

Université de Montréal

**Discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles avec
préservation de leurs symétries**

par
Francis Valiquette

Département de Physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en Physique

Avril, 2005

© Francis Valiquette, 2005.



QC

3

U54

2005

V.016

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

**Discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles avec
préservation de leurs symétries**

présenté par:

Francis Valiquette

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Manu Paranjape, président-rapporteur
Pavel Winternitz, directeur de recherche
Yvan Saint-Aubin, membre du jury

Mémoire accepté le:

27 / 05 / 05

RÉSUMÉ

Nous exposons un algorithme permettant de discrétiser les équations différentielles aux dérivées partielles de manière à préserver leurs symétries. La méthode est appliquée à l'équation de la chaleur, à l'équation de Burgers, à l'équation de Burgers pour le potentiel et à l'équation de Korteweg-de Vries. En préservant les symétries, il est possible d'appliquer la théorie des groupes de Lie pour en obtenir des solutions exactes.

L'effet d'une transformation hodographe sur un schéma invariant est ensuite étudié. Cette transformation est utilisée pour générer de nouveaux schémas invariants et pour en obtenir des solutions exactes.

Finalement, trois simulations numériques sont réalisées. L'objectif principal est de comparer l'efficacité des schémas invariants à celle de méthodes aux différences finies standards.

Mots clés : Équations différentielles aux dérivées partielles, équations aux différences finies, symétries, schémas invariants et transformation hodographe.

ABSTRACT

We present an algorithm for discretizing partial differential equations in such a way as to preserve their symmetries. The method is applied to the heat equation, the Burgers' equation, the Burgers' equation in potential form and the Korteweg-de Vries equation. By preserving the symmetries it is possible to apply the Lie group theory to obtain exact solutions of the invariant schemes.

The effect of a hodograph transformation on invariant schemes is studied. It is used to generate new invariant schemes and get exact solutions.

Finally, three numerical simulations are performed. The goal is to compare the effectiveness of invariant schemes versus standard finite difference methods.

Key words : Partial differential equations, finite difference equations, symmetries, invariant schemes and hodograph transformation.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	iv
ABSTRACT	v
TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xi
LISTE DES ANNEXES	xii
REMERCIEMENTS	xiv
INTRODUCTION	1
1 Groupes de symétries des équations différentielles	5
1.1 Transformations ponctuelles locales	6
1.2 Prolongation continue d'un générateur infinitésimal de transformations	9
1.3 Invariance des équations différentielles	10
2 Groupes de symétries des équations aux différences finies	13
2.1 Prolongation discrète de l'action	15
2.2 Invariance des équations aux différences finies	16
2.3 Invariants et équations invariantes	17
2.4 Discrétisation invariante des équations différentielles	20
3 Équation de la chaleur	24
3.1 Équation différentielle	24
3.2 Schémas invariants	25

3.2.1	Maillage uniforme en x	32
3.2.2	Maillage dépendant de la solution	37
3.2.3	Schémas linéaires en u	41
3.3	Solutions exactes	46
3.3.1	Solution linéaire	46
3.3.2	Solution fondamentale	47
3.3.3	Solution exponentielle	48
4	Équation de Burgers	50
4.1	Équation différentielle	50
4.2	Schémas invariants	52
4.2.1	Maillage uniforme en x	53
4.2.2	Maillage dépendant de la solution	54
4.3	Solutions exactes	58
4.3.1	Solution constante	58
4.3.2	Solution invariante sous transformation de Galilée	59
5	Équation de Burgers pour le potentiel	61
5.1	Équation différentielle	61
5.2	Schémas invariants	63
5.2.1	Maillage uniforme en x	63
5.2.2	Maillage dépendant de la solution	66
5.2.3	Schémas exponentiels en u	68
5.3	Solutions exactes	70
6	Équation de Korteweg-de Vries	72
6.1	Équation différentielle	72
6.2	Schémas invariants	73
6.2.1	Maillage uniforme en x	74

6.2.2	Maillage dépendant de la solution	76
6.3	Solution exacte	78
7	Transformation hodographe	80
7.1	Équations différentielles	80
7.2	Schémas invariants	81
7.3	Applications	82
7.3.1	Équations différentielles ordinaires	82
7.3.2	Équation différentielle aux dérivées partielles non linéaires	88
8	Applications numériques	91
8.1	Équation de la chaleur	91
8.1.1	Problème avec conditions aux limites	93
8.1.2	Problème périodique	96
8.2	Équation de Korteweg-de Vries	101
	CONCLUSION	103
	BIBLIOGRAPHIE	106

LISTE DES FIGURES

2.1	Schéma numérique.	23
3.1	Schéma pour l'équation de la chaleur.	26
3.2	Maillage pour la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, $h = 0.05, x_0 = 0, \tau = 0.005, t_0 = 10.$	49
6.1	Schéma pour l'équation de Korteweg-de Vries	73
7.1	Solution de $v_y(1 + 4v^{3/2} \exp(\frac{1}{2}\sqrt{v})) = 2\sqrt{v}.$	85
8.1	Erreurs absolues pour un problème à valeurs aux bords de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.1.$	94
8.2	Erreurs absolues pour un problème à valeurs aux bords de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.05.$	94
8.3	Erreurs absolues pour un problème à valeurs aux bords de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.01.$	95
8.4	Maillage évolutif pour un problème à valeurs aux bords de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.05.$	95
8.5	Erreurs absolues pour un problème périodique de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.1.$	99
8.6	Erreurs absolues pour un problème périodique de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.05.$	99
8.7	Erreurs absolues pour un problème périodique de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.01.$	100
8.8	Maillage évolutif pour un problème périodique de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.05.$	100

8.9	Évolution de la solution à une soliton calculée avec le schéma implicite standard, $\tau = 0.01$ et $h = 0.01$	102
8.10	Erreurs numériques en $t = 3$ de la solution solitonique, $\tau = 0.01$ et $h_0 = 0.01$	102
I.1	Schéma explicite centré.	113
I.2	Schéma à une variable discrète.	116

LISTE DES TABLEAUX

8.1	Évolution de la différence de masse pour les schémas invariants. . .	97
-----	--	----

LISTE DES ANNEXES

I : Limite continue de la prolongation discrète d'un générateur de transformations	112
I.1 Preuve d'un cas particulier de la proposition 2.1	112
I.2 Schéma semi-discret préservant toutes les symétries de l'équation de Korteweg-de Vries	117

Symmetry, as wide or narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty, and perfection.

Hermann Weil, *Symmetry*, p.5, Princeton, 1952.

REMERCIEMENTS

J'aimerais exprimer ma reconnaissance envers tous ceux et celles qui ont rendu ce travail possible.

Dans un premier temps, je remercie le professeur Pavel Winternitz pour m'avoir donné l'opportunité de découvrir la beauté des symétries en physique mathématique. Par son expertise, il a su me guider dans mes premiers pas chancelants de mon parcours scientifique.

Je remercie Frederick Tremblay pour sa lecture attentive de ce document et ses corrections.

Je remercie le CRSNG pour leur soutien financier dans ce projet.

Finalement, je ne pourrais pas passer sous silence tout le soutien de ma famille. J'ai une pensée toute particulière pour ma mère et mon père qui sont avec moi depuis mes débuts et qui me forcent à toujours me surpasser.

Introduction

De nos jours, l'étude des phénomènes naturels décrits par des équations différentielles nécessite de plus en plus que l'on ait recours à des méthodes numériques pour en obtenir des solutions. Dans les cinquantes dernières années, de grands efforts ont été réalisés pour développer des algorithmes numériques minimisant les erreurs de troncature locale. Ces méthodes, lorsque appliquées avec soin, permettent de résoudre, avec une grande exactitude, une panoplie d'équations différentielles.

Néanmoins, les méthodes basées sur le contrôle des erreurs locales ne permettent pas nécessairement de préserver les propriétés qualitatives et géométriques du problème continu. Un des défis de l'analyse numérique moderne consiste à développer de nouvelles méthodes numériques incorporant certaines structures du problème original [32]. Parmi les diverses méthodes mises au point, on retrouve entre autre les intégrateurs symplectiques, [2, 12], les méthodes basées sur la conservation de l'énergie [44], et celles basées sur l'application des groupes de Lie [3, 14–19, 22–25, 28, 29, 33, 37, 39–43, 47, 51, 56]. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des schémas numériques qui préservent les symétries des équations différentielles.

L'étude des symétries de schémas numériques approximant un système d'équations différentielles peut se faire sous deux approches différentes. L'une d'elle consiste à définir des schémas invariants sur des maillages à pas fixes et à considérer des transformations n'agissant pas sur les maillages [29, 33, 43]. Pour obtenir des symétries intéressantes, des transformations agissant sur plus d'un point à la fois doivent être envisagées. La deuxième approche consiste à définir des schémas inva-

riants sur des maillages évolutifs. Une telle approche est utilisée lorsque le groupe de transformations agit à la fois sur les variables indépendantes et dépendantes. En plus de permettre la transformation des équations approximant un système d'équations différentielles, on permet aussi au maillage de se transformer. Présentement, deux approches sont développées pour aborder cette question. L'une d'elle est basée sur l'application de la théorie des repères mobiles d'Élie Cartan [37, 47]; tandis que l'autre repose sur l'utilisation des générateurs infinitésimaux de symétries, introduit par Sophus Lie [3, 14–19, 22–25, 28, 29, 33, 39–43, 51, 56].

Dans ce mémoire, tous les schémas numériques invariants mis au point sont obtenus en utilisant le formalisme des générateurs infinitésimaux de symétries. Ce travail s'inscrit dans un programme de recherche, entamé il y a environ une quinzaine d'années, visant à développer les applications de la théorie des groupes de Lie aux équations aux différences finies pour en faire un outil aussi puissant que sa contre-partie continue. Rappelons certaines propriétés importantes des symétries des équations différentielles motivant l'effort de recherche [6, 7, 21, 35, 45, 46, 48] :

1. L'action d'un groupe de symétries transforme les solutions vers d'autres solutions. Ainsi, à partir d'une solution, il est possible d'en générer de nouvelles.
2. Il existe une procédure standard pour obtenir l'ensemble de tous les invariants d'un groupe de symétries; ceci permet de donner une représentation invariante d'un système d'équations différentielles en plus de fournir la forme des solutions invariantes.
3. Lorsque appliquée à une équation différentielle ordinaire, la connaissance de symétries permet de réduire l'ordre de cette dernière. Si le groupe de symétries admet un sous-groupe résoluble de dimension égale ou supérieure à l'ordre de l'équation, il est alors possible d'obtenir la solution par quadrature.
4. L'invariance d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles originant d'un problème variationnel est lié, par le théorème de Noether à

l'existence de lois de conservation du système.

Au niveau de la discrétisation invariante des équations différentielles, plusieurs résultats importants ont été obtenus à ce jour. La classification complète des schémas invariants approximant une équation du deuxième ordre est connue [25]. La version discrète du théorème de Noether a été appliquée avec succès pour résoudre des systèmes d'équations aux différences finies approximant une équation différentielle ordinaire [27]. Une revue de plusieurs résultats importants et une bibliographie exhaustive de ce secteur de recherche est disponible [43]. Les résultats concernant la discrétisation d'équations différentielles aux dérivées partielles sont de leur côté plus fragmentaires [19, 22–24, 28, 39, 40]. L'objectif de ce travail consiste à appliquer la théorie des groupes continus aux équations aux différences finies de manière à discrétiser des équations différentielles aux dérivées partielles tout en conservant leurs symétries. La plupart des équations différentielles aux dérivées partielles discrétisées dans ce mémoire ont déjà été étudiées par Dorodnitsyn et coauteurs, [3, 18, 19, 22–24, 28]. Cependant, notre approche est différente, en ce sens que nous n'introduisons pas de variables de type lagrangiennes. Ce faisant, nous sommes en mesure de retrouver l'ensemble des schémas déjà obtenus par Dorodnitsyn et coauteurs, en plus d'en proposer plusieurs nouveaux.

Comme la première étape menant à la réalisation de schémas numériques invariants d'équations différentielles consiste à déterminer le groupe de symétries de ces dernières, nous débutons ce travail en rappelant certains résultats relativement à l'application des groupes de Lie aux équations différentielles. Dans un deuxième temps, nous exposons la théorie permettant de mettre sur pied des schémas numériques préservant les symétries d'équations différentielles. Dans les chapitres 3, 4, 5 et 6, nous appliquons le formalisme à quatre équations différentielles aux dérivées partielles importantes de la physique mathématique. Dans l'ordre, il est question de l'équation de la chaleur, de l'équation de Burgers, de l'équation de Burgers dans sa forme potentielle et finalement de l'équation de Korteweg-de Vries. Une

fois les schémas invariants mis en place, nous appliquons la théorie des groupes de symétries pour en obtenir des solutions.

Dans un autre ordre d'idées, il est bien connu que deux équations liées l'une à l'autre par une transformation bijective et ponctuelle ont la propriété que leurs algèbres de symétries sont isomorphes l'une à l'autre par la même transformation. Dans la plupart des cas, lorsqu'on génère des schémas invariants de ces deux équations différentielles, on constate qu'il est impossible de les relier par la même transformation liant les équations différentielles. Au chapitre 7, nous montrons que pour une transformation ponctuelle fort simple, la transformation hodographe, les schémas invariants sont reliés par la même transformation que les équations différentielles. Nous exploitons ce résultat pour générer facilement des schémas invariants d'équations différentielles jamais discrétisées et pour en obtenir des solutions exactes.

Finalement, trois simulations numériques sont réalisées. L'objectif est de comparer la précision des schémas invariants à celle de discrétisations standards. En utilisant des schémas explicites, nous résolvons un problème avec conditions aux limites et un problème périodique pour l'équation de la chaleur. Comme troisième application, nous appliquons des schémas implicites de l'équation de Korteweg-de Vries pour modéliser la célèbre solution à un soliton [38].

Chapitre 1

Groupes de symétries des équations différentielles

L'application des groupes de Lie aux équations différentielles constitue un secteur de recherche fort important de la physique mathématique. Cette branche des mathématiques a vu le jour dans les travaux de Sophus Lie à la fin du dix-neuvième et au début du vingtième siècle. Il existe plusieurs bons livres traitant de ce sujet [6, 7, 21, 35, 45, 46, 48]. Ce chapitre se veut un bref survol des concepts et résultats importants permettant de calculer les symétries d'équations différentielles. Pour une exposition beaucoup plus détaillée et rigoureuse, nous réferrons le lecteur à la liste mentionnée précédemment.

Afin de formaliser la discussion et de fixer la notation, nous rappelons la définition d'un système d'équations différentielles.

Définition 1.1. *Un système \mathcal{S} , de N équations différentielles d'ordre n , à p variables indépendantes, $x = (x^1, \dots, x^p) \in X \subset \mathbb{R}^p$, et à q variables dépendantes, $u = (u^1, \dots, u^q) \in U \subset \mathbb{R}^q$ est une application lisse du n -ième espace de jets,*

$X \times U^{(n)}$, vers l'espace euclidien \mathbb{R}^N

$$\begin{aligned} \Delta : X \times U^{(n)} &\rightarrow \mathbb{R}^N, \\ \Delta_\nu(x, u^{(n)}(x)) &= 0, \quad \nu = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Le n -ième espace de jets, $X \times U^{(n)}$, est la variété différentielle formée du produit cartésien de l'espace des variables indépendantes, dépendantes et de toutes les dérivées

$$u_j^\alpha = \frac{\partial^k u^\alpha(x)}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \dots \partial x^{j_k}}, \quad \alpha = 1, \dots, q,$$

jusqu'à l'ordre n . Dans cette notation multi-indicielle, $J = (j_1, \dots, j_k)$ est un vecteur à k composantes non ordonnées d'entiers, avec pour composante $1 \leq j_k \leq p$, spécifiant par rapport à quelle variable indépendante u est dérivé. Nous notons par $\#J$ l'ordre de la dérivée, c'est-à-dire $\#J = k$.

1.1 Transformations ponctuelles locales

Définition 1.2. Un groupe de transformations ponctuelles locales, agissant sur $X \times U$ est donné par un groupe de Lie G , un ouvert \mathcal{O} ,

$$\{e\} \times X \times U \subset \mathcal{O} \subset G \times X \times U,$$

spécifiant le domaine de définition du groupe de transformations et une application lisse $\Psi : \mathcal{O} \rightarrow X \times U$

$$\Psi(g, (x, u)) \equiv g \cdot (x, u) = (\tilde{x}, \tilde{u}) = (\Lambda(g, x, u), \Omega(g, x, u)), \tag{1.2}$$

satisfaisant les propriétés :

(a) Si $(h, (x, u)) \in \mathcal{O}$, $(g, h \cdot (x, u)) \in \mathcal{O}$ et $(g \cdot h, (x, u)) \in \mathcal{O}$ alors

$$g \cdot (h \cdot (x, u)) = (g \cdot h) \cdot (x, u).$$

(b) Pour tout $(x, u) \in X \times U$

$$e \cdot (x, u) = (x, u),$$

où e est l'élément neutre du groupe G .

(c) Si $(g, (x, u)) \in \mathcal{O}$ et $(g^{-1}, g \cdot (x, u)) \in \mathcal{O}$ alors

$$g^{-1} \cdot (g \cdot (x, u)) = (x, u).$$

Remarquons qu'outre l'hypothèse sur la forme du domaine \mathcal{O} , la propriété (c) est une conséquence directe de (a) et (b).

L'action d'un sous-groupe à une dimension, $G_\epsilon \subset G$, sur $X \times U$ engendre un flot

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\epsilon \cdot (x, u) = (\Lambda(\epsilon, x, u), \Omega(\epsilon, x, u)), \quad g_\epsilon \in G_\epsilon$$

satisfaisant, sans perte de généralité, la condition

$$(\Lambda(0, x, u), \Omega(0, x, u)) = (x, u).$$

La variable ϵ correspond au paramètre de transformations définie dans un voisinage de zéro et compris dans \mathbb{R} . À ce flot, on lui associe naturellement un champ de vecteurs.

Définition 1.3. Soit G_ϵ un groupe à un paramètre agissant sur $X \times U$. Le générateur infinitésimal de transformations associé à l'action de G_ϵ sur $X \times U$ est définie

par

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (\Lambda(\epsilon, x, u), \Omega(\epsilon, x, u)), \\ &= (\xi^1(x, u), \dots, \xi^p(x, u), \phi^1(x, u), \dots, \phi^q(x, u)). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dans ce mémoire, nous adoptons la notation différentielle

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (1.4)$$

lorsqu'on écrit explicitement les composantes d'un champs de vecteurs. Une telle écriture, comme nous le verrons dans les chapitres à venir, s'avère très pratique lors du calcul des invariants d'un groupe de symétries.

Inversement, si un générateur de transformations est connu, on peut récupérer le groupe de transformations à un paramètre en intégrant le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}^i}{d\epsilon} = \xi^i(\tilde{x}, \tilde{u}), & i = 1, \dots, p, \\ \frac{d\tilde{u}^\alpha}{d\epsilon} = \phi^\alpha(\tilde{x}, \tilde{u}), & \alpha = 1, \dots, q, \end{cases} \quad (1.5)$$

avec la condition initiale $(\tilde{x}, \tilde{u})|_{\epsilon=0} = (x, u)$. Le calcul du flot ou du groupe de transformations à un paramètre engendré par \mathbf{v} est souvent appelé à l'exponentiation du champ de vecteurs que l'on note

$$\exp(\epsilon \mathbf{v})(x, u) \equiv g_\epsilon \cdot (x, u).$$

À un groupe de Lie G de dimension r , on associe r générateurs infinitésimaux linéairement indépendants, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$. Cet ensemble forme une base de l'algèbre de Lie L associée à G . À partir de cette base il est possible d'engendrer tous les éléments du groupe connexe à l'identité en composant successivement des éléments

de groupe à un paramètre

$$g = \prod_{i=1}^k \exp(\epsilon_i \mathbf{v}_i), \quad g \in G,$$

où les $\mathbf{v}_i \in \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ et le produit n'est pas ordonné.

1.2 Prolongation continue d'un générateur infinitésimal de transformations

La transformation des variables x et u engendrée par (1.4) induit naturellement une transformation des dérivées de u . En général, celles-ci sont non linéaires et leurs expressions explicites deviennent rapidement gigantesques. Heureusement, l'expression de la prolongation d'un générateur infinitésimal de transformations s'écrit de manière compacte.

Proposition 1.1. *Soit*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

un générateur infinitésimal de transformations. La n-ième prolongation continue du champ de vecteurs \mathbf{v} est donnée par l'expression

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{\#J=1}^n \phi^{\alpha, J}(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \quad (1.6)$$

où

$$\phi^{\alpha, J}(x, u^{(n)}) = D_J \left(\phi^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha \right) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J, i}^\alpha, \quad (1.7)$$

et D_J est l'opérateur de dérivée totale, $D_J = D_{j_1} \cdots D_{j_{\#J}}$.

Tout comme il est possible de recouvrir l'action du groupe à un paramètre

agissant sur $X \times U$ à partir de \mathbf{v} . Il est possible, à partir de la n -ième prolongation du champ de vecteurs, d'obtenir la n -ième prolongation de l'action, $\text{pr}^{(n)}g_\epsilon \cdot (x, u^{(n)}) = (\tilde{x}, \tilde{u}^{(n)})$, agissant sur x, u et toutes les dérivées de u jusqu'à l'ordre n . Pour ce faire, il suffit de résoudre le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}^i}{d\epsilon} = \xi^i(\tilde{x}, \tilde{u}), & i = 1, \dots, p, \\ \frac{d\tilde{u}^\alpha}{d\epsilon} = \phi^\alpha(\tilde{x}, \tilde{u}), & \alpha = 1, \dots, q, \\ \frac{d\tilde{u}_J^\alpha}{d\epsilon} = \phi^{\alpha, J}(\tilde{x}, \tilde{u}^{(n)}), & \alpha = 1, \dots, q, \#J = 1, \dots, n, \end{cases}$$

avec la condition initiale $(\tilde{x}, \tilde{u}^{(n)})|_{\epsilon=0} = (x, u^{(n)})$.

1.3 Invariance des équations différentielles

Sachant comment les dérivées de u se transforment sous l'action d'un groupe G , nous sommes maintenant en mesure de formaliser le concept de symétrie d'un système d'équations différentielles.

Définition 1.4. Soient $\mathcal{S}_\Delta = \{(x, u^{(n)}) : \Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \nu = 1, \dots, N\}$, la sous-variété du n -ième espace de jets $X \times U^{(n)}$ représentant l'espace des solutions du système d'équations différentielles (1.1) et G un groupe de transformations ponctuelles de dimension r . G est un groupe de symétries de \mathcal{S}_Δ si

$$\text{pr}^{(n)}g \cdot \mathcal{S}_\Delta = \{(\tilde{x}, \tilde{u}^{(n)}) : \Delta(\tilde{x}, \tilde{u}^{(n)}) = 0, \nu = 1, \dots, N\} = \mathcal{S}_\Delta, \quad (1.8)$$

pour tout $g \in G$.

En d'autres mots, l'action du groupe de transformations G est un automorphisme de l'espace des solutions.

Du point de vue pratique, la définition 1.4 n'est pas d'une grande utilité, puisqu'il est difficile de trouver toutes les symétries d'un système d'équations

différentielles à partir du critère (1.8). Cependant, il est possible de formuler une condition d'invariance infinitésimale simple et algorithmique, qui permet de développer des routines informatiques capable de calculer les symétries d'un système d'équations différentielles [4,10,11,34,50]. Avant d'énoncer la condition d'invariance infinitésimale rappelons ce qu'on entend par un système d'équations différentielles de rang maximal.

Définition 1.5. *Soit*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, N,$$

un système d'équations différentielles. Le système est dit de rang maximal si la matrice jacobienne,

$$J_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_j^\alpha} \right),$$

de Δ par rapport à toutes les variables $(x, u^{(n)})$ est de rang N sur l'espace des solutions, c'est-à-dire lorsque $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$.

Proposition 1.2. *G est un groupe de symétries, de dimension r , du système d'équations différentielles (1.1) de rang maximal si et seulement si*

$$pr^{(n)} \mathbf{v}_k[\Delta_\nu(x, u^{(n)})]|_{\Delta_1=0, \dots, \Delta_N=0} = 0, \quad k = 1, \dots, r, \nu = 1, \dots, N, \quad (1.9)$$

où les \mathbf{v}_k forment une base de l'algèbre de Lie L du groupe G .

Expliquons, brièvement, comment à partir de (1.9) on détermine les symétries de (1.1). Tout d'abord, on considère un champ de vecteurs général, (1.4), que l'on remplace ensuite dans (1.9). Comme (1.9) doit être vérifiée sur l'espace des solutions, on utilise le système d'équations différentielles $\Delta = 0$ pour exprimer N dérivées en fonctions des autres. Ce faisant, on génère un système d'équations

différentielles impliquant des monômes de la forme

$$(u_{J_1}^1)^{a_1} (u_{J_2}^2)^{a_2} \cdots (u_{J_q}^q)^{a_q}, \quad (1.10)$$

tous linéairement indépendants. Les exposants a_i , $i = 1, \dots, q$, ainsi que les multi-indices J_i , $i = 1, \dots, q$ dans (1.10) sont déterminées par le système d'équations différentielles étudié. Ce faisant, la condition (1.9) est vérifiée si chaque coefficient devant les monômes (1.10) s'annule. On obtient alors un système d'équations différentielles linéaires pour les ξ^i , $i = 1, \dots, p$ et les ϕ^α , $\alpha = 1, \dots, q$. La solution du système d'équations, nous fournit les générateurs de symétries du système d'équations différentielles. Trois possibilités peuvent survenir [54, 55] :

1. Le système d'équations déterminantes admet seulement la solution triviale $\xi^i = 0$, $i = 1, \dots, p$, $\phi^\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, q$. Dans ce cas, la seule symétrie admise est la transformation identité e , ce qui est trivial.
2. La solution générale du système d'équations déterminantes dépend de r constantes d'intégration indépendantes, $r < \infty$. Dans ce cas l'algèbre de symétries L et le groupe de symétries G sont de dimension r .
3. La solution générale du système d'équations déterminantes dépend de fonctions arbitraires en x et u . Dans ce cas l'algèbre et le groupe de symétries sont de dimension infinie.

Chapitre 2

Groupes de symétries des équations aux différences finies

L'étude des symétries des équations aux différences finies est un domaine de recherche récent. Deux articles publiés en 1991 ont marqué le coup d'envoi de ce secteur de recherche [15, 42]. Depuis ce temps, cette branche des mathématiques a connu un véritable essor. L'application de la théorie des groupes aux équations aux différences finies est très similaire à celle des équations différentielles. La principale différence réside dans la définition de la prolongation de l'action du groupe de transformations ponctuelles.

Les applications de la théorie des groupes aux équations aux différences finies sont aussi vastes que pour les équations différentielles. Dans ce qui suit, nous exposons les concepts nécessaires à la mise sur pied de schémas numériques invariants d'équations différentielles. La plupart de la théorie est développée en utilisant le point de vue qu'un système d'équations aux différences finies peut être considéré comme un objet mathématique en soi et non pas simplement comme le résultat de la discrétisation d'une équation différentielle. Ce faisant, nous espérons que la distinction entre les résultats qui sont complètement généraux et ceux qui doivent être vérifiés seulement lorsqu'un système d'équations aux différences finies approxime

un système d'équations différentielles sera clair.

Tout comme pour les équations différentielles, nous débutons par rappeler la définition d'un système d'équations aux différences finies afin de fixer la convention d'écriture.

Définition 2.1. *Un système d'équations aux différences finies est un système d'équations algébriques*

$$E_\nu(\{z_{m+j}\}_{j \in J}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, N, \quad z_{m+j} \in Z \subset \mathbb{R}^l, \quad \{0\} \subset J \subset \mathbb{Z}^l, \quad (2.1)$$

reliant la variable z en un nombre fini de points discrets.

Le multi-indice $m = (m^1, \dots, m^l) \in \mathbb{Z}^l$, à valeurs entières, sert à identifier les points discrets dans l'espace continu Z . L'indice j , quant à lui, permet d'identifier les points voisins d'un certain z_m . On notera par $\#J$ la cardinalité de l'ensemble J et nous supposons que celle-ci est finie. Il ne faut pas confondre les définitions de J et $\#J$ fournies dans ce chapitre avec celles du chapitre précédent. La signification de J et $\#J$ est différente dépendant qu'on parle d'équations différentielles ou d'équations aux différences finies. Afin d'éviter toute confusion possible, spécifions que dans ce chapitre, J et $\#J$ ont toujours la signification que nous venons tout juste d'introduire.

