de Sitter.

La représentation différentielle des générateurs qui ne sont pas dans Poincaré est donnée par [2] :

$$\begin{aligned} \text{dilatation :} \quad & D = x^\nu \partial_\nu; \\ \text{transformations conformes :} \quad & C_\mu = 2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Le pendant non-relativiste du groupe conforme n'est pas bien défini dans la littérature. Ce serait le groupe d'invariance de l'équation de Schroedinger libre. Il contient le groupe de Galilée. Selon Niederer [26], il possède douze paramètres, contient une dilatation et une expansion en plus du groupe de Galilée.

Pour sa part, Barut [2] prend le groupe conforme relativiste et obtient un groupe à quinze paramètres par contraction et "transfert" de la transformation de masse. Cependant, aucune des deux transformations n'est correcte, car elles ne préservent pas la symétrie sous la transformation conforme. C'est pour cette raison que nous sommes amenés à faire notre propre contraction du groupe conforme.

Notons enfin que l'étude des groupes conformes non-relativistes [25] pour l'espace-temps de Galilée permet d'obtenir une famille d'algèbres conformes libellées par un paramètre l. Quand $l = 1/2$, en excluant la dilatation spatiale, on retrouve le groupe d'invariance de l'équation de Schroedinger libre, c'est-à-dire l'algèbre à douze paramètres de Niederer. Avec l'indice $l = 1$ et en excluant la dilatation spatiale, on retrouve plutôt la contraction du groupe conforme à quinze paramètres. En fait, nous allons voir que l'algèbre conforme dans l'espace de Galilée pour $l = 1$ est la contraction de l'algèbre conforme relativiste que nous obtiendrons pour sa représentation $so(4,2)$.

1.4.4 Supergroupe conforme

Le pendant supersymétrique du groupe conforme est appelé supergroupe conforme. Il sert dans le contexte de la physique des particules parce qu'il est utile pour mélanger les bosons et les fermions. Il est aussi utilisé dans les théories de supercordes. C'est d'ailleurs dans ce contexte qu'est apparu le formalisme supersymétrique [13]. Puis, sont apparus les concepts de superespace et de supergravité. Ces différentes théories seront brièvement discutées dans le chapitre 5.

Notons que lorsque les masses sont nulles, les supersymétries associées au cas de Sitter peuvent être augmentées au cas conforme [13].

Nous donnons une représentation matricielle de la superalgèbre du supergroupe conforme à la section 4.1.3. Puis, nous tentons de l'amener vers le cas non-relativiste.

Chapitre 2

Représentations du groupe conforme et de ses sous-groupes

Nous avons vu ce qu'est le groupe conforme à la section 1.4.3. Il possède plusieurs représentations. Nous nous intéressons particulièrement à deux d'entres elles, celles qui correspondent au groupe orthogonal $SO(4,2)$ et au groupe unitaire $SU(2,2)$. Ces deux groupes étant homomorphes, nous cherchons à établir un lien *algorithmique* entre leurs représentations matricielles. Ce lien sera utilisé dans le chapitre portant sur la contraction du groupe conforme.

Nous allons d'abord présenter une base physique des représentations $SO(4,2)$ et $SU(2,2)$ sous forme matricielle de même que les relations de commutation qui caractérisent l'algèbre du groupe conforme. Puis, nous nous intéressons aux sous-groupes du groupe conforme afin de réduire le problème d'écriture du lien. Nous commençons par étudier la relation entre $SO(3,1)$ et $SL(2,\mathbb{C})$. Ensuite, nous établissons un lien entre $SO(3,1)$ et $SO(2,2)$ en tant que sous-groupes de $SO(4,2)$ pour arriver à écrire le passage entre $SO(2,2)$ et $SU(1,1)\otimes SU(1,1)$. Enfin, nous tentons de nous inspirer de ces résultats pour écrire le passage de $SO(4,2)$ au complet vers $SU(2,2)$.

2.1 Générateurs physiques de $SO(4,2)$ et $SU(2,2)$

Nous avons vu à la section 1.4.3 que le groupe conforme comprend trois rotations (L_i), trois transformations pures (*boosts*, B_i), une dilatation (D), quatre translations (P_μ) et quatre transformations conformes (C_μ) ; ces générateurs sont dits physiques [6].

2.1.1 Le groupe $SO(4,2)$

Le groupe $SO(4,2)$ est formé des matrices réelles O de format 6×6 qui ont un déterminant égal à 1 et satisfont la relation :

$$O^t k O = k \tag{2.1.1}$$

où k est la métrique qui, dans notre cas, vaut

$$k = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1, -1, +1).$$

En exprimant la matrice $O \in SO(4,2)$ sous la forme $O = e^{to}$ et en dérivant, on obtient les éléments o de l'algèbre $so(4,2)$. La relation (2.1.1) devient :

$$o^t k + k o = 0 \tag{2.1.2}$$

et la condition de déterminant égal à 1 implique que la trace de o est nulle puisque, comme il a été montré à la section 1.1.3, nous avons la relation : $det(exp(A)) = e^{tr(A)}$.

Les générateurs physiques sont obtenus à partir d'une base de l'algèbre, $J_{\rho\sigma}$, telle que $J_{\rho\sigma} = -J_{\sigma\rho}$, où $\rho, \sigma = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Autrement dit, ce sont des matrices 6×6 avec des entrées aux positions $\rho\sigma$ et $\sigma\rho$ valant 1 ou -1 afin de respecter la relation (2.1.2). Nous avons les générateurs physiques [6] :

$$L_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk}, \quad B_i = J_{0i}, \tag{2.1.3}$$

$$D = J_{45}, \quad P_\mu = J_{4\mu} + J_{5\mu}, \quad C_\mu = J_{5\mu} - J_{4\mu}, \tag{2.1.4}$$

où $i, j, k = 1, 2, 3$ et $\mu = 0, 1, 2, 3$. En exponentiant chacun de ces éléments, nous obtenons les éléments correspondants du groupe $SO(4,2)$.

Les éléments générateurs du groupe sont donc :

$$O_{L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos A & -\sin A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin A & \cos A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_{L_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B & 0 & \sin B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin B & 0 & \cos B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$O_{L_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos G & -\sin G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin G & \cos G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_{B_1} = \begin{pmatrix} \cosh a & \sinh a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh a & \cosh a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$O_{B_2} = \begin{pmatrix} \cosh b & 0 & \sinh b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh b & 0 & \cosh b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_{B_3} = \begin{pmatrix} \cosh g & 0 & 0 & \sinh g & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh g & 0 & 0 & \cosh g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$O_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh l & \sinh l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sinh l & \cosh l \end{pmatrix}, \tag{2.1.5}$$

$$O_{P_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -t & -t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -t & 0 & 0 & 0 & 1+t^2/2 & t^2/2 \\ t & 0 & 0 & 0 & -t^2/2 & 1-t^2/2 \end{pmatrix}, \quad O_{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -u & -u \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 1-u^2/2 & -u^2/2 \\ 0 & -u & 0 & 0 & u^2/2 & 1+u^2/2 \end{pmatrix},$$

$$O_{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -v & -v \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 1-v^2/2 & -v^2/2 \\ 0 & 0 & -v & 0 & v^2/2 & 1+v^2/2 \end{pmatrix}, \quad O_{P_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -w & -w \\ 0 & 0 & 0 & w & 1-w^2/2 & -w^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & -w & w^2/2 & 1+w^2/2 \end{pmatrix},$$

$$O_{C_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & T & -T \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 & 0 & 1+T^2/2 & -T^2/2 \\ T & 0 & 0 & 0 & T^2/2 & 1-T^2/2 \end{pmatrix}, \quad O_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & U & -U \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -U & 0 & 0 & 1-U^2/2 & U^2/2 \\ 0 & -U & 0 & 0 & -U^2/2 & 1+U^2/2 \end{pmatrix},$$

$$O_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & V & -V \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -V & 0 & 1-V^2/2 & V^2/2 \\ 0 & 0 & -V & 0 & -V^2/2 & 1+V^2/2 \end{pmatrix}, \quad O_{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & W & -W \\ 0 & 0 & 0 & -W & 1-W^2/2 & W^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & -W & -W^2/2 & 1+W^2/2 \end{pmatrix},$$

où les indices correspondent aux générateurs physiques (2.1.3) et (2.1.4) et les paramètres A, B, ... sont tous réels.

2.1.2 Le groupe $SU(2,2)$

Le groupe $SU(2,2)$ est le groupe des matrices complexes de dimension 4×4 ayant un déterminant égal à 1 et satisfaisant la relation :

$$U^\dagger h U = h, \tag{2.1.6}$$

où h est la métrique que l'on prend généralement diagonale :

$$h = \mathrm{diag}(+1, +1, -1, -1).$$

Afin d'écrire une base physique facile à associer à celle de $SO(4,2)$, nous utilisons une métrique $\widetilde{h}$ non-diagonale [6] :

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbb{I} \\ i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.7}$$

Nous avons alors les définitions suivantes [6] :

$$\widetilde{U}_{Lorentz} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{\dagger -1} \end{pmatrix}, \qquad A \in SL(2,\mathbb{C}); \tag{2.1.8}$$

$$\widetilde{U}_D = \begin{pmatrix} e^{-\lambda/2}\mathbb{I} & 0 \\ 0 & e^{+\lambda/2}\mathbb{I} \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}; \tag{2.1.9}$$

$$\widetilde{U}_{P_\mu} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & k \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \qquad k = \begin{pmatrix} a^0 + a^3 & a^1 - ia^2 \\ a^1 + ia^2 & a^0 - a^3 \end{pmatrix}; \tag{2.1.10}$$

$$\widetilde{U}_{C_\mu} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ k' & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \qquad k' = \begin{pmatrix} -b^0 + b^3 & b^1 - ib^2 \\ b^1 + ib^2 & -b^0 - b^3 \end{pmatrix}. \tag{2.1.11}$$

Pour obtenir les matrices de $SL(2, \mathbb{C})$, nous avons exponentié les matrices de Pauli avec un paramètre imaginaire pour les rotations et un paramètre réel pour les *boosts*.

Un changement de base donné à partir de la matrice [6]

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & i\mathbb{I} \\ i\mathbb{I} & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \tag{2.1.12}$$

telle que $S^\dagger = S^{-1}$, permet de transformer la métrique, de même que les éléments du groupe pour obtenir une réalisation des matrices U de $SU(2,2)$ satisfaisant (2.1.6) avec h diagonal. La transformation est alors donnée par :

$$h = S^\dagger \widetilde{h} S, \tag{2.1.13}$$

$$U = S^\dagger \widetilde{U} S. \tag{2.1.14}$$

Les générateurs du groupe $SU(2,2)$ s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
U_{L_1} &= \cos(A/2)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - i \sin(A/2)\sigma_1 \otimes \mathbb{I}, \\
U_{L_2} &= \cos(B/2)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - i \sin(B/2)\sigma_2 \otimes \mathbb{I}, \\
U_{L_3} &= \cos(G/2)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - i \sin(G/2)\sigma_3 \otimes \mathbb{I}, \\
U_{B_1} &= \cosh(a/2)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \sinh(a/2)\sigma_1 \otimes \sigma_2, \\
U_{B_2} &= \cosh(b/2)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \sinh(b/2)\sigma_2 \otimes \sigma_2, \\
U_{B_3} &= \cosh(g/2)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} - \sinh(g/2)\sigma_3 \otimes \sigma_2, \\
U_D &= \cosh(l/2)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sinh(l/2)\mathbb{I} \otimes \sigma_2, \qquad (2.1.15) \\
U_{P_0} &= \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + t/2(-i\mathbb{I} \otimes \sigma_3 - \mathbb{I} \otimes \sigma_1),
\end{aligned}$$

$$U_{P_1} = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + u/2(-i\sigma_1\otimes\sigma_3 - \sigma_1\otimes\sigma_1),$$
$$U_{P_2} = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + v/2(-i\sigma_2\otimes\sigma_3 - \sigma_2\otimes\sigma_1),$$
$$U_{P_3} = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + w/2(-i\sigma_3\otimes\sigma_3 - \sigma_3\otimes\sigma_1),$$
$$U_{C_0} = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + T/2(-i\mathbb{I}\otimes\sigma_3 + \mathbb{I}\otimes\sigma_1),$$
$$U_{C_1} = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + U/2(i\sigma_1\otimes\sigma_3 - \sigma_1\otimes\sigma_1),$$
$$U_{C_2} = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + V/2(i\sigma_2\otimes\sigma_3 - \sigma_2\otimes\sigma_1),$$
$$U_{C_3} = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + W/2(i\sigma_3\otimes\sigma_3 - \sigma_3\otimes\sigma_1),$$

avec les mêmes indices et paramètres que pour le cas $SO(4,2)$ donné en (2.1.5).

Nous obtenons l'algèbre $su(2,2)$ en dérivant les générateurs du groupe par rapport aux paramètres du groupe et en évaluant le tout à 0. Nous notons ses éléments u_X où X est le générateur. Ces éléments u de l'algèbre $su(2,2)$ satisfont donc la relation :

$$u^\dagger h + hu = 0, \tag{2.1.16}$$

de même que la condition de trace nulle.

2.1.3 Base de générateurs pour $su(2,2)$

Nous allons maintenant nommer et organiser la base de l'algèbre $su(2,2)$ afin d'obtenir une base complexe des matrices unitaires de dimension 4×4.