Tout comme pour les équations différentielles, l'étude des symétries dans les équations aux différences finies se fait en considérant l'action d'un groupe de transformations ponctuelles G agissant sur Z ,

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{O} &\rightarrow Z, & \{e\} \times Z &\subset \mathcal{O} \subset G \times Z, \\ (g, z) &\mapsto \Psi(g, z) \equiv g \cdot z = \tilde{z}. \end{aligned}$$

Par le même raisonnement que celui exposé au chapitre 1, au groupe de transformations ponctuelles G , de dimension r , on lui fait correspondre une algèbre de Lie

L engendrée par des champs de vecteurs de la forme

$$\mathbf{v}_k = \sum_{\mu=1}^l \eta^{k,\mu}(z) \frac{\partial}{\partial z^\mu}, \quad k = 1, \dots, r, \quad (2.2)$$

où z^μ est la μ -ième composante de z .

2.1 Prolongation discrète de l'action

Dans le cas discret, la prolongation de l'action d'un groupe est géométriquement simple à visualiser. Les transformations n'agissant qu'en un point générique z_m , la prolongation consiste à étendre la transformation à tous les points de l'espace discret. Cependant, comme le nombre de points intervenant dans le système d'équations aux différences finies (2.1) est fini, on peut se limiter à définir la prolongation discrète de l'action en incluant seulement les points figurant dans (2.1).

Définition 2.2. *Soit G un groupe de transformations ponctuelles agissant sur Z , la prolongation discrète du groupe de transformations est définie comme*

$$\begin{aligned} pr \Psi : \mathcal{O}^{(\#J)} &\rightarrow Z^{\#J}, & \{e\} \times Z^{\#J} &\subset \mathcal{O}^{(\#J)} \subset G \times Z^{\#J}, \\ (g, \{z_{m+j}\}_{j \in J}) &\mapsto pr \Psi(g, \{z_{m+j}\}_{j \in J}) = \{\Psi(g, z_{m+j})\}_{j \in J} \equiv pr g \cdot \{z_{m+j}\}_{j \in J}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

En considérant un sous-groupe de transformations à un paramètre $G_\epsilon \subset G$, en dérivant le flot engendré par la prolongation discrète de l'action et en évaluant à l'identité de G_ϵ , on obtient la prolongation discrète d'un générateur infinitésimal de transformations.

Définition 2.3. *Soit*

$$\mathbf{v} = \sum_{\mu=1}^l \eta^\mu(z) \frac{\partial}{\partial z^\mu},$$

un générateur infinitésimal de transformations ponctuelles. La prolongation dis-

crète du champ de vecteurs \mathbf{v} est donnée par l'expression

$$\text{pr } \mathbf{v} = \sum_{j \in J} \sum_{\mu=1}^l \eta^\mu(z_{m+j}) \frac{\partial}{\partial z_{m+j}^\mu}. \quad (2.4)$$

2.2 Invariance des équations aux différences finies

Définition 2.4. Soient $\mathcal{S} = \{z_m : E_\nu(\{z_{m+j}\}_{j \in J}) = 0, \nu = 1, \dots, N\}$, l'espace des solutions du système d'équations aux différences finies (2.1) et G un groupe de transformations ponctuelles. G est un groupe de symétries de \mathcal{S} si

$$\text{pr } g \cdot \mathcal{S} = \{(\tilde{z}_m : E_\nu(\{\tilde{z}_{m+j}\}_{j \in J}) = 0, \nu = 1, \dots, N)\} = \mathcal{S}, \quad (2.5)$$

pour tout $g \in G$.

Tout comme pour les équations différentielles, c'est le critère d'invariance infinitésimal qui nous est utile. Avant de l'énoncer, précisons ce qu'on entend par un système d'équations aux différences finies de rang maximal.

Définition 2.5. Soit $\mathbf{E} : Z^{\#J} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $Z \subset \mathbb{R}^l$, un système d'équations aux différences finies, (2.1), où $N \leq l \times \#J$. Le système d'équations aux différences finies est dit de rang maximal si la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(E_1, \dots, E_N)}{\partial(\{z_{m+j}\}_{j \in J})}$$

est de rang maximal, c'est-à-dire égal à N .

Théorème 2.1. Soient G un groupe de transformations ponctuelles agissant sur l'espace Z et $\mathbf{E} : Z^{\#J} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\mathbf{E} = 0$, $N \leq l \times \#J$, un système d'équations aux différences finies de rang maximal sur l'espace des solutions. G est un groupe de

symétries du système d'équations aux différences finies si et seulement si

$$\text{pr } \mathbf{v}[E_\nu(\{z_{m+j}\}_{j \in J})]_{\mathbf{E}=0} = 0, \quad \nu = 1, \dots, N, \quad (2.6)$$

pour tout \mathbf{v} dans L .

La preuve de ce théorème est équivalente à démontrer l'invariance d'un système de fonctions algébriques, dépendant des variables $\{z_{m+j}\}_{j \in J}$, sous le générateur infinitésimal de transformations (2.4), [45].

En principe, avec les outils mis en place, nous pouvons répondre à deux questions importantes. Étant donné un système d'équations aux différences finies, quelles sont ses symétries ? La réponse à cette question est donnée dans une série de deux articles, [39, 40]. Inversement, étant donné une algèbre de symétries L , quel est le système d'équations aux différences finies le plus général invariant sous le groupe de transformations engendré par L ? Dans la section qui suit, nous rappelons comment répondre à cette question puisque c'est une étape importante dans la réalisation de schémas numériques invariants. La démarche est complètement algorithmique et repose sur l'observation que si $I_1(\{z_{m+j}\}_{j \in J}), \dots, I_k(\{z_{m+j}\}_{j \in J})$ sont des invariants de l'algèbre L , alors toute fonction, $F(I_1, \dots, I_k)$, de ces invariants est aussi sous L .

2.3 Invariants et équations invariantes

Soit L , une algèbre de symétries de dimension r et $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ une base de celle-ci. Pour qu'une quantité $I(\{z_{m+j}\}_{j \in J})$ soit invariante sous tout le groupe engendré par L il faut d'abord qu'elle le soit sous le groupe à un paramètre engendré par \mathbf{v}_1 . Le critère d'invariance infinitésimal impose que I doit vérifier l'égalité

$$\text{pr } \mathbf{v}_1[I] = 0. \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) est une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre qui se résoud par la méthode des caractéristiques. Ce faisant, on obtient $l \times \#J - 1$ quantités invariantes, I_μ^1 , $\mu = 1, \dots, l \times \#J - 1$, sous $\exp(\epsilon_1 \mathbf{v}_1)$. La deuxième étape consiste naturellement à trouver les quantités invariantes à la fois sous $\exp(\epsilon_2 \mathbf{v}_2)$ et $\exp(\epsilon_1 \mathbf{v}_1)$. Pour ce faire, les invariants de $\exp(\epsilon_2 \mathbf{v}_2)$ doivent être exprimés en terme des I_μ^1 . En appliquant le critère d'invariance infinitésimal pour \mathbf{v}_2 on doit avoir

$$\text{pr } \mathbf{v}_2[I^2(I_1^1, \dots, I_{l \times \#J - 1}^1)] = \sum_{j \in J} \eta^{2,j}(z_{m+j}) \frac{\partial I^2}{\partial z_{m+j}} = 0. \quad (2.8)$$

Pour résoudre (2.8) on effectue un changement de variables de tel sorte que le champ de vecteurs s'exprime en fonction des I_μ^1 . Ce faisant, (2.8) devient

$$\sum_{\mu=1}^{l \times \#J - 1} \tilde{\eta}^{2,\mu}(I_1^1, \dots, I_{l \times \#J - 1}^1) \frac{\partial I^2}{\partial I_\mu^1} = 0. \quad (2.9)$$

La solution de (2.9) est une fois de plus donnée par la méthode des caractéristiques. La solution nous procure un ensemble $\{I_\mu^2, \mu = 1, \dots, l \times \#J - 2\}$ de $l \times \#J - 2$ éléments, à la fois invariants sous $\exp(\epsilon_1 \mathbf{v}_1)$ et $\exp(\epsilon_2 \mathbf{v}_2)$. En continuant ainsi de suite avec tous les vecteurs de base de l'algèbre de Lie L , on trouve α quantités, I_μ , invariantes sous le groupe de transformations G , c'est-à-dire

$$\text{pr } \mathbf{v}_k[I_\mu] = 0, \quad 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq \mu \leq \alpha, \quad (2.10)$$

avec

$$\alpha = l \times \#J - \text{rang } M, \quad (2.11)$$

où M est la matrice

$$\begin{pmatrix} \{\eta_{m+j}^{1,1}, \eta_{m+j}^{1,2} \cdots \eta_{m+j}^{1,l}\}_{j \in J} \\ \vdots \\ \{\eta_{m+j}^{r,1}, \eta_{m+j}^{r,2} \cdots \eta_{m+j}^{r,l}\}_{j \in J} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

formée des coefficients des champs de vecteurs prolongés. Le rang de la matrice M est calculé en un point générique z_m . Par construction, il est immédiat que toute fonction $F(I_1, \dots, I_\alpha)$ vérifie le critère d'invariance infinitésimal

$$\text{pr } \mathbf{v}_k[F(I_1, \dots, I_\alpha)] = 0, \quad 1 \leq k \leq r.$$

Ainsi, une équation aux différences finies d'un système invariant doit être de la forme

$$E(I_1, \dots, I_\alpha) = 0. \quad (2.13)$$

Une telle équation est dite *fortement invariante*. D'autres équations invariantes peuvent être obtenues en déterminant les sous-variétés $E(\{z_{m+j}\}_{j \in J}) = 0$, sur lesquelles le rang de la matrice M est inférieur au rang maximal et vérifiant

$$\text{pr } \mathbf{v}_k[E] \Big|_{E=0} = 0, \quad k = 1, \dots, r. \quad (2.14)$$

De telles équations sont dites *faiblement invariantes* ou simplement *variétés invariantes*. Dans les applications, il est souvent préférable de commencer par déterminer les variétés invariantes, car le calcul des invariants sur ces variétés peut se simplifier.

2.4 Discrétisation invariante des équations différentielles

Avec la théorie développée dans les sections 2.1, 2.2 et 2.3, l'algorithme de discrétisation des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, revient simplement à appliquer les concepts exposés, en y ajoutant quelques contraintes. L'algorithme est standard et on le retrouve dans l'ensemble des références traitant de ce sujet [3, 14, 18, 19, 22–25, 28, 39, 40, 43, 49, 51, 52]. Dans ce qui suit, nous l'énonçons de manière générale de façon à couvrir à la fois la discrétisation invariante d'équations différentielles ordinaires et celle d'équations différentielles aux dérivées partielles.

La première étape de l'algorithme consiste, évidemment, à se donner un système d'équations différentielles, (1.1), admettant un certain groupe de symétrie G , non trivial. La discrétisation invariante d'un système d'équations différentielles (1.1) consiste, comme toutes méthodes numériques aux différences finies, à échantillonner dans l'espace des variables indépendantes X des points x libelés par des indices discrets :

$$x_m = (x_m^1, \dots, x_m^p), \quad m \in \mathbb{Z}^p. \quad (2.15)$$

La discrétisation des variables indépendantes engendre naturellement une discrétisation des variables dépendantes, u_m . Dans la majeure partie de ce travail, p sera égal à deux et la variable u sera une fonction scalaire.

La mise au point de schémas numériques invariants consiste à déterminer la façon dont il faut échantillonner les points x_m et à déterminer l'évolution de la solution u_m de telle sorte que les symétries du problème continu soient conservées tout en approximant correctement le système d'équations différentielles. Comme les transformations que nous considérons agissent à la fois sur les variables dépendantes et indépendantes, les équations du maillage doivent faire partie intégrante

du schéma numérique. Ainsi, pour modéliser adéquatement le problème discret, nous considérons un système de $p + q$ équations aux différences finies

$$E_k(\{x_{m+j}, u_{m+j}\}_{j \in J}) = 0, \quad 1 \leq k \leq q + p, \quad m \in \mathbb{Z}^p, \quad (2.16)$$

où $\{0\} \subset J \subset \mathbb{Z}^p$. Nous supposons toujours que la cardinalité de J est finie. Par choix, nous supposons que les p premières équations servent à spécifier le maillage tandis que les q autres équations servent à approximer le système d'équations différentielles (1.1). Par exemple, pour une équation différentielle ordinaire, un schéma numérique sera composé de deux équations tandis que pour une équation différentielle aux dérivées partielles à deux variables indépendantes nous en aurons trois. La quantité de points présents dans (2.16) dépend de l'ordre du système d'équations différentielles ainsi que de la précision avec laquelle nous approximations les dérivées. Dans la limite continue, nous imposons que les q dernières équations du système (2.16) convergent vers les équations différentielles du problème original et que les p premières deviennent des identités ($0 = 0$). L'ensemble des considérations développées dans les sections précédentes s'applique immédiatement aux équations formant nos schémas. Il suffit de poser $z_m = (x_m, u_m) \in X \times U$, ce qui nous permet de définir la prolongation discrète du générateur de symétries, (1.4), comme

$$\text{pr } \mathbf{v} := \sum_{j \in J} \left[\sum_{k=1}^p \xi_{m+j}^k \frac{\partial}{\partial x_{m+j}^k} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_{m+j}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{m+j}^\alpha} \right], \quad (2.17)$$

où $\xi_{m+j}^k = \xi^k(x_{m+j}, u_{m+j})$ et $\phi_{m+j}^\alpha = \phi^\alpha(x_{m+j}, u_{m+j})$.

Proposition 2.1. *Dans la limite continue, la prolongation du champ de vecteurs (2.17) tend vers (1.6).*

L'écriture d'une preuve générale de ce fait est loin d'être évidente. Dans l'annexe I, nous démontrons cette affirmation dans un cas particulier mais qui demeure assez général pour contenir tous les types de symétries traitées dans ce travail.

Finalement, les équations formant les schémas invariants (2.16) sont obtenues en appliquant l'algorithme de la section 2.3. Dans lequel on remplace z_m par (x_m, u_m) avec m dans \mathbb{Z}^p et $\{0\} \in J \subset \mathbb{Z}^p$. Pour la prolongation de v on prend l'expression en (2.17).

Comme toutes les applications traitées dans ce mémoire contiennent au plus que deux variables indépendantes et une variable dépendante, nous introduisons une convention d'écriture qui permet de simplifier la notation. Celle-ci est basée sur les travaux de Dorodnitsyn et coauteurs

$$\begin{aligned}
(x_{m,n}, t_{m,n}, u_{m,n}) &\equiv (x, t, u), \\
(x_{m+1,n}, t_{m+1,n}, u_{m+1,n}) &\equiv (\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}), \\
(x_{m,n\pm 1}, t_{m,n\pm 1}, u_{m,n\pm 1}) &\equiv (x_{\pm}, t_{\pm}, u_{\pm}), \\
(x_{m,n\pm 2}, t_{m,n\pm 2}, u_{m,n\pm 2}) &\equiv (x_{\pm\pm}, t_{\pm\pm}, u_{\pm\pm}), \\
(x_{m+1,n\pm 1}, t_{m+1,n\pm 1}, u_{m+1,n\pm 1}) &\equiv (\hat{x}_{\pm}, \hat{t}_{\pm}, \hat{u}_{\pm}), \\
(x_{m+1,n\pm 2}, t_{m+1,n\pm 2}, u_{m+1,n\pm 2}) &\equiv (\hat{x}_{\pm\pm}, \hat{t}_{\pm\pm}, \hat{u}_{\pm\pm}).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Les variables x et t correspondent aux variables indépendantes et u à la variable dépendante. De plus, nous introduisons les pas

$$\begin{aligned}
T_+ &= t_+ - t, & \tau &= \hat{t} - t, & \sigma &= \hat{x} - x, \\
h_{\pm} &= \pm(x_{\pm} - x), & h_{\pm\pm} &= \pm(x_{\pm\pm} - x_{\pm}), \\
\hat{h}_{\pm} &= \pm(\hat{x}_{\pm} - \hat{x}), & \hat{h}_{\pm\pm} &= \pm(\hat{x}_{\pm\pm} - \hat{x}_{\pm}).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ainsi que les dérivées premières discrètes

$$\begin{aligned}
u_x^{--} &= \frac{u_- - u_{--}}{h_{--}}, & u_x^- &= \frac{u - u_-}{h_-}, & u_x^+ &= \frac{u_+ - u}{h_+}, \\
u_x^{++} &= \frac{u_{++} - u_+}{h_{++}}, & \hat{u}_t &= \frac{\hat{u} - u}{\tau}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

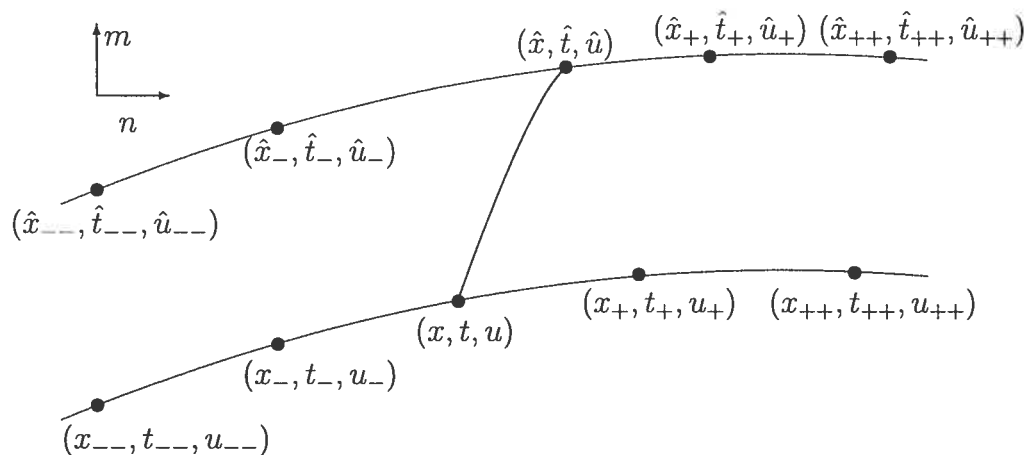


FIG. 2.1 – Schéma numérique.

À la figure 2.1 nous avons tracé un schéma typique.

Dans les quatre prochains chapitres, nous nous proposons de mettre au point des schémas invariants pour quatre équations importantes de la physique. Dans l'ordre, nous considérons l'équation de la chaleur, l'équation de Burgers, l'équation de Burgers pour le potentiel et l'équation Korteweg-de Vries.

Chapitre 3

Équation de la chaleur

Comme première application, nous nous proposons de trouver divers schémas invariants de l'équation de la chaleur à une dimension spatiale. Cette équation différentielle aux dérivées partielles est certainement l'une des plus simples qui soit. Cependant, son groupe de symétries rend cette équation fort intéressante.

3.1 Équation différentielle

Il est bien connu [45] que l'équation de la chaleur, à une dimension spatiale, sans source et à coefficient de diffusion constant,

$$u_t = u_{xx}, \tag{3.1}$$

admet l'algèbre de symétries infinie

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \partial_x, & \mathbf{v}_2 &= \partial_t, & \mathbf{v}_3 &= u\partial_u, & \mathbf{v}_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t, \\ \mathbf{v}_5 &= 2t\partial_x - xu\partial_u, & \mathbf{v}_6 &= 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x, t)\partial_u \quad \text{où} \quad \alpha_t = \alpha_{xx}. \tag{3.3}$$

Les groupes à un paramètre associés à ces générateurs de transformations sont

$$\begin{aligned}
 G_1 &: (x + \epsilon, t, u), && \text{translation spatiale,} \\
 G_2 &: (x, t + \epsilon, u), && \text{translation temporelle,} \\
 G_3 &: (x, t, e^\epsilon u), && \text{dilatation,} \\
 G_4 &: (e^\epsilon x, e^{2\epsilon} t, u), && \text{dilatation,} \\
 G_5 &: (x + 2\epsilon t, t, u \cdot \exp[-\epsilon x - \epsilon^2 t]), && \text{transformation galiléenne,} \\
 G_6 &: \left(\frac{x}{1 - 4\epsilon t}, \frac{t}{1 - 4\epsilon t}, u \sqrt{1 - 4\epsilon t} \cdot \exp \left[\frac{-\epsilon x^2}{1 - 4\epsilon t} \right] \right), && \text{transformation projective}
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

$$G_\alpha : (x, t, u + \epsilon \alpha(x, t)), \tag{3.5}$$

principe de superposition.

3.2 Schémas invariants

Avant de calculer les invariants discrets de (3.2), mentionnons que

$$T_+ = 0 \tag{3.6}$$

est une variété invariante de cette algèbre. Cette équation invariante est très importante dans la mise en oeuvre des schémas invariants. Lors d'une simulation numérique il doit être possible, à chaque itération temporelle, de déplacer en x de manière à couvrir tout le domaine spatial. Pour ce faire, il est nécessaire que les couches temporelles du maillage soient plates. Pour obtenir ces couches plates, l'équation (3.6) doit absolument faire partie des équations spécifiant le maillage. Heureusement, comme l'équation (3.6) est une variété invariante de (3.2) cette dernière peut être incluse dans la définition d'un schéma invariant. En fait, comme nous voulons toujours des maillages avec des couches temporelles plates, l'équation (3.6) sera toujours l'une des trois équations formant nos schémas invariants.

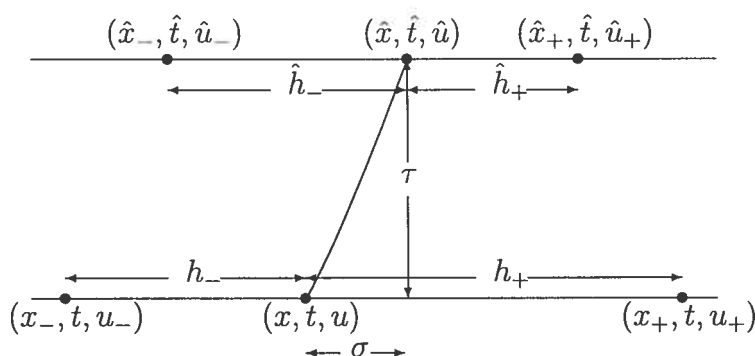


FIG. 3.1 – Schéma pour l'équation de la chaleur.

Les autres équations formant nos schémas invariants sont obtenues en combinant des invariants de l'algèbre de symétries (3.2). Pour générer ces équations, il faut d'abord calculer une base d'invariants de (3.2). Comme l'équation (3.6) fera toujours partie des nos schémas invariants, nous pouvons calculer la base d'invariants sur un schéma à couches temporelles plates. Nous supposons que les invariants peuvent dépendre des variables $\{x_-, x, x_+, \hat{x}_-, \hat{x}, \hat{x}_+, t, \hat{t}, u_-, u, u_+, \hat{u}_-, \hat{u}, \hat{u}_+\}$, figure 3.1. Avec un tel choix, nous sommes en mesure d'obtenir à la fois des schémas invariants explicites et implicites. La dépendance des invariants sur d'autres points peut facilement être envisagée. Cela nous permettrait de générer des schémas numériques plus précis que ceux dont nous allons obtenir. Cependant, plus on augmente le nombre de points sur lesquels les invariants peuvent dépendre, plus les calculs deviennent longs. Le schéma que nous considérons contient le minimum de points nécessaires à l'approximation de la dérivée première en t et la dérivée deuxième en x intervenant dans dans l'équation de la chaleur. En effet, en utilisant les trois points discrets, à un niveau de temps donné, il nous est possible d'approximer la dérivée deuxième en x et l'itération en t nous permet d'approximer la dérivée première en t .

Appliquons la procédure exposée aux sections 2.3 et 2.4 pour dériver une base d'invariants de (3.2). Premièrement, nous débutons par trouver les invariants de \mathbf{v}_1 . Pour ce faire, nous agissons avec la prolongation de \mathbf{v}_1 sur une quantité I que nous supposons dépendre de $\{x_-, x, x_+, \hat{x}_-, \hat{x}, \hat{x}_+, t, \hat{t}, u_-, u, u_+, \hat{u}_-, \hat{u}, \hat{u}_+\}$ et égalons le résultat à zéro

$$(\partial_{x_-} + \partial_x + \partial_{x_+} + \partial_{\hat{x}_-} + \partial_{\hat{x}} + \partial_{\hat{x}_+})I = 0. \quad (3.7)$$

Les quantités I satisfaisant (3.7) sont obtenues en utilisant la méthode des caractéristiques. Ainsi, nous devons résoudre le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{aligned} dx_- = dx = dx_+ = d\hat{x}_- = d\hat{x} = d\hat{x}_+ &= \frac{dt}{0} = \frac{d\hat{t}}{0} \\ &= \frac{du_-}{0} = \frac{du}{0} = \frac{du_+}{0} = \frac{d\hat{u}_-}{0} = \frac{d\hat{u}}{0} = \frac{d\hat{u}_+}{0}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dans l'expression (3.8), il n'y a pas réellement de division par zéro. C'est seulement une manière compacte d'écrire le système d'équations différentielles obtenu par la méthode des caractéristiques. Une telle écriture est courante. Les solutions de (3.8) sont

$$h_-, h_+, \hat{h}_-, \hat{h}_+, \sigma, t, \hat{t}, u_-, u, u_+, \hat{u}_-, \hat{u}, \hat{u}_+ \quad (3.9)$$

et forment une base d'invariants de \mathbf{v}_1 . Les quantités invariantes, à la fois sous \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 , sont obtenues en appliquant le critère d'invariance (2.8) à une quantité I que l'on suppose dépendre que des quantités trouvées en (3.9)

$$(\partial_t + \partial_{\hat{t}})I(h_+, h_-, \hat{h}_+, \hat{h}_-, \sigma, t, \hat{t}, u_-, u, u_+, \hat{u}_-, \hat{u}, \hat{u}_+) = 0. \quad (3.10)$$

La dépendance de I sur les quantités (3.9) nous assure automatiquement que celle-ci est invariante sous le groupe engendré par \mathbf{v}_1 . On résoud (3.10) par la méthode

des caractéristiques ce qui mène au système d'équations différentielles ordinaires

$$dt = d\hat{t} = \frac{dh_+}{0} = \frac{dh_-}{0} = \frac{d\hat{h}_+}{0} = \frac{d\hat{h}_-}{0} = \frac{du_-}{0} = \frac{du}{0} = \frac{du_+}{0} = \frac{d\hat{u}_-}{0} = \frac{d\hat{u}}{0} = \frac{d\hat{u}_+}{0}. \quad (3.11)$$

En résolvant (3.11), nous en concluons que les quantités invariantes à la fois sous \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont

$$h_-, h_+, \hat{h}_-, \hat{h}_+, \sigma, \tau, u_-, u, u_+, \hat{u}_-, \hat{u}, \hat{u}_+. \quad (3.12)$$

Nous poursuivons en déterminant les quantités invariantes sous \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 et \mathbf{v}_3 . Pour ce faire, on demande que l'application de la prolongation du champs de vecteurs \mathbf{v}_3 sur une quantité I dépendant des invariants (3.12) vérifie

$$(u_- \partial_{u_-} + u \partial_u + u_+ \partial_{u_+} + \hat{u}_- \partial_{\hat{u}_-} + \hat{u} \partial_{\hat{u}} + \hat{u}_+ \partial_{\hat{u}_+}) I = 0. \quad (3.13)$$

Les solutions de (3.13) sont obtenues en résolvant le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{du_-}{u_-} = \frac{du}{u} = \frac{du_+}{u_+} = \frac{d\hat{u}_-}{\hat{u}_-} = \frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = \frac{d\hat{u}_+}{\hat{u}_+} = \frac{dh_-}{0} = \frac{dh_+}{0} = \frac{d\hat{h}_-}{0} = \frac{d\hat{h}_+}{0} = \frac{d\sigma}{0} = \frac{d\tau}{0}. \quad (3.14)$$

Ce faisant, nous trouvons les quantités

$$h_-, h_+, \hat{h}_-, \hat{h}_+, \sigma, \tau, \frac{u_-}{u}, \frac{u_+}{u}, \frac{\hat{u}_-}{\hat{u}}, \frac{\hat{u}_+}{\hat{u}}. \quad (3.15)$$

Nous continuons, en ajoutant l'invariance sous \mathbf{v}_4 . Il faut donc solutionner l'équation différentielle aux dérivées partielles

$$(x_- \partial_{x_-} + x \partial_x + x_+ \partial_{x_+} + \hat{x}_- \partial_{\hat{x}_-} + \hat{x} \partial_{\hat{x}} + \hat{x}_+ \partial_{\hat{x}_+} + 2t \partial_t + 2\hat{t} \partial_{\hat{t}}) I = 0 \quad (3.16)$$

où I dépend maintenant des quantités en (3.15). Pour résoudre (3.16) et trouver les quantités invariantes sous le groupe de transformations engendré par les champs de vecteurs \mathbf{v}_1 à \mathbf{v}_4 nous devons exprimer la prolongation de \mathbf{v}_4 en terme des quantités données en (3.15). En faisant ce changement de variables, l'équation (3.16) devient

$$(h_- \partial_{h_-} + h_+ \partial_{h_+} + \hat{h}_- \partial_{\hat{h}_-} + \hat{h}_+ \partial_{\hat{h}_+} + \sigma \partial_\sigma + 2\tau \partial_\tau)I = 0. \quad (3.17)$$

Une fois de plus, par la méthode des caractéristiques, il faut résoudre le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{aligned} \frac{dh_-}{h_-} = \frac{dh_+}{h_+} = \frac{d\hat{h}_-}{\hat{h}_-} = \frac{d\hat{h}_+}{\hat{h}_+} = \frac{d\sigma}{\sigma} \\ = \frac{d\tau}{2\tau} = \frac{d(u_-/u)}{0} = \frac{d(u_+/u)}{0} = \frac{(\hat{u}/u)}{0} = \frac{(\hat{u}_-/\hat{u})}{0} = \frac{d(\hat{u}_+/\hat{u})}{0}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

La solution de (3.18) nous donne les invariants

$$\begin{aligned} I_- = \frac{h_-^2}{\tau}, \quad I_+ = \frac{h_+^2}{\tau}, \quad \hat{I}_- = \frac{\hat{h}_-^2}{\tau}, \quad \hat{I}_+ = \frac{\hat{h}_+^2}{\tau}, \quad \tilde{I} = \frac{\sigma^2}{\tau}, \\ J_- = \frac{u_-}{u}, \quad J_+ = \frac{u_+}{u}, \quad \tilde{J} = \frac{\hat{u}}{u}, \quad \hat{J}_- = \frac{\hat{u}_-}{\hat{u}}, \quad \hat{J}_+ = \frac{\hat{u}_+}{\hat{u}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les invariants des générateurs de symétries \mathbf{v}_1 à \mathbf{v}_5 sont obtenus en déterminant les solutions de

$$\begin{aligned} (2t(\partial_{x_-} + \partial_x + \partial_{x_+}) + 2\hat{t}(\partial_{\hat{x}_-} + \partial_{\hat{x}} + \partial_{\hat{x}_+}) \\ - x_- u_- \partial_{u_-} - x u \partial_u - x_+ u_+ \partial_{u_+} - \hat{x}_- \hat{u}_- \partial_{\hat{u}_-} - \hat{x} \hat{u} \partial_{\hat{u}} - \hat{x}_+ \hat{u}_+ \partial_{\hat{u}_+})I = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

où I est supposée dépendre des quantités trouvées en (3.19). En réexprimant la prolongation de \mathbf{v}_5 en terme des quantités en (3.19), l'équation (3.20) se réécrit

$$\sqrt{I_-} J_- \partial_{J_-} - \sqrt{I_+} J_+ \partial_{J_+} + \sqrt{\hat{I}_-} \hat{J}_- \partial_{\hat{J}_-} - \sqrt{\hat{I}_+} \hat{J}_+ \partial_{\hat{J}_+} - \tilde{I} \tilde{J} \partial_{\tilde{J}} + 4\sqrt{\tilde{I}} \partial_{\tilde{I}} I = 0. \quad (3.21)$$

Il faut donc résoudre le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dJ_-}{\sqrt{I_-J_-}} = -\frac{dJ_+}{\sqrt{I_+J_+}} = \frac{d\hat{J}_-}{\sqrt{\hat{I}_-\hat{J}_-}} = -\frac{d\hat{J}_+}{\sqrt{\hat{I}_+\hat{J}_+}} = -\frac{d\tilde{J}}{\sqrt{\tilde{I}\tilde{J}}} = \frac{\tilde{I}}{4\sqrt{\tilde{I}}}. \quad (3.22)$$

La solution de (3.22) nous donne les 9 quantités invariantes

$$\begin{aligned} I_- &= \frac{h_-^2}{\tau}, & I_+ &= \frac{h_+^2}{\tau}, & \hat{I}_- &= \frac{\hat{h}_-^2}{\tau}, & \hat{I}_+ &= \frac{\hat{h}_+^2}{\tau}, & K_- &= \frac{u_-}{u} \exp\left[-\frac{h_- \sigma}{2\tau}\right], \\ K_+ &= \frac{u_+}{u} \exp\left[\frac{h_+ \sigma}{2\tau}\right], & \hat{K}_- &= \frac{\hat{u}_-}{\hat{u}} \exp\left[-\frac{\hat{h}_- \sigma}{2\tau}\right], & & & & & & \\ \hat{K}_+ &= \frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} \exp\left[-\frac{\hat{h}_+ \sigma}{2\tau}\right], & \tilde{K} &= \frac{\hat{u}}{u} \exp\left[\frac{\sigma^2}{4\tau}\right]. & & & & & & \end{aligned} \quad (3.23)$$

Finalement, nous obtenons les quantités invariantes sous l'algèbre de symétries (3.2) en déterminant les quantités dépendantes de (3.23) et invariantes sous le groupe de transformations à un paramètre engendré par \mathbf{v}_6 . En utilisant le critère d'invariance infinitésimal, il faut résoudre l'équation différentielle aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} &(4t(x_- \partial_{x_-} + x_+ \partial_{x_+} + 4\hat{t}(\hat{x}_- \partial_{\hat{x}_-} + \hat{x}_+ \partial_{\hat{x}_+}) \\ &+ 4t^2 \partial_t + 4\hat{t}^2 \partial_{\hat{t}} - (x_-^2 + 2t_-)u_- \partial_{u_-} - (x_+^2 + 2t_+)u_+ \partial_{u_+} \\ &- (\hat{x}_-^2 + 2\hat{t})\hat{u}_- \partial_{\hat{u}_-} - (\hat{x}_+^2 + 2\hat{t})\hat{u}_+ \partial_{\hat{u}_+})I = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

avec I dépendant des quantités en (3.23). En exécutant un changement de variables pour que la prolongation de \mathbf{v}_6 s'exprime en fonction des quantités en (3.23), l'équation (3.24) devient

$$\begin{aligned} &(4(I_- \partial_{I_-} + I_+ \partial_{I_+} - \hat{I}_- \partial_{\hat{I}_-} - \hat{I}_+ \partial_{\hat{I}_+}) + 2\tilde{K} \partial_{\tilde{K}} \\ &+ I_- K_- \partial_{K_-} + I_+ K_+ \partial_{K_+} + \hat{I}_- \hat{K}_- \partial_{\hat{K}_-} + \hat{I}_+ \hat{K}_+ \partial_{\hat{K}_+})I = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La méthode des caractéristique nous dit qu'il faut résoudre le système d'équations

$$\frac{dI_-}{4I_-} = \frac{dI_+}{4I_+} = -\frac{d\hat{I}_-}{4\hat{I}_-} = -\frac{d\hat{I}_+}{4\hat{I}_+} = \frac{d\tilde{K}}{2\tilde{K}} = \frac{dK_-}{I_-K_-} = \frac{dK_+}{I_+K_+} = \frac{d\hat{K}_-}{\hat{I}_-\hat{K}_-} = \frac{d\hat{K}_+}{\hat{I}_+\hat{K}_+}. \quad (3.26)$$

Les solutions de (3.26) nous donnent

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{h_+}{h_-}, & I_2 &= \frac{\hat{h}_+}{\hat{h}_-}, & I_3 &= \frac{h_+\hat{h}_+}{\tau}, & I_4 &= \frac{h_+^2}{\tau} \left(\frac{u}{\hat{u}}\right)^2 \exp\left[\frac{-\sigma^2}{2\tau}\right], \\ I_5 &= \frac{h_+^2}{4\tau} - \frac{h_+^2}{h_+ + h_-} \left\{ \frac{1}{h_+} \ln\left(\frac{u_+}{u}\right) + \frac{1}{h_-} \ln\left(\frac{u_-}{u}\right) \right\}, \\ I_6 &= \frac{\hat{h}_+^2}{4\tau} + \frac{\hat{h}_+^2}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-} \left\{ \frac{1}{\hat{h}_+} \ln\left(\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}}\right) + \frac{1}{\hat{h}_-} \ln\left(\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}}\right) \right\}, \\ I_7 &= \frac{h_+\sigma}{\tau} + \frac{2h_+}{h_+ + h_-} \left\{ \frac{h_-}{h_+} \ln\left(\frac{u_+}{u}\right) - \frac{h_+}{h_-} \ln\left(\frac{u_-}{u}\right) \right\}, \\ I_8 &= \frac{\hat{h}_+\sigma}{\tau} + \frac{2\hat{h}_+}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-} \left\{ \frac{\hat{h}_-}{\hat{h}_+} \ln\left(\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}}\right) - \frac{\hat{h}_+}{\hat{h}_-} \ln\left(\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Le nombre d'invariants obtenu en (3.27) est en accord avec la formule (2.11) puisque la matrice formée des coefficients des champs de vecteurs prolongés de l'algèbre de symétries (3.2) est de rang 6.

Présentement, il est clair que tous schémas formés à partir des 8 invariants de la liste (3.27) et de l'équation $T_+ = 0$ seront invariants sous l'algèbre de symétries (3.2). En ce qui concerne le principe de superposition, celui-ci peut-être récupérer en combinant adéquatement les invariants en (3.27). Dans la section 3.2.3 nous montrons comment cela est possible.

À partir de la liste (3.27), nous pouvons générer au moins deux types de schémas invariants. Le premier consiste en des schémas où le rapport entre deux pas successifs en x est constant,

$$\frac{h_+}{h_-} = 1 + \epsilon, \quad] - 1, \infty[.$$

En particulier, lorsque $\epsilon = 0$, les pas en x sont égaux sur une couche temporelle donnée. Il est important d'insister que l'uniformité des pas n'impliquent pas que ceux-ci doivent être constants dans le temps. Le deuxième type consiste en des schémas où l'évolution des pas en x dépend de la solution u .

3.2.1 Maillage uniforme en x

Trois types de schémas invariants admettant des pas uniformes en x sont construits. Le premier est explicite, le deuxième est implicite et le troisième est de type Crank-Nicolson. Un schéma est explicite lorsque la valeur \hat{u} s'obtient directement d'une formule impliquant la solution à l'itération temporelle précédente. Un schéma est implicite lorsque l'équation d'évolution pour \hat{u} implique une relation entre d'autres points du même niveau de temps. Pour obtenir \hat{u} et avancer au prochain niveau temporel, il faut alors résoudre un système d'équations. Finalement, un schéma de Crank-Nicolson correspond à prendre la moyenne des schémas explicite et implicite. Au niveau des applications numériques, ce schéma est potentiellement meilleur qu'un schéma implicite. En effet, quoique l'effort de calcul est plus important avec un tel schéma on gagne en précision. Si le gain en précision est plus appréciable que l'augmentation des erreurs engendrées par l'augmentation des calculs, un tel schéma est avantageux.

Schéma explicite

Un schéma explicite avec un pas constant en x à chaque itération temporelle s'obtient en posant

$$T_+ = 0, \quad I_1 = 1, \quad I_5 = \frac{1}{4} \left(I_4 + \frac{I_7^2}{2} \right), \quad (3.28)$$

Nous obtenons, en terme des variables originales, le système

$$T_+ = 0, \quad (3.29a)$$

$$h_+ = h_- \equiv h, \quad (3.29b)$$

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{4\tau} \left(\frac{u}{\hat{u}} \right)^2 \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2\tau} \right] + \frac{1}{8} \left\{ \frac{\sigma h}{\tau} + \ln \left(\frac{u_+}{u} \right) - \ln \left(\frac{u_-}{u} \right) \right\}^2 = \\ \frac{h^2}{4\tau} - \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(\frac{u_+}{u} \right) + \ln \left(\frac{u_-}{u} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.29c)$$

Le schéma (3.29c) est explicite car il est possible d'écrire \hat{u} comme une fonction explicite de u_- , u et u_+ . Ainsi, connaissant la solution à un temps t donné, l'équation (3.29c) nous procure directement la solution au temps $t + \tau$.

Il n'y a pas de recette permettant de trouver (3.28). Cependant, la combinaison des invariants en (3.28) est justifiée par le fait que dans la limite continue le système des trois équations en (3.29) tend vers l'équation de la chaleur. En fait, toute combinaison des invariants qui dans la limite tend vers l'équation de la chaleur engendre un schéma invariant de l'équation de la chaleur.

Vérifions que la limite continue de (3.29) nous donne bien l'équation de la chaleur. Premièrement il est évident que lorsque les pas tendent vers zéro les équations (3.29a) et (3.29b) tendent vers les identités $0 = 0$. Pour trouver la limite continue de (3.29c) nous débutons par développer les invariants I_4 , I_7 et I_5 en série de Taylor. Ce faisant,

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{h^2}{\tau} \left(1 - 2\sigma \frac{u_x}{u} - 2\tau \frac{u_t}{u} + \dots \right) \left(1 - \frac{\sigma}{2\tau} + \dots \right) \\ &= h^2 \left(\frac{1}{\tau} - 2\frac{\sigma}{\tau} \frac{u_x}{u} - 2\frac{u_t}{u} - \frac{\sigma^2}{2\tau^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

où les termes non écrits sont de la forme σ^k/τ^l , avec $k > l$ et

$$I_7^2 = h^2 \left(\frac{\sigma^2}{\tau^2} + \frac{4\sigma}{\tau} \frac{u_x}{u} + 4 \left(\frac{u_x}{u} \right) + \mathcal{O}(h) \right),$$

$$I_5 = h^2 \left(\frac{1}{4\tau} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{xx}}{u} - \left(\frac{u_x}{u} \right)^2 \right) + \mathcal{O}(h) \right).$$

Ainsi, l'équation (3.29c) devient

$$h^2 \left(\frac{1}{\tau} - 2 \frac{\sigma}{\tau} \frac{u_x}{u} - 2 \frac{u_t}{u} - \frac{\sigma^2}{2\tau^2} + \dots \right) = h^2 \left\{ \frac{1}{\tau} - 2 \left(\frac{u_{xx}}{u} - \left(\frac{u_x}{u} \right)^2 \right) - \frac{\sigma^2}{2\tau^2} - 2 \frac{\sigma}{\tau} \frac{u_x}{u} - 2 \left(\frac{u_x}{u} \right)^2 + \mathcal{O}(h) \right\}.$$

Cette dernière équation converge bien vers l'équation de la chaleur si la condition

$$\left| \frac{\sigma}{\tau} \right| \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} |R| < \infty, \quad (3.30)$$

est vérifiée.

L'équation (3.30) impose une condition supplémentaire au maillage en plus des équations (3.29a) et (3.29b). Regardons cela de plus près. Tout d'abord, les équations (3.29a) et (3.29b), sont facilement résolues

$$t_{m,n} = \gamma(m), \quad (3.31a)$$

$$x_{m,n} = \alpha(m)n + \beta(m), \quad (3.31b)$$

où $\gamma(m)$, $\alpha(m)$ et $\beta(m)$ sont des fonctions arbitraires avec la seule restriction que celles-ci doivent être choisies de telle sorte à respecter les conditions initiales du maillage. En tenant compte de l'équation (3.30), il faut aussi ajouter la restriction que les rapports

$$\frac{\alpha(m+1) - \alpha(m)}{\gamma(m+1) - \gamma(m)}, \quad \frac{\beta(m+1) - \beta(m)}{\gamma(m+1) - \gamma(m)},$$

ne divergent pas lorsque $\gamma(m+1) \rightarrow \gamma(m)$, c'est-à-dire quand les pas en t tendent vers zéro. En demandant que (3.30) soit satisfait et que h et τ tendent vers zéro indépendamment dans limite continue nous trouvons que τ , h et σ sont de la forme

$$\begin{aligned}\tau &= \epsilon T(m), \\ h &= \delta H(m), \\ \sigma &= \epsilon(\delta\sigma_1(m)n + \sigma_2(m)).\end{aligned}\tag{3.32}$$

$T(m)$, $H(m)$, $\sigma_1(m)$ et $\sigma_2(m)$ sont des fonctions reliées aux fonctions $\gamma(m)$, $\alpha(m)$ et $\beta(m)$, définies en (3.31a) et (3.31b), par

$$\begin{aligned}T(m) &= (\gamma(m+1) - \gamma(m))/\epsilon, \\ H(m) &= \alpha(m)/\delta, \\ \sigma_1(m) &= (\alpha(m+1) - \alpha(m))/(\epsilon\delta), \\ \sigma_2(m) &= (\beta(m+1) - \beta(m))/(\epsilon\delta).\end{aligned}$$

Les paramètres ϵ et δ sont variables et ce sont ces derniers que l'on fait tendre vers zéro lorsque l'on prend la limite continue.

Schéma implicite

À partir de la liste d'invariants (3.27), nous pouvons aussi mettre au point un schéma implicite. Pour ce faire, il suffit de poser

$$T_+ = 0, \quad I_2 = 1, \quad I_6 = \frac{1}{4} \left(I_2^2 I_4^{-1} - \frac{I_8^2}{2} \right).\tag{3.33}$$

Ce qui donne explicitement

$$T_+ = 0, \quad (3.34a)$$

$$\hat{h}_+ = \hat{h}_- \equiv \hat{h}, \quad (3.34b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{h}^2}{4\tau} \left(\frac{\hat{u}}{u} \right)^2 \exp \left[\frac{\sigma^2}{2\tau} \right] - \frac{1}{8} \left\{ \frac{\sigma \hat{h}}{\tau} + \ln \left(\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} \right) - \ln \left(\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}} \right) \right\}^2 = \\ \frac{\hat{h}^2}{4\tau} + \frac{1}{2} \left\{ \ln \left(\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} \right) + \ln \left(\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.34c)$$

Ce schéma est implicite car par opposition au schéma explicite, l'équation (3.34) ne peut pas être solutionnée pour \hat{u} en terme seulement des valeurs de u au temps précédent. Comme l'équation (3.34c) relie plus d'un points inconnus entre eux, elle ne peut pas être utilisée directement pour calculer la solution à un temps ultérieur. La solution du problème au temps $t + \tau$ s'obtient en résolvant un problème auxiliaire. On doit former un système d'équations contenant l'équation (3.34c) évaluée à chaque noeud intérieur du domain d'intégration en x et les valeurs frontières doivent être fournies par l'utilisateur. C'est en résolvant ce nouveau système d'équations pour les \hat{u} que nous obtenons la solution au temps subséquent.

Le calcul de la limite continue de (3.34) très similaire à celui réalisé pour le schéma explicite. Comme on n'y apprend rien de significativement nouveau, nous avons décidé d'omettre les calculs. Mentionnons seulement que pour que le système (3.34) converge vers l'équation de la chaleur il faut que la condition (3.30) soit vérifiée.

Schéma de Crank-Nicolson

Un schéma de type Crank-Nicolson s'obtient en posant

$$T_+ = 0, \quad I_1 = 1, \quad I_6 + I_5 = \frac{1}{4} \left(I_2^2 I_4^{-1} - \frac{I_8^2}{2} + I_4 + \frac{I_7^2}{2} \right). \quad (3.35)$$

Ce schéma est obtenu simplement en additionnant au schéma explicite (3.29) le schéma implicite (3.34). Un tel schéma fait intervenir tous les points présent dans la figure 3.1. En fonction des variables discrètes l'équation (3.35) devient

$$T_+ = 0, \quad (3.36a)$$

$$h_+ = h_- \equiv h, \quad (3.36b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \left\{ h^2 \left(\frac{u}{\hat{u}} \right)^2 \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2\tau} \right] + \hat{h}^2 \left(\frac{u}{u} \right)^2 \exp \left[\frac{\sigma^2}{2\tau} \right] \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma h}{\tau} + \ln \left(\frac{u_+}{u_-} \right) \right\}^2 \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma \hat{h}}{\tau} + \ln \left(\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}_-} \right) \right\}^2 = \frac{h^2 + \hat{h}^2}{\tau} + 2 \left\{ \ln \left(\frac{\hat{u}_+ \hat{u}_-}{\hat{u}^2} \right) - \ln \left(\frac{u_+ u_-}{u^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.36c)$$

Le schéma (3.36) est une fois de plus un schéma dit implicite car on ne peut pas utiliser (3.36c) pour obtenir \hat{u} , au temps $t + \tau$ directement de la solution au temps t .

En effectuant le calcul de la limite continue, nous trouvons que la condition (3.30) doit être satisfaite pour que le schéma (3.36) converge vers l'équation de la chaleur.

3.2.2 Maillage dépendant de la solution

Dans cette section, nous proposons une autre façon de discrétiser l'équation de la chaleur de manière à préserver toute l'algèbre de symétries finie (3.2). Ces schémas invariants ont déjà été obtenus par Dorodnitsyn et coauteurs [3, 19, 22–24] mais rappelons que ceux-ci font intervenir le concept de variables lagrangiennes, ce qui n'est pas nécessaire. En fait, les schémas qui sont dérivés dans cette section sont reliés aux schémas de la section précédente. La différence se situe seulement dans l'équation spécifiant l'évolution des points en x correspondant à la deuxième équation de nos schémas invariants.

Schéma explicite

En remplaçant l'équation d'évolution en x (3.29b), provenant de l'égalité $I_1 = 1$, par $I_7 = 0$ dans (3.28), l'équation d'évolution en u (3.29c) devient $I_4 = 4I_5$. Ce faisant, le schéma invariant s'écrit en fonction des variables originales

$$T_+ = 0, \quad (3.37a)$$

$$\sigma = \frac{2\tau}{h_+ + h_-} \left\{ \frac{h_+}{h_-} \ln \left(\frac{u_-}{u} \right) - \frac{h_-}{h_+} \ln \left(\frac{u_+}{u} \right) \right\}, \quad (3.37b)$$

$$\left(\frac{u}{\hat{u}} \right)^2 \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2\tau} \right] = 1 - \frac{4\tau}{h_+ + h_-} \left\{ \frac{1}{h_+} \ln \left(\frac{u_+}{u} \right) + \frac{1}{h_-} \ln \left(\frac{u_-}{u} \right) \right\}. \quad (3.37c)$$

Vérifions l'exactitude de la limite continue de ce système d'équations aux différences finies. Évidemment, la première équation tend vers l'identité $0 = 0$ dans la limite. Maintenant, développons en série de Taylor l'équation (3.37b). Tout d'abord nous développons les logarithmes

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{u_+}{u} \right) &= h_+ \frac{u_x}{u} + \frac{h_+^2}{2} \frac{u_{xx}}{u} - \frac{h_+^2}{2} \left(\frac{u_x}{u} \right)^2 + \mathcal{O}(h_+^3), \\ \ln \left(\frac{u_-}{u} \right) &= -h_- \frac{u_x}{u} + \frac{h_-^2}{2} \frac{u_{xx}}{u} - \frac{h_-^2}{2} \left(\frac{u_x}{u} \right)^2 + \mathcal{O}(h_-^3). \end{aligned}$$

En remplaçant ces développements dans (3.37b) nous trouvons

$$\sigma = -2\tau \frac{u_x}{u} + \mathcal{O}(\tau h^2), \quad (3.38)$$

ce qui tend bien vers $0 = 0$ lorsque $\sigma \rightarrow 0$ et $\tau \rightarrow 0$. De plus, remarquons que le critère de convergence (3.30) est satisfait à condition que solution en u ne soit pas nulle puisque

$$\frac{\sigma}{\tau} = -2 \frac{\tau}{\tau} \frac{u_x}{u} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} -2 \frac{u_x}{u}.$$

Lorsque u est nul, le critère ne tient pas et le schéma invariant (3.37) n'est pas définie dû à la présence des rapports en u dans (3.37b) et (3.37c).

Finalement, en développant en série de Taylor l'équation (3.37c) nous obtenons, en tenant compte que

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{\hat{u}}\right)^2 &= 1 - 2\sigma\frac{u_x}{u} - 2\tau\frac{u_t}{u} + \mathcal{O}(\sigma^2, \tau^2), \\ \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2\tau}\right] &= 1 - \frac{\sigma^2}{2\tau} + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^4}{\tau^2}\right), \end{aligned}$$

et en ne gardant que les termes qui ne vont pas à zéro dans la limite,

$$-2\frac{\sigma}{\tau}\frac{u_x}{u} - 2\frac{u_t}{u} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\tau^2} = -2\frac{u_{xx}}{u} + 2\left(\frac{u_x}{u}\right)^2$$

En utilisant (3.38) l'équation (3.2.2) devient

$$-2\left(-2\frac{u_x}{u}\right)\frac{u_x}{u} - 2\frac{u_t}{u} - \frac{1}{2}\left(-2\frac{u_x}{u}\right)^2 = -2\frac{u_{xx}}{u} + 2\left(\frac{u_x}{u}\right)^2, \quad (3.39)$$

ce qui donne bien l'équation de la chaleur, après la cancellation des termes superflus. Remarquons qu'il est bien important de tenir compte du maillage lorsque nous prenons la limite de (3.37c). En effet, quand on prend la limite d'un schéma numérique, cela doit se faire de manière cohérente avec le maillage.

Schéma implicite

Il est possible d'obtenir un schéma complètement implicite en posant

$$T_+ = 0, \quad I_8 = 0, \quad I_4^{-1}I_3^2 = 4I_6. \quad (3.40)$$

Ce qui donne en terme des variables originales

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \sigma &= \frac{2\tau}{(\hat{h}_+ + \hat{h}_-)} \left\{ \frac{\hat{h}_+}{\hat{h}_-} \ln \left(\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}} \right) - \frac{\hat{h}_-}{\hat{h}_+} \ln \left(\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} \right) \right\}, \\
 \left(\frac{\hat{u}}{u} \right)^2 \exp \left[\frac{\sigma^2}{2\tau} \right] &= 1 + \frac{4\tau}{(\hat{h}_+ + \hat{h}_-)} \left\{ \frac{1}{\hat{h}_+} \ln \left(\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} \right) + \frac{1}{\hat{h}_-} \ln \left(\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Nous ne faisons pas le calcul de la limite continue puisqu'il est similaire au cas précédent et que les résultats sont identiques. Cette remarque est aussi vrai pour tous les autres schémas que nous obtenons dans cette section.

Nous pouvons aussi écrire des schémas mixtes où l'évolution du maillage est définie de façon explicite et l'évolution de la solution est donnée implicitement ou, inversement, le maillage est défini implicitement avec l'évolution de la solution donnée explicitement.