Pour ce faire, nous allons utiliser les produits tensoriels indépendants des σ_μ, ce qui donne seize possibilités. Nous allons donc prendre $\mathbb{I}_{4\times 4}$ et les quinze générateurs de l'algèbre $su(2,2)$ obtenus des relations (2.1.15). Ces produits sont présentés dans le tableau 2.1. La numérotation des Σ_i de 0 à 5 vient des générateurs utilisés pour passer de $SU(2,2)$ à $SO(4,2)$[6] (voir la section 2.5.1). Le reste de la numérotation n'a pas de signification particulière.

Transformation	Générateur	Écriture tensorielle	Base Σ_i
Identité	—	$\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}$	Σ_6
Rotations	$2u_{L_1}$	$-i\sigma_1\otimes\mathbb{I}$	$-\Sigma_{12}$
	$2u_{L_2}$	$-i\sigma_2\otimes\mathbb{I}$	$-\Sigma_0$
	$2u_{L_3}$	$-i\sigma_3\otimes\mathbb{I}$	$-\Sigma_9$
Boosts	$2u_{B_1}$	$-\sigma_1\otimes\sigma_2$	Σ_3
	$2u_{B_2}$	$-\sigma_2\otimes\sigma_2$	$-\Sigma_{13}$
	$2u_{B_3}$	$-\sigma_3\otimes\sigma_2$	$-\Sigma_1$
Dilatation	$2u_D$	$\mathbb{I}\otimes\sigma_2$	$i\Sigma_2$
Translations	$2u_{P_0}$	$-i\mathbb{I}\otimes\sigma_3-\mathbb{I}\otimes\sigma_1$	$i(-\Sigma_8+\Sigma_7)$
	$2u_{P_1}$	$-i\sigma_1\otimes\sigma_3-\sigma_1\otimes\sigma_1$	$i(-\Sigma_{10}+\Sigma_{11})$
	$2u_{P_2}$	$-i\sigma_2\otimes\sigma_3-\sigma_2\otimes\sigma_1$	$i(-\Sigma_5+\Sigma_4)$
	$2u_{P_3}$	$-i\sigma_3\otimes\sigma_3-\sigma_3\otimes\sigma_1$	$i(-\Sigma_{14}+\Sigma_{15})$
Transfos conformes	$2u_{C_0}$	$-i\mathbb{I}\otimes\sigma_3+\mathbb{I}\otimes\sigma_1$	$-i(\Sigma_8+\Sigma_7)$
	$2u_{C_1}$	$i\sigma_1\otimes\sigma_3-\sigma_1\otimes\sigma_1$	$i(\Sigma_{10}+\Sigma_{11})$
	$2u_{C_2}$	$i\sigma_2\otimes\sigma_3-\sigma_2\otimes\sigma_1$	$i(\Sigma_5+\Sigma_4)$
	$2u_{C_3}$	$i\sigma_3\otimes\sigma_3-\sigma_3\otimes\sigma_1$	$i(\Sigma_{14}+\Sigma_{15})$

TAB. 2.1 – Générateurs de l'algèbre $su(2,2)$

2.1.4 Relations de commutation

Étant donné l'homomorphisme entre les algèbres $so(4,2)$ et $su(2,2)$, leurs générateurs satisfont les mêmes relations de commutation qui sont données par :

$$[L_i,L_j]=\varepsilon_{ijk}L_k,\quad [L_i,B_j]=\varepsilon_{ijk}B_k,\quad [B_i,B_j]=-\varepsilon_{ijk}L_k, \tag{2.1.17}$$

$$[L_i,D]=0,\quad [B_i,D]=0, \tag{2.1.18}$$

$$[L_i,P_0]=0,\quad [L_i,P_j]=\varepsilon_{ijk}P_k,\quad [B_i,P_0]=P_i,\quad [B_i,P_j]=\delta_{ij}P_0, \tag{2.1.19}$$

$$[L_i,C_0]=0,\quad [L_i,C_j]=\varepsilon_{ijk}C_k,\quad [B_i,C_0]=C_i,\quad [B_i,C_j]=\delta_{ij}C_0, \tag{2.1.20}$$

$$[D,P_\mu]=-P_\mu,\quad [D,C_\mu]=C_\mu, \tag{2.1.21}$$

$$[P_\mu,P_\nu]=0,\quad [P_\mu,C_\nu]=2(k_{\mu\nu}D+J_{\mu\nu}),\quad [C_\mu,C_\nu]=0. \tag{2.1.22}$$

Les rotations (L_i) et les *boosts* (B_i) forment une sous-algèbre (voir (2.1.17)). Celle-ci, une fois exponentiée, donnera le groupe de Lorentz. Si on ajoute les translations (P_μ), on a encore une sous-algèbre (voir (2.1.17) et (2.1.19)), elle a dix paramètres et correspond à l'algèbre du groupe de Poincaré. En ajoutant la dilation (D), on obtient à nouveau une sous-algèbre (ajouter (2.1.18) et (2.1.21)) qui représente l'algèbre du groupe des similitudes [6].

2.2 Lien entre $SO(3,1)$ et $SL(2,\mathbb{C})$

Nous cherchons d'abord un algorithme permettant de relier les représentations orthogonale et unitaire pour un sous-groupe de $SO(4,2)$, le groupe de Lorentz, $SO(3,1)$. Il faut noter que la représentation matricielle de $SO(3,1)$ est obtenue facilement à partir de celle de $SO(4,2)$ donnée par (2.1.5) en supprimant les lignes et colonnes 4 et 5 dans les éléments L_i et B_i.

Sachant que le groupe $SO(3,1)$ est homomorphe à $SL(2,\mathbb{C})$, il nous reste à expliciter les formules qui permettent de passer de l'un à l'autre.

2.2.1 De $SL(2,\mathbb{C})$ à $SO(3,1)$

Ce passage est bien connu [3], nous le rappelons ici car il sera utile pour la suite. Tout d'abord, il faut définir une matrice X hermitienne qui, comme nous l'avons vu à la section 1.1.4.2, peut s'écrire comme une combinaison linéaire des matrices de Pauli :

$$X = x^\mu \sigma_\mu.$$

Puis, on se donne une matrice unitaire $A \in SL(2,\mathbb{C})$. Son déterminant est égal à 1 et elle satisfait la relation $AA^\dagger = \mathbb{I}_{2\times 2}$. On effectue ensuite la transformation

$X' = AXA^{\dagger}$. Notons que X' est aussi une matrice hermitienne puisque :

$$X'^{\dagger} = AX^{\dagger}A^{\dagger} = AXA^{\dagger} = X',$$

on peut donc l'écrire comme :

$$X' = x'^{\mu}\sigma_{\mu}.$$

De plus, puisque $\det A = 1$, le déterminant de X est conservé par la transformation, c'est-à-dire que :

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2.$$

Nous pouvons remarquer que la signature du déterminant est $(3, 1)$. Donc, les coefficients x^{μ} subissent une transformation de Lorentz $x' = L(A)x$ où $L \in SO(3, 1)$. Nous pouvons voir ici l'importance du sens de la métrique telle que vue à la section 1.1.4.1.

Nous avons donc deux façons d'écrire X' :

$$\begin{aligned} X' &= x'^{\mu}\sigma_{\mu} \\ &= L^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\sigma_{\mu} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

et

$$\begin{aligned} X' &= Ax^{\nu}\sigma_{\nu}A^{\dagger} \\ &= x^{\nu}A\sigma_{\nu}A^{\dagger}. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

En comparant les coefficients de x_{ν} dans (2.2.1) et (2.2.2), en multipliant par σ_{μ} et en prenant la trace, nous obtenons la relation :

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}Tr(\sigma_{\mu}A\sigma_{\nu}A^{\dagger}). \tag{2.2.3}$$

Nous pouvons ainsi obtenir les matrices de $SO(3,1)$ à partir de celles de $SL(2,\mathbb{C})$.

Afin que les indices covariants et contravariants de l'équation (2.2.3) concordent, nous allons introduire la notation suivante :

$$\widetilde{\sigma}^{\mu} = \sigma_{\mu}.$$

Nous avons donc que (2.2.3) devient :

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2} Tr(\widetilde{\sigma}^{\mu} A \sigma_{\nu} A^{\dagger}). \tag{2.2.4}$$

Nous en profitons aussi pour introduire la forme contravariante des matrices de Pauli. Sachant que $\sigma_{\mu} = (\mathbb{I}, \sigma_i)$ telles que définies par (1.1.5), nous définissons $\sigma^{\mu} = (\mathbb{I}, -\sigma_i)$.

2.2.2 De $SO(3,1)$ à $SL(2,\mathbb{C})$

Nous voulons maintenant inverser la formule (2.2.3) afin de pouvoir écrire les éléments d'une matrice de $SL(2,\mathbb{C})$ en fonction de ceux d'une matrice de $SO(3,1)$. Pour ce faire, nous nous inspirons de ce qui a déjà été fait [3].

Nous prenons A sous la forme suivante :

$$A = \sum_{\mu=0}^{3} \alpha_{\mu} \sigma_{\mu},$$

où α_{μ} sont des coefficients complexes. Notons qu'il faudra normaliser les α_{μ} en imposant la condition de déterminant égal à un. Il est correct de faire cette combinaison linéaire puisque les σ_{μ} forment une base des matrices de dimension 2×2 en tant qu'espace vectoriel complexe.

En insérant cette forme dans l'équation $L^{\mu}{}_{\nu} \sigma_{\mu} = A \sigma_{\nu} A^{\dagger}$ (les coefficients de x_{ν} dans (2.2.1) et (2.2.2)), nous obtenons quatre séries de quatre équations qui se simplifient assez facilement pour obtenir :

$$A = \frac{1}{N}\{Tr(L)\mathbb{I} + (L^j{}_0 + L^0{}_j + i\varepsilon^{ijk}L^k{}_i)\sigma_j\}, \tag{2.2.5}$$

où N est le facteur de normalisation obtenu en imposant la condition que le déterminant de A soit 1. De plus, nous imposons que le passage d'une matrice de $SL(2,\mathbb{C})$ par (2.2.3), puis par (2.2.5) redonne l'élément initial. Ces conditions forcent N à avoir la forme suivante :

$$N^2 = 4 + (Tr(L))^2 - Tr(LL) - 2i(L^0{}_j + L^j{}_0)\varepsilon^{ijk}L^k{}_i. \tag{2.2.6}$$

Notons que les éléments de matrice de $SO(3,1)$ se lisent directement $L^\mu{}_\nu$.

L'équation (2.2.5) peut se compactifier en utilisant les propriétés des produits de matrices de Pauli. En effet, nous savons que $\sigma_0\sigma_i = \sigma_i\sigma_0 = \sigma_i$ et que $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\sigma_0 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$. Cela nous permet d'écrire que :

$$A = \frac{1}{N}(L^\mu{}_\nu\sigma_\mu\widetilde{\sigma}^\nu) = \frac{1}{N}(L^\mu{}_\nu\sigma_\mu\sigma_\nu). \tag{2.2.7}$$

Il est aussi possible de compactifier N^2. Ceci implique des produits de quatre matrices de Pauli et nous gardons seulement ceux qui donnent un multiple de l'identité en prenant la trace. Nous trouvons la forme suivante [3] qui est équivalente à celle donnée par (2.2.6) :

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{1}{2}\mathrm{Trace}(L^\alpha{}_\beta L^\gamma{}_\delta\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma^\delta\sigma^\gamma) && (2.2.8)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Trace}(L^\alpha{}_\beta L^\gamma{}_\delta\sigma_\alpha\widetilde{\sigma}^\beta\sigma^\delta\widetilde{\sigma}_\gamma). && (2.2.9) \end{aligned}$$

Il faut faire attention à l'ordre des indices γ et δ.

Le passage de $SO(3,1)$ à $SL(2,\mathbb{C})$ est donc clairement établi. Nous remarquons cependant qu'il y a une ambiguïté de signe pour N, car ce qui est défini, c'est

N^2. Ceci montre que les structures ne sont pas isomorphes, mais seulement homomorphes.

2.2.3 De $SO(3,1)$ à $SL(2,\mathbb{C})$ - Nouvelles dimensions

Étant donné que nous allons vouloir généraliser la relation entre $SO(3,1)$ et $SL(2,\mathbb{C})$ pour obtenir celle entre $SO(4,2)$ et $SU(2,2)$, nous allons tout de suite la réécrire en plus grandes dimensions.

Pour écrire $SO(3,1)$ en dimension 6×6, nous utilisons simplement les matrices correspondantes de $SO(4,2)$ données par (2.1.5). Pour ce qui est de $SL(2,\mathbb{C})$, nous prenons les matrices correspondantes de $SU(2,2)$ dans la représentation ayant la métrique non-diagonale $\widetilde{h}$ donnée par (2.1.7). Elles sont données par (2.1.8) :

$$U_{SL(2,\mathbb{C})} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}$$

où les A sont les six éléments de $SL(2,\mathbb{C})$ qui correspondent au groupe de Lorentz.