Maillage explicite, évolution de u implicite

$$T_+ = 0, \quad I_7 = 0, \quad I_4^{-1} I_3^2 = 4I_6. \tag{3.42}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \sigma &= \frac{2\tau}{h_+ + h_-} \left\{ \frac{h_+}{h_-} \ln \left(\frac{u_-}{u} \right) - \frac{h_-}{h_+} \ln \left(\frac{u_+}{u} \right) \right\}, \\
 \left(\frac{\hat{u}}{u} \right)^2 \exp \left[\frac{\sigma^2}{2\tau} \right] &= 1 + \frac{4\tau}{(\hat{h}_+ + \hat{h}_-)} \left\{ \frac{1}{\hat{h}_+} \ln \left(\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} \right) + \frac{1}{\hat{h}_-} \ln \left(\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Maillage implicite, évolution de u explicite

$$T_+ = 0, \quad I_8 = 0, \quad I_4 = 4I_5. \tag{3.44}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \sigma &= \frac{2\tau}{(\hat{h}_+ + \hat{h}_-)} \left\{ \frac{\hat{h}_+}{\hat{h}_-} \ln \left(\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}} \right) - \frac{\hat{h}_-}{\hat{h}_+} \ln \left(\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} \right) \right\}, \\
 \left(\frac{u}{\hat{u}} \right)^2 \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2\tau} \right] &= 1 - \frac{4\tau}{h_+ + h_-} \left\{ \frac{1}{h_+} \ln \left(\frac{u_+}{u} \right) + \frac{1}{h_-} \ln \left(\frac{u_-}{u} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Schéma de type Crank-Nicolson

$$T_+ = 0, \quad I_7 + I_8 = 0, \quad I_4^{-1} I_3^2 + I_4 = 4(I_6 + I_5). \tag{3.46}$$

d'où on trouve

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \sigma &= \frac{\tau}{h_+ + \hat{h}} \left\{ \frac{2h_+}{h_+ + h_-} \left\{ \frac{h_+}{h_-} \ln \left(\frac{u_-}{u} \right) - \frac{h_-}{h_+} \ln \left(\frac{u_+}{u} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\hat{h}_+}{(\hat{h}_+ + \hat{h}_-)} \left\{ \frac{\hat{h}_+}{\hat{h}_-} \ln \left(\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}} \right) - \frac{\hat{h}_-}{\hat{h}_+} \ln \left(\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} \right) \right\} \right\}, \\
 \frac{\hat{h}_+^2}{\tau} \left(\frac{\hat{u}}{u} \right)^2 \exp \left[\frac{\sigma^2}{2\tau} \right] + \frac{h_+^2}{\tau} \left(\frac{u}{\hat{u}} \right)^2 \exp \left[-\frac{\sigma^2}{2\tau} \right] &= \\
 \frac{h_+^2 + \hat{h}_+^2}{\tau} + \frac{4\hat{h}_+^2}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-} \left\{ \frac{1}{\hat{h}_+} \ln \left(\frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} \right) + \frac{1}{\hat{h}_-} \ln \left(\frac{\hat{u}_-}{\hat{u}} \right) \right\} \\
 - \frac{4h_+^2}{h_+ + h_-} \left\{ \frac{1}{h_+} \ln \left(\frac{u_+}{u} \right) + \frac{1}{h_-} \ln \left(\frac{u_-}{u} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

3.2.3 Schémas linéaires en u

Bien que nous avons obtenu plusieurs schémas invariants jusqu'à présent, aucun d'entre eux admet le principe de superposition (3.3) puisqu'ils sont tous non linéaires en u . Pour qu'un schéma numérique préserve le principe de superposition, deux conditions doivent être satisfaites. Il faut que le maillage soit indépendant de u et il faut que l'équation d'évolution pour u soit linéaire en u .

Pour générer des schémas invariants préservant le principe de superposition un changement de base des invariants s'impose. Celui-ci est donné par

$$\begin{aligned}
 J_i &= I_i, & i &= 1, 2, 3, & J_4 &= I_4^{-1/2}, \\
 J_5 &= \exp \left[\frac{I_7}{2} - I_5 \right], & J_6 &= \exp \left[-\frac{I_7}{2} I_1^{-1} - I_5 I_1^{-2} \right], \\
 J_7 &= \exp \left[\frac{I_8}{2} + I_6 \right], & J_8 &= \exp \left[-\frac{I_8}{2} I_2^{-1} + I_6 I_2^{-2} \right].
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

En fonction des variables discrètes du problème, ces nouvelles variables sont

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{h_+}{h_-}, & J_2 &= \frac{\hat{h}_+}{\hat{h}_-}, & J_3 &= \frac{h_+ \hat{h}_+}{\tau}, & J_4 &= \frac{\sqrt{\tau} \hat{u}}{h_+ u} \exp \left[\frac{-\sigma^2}{4\tau} \right], \\
 J_5 &= \frac{u_+}{u} \exp \left[\frac{h_+}{4\tau} (2\sigma - h_+) \right], & J_6 &= \frac{u_-}{u} \exp \left[-\frac{h_-}{4\tau} (2\sigma + h_-) \right], \\
 J_7 &= \frac{\hat{u}_+}{\hat{u}} \exp \left[\frac{\hat{h}_+}{4\tau} (2\sigma + \hat{h}_+) \right], & J_8 &= \frac{\hat{u}_-}{\hat{u}} \exp \left[-\frac{\hat{h}_-}{4\tau} (2\sigma - \hat{h}_+) \right],
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

L'idée derrière les transformations en (3.48) est simple. Nous avons tout simplement chercher les transformations qui permettent d'engendrer une base d'invariants dépendant linéairement des rapports en u . Ainsi, comme nous le verrons sous peu, en prenant certaines combinaisons linéaires des invariants J_4 à J_8 il nous est possible de mettre au point des schémas invariants linéaires en u .

Schéma explicite

En posant

$$T_+ = 0, \quad J_1 = 0, \quad J_3^{3/2} J_4 - J_3 = (J_5 + J_6) \exp \left[\frac{J_3}{4} \right] - 2, \tag{3.50}$$

nous obtenons le schéma invariant explicite

$$T_+ = 0, \quad (3.51a)$$

$$h_+ = h_- \equiv h, \quad (3.51b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \left(\sqrt{\frac{\hat{h}}{h}} \hat{u} \exp \left[\frac{\sigma}{4\tau} \right] - u \right) = \\ \frac{1}{\hat{h}h} \left(u_+ \exp \left[\frac{h}{4\tau} (2\sigma - h + \hat{h}) \right] - 2u + u_- \exp \left[-\frac{h}{4\tau} (2\sigma + h - \hat{h}) \right] \right). \end{aligned} \quad (3.51c)$$

Comme l'équation (3.51c) est linéaire en u , il s'en suit que la somme de deux solutions, de (3.51c), $u_1 + u_2$, est aussi une solution. Cependant, il est important que les deux solutions soient définies sur le même maillage. En effet, si ce n'est pas le cas il devient impossible de définir la somme de deux solutions.

Calculons la limite continue de (3.51) pour montrer que c'est effectivement un schéma approximant l'équation de la chaleur. Dans la limite continue, les équations du maillage, (3.51a) et (3.51b), tendent trivialement vers l'identité $0 = 0$. Donc passons immédiatement à l'équation (3.51c). Pour simplifier la discussion nous allons plutôt travailler avec l'équation donnée en terme des invariants (troisième équation de (3.50)). Tout comme pour les schémas à maillage uniforme en x , section 3.2.1, nous demandons que le rapport σ sur τ satisfasse (3.30) dans la limite continue. Par conséquent, les pas h , σ et τ vérifient les égalités données en (3.32).

Débutons par développer en série de Taylor l'invariant $J_3^{3/2}$,

$$J_3^{3/2} = \left(\frac{\hat{h}h}{\tau} \right)^{3/2} = \left(\frac{(h + \sigma_+ - \sigma)h}{\tau} \right)^{3/2} = \frac{h^3}{\tau^{3/2}} \left(1 + \frac{\sigma_+ - \sigma}{h} \right)^{3/2}$$

où $\sigma_+ = \hat{x}_+ - x_+$. En utilisant (3.32) et en laissant tomber l'argument des fonctions

T , H , σ_1 et σ_2 , nous avons

$$J_3^{3/2} = \frac{(\delta H)^3}{(\epsilon T)^{3/2}} \left(1 + \frac{\epsilon \sigma_1}{H}\right)^{3/2} = \frac{(\delta H)^3}{(\epsilon T)^{3/2}} \left(1 + \epsilon \frac{3\sigma_1}{2H} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right).$$

En posant $S = \delta\sigma_1(m)n + \sigma_2(m)$, en développant l'exponentielle et le rapport \hat{u}/u en série de Taylor et en négligeant les termes qui tendent vers zéro dans la limite nous trouvons que

$$I_3^{3/2} I_4 - I_3 \approx (\delta H)^2 \left(\frac{\sigma_1}{2TH} + \frac{u_t}{u} + \frac{S u_x}{T u} + \frac{S^2}{4T^2} \right). \quad (3.52)$$

De même, en développant en série de Taylor et en conservant seulement les termes qui contribuent à la limite, nous trouvons que

$$(I_5 + I_6)e^{I_3/4} - 2 \approx (\delta H)^2 \left(\frac{u_{xx}}{u} + \frac{S u_x}{T u} + \frac{S^2}{4T^2} + \frac{\sigma_1}{2TH} \right). \quad (3.53)$$

En égalant (3.52) et (3.53) et en divisant par $(\delta H)^2$, nous retrouvons bien l'équation de la chaleur.

Schéma implicite

En posant

$$T_+ = 0, \quad J_2 = 0, \quad J_3^- J_3 1/2 J_4^{-1} = (J_7 + J_8) \exp\left[-\frac{J_3}{4}\right] - 2, \quad (3.54)$$

nous obtenons le schéma implicite

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ \hat{h}_+ &= \hat{h}_- \equiv \hat{h}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\frac{1}{\tau} \left(\hat{u} - \sqrt{\frac{h}{\hat{h}}} u \exp \left[-\frac{\sigma}{4\tau} \right] \right) = \frac{1}{\hat{h}h} \left(\hat{u}_+ \exp \left[\frac{\hat{h}}{4\tau} (2\sigma - h + \hat{h}) \right] - 2\hat{u} + \hat{u}_- \exp \left[-\frac{h}{4\tau} (2\sigma + h - \hat{h}) \right] \right).$$

Une fois de plus, le schéma (3.55) converge, dans la limite continue, vers l'équation de la chaleur à condition que le rapport σ sur τ vérifie (3.30). Le calcul de la limite est similaire à celui du cas explicite.

Remarquons que pour générer les schémas linéaires invariants (3.51) et (3.55), nous devons considérer des schémas impliquant cinq points ; respectivement $\{(x_-, t, u_-), (x, t, u), (x_+, t, u_+), (\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}), (\hat{x}_+, \hat{t}, \hat{u}_+)\}$ et $\{(\hat{x}_-, \hat{t}, \hat{u}_-), (\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}), (\hat{x}_+, \hat{t}, \hat{u}_+), (x, t, u), (x_+, t, u_+)\}$. Ceci est dû au fait que les schémas font intervenir à la fois le pas h et le \hat{h} , provenant de l'invariant J_3 .

Dans le cas particulier où les pas en t sont constants et que σ est nul, nous avons $\hat{h} = h$ et les schémas (3.51) et (3.55) redonnent les discrétisations standards

$$\begin{aligned} t &= \tau m + t_0, & x &= hn + x_0, \\ \frac{\hat{u} - u}{\tau} &= \frac{u_+ - 2u + u_-}{h^2}, \end{aligned} \tag{3.56}$$

et

$$\begin{aligned} t &= \tau m + t_0, & x &= hn + x_0, \\ \frac{\hat{u} - u}{\tau} &= \frac{\hat{u}_+ - 2\hat{u} + \hat{u}_-}{h^2}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

respectivement. Dans les schémas (3.56) et (3.57), t_0 et x_0 sont des constantes correspondant à la valeur de x et t lorsque m et n sont nuls. Il s'en suit donc que les schémas (3.51) et (3.55) sont des généralisations des schémas standards. Cependant, il est important d'insister sur le fait que les schémas standards (3.56) et (3.57) ne sont pas invariants sous toute l'algèbre de symétries (3.2). Bien que $\sigma = 0$ soit une solution des schémas (3.51) et (3.55), ce choix n'en est pas un qui soit invariant sous tout le groupe de transformations (3.4), [40].

3.3 Solutions exactes

La réduction par symétries, pour obtenir des solutions exactes des schémas invariants, ne s'avère pas aussi efficace que pour les équations différentielles aux dérivées partielles. Cela est dû au fait que les systèmes d'équations aux différences finies réduits demeurent difficiles à résoudre [22]. Cependant, nous avons quand même été en mesure d'obtenir quelques solutions exactes en utilisant l'idée fondamentale que l'action d'un groupe de symétries définit un automorphisme de l'espace des solutions.

Étant donné (x, t, u) une solution d'un schéma invariant de l'équation de la chaleur il s'en suit qu'en agissant avec le groupe de symétries (3.4) que

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\sqrt{1+4\epsilon_6\tilde{t}}} f\left(e^{-\epsilon_5\frac{\tilde{x}-2\epsilon_6\tilde{t}}{1+4\epsilon_6\tilde{t}}}, \frac{e^{-2\epsilon_4\tilde{t}}}{1+4\epsilon_6\tilde{t}} - \epsilon_2\right) \exp\left[\epsilon_3 - \frac{\epsilon_5\tilde{x} - \epsilon_5^2\tilde{t} + \epsilon_6\tilde{x}^2}{1+4\epsilon_6\tilde{t}}\right], \\ \tilde{x} &= \frac{e^{\epsilon_4}(x + \epsilon_1) + 2\epsilon_5 e^{2\epsilon_4 t}}{1 - 4\epsilon_6 e^{2\epsilon_4}(t + \epsilon_2)}, \\ \tilde{t} &= \frac{e^{2\epsilon_4}(t + \epsilon_2)}{1 - 4\epsilon_6 e^{2\epsilon_4}(t + \epsilon_2)},\end{aligned}\tag{3.58}$$

est aussi une solution du schéma invariant.

3.3.1 Solution linéaire

Il est facile de vérifier que la solution linéaire et indépendant du temps

$$u = ax + b,\tag{3.59}$$

définie sur le maillage

$$x = hn + x_0, \quad t = \gamma(m),\tag{3.60}$$

où h et x_0 sont des constantes et $\gamma(m)$ une fonction croissante quelconque est une solution exacte des schémas (3.51) et (3.55). En particulier, on peut prendre

$\gamma(m) = \tau m + t_0$, avec τ et t_0 des constantes, pour que le maillage soit rectangulaire. En posant $a = 0$, on vérifie que la solution constante est une solution exacte de tous les autres schémas invariants obtenus précédemment. La solution a non nul n'est pas une solution des schémas invariants logarithmique parce que ceux-ci sont non linéaires. Remarquons que la condition de convergence (3.30) est trivialement vérifiée puisque $\sigma = 0$. Donc le maillage est cohérent avec les conditions de convergence que nous avons imposé sur se dernier

En agissant avec le groupe de symétries fini sur la solution linéaire, on en conclut que

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4\epsilon_6 \tilde{t}}} \left(a e^{-\epsilon_5 \frac{\tilde{x} - 2\epsilon_6 \tilde{t}}{1 + 4\epsilon_6 \tilde{t}}} + b \right) \exp \left[\epsilon_3 - \frac{\epsilon_5 \tilde{x} - \epsilon_5^2 \tilde{t} + \epsilon_6 \tilde{x}^2}{1 + 4\epsilon_6 \tilde{t}} \right], \\ \tilde{x} &= \frac{e^{\epsilon_4} (x + \epsilon_1) + 2\epsilon_5 e^{2\epsilon_4} t}{1 - 4\epsilon_6 e^{2\epsilon_4} (t + \epsilon_2)}, \\ \tilde{t} &= \frac{e^{2\epsilon_4} (t + \epsilon_2)}{1 - 4\epsilon_6 e^{2\epsilon_4} (t + \epsilon_2)}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

où x et t sont donnés par (3.60), est une solution exacte des schémas (3.51) et (3.55). En posant $a = 0$, nous obtenons de nouvelles solutions exactes pour tous les autres schémas invariants.

3.3.2 Solution fondamentale

À partir de la solution constante $u = b \neq 0$, définie sur le maillage $x = hn + x_0$ et $t = \gamma(t)$, il est possible d'obtenir la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. En agissant successivement avec $g_{\epsilon_6=\epsilon}$, $g_{\epsilon_3=\ln(\sqrt{\epsilon/\pi b^2})}$ et $g_{\epsilon_2=1/(4\epsilon)}$ sur u , x et t , nous trouvons que

$$\tilde{u} = \sqrt{\frac{1}{4\pi \tilde{t}}} \exp \left[\frac{-\tilde{x}^2}{4\tilde{t}} \right] \quad (3.62)$$

est une solution exacte sur le maillage

$$\tilde{x} = \frac{x}{1 - 4\epsilon t}, \quad \tilde{t} = \frac{1}{4\epsilon(1 - 4\epsilon t)}. \quad (3.63)$$

En prenant le rapport de \tilde{x} avec \tilde{t} nous remarquons que

$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{t}} = 4\epsilon x.$$

En choisissant $\epsilon = 1/4$ et $\gamma(m) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{m\tau + t_0}\right)$, nous obtenons pour maillage

$$\tilde{x} = (hn + x_0)(\tau m + t_0), \quad \tilde{t} = \tau m + t_0, \quad (3.64)$$

où h , x_0 , τ et t_0 sont des constantes. Remarquons que le maillage (3.64) vérifie la relation

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}} \quad (3.65)$$

qui sera utile plus tard. Comme le maillage donné en (3.64) revient toujours lorsque nous cherchons les solutions exacte de nos schémas invariants, nous incluons une illustrons typique de celui-ci à la figure 3.2. Nous n'avons pas tracé les lignes verticales (couches temporelles) pour ne pas surcharger la figure.

3.3.3 Solution exponentielle

En agissant avec $g_{\epsilon_5=c}$, il est possible d'obtenir une autre solution de forme exponentielle. Soit

$$\tilde{u} = (a(\tilde{x} - 2c\tilde{t}) + b) \exp[-c\tilde{x} + c^2\tilde{t}], \quad (3.66)$$

définie sur le maillage

$$\tilde{x} = hn + x_0 + 2c\tilde{t}, \quad \tilde{t} = \gamma(m). \quad (3.67)$$

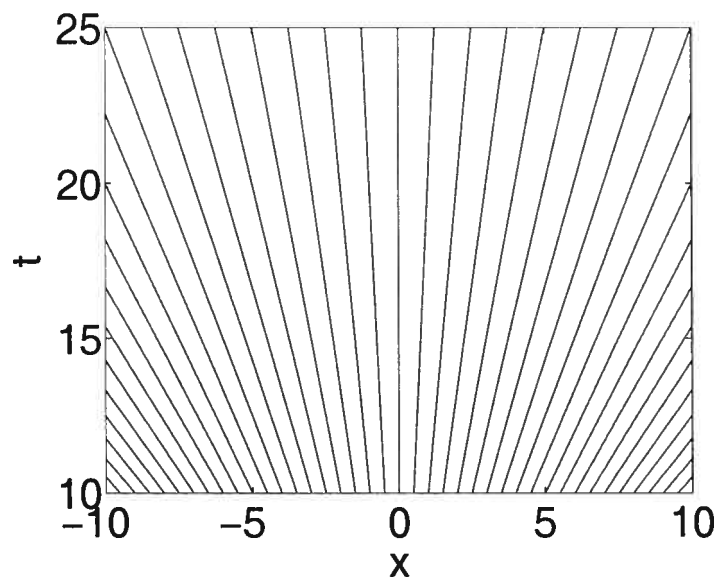


FIG. 3.2 – Maillage pour la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, $h = 0.05$, $x_0 = 0$, $\tau = 0.005$, $t_0 = 10$.

En prenant $\gamma(m) = \tau m + t_0$, nous obtenons un maillage pour lequel les points en x se déplacent linéairement en fonction du temps. Pour a non nul, cette solution est exacte seulement pour les schémas invariants (3.51) et (3.55). Dans le cas contraire, où a est nul, la solution est exacte pour tous les schémas invariants.

Chapitre 4

Équation de Burgers

L'équation de Burgers joue un rôle important en hydrodynamique. Celle-ci est l'une des équations aux dérivées partielles les plus simples combinant des interactions non linéaires et dissipatives. Du point de vue mathématique, cette équation est intéressante puisque c'est un exemple d'équation linéarisable. En effet, la transformation de Cole-Hopf permet de lier les solutions de l'équation de la chaleur à celles de l'équation de Burgers.

4.1 Équation différentielle

L'équation différentielle aux dérivées partielles de Burgers est donnée par

$$v_t + vv_x = v_{xx}. \quad (4.1)$$

Les solutions de cette équation sont reliées aux solutions de l'équation de la chaleur par la transformation de Cole-Hopf, non ponctuelle,

$$v(x, t) = -2 \frac{u_x(x, t)}{u(x, t)}. \quad (4.2)$$

En effet, sous la transformation (4.2) les dérivées premières de v par rapport à t et x ainsi que la dérivée seconde selon x valent

$$\begin{aligned}v_t &= -2\frac{u_{xt}}{u} + 2\frac{u_x u_t}{u^2}, \\v_x &= -2\frac{u_{xx}}{u} + 2\frac{u_x^2}{u^2}, \\v_{xx} &= -2\frac{u_{xxx}}{u} + 6\frac{u_x u_{xx}}{u^2} - 4\frac{u_x^3}{u^3}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$v_t + vv_x - v_{xx} = \frac{u_x}{u}[u_{xx} - u_t] - \partial_x[u_{xx} - u_t]. \quad (4.3)$$

De (4.3), on conclut que si $u(x, t)$ satisfait l'équation de la chaleur, (3.1), alors $v(x, t)$ est une solution de l'équation de Burgers.

L'algèbre de symétries de l'équation de Burgers est engendrée par [45]

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \partial_x, & \mathbf{v}_2 &= \partial_t, & \mathbf{v}_3 &= t\partial_x + \partial_v, \\ \mathbf{v}_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t - v\partial_v, & \mathbf{v}_5 &= tx\partial_x + t^2\partial_t + (x - tv)\partial_v.\end{aligned} \quad (4.4)$$

À cette algèbre de Lie correspondent les groupes à un paramètre

$$\begin{aligned}G_1 &: (x + \epsilon, t, v), & \text{translation spatiale,} \\ G_2 &: (x, t + \epsilon, v), & \text{translation temporelle,} \\ G_3 &: (x + t\epsilon, t, v + \epsilon), & \text{transformation galiléenne,} \\ G_4 &: (e^\epsilon x, e^{2\epsilon} t, e^{-\epsilon} v), & \text{dilatation,} \\ G_5 &: \left(\frac{x}{1 - \epsilon t}, \frac{t}{1 - \epsilon t}, v(1 - \epsilon t) + \epsilon x\right).\end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2 Schémas invariants

Dans ce qui suit et pour les chapitres à venir, les calculs en jeu dans la mise au point des schémas invariants sont similaires à ceux réalisés pour l'équation de la chaleur et seront omis. Seul les résultats sont donnée. La structure des chapitres 4, 5 et 6 est la même que le chapitre précédent. En suivant le même raisonnement que celui du chapitre 3, le lecteur intéressé peut, en principe, facilement redériver les résultats qui seront exposés.

Tout comme pour l'équation de la chaleur,

$$T_+ = 0, \quad (4.6)$$

est une variété invariante de l'algèbre de symétries (4.4). Nous décidons donc de calculer les invariants discrets de l'équation de Burgers sur le même type de schéma que l'équation de la chaleur, figure 3.1. Nous pouvons travailler avec le même schéma puisque l'équation de Burger fait encore intervenir au plus une dérivée premier en t ordre et une dérivée deuxième en x .

Une base des invariants discrets dans l'espace $\{x, x_-, x_+, \hat{x}, \hat{x}_-, \hat{x}_+, t, \hat{t}, v, v_-, v_+, \hat{v}, \hat{v}_-, \hat{v}_+\}$ est

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{h_+}{h_-}, & I_2 &= \frac{\hat{h}_+}{\hat{h}_-}, & I_3 &= \frac{h_+ \hat{h}_+}{\tau}, \\ I_4 &= h_+ h_- (v_x^+ - v_x^-), & I_5 &= \hat{h}_+ \hat{h}_- (\hat{v}_x^+ - \hat{v}_x^-), \\ I_6 &= h_+ \left(\frac{\sigma}{\tau} - v \right), & I_7 &= \hat{h}_+ \left(\frac{\sigma}{\tau} - \hat{v} \right), \\ I_8 &= h_+^2 \left(v_x^+ + \frac{1}{\tau} \right), & I_9 &= \hat{h}_+^2 \left(\hat{v}_x^+ - \frac{1}{\tau} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tout comme pour l'équation de la chaleur, nous sommes en mesure de générer des schémas invariants admettant des pas uniformes en x à chaque itération temporelle et d'autres pour lesquelles les pas en x dépendent de la solution.

4.2.1 Maillage uniforme en x

Dans la mise au point de schémas invariants avec un maillage uniforme en x l'invariant I_3 joue un rôle important. Le pas τ au dénominateur s'avère essentiel pour obtenir une expression discrète approximant la dérivée temporelle de l'équation de Burgers. Cependant, l'utilisation de l'invariant I_3 nous oblige à considérer des schémas à cinq points comme ce fût lors de la mise en oeuvre des schémas invariants préservant le principe de superposition, section 3.2.3. Ceci résulte du fait que I_3 fait intervenir à la fois h_+ et \hat{h}_+ .

Schéma explicite

Un schéma invariant explicite pour l'évolution de la solution v s'obtient en posant

$$T_+ = 0, \quad I_1 = 1, \quad (2I_6 - I_7)I_3 - I_8I_6 = I_4, \quad (4.8)$$

ce qui en terme des variables discrètes, donne

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ h_+ &= h_- \equiv h, \\ \left\{ 2 \left(\frac{\sigma}{\tau} - v \right) + \frac{\hat{h}}{h} \left(\hat{v} - \frac{\sigma}{\tau} \right) \right\} \frac{\hat{h}}{h\tau} + \left(v_x^+ + \frac{1}{\tau} \right) \left(v - \frac{\sigma}{\tau} \right) &= \frac{v_x^+ - v_x^-}{h}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Schéma implicite

Un schéma implicite s'obtient en posant

$$T_+ = 0, \quad I_2 = 1, \quad (I_6 - 2I_7)I_3 - I_9I_7 = I_5, \quad (4.10)$$

ce qui explicitement donne

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \hat{h}_+ &= \hat{h}_- \equiv \hat{h}, \\
 \left\{ \frac{h}{\hat{h}} \left(\frac{\sigma}{\tau} - v \right) - 2 \left(\frac{\sigma}{\tau} - \hat{v} \right) \right\} \frac{h}{\hat{h}\tau} - \left(\frac{\sigma}{\tau} - \hat{v} \right) \left(\hat{v}_x^+ - \frac{1}{\tau} \right) &= \frac{\hat{v}_x^+ - \hat{v}_x^-}{h}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Les schémas (4.9) et (4.11) convergent vers l'équation de Burgers (4.1), dans la limite continue, à condition que le rapport σ sur τ vérifie (3.30). Dans le cas particulier où les pas en t sont constants et que σ est nul, les schémas invariants retombent sur les discrétisations standards

$$\begin{aligned}
 t &= \tau m + t_0, & x &= hx + x_0, \\
 \frac{\hat{v} - v}{\tau} + v v_x^+ &= \frac{v_x^+ - v_x^-}{h},
 \end{aligned}$$

pour le schéma explicite et

$$\begin{aligned}
 t &= \tau m + t_0, & x &= hx + x_0, \\
 \frac{\hat{v} - v}{\tau} + \hat{v} \hat{v}_x^+ &= \frac{\hat{v}_x^+ - \hat{v}_x^-}{h},
 \end{aligned}$$

pour le schéma implicite.

4.2.2 Maillage dépendant de la solution

Dans ce qui suit, nous donnons plusieurs schémas invariants de l'équation de Burgers pour lesquels le maillage dépend de la solution.

Schéma avec un maillage explicite

Évolution explicite de v

$$T_+ = 0, \quad I_6 = 0, \quad -I_7 I_3 I_2^{-1} = 2(1 + I_1^{-1})^{-1} I_4. \quad (4.12)$$

Comme $I_6 = 0$, I_7 devient $I_7 = \hat{h}_+(v - \hat{v})$, et le système d'équations (4.12) s'écrit en fonction des variables originales

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ \sigma &= \tau v, \\ \left(\frac{\hat{v} - v}{\tau} \right) \frac{\hat{h}_+ \hat{h}_-}{h_+ h_-} &= \frac{2}{h_+ + h_-} (v_x^+ - v_x^-). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Évolution implicite de v , modèle 1

$$T_+ = 0, \quad I_6 = 0, \quad -I_7 I_3 I_2^{-1} = 2(1 + I_2^{-1})^{-1} I_5.$$

En terme des variables originales

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ \sigma &= \tau v, \\ \left(\frac{\hat{v} - v}{\tau} \right) \frac{h_+}{\hat{h}_+} &= \frac{2}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-} (\hat{v}_x^+ - \hat{v}_x^-). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Évolution implicite de v , modèle 2

$$T_+ = 0, \quad I_6 = 0, \quad -I_7 I_3 I_2^{-1} = 2(1 + I_1^{-1})^{-1} I_5.$$

En terme des variables originales

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \sigma &= \tau v, \\
 \frac{\hat{v} - v}{\tau} &= \frac{2}{h_+ + h_-} (\hat{v}_x^+ - \hat{v}_x^-).
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Schéma avec un maillage implicite

Évolution explicite de v , modèle 1

$$T_+ = 0, \quad I_7 = 0, \quad -I_6 I_3 I_1^{-1} = 2(1 + I_1^{-1})^{-1} I_4.$$

En fonction des variables discrètes du problème nous obtenons

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \sigma &= \tau \hat{v}, \\
 \left(\frac{\hat{v} - v}{\tau} \right) \frac{\hat{h}_+}{h_+} &= \frac{2}{h_+ + h_-} (v_x^+ - v_x^-).
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

Évolution explicite de v , modèle 2

$$T_+ = 0, \quad I_7 = 0, \quad -I_6 I_3 I_1^{-1} = 2(1 + I_2^{-1})^{-1} I_4.$$

Ce qui donne explicitement

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \sigma &= \tau \hat{v}, \\
 \left(\frac{\hat{v} - v}{\tau} \right) \frac{\hat{h}_+}{h_+} &= \frac{2}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-} (v_x^+ - v_x^-).
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Évolution implicite de v modèle 1

$$T_+ = 0, \quad I_7 = 0, \quad -I_6 I_3 I_1^{-1} = 2(1 + I_2^{-1})^{-1} I_5.$$

En terme des variables originales

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ \sigma &= \tau \hat{v}, \\ \left(\frac{\hat{v} - v}{\tau} \right) \frac{h_+ h_-}{\hat{h}_+ \hat{h}_-} &= \frac{2}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-} (\hat{v}_x^+ - \hat{v}_x^-). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Évolution implicite de v , modèle 2

$$T_+ = 0, \quad I_7 = 0, \quad -I_6 I_3 I_2^{-1} = 2(1 + I_1^{-1})^{-1} I_5.$$

En terme des variables originales

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ \sigma &= \tau \hat{v}, \\ \left(\frac{\hat{v} - v}{\tau} \right) \frac{h_+}{\hat{h}_+} &= \frac{2}{h_+ + h_-} (\hat{v}_x^+ - \hat{v}_x^-). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Les efforts pour trouver une transformation qui nous permettrait de passer d'un certain schéma invariant de l'équation de la chaleur à un de ceux obtenus dans ce chapitre se sont avérés vains. Une des raisons pouvant expliquer cet échec provient du fait que l'algèbre de symétries de l'équation de Burgers (4.4) n'est pas isomorphe à la composante finie de l'algèbre de symétries de l'équation de la chaleur (3.2). Cependant, mentionnons que la situation est fort différente si on travaille avec des transformations agissant simultanément sur plus d'un point. En effet, dans l'article [33], Heredero, Levi et Winternitz montrent qu'il est possible de définir une

transformation de Cole-Hopf discrète, non ponctuelle liant le schéma standard de l'équation de la chaleur, (3.56), à un certain schéma discret approximant l'équation de Burgers. Cette transformation définit de plus un isomorphisme entre les algèbres de symétries discrètes mais, dans la limite continue, cet isomorphisme disparaît et les algèbres retombent sur (3.2) et (4.4). Cet article nous amène à penser qu'il nous est impossible de trouver une transformation de Cole-Hopf discrète liant nos schémas puisque celle-ci doit être non ponctuelle et que nous considérons seulement des transformations agissant ponctuellement.

4.3 Solutions exactes

L'ensemble des solutions exactes obtenues est loin d'être exhaustif. Outre la solution triviale constante nous avons été en mesure de trouver une seule autre solution exacte. Celle-ci est obtenue en appliquant le groupe de symétries sur la solution constante.

4.3.1 Solution constante

Il est facile de se convaincre que la solution constante

$$v = v_0 \tag{4.20}$$

est une solution exacte sur le maillage

$$t = \gamma(m), \quad x = hn + x_0, \tag{4.21}$$

pour les schémas à pas uniforme en x , (4.9) et (4.11). Dans l'équation (4.21), h , x_0 sont des constantes. En particulier, si $\gamma(m) = \tau m + t_0$, τ et t_0 des constantes, alors le maillage est orthogonal. Pour les schémas invariants dont le maillage dépend de

la solution, la solution constante est exacte sur le maillage

$$t = \gamma(m) \quad x = (\gamma(m+1) - \gamma(m))v_0m + hn + x_0, \quad (4.22)$$

Mentionnons que le maillage (4.22) est aussi valide pour les schémas invariants à pas uniformes en x . Ceci est une conséquence de la plus grande liberté existant dans la définition de leur maillage.

4.3.2 Solution invariante sous transformation de Galilée

Dans le cas continu, la solution invariante sous le groupe de transformations à un paramètre engendré par $\mathbf{v} = t\partial_x + \partial_v$ est [45]

$$v = \frac{x}{t}. \quad (4.23)$$

Cette solution peut s'obtenir de la solution constante en agissant successivement avec $g_{\epsilon_5=\epsilon}$, $g_{\epsilon_1=v_0/\epsilon}$ et $g_{\epsilon_2=1/\epsilon}$. En exécutant ces transformations sur la solution constante v_0 , définie sur le maillage (x, t) , nous obtenons la nouvelle solution

$$\tilde{v} = \tilde{x}/\tilde{t} \quad (4.24)$$

définie sur

$$\tilde{x} = \frac{\epsilon x + (1 - \epsilon t)v_0}{\epsilon(1 - \epsilon t)}, \quad \tilde{t} = \frac{1}{\epsilon(1 - \epsilon t)} \quad (4.25)$$

En prenant $v_0 = 0$ et $\epsilon = 1$ nous constatons que

$$\frac{\tilde{x}}{\tilde{t}} = x.$$

Quand $v_0 = 0$ les maillages (4.21) et (4.22) sont identiques. Cette dernière égalité à déjà été dérivée lorsque nous avons trouvé le maillage pour lequel la solution fonda-

mentale de l'équation de la chaleur est une solution exacte des schémas invariants générés au chapitre 3. Par conséquent, nous concluons que (4.23) est une solution exacte des schémas invariants définis précédemment sur le maillage

$$t = \tau m + t_0, \quad x = (hn + x_0)(\tau m + t_0). \quad (4.26)$$

Chapitre 5

Équation de Burgers pour le potentiel

Dans ce chapitre, nous discrétisons l'équation de Burgers dans sa forme potentielle.

5.1 Équation différentielle

Soit v , une solution de l'équation de Burgers (4.1), on définit la fonction potentielle w de telle sorte que

$$v = w_x. \quad (5.1)$$

Il s'en suit que

$$w = \int v \, dx + C_1.$$

D'où,

$$w_t = \int v_t \, dx = \int (-vv_x + v_{xx}) \, dx = -\frac{v^2}{2} + v_x + C_2. \quad (5.2)$$

On suppose que la fonction w est définie de telle sorte que $C_2 = 0$. De plus par (5.1),

$$w_{xx} = v_x. \quad (5.3)$$

Par conséquent, l'équation de Burgers (4.1) devient, en terme de la fonction potentielle w ,

$$w_t + \frac{(w_x)^2}{2} = w_{xx}. \quad (5.4)$$

L'équation (5.4) est liée à l'équation de la chaleur (3.1) par la transformation ponctuelle

$$w = -2 \ln(u), \quad u > 0. \quad (5.5)$$

En utilisant (5.5), on obtient facilement l'algèbre de symétries de (5.4) à partir de celle de symétries de l'équation de la chaleur, (3.2) et (3.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \partial_x, & \mathbf{v}_2 &= \partial_t, & \mathbf{v}_3 &= t\partial_x + x\partial_w, \\ \mathbf{v}_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t, & \mathbf{v}_5 &= tx\partial_x + t^2\partial_t + \left(\frac{x^2}{2} + t\right)\partial_w, & \mathbf{v}_6 &= \partial_w, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(x, t) \exp\left[\frac{w}{2}\right] \partial_w, \quad (5.7)$$

où α est une solution de l'équation de la chaleur, $\alpha_t = \alpha_{xx}$.

Les groupes à un paramètre associés sont

$G_1 : (x + \epsilon, t, w),$	translation spatiale,
$G_2 : (x, t + \epsilon, w),$	translation temporelle,
$G_3 : (x + t\epsilon, t, w + x\epsilon + \frac{t}{2}\epsilon^2),$	transformation galiléenne,
$G_4 : (e^\epsilon x, e^{2\epsilon} t, w),$	dilatation, (5.8)

$$\begin{aligned}
G_5 &: \left(\frac{x}{1-\epsilon t}, \frac{t}{1-\epsilon t}, \frac{x^2}{6t(1-\epsilon t)^3} - \ln(1-\epsilon t) \right), \\
G_6 &: (x, t, w + \epsilon), && \text{translation de } w, \\
G_\alpha &: \left(x, t, \ln \left((e^{w/2} - \frac{\alpha}{2}\epsilon)^{-2} \right) \right), && \text{où } \alpha_t = \alpha_{xx}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

5.2 Schémas invariants

Tout comme pour l'équation de la chaleur, nous laissons tomber la composante infinie (5.7), lors du calcul des invariants discrets.

Une fois de plus, l'équation $T_+ = 0$ définit une variété invariante de l'algèbre (5.6). Ainsi, une base des invariants de (5.6) dans l'espace $\{x, x_-, x_+, \hat{x}, \hat{x}_-, \hat{x}_+, t, \hat{t}, w, w_-, w_+, \hat{w}, \hat{w}_-, \hat{w}_+\}$ est

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{h_+}{h_-} & I_2 &= \frac{\hat{h}_+}{\hat{h}_-} & I_3 &= \frac{h_+ \hat{h}_+}{\tau}, & I_4 &= \frac{h_+^2}{\tau} \exp \left[\hat{w} - w - \frac{\sigma^2}{2\tau} \right], \\
I_5 &= h_+^2 \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{w_x^+ - w_x^-}{h_+ + h_-} \right), & I_6 &= \hat{h}_+^2 \left(\frac{1}{2\tau} - \frac{\hat{w}_x^+ - \hat{w}_x^-}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-} \right), \\
I_7 &= h_+ \left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{h_- w_x^+ + h_+ w_x^-}{h_+ + h_-} \right), & I_8 &= \hat{h}_+ \left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{\hat{h}_- \hat{w}_x^+ + \hat{h}_+ \hat{w}_x^-}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-} \right).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

À partir de celle-ci, nous générons les schémas invariants suivants.

5.2.1 Maillage uniforme en x

Schéma explicite

$$T_+ = 0, \quad I_1 = 1, \quad 2I_5 = I_4 + \frac{I_7^2}{2}. \tag{5.11}$$

En terme des variables originales, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 h_+ &= h_- \equiv h, \\
 \frac{1}{\tau} \exp \left[\hat{w} - w - \frac{\sigma^2}{2\tau} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma}{\tau} + \frac{w_- - w_+}{2h} \right\}^2 &= \frac{1}{\tau} + \frac{w_+ - 2w + w_-}{h^2}.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Schéma implicite

$$T_+ = 0, \quad I_2 = 1, \quad 2I_6 = I_4^{-1} I_3^2 - \frac{I_8^2}{2}. \tag{5.13}$$

En terme des variables originales nous avons

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \hat{h}_+ &= \hat{h}_- \equiv \hat{h}, \\
 \frac{1}{\tau} \exp \left[w - \hat{w} + \frac{\sigma^2}{2\tau} \right] - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma}{\tau} + \frac{\hat{w}_- - \hat{w}_+}{2\hat{h}} \right\}^2 &= \frac{1}{\tau} - \frac{\hat{w}_+ - 2\hat{w} + \hat{w}_-}{\hat{h}^2}.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Schéma de type Crank-Nicolson

$$T_+ = 0, \quad I_1 = 0, \quad I_5 + I_6 = \frac{1}{2}(I_4 + I_4^{-1} I_3^2) + \frac{1}{4}(I_7^2 - I_8^2). \tag{5.15}$$

Explicitement,

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 h_+ &= h_- \equiv h, \\
 \frac{1}{\tau} \left\{ \exp \left[\hat{w} - w - \frac{\sigma^2}{2\tau} \right] + \frac{\hat{h}^2}{h^2} \exp \left[w - \hat{w} + \frac{\sigma^2}{2\tau} \right] \right\} &
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
+\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma}{\tau} + \frac{w_- - w_+}{2h} \right\}^2 - \frac{\hat{h}^2}{2h^2} \left\{ \frac{\sigma}{\tau} + \frac{\hat{w}_- - \hat{w}_+}{2\hat{h}} \right\}^2 &= \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{\hat{h}^2}{h^2} \right) \\
+\frac{w_+ - 2w + w_-}{h^2} - \frac{\hat{h}^2}{h^2} \frac{\hat{w}_+ - 2\hat{w} + \hat{w}_-}{\hat{h}^2}. &
\end{aligned}$$

Les trois schémas précédents convergent, dans la limite continue, vers l'équation (5.4) à condition que (3.30) soit vérifiée.

Les schémas que nous venons juste de dérivés sont assez différents des schémas que l'on obtiendrait lors d'une discrétisation standard. Par exemple, pour un schéma explicite, la discrétisation standard sur un maillage rectangulaire donne

$$\begin{aligned}
t = \tau m + t_0, \quad x = hn + x_0, \\
\frac{\hat{u} - u}{\tau} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{w_+ - w_-}{2h} \right\}^2 = \frac{w_+ - 2w + w_-}{h^2}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

De l'autre côté, le schéma explicite invariant (5.12) devient sur le même schéma

$$\begin{aligned}
t = \tau m + t_0, \quad x = hn + x_0, \\
\frac{1}{\tau} \exp[\hat{w} - w] + \frac{1}{2} \left\{ \frac{w_- - w_+}{2h} \right\}^2 = \frac{1}{\tau} + \frac{w_+ - 2w + w_-}{h^2}.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Celui-ci diffère de la discrétisation standard principalement par la présence du terme exponentiel. On remarque toutefois que si on développe l'exponentiel en série de Maclaurin et que l'on garde seulement les deux premiers termes du développement

$$\frac{1}{\tau} \exp[\hat{w} - w] \approx \frac{1}{\tau} + \frac{\hat{w} - w}{\tau}$$

alors le schéma invariant (5.18) redonne le schéma standard (5.17).

5.2.2 Maillage dépendant de la solution

Dans cette section, nous définissons quelques schémas invariants de l'équation (5.4) définis sur des maillages dépendants de la solution.

Schéma explicite

$$T_+ = 0, \quad I_7 = 0, \quad I_4 = 2I_5. \quad (5.19)$$

En terme des variables originales

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ \sigma &= \tau \frac{h_- w_x^+ + h_+ w_x^-}{h_+ + h_-}, \\ \frac{1}{\tau} \exp \left[\hat{w} - w - \frac{\sigma^2}{2\tau} \right] &= \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h_+ + h_-} (w_x^+ - w_x^-). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Schéma implicite

$$T_+ = 0, \quad I_8 = 0, \quad I_4^{-1} I_3^2 = 2I_6. \quad (5.21)$$

En terme des variables originales

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ \sigma &= \tau \frac{\hat{h}_- \hat{w}_x^+ + \hat{h}_+ \hat{w}_x^-}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-}, \\ \frac{1}{\tau} \exp \left[w - \hat{w} + \frac{\sigma^2}{2\tau} \right] &= \frac{1}{\tau} - \frac{2}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-} (\hat{w}_x^+ - \hat{w}_x^-). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Schémas mixtes

Maillage explicite et évolution de w implicite

$$T_+ = 0, \quad I_7 = 0, \quad I_4^{-1}I_3^2 = 2I_6. \quad (5.23)$$

En terme des variables discrètes

$$\begin{aligned} T_+ &= 0 \\ \sigma &= \tau \frac{h_- w_x^+ + h_+ w_x^-}{h_+ + h_-} \\ \frac{1}{\tau} \exp \left[w - \hat{w} + \frac{\sigma^2}{2\tau} \right] &= \frac{1}{\tau} - \frac{2}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-} (\hat{w}_x^+ - \hat{w}_x^-) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Maillage implicite et évolution de v explicite

$$T_+ = 0 \quad I_8 = 0, \quad I_4 = 2I_5. \quad (5.25)$$

En terme des variables discrètes

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ \sigma &= \tau \frac{\hat{h}_- \hat{w}_x^+ + \hat{h}_+ \hat{w}_x^-}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-}, \\ \frac{1}{\tau} \exp \left[\hat{w} - w - \frac{\sigma^2}{2\tau} \right] &= \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h_+ + h_-} (w_x^+ - w_x^-). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Schéma de type Crank-Nicolson

$$T_+ = 0, \quad I_7 + I_8 = 0, \quad I_4^{-1}I_3^2 + I_4 = 2(I_5 + I_6). \quad (5.27)$$

Explicitement,

$$\begin{aligned}
T_+ &= 0, \\
\sigma &= \frac{\tau}{h_+ + \hat{h}_+} \frac{h_- w_x^+ + h_+ w_x^-}{h_+ + h_-} + \tau \frac{\hat{h}_- \hat{w}_x^+ + \hat{h}_+ \hat{w}_x^-}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-}, \\
\frac{\hat{h}_+^2}{h_+^2 \tau} \exp \left[\frac{\sigma^2}{2\tau} - (\hat{w} - w) \right] + \frac{1}{\tau} \exp \left[\hat{w} - w - \frac{\sigma^2}{2\tau} \right] &= \\
\frac{1}{\tau} + \frac{2}{h_+ + h_-} (w_x^+ - w_x^-) - \frac{\hat{h}_+^2}{h_+^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{2}{\hat{h}_+ + \hat{h}_-} (\hat{w}_x^+ - \hat{w}_x^-) \right). &
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Il est important de constater que les schémas obtenus précédemment sont tous reliés aux schémas invariants logarithmiques de l'équation de la chaleur par la transformation ponctuelle (5.5).

5.2.3 Schémas exponentiels en u

Il est possible de mettre au point d'autres schémas invariants de l'équation de Burgers pour le potentiel, en utilisant les schémas invariants linéaires de l'équation de la chaleur, section 3.2.3. Pour ce faire, nous débutons par transformer la base d'invariants (3.49) en utilisant la transformation $u = \exp[-w/2]$,

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_1 &= \frac{h_+}{h_-}, & \tilde{J}_2 &= \frac{\hat{h}_+}{\hat{h}_-}, & \tilde{J}_3 &= \frac{h_+ \hat{h}_+}{\tau}, & \tilde{J}_4 &= \frac{\sqrt{\tau}}{h_+} \exp \left[-\frac{\hat{w} - w}{2} + \frac{\sigma^2}{4\tau} \right] \\
\tilde{J}_5 &= \exp \left[-\frac{w_+ - w}{2} + \frac{h_+}{4\tau} (2\sigma - h_+) \right], & \tilde{J}_6 &= \exp \left[\frac{w - w_-}{2} - \frac{h_-}{4\tau} (2\sigma + h_-) \right], \\
\tilde{J}_7 &= \exp \left[-\frac{\hat{w}_+ - \hat{w}}{2} + \frac{\hat{h}_+}{4\tau} (2\sigma + \hat{h}_+) \right], & \tilde{J}_8 &= \exp \left[\frac{\hat{w} - \hat{w}_-}{2} - \frac{\hat{h}_-}{4\tau} (2\sigma - \hat{h}_-) \right].
\end{aligned} \tag{5.29}$$

En utilisant les mêmes expressions invariantes (3.50) et (3.54) et en ajoutant un tilde sur les J_i , nous obtenons de nouveaux schémas invariants de l'équation (5.4).

Schéma explicite

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 h_+ &= h_- \equiv h, \tag{5.30} \\
 \frac{1}{\tau} \left(\sqrt{\frac{\hat{h}}{h}} \exp \left[-\frac{\hat{w}}{2} + \frac{\sigma^2}{4\tau} \right] - \exp \left[-\frac{w}{2} \right] \right) &= \frac{1}{\hat{h}h} \left(\exp \left[-\frac{w_+}{2} + \frac{h}{4\tau} (2\sigma - h + \hat{h}) \right] \right. \\
 &\quad \left. - 2 \exp \left[-\frac{w}{2} \right] + \exp \left[\frac{w_-}{2} - \frac{h}{4\tau} (2\sigma + h - \hat{h}) \right] \right).
 \end{aligned}$$

Schéma implicite

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \hat{h}_+ &= \hat{h}_- \equiv \hat{h}, \tag{5.31} \\
 \frac{1}{\tau} \left(\exp \left[-\frac{\hat{w}}{2} \right] - \sqrt{\frac{h}{\hat{h}}} \exp \left[-\frac{w}{2} - \frac{\sigma^2}{4\tau} \right] \right) &= \frac{1}{\hat{h}h} \left(\exp \left[-\frac{w_+}{2} + \frac{\hat{h}}{4\tau} (2\sigma - h + \hat{h}) \right] \right. \\
 &\quad \left. - 2 \exp \left[-\frac{\hat{w}}{2} \right] + \exp \left[-\frac{\hat{w}_-}{2} - \frac{h}{4\tau} (2\sigma + h - \hat{h}) \right] \right).
 \end{aligned}$$

Les schémas invariants (5.30) et (5.31) convergent vers l'équation différentielle (5.4), à condition que le maillage vérifie (3.30). Contrairement aux schémas invariants linéaires de l'équation de la chaleur, (3.51) et (3.55), qui donnent les discrétisations standards lorsque $\sigma = 0$; les schémas invariants (5.30) et (5.31) donnent des schémas non habituelles sur un maillage rectangulaire. Par exemple, lorsque $\sigma = 0$ le schéma explicite (5.30) devient sur un maillage rectangulaire

$$\begin{aligned}
 t &= \tau m + t_0, & x &= hn + x_0, \\
 \frac{\exp \left[-\frac{\hat{w}}{2} \right] - \exp \left[-\frac{w}{2} \right]}{\tau} &= \frac{\exp \left[-\frac{w_+}{2} \right] - 2 \exp \left[-\frac{w}{2} \right] + \exp \left[-\frac{w_-}{2} \right]}{h^2}, \tag{5.32}
 \end{aligned}$$

ce qui est très différent du schéma standard (5.17).

5.3 Solutions exactes

Les solutions exactes des schémas invariants précédents sont obtenues en utilisant la correspondance (5.5) existante entre les schémas invariants de l'équation de la chaleur et ceux de l'équation de Burgers pour le potentiel. Comme la transformation fait intervenir que les variables dépendantes, celle-ci n'a aucun effet sur le maillage. Ainsi,

$$\begin{aligned} w &= -2 \ln(ax + b), \\ t &= \gamma(m), \quad x = hn + x_0, \end{aligned} \tag{5.33}$$

où a , b , h et x_0 sont des constantes, est une solution exacte des schémas invariants (5.30) et (5.31). Quand $a = 0$, la solution est exacte pour tous les autres schémas.

À partir de cette solution, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= -2 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4\epsilon_6 \tilde{t}}} \left(a e^{-\epsilon_5 \frac{\tilde{x} - 2\epsilon_6 \tilde{t}}{1 + 4\epsilon_6 \tilde{t}}} + b \right) \exp \left[\epsilon_3 - \frac{\epsilon_5 \tilde{x} - \epsilon_5^2 \tilde{t} + \epsilon_6 \tilde{x}^2}{1 + 4\epsilon_6 \tilde{t}} \right] \right), \\ \tilde{x} &= \frac{e^{\epsilon_4} (x + \epsilon_1) + 2\epsilon_5 e^{2\epsilon_4} t}{1 - 4\epsilon_6 e^{2\epsilon_4} (t + \epsilon_2)}, \\ \tilde{t} &= \frac{e^{2\epsilon_4} (t + \epsilon_2)}{1 - 4\epsilon_6 e^{-2\epsilon_4} (t + \epsilon_2)}, \end{aligned} \tag{5.34}$$

est aussi une solution de (5.30) et (5.31), quand $a \neq 0$, et une solution exacte pour tous les autres schémas, lorsque $a = 0$.

À partir de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur, section 3.3.2, nous obtenons que la solution

$$\begin{aligned} w &= -2 \ln \left(\sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \exp \left[\frac{-x^2}{4t} \right] \right) \\ &= \frac{x^2}{2t} + \ln(4\pi t) \end{aligned} \tag{5.35}$$

définie sur le maillage

$$x = (hn + x_0)(\tau m + t_0), \quad t = \tau m + t_0, \quad (5.36)$$

est une solution exacte de tous les schémas invariants obtenus précédemment..
 À partir de la solution exacte $u = b \exp[-cx + c^2t]$, définie sur le maillage $x = hn + x_0 + 2c(\tau m + t_0)$, $t = \tau m + t_0$, section 3.3.3, nous en concluons que

$$\begin{aligned} w &= -2 \ln(b \exp[-cx + c^2t]) \\ &= 2cx - 2c^2t + w_0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

définie sur le même maillage, c'est-à-dire

$$x = hn + x_0 + 2c(\tau m + t_0), \quad t = \tau m + t_0. \quad (5.38)$$

est aussi une solution exacte de tous les schémas invariants obtenus dans cette section.

Chapitre 6

Équation de Korteweg-de Vries

6.1 Équation différentielle

Dans ce chapitre, nous discrétisons l'équation d'onde non linéaire

$$u_t = uu_x + u_{xxx}. \quad (6.1)$$

Cette équation a été dérivée pour la première fois par Korteweg et de Vries dans leurs études des vagues se propageant dans un canal peu profond. Depuis ce temps, cette équation aux dérivées partielles a trouvé des applications en physique des plasmas, dans l'étude des réseaux anharmoniques et dans bien d'autres domaines. L'algèbre de symétries de l'équation (6.1) est engendrée par

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \partial_x, & \mathbf{v}_2 &= \partial_t, & \mathbf{v}_3 &= t\partial_x - \partial_u, \\ \mathbf{v}_4 &= x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u, \end{aligned} \quad (6.2)$$

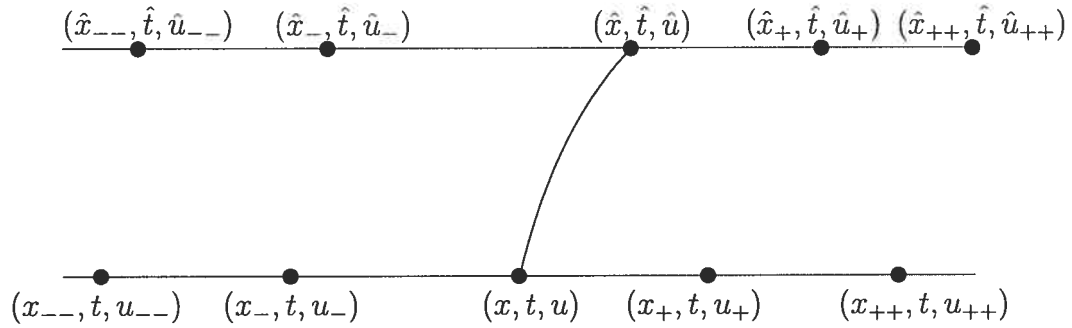


FIG. 6.1 – Schéma pour l'équation de Korteweg-de Vries

à laquelle correspond les groupes à un paramètre

$$\begin{aligned}
 G_1 : (x + \epsilon, t, u), & \quad \text{translation spatiale,} \\
 G_2 : (x, t + \epsilon, u), & \quad \text{translation temporelle,} \\
 G_3 : (x + \epsilon t, t, u - \epsilon), & \quad \text{transformation galiléenne,} \\
 G_4 : (e^\epsilon x, e^{3\epsilon} t, e^{-2\epsilon} u), & \quad \text{dilatations,}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

respectivement.