Nous pouvons maintenant réécrire l'algorithme entre $SO(3,1)$ et $SL(2,\mathbb{C})$. Les coefficients sont à peu près les mêmes. Cependant, il y a maintenant des générateurs différents pour les rotations et les *boosts*. Voici le résultat :

$$\begin{aligned} SL \;=\; & \frac{1}{N\bar{N}}[\Re(N) * \{(Tr(O)-2)\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} \\ & +i\varepsilon^{ijk}O_{jk}\sigma_i\otimes\mathbb{I} - (O_{i0}+O_{0i})\sigma_i\otimes\sigma_2\} \\ & +\Im(N) * \{i(Tr(O)-2)\mathbb{I}\otimes\sigma_2 \\ & -\varepsilon^{ijk}O_{jk}\sigma_i\otimes\sigma_2 - i(O_{i0}+O_{0i})\sigma_i\otimes\mathbb{I}\}] \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

où $\bar{N}$ est le conjugué complexe de N, $\Re(N)$ est sa partie réelle, $\Im(N)$ sa partie imaginaire et $*$ est la multiplication. De plus, N est tel que :

$$N^2 = 4 - (Tr(O^2) - 2) + (Tr(O) - 2)^2 - 2i\varepsilon^{ijk}(O_{i0} + O_{0i})O_{jk}. \quad (2.2.11)$$

Puisque, dans certains cas (produits L_iB_i), le N^2 est complexe, il n'est pas évident pour *Maple* (le logiciel de calcul utilisé) de calculer sa racine carrée. C'est pourquoi il calcule d'abord R, puis N de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R^2 &= \Re(N^2)^2 + \Im(N^2)^2 \\ R &= +\sqrt{R^2} \\ N &= \sqrt{\frac{1}{2}(\Re(N^2) + R)} + i\Im(N^2)/\sqrt{2(\Re(N^2) + R)}. \end{aligned}$$

La grosse différence par rapport à l'équation (2.2.5), ce sont les facteurs $\Re(N)$ et $\Im(N)$. La partie que multiplie $\Re(N)$ est très semblable à ce que nous avions avant. La partie que multiplie $\Im(N)$, quant à elle, mélange les rotations et les *boosts*. Elle vient du fait que le produit L_iB_i ne contient aucune entrée qui mélange les paramètres de la rotation et du *boost*. La partie imaginaire de N^2 (et donc de N) contient, quant à elle, des termes combinant les paramètres de la rotation et du *boost*. Il faut donc l'utiliser pour écrire de tels produits de $SL(2,\mathbb{C})$.

2.3 Lien entre $SO(3,1)$ et $SO(2,2)$ comme sous-groupes de $SO(4,2)$

Un autre sous-groupe de $SO(4,2)$ qui nous intéresse est $SO(2,2)$. Nous en obtenons une représentation matricielle en supprimant les lignes et colonnes 1 et 2 (garder 0,3,4,5) dans les générateurs O_{B_3}, O_D, O_{P_0}, O_{P_3}, O_{C_0} et O_{C_3} de $SO(4,2)$ donné par (2.1.5).

Afin d'utiliser le lien obtenu à la section 2.2.2, nous cherchons à relier les deux sous-groupes de $SO(4,2)$. Autrement dit, nous cherchons une matrice S complexe telle que

$$SO_{31}S^{-1} \in SO(2,2).$$

Il est à noter que nous sortons du cadre réel de $SO(2,2)$ et $SO(3,1)$ puisque ces deux groupes sont isomorphes à $SO(4)$ seulement si la structure complexe est utilisée. C'est pourquoi la matrice S pourra être complexe. Des matrices 6×6 seront utilisées puisque l'objectif est de pouvoir adapter cette écriture à notre problème de $SO(4,2)$. Nous nous plaçons également dans l'algèbre pour trouver les combinaisons linéaires des éléments de $so(2,2)$ qui seront identifiés aux éléments de $so(3,1)$.

La matrice S doit réarranger les entrées des éléments de $so(2,2)$ afin de les ramener dans le coin supérieur gauche (où se trouvent les entrées des éléments de $so(3,1)$). Puis, elle doit changer la signature du bloc supérieur 4×4, c'est-à-dire passer de $(3,1)$ à $(2,2)$. Pour les deux éléments restants, il faut garder la signature $(4,2)$ totale de la matrice. La matrice qui fait ce travail est :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.1}$$

En l'appliquant à $so(3,1)$ par $So_{31}S^{-1}$, nous identifions les associations suivantes :

$$\begin{aligned} &L_1 \rightarrow iD \qquad L_2 \rightarrow \frac{i}{2}(P_3 + C_3) \qquad L_3 \rightarrow \frac{1}{2}(P_3 - C_3) \\ &B_1 \rightarrow B_3 \qquad B_2 \rightarrow \frac{1}{2}(C_0 - P_0) \qquad B_3 \rightarrow \frac{i}{2}(C_0 + P_0). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Enfin, nous exponentions ces combinaisons de $so(2,2)$ pour avoir les éléments d'une nouvelle représentation de $SO(2,2)$ dans $SO(4,2)$:

$$O_{iD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos l & i\sin l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\sin l & \cos l \end{pmatrix}, \quad O_{\frac{1}{2}(P_3+C_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos p & 0 & -i\sin p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sin p & 0 & \cos p \end{pmatrix},$$

$$O_{\frac{1}{2}(P3-C3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos q & -\sin q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin q & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_{B_3} = \begin{pmatrix} \cosh g & 0 & 0 & \sinh g & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh g & 0 & 0 & \cosh g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3.3)$$

$$O_{\frac{1}{2}(C_0-P_0)} = \begin{pmatrix} \cosh m & 0 & 0 & 0 & \sinh m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh m & 0 & 0 & 0 & \cosh m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_{\frac{1}{2}(C_0+P_0)} = \begin{pmatrix} \cosh k & 0 & 0 & 0 & 0 & i\sinh k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\sinh k & 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh k \end{pmatrix},$$

où les indices correspondent aux combinaisons linéaires données par (2.3.2) et les paramètres sont réels et associés aux mêmes combinaisons linéaires.

2.4 Passage de $SO(2,2)$ à $SU(1,1) \otimes SU(1,1)$

En s'inspirant du passage décrit à la section 2.2.3 et de la relation entre $SO(3,1)$ et $SO(2,2)$, nous avons écrit un algorithme pour transporter $SO(2,2)$ vers le groupe unitaire auquel il est homomorphe, soit $SU(1,1) \otimes SU(1,1)$.

En appliquant $SO_{31}S^{-1}$, S donné par (2.3.1), à une matrice *générale* de $SO(3,1)$, nous sommes en mesure de voir à quelles entrées de $SO(2,2)$ chaque entrée de $SO(3,1)$ est reliée, ainsi que les facteurs entre ces entrées. Nous pouvons ainsi écrire l'algorithme en changeant les entrées lues et en changeant les générateurs de $SL(2,\mathbb{C})$ pour ceux de $SU(1,1)\otimes SU(1,1)$.

2.4.1 Base de $SU(1,1)\otimes SU(1,1)$

Il faut d'abord écrire notre base de matrices unitaires afin de trouver les générateurs appropriés. Pour ce faire, nous utilisons les mêmes combinaisons linéaires que pour $SO(2,2)$ (voir (2.3.2)) avec les éléments appropriés de l'algèbre $su(2,2)$ décrite à la section 2.1.2. Puis, ces combinaisons sont exponentiées pour obtenir les éléments du groupe :

$$
\begin{aligned}
U_{iD} &= \begin{pmatrix} \cos(d_1) & 0 & \sin(d_1) & 0 \\ 0 & \cos(d_1) & 0 & \sin(d_1) \\ -\sin(d_1) & 0 & \cos(d_1) & 0 \\ 0 & -\sin(d_1) & 0 & \cos(d_1) \end{pmatrix}, \\
U_{\frac{i}{2}(P_3+C_3)} &= \begin{pmatrix} \cos(d_2) & 0 & -i\sin(d_2) & 0 \\ 0 & \cos(d_2) & 0 & i\sin(d_2) \\ -i\sin(d_2) & 0 & \cos(d_2) & 0 \\ 0 & i\sin(d_2) & 0 & \cos(d_2) \end{pmatrix}, \\
U_{\frac{1}{2}(P3-C3)} &= \begin{pmatrix} \exp(-id_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(id_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(id_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-id_3) \end{pmatrix}, \\
U_{B_3} &= \begin{pmatrix} \cosh(d_4) & 0 & i\sinh(d_4) & 0 \\ 0 & \cosh(d_4) & 0 & -i\sinh(d_4) \\ -i\sinh(d_4) & 0 & \cosh(d_4) & 0 \\ 0 & i\sinh(d_4) & 0 & \cosh(d_4) \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{2.4.1}
$$

$$U_{\frac{1}{2}(C_0-P_0)} = \begin{pmatrix} \cosh(d_5) & 0 & \sinh(d_5) & 0 \\ 0 & \cosh(d_5) & 0 & \sinh(d_5) \\ \sinh(d_5) & 0 & \cosh(d_5) & 0 \\ 0 & \sinh(d_5) & 0 & \cosh(d_5) \end{pmatrix},$$

$$U_{\frac{1}{2}(C_0+P_0)} = \begin{pmatrix} \exp(d_6) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(d_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-d_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-d_6) \end{pmatrix},$$

où les paramètres sont réels. Il est à noter que ces combinaisons ne font pas ressortir le produit direct $SU(1,1)\otimes SU(1,1)$, cependant, nous les utilisons vu leur lien avec $SO(3,1)$.

2.4.2 Nouvel algorithme

En adaptant l'algorithme (2.2.10) pour le cas de $SO(2,2)$, nous obtenons ce qui suit avec $O \in SO(2,2)$:

$$\begin{aligned} SU = \; & \frac{1}{N\bar{N}}[\Re(N) * \{(Tr(O)-2)\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} \\ & +(O_{45}+O_{54})\mathbb{I}\otimes\sigma_2 - (O_{30}+O_{03})\sigma_3\otimes\sigma_2 \\ & +(O_{40}+O_{04})\mathbb{I}\otimes\sigma_1 + (O_{35}+O_{53})\sigma_3\otimes\sigma_1 \\ & -i(O_{50}-O_{05})\mathbb{I}\otimes\sigma_3 + i(O_{34}-O_{43})\sigma_3\otimes\sigma_3\} \\ & +\Im(N) * \{i(Tr(O)-2)\sigma_3\otimes\mathbb{I} \\ & -i(O_{30}+O_{03})\mathbb{I}\otimes\sigma_2 + i(O_{45}+O_{54})\sigma_3\otimes\sigma_2 \\ & +i(O_{35}+O_{53})\mathbb{I}\otimes\sigma_1 + i(O_{40}+O_{04})\sigma_3\otimes\sigma_1 \\ & -(O_{34}-O_{43})\mathbb{I}\otimes\sigma_3 + (O_{50}-O_{05})\sigma_3\otimes\sigma_3\}] \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

où N est tel que

$$\begin{aligned} N^2 &= 4-(Tr(O^2)-2)+(Tr(O)-2)^2-2(O_{30}+O_{03})(O_{45}+O_{54}) \\ &\quad +2(O_{40}+O_{04})(O_{35}+O_{53})+2(O_{50}-O_{05})(O_{34}-O_{43}). \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Encore une fois, il faut passer par R pour trouver la racine de N^2. De plus, le calcul numérique avec *Maple* doit être trituré pour maximiser les simplifications.

2.5 Lien entre $SO(4,2)$ et $SU(2,2)$

Pour ces groupes, nous nous sommes inspirés de Barut [4] et de Helgason [17]. Nous adoptons aussi la notation de Beckers [6] afin d'obtenir le passage entre ces deux groupes.

2.5.1 De $SU(2,2)$ à $SO(4,2)$

Dans cette direction, nous procédons de la même façon qu'à la section 2.2.1. Essentiellement, nous suivons la démarche de Barut [4], mais comme sa transformation n'est pas correcte, nous utilisons plutôt celle de Helgason [17].

Prenons deux matrices : $U \in SU(2,2)$ et $O \in SO(4,2)$. Nous définissons une matrice antisymétrique de la forme :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \eta^0 - i\eta^5 & -\eta^2 - i\eta^1 & \eta^4 + i\eta^3 \\ -\eta^0 + i\eta^5 & 0 & -\eta^4 + i\eta^3 & -\eta^2 + i\eta^1 \\ \eta^2 + i\eta^1 & \eta^4 - i\eta^3 & 0 & \eta^0 + i\eta^5 \\ -\eta^4 - i\eta^3 & \eta^2 - i\eta^1 & -\eta^0 - i\eta^5 & 0 \end{pmatrix}$$

que nous écrirons comme une combinaison de matrices Σ en (2.5.1). Nous lui appliquons la transformation : $Y' = UYU^t$, où U satisfait la relation (2.1.6), c'est-à-dire : $U^\dagger GU = G$ et G est une matrice diagonale, la métrique.

Il est facilement vérifiable que $Tr(YGY^{\dagger}G)$ est un invariant sous cette transformation. En effet,

$$\begin{aligned} Tr(Y'GY'^{\dagger}G) &= Tr(UY(U^{t}GU^{*})Y^{\dagger}U^{\dagger}G) \\ &= Tr(YGY^{\dagger}(U^{\dagger}GU)) \\ &= Tr(YGY^{\dagger}G) \end{aligned}$$

où la propriété de cyclicité de la trace et la relation $U^{\dagger}GU = G$ sont utilisées. La matrice Y' est, elle aussi, antisymétrique :

$$Y'^{t} = UY^{t}U^{t} = -UYU^{t} = -Y'.$$

De plus, en passant à l'algèbre, nous pouvons vérifier que la matrice Y' a la même forme que Y.

Avec la généralisation des matrices de Pauli faite à la section 2.1.3, nous pouvons écrire Y et Y' comme :

$$Y = \eta^{\rho}\Sigma_{\rho} \quad \text{et} \quad Y' = \eta'^{\rho}\Sigma_{\rho}, \quad \rho = 0, ..., 5. \tag{2.5.1}$$

Nous retrouvons donc six des Σ_i du tableau 2.1. En écrivant la trace invariante en détail, nous pouvons remarquer que les η_{ρ} subissent une transformation orthogonale, c'est-à-dire que : $\eta'^{\rho} = O^{\rho}{}_{\sigma}\eta^{\sigma}$.