6.2 Schémas invariants

Une base des invariants discrets sur la variété invariante $T_+ = 0$, dans l'espace $\{x, x_+, x_{++}, x_-, x_{--}, \hat{x}, \hat{x}_+, \hat{x}_{++}, \hat{x}_-, \hat{x}_{--}, t, \hat{t}, u, u_+, u_{++}, u_-, u_{--}, \hat{u}, \hat{u}_+, \hat{u}_{++}, \hat{u}_-, \hat{u}_{--}\}$, figure 6.1, est

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{h_+}{h_-}, & I_2 &= \frac{h_{++}}{h_+}, & I_3 &= \frac{h_-}{h_{--}}, & I_4 &= \frac{\hat{h}_+}{\hat{h}_-}, \\
 I_5 &= \frac{\hat{h}_{++}}{\hat{h}_+}, & I_6 &= \frac{\hat{h}_-}{\hat{h}_{--}}, & I_7 &= \frac{h_+}{\hat{h}_+}, & I_8 &= \frac{h_+^3}{\tau},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_9 &= \frac{\sigma + \tau u}{h_+}, & I_{10} &= \tau u_x^{--}, & I_{11} &= \tau u_x^-, & I_{12} &= \tau u_x^+, \\
I_{13} &= \tau u_x^{++}, & I_{14} &= h_+^2(\hat{u} - u), & I_{15} &= \tau \hat{u}_x^{--}, & I_{16} &= \tau \hat{u}_x^-, \\
I_{17} &= \tau \hat{u}_x^+, & I_{18} &= \tau \hat{u}_x^{++}. & & & &
\end{aligned} \tag{6.4}$$

À partir de celle-ci, nous générons les schémas invariants suivants. Comme le lecteur est en mesure de le constater, nous travaillons sur un schéma qui relie plus de points que dans les trois derniers chapitres. En effet, pour approximer adéquatement la dérivée troisième en x présente dans l'équation (6.1), les trois points sur une même couche temporelle sont insuffisants, figure 3.1. Le nombre minimal de points, sur une couche spatiale, nécessaire pour approximer une dérivée troisième est quatre. Cependant, nous avons décidé de rajouter un point supplémentaire sur chaque couche temporelle pour obtenir des schémas invariants plus symétriques.

6.2.1 Maillage uniforme en x

Schéma explicite

Nous obtenons un schéma explicite avec un pas uniforme en x en posant

$$\begin{aligned}
T_+ &= 0, & I_1 &= 1, \\
I_{14} &= I_9 I_8 \frac{I_{12} - I_{11}}{2} + \frac{1}{2}([I_{13} - I_{12}] - [I_{11} - I_{10}]).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Cela donne, en terme des variables originales,

$$\begin{aligned}
T_+ &= 0, \\
h_+ &= h_- \equiv h, \\
\frac{\hat{u} - u}{\tau} &= u \frac{u_+ - u_-}{2h} + \frac{u_{++} - 2u_+ + 2u_- - u_{--}}{2h^3} + \frac{\sigma}{\tau} \frac{u_+ - u_-}{2h}.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Schéma implicite

D'autre part, nous obtenons un schéma implicite en posant

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, & I_4 &= 1, \\ I_{14} &= (I_9 + I_8^{-1}I_{14})I_8 \frac{I_{17} - I_{16}}{2} + \frac{1}{2}([I_{18} - I_{17}] - [I_{16} - I_{15}])I_7^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

En fonction des variables originales, nous trouvons

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ \hat{h}_+ &= \hat{h}_- \equiv \hat{h}, \\ \frac{\hat{u} - u}{\tau} &= \hat{u} \frac{\hat{u}_+ - \hat{u}_-}{2\hat{h}} + \frac{\hat{u}_{++} - 2\hat{u}_+ + 2\hat{u}_- - \hat{u}_{--}}{2\hat{h}^3} + \frac{\sigma}{\tau} \frac{\hat{u}_+ - \hat{u}_-}{2\hat{h}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Schéma de type Crank-Nicolson

Une fois de plus, en additionnant le schéma explicite (6.6) et le schéma implicite (6.8) nous sommes en mesure de générer un schéma de Crank-Nicolson invariant avec un pas uniforme en x

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ h_+ &= h_- \equiv h, \\ \frac{\hat{u} - u}{\tau} &= u \frac{u_+ - u_-}{4h} + \frac{u_{++} - 2u_+ + 2u_- - u_{--}}{4h^3} + \hat{u} \frac{\hat{u}_+ - \hat{u}_-}{2\hat{h}} \\ &\quad + \frac{\hat{u}_{++} - 2\hat{u}_+ + 2\hat{u}_- - \hat{u}_{--}}{2\hat{h}^3} + \frac{\sigma}{\tau} \left(\frac{u_+ - u_-}{4h} + \frac{\hat{u}_+ - \hat{u}_-}{4\hat{h}} \right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Les schémas invariants (6.6), (6.8) et (6.9) convergent vers l'équation de Korteweg-de Vries si le rapport σ sur τ vérifie (3.30). Les schémas invariants ressemblent fortement aux schémas que l'on obtiendrait par une discrétisation standard. La seule différence se trouve dans l'ajout du terme σ/τ fois une approximation discrète de la dérivée première en x . Ce terme additionnel modifie l'évolution de la solution

de manière à tenir compte de l'évolution du maillage. Dans le cas particulier où σ est nul, nous retrouvons les discrétisations standards de l'équation de Korteweg-de Vries.

6.2.2 Maillage dépendant de la solution

Dans ce qui suit, nous mettons au point d'autres schémas invariants pour lesquels l'évolution des pas en x dépend de la solution.

Schéma explicite

Nous générons un schéma complètement explicite en considérant la combinaison d'invariants

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, & I_9 &= 0, \\ I_{14} &= \frac{6}{I_2 + 2 + 2I_1^{-1} + (I_3 I_1)^{-1}} \left\{ \left(\frac{I_{13} - I_{12}}{I_2 + 1} \right) - \left(\frac{I_{11} - I_{10}}{I_3^{-1} + 1} \right) I_1 \right\}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ce qui donne explicitement,

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, \\ \sigma &= -\tau u, \\ \frac{\hat{u} - u}{\tau} &= \frac{6}{h_{++} + 2h_+ + 2h_- + h_{--}} \left\{ \frac{u_x^{++} - u_x^+}{h_{++} + h_+} - \frac{u_x^- - u_x^{--}}{h_{--} + h_-} \right\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Schéma implicite

De même nous obtenons un schéma invariant complètement explicite en posant

$$\begin{aligned} T_+ &= 0, & I_8^{-1} I_{14} + I_9 &= 0, \\ I_7^{-2} I_{14} &= \frac{6}{I_5 + 2 + 2I_4^{-1} + (I_6 I_4)^{-1}} \left\{ \left(\frac{I_{18} - I_{17}}{I_5 + 1} \right) - \left(\frac{I_{16} - I_{15}}{I_6^{-1} + 1} \right) I_4 \right\}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

En terme des variables discrètes du problème nous obtenons

$$\begin{aligned}
 T - + &= 0, \\
 \sigma &= -\tau \hat{u}, \\
 \frac{\hat{u} - u}{\tau} &= \frac{6}{\hat{h}_{++} + 2\hat{h}_+ + 2\hat{h}_- + \hat{h}_{--}} \left\{ \frac{\hat{u}_x^{++} - \hat{u}_x^+}{\hat{h}_{++} + \hat{h}_+} - \frac{\hat{u}_x^- - \hat{u}_x^{--}}{\hat{h}_{--} + \hat{h}_-} \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Schémas mixtes

Tout comme dans les applications précédentes, nous pouvons aussi mettre au point des schémas invariants mixtes.

Maillage explicite et évolution de u implicite

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \sigma &= -\tau u, \\
 \frac{\hat{u} - u}{\tau} &= \frac{6}{\hat{h}_{++} + 2\hat{h}_+ + 2\hat{h}_- + \hat{h}_{--}} \left\{ \frac{\hat{u}_x^{++} - \hat{u}_x^+}{\hat{h}_{++} + \hat{h}_+} - \frac{\hat{u}_x^- - \hat{u}_x^{--}}{\hat{h}_{--} + \hat{h}_-} \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Maillage implicite et évolution de u explicite

$$\begin{aligned}
 T - + &= 0, \\
 \sigma &= -\tau \hat{u}, \\
 \frac{\hat{u} - u}{\tau} &= \frac{6}{h_{++} + 2h_+ + 2h_- + h_{--}} \left\{ \frac{u_x^{++} - u_x^+}{h_{++} + h_+} - \frac{u_x^- - u_x^{--}}{h_{--} + h_-} \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Schéma de type Crank-Nicolson

En posant

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, & I_9 + I_{14}I_8^{-1} &= 0, & (6.16) \\
 I_{14} &= \frac{3}{I_2 + 2 + 2I_1^{-1} + (I_3I_1)^{-1}} \left\{ \left(\frac{I_{13} - I_{12}}{I_2 + 1} \right) - \left(\frac{I_{11} - I_{10}}{I_3^{-1} + 1} \right) I_1 \right\} \\
 &+ \frac{3I_7}{I_5 + 2 + 2I_4^{-1} + (I_6I_4)^{-1}} \left\{ \left(\frac{I_{18} - I_{17}}{I_5 + 1} \right) - \left(\frac{I_{16} - I_{15}}{I_6^{-1} + 1} \right) I_4 \right\},
 \end{aligned}$$

nous trouvons le schéma invariant

$$\begin{aligned}
 T_+ &= 0, \\
 \sigma &= -\frac{\tau}{2}(u + \hat{u}), & (6.17) \\
 \frac{\hat{u} - u}{\tau} &= \frac{3}{h_{++} + 2h_+ + 2h_- + h_{--}} \left\{ \frac{u_x^{++} - u_x^+}{h_{++} + h_+} - \frac{u_x^- - u_x^{--}}{h_{--} + h_-} \right\} \\
 &+ \frac{3}{\hat{h}_{++} + 2\hat{h}_+ + 2\hat{h}_- + \hat{h}_{--}} \left\{ \frac{\hat{u}_x^{++} - \hat{u}_x^+}{\hat{h}_{++} + \hat{h}_+} - \frac{\hat{u}_x^- - \hat{u}_x^{--}}{\hat{h}_{--} + \hat{h}_-} \right\}.
 \end{aligned}$$

6.3 Solution exacte

La recherche de solutions exactes ne s'est pas avérée très bénéfique. Outre la solution constante, seule la solution invariante sous transformation de Galilée a été trouvée.

L'application de la méthode de réduction par symétries appliquée aux schémas invariants de l'équation de Korteweg-de Vries, pour lesquels l'évolution du maillage dépend de la solution, a déjà été étudiée par Dorodnitsyn, [18, 19]. Dans ce qui suit, nous nous proposons de trouver la solution invariante, sous transformation de Galilée, pour le schéma (6.6). L'approche empruntée n'est pas conventionnelle et aurait aussi pu être appliquée aux autres schémas à maillage uniforme obtenus dans les chapitres précédents. L'idée consiste à supposer que la solution discrète est identique à celle du problème continu. En remplaçant la solution dans l'équation

d'évolution pour $u(x, t)$, la troisième équation de nos schémas, nous obtenons une équation aux différences finies liant les variables x et t . Si, en utilisant la liberté existante dans le maillage, nous sommes en mesure de solutionner cette équation exactement, alors la solution continue définie sur le maillage trouvé engendre automatiquement une solution exacte du schéma invariant.

Dans le cas continu, la solution invariante, sous le générateur infinitésimal de symétrie $t\partial_x - \partial_u$, est

$$u = -\frac{x}{t}.$$

En remplaçant cette solution dans l'équation d'évolution pour u du schéma (6.6), nous obtenons

$$x = \frac{\sigma t}{\tau}. \quad (6.18)$$

La relation (6.18) est identique à (3.65). Par conséquent, une solution pour le maillage est

$$t = \tau m + t_0, \quad x = (hn + x_0)(\tau m + t_0). \quad (6.19)$$

Donc la solution, $u = -x/t$ définie sur le maillage (6.19) est une solution exacte du schéma (6.6)

Chapitre 7

Transformation hodographe

Tel que mentionné dans l'introduction, l'objectif de ce chapitre est de montrer qu'il est possible d'appliquer la transformation hodographe sur un schéma invariant d'une équation différentielle pour obtenir un schéma invariant de l'équation différentielle obtenue par cette même transformation.

7.1 Équations différentielles

Définition 7.1. Soit $u(x) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire dépendante de la variable $x = (x^1, \dots, x^p) \in \mathbb{R}^n$, l'application

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^{p+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{p+1} \\ (x^1, \dots, x^p, u) &\mapsto (y = u, x^2, \dots, x^p, v = x^1) \end{aligned} \tag{7.1}$$

est dite une transformation hodographe pure [13].

Dans la discussion qui suit, nous laissons tomber le qualificatif pure. Sous une

telle transformation, les dérivées deviennent

$$u_{x^i} = -\frac{v_{x^i}}{v_y}, \quad i = 2, \dots, p,$$

$$u_{x^1} = \frac{1}{v_y}, \quad u_{x^1 x^1} = -\frac{v_{yy}}{v_y^3}, \quad u_{x^1 x^1 x^1} = -\frac{v_{yyy}}{v_y^4} + 3\frac{v_{yy}^2}{v_y^5}$$

et ainsi de suite.

Deux équations différentielles reliées par une transformation hodographe ont la propriété que leur groupe de symétries sont isomorphes [46]. En effet, soit g un élément du groupe de symétries de l'équation différentielle $\Delta(x, u^{(u)}) = 0$, il s'en suit que $\tilde{g} = H \circ g \circ H^{-1}$ est un élément du groupe de symétries de l'équation $\Delta(H(x, u^{(n)})) = 0$. Infinitésimalement, le champ de vecteurs

$$\mathbf{v} \Big|_{(x,u)} = \sum_{i=1}^n \xi^i(x, u) \partial_{x^i} + \phi(x, u) \partial_u,$$

est transformé par (7.1) vers

$$\tilde{\mathbf{v}} = dH(\mathbf{v}) \Big|_{H(x,u)} = \xi^1(v, x^2, \dots, x^p, y) \partial_v + \sum_{i=2}^p \xi^i(v, x^2, \dots, x^p, y) \partial_{x^i} + \phi(v, x^2, \dots, x^p, y) \partial_y. \quad (7.2)$$

L'effet de la transformation hodographe sur le champ de vecteurs revient simplement à intervertir le rôle de la variable indépendante x^1 avec la variable dépendante u .

7.2 Schémas invariants

Une transformation hodographe est facile à réaliser sur un système d'équations aux différences finies. En effet, sous la transformation (7.1), un point (x_m, u_m) , $m \in \mathbb{Z}^p$ est tout simplement envoyé vers $(v_m, x_m^2, \dots, x_m^p, y_m)$. En utilisant (7.2), il

est clair que si

$$\text{pr } \mathbf{v}[E(\{x_{m+j}, u_{m+j}\}_{j \in J})] \Big|_{E=0} = 0 \quad (7.3)$$

alors

$$\text{pr } dH(\mathbf{v})[E(H(\{x_{m+j}, u_{m+j}\}_{j \in J}))] \Big|_{E=0} = 0. \quad (7.4)$$

Les équations (7.3) et (7.4) ont pour conséquence immédiate que tout schéma obtenu par une transformation hodographe d'un schéma invariant sous un groupe de symétries G est à son tour invariant sous le groupe de symétries $H \circ G \circ H^{-1}$. Par conséquent, lorsque deux systèmes d'équations différentielles sont liées par une transformation hodographe, il suffit d'appliquer cette transformation à un schéma invariant d'un des deux système d'équations différentielles pour obtenir un schéma invariant de l'autre système d'équations différentielles. Schématiquement, nous avons la situation suivante

$$\begin{array}{ccc} \Delta(x, u^{(n)}) = 0 & \xrightarrow{H} & \tilde{\Delta}(y, x^2, \dots, x^p, v^{(n)}) = 0 \\ \text{Limite} \uparrow \text{continue} & & \text{Limite} \uparrow \text{continue} \\ \vec{E}(\{x_{m+j}, u_{m+j}\}_{j \in J}) = 0 & \xleftarrow{H^{-1}} & \vec{E}(\{H(x_{m+j}, u_{m+j})\}_{j \in J}) = 0 \end{array} \quad (7.5)$$

7.3 Applications

Dans cette section, nous appliquons le résultat discuté ci-haut à certains problèmes particuliers. Nos exemples sont choisis de telle sorte que les solutions des schémas invariants originaux sont connues. Ainsi, en appliquant la transformation hodographe aux solutions connues, nous obtenons sans effort les solutions des nouveaux schémas générés par cette même transformation.

7.3.1 Équations différentielles ordinaires

Pour discrétiser une équation différentielle ordinaire, nous avons besoin d'une seule variable discrète, $m \in \mathbb{Z}$; d'une équation spécifiant l'évolution du maillage et

d'une équation approximant l'équation différentielle.

7.3.1.1 Équation du premier ordre linéaire inhomogène

Considérons l'équation différentielle ordinaire, linéaire et inhomogène

$$u_x - A'(x)u - B'(x)e^{A(x)} = 0. \quad (7.6)$$

Une telle équation différentielle admet une algèbre de symétries bidimensionnelle engendrée par

$$\mathbf{v}_1 = e^{A(x)}\partial_u, \quad \mathbf{v}_2 = (u - B(x)e^{A(x)})\partial_u \quad (7.7)$$

et sa solution générale est

$$u(x) = (B(x) + c)e^{A(x)}, \quad (7.8)$$

où c est une constante [49].

Si on cherche une discrétisation invariante de (7.6) sur un schéma impliquant seulement deux points, $\{(x, u), (x_+, u_+)\}$, alors les seuls invariants discrets de (7.7) sont x et x_+ . Toutefois, l'algèbre de symétries admet la variété invariante

$$u_+e^{-A(x_+)} - ue^{-A(x)} - B(x_+) + B(x) = 0. \quad (7.9)$$

Ainsi, en considérant l'équation (7.9) sur le maillage

$$x_+ - x = h, \quad (7.10)$$

où h est un paramètre que l'on peut faire tendre vers zéro, on définit un schéma invariant de (7.6). En substituant la solution continue (7.8) dans l'équation aux différences finies (7.9), il est évident que cette solution est exacte.

En effectuant la transformation hodographe

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, u) \mapsto (y = u, v = x),$$

l'équation (7.6) se transforme vers l'équation différentielle ordinaire non linéaire

$$v_y(A'(v)y + B'(v)e^{A(v)}) - 1 = 0. \quad (7.11)$$

Les générateurs de symétries de (7.11) sont

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = e^{A(v)}\partial_y, \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = (y - B(v)e^{A(v)})\partial_y. \quad (7.12)$$

Le système d'équations aux différences finies

$$y_+e^{-A(v_+)} - ye^{-A(v)} - B(v_+) + B(v) = 0, \quad (7.13a)$$

$$v_+ - v = h. \quad (7.13b)$$

est invariant sous l'algèbre de Lie (7.12) et est simplement obtenu en appliquant la transformation hodographe à (7.9) et (7.10). En prenant la limite continue du système précédent, nous obtenons que (7.13a) tend vers l'équation différentielle ordinaire non linéaire (7.11) alors que (7.13b) tend vers l'identité $0 = 0$. Le schéma (7.13) est assez différent de celui que l'on obtiendrait par une discrétisation standard. En effet, dans une méthode numérique habituelle, le maillage peut être choisi de telle sorte que les pas soient variables. Cependant, ce choix n'inclut aucune information sur le problème approximé. Habituellement, toute l'information est contenue dans l'équation aux différences finies approximant l'équation différentielle. On fait varier les pas seulement dans le but de garder les erreurs de troncatures le plus bas possible. Dans le cas de la discrétisation invariante, la situation peut être différente, comme le montre le cas que nous considérons. En résolvant (7.13a) et

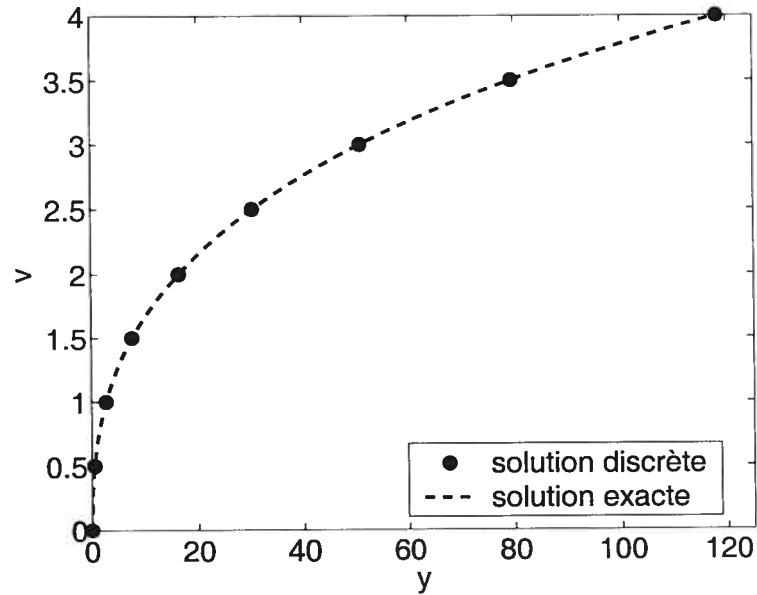


FIG. 7.1 – Solution de $v_y(1 + 4v^{3/2} \exp(\frac{1}{2}\sqrt{v})) = 2\sqrt{v}$.

(7.13b) nous trouvons

$$v = mh + v_0 \quad \text{et} \quad y = (B(v) + c)e^{A(v)}, \quad (7.14)$$

où h , v_0 et c sont des constantes. Dans l'équation (7.14), on remarque l'évolution du maillage, équation de droite, est telle que la différence entre deux points discrets v soit constante. Par conséquent, toute l'information du problème continu est incorporée dans la définition du maillage. À la figure 7.1 nous avons tracé une solution d'un problème particulier, où nous avons fixé $A(v)$ et $B(v)$, pour illustrer la situation.

7.3.1.2 Équation du deuxième ordre

Considérons, maintenant, l'exemple de l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$u_{xx} = u^{-3}. \quad (7.15)$$

L'équation (7.15) admet un algèbre de symétries tridimensionnelle engendrée par

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = 2x\partial_x + u\partial_u, \quad \mathbf{v}_3 = x^2\partial_x + xu\partial_u \quad (7.16)$$

et la solution exacte est $Au = (Ax - B)^2 + 1$, où A et B sont des constantes [25].

Les invariants discrets sur un schéma à trois points $\{(x, u), (x_{\pm}, u_{\pm})\}$ sont

$$I_1 = u(u_x^+ - u_x^-), \quad I_2 = \frac{1}{u} \left(\frac{h_+}{u_+} + \frac{h_-}{u_-} \right), \quad I_3 = \frac{1}{u^2} \left(\frac{h_+ h_-}{h_+ + h_-} \right). \quad (7.17)$$

Avec cet ensemble d'invariants, on approxime (7.15) par

$$2I_1 = I_2, \quad (7.18)$$

ce qui donne en terme des variables originales

$$2(u_x^+ - u_x^-) = \frac{1}{u^2} \left(\frac{h_+}{u_+} + \frac{h_-}{u_-} \right). \quad (7.19)$$

L'équation aux différences finies (7.19) est définie sur le maillage

$$x_+ = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad (7.20)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \epsilon B - \frac{1}{2}\epsilon^2, & \beta &= \frac{\epsilon}{A} \left(1 + B^2 - \frac{\epsilon^2}{4} \right), \\ \gamma &= -\epsilon A, & \delta &= 1 + \epsilon B - \frac{\epsilon^2}{2}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

avec A , B et ϵ des constantes et ϵ allant vers zéro quand h_+ tend vers zéro. Pour une dérivation détaillée du maillage, nous référons le lecteur à [27].

La solution exacte du système d'équations aux différences finies (7.19) et (7.20), [27], est

$$Au = (Ax - B)^2 + 1 - \frac{\epsilon^2}{4}, \quad (7.22)$$

sur le maillage

$$x = \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{4}} \tan(\omega n + \rho) + \frac{B}{A}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7.23)$$

Ainsi, l'erreur de la solution discrète, comparativement à la solution continue, est d'ordre ϵ^2 et converge vers zéro lorsque h_+ tend vers zéro.

Maintenant, si nous effectuons une transformation hodographe, l'équation (7.15) se transforme vers l'équation

$$v_{yy} = -\frac{v_y^3}{y^3}. \quad (7.24)$$

Les générateurs de symétries de (7.24) sont

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \partial_v, \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = 2v\partial_v + y\partial_y, \quad \tilde{\mathbf{v}}_3 = v^2\partial_v + vy\partial_y. \quad (7.25)$$

Les invariants discrets de cette algèbre de symétries sont

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= y \left(\frac{1}{v_y^+} - \frac{1}{v_y^-} \right), & \tilde{I}_2 &= \frac{1}{y} \left(\frac{v_+ - v}{y_+} + \frac{v - v_-}{y_-} \right), \\ \tilde{I}_3 &= \frac{1}{y^2} \left(\frac{(v_+ - v)(v - v_-)}{v_+ - v_-} \right). \end{aligned} \quad (7.26)$$

En réalisant une transformation hodographe sur les équations (7.19) et (7.20), nous obtenons directement le schéma invariant

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{v_y^+} - \frac{1}{v_y^-} \right) &= \frac{1}{y^2} \left(\frac{v_+ - v}{y_+} + \frac{v - v_-}{y_-} \right), \\ v_+ &= \frac{\alpha v + \beta}{\gamma v + \delta}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

On vérifie facilement que ce schéma invariant converge vers (7.24) dans la limite continue. La solution exacte de (7.27) est

$$v = \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{\epsilon}{4}} \tan(\omega n + \rho) + \frac{B}{A}. \quad (7.28)$$

où y est donné par

$$y = \frac{(Av - B)^2}{A} + \frac{1}{A} - \frac{\epsilon^2}{4A}. \quad (7.29)$$

7.3.2 Équation différentielle aux dérivées partielles non linéaires

Comme dernière application, nous nous proposons de considérer un exemple impliquant une équation différentielle aux dérivées partielles. Pour ce faire, nous avons choisi l'équation de la chaleur à une dimension spatiale

$$u_t = u_{xx}.$$

Comme tous les résultats concernant la discrétisation invariante de cette équation ont été exposés au chapitre 3, nous passons directement à la discrétisation invariante de l'équation différentielle obtenue par la transformation hodographe $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, t, u) \mapsto (y = u, t, v = x)$. Sous une telle transformation, l'équation de la chaleur se transforme en l'équation différentielle aux dérivées partielles non linéaires

$$v_t = \frac{v_{yy}}{v_y^2}. \quad (7.30)$$

Les générateurs de symétries de cette équation sont

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_1 &= \partial_v, & \tilde{\mathbf{v}}_2 &= \partial_t, & \tilde{\mathbf{v}}_3 &= y\partial_y, & \tilde{\mathbf{v}}_4 &= v\partial_v + 2t\partial_t \\ \tilde{\mathbf{v}}_5 &= 2t\partial_v - vy\partial_y, & \tilde{\mathbf{v}}_6 &= 4tv\partial_v + 4t^2\partial_t - (v^2 + 2t)y\partial_y \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_\alpha = \alpha(v, t)\partial_y \quad \text{où} \quad \alpha_t = \alpha_{vv}. \quad (7.32)$$

Clairement, comme la variable t n'est pas affectée par la transformation hodographe, l'expression $T_+ = 0$ demeure une variété invariante de la nouvelle algèbre de symétries. Les invariants discrets, sur la variété invariante $T_+ = 0$, sont obtenus directement de (3.27) en leur appliquant la transformation hodographe. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \frac{v_+ - v}{v - v_-}, & \tilde{I}_2 &= \frac{\hat{v}_+ - \hat{v}}{\hat{v} - \hat{v}_-}, & \tilde{I}_3 &= \frac{(v_+ - v)(\hat{v}_+ - \hat{v})}{\tau}, \\ \tilde{I}_4 &= \frac{(v_+ - v)^2}{\tau} \left(\frac{y}{\hat{y}} \right)^2 \exp \left[\frac{-(\hat{v} - v)^2}{2\tau} \right], \\ \tilde{I}_5 &= \frac{(v_+ - v)^2}{4\tau} - \frac{(v_+ - v)^2}{v_+ - v_-} \left\{ \frac{1}{v_+ - v} \ln \left(\frac{y_+}{y} \right) + \frac{1}{v - v_-} \ln \left(\frac{y_-}{y} \right) \right\}, \\ \tilde{I}_6 &= \frac{(\hat{v}_+ - \hat{v})^2}{4\tau} + \frac{(\hat{v}_+ - \hat{v})^2}{\hat{v}_+ + \hat{v}_-} \left\{ \frac{1}{\hat{v}_+ - \hat{v}} \ln \left(\frac{\hat{y}_+}{\hat{y}} \right) + \frac{1}{\hat{v} - \hat{v}_-} \ln \left(\frac{\hat{y}_-}{\hat{y}} \right) \right\}, \\ \tilde{I}_7 &= \frac{(v_+ - v)(\hat{v} - v)}{\tau} + \frac{2(v_+ - v)}{v_+ + v_-} \left\{ \frac{v - v_-}{v_+ - v} \ln \left(\frac{y_+}{y} \right) - \frac{v_+ - v}{v - v_-} \ln \left(\frac{y_-}{y} \right) \right\}, \\ \tilde{I}_8 &= \frac{(\hat{v}_+ - \hat{v})(\hat{v} - v)}{\tau} + \frac{2(\hat{v}_+ - \hat{v})}{\hat{v}_+ + \hat{v}_-} \left\{ \frac{\hat{v} - \hat{v}_-}{\hat{v}_+ - \hat{v}} \ln \left(\frac{\hat{y}_+}{\hat{y}} \right) - \frac{\hat{v}_+ - \hat{v}}{\hat{v} - \hat{v}_-} \ln \left(\frac{\hat{y}_-}{\hat{y}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Au chapitre 3, plusieurs schémas invariants ont été générés. Dans ce qui suit, nous nous limitons à appliquer la transformation hodographe sur les schémas (3.37) et (3.41). Ainsi, en posant les mêmes expressions invariantes qui ont mené à (3.37) et (3.41), i.e.

$$T_+ = 0, \quad \tilde{I}_7 = 0, \quad \tilde{I}_4 = 4\tilde{I}_5, \quad (7.34)$$

et

$$T_+ = 0, \quad \tilde{I}_8 = 0, \quad \tilde{I}_4^{-1}\tilde{I}_3^2 = 4\tilde{I}_6, \quad (7.35)$$

respectivement, nous obtenons que

$$T_+ = 0,$$

$$\frac{\hat{v} - v}{\tau} = \xi = \frac{2}{v_+ - v_-} \left\{ \frac{v_+ - v}{v - v_-} \ln \left(\frac{y_-}{y} \right) - \frac{v - v_-}{v_+ - v} \ln \left(\frac{y_+}{y} \right) \right\}, \quad (7.36)$$

$$\left(\frac{y}{\hat{y}} \right)^2 \exp \left[-\frac{\tau \xi^2}{2} \right] = 1 - \frac{4\tau}{v_+ - v_-} \left\{ \frac{1}{v_+ - v} \ln \left(\frac{y_+}{y} \right) + \frac{1}{v - v_-} \ln \left(\frac{y_-}{y} \right) \right\},$$

et

$$T_+ = 0,$$

$$\frac{\hat{v} - v}{\tau} = \hat{\xi} = \frac{2}{\hat{v}_+ \hat{v}_-} \left\{ \frac{\hat{v}_+ - \hat{v}}{v - \hat{v}_-} \ln \left(\frac{\hat{y}_-}{\hat{y}} \right) - \frac{\hat{v} - \hat{v}_-}{\hat{v}_+ - \hat{v}} \ln \left(\frac{\hat{y}_+}{\hat{y}} \right) \right\}, \quad (7.37)$$

$$\left(\frac{\hat{y}}{y} \right)^2 \exp \left[\frac{\tau \hat{\xi}^2}{2} \right] = 1 + \frac{4\tau}{\hat{v}_+ - \hat{v}_-} \left\{ \frac{1}{\hat{v}_+ - \hat{v}} \ln \left(\frac{\hat{y}_+}{\hat{y}} \right) + \frac{1}{\hat{v} - \hat{v}_-} \ln \left(\frac{\hat{y}_-}{\hat{y}} \right) \right\},$$

définissent des schémas invariants de l'équation (7.30).

Finalement, par substitution, on vérifie que

$$\begin{aligned} v &= (hn + v_0)t, & t &= \tau m + t_0, & y &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-v^2/4t}, \\ v &= hn + v_0 + 2ct, & t &= \tau m + t_0, & y &= Ke^{-cv+c^2t}, \end{aligned} \quad (7.38)$$

où K , h , v_0 , t_0 , τ et c sont des constantes, sont des solutions non triviales des schémas (7.36) et (7.37).

De ce dernier exemple, nous remarquons que, même si une transformation homographe linéarise une équation différentielle, cela n'implique pas que cette même transformation va avoir le même effet sur les schémas invariants discrets.

Chapitre 8

Applications numériques

La non linéarité de certains schémas invariants et la dépendance des maillages sur la solution rendent l'étude formelle des propriétés numériques des schémas invariants difficile. Pour l'instant, nous nous contentons d'appliquer les schémas numériques invariants à certains problèmes pour en tirer quelques caractéristiques et en comparer l'efficacité à celle d'une méthode standard. Il est évident qu'une analyse rigoureuse des propriétés numériques des schémas invariants devra être entreprise pour obtenir une meilleure compréhension. Nous concentrons nos simulations sur deux équations étudiées précédemment, soit l'équation de la chaleur et l'équation de Korteweg-de Vries.

8.1 Équation de la chaleur

Dans ce qui suit, nous nous limitons à appliquer les schémas invariants explicites (3.29), (3.37) et (3.51) avec $\sigma = 0$ dans le dernier cas, ce qui revient à considérer un schéma standard. Pour simplifier la discussion, lorsque nous parlerons du schéma à maillage évolutif, nous nous référerons au schéma (3.37). Pour le schéma (3.29), nous parlerons de schéma à maillage uniforme.

Il est bien connu que pour que le schéma (3.56) soit stable, il faut que le rapport

des pas en t et en x vérifie, [31],

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (8.1)$$

Après certains tests numériques, nous concluons qu'un critère analogue doit être imposé pour les schémas invariants. Comme les pas en x peuvent varier en fonction du temps et que ceux-ci ne sont pas nécessairement constants sur une couche temporelle pour le schéma à maillage évolutif, nous posons pour critère de stabilité des schémas invariants

$$\frac{\tau}{h_{min}^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (8.2)$$

où h_{min} correspond au plus petit pas en x à un temps donné et peut varier à chaque itération temporelle. En ce qui concerne le schéma à maillage évolutif, comme nous n'avons aucun contrôle sur l'évolution de la grandeur des pas en x , sauf en $t = 0$, l'équation (8.2) impose une contrainte sur τ . La restriction (8.2) s'avère être très contraignante dans la plupart des applications numériques. Comme nous serons en mesure de le constater lors de nos deux applications numériques, les noeuds du maillage se rapprochent l'un de l'autre autour d'une racine de u_x dans les régions où la solution est positive et concave. Ce comportement est une conséquence immédiate de l'équation (3.38) dans laquelle on fait tendre h_+ et h_- vers 0. Afin de comparer objectivement les résultats numériques des trois schémas (3.29), (3.37) et (3.50), les pas en t seront identiques et seront déterminés en demandant que la relation (8.2) entre τ et h soit vérifiée pour le schéma invariant à maillage évolutif.

Avant d'entamer les applications numériques mentionnons l'existence d'une contrainte supplémentaire pour les schémas invariants impliquant des logarithmes. Comme le logarithme n'est pas réel pour des arguments inférieurs ou égales à zéro, les solutions modélisées à l'aide de schémas invariants logarithmiques ne doivent pas passer par zéro. Seules les solutions de signe constant peuvent être considérées. Si la solution change de signe, on pourrait être tenté de lui additionner une certaine constante pour que celle-ci devienne de signe constant, d'ensuite réaliser la

simulation numérique et finalement de lui soustraire la constante additionnée pour obtenir la solution finale. Cependant, une telle série d'étapes n'est pas possible puisque les schémas logarithmiques n'admettent pas le principe de superposition.

8.1.1 Problème avec conditions aux limites

Considérons le problème avec conditions aux limites $u(0, t) = u(1, t) = 1, t \geq 0$, avec la condition initiale

$$u(x, 0) = 1 + \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1].$$

La solution exacte de ce problème est donnée par

$$u(x, t) = 1 + \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}.$$

Pour que le schéma (3.29) admette des pas en x soient uniformes à chaque itération temporelle, il est nécessaire que σ soit nul pour le schéma, puisque les bords doivent être maintenus fixes. En ce qui concerne le schéma évolutif, nous avons imposé que les bords restent fixes et avons laissés évoluer les points intérieurs selon (3.37).

Dans les figures 8.2, 8.3 et 8.3, nous avons tracé l'évolution de l'erreur absolue maximale en fonction du temps pour trois pas spatiaux initiaux différents avec $\tau = 0.001$ en $t = 0$. De celles-ci, on constate que le schéma numérique standard et le schéma invariant à pas uniformes donnent des résultats comparables. Du côté du schéma invariant avec maillage évolutif, la précision est beaucoup moins bonne. Cette différence dans le comportement de l'erreur est facile à comprendre lorsqu'on observe l'évolution du maillage, figure 8.4. Les noeuds du maillage en se concentrant au centre de l'intervalle, engendrent des pas entre les bords et les premiers points

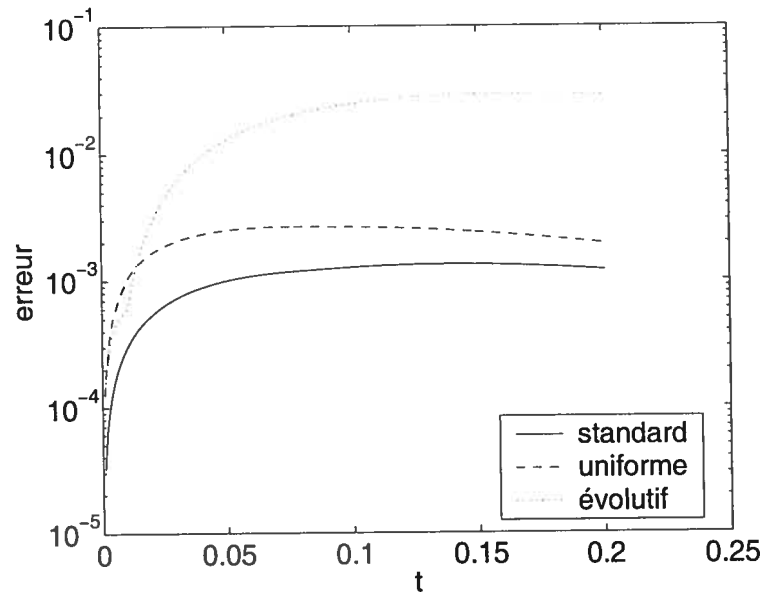


FIG. 8.1 – Erreurs absolues pour un problème à valeurs aux bords de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.1$.

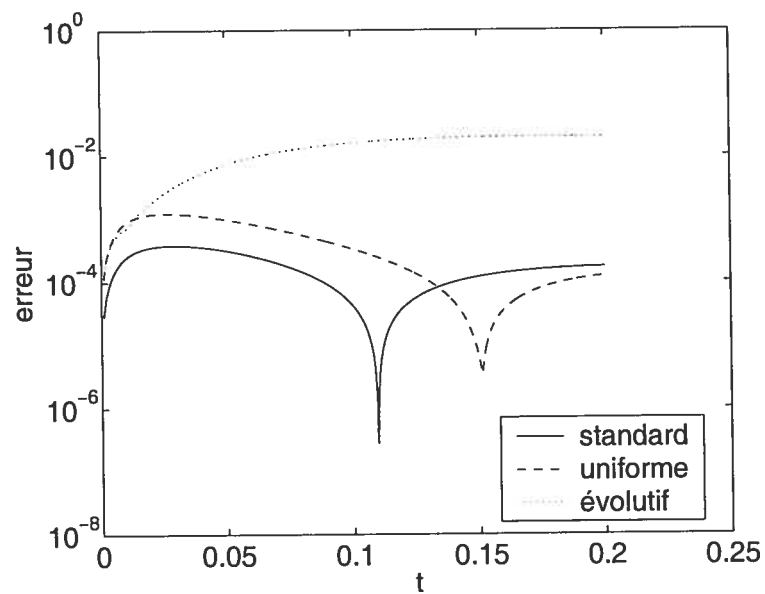


FIG. 8.2 – Erreurs absolues pour un problème à valeurs aux bords de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.05$.

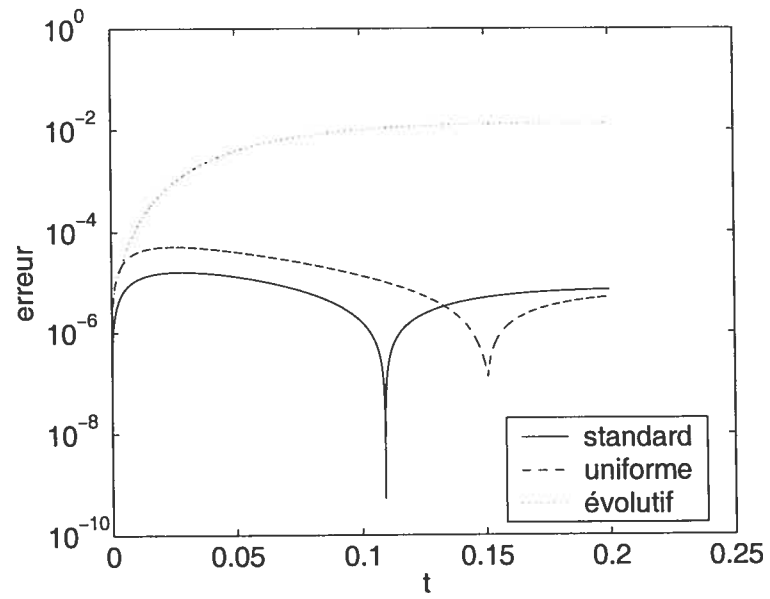


FIG. 8.3 – Erreurs absolues pour un problème à valeurs aux bords de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.01$.

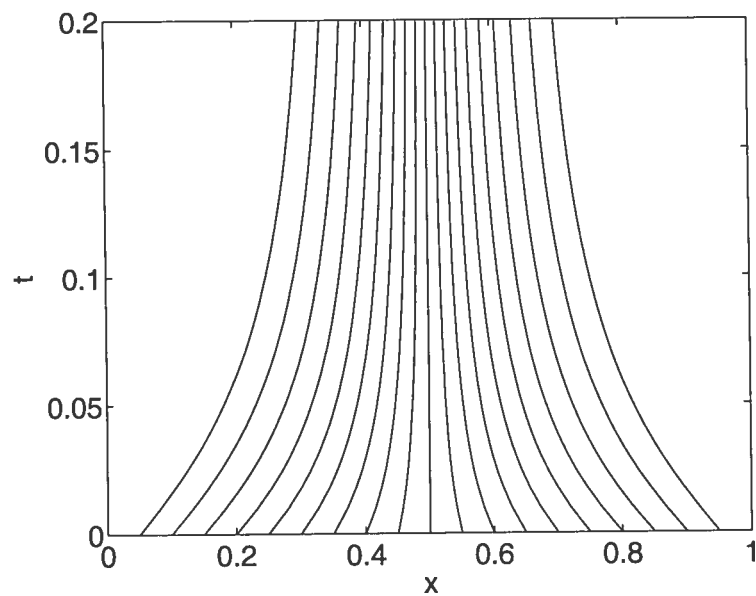


FIG. 8.4 – Maillage évolutif pour un problème à valeurs aux bords de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.05$.

internes qui ne cessent de s'agrandir. Ce faisant, la précision sur l'évolution de la solution aux premiers noeuds internes s'en trouve grandement affectée.

8.1.2 Problème périodique

Nous nous proposons d'explorer le problème périodique $u(x, t) = u(x + 2, t)$, avec la condition initiale

$$u(x, 0) = 2 + \sin(\pi x). \quad (8.3)$$

La solution analytique de ce problème existe et est donnée par

$$u(x, t) = 2 + \exp[-\pi^2 t] \sin(\pi x).$$

En plus de suivre l'évolution des erreurs numériques, nous vérifierons l'évolution de la quantité $M(t) = \int_x^{x+P} u(x, t) dx$, où P est la période. Cette quantité est souvent associée à la "masse" de la solution. On constate facilement que celle-ci est constante dans le temps lorsque u est une solution de l'équation de la chaleur et de période P .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_x^{x+P} u dx &= \int_x^{x+P} u_t dx = \int_x^{x+P} u_{xx} dx \\ &= u_x \Big|_x^{x+P} = 0. \end{aligned}$$

Pour notre application, la méthode des trapèzes est utilisée pour calculer cette quantité. Ce faisant, on montre sans trop de difficulté que le schéma standard conserve exactement la masse. En effet, supposons que l'intervalle $[-1, 1]$ contienne

temps	schéma évolutif	schéma uniforme
0.008503	0.000018	-0.000019
0.051890	0.000060	-0.000036
0.101211	0.000078	-0.000030
0.150403	0.000086	-0.000027
0.199556	0.000090	-0.000025

TAB. 8.1 – Évolution de la différence de masse pour les schémas invariants.

n noeuds, $-1 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$. La masse à un temps $t + \tau$ est

$$\begin{aligned}
M(t + \tau) &= \sum_{i=2}^n (\hat{u}_i + \hat{u}_{i-1}) \frac{h}{2} \\
&= \sum_{i=2}^n \left\{ u_i + \frac{\tau}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_{i-1} + \frac{\tau}{h^2} (u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}) \right\} h \\
&= \sum_{i=2}^n (u_i + u_{i-1}) \frac{h}{2} + \frac{\tau}{h} \left(\sum_{i=2}^n (u_{i+1} - u_i) + \sum_{i=2}^n (u_{i-2} - u_{i-1}) \right) \\
&= \sum_{i=2}^n (u_i + u_{i-1}) \frac{h}{2} + \{(-u_2 + u_{n+1}) + (u_0 - u_{n-1})\} \frac{\tau}{h},
\end{aligned}$$

en utilisant la périodicité de u on trouve

$$M(t + \tau) = \sum_{i=2}^n (u_i + u_{i-1}) \frac{h}{2} = M(t).$$

Dans le tableau 8.1, nous avons recueilli l'évolution de la différence entre la masse initiale et la masse à un temps donné pour les schémas invariants (3.29) avec $\sigma = 0$ et (3.37). Comme on le constate, contrairement au schéma standard, les deux schémas invariants ne préservent pas exactement la masse.

L'évolution de l'erreur en fonction du temps, pour trois pas initiaux en x différents est tracé aux figures 8.5, 8.6 et 8.7. Les conclusions tirées du problème à valeurs aux bords demeurent relativement les mêmes. Le schéma standard donne

toujours de meilleurs résultats, suivi de pas très loin du schéma invariant à pas uniformes. L'erreur engendrée par le schéma invariant à maillage évolutif bien qu'encore plus élevé que les deux autres schémas est cette fois-ci beaucoup plus semblable. Cela est simplement dû au fait qu'il n'y a pas d'aussi grands pas en x dans le maillage du problème périodique comparativement au problème à valeur aux bords, figure 8.8. Comme on le constate les premiers instants de la simulation ont une grande importance sur l'évolution ultérieure du maillage. Les plus grandes variations dans la distributions des points en x se situent dans les 0.1 premières unités de temps. Ce comportement est intimement relié à la manière dont évolue la solution. Dû à la forme de l'équation (3.37b), spécifiant l'évolution des points en x , le mouvement des points en x est important là où la solution varie le plus. Comme la composante sinusoïdale s'amenuise exponentiellement, son influence est marquée dans les premiers instants de la simulation. Plus on avance dans le temps, plus la solution tend vers la valeur constante 2 et plus le mouvement dans le maillage devient négligeable, c'est-à-dire que σ tend vers zéro. Ceci ne veut pas dire que le maillage tend à devenir uniforme. Au contraire, l'uniformité est perdue dans les premiers instants de la simulation et ne peut pas être recouvré plus tard puisque le maillage varie de moins en moins au fur et à mesure le temps s'écoule.

Pour se débarrasser de la contrainte de stabilité (8.2), il pourrait être envisagé d'utiliser des schémas numériques implicites. Il est bien connu que le schéma standard implicite, (3.57), est inconditionnellement stable [31], c'est-à-dire qu'aucune relation de la forme (8.1) entre les pas en x et en t doivent être satisfaites pour que la solution numérique soit stable. Il pourrait être intéressant de voir si c'est aussi le cas pour les schémas invariants. Cependant, comme les schémas invariants explicites (3.29) et (3.37) ne donnent pas de meilleurs résultats que le schéma standard, il est très peu probable que leurs versions implicites soient utiles puisque la non linéarité des schémas nécessite que l'on ait recours à des méthodes itératives pour les résoudre. Ceci introduit une source supplémentaire d'erreur non existante dans

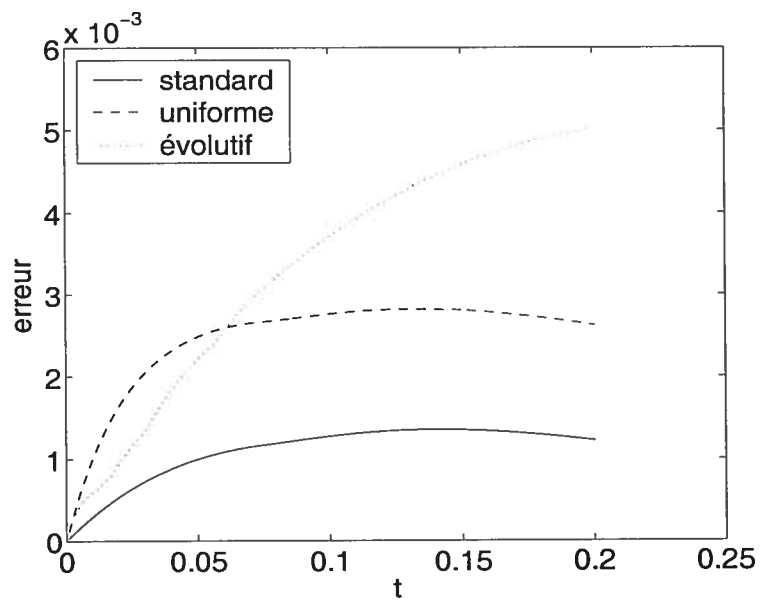


FIG. 8.5 – Erreurs absolues pour un problème périodique de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.1$.

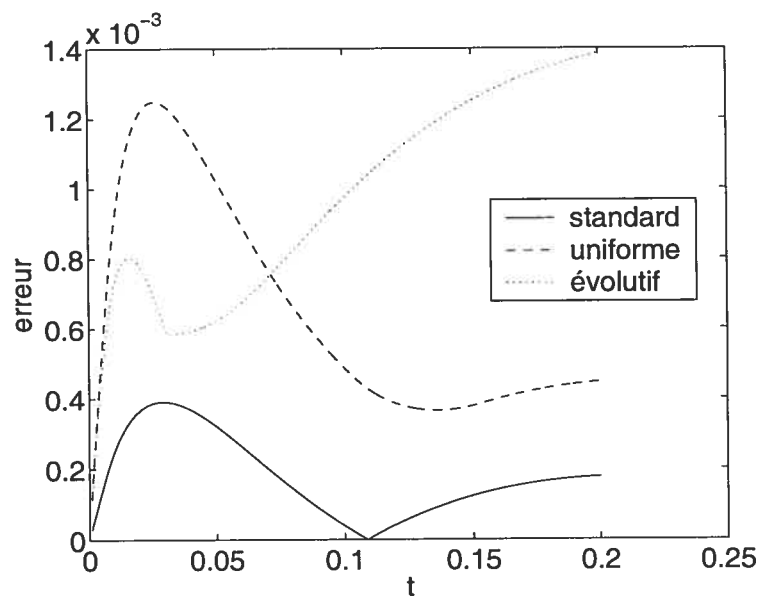


FIG. 8.6 – Erreurs absolues pour un problème périodique de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.05$.

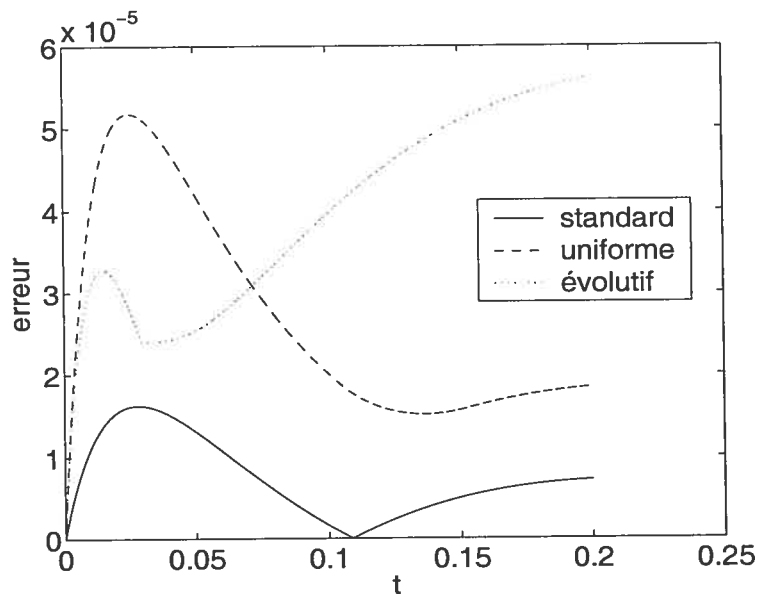


FIG. 8.7 – Erreurs absolues pour un problème périodique de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.01$.

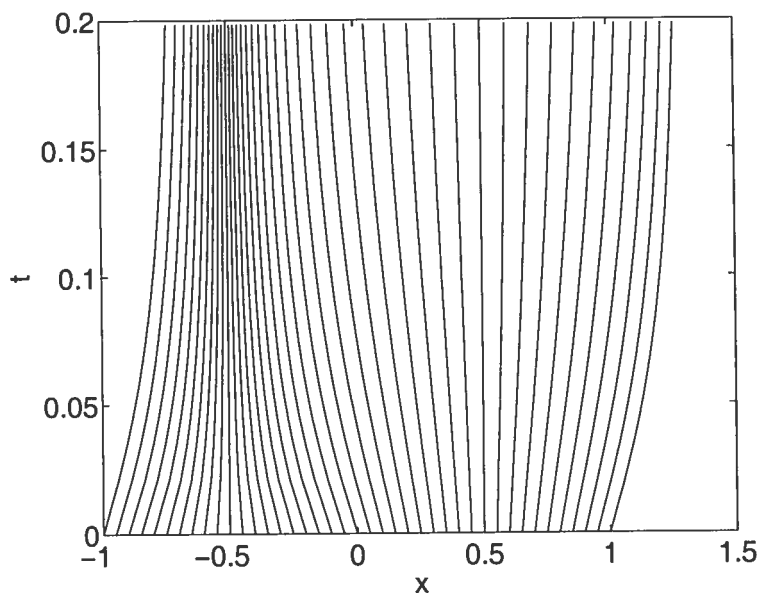


FIG. 8.8 – Maillage évolutif pour un problème périodique de l'équation de la chaleur, $h_0 = 0.05$.

le schéma standard implicite.

8.2 Équation de Korteweg-de Vries

Comme dernière application nous nous proposons de simuler la solution à un soliton

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}(x + ct) + \delta\right). \quad (8.4)$$

de l'équation de Korteweg-de Vries. Cette solution s'obtient en cherchant la solution invariante sous le groupe de translation à un paramètre

$$(x, t, u) \mapsto (x + c\epsilon, t - \epsilon, u).$$

Pour des raisons d'instabilités numériques, [53], nous n'utilisons pas de schémas explicites. Nous utilisons plutôt le schéma invariant à maillage évolutif (6.14) ainsi que le schéma (6.8) avec $\sigma = 0$, ce qui revient à considérer un schéma standard.

À la figure 8.10, nous avons tracé l'erreur des solutions numériques après avoir laissé le système évoluer pendant trois unités de temps. Comme on le constate, les deux schémas donnent des résultats similaires. Cependant, au niveau de l'effort de calcul, le schéma à maillage évolutif est beaucoup plus intéressant puisque ce schéma est linéaire, le terme non linéaire de l'équation de Korteweg-de Vries étant caché dans l'équation spécifiant l'évolution du maillage. Ainsi, contrairement au schéma standard, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la méthode pour arriver à résoudre pour \hat{u} [31].