Nous avons maintenant deux façons d'écrire Y' :

$$\begin{aligned} Y' &= \eta'^{\sigma}\Sigma_{\sigma} \\ &= O^{\sigma}{}_{\pi}\eta^{\pi}\Sigma_{\sigma} \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

et

$$\begin{aligned} Y' &= UYU^t \\ &= U\eta^{\pi}\Sigma_{\pi}U^t. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

En comparant les coefficients de η^{π} dans (2.5.2) et (2.5.3), en multipiant par Σ^{σ} et en prenant la trace, nous obtenons la relation :

$$O^{\sigma}{}_{\pi} = \pm\frac{1}{4}Tr(U\Sigma_{\pi}U^t\Sigma^{\sigma}), \tag{2.5.4}$$

où le signe $+$ est pour $\sigma = 1, 3, 5$ et $-$, pour $\sigma = 0, 2, 4$.

Nous avons donc une méthode pour écrire les éléments de $SO(4,2)$ si nous connaissons $SU(2,2)$.

2.5.2 De $SO(4,2)$ à $SU(2,2)$

Pour ce cas, nous avons tenté de procéder comme à la section 2.2.2. Nous voudrions utiliser la relation $O^{\sigma}{}_{\pi}\Sigma_{\sigma} = U\Sigma_{\pi}U^t$ où l'indice sur Σ va de 0 à 5. Puis, poser que U est de la forme :

$$U = \sum_{i=0}^{15} \alpha_i\Sigma_i,$$

où les α sont des coefficients complexes normalisés par la condition du déterminant égal à un. La somme va de 0 à 15 car il y a 16 générateurs linéairement indépendants.

Cependant, cette approche s'est avérée ardue vu le grand nombre de coefficients à déterminer et le fait que les équations soient quadratiques. Nous avons plutôt essayé d'approcher le problème une transformation à la fois en s'inspirant des résultats pour $SO(3,1)$ et $SO(2,2)$.

En fait, il faut décomposer $SO(4,2)$ comme quatre ensembles ayant la structure de $SO(3,1)$, c'est-à-dire :

$$\{L_1, L_2, L_3, B_1, B_2, B_3\} \tag{2.5.5}$$

$$\{iD, \frac{i}{2}(P_i + C_i), \frac{1}{2}(P_i - C_i), B_i, \frac{1}{2}(C_0 - P_0), \frac{i}{2}(P_0 + C_0)\}, i = 1, 2, 3. \tag{2.5.6}$$

2.5.2.1 Algorithme

Avec tout cela, nous pouvons maintenant écrire un algorithme qui mélange et complète ceux de $SO(3,1)$ (voir (2.2.10)) et $SO(2,2)$ (voir (2.4.2)). Nous allons utiliser seulement la partie réelle pour l'instant puisque nos besoins sont pour les éléments pris un à un, et non pour des produits. Cet algorithme s'écrit :

$$\begin{aligned} SU \;=\; & \frac{1}{N\bar{N}}[\Re(N) * \{(Tr(O) - 2)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \\ & + i\varepsilon^{ijk} O_{jk} \sigma_i \otimes \mathbb{I} \\ & + (O_{45} + O_{54})\mathbb{I} \otimes \sigma_2 - (O_{i0} + O_{0i})\sigma_i \otimes \sigma_2 \\ & + (O_{40} + O_{04})\mathbb{I} \otimes \sigma_1 + (O_{i5} + O_{5i})\sigma_i \otimes \sigma_1 \\ & - i(O_{50} - O_{05})\mathbb{I} \otimes \sigma_3 + i(O_{i4} - O_{4i})\sigma_i \otimes \sigma_3\}]. \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

N est donné par :

$$\begin{aligned} N^2 \;=\; & 4 - (Tr(O^2) - 2) + (Tr(O) - 2)^2 \\ & - 2i\varepsilon^{ijk}(O_{i0} + O_{0i})O_{jk} - 2(O_{i0} + O_{0i})(O_{45} + O_{54}) \\ & + 2(O_{40} + O_{04})(O_{i5} + O_{5i}) + 2(O_{50} - O_{05})(O_{i4} - O_{4i}) \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

où dans les deux dernières lignes, il faut faire la somme sur $i = 1, 2, 3$.

Cet algorithme permet d'obtenir les quinze éléments de $SU(2,2)$ à partir des quinze éléments de $SO(4,2)$, cependant il ne fonctionne pas bien pour certains produits.

2.5.2.2 Algorithme plus compact

En s'inspirant de l'écriture compacte de l'algorithme pour le cas de $SO(3,1)$ et des propriétés des produits des Σ_ρ, $\rho = 0, ..., 5$, nous tentons d'écrire une forme plus compacte de l'algorithme.

Nous fixons d'abord les générateurs originaux comme covariants :

$$\begin{aligned} &\Sigma_0 = i\sigma_2 \otimes \mathbb{I}, \quad \Sigma_1 = \sigma_3 \otimes \sigma_2, \quad \Sigma_2 = -i\mathbb{I} \otimes \sigma_2, \\ &\Sigma_3 = -\sigma_1 \otimes \sigma_2, \quad \Sigma_4 = i\sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \Sigma_5 = \sigma_2 \otimes \sigma_3. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Puis, nous définissons les contravariants de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\Sigma^0 = \Sigma_0, \quad \Sigma^1 = -\Sigma_1, \quad \Sigma^2 = -\Sigma_2, \\ &\Sigma^3 = -\Sigma_3, \quad \Sigma^4 = -\Sigma_4, \quad \Sigma^5 = \Sigma_5. \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Nous cherchons d'abord à retrouver le terme pour les rotations. Autrement dit, nous voulons réécrire :

$$i\varepsilon^{ijk} O_{jk} \sigma_i \otimes \mathbb{I} \tag{2.5.11}$$

comme quelquechose de la forme :

$$O_{jk} \Sigma_j \Sigma_k, \tag{2.5.12}$$

avec $i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3$. Nous devrions donc avoir que $\Sigma_j \Sigma_k = -\Sigma_k \Sigma_j$ pour respecter le changement de signe dû au ε^{ijk}.

Voici les résultats des produits $\Sigma_j \Sigma_k$:

$$\Sigma_1 \Sigma_2 = -i\sigma_3 \otimes \mathbb{I} = \Sigma_2 \Sigma_1, \tag{2.5.13}$$

$$\Sigma_1 \Sigma_3 = -i\sigma_2 \otimes \mathbb{I} = -\Sigma_3 \Sigma_1, \tag{2.5.14}$$

$$\Sigma_2 \Sigma_3 = i\sigma_1 \otimes \mathbb{I} = \Sigma_3 \Sigma_2 \tag{2.5.15}$$

Nous remarquons que les signes relatifs ne concordent pas dans les premier et troisième cas.

Même en essayant d'autres combinaisons d'indices covariants ou contravariants, le problème persiste puisque ça ne touche pas les indices des rotations (1, 2, 3). Nous essayons également différentes bases de la littérature [4, 11, 17], mais le problème de signe des produits $\Sigma_j \Sigma_k$ demeure dans tous les cas.

Bref, tout ce qui est écrit en fonction des matrices de Pauli est bon, mais il semble impossible de l'écrire sous forme compacte parce que nous ne trouvons pas de base Σ_ρ possédant des propriétés satisfaisantes.

Chapitre 3

Contraction de l'algèbre conforme

Nous allons maintenant appliquer un processus de contraction à l'algèbre conforme sous différentes représentations matricielles. Nous commençons par présenter quelques exemples et le principe du processus. Puis, nous contractons la représentation $so(4,2)$ de l'algèbre conforme. Ensuite, la représentation $su(2,2)$ est contractée suivant quelques approches différentes. Enfin, nous donnons une contraction de l'algèbre conforme en utilisant seulement les relations de commutation, c'est-à-dire sans égard à la représentation.

3.1 Exemples de contraction de la littérature

La contraction a été introduite en 1953 [21] dans une tentative de formaliser le lien observé entre certains groupes relativistes et non-relativistes. On établit entre autres le lien entre le groupe de Poincaré et le groupe de Galilée. Il est possible de classifier les contractions en quatre types [1] selon les quantités qui deviennent petites lors du processus. Ces quatre types sont :

- *vitesse-espace*, qui correspond au passage d'un temps relatif à un temps absolu ;

- *vitesse-temps*, qui donne des groupes reliant des événements sans lien causal, donc pas très utile en physique ;
- *espace-temps* qui donne des groupes décrivant des transformations locales ;
- *général*, qui combine toutes ces caractéristiques.

Il est aussi possible de contracter des superstructures, par exemple, il a été montré que la superalgèbre anti-de Sitter se contracte sur la superalgèbre de Poincaré, puis sur celle de Galilée [20]. Les contractions qui permettent de préserver une graduation de l'algèbre ou de la superalgèbre (une décomposition vectorielle) sont appelées contractions graduées [24]. Elles auraient un lien avec la réalisation non linéaire du groupe d'invariance relié à la brisure de symétrie [9]. Les contractions telles que définies par Inonu-Wigner [21] sont continues, mais il est également possible de définir des contractions discrètes [24]. Celles-ci complètent en quelque sorte l'ensemble des contractions. Notons enfin qu'il est possible faire un programme qui génère et résoud les équations pour effectuer la contraction à l'aide d'un ordinateur [7]. Cependant, dans ce travail, nous allons faire la contraction à la main avec la représentation matricielle des algèbres.

3.2 Paramètres et limites

Le but du processus est d'obtenir une version non-relativiste de l'algèbre conforme. Afin de pouvoir effectuer ce processus de contraction, il est nécessaire de modifier la base des matrices que nous considérons ici. Pour ce faire, nous donnons plus de libertés à la métrique et aux matrices de transformations en ajoutant des paramètres.

Les paramètres sont introduits par une matrice S_ε, non-singulière, telle que la métrique k et les générateurs M deviennent respectivement [20] :

$$k_\varepsilon = S_\varepsilon^t k S_\varepsilon \tag{3.2.1}$$

et

$$M_\varepsilon = S_\varepsilon^{-1} M S_\varepsilon \tag{3.2.2}$$

et satisfont l'équation $M_\varepsilon^t k_\varepsilon + k_\varepsilon M_\varepsilon = 0$. Dans le cas de $so(4,2)$, cette matrice est donnée par :

$$S_\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6).$$

L'idée est de trouver quels paramètres seront égaux entre eux et lesquels nous ferons tendre vers 0 afin de n'avoir aucune singularité dans les générateurs. De plus, nous exigeons que le groupe de Poincaré comme sous-groupe du groupe conforme se contracte sur celui de Galilée.

Afin de donner plus de liberté, nous ajouterons également des paramètres ε_M à chacun des générateurs M qui se liront donc :

$$M_\varepsilon = \varepsilon_M S_\varepsilon^{-1} M S_\varepsilon. \tag{3.2.3}$$

Pour la suite, nous adoptons la convention de notation suivante : tous les générateurs et algèbres qui contiennent les paramètres de contraction porteront l'indice ε.

En général, la contraction dépend de la représentation choisie. Ainsi, nous verrons que pour le groupe conforme, les résultats peuvent être forts différents si on considère les algèbres $so(4,2)$ ou $su(2,2)$ pour décrire son algèbre.

3.3 Contraction de $so(4,2)$

Nous sommes maintenant prêts à passer à la contraction de l'algèbre conforme sous une première représentation, $so(4,2)$. Nous présentons d'abord les contraintes à respecter, puis les générateurs avec les paramètres et leurs commutateurs. Ensuite, nous choisissons les paramètres à faire tendre vers 0 et nous donnons l'algèbre contractée dans ses représentations matricielle et différentielle.

3.3.1 Contraintes

Afin d'orienter la contraction, nous exigeons que la partie algèbre de Poincaré se contracte sur l'algèbre de Galilée. Ceci implique que les générateurs de rotation soient préservés par la contraction. En fait, nous voulons que celle-ci soit de type vitesse-espace, donc seul le temps est affecté.

La façon de nous assurer que la partie Poincaré arrive bien sur Galilée est d'exiger que les commutateurs contenant seulement les rotations, les *boosts* et les translations deviennent les mêmes que pour l'algèbre de Galilée. Nous cherchons donc $[B_i, B_j] = 0$ et $[B_i, P_j] = 0$, $\forall i, j = 1, 2, 3,$. Les autres commutateurs de Poincaré demeureront inchangés. Nous verrons comment les commutateurs contenant la dilatation ou les transformations conformes sont modifiés, cependant, il n'y a pas de contraintes.

3.3.2 Nouveaux générateurs et commutateurs

À l'aide de la matrice S_ε, nous réécrivons les quinze matrices de transformation en utilisant la relation (3.2.3) :

$$o_{L_{1\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{L_1}\varepsilon_4\varepsilon_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{L_1}\varepsilon_3\varepsilon_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{L_{2\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{L_2}\varepsilon_4\varepsilon_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{L_2}\varepsilon_2\varepsilon_4^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{L_{3\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{L_3}\varepsilon_3\varepsilon_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{L_3}\varepsilon_2\varepsilon_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{B_{1\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{B_1}\varepsilon_2\varepsilon_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{B_1}\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{B_{2\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{B_2}\varepsilon_3\varepsilon_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{B_2}\varepsilon_1\varepsilon_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{B_{3\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{B_3}\varepsilon_4\varepsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{B_3}\varepsilon_1\varepsilon_4^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{D_\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_D\varepsilon_6\varepsilon_5^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_D\varepsilon_5\varepsilon_6^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.1}$$

$$o_{P_{0\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{P_0}\varepsilon_5\varepsilon_1^{-1} & -\varepsilon_{P_0}\varepsilon_6\varepsilon_1^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_{P_0}\varepsilon_1\varepsilon_5^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{P_0}\varepsilon_1\varepsilon_6^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{P_{1\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{P_1}\varepsilon_5\varepsilon_2^{-1} & -\varepsilon_{P_1}\varepsilon_6\varepsilon_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{P_1}\varepsilon_2\varepsilon_5^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{P_1}\varepsilon_2\varepsilon_6^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{P_{2\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{P_2}\varepsilon_5\varepsilon_3^{-1} & -\varepsilon_{P_2}\varepsilon_6\varepsilon_3^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{P_2}\varepsilon_3\varepsilon_5^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{P_2}\varepsilon_3\varepsilon_6^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{P_{3\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{P_3}\varepsilon_5\varepsilon_4^{-1} & -\varepsilon_{P_3}\varepsilon_6\varepsilon_4^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{P_3}\varepsilon_4\varepsilon_5^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{P_3}\varepsilon_4\varepsilon_6^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$o_{C_{0\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{C_0}\varepsilon_5\varepsilon_1^{-1} & -\varepsilon_{C_0}\varepsilon_6\varepsilon_1^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{C_0}\varepsilon_1\varepsilon_5^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{C_0}\varepsilon_1\varepsilon_6^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{C_{1\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{C_1}\varepsilon_5\varepsilon_2^{-1} & -\varepsilon_{C_1}\varepsilon_6\varepsilon_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{C_1}\varepsilon_2\varepsilon_5^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{C_1}\varepsilon_2\varepsilon_6^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{C_{2\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{C_2}\varepsilon_5\varepsilon_3^{-1} & -\varepsilon_{C_2}\varepsilon_6\varepsilon_3^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{C_2}\varepsilon_3\varepsilon_5^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{C_2}\varepsilon_3\varepsilon_6^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{C_{3\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{C_3}\varepsilon_5\varepsilon_4^{-1} & -\varepsilon_{C_3}\varepsilon_6\varepsilon_4^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{C_3}\varepsilon_4\varepsilon_5^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{C_3}\varepsilon_4\varepsilon_6^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est maintenant possible d'écrire les commutateurs de ces nouveaux générateurs. D'abord, ceux qui doivent s'annuler s'écrivent :

$$[B_i, B_j] = -\varepsilon_{B_i}\varepsilon_{B_j}\varepsilon_{L_k}^{-1}\varepsilon_{ijk}L_k, \quad [B_i, P_j] = \varepsilon_{B_i}\varepsilon_{P_j}\varepsilon_{P_0}^{-1}\delta_{ij}P_0. \tag{3.3.2}$$

Puis, ceux qui devraient rester les mêmes sont :

$$\begin{gathered} [L_i, L_j] = \varepsilon_{L_i}\varepsilon_{L_j}\varepsilon_{L_k}^{-1}\varepsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, B_j] = \varepsilon_{L_i}\varepsilon_{B_j}\varepsilon_{B_k}^{-1}\varepsilon_{ijk}B_k, \\ [L_i, P_0] = 0, \quad [L_i, P_j] = \varepsilon_{L_i}\varepsilon_{P_j}\varepsilon_{P_k}^{-1}\varepsilon_{ijk}P_k, \\ [B_i, P_0] = \varepsilon_{B_i}\varepsilon_{P_0}\varepsilon_{P_i}^{-1}P_i, \quad [P_\mu, P_\nu] = 0. \end{gathered} \tag{3.3.3}$$

Enfin, ceux qui pourraient se transformer lors du passage à la limite deviennent :

$$[L_i, D] = 0, \quad [B_i, D] = 0, \quad [L_i, C_0] = 0, \quad [L_i, C_j] = \varepsilon_{L_i}\varepsilon_{C_j}\varepsilon_{C_k}^{-1}\varepsilon_{ijk}C_k,$$
$$[B_i, C_0] = \varepsilon_{B_i}\varepsilon_{C_0}\varepsilon_{C_i}^{-1}C_i, \quad [B_i, C_j] = \varepsilon_{B_i}\varepsilon_{C_j}\varepsilon_{C_0}^{-1}\delta_{ij}C_0,$$
$$[D, P_\mu] = -\varepsilon_D P_\mu, \quad [D, C_\mu] = \varepsilon_D C_\mu,$$
$$[P_\mu, C_\nu] = 2\varepsilon_{P_\mu}\varepsilon_{C_\nu}(k_{\mu\nu}\varepsilon_D^{-1}D + \varepsilon_{J_{\mu\nu}}^{-1}J_{\mu\nu}), \quad [C_\mu, C_\nu] = 0. \tag{3.3.4}$$

Notons que le $\varepsilon_{J_{\mu\nu}}$ est le ε_{L_i} ou le ε_{B_i} correspondant au $J_{\mu\nu}$ selon la relation (2.1.3).

3.3.3 Choix des paramètres

Pour choisir les paramètres qui seront égaux entre eux et qui tendront vers 0, nous nous concentrons sur les commutateurs à annuler tout en veillant à ce que les autres générateurs et commutateurs ne deviennent pas singuliers. Étant donné qu'il y a deux ε au numérateur et un seul au dénominateur, il est relativement simple d'éviter les singularités.

En posant que $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_{P_1} = \varepsilon_{P_2} = \varepsilon_{P_3} = \varepsilon_{B_1} = \varepsilon_{B_2} = \varepsilon_{B_3} = \varepsilon_{C_1} = \varepsilon_{C_2} = \varepsilon_{C_3} \to 0$ (une alternative équivalente est $\varepsilon_1 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = \varepsilon_{P_1} = \varepsilon_{P_2} = \varepsilon_{P_3} = \varepsilon_{B_1} = \varepsilon_{B_2} = \varepsilon_{B_3} = \varepsilon_{C_1} = \varepsilon_{C_2} = \varepsilon_{C_3} \to 0$), l'écriture des nouveaux générateurs est simplifiée sans qu'il y en ait un qui s'annule et sans que des singularités soient créées. Les générateurs contractés sont donnés à la section suivante. De plus, notons que ce choix préserve les rotations et redonne bien les commutateurs de Galilée.

3.3.4 Algèbre contractée

Après la contraction, les générateurs s'écrivent (en supposant que les paramètres introduits qui ne s'annulent pas sont pris égaux à 1) :

$$o_{L_{1c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad o_{L_{2c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{L_{3c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad o_{B_{1c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{B_{2c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad o_{B_{3c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$o_{D_c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.5}$$

$$o_{P_{0c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad o_{P_{1c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{P_{2c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad o_{P_{3c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{C_{0c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad o_{C_{1c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$o_{C_{2c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad o_{C_{3c}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que les rotations, la dilatation de même que la translation et la transformation conforme temporelles ne sont pas transformées. De plus, les commutateurs demeurent les mêmes, sauf les suivants qui s'annulent :

$$[B_i, B_j] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3); \tag{3.3.6}$$

$$[B_i, P_i] = 0 \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{3.3.7}$$

$$[B_i, C_i] = 0 \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{3.3.8}$$

$$[P_i, C_j] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{3.3.9}$$

Donc, nous retrouvons bien les commutateurs du groupe de Galilée. De plus, les commutateurs des *boosts* et des translations spatiales avec les transformations conformes spatiales s'annulent eux aussi.

3.3.5 Représentation différentielle

Nous cherchons maintenant une représentation différentielle des générateurs qui permet d'obtenir les mêmes commutateurs que dans le cas contracté. Pour ce faire, nous commençons par nous placer dans une seule dimension spatiale afin de réduire le nombre d'équations différentielles à résoudre. Nous gardons les générateurs O_{B_1c}, O_{Dc}, O_{P_0c}, O_{P_1c}, O_{C_0c} et O_{C_1c}, puis nous les posons comme des opérateurs linéaires de la forme suivante :

$$A_i = a_i(x,t)\partial_t + b_i(x,t)\partial_x + c_i(x,t),$$

où $A_0 = O_{C_0c}$, $A_1 = O_{C_1c}$, $A_2 = O_{P_0c}$, $A_3 = O_{P_1c}$, $A_4 = O_{B_1c}$ et $A_5 = O_{Dc}$.

Nous connaissons déjà la forme des générateurs de Galilée (voir (1.4.1)), ce qui permet de poser que $a_2 = 1$, $b_2 = 0$, $c_2 = 0$, $a_3 = 0$, $b_3 = -1$, $c_3 = 0$, $a_4 = 0$ et $b_4 = t$. Nous imposons aussi que $c_4 = 0$, c'est-à-dire que nous ignorons le terme de masse (mx) dans le *boost* puisque nous sommes dans le cas d'une masse nulle.

En appliquant les commutateurs, nous obtenons une série d'équations différentielles à résoudre. Nous trouvons ainsi la représentation différentielle des six généra-

Translations	$o_{P_0c} = \partial_t$ $o_{P_ic} = -\partial_i$
Rotations	$o_{L_ic} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}x_j\partial_k$
Boosts	$o_{B_ic} = t\partial_i$
Dilatation	$o_{Dc} = t\partial_t + x_i\partial_i + k$
Transformations conformes	$o_{C_0c} = t^2\partial_t + 2tx_i\partial_i + 2kt$ $o_{C_ic} = t^2\partial_i$

TAB. 3.1 – Générateurs de l'algèbre conforme contractée, k est une constante quelconque

teurs que nous adaptons au cas à trois dimensions spatiales. Puis, nous ajoutons les rotations qui sont connues de Galilée et qui demeurent inchangées par la contraction (mis à part les facteurs $\pm i$ qui dépendent des choix de paramètres). Enfin, nous vérifions que tout est correct en calculant les commutateurs. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 3.1. Notons que tous les indices répétés sont sommés.

Nous remarquons que les éléments du groupe de Galilée sont semblables à ceux donnés en (1.4.1) mis à part des facteurs i. De plus, par rapport à la représentation différentielle du groupe conforme donnée en (1.4.3), la dilatation est inchangée tandis que les transformations conformes spatiales perdent des termes. Ceci est dans le cas où nous prenons la constante k nulle. La transformation conforme temporelle quant à elle perd un seul terme alors qu'elle était inchangée matriciellement. C'est nécessaire afin que le commutateur avec P_1, par exemple, redonne bien le *boost* B_1 contracté.

Il est intéressant de noter que cette algèbre obtenue par contraction correspond bien à celle des groupes conformes non-relativistes [25] pour l'espace-temps de Galilée. Pour ce faire, il faut prendre le paramètre $l = 1$ et exclure la dilatation spatiale. Nous prenons également notre constante k nulle.

3.4 Contraction directe de $su(2,2)$

Nous allons maintenant tenter de contracter le groupe conforme sous sa représentation unitaire. Cette contraction devrait nous servir dans le cas de la superalgèbre qui sera construite à partir de $su(2,2)$.

3.4.1 Nouveaux générateurs et commutateurs

Nous transformons les générateurs de $su(2,2)$ donnés dans le tableau 2.1 de la même façon qu'à la section 3.2. Cette fois-ci la matrice S_ε est remplacée par la matrice $P_\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ et les matrices M sont celles de $su(2,2)$ dans l'équation (3.2.3). Notons que les ε_i ne sont pas les mêmes que dans le cas de $so(4,2)$. Les commutateurs ont exactement la même forme que dans le cas de la représentation $so(4,2)$.

3.4.2 Contraintes et choix des paramètres

Nous imposons les mêmes contraintes que pour $so(4,2)$, c'est-à-dire que nous exigeons que la partie algèbre de Poincaré se contracte sur l'algèbre de Galilée. De plus, les générateurs de rotation devraient aussi être préservés par la contraction.

Ainsi, nous exigeons que les commutateurs contenant seulement les rotations, les *boosts* et les translations deviennent les mêmes que pour l'algèbre de Galilée, soit $[B_i, B_j] = 0$ et $[B_i, P_j] = 0$, $\forall i, j = 1, 2, 3,$. Les autres commutateurs de Poincaré devraient demeurer inchangés. Nous verrons comment les commutateurs contenant la dilatation ou les transformations conformes se transformeront dans ce cas-ci.

À première vue, il n'est pas évident de trouver une bonne combinaison, car nous sommes limités dans le nombre des paramètres. Une façon de préserver les rotations et d'avoir des générateurs non-nuls et non-singuliers est de choisir les paramètres suivants : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_D = \varepsilon_{B_1} = \varepsilon_{B_2} = \varepsilon_{B_3} = \varepsilon_{P_0} = \varepsilon_{P_1} = \varepsilon_{P_2} = \varepsilon_{P_3} = \varepsilon_{C_0} = \varepsilon_{C_1} = \varepsilon_{C_2} = \varepsilon_{C_3} \to 0$. Le problème avec ce choix, c'est que certains générateurs sont linéairement dépendants. Par exemple, $P_0 = -C_0 = -iD$ et $P_i = C_i = iB_i$, ce qui, avec les rotations, fait sept générateurs au lieu de quinze. De plus, nous retrouvons presque tous les commutateurs de Galilée (donnés par (3.3.2) et (3.3.3)), sauf ceux de B_i et P_0 qui s'annulent, ce qui fait que nous ne retrouvons pas l'algèbre du groupe de Galilée. Enfin, le reste des commutateurs (donnés par (3.3.4)) sont nuls sauf ceux de L_i et C_j ce qui ne donne pas une structure très intéressante.

Essayons plutôt de trouver un choix de paramètres qui donne quinze générateurs indépendants tout en préservant les rotations. La condition pour préserver les rotations est que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ou $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$, mais pas d'autres combinaisons. Ensuite, pour que P_1 et B_1, par exemple, soient indépendants, il faudrait que ε_{P_1} soit non-nul. Cependant, cela cause une singularité et, en plus, le commutateur $[B_1, P_1]$ ne s'annulerait pas.

Il ne semble donc pas possible de trouver une combinaison satisfaisante de paramètres qui redonne quinze générateurs indépendants.

3.4.3 Algèbre contractée

Nous ne sommes pas arrivés à trouver une algèbre contractée satisfaisante, c'est-à-dire ayant au moins quinze générateurs indépendants. Une des raisons qui pourrait expliquer cela est que nous avons introduit deux paramètres de moins que dans le cas $so(4,2)$. Il faut donc trouver une façon d'intégrer plus de paramètres.

3.5 Contraction de $su(2,2)$ en transportant $so(4,2)$

Étant donné que nous n'avons pas obtenu une algèbre satisfaisante à la section précédente, nous allons tenter d'utiliser la contraction de $so(4,2)$ obtenue à la section 3.3 et le lien entre les représentations $SO(4,2)$ et $SU(2,2)$ présenté à la section 2.5.2 afin d'obtenir une autre contraction de $su(2,2)$. L'objectif de cette approche est d'introduire plus de paramètres qu'auparavant afin d'avoir des libertés supplémentaires pour faire la contraction.

3.5.1 Calcul des générateurs de $su(2,2)_\varepsilon$

Nous avons d'abord exponentié les $so(4,2)_\varepsilon$ de la section 3.3.2 pour obtenir les matrices du groupe $SO(4,2)_\varepsilon$. Puis, nous avons fait le passage de ce groupe, élément par élément, vers un $SU(2,2)_\varepsilon$ avec l'algorithme (2.5.7). Enfin, nous avons dérivé pour obtenir l'algèbre $su(2,2)_\varepsilon$, c'est-à-dire une algèbre $su(2,2)$ avec des nouveaux paramètres. Les générateurs sont :

$$
\begin{aligned}
u_{L_{1\varepsilon}} &= \frac{-i\varepsilon_{L_1}(\varepsilon_3^2+\varepsilon_4^2)}{2\varepsilon_3\varepsilon_4} \quad \sigma_1 \otimes \mathbb{I}, \\
u_{L_{2\varepsilon}} &= \frac{-i\varepsilon_{L_2}(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2)}{2\varepsilon_2\varepsilon_4} \quad \sigma_2 \otimes \mathbb{I}, \\
u_{L_{3\varepsilon}} &= \frac{-i\varepsilon_{L_3}(\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)}{2\varepsilon_2\varepsilon_3} \quad \sigma_3 \otimes \mathbb{I}, \\
u_{B_{1\varepsilon}} &= \frac{-\varepsilon_{B_1}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)}{2\varepsilon_1\varepsilon_2} \quad \sigma_1 \otimes \sigma_2, \\
u_{B_{2\varepsilon}} &= \frac{-\varepsilon_{B_2}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_3^2)}{2\varepsilon_1\varepsilon_3} \quad \sigma_2 \otimes \sigma_2, \\
u_{B_{3\varepsilon}} &= \frac{-\varepsilon_{B_3}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_4^2)}{2\varepsilon_1\varepsilon_4} \quad \sigma_3 \otimes \sigma_2, \\
u_{D_\varepsilon} &= \frac{\varepsilon_D(\varepsilon_5^2+\varepsilon_6^2)}{2\varepsilon_5\varepsilon_6} \quad \mathbb{I} \otimes \sigma_2, \\
u_{P_{0\varepsilon}} &= \frac{-i\varepsilon_{P_0}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_6^2)}{2\varepsilon_1\varepsilon_6} \quad \mathbb{I} \otimes \sigma_3 - \frac{\varepsilon_{P_0}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_5^2)}{2\varepsilon_1\varepsilon_5} \quad \mathbb{I} \otimes \sigma_1, \\
u_{P_{1\varepsilon}} &= \frac{-i\varepsilon_{P_1}(\varepsilon_2^2+\varepsilon_5^2)}{2\varepsilon_2\varepsilon_5} \quad \sigma_1 \otimes \sigma_3 - \frac{\varepsilon_{P_1}(\varepsilon_2^2+\varepsilon_6^2)}{2\varepsilon_2\varepsilon_6} \quad \sigma_1 \otimes \sigma_1, \\
u_{P_{2\varepsilon}} &= \frac{-i\varepsilon_{P_2}(\varepsilon_3^2+\varepsilon_5^2)}{2\varepsilon_3\varepsilon_5} \quad \sigma_2 \otimes \sigma_3 - \frac{\varepsilon_{P_2}(\varepsilon_3^2+\varepsilon_6^2)}{2\varepsilon_3\varepsilon_6} \quad \sigma_2 \otimes \sigma_1, \\
u_{P_{3\varepsilon}} &= \frac{-i\varepsilon_{P_3}(\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2)}{2\varepsilon_4\varepsilon_5} \quad \sigma_3 \otimes \sigma_3 - \frac{\varepsilon_{P_3}(\varepsilon_4^2+\varepsilon_6^2)}{2\varepsilon_4\varepsilon_6} \quad \sigma_3 \otimes \sigma_1, \\
u_{C_{0\varepsilon}} &= \frac{-i\varepsilon_{C_0}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_6^2)}{2\varepsilon_1\varepsilon_6} \quad \mathbb{I} \otimes \sigma_3 + \frac{\varepsilon_{C_0}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_5^2)}{2\varepsilon_1\varepsilon_5} \quad \mathbb{I} \otimes \sigma_1, \\
u_{C_{1\varepsilon}} &= \frac{i\varepsilon_{C_1}(\varepsilon_2^2+\varepsilon_5^2)}{2\varepsilon_2\varepsilon_5} \quad \sigma_1 \otimes \sigma_3 - \frac{\varepsilon_{C_1}(\varepsilon_2^2+\varepsilon_6^2)}{2\varepsilon_2\varepsilon_6} \quad \sigma_1 \otimes \sigma_1,
\end{aligned}
\tag{3.5.1}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{C_{2\varepsilon}} &= \frac{i\varepsilon_{C_2}(\varepsilon_3^2+\varepsilon_5^2)}{2\varepsilon_3\varepsilon_5}\quad \sigma_2\otimes\sigma_3 - \frac{\varepsilon_{C_2}(\varepsilon_3^2+\varepsilon_6^2)}{2\varepsilon_3\varepsilon_6}\quad \sigma_2\otimes\sigma_1,\\
u_{C_{3\varepsilon}} &= \frac{i\varepsilon_{C_3}(\varepsilon_4^2+\varepsilon_5^2)}{2\varepsilon_4\varepsilon_5}\quad \sigma_3\otimes\sigma_3 - \frac{\varepsilon_{C_3}(\varepsilon_4^2+\varepsilon_6^2)}{2\varepsilon_4\varepsilon_6}\quad \sigma_3\otimes\sigma_1.
\end{aligned}
$$

La métrique de cette algèbre est bien $h = \mathrm{diag}(+1,+1,-1,-1)$. Cependant, cette métrique ne s'applique pas bien au groupe $SU(2,2)_\varepsilon$. Nous n'arrivons pas à trouver une métrique satisfaisante pour tous les éléments de ce groupe.

Les commutateurs sont un peu différents de ce que nous avions avant. La différence, c'est que les translations ne commutent plus entre elles, les transformations conformes non plus. Ces commutateurs donnent plutôt des rotations et des *boosts*. La raison est assez simple, c'est parce qu'il y a une somme de deux générateurs Σ ayant chacun un coefficient différent avec les ε. Donc, avec ces paramètres, ça ne se simplifie plus. En imposant $\varepsilon_5 = \varepsilon_6$, nous obtenons bien les anciens commutateurs. De toute façon, il va falloir surveiller ces cas-là en plus lors du choix de paramètres.

3.5.1.1 Calcul de la nouvelle matrice P_ε

Nous aimerions connaître la forme de la matrice P_ε qui permet d'obtenir les matrices de (3.5.2) à partir de celles présentées dans le tableau 2.1 par la relation $u_\varepsilon = \varepsilon_u P_\varepsilon^{-1} u P_\varepsilon$.

Il n'est pas facile de trouver cette matrice en travaillant avec un générateur unitaire quelconque car il y a beaucoup d'inconnus. En fait, même en travaillant avec un seul générateur à la fois, le système ne semble pas avoir de solutions (avec Maple). Une des raisons qui pourrait expliquer cela est que nous avons des rapports inverses à égaler.

Tout cela voudrait dire que les paramètres introduits par le passage ne pourraient pas apparaître dans $su(2,2)$ par une transformation de la forme : $u_\varepsilon = \varepsilon_u P_\varepsilon^{-1} u P_\varepsilon$. Nous allons tout de même tenter de contracter l'algèbre donnée par (3.5.2).

3.5.2 Choix des paramètres

Pour une première tentative, nous utilisons les mêmes conditions sur les ε que dans le cas $so(4,2)$. Cependant, à la limite, nous obtenons que les générateurs sont tous inchangés, donc les commutateurs aussi ne changent pas et ne deviennent pas ceux de Galilée.

Il faut donc essayer d'autres combinaisons de paramètres. Encore une fois, nous nous concentrons sur les commutateurs à annuler tout en veillant à ce que les autres générateurs et commutateurs ne deviennent pas singuliers. En plus, nous veillons à conserver les rotations.

Nous remarquons que les générateurs ont une unique combinaison de paramètres qui apparaît dans leurs différentes entrées. Il ne faut donc pas l'annuler pour éviter d'annuler le générateur au complet. Ceci pose un problème parce que ces mêmes combinaisons se trouvent dans des commutateurs à annuler.

Nous sommes donc dans une impasse, les paramètres tels qu'introduits sont trop contraignants. Il nous faut trouver une façon de les modérer.

3.5.3 Assouplissement des conditions

Étant donné que les conditions de la section précédente sont trop contraignantes, nous allons les assouplir en renommant les rapports de paramètres. Nous pouvons le faire puisque notre objectif est d'avoir des paramètres pour faire la contraction de $su(2,2)$. Nous n'avons pas besoin qu'ils soient identiques à ceux de $so(4,2)$.

Vues les difficultés rencontrées, deux principes peuvent nous guider. En premier, nous essayons d'éliminer les sommes de rapports inverses $(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}+\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i})$ afin que les choix soient plus facile à faire. En effet, si l'un des rapports tend vers 0, l'autre diverge, ce qui posait problème. Cependant, ça ne s'avère pas très utile car les générateurs gardent leur unique combinaison de paramètres ce qui rend les commutateurs difficiles à annuler.

Une autre possibilité est de faire disparaître cette unique combinaison de paramètres pour chaque générateur. Les paramètres à écrire ne sont pas évidents à déterminer, le choix est arbitraire. Cependant, cette avenue pourrait être fructueuse en permettant de réduire un générateur sans l'annuler complètement. Nous pourrions ainsi annuler plus aisément les commutateurs. C'est cette option que nous retenons.

3.5.3.1 Générateurs avec des facteurs différents

Nous séparons les facteurs du genre $\frac{\varepsilon_i^2+\varepsilon_j^2}{\varepsilon_i\varepsilon_j}$ en $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}$ et $\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$, puis nous les distribuons sur la base $\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu$ pour que les blocs 2×2 aient chacun un facteur différent.

Les générateurs obtenus ainsi ne forment pas vraiment une algèbre, puisqu'il n'y a pas de métrique qui satisfasse la relation (2.1.16) pour tous les éléments. Les commutateurs sont plus compliqués, mais la plupart ont tout de même la bonne forme. La seule exception est que certains éléments qui commutaient avant ne le font plus maintenant.

Malgré tout, nous réessayons le choix de limite fait pour le cas $so(4,2)$ afin de voir si la contraction est possible. Les commutateurs $[B_i, P_j]$ ne sont pas nuls. Il faut ajouter les paramètres ε_5, ε_D, ε_{P_0}, ε_{C_0}, ε_{C_1}, ε_{C_2}, ε_{C_3} à l'égalité de la section 3.3.3 pour avoir tous les commutateurs voulus nuls. Avec cette limite, aucun générateur ne s'annule, mais nous retrouvons le problème des générateurs linéairement dépendants rencontré à la section 3.4 lors de la contraction directe de $su(2,2)$.

3.5.4 Autre tentative

Étant donné les difficultés rencontrées dans les autres voies, nous tentons une dernière approche afin d'arriver à obtenir l'algèbre conforme contractée sous sa représentation unitaire. Pour ce faire, nous utilisons l'algèbre contractée obtenue par $so(4,2)$.

Nous essayons d'abord de faire un *groupe contracté* en exponentiant l'algèbre $so(4,2)$ contractée donnée par les matrices (3.3.6). La métrique du groupe obtenu est singulière (diag $(+1,0,0,0,-1,+1)$) et les éléments ont tous un déterminant égal à un. Puis, nous utilisons le passage donné par l'algorithme (2.5.7) pour obtenir le groupe unitaire correspondant. Le résultat n'est pas très intéressant. Nous obtenons les mêmes générateurs que $su(2,2)$, excepté que ceux qui changeaient par la contraction de $so(4,2)$ se retrouvent divisés par deux.

Donc, cette voie ne mène à rien de nouveau.

3.5.5 Commentaire

Nous pouvons voir que les calculs menant à la contraction de l'algèbre conforme sont très différents et de difficulté variable selon la représentation choisie. De plus, étant donné que la contraction est singulière, il est difficile de la transporter d'une représentation à l'autre. En fait, notre passage de $SO(4,2)$ à $SU(2,2)$ n'est peut-être pas assez général pour bien transférer les paramètres.

3.6 Contraction de l'algèbre conforme par les relations de commutation

Nous allons maintenant écrire une forme générale de la contraction du groupe conforme à l'aide de ses relations de commutation [5,15]. Pour ce faire, nous intégrons d'abord des nouveaux paramètres associés aux *familles* de générateurs, puis nous en faisons tendre certains vers 0 afin de retrouver les commutateurs de l'algèbre contractée obtenue en passant par $so(4,2)$ et donnée à la section 3.3.4.

3.6.1 Intégration des paramètres

Nous introduisons les paramètres par une méthode différente de celle utilisée précédemment. En fait, nous donnons le même paramètre aux générateurs d'un même type. Voici comment les générateurs se transforment :

$$\begin{gathered} L_i \to lL_i, \quad B_i \to bB_i, \quad D \to dD, \\ P_0 \to p_0P_0, \quad P_i \to pP_i, \quad C_0 \to c_0C_0, \quad C_i \to cC_i. \end{gathered} \tag{3.6.1}$$

Cette méthode introduit moins de paramètres qu'auparavant. Cependant, nous allons travailler seulement avec les commutateurs, c'est-à-dire que nous ne regarderons pas ce que deviennent les générateurs. Donc, nous avons besoin de moins de libertés.

3.6.2 Limite

Nous essayons de trouver quels paramètres annuler afin d'obtenir les mêmes relations de commutation que dans le cas de la contraction de $so(4,2)$. Autrement dit, nous réécrivons les commutateurs de la section 2.1.4 avec les paramètres $l,\ b,\ d,\ p_0,\ p,\ c_0,\ c$. Nous voulons que les suivants s'annulent :

$$\begin{aligned} [B_i, B_j] &= 0 \qquad (i,j = 1,2,3); \\ [B_i, P_i] &= 0 \qquad (i = 1,2,3); \\ [B_i, C_i] &= 0 \qquad (i = 1,2,3); \\ [P_i, C_j] &= 0 \qquad (i,j = 1,2,3). \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

et que les autres demeurent les mêmes.

Voici ce que nous obtenons :

$$\begin{aligned} b = p = c &\to 0, \\ l,\ d,\ p_0,\ c_0 &\nrightarrow 0. \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Avec cela, nous retrouvons bien les relations de commutation de l'algèbre du groupe conforme contractée de la section 3.3.

Chapitre 4

Représentation et contraction du supergroupe conforme

Nous passons maintenant au formalisme supersymétrique. Nous allons définir le supergroupe conforme et en donner une représentation matricielle avec des générateurs physiques. Puis, nous effectuons la contraction de la superalgèbre conforme sur le modèle de l'algèbre conforme par la méthode utilisant les relations de commutation.

4.1 Représentation

4.1.1 Forme générale de la superalgèbre unitaire

Nous présentons d'abord la forme générale pour une superalgèbre de Lie spéciale unitaire [10], c'est-à-dire qui satisfait les deux conditions de la définition 1.9.

Les superalgèbres de Lie $su(p-p', p'/q-q', q')$, où p, p', q et q' sont des entiers, sont formées des matrices M de dimension $(p+q)\times(p+q)$ qui satisfont les conditions :

$$\mathrm{str}(M) = 0, \tag{4.1.1}$$

$$M^{\dagger}\mathbb{H} + (-i)^{\deg\, M}\mathbb{H}M = 0, \tag{4.1.2}$$

où $\mathbb{H}$ est la métrique. De plus, elles sont munies du produit de Lie généralisé :

$$[M, N] = MN - (-1)^{(degM)(degN)}NM. \tag{4.1.3}$$

La métrique $\mathbb{H}$ est bloc-diagonale :

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} h_{p-p',p'} & 0 \\ 0 & h_{q-q',q'} \end{pmatrix},$$

où les h sont les métriques diagonales de signature $(p-p', p')$ et $(q-q', q')$. Le degré des matrices est défini comme à l'équation (1.3.5).

Les éléments pairs ont la forme :

$$M_p = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \tag{4.1.4}$$

où A et D, de dimension $p \times p$ et $q \times q$, satisfont respectivement :

$$A^{\dagger}h_{p-p',p'} + h_{p-p',p'}A \;=\; 0 \tag{4.1.5}$$

et

$$D^{\dagger}h_{q-q',q'} + h_{q-q',q'}D \;=\; 0. \tag{4.1.6}$$

En plus, on doit avoir $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D)$ qui correspond à la condition de supertrace nulle.

Les éléments impairs ont la forme :

$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1.7}$$

où B et C, de dimension $p \times q$ et $q \times p$, satisfont la condition :

$$B^\dagger h_{p-p',p'} - i h_{q-q',q'} C = 0. \tag{4.1.8}$$

Notons que (4.1.2) donne deux conditions sur les M_i, mais qu'elles sont toutes deux équivalentes.

4.1.2 Cas particulier de la superalgèbre conforme

Nous allons maintenant nous concentrer sur la superalgèbre conforme. Nous travaillons avec la représentation $su(2,2/1)$, nous nous limitons à une dimension supplémentaire pour éviter d'avoir de trop grosses matrices. Le cas $su(2,2/N)$ se travaillerait de la même façon en ajoutant un bloc $N \times N$ au lieu de 1×1.

La représentation $su(2,2)$ est utilisée plutôt que $so(4,2)$ parce qu'elle respecte le deuxième principe physique [13] donné à la section 1.3.2.1. Nous pouvons donc prendre la forme générale de la section précédente avec $p = 4$, $p' = 2$, $q = 1$ et $q' = 0$.

Voici la définition de la superalgèbre $su(2,2/1)$ [10] que nous obtenons. Elle est composée des matrices M de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & d \end{pmatrix} \tag{4.1.9}$$

avec A, B, C de dimensions respectives 4×4, 4×1, 1×4 et $d \in \mathbb{C}$. Toutes les entrées dans M sont des nombres complexes. De plus, nous avons encore la condition de superunitarité (4.1.2) :

$$M^{\dagger}\mathbb{H} + (-i)^{\deg M}\mathbb{H}M = 0, \tag{4.1.10}$$

et la métrique se simplifie :

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1.11}$$

h étant la métrique diagonale de $su(2,2)$ (voir section 2.1.2). Le degré de M est défini comme avant : 0 si M est paire et 1 si M est impaire. Enfin, nous avons encore la condition de supertrace nulle, c'est-à-dire que tr $(A) = d$.

Les conditions sur les générateurs pairs se réduisent à :

$$A^{\dagger}h + hA = 0, \text{ i.e. } A \in u(2,2); \tag{4.1.12}$$

$$d^{*} + d = 0, \text{ i.e. } d \in u(1). \tag{4.1.13}$$

Celles sur la partie impaire se simplifient aussi pour donner :

$$C = -iB^{\dagger}h. \tag{4.1.14}$$

En ajoutant la supertrace nulle, nous avons que la trace de A doit être un imaginaire pur égal à l'élément d.

Nous retrouvons donc les quinze générateurs de $su(2,2)$ (cas $d = 0$) auxquels nous ajoutons un générateur (cas $d \neq 0$) dans la partie paire. Pour la partie impaire, nous avons les quatre entrées complexes de B, celles de C y sont reliées, ce qui nous laisse huit nouveaux générateurs.

4.1.3 Générateurs

Nous avons ainsi seize générateurs pairs et huit impairs. Les quinze premiers générateurs pairs sont naturellement ceux où A est un générateur de $su(2,2)$ sous sa représentation donnée dans (2.1.15) et $B = C = d = 0$. Le seizième, pour le cas $d \neq 0$, sera de la forme $B = C = 0$, d imaginaire pur et A diagonale de trace d. Nous pouvons ajouter la condition que ce générateur pair commute avec les quinze autres [10], notons qu'il est souvent appelé *charge chirale*. La partie paire de la superalgèbre s'écrit alors $su(2,2) \oplus u(1)$. Le nouveau générateur pair qui répond à ces conditions est :

$$R = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4i \end{pmatrix}. \tag{4.1.15}$$

Enfin, les huit générateurs impairs sont tels que $A = d = 0$ et $C = -iB^{\dagger}h$. La condition d'unitarité s'écrit $I_j^{\dagger}\mathbb{H} - i\mathbb{H}I_j = 0$. Nous pouvons obtenir une base canonique qui respecte cette condition. Elle est constituée de facteurs ± 1 et $\pm i$ aux positions $\mu 4$ et 4μ des matrices, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Cependant, ici aussi, nous allons définir une base plus physique. Les huit générateurs impairs sont quatre supertranslations (SP_{μ}) et quatre supertransformations conformes (SC_{μ}). Nous nous inspirons des commutateurs physiques [13] pour les définir à partir de la base canonique. Chacun commute avec son pendant non-supersymétrique.

Voici les générateurs que nous obtenons :

$$SP_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad SP_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$SP_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad SP_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.1.16)$$

$$SC_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad SC_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$SC_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad SC_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.1.17)$$

Nous présentons les relations de commutation à la section suivante. Remarquons qu'il n'est pas évident d'ajuster les indices et les signes des SP_μ et SC_μ ce qui fait que les relations de commutation ne s'écrivent pas toutes de façon compacte.

4.1.4 Relations de commutation

Nous pouvons vérifier que les générateurs donnés satisfont bien les principes de commutation et d'anticommutation données par la définition 1.7 (ii)c). En fait, les relations de commutation des quinze premiers générateurs sont les mêmes qu'à la section 2.1.4. Le seizième générateur pair, R, commute avec les quinze autres.

Pour ce qui est des huit générateurs impairs, voici leurs commutateurs avec les générateurs pairs :

$$[L_i, SP_0] = -\frac{1}{2}SP_i,$$
$$[L_i, SP_j] = \delta_{ij}SP_0 + \varepsilon_{ijk}SP_k,$$
$$[B, SP] = \pm\frac{1}{2}SP,$$
$$[D, SP_\mu] = -\frac{1}{2}SP_\mu,$$
$$[P_\mu, SP_\nu] = 0,$$
$$[C_0, SP_\mu] = \pm SC \ (0 \to -3,\ 1 \to -2,\ 2 \to 1,\ 3 \to 0),$$
$$[C_i, SP_0] = SC_i,$$
$$[C_i, SP_j] = -\delta_{ij}SC_0 - \varepsilon_{ijk}SC_k,$$
$$[R, SP] = \pm 3SP \ (0 \to -3,\ 1 \to -2,\ 2 \to 1,\ 3 \to 0),$$
$$[L_i, SC_0] = -\frac{1}{2}SC_i,$$
$$[L_i, SC_j] = \delta_{ij}SC_0 + \varepsilon_{ijk}SC_k,$$
$$[B, SC] = \pm\frac{1}{2}SC,$$
$$[D, SC_\mu] = \frac{1}{2}SC_\mu,$$
$$[P_0, SC_\mu] = \pm SP \ (0 \to -3,\ 1 \to -2,\ 2 \to 1,\ 3 \to 0),$$
$$[P_i, SC_0] = -SP_i,$$
$$[P_i, SC_j] = \delta_{ij}SP_0 + \varepsilon_{ijk}SP_k,$$

$$[C_\mu, SC_\nu] = 0,$$
$$[R, SC] = \pm 3SC \ (0 \rightarrow -3,\ 1 \rightarrow -2,\ 2 \rightarrow 1,\ 3 \rightarrow 0); \qquad (4.1.18)$$

puis, les anticommutateurs entre eux :

$$\{SP, SP\} = \pm 2P,$$
$$\{SP, SC\} = \pm 2L_i \pm 2B_i \pm 2D - R$$
$$\{SC, SC\} = \pm 2C. \qquad (4.1.19)$$

Bien que ces commutateurs ne soient pas tous écrits de façon compacte, ils respectent bien les règles de produit et les règles de commutation physiques [13].

Malgré que nous ayons essayé plusieurs combinaisons respectant $[P, SP] = 0$ et $[C, SC] = 0$, les rotations et les *boosts* ne semblent pas s'accorder pour déterminer les indices des SP et SC.

4.2 Contraction

Nous allons maintenant effectuer la contraction de la superalgèbre conforme. La méthode adoptée pour contracter proprement la superalgèbre $su(2, 2/1)$ est celle de la section 3.6 qui utilise les relations de commutation. Malheureusement, nous ne pouvons pas employer la méthode développée à la section 3.2 pour les représentations matricielles puisqu'elle ne nous a pas donné de résultats intéressants pour le cas $su(2, 2)$.

Dans la partie paire, nous voulons retrouver la contraction de l'algèbre conforme obtenue précédemment. En plus, il ne doit pas y avoir de singularités dans les commutateurs.

4.2.1 Intégration des paramètres

Nous introduisons encore un paramètre par type de générateur :

$$
\begin{aligned}
L_i \rightarrow lL_i, \quad B_i \rightarrow bB_i, \quad D \rightarrow dD,\\
P_0 \rightarrow p_0P_0, \quad P_i \rightarrow pP_i, \quad C_0 \rightarrow c_0C_0, \quad C_i \rightarrow cC_i,\\
R \rightarrow rR,\\
SP_0 \rightarrow sp_0SP_0, \quad SP_i \rightarrow spSP_i, \quad SC_0 \rightarrow sc_0SC_0, \quad SC_i \rightarrow scSC_i.
\end{aligned}
\tag{4.2.1}
$$

4.2.2 Limite

Nous utilisons les mêmes qu'à la section 3.6 pour le cas de l'algèbre conforme. Puis, nous étudions les commutateurs (4.1.18) afin de voir ce que les paramètres r, sp_0, sp, sc_0 et sc deviennent.

Les commutateurs des supertranslations avec les rotations forcent les paramètres sp_0 et sp à avoir le même comportement, c'est-à-dire qu'ils s'annulent tous les deux ou qu'ils ne s'annulent pas tous les deux à la fois. De la même façon, les commutateurs des supertransformations conformes avec les rotations font que sc_0 et sc ont le même comportement. Nous aurons donc les changements de générateurs suivants :

$$SP_\mu \rightarrow spSP_\mu \text{ et } SC_\mu \rightarrow scSC_\mu. \tag{4.2.2}$$

Puis, en regardant $[C_0, SP_\mu]$ et $[P_0, SC_\mu]$, nous déduisons que sp et sc ont eux aussi le même comportement.

Enfin, l'analyse des anticommutateurs (4.1.19) mène à la conclusion que sp et sc doivent s'annuler pour éviter les divergences. Cependant, rien ne permet de déterminer le comportement de r.

La limite est donc :

$$\begin{aligned} b = p = c = sp = sc \longrightarrow 0, \\ l,\ d,\ p_0,\ c_0 \nrightarrow 0 \\ r \text{ indéterminé.} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Voici les commutateurs qui s'annulent sous cette limite :

$$\begin{aligned} [B_i, B_j] &= 0, \qquad [B_i, P_i] = 0, \\ [B_i, C_i] &= 0, \qquad [P_i, C_j] = 0, \\ [B_i, SP_\mu] &= 0, \qquad [B_i, SC_\mu] = 0, \\ [C_i, SP_\mu] &= 0, \qquad [P_i, SC_\mu] = 0, \\ \{SP_\mu, SP_\nu\} &= 0, \qquad \{SC_\mu, SC_\nu\} = 0, \\ \{SP_\mu, SC_\nu\} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Les autres sont inchangés sauf $[R, SP_\mu]$ et $[R, SC_\mu]$ contractés qui sont inconnus puisque le paramètre r demeure indéterminé.

4.2.3 Interprétation

Donc, nous remarquons que les générateurs de la partie impaire de la superalgèbre contractée commutent entre eux. Ils n'affectent pas non plus les *boosts*, les translations spatiales et les transformatins conformes spatiales, c'est-à-dire les générateurs qui étaient transformés par la contraction de $so(4,2)$.

Nous comparons les résultats obtenus ici avec ceux venant de la contraction de la superalgèbre anti-de Sitter vers celle de Poincaré, puis vers celle de Galilée [20]. La partie correspondant à la superalgèbre de Galilée de nos résultats concorde bien, sauf pour l'anticommutateur des supertranslations qui s'annule ici au lieu de redonner des translations. Ceci peut s'expliquer par le fait que nous avons introduit moins de paramètres pour la contraction. Donc, notre méthode de contraction par les commutateurs est plus restrictive et ne redonne pas la même chose que d'autres techniques.

Chapitre 5

Applications de la supersymétrie

Avant de terminer, nous présentons brièvement quelques endroits où les théories supersymétriques sont appliquées et applicables. Notons que c'est un domaine en plein développement. Étant donné que le groupe conforme est le groupe de symétrie des équations de champs pour une particule sans masse, son pendant supersymétrique pourrait s'avérer utile dans plusieurs applications.

5.1 Superchamps

Dans la théorie des superchamps, les constituants de base sont des fermions et les particules bosoniques sont responsables de leurs interactions.

En plus de mélanger les bosons et les fermions, la supersymétrie combine les symétries de l'espace-temps et les symétries internes [14]. Un autre avantage de la théorie supersymétrique est qu'il y a moins de corrections radiatives à calculer, lors des calculs de section efficace par exemple. Ceci est dû au fait que les boucles bosoniques et fermioniques s'annulent partiellement.

Il y a deux types de brisure spontanée [10], celle de la supersymétrie elle-même et celle de symétries internes. Selon les observations, ces brisures doivent absolument se trouver dans la nature pour expliquer les différences de masse entre les particules.

En fait, la supersymétrie pourrait éventuellement permettre l'unification des forces électrofaible et forte [14]. Elle pourrait aussi expliquer une partie de la masse manquante par l'introduction de superpartenaires pour chacune des particules connues [23]. Ces superpartenaires seraient instables et se désintègreraient en superpartenaires plus légers jusqu'au plus léger, le LSP (*lightest superpartner*). Le LSP formerait une partie de la matière sombre de l'Univers, expliquant ainsi la masse manquante.

Enfin, notons qu'en plus de la physique des particules, il y a des applications possibles en matière condensée, par exemple pour l'étude des systèmes désordonnés.

5.2 Supercordes

L'idée de la théorie des cordes est de remplacer la particule ponctuelle par une corde unidimensionnelle comme élément fondamental. Cette corde a une longueur caractéristique et évolue sur une surface bidimensionnelle dans l'espace-temps. Les particules observées seraient des modes de vibration de ces cordes.

Le déplacement des cordes dans le temps crée une surface. Il est possible d'étudier ces surfaces [12,16]. Pour ce faire, il faut définir un produit scalaire, nous prenons le négatif de la forme de Killing qui est symétrique et bilinéaire et dépend de la représentation adjointe. Nous devons ensuite attacher un repère mobile associé à la représentation adjointe sur la surface créée par la corde. Enfin, le plongement de cette surface dans une algèbre de Lie donnée permet d'étudier ses caractéristiques. Parmi celles-ci, nous retrouvons la métrique, les formes fondamentales, la courbure gaussienne et le vecteur de courbure moyenne.

D'un point de vue plus physique, l'introduction des fermions a mené à la théorie des supercordes au début des années 1970. Cependant, c'est seulement au milieu des années 1980 que le sujet s'est développé [30].

La supersymétrie introduit des contraintes dans la théorie des cordes. Ces contraintes rendent les équations plus faciles à résoudre [23]. Certains croient que la théorie des supercordes est la seule raisonnable [14], c'est-à-dire qu'elle inclut les fermions et ne possède pas d'incohérences.

Pour décrire les cordes bosoniques, on peut utiliser la jauge conforme [28]. Les cordes fermioniques quant à elles sont liées à la physique des transitions de phase [29], pensons au modèle d'Ising en physique statistique. Ensembles, elles forment le cas supersymétrique.

5.3 Supergravité

La théorie de supergravité en deux dimensions spatiales est basée sur l'algèbre de de Sitter graduée, c'est-à-dire, la superalgèbre [8]. Cette théorie ressemble beaucoup à la théorie d'Einstein en ce qu'elle reproduit la supertorsion et la supercourbure. En fait, elle serait une canditate pour réconcilier la gravité d'Einstein et la théorie quantique [14].

La théorie de la supergravité vient du fait que la charge supersymétrique affecte l'espace-temps. C'est une théorie locale supportée par une particule sans masse de spin deux.

Conclusion

Nous avons donc présenté le groupe conforme dans deux de ses représentations et exposé le lien entre elles en passant par les sous-groupes. Nous avons trouvé un algorithme satisfaisant pour les générateurs pris un à un, mais pas pour le cas général.

Ensuite, nous avons introduit le processus de contraction et une méthode pour l'appliquer sur la représentation matricielle d'une algèbre. Puis, nous avons fait la contraction de la représentation $so(4,2)$ de l'algèbre du groupe conforme pour obtenir l'algèbre contractée sous forme matricielle et différentielle. Nous avons tenté de faire de même avec la représentation $su(2,2)$, mais nous avons réalisé que le processus ne se transmet pas facilement. Malgré cela, nous avons effectué la contraction de l'algèbre conforme par une autre méthode utilisant seulement les relations de commutation sans passer par une représentation matricielle.

Par la suite, nous avons introduit les superalgèbres et bâti l'algèbre associée au supergroupe conforme. Nous avons tenté d'écrire une base physique convenable pour la représentation $su(2,2/1)$ ainsi que ses relations de commutation. Puis, nous avons utilisé les commutateurs pour faire la contraction de la superalgèbre conforme en suivant la méthode plus générale adoptée pour l'algèbre conforme.

Enfin, nous avons brièvement jeté un coup d'oeil sur les applications possibles des théories supersymétriques en physique.

Éventuellement, la contraction du supergroupe conforme pourrait permettre d'étudier le comportement de ces superthéories dans la limite non-relativiste.

Une avenue envisageable serait d'explorer plus à fond le lien entre les représentations $SO(4,2)$ et $SU(2,2)$ du groupe conforme en passant par une forme générale au lieu des quinze générateurs. Peut-être que cela permettrait de bien faire passer la contraction d'une représentation à l'autre.

La contraction effectuée ici est de type vitesse-espace. Il serait aussi possible d'essayer d'autres types de contraction, par exemple de type espace-temps pour trouver des groupes décrivant des transformations locales.

Dans un autre ordre d'idée, il pourrait être intéressant de prolonger l'étude des déformations quantiques de l'algèbre conforme $so(4,2)$ [18] à son algèbre contractée ou encore à la superalgèbre conforme. L'analyse des déformations quantiques permet d'obtenir la structure de Hopf et le groupe quantique dual. Elle donne aussi certaines propriétés de l'espace-temps obtenu par la déformation [18]. Par exemple, l'espace obtenu est isotrope et le paramètre de déformation a les unités de la constante de Planck. La prolongation de cette analyse aux cas contracté ou supersymétrique permettrait d'explorer toutes ces questions dans un cadre non-relativiste ou supersymétrique.

Bibliographie

[1] Bacry H. et Lévy-Leblond J-M., *Possible Kinematics*, J. Math. Phys., **9** (1968) 1605-1614.

[2] Barut A.O., *Conformal Group → Schrödinger Group → Dynamical Group*, Helv. Phys. Acta, **46** (1973) 496-503.

[3] Barut A.O., *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*, Macmillan, New York, 1964.

[4] Barut A.O. et Brittin W.E., Eds., *De Sitter and Conformal Groups and Their Applications*, Lectures in Theoretical Physics, vol. XIII, Boulder, Colorado, 1971.

[5] Barut A.O. et Raczka R., *Theory of group representations and applications*, World Scientific, Singapour, 1986.

[6] Beckers J. et al., *Tensor fields invariant under subgroups of the conformal group of space-time*, J. Math. Phys., **10** (1978) 2126-2153.

[7] Bérubé D. et de Montigny M., *The computer calculation of graded contractions of Lie algebras and their representations*, Computer Phys. Comm., **76** (1993) 389-410.

[8] Cangemi D. et Leblanc M., *Two-dimensional gauge theoretic supergravities*, Nucl. Phys. B, **420** (1994) 363-375.

[9] Celeghini E. et al., *Nonlinear realization and contraction of group representation*, Phys. Lett. B, **162** (1985) 133-136.

[10] Cornwell J.F., *Group Theory in Physics vol. III*, New York, Academic, 1989.

[11] Esteve A. et Sona P.G., *Conformal Group in Minkowsky Space. Unitary Irreducible Representations*, Nuovo Cimento **32** (1964) 473-485.

[12] Fokas A.S. et Gelfand I.M., *Surfaces on Lie groups, on Lie algebras, and their integrability*, Commun. Math. Phys. **177** (1996) 203-220.

[13] Freund P., *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[14] Gates S.J. et al., *Superspace and one thousand and one lessons in supersymmetry*, Frontiers in physics, vol. 58, 1983.

[15] Gilmore R., *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*, New York, Wiley, Toronto, 1974.

[16] Grundland A.M. et Snobl L., *Surfaces in $su(N)$ algebra via CP^{N-1} sigma models on Minkowski space*, Proceedings of XI international conference on symmetry methods in physics, Joint Institute for Nuclear Research, Prague et Dubna, 2005.

[17] Helgason S., *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978.

[18] Herranz F.J. et al., *Quantum (anti)de Sitter algebras and generalizations of the kappa-Minkowski space*, Proceedings of XI international conference on symmetry methods in physics, Joint Institute for Nuclear Research, Prague et Dubna, 2005.

[19] Hussin V. et Nieto L.M., *Supergroups factorizations through matrix realization*, J. Math. Phys. **34** (1993) 4199-4220.

[20] Hussin V., Negro J., del Olmo M.A., *Kinematical Superalgebras*, J. Phys. A : Math. Gen. **32** (1999) 5097-5121.

[21] Inonu E. et Wigner E.P., *On the Contraction of Groups and Their Representations*, Proc. Natl Acad. Sci. **39** (1953) 510-524.

[22] Jackiw R., *Lower dimensional gravity*, Nucl. Phys. B, **252** (1985) 343-356.

[23] Kane G., *Supersymmetry*, Cambridge, Perseus Publishing, 2000.

[24] de Montigny M. et Patera J., *Discrete and continuous graded contractions of Lie algebras and superalgebras*, J. Phys. A : Math. Gen. **24** (1991) 525-547.

[25] Negro J., del Olmo M.A., Rodriguez-Marco A., *Nonrelativistic conformal groups*, J. Math. Phys. **38** (1997) 3786-3809.

[26] Niederer U., *The Maximal Kinematical Invariance Group of the Free Schrödinger Equation*, Helv. Phys. Acta, **45** (1972) 802-810.

[27] Olver P.J., *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[28] Polyakov AM., *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. B, **103** (1981) 207-210.

[29] Polyakov AM., *Quantum geometry of fermionic strings*, Phys. Lett. B, **103** (1981) 211-2103.

[30] Schwarz J.M., *Introduction to Superstring Theory*, Lectures presented at the St. Croix NATO Advanced Study Institute on Techniques and Concepts of High Energy Physics, 2000.

[31] Vasiliev MA., *Consistent equations for interacting gauge fields of all spins in 3+1 dimensions*, Phys. Lett. B, **243** (1990) 378-382.

[32] Warner F.W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, New York, Springer, 1983.