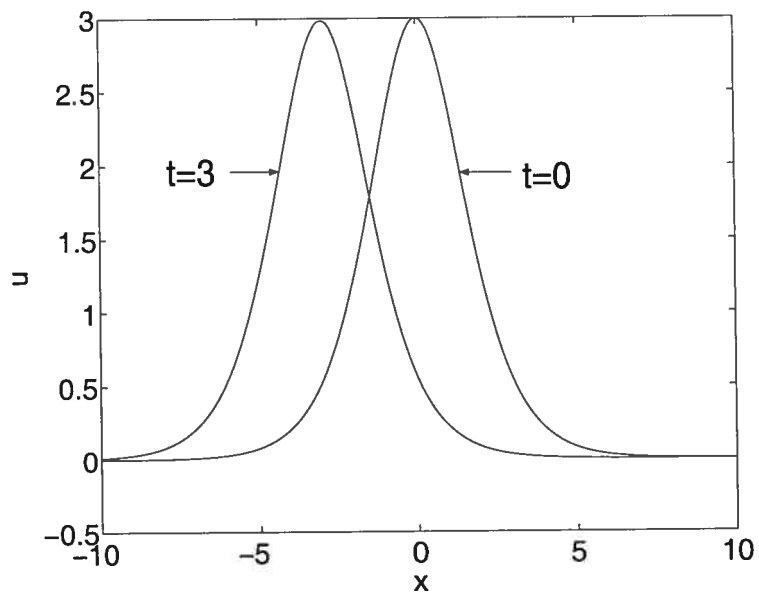


FIG. 8.9 – Évolution de la solution à une soliton calculée avec le schéma implicite standard, $\tau = 0.01$ et $h = 0.01$.

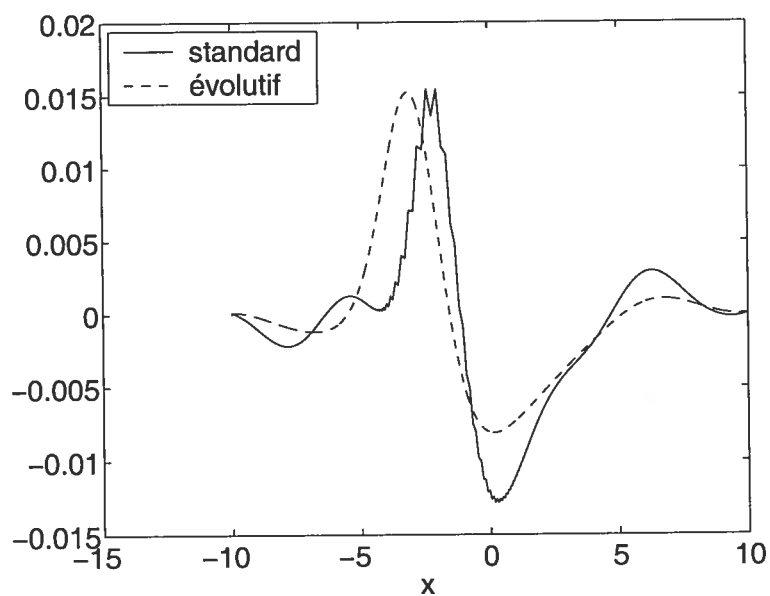


FIG. 8.10 – Erreurs numériques en $t = 3$ de la solution solitonique, $\tau = 0.01$ et $h_0 = 0.01$.

Conclusion

La méthode permettant de discrétiser des équations différentielles de manière à préserver toutes leurs symétries présentée au chapitre 2, a été appliquée avec succès à quatre équations différentielles aux dérivées partielles de la physique. Dans tous les cas, nous avons développé deux types de schémas invariants. Il y a ceux pour lesquels le maillage en x dépend de la solution et ceux pour lesquels le rapport des pas successifs en x est constant. Le premier type de schémas concorde avec ceux obtenus par Dorodnitsyn et coauteurs. Cependant, notre approche est légèrement différente puisque que nous évitons l'introduction de variables de type lagrangienne. Les schémas invariants à maillage uniforme quant à eux sont tous nouveaux.

En préservant les symétries du problème original, nous avons été en mesure d'utiliser la théorie des groupes pour obtenir des solutions exactes des schémas invariants. Dans la plupart des cas, on remarque que même si les schémas invariants sont différents ceux-ci admettent les mêmes solutions exactes. L'ensemble de solutions exactes trouvées forme un petit sous-ensemble de toutes les solutions qui peuvent être obtenues par la méthode de réduction par symétries appliquée au problème continu. Néanmoins, cet ensemble de solutions exactes s'avère être plus grand que celui d'une discrétisation standard qui se limite aux solutions polynômiales. Si nous nous fions aux résultats des articles [26] et [27], il est fort possible que le recours au formalisme lagrangien soit nécessaire pour obtenir de nouveaux schémas invariants à partir desquels de nouvelles solutions exactes pourront être obtenues.

Au chapitre 7, nous avons montré que si deux équations différentielles sont reliées par une transformation hodographe alors leurs schémas invariants le sont aussi par la même transformation. Même si ce résultat semble trivial à première vue, il n'en est rien puisque, pour beaucoup de transformations ponctuelles, ce résultat est faux. En utilisant ce fait, nous avons pu générer facilement des schémas invariants d'équations différentielles reliées par une transformation hodographe. De plus, nous avons utilisé cette transformation pour obtenir des solutions exactes des nouveaux schémas invariants obtenus.

Au niveau des applications numériques, nous constatons que les erreurs de troncature des schémas invariants sont semblables à celles engendrées par une discrétisation aux différences finies standard. Étant donné le nombre limité de simulations numériques réalisées, nous n'en concluons pas que les schémas invariants sont d'aucune utilité. Au contraire certains travaux montrent que l'exploitation des propriétés de symétries jumelée à divers intégrateurs numériques conventionnels donnent de bons résultats [5, 8, 9]. Pour mieux comprendre le comportement des schémas développés dans ce travail et pour peut-être établir dans quels types de problèmes ces derniers seront utiles, il sera nécessaire d'entreprendre une étude poussée de leurs propriétés numériques. Comme nous y avons fait allusion, il est important de connaître quelles sont les conditions de stabilité des schémas invariants si on veut obtenir des résultats fiables lors d'applications numériques.

Finalement, il est évident que beaucoup de travail reste à être réalisé dans ce domaine de recherche. Dans ce travail, nous avons seulement considéré la discrétisation invariante d'équations différentielles évolutive à une variable spatiale. Plusieurs autres types d'équations différentielles aux dérivées partielles restent à être discrétisées. De plus, tel que mentionné dans l'annexe, l'algorithme permettant la discrétisation invariante d'équations différentielles aux dérivées partielles est facile à modifier pour permettre la mise en place de schémas semi-discrets invariants. Plusieurs résultats restent à être trouvés dans ce secteur qui mélange à la fois la

théorie des symétries d'un problème continu et celle d'un problème discret.

Bibliographie

- [1] Ames W F, *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Academic Press, New York, 1966.
- [2] Ascher M U and McLachlan R I, On Symplectic and Multisymplectic Schemes for the KdV Equation, *J. Sci. Comput.* (2005), à paraître. (Disponible sur internet : <http://www.massey.ac.nz/~rmclachl/pubs.html>)
- [3] Bakirova M I, Dorodnitsyn V A and Kozlov R V, Symmetry-preserving Difference Schemes for Some Heat Transfer Equations, *J. Phys. A : Math. Gen.* **30** (1997), 8139–8155 .
- [4] Bérubé D and de Montigny M., A Mathematica program for the calculation of Lie point symmetries of systems of differential equations, *Preprint CRM 1822*, Montréal, 1992.
- [5] Blanes S and Budd C, Explicit Adaptive Symplectic (easy) Integrators : a Scaling Invariant Generalisation of the Levi-Civita and KS Regularisations, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **89** (2004), 383–405.
- [6] Bluman G W and Anco S C, *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, Springer, New York, 2002.
- [7] Bluman G W and Kumei S, *Symmetries and Differential Equations*, Springer New York, 1996.
- [8] Budd C J , Leimkuhler B and Piggott M D, Scaling Invariance and adaptivity, *Appl. Numer. Math.* **39** (2001), 261–288.

- [9] Budd C J and Piggott M D, The Geometric integration of scale invariant ordinary and partial differential equations, *J. Comp. Appl. Math.* **128** (2001), 399–422.
- [10] Champagne B and Winternitz P, *Preprint CRM-1278*, Montréal, 1985.
- [11] Champagne B, Hereman W and Winternitz P, The computer calculation of Lie point symmetries of large systems of differential equations, *Comp. Phys. Commun.* **66** (1991), 319–340.
- [12] Channell P J and Scovel C, Symplectic Intregation of Hamiltonian Systems, *Nonlinearity* **3** (1990), 231–259.
- [13] Clarkson P A, Fokas A S and Ablowitz M J, Hodograph Transformations of Linearizable Partial Differential equations, *SIAM J. App. Math.*, **49**, No. 4 (1989), 1188–1209.
- [14] Cyr-Gagnon C, *Discrétisation des équations différentielles ordinaires avec préservation de leurs symétries*, Mémoire de Maîtrise, Université de Montréal, 2003.
- [15] Dorodnitsyn V A, Transformation Groups in the Net Spaces, *J. Sov. Math.* **55** (1991), 1490–1517.
- [16] Dorodnitsyn V A, Finite Difference Models Entirely Inheriting Symmetry of Original Differential Equations, *Modern Group Analysis : Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics*, Kluwer Academic Publishers, 1993, 191–201.
- [17] Dorodnitsyn V A, Symmetry of Finite-Difference Equations, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1 : Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*, CRC Press, 1994.
- [18] Dorodnitsyn V A, Invariant Discrete Model for the Korteweg-de Vries Equation, *Preprint CRM*, 1994.

- [19] Dorodnitsyn V A, Continuous Symmetries of Finite-Difference Evolution Equations and Grids, *CRM Proceedings and Lecture Notes*, **9** (1996), 103–112.
- [20] Dorodnitsyn V A, Noether-Type Theorems for Difference Equations, *App. Num. Math.*, **39** (2001), 307–321 .
- [21] Dresner L, *Application of Lie's Theory of Ordinary and Partial Differential Equations*, IOP Publishing Ltd, 1999.
- [22] Dorodnitsyn V A and Kozlov R, The Whole Set of Symmetry Preserving Discrete Versions of a Heat Transfer Equation with a Source, SYNODE, preprint Numerics No. 4, 1997.
- [23] Dorodnitsyn V A and Kozlov R, Symmetry-Preserving Difference Schemes for Some Heat Transfer Equations, *J. Phys. A : Math. Gen.* **30** (1997), 8139–8155.
- [24] Dorodnitsyn V A and Kozlov R, A Heat Transfer with a Source : the Complete Set of Invariant Difference Schemes, *J. Non. Math. Phys* **10**, No. 1 (2003), 16–50.
- [25] Dorodnitsyn V, Kozlov R and Winternitz P, Lie Group Classification of second order ordinary difference equations, *J. Math. Phys.* **41** (2000), 480–504.
- [26] Dorodnitsyn V, Kozlov R and Winternitz P, Symmetries, Lagrangian Formalism and Integration of Second Order Ordinary Difference Equations, *J. Nonlinear Math. Phys.* **10** (2003), 41–56.
- [27] Dorodnitsyn V, Kozlov and Winternitz P, Continuous Symmetries of Lagrangians and Exact Solutions of Discrete equations, *J. Math. Phys.* **45** (2004), 336–359.
- [28] Dorodnitsyn V and Winternitz P, Lie Point Symmetry Preserving Discretizations for Variable Coefficient Korteweg-de Vries Equations, *Nonlinear Dynamics* **22** (2000), 49–59.
- [29] Floreanini R, Negro J, Nieto L M and Vinet L, Symmetries of the Heat Equation on the Lattice, *J. Math. Phys.* **36** (1996), 351–355.

- [30] Fushchych W I, Hodograph Transformations and Generating of Solutions for Nonlinear Differential Equations, *Proc. Acad. of Sci. Ukraine* **10** (1993), 52–58.
- [31] Golub G H and Ortega J M, *Scientific computing and differential equations : an introduction to numerical methods*, Academic Press, Boston, 1992 .
- [32] Hairer E, Lubich C and Wanner G, *Geometric Numerical Integration*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [33] Heredero R H, Levi D and Winternitz P, Symmetries of the Discrete Burger Equation, *J. Phys. A : Gen.* **32** (1999), 2685–2695.
- [34] Hereman W, Symbolic Software for Lie Symmetry Analysis, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 3 : New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods*, CRC Press, 1996.
- [35] Ibragimov N H, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*, Reidel Publishing Company, Holland, 1985.
- [36] Ibragimow N H and Kolsrud T, Lagrangian Approach to Evolution Equations : Symmetries and Conservation Laws, *Nonlinear Dynamics* **36** (2004), 29–40.
- [37] Kim P and Olver P J, Geometric Integration via Multi-space, *Regular and Chaotic Dynamics* **9** (2004), 213–226.
- [38] Kruskal M D, Zabusky N J, Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the recurrence of Initial States, *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965), 240–243.
- [39] Levi D, Tremblay S and Winternitz P, Lie Point Symmetries of Difference Equations and Lattices, *J. Phys. A : Math Gen* **33** (2000), 8507-8523.
- [40] Levi D, Tremblay S, Winternitz P, Lie Symmetries of Multidimensional Difference Equations, *J. Phys. A : Math Gen*, **34** (2001), 9507-9524.
- [41] Levi D, Vinet L and Winternitz P, Lie Group Formalism for Difference Equations, *J. Phys. A : Math. Gen.* **30** (1997), 633–649.

- [42] Levi D and Winternitz P, Continuous Symmetries of Discrete Equations, *Phys. Lett. A* **152** (1991), 335–338.
- [43] Levi D and Winternitz P, Continuous Symmetries of Difference Equations, *Preprint*, arXiv :nlin.SI/05022005 (2005).
- [44] Lewis D and Simo J C, Conserving algorithms for the dynamics of Hamiltonian systems on Lie groups, *J. Nonlin. Sci.* **4** (1994) 253–299.
- [45] Olver P J, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1993.
- [46] Olver P J, *Equivalence, Invariants, and Symmetries*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [47] Olver P J, Geometric Foundations of Numerical Algorithm and Symmetry, *Appl. Alg. Engin. Comp. Commun.* **11** (2001), 417–436.
- [48] Ovsianikov L V, *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, New York, 1982.
- [49] Rodriguez M A and Winternitz P, Lie Symmetries and Exact Solutions of First Order Difference Schemes, *J. Phys. A : Math. Gen.* **37** (2004), 6129–6142.
- [50] Schwarz F, Automatically determining symmetries of partial differential equations, *Computing* **34** (1985), 91–106.
- [51] Valiquette F, Discretizations preserving all Lie point symmetries of the Korteweg-de Vries equation, *Proc. of the 25th Int. Col. on Group Theoretical Methods in Phys.*, soumis.
- [52] Valiquette F, The hodograph transformation for invariant difference schemes, *J. Phys. A : Math. Gen.*, soumis.
- [53] Vliegthart A C, On Finite-Difference Methods for the Korteweg-de Vries Equation, *J. Eng. Math.* **5** (1971), 137–155.

- [54] Winternitz P, Group Theory and Exact Solution of Partially Integrable Differential Systems, *Partially Integrable Evolution Equations in Physics*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1990.
- [55] Winternitz P, Lie Groups and Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, *Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Fields Theories*, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [56] Winternitz P, Symmetries of Discrete Systems, *Preprint*, arXiv :nlin.SI/0309058 v1 (2003).

Annexe I

Limite continue de la prolongation discrète d'un générateur de transformations

L'objectif principal de cette annexe est de démontrer, dans un cas particulier, la proposition 2.1. L'exercice nous permet de plus d'obtenir une expression pour la première prolongation d'un champ de vecteurs d'un problème semi-discret. Avec cette définition, il est facile de développer des schémas invariants semi-discrets. Pour ce faire, il suffit d'apporter que quelques petites modifications à l'algorithme de discrétisation invariante présenté dans ce mémoire. Afin d'illustrer comment cela fonctionne, nous appliquons l'algorithme modifié à l'équation de Korteweg-de Vries.

I.1 Preuve d'un cas particulier de la proposition 2.1

Soit

$$\Delta(x, t, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = 0, \quad (\text{I.1})$$

une équation différentielle aux dérivées partielles admettant des générateurs infinitésimaux de symétries de la forme

$$\mathbf{v} = \xi(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (\text{I.2})$$

En d'autres mots, nous supposons que les transformations des variables x et t ne dépendent pas de la variable dépendante u et qu'en plus, les transformations de la variable t ne dépendent pas de x . Pour de telles transformations, nous vérifions facilement que

$$T_+ = 0 \quad (\text{I.3})$$

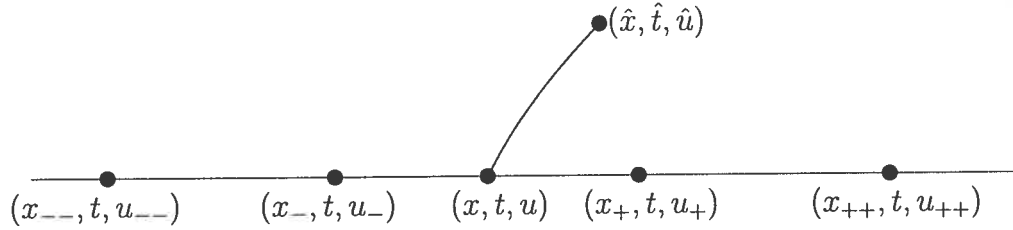


FIG. I.1 – Schéma explicite centré.

définit une variété invariante puisque

$$\text{prv}[t_+ - t]|_{t_+=t} = (\eta(t_+) - \eta(t))|_{t_+=t} = \eta(t_+) - \eta(t) = 0.$$

Comme dernière supposition, nous supposons que le schéma discret est explicite et implique seulement les points figurant à la figure I.1. La prolongation du champ de vecteurs (I.2) sur un tel schéma est donnée par

$$\begin{aligned} \text{pr } \mathbf{v} = & \xi \partial_x + \xi_{--} \partial_{x_{--}} + \xi_- \partial_{x_-} + \xi_+ \partial_{x_+} + \xi_{++} \partial_{x_{++}} + \hat{\xi} \partial_{\hat{x}} + \eta \partial_t + \\ & \hat{\eta} \partial_{\hat{t}} + \phi \partial_u + \phi_{--} \partial_{u_{--}} + \phi_- \partial_{u_-} + \phi_+ \partial_{u_+} + \phi_{++} \partial_{u_{++}} + \hat{\phi} \partial_{\hat{u}}. \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Dans le processus de limite continue, nous débutons par faire tendre les pas τ et σ vers zéro. Cela nous permettra d'obtenir une expression pour la prolongation d'un champ de vecteurs d'un problème semi-discret où t est une variable continue et x une variable discrète.

Au lieu d'exprimer la prolongation du champ de vecteurs (I.2) dans l'espace $\{x, t, u, x_{--}, u_{--}, x_-, u_-, x_+, u_+, x_{++}, u_{++}, \hat{u}, \hat{t}, \hat{x}\}$, nous nous proposons de passer dans l'espace $\{x, t, u, x_{--}, u_{--}, x_-, u_-, x_+, u_+, x_{++}, u_{++}, \tau, \sigma, u_t^*\}$, où

$$u_t^* = \frac{\hat{u} - u}{\tau} - \frac{\sigma}{\tau} \left(\frac{u_+ - u}{x_+ - x} \right) = \hat{u}_t - \frac{\sigma}{\tau} u_x^+. \quad (\text{I.5})$$

L'introduction de la variable u_t^* se justifie par le fait que, dans la limite continue, u_t^* tend vers la définition habituelle de u_t , avec la restriction que le rapport σ/τ vérifie la condition (3.30). La prolongation de \mathbf{v} dans cet espace est

$$\begin{aligned} \text{pr } \mathbf{v} = & \xi \partial_x + \xi_{--} \partial_{x_{--}} + \xi_- \partial_{x_-} + \xi_+ \partial_{x_+} + \xi_{++} \partial_{x_{++}} + (\hat{\xi} - \xi) \partial_\sigma \\ & + \eta \partial_t + \{-\eta + \hat{\eta}\} \partial_\tau + \phi \partial_u + \phi_{--} \partial_{u_{--}} + \phi_- \partial_{u_-} + \phi_+ \partial_{u_+} \\ & + \left\{ -\frac{\hat{\xi} - \xi}{\tau} u_x^+ + \frac{\xi_+ - \xi}{h_+} \frac{\sigma}{\tau} u_x^+ - \frac{\hat{\eta} - \eta}{\tau} u_t^* + \frac{\hat{\phi} - \phi}{\tau} - \frac{\phi_+ - \phi}{h_+} \frac{\sigma}{\tau} \right\} \partial_{u_t^*}. \end{aligned}$$

Nous obtenons facilement la limite continue des termes entre accolades en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma D_x + \tau D_t)^n \xi}{n!}, \\ \hat{\eta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau D_t^n \eta}{n!}, \\ \hat{\phi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma D_x + \tau D_t)^n \phi}{n!}, \end{aligned}$$

où D_x et D_t sont les opérateurs de dérivées totales. Après quelques calculs, nous obtenons

$$D_t(\phi) - D_t(\xi)u_x^+ - D_t(\eta)u_t \equiv \phi_{s.d.}^t \quad (\text{I.6})$$

L'expression pour $\phi_{s.d.}^t$ nous procure une définition de la première prolongation en u_t du champ de vecteurs (I.2) pour un problème semi-discret où la variable t est continue et x est discrète. Le résultat de nos calculs suggère une définition de $\phi_{s.d.}^t$ qui soit légèrement différente de celle introduite l'article de Levi et coauteurs [39] où ils posent $\phi_{s.d.}^t = D_t(\phi) - D_t(\xi)u_x - D_t(\eta)u_t$. Notre façon de prolonger le champ de vecteurs pour un problème semi-discret fait plus de sens puisque, dans un problème semi-discret, il est impossible de définir la dérivée partielle de u par rapport à x . Nous résumons ce résultat dans la proposition suivante.

Proposition I.1. *Soit*

$$\mathbf{v} = \xi(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (\text{I.7})$$

un générateur de transformations. La prolongation semi-discrète de (I.7) pour le problème différentiel et aux différences

$$\begin{aligned} \Omega(x_{--}, x_-, x, x_+, x_{++}, t, u_{--}, u_-, u, u_+, u_{++}) &= 0, \\ u_t - \Lambda(x_{--}, x_-, x, x_+, x_{++}, t, u_{--}, u_-, u, u_+, u_{++}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

est

$$\begin{aligned} pr \mathbf{v} &= \xi \partial_x + \xi_{--} \partial_{x_{--}} + \xi_- \partial_{x_-} + \xi_+ \partial_{x_+} + \xi_{++} \partial_{x_{++}} + \eta \partial_t \\ &+ \phi \partial_u + \phi_{--} \partial_{u_{--}} + \phi_- \partial_{u_-} + \phi_+ \partial_{u_+} + \phi_{++} \partial_{u_{++}} + \phi_{s.d.}^t \partial_{u_t} \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

où

$$\phi_{s.d.}^t = D_t(\phi) - D_t(\xi)u_x^+ - D_t(\eta)u_t \quad (\text{I.10})$$

L'étude des symétries dans les équations semi-discrètes est un sujet de recherche en soi. Comme ce n'est pas le sujet d'étude de ce travail, nous ne nous sommes pas investis dans ce problème. Néanmoins, dans la section suivante, nous appliquons notre résultat à un exemple simple.

Une fois la limite continue en t prise, le problème discret en devient un à une dimension, figure I.2. Afin de terminer le calcul de la limite continue, nous exécutons un changement de variables pour passer de l'espace $\{x_{--}, x_-, x, x_+, x_{++}, t, u_{--},$

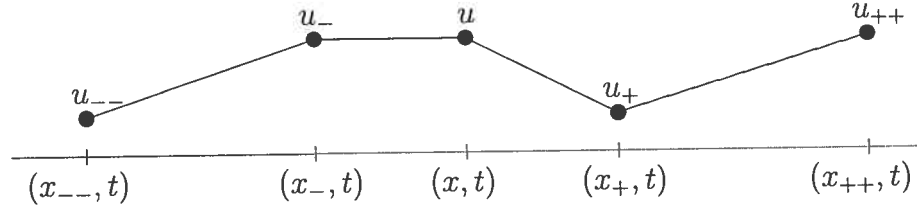


FIG. I.2 – Schéma à une variable discrète.

u_-, u, u_+, u_{++} vers $\{x, h_{--}, h_-, h_+, h_{++}, u, u_x^+, u_{xx}, u_{xxx}, \Delta u_{++}\}$ où

$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= \frac{2}{h_+ + h_-} (u_x^+ - u_x^-), \\
 u_{xxx} &= \frac{6}{h_{++} + 2h_+ + 2h_- + h_{--}} \left(\frac{u_x^{++} - u_x^+}{h_{++} + h_+} - \frac{u_x^- - u_x^{--}}{h_- + h_{--}} \right), \\
 \Delta u_{++} &= u_{++} - u.
 \end{aligned} \tag{I.11}$$

Ce faisant, la prolongation semi-discrète du champ de vecteurs (I.9) s'écrit, en introduisant l'opérateur de dérivée discrète

$$D_{+h}(f(x, t, u)) \equiv \frac{f(x_+, t_+, u_+) - f(x, t, u)}{h}, \tag{I.12}$$

$$\begin{aligned}
 \text{pr } v &= \xi \partial_x + \eta \partial_t + \phi \partial_u + \phi_{s.d.}^t \partial_{u_t} + h_{--} D_{+h_{--}}(\xi_{--}) \partial_{h_{--}} + h_- D_{+h_-}(\xi_-) \partial_{h_-} + \\
 & h_+ D_{+h_+}(\xi) \partial_{h_+} + h_{++} D_{+h_{++}}(\xi) \partial_{h_{++}} + (h_- D_{+h_-}(\phi_-) + h_{--} D_{+h_{--}}(\phi_{--})) \partial_{\Delta u} + \\
 & \phi_d^x \partial_{u_x^+} + \phi_d^{xx} \partial_{u_{xx}} + \phi_d^{xxx} \partial_{u_{xxx}},
 \end{aligned} \tag{I.13}$$

où

$$\phi_d^x = D_{+h_+}(\phi) - D_{+h_+}(\xi) u_x^+, \tag{I.14}$$

$$\phi_d^{xx} = \phi_{xx} - u_{xx} \frac{\xi_+ - \xi_-}{h_+ + h_-} - \frac{2}{h_+ + h_-} (D_{+h_+}(\xi) u_x^+ - D_{+h_-}(\xi_-) u_x^-), \tag{I.15}$$

$$\begin{aligned}
\phi_d^{xxx} = & \phi_{xxx} - \frac{\xi_{++} + \xi_+ - \xi_- - \xi_{--}}{h} u_{xxx} - \left(\frac{\xi_{++} - \xi}{h_{++} - h_+} \right) \left(\frac{u_x^{++} - u_x^+}{h_{++} + h_+} \right) \frac{6}{h} \\
& + \left(\frac{\xi - \xi_{--}}{h_- - h_{--}} \right) \left(\frac{u_x^- - u_x^{--}}{h_- + h_{--}} \right) \frac{6}{h} + D_{+h_+}(\xi) \frac{6}{h} \left(\frac{u_x^+}{h_{++} + h_+} \right) \\
& + D_{+h_-}(\xi_-) \frac{6}{h} \left(\frac{u_x^-}{h_- + h_{--}} \right) - D_{+h_{++}}(\xi_+) \frac{6}{h} \left(\frac{u_x^{++}}{h_{++} + h_-} \right) \\
& - D_{+h_{--}}(\xi_{--}) \frac{6}{h} \left(\frac{u_x^{--}}{h_- + h_{--}} \right). \tag{I.16}
\end{aligned}$$

avec $h = h_{++} + 2h_+ + 2h_- + h_{--}$. Finalement, en faisant tendre les pas en x vers zéro, nous obtenons

$$\text{pr } \mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^t \partial_{u_t} + \phi^x \partial_{u_x} + \phi^{xx} \partial_{u_{xx}} + \phi^{xxx} \partial_{u_{xxx}} \tag{I.17}$$

avec

$$\begin{aligned}
\phi^t &= D_t(\phi) - D_t(\xi)u_x - D_t(\eta)u_t, \phi^x = D_x(\phi) - D_x(\xi)u_x, \\
\phi^{xx} &= D_x(\phi^x) - D_x(\xi)u_{xx}, \\
\phi^{xxx} &= D_x(\phi^{xx}) - D_x(\xi)u_{xxx}. \tag{I.18}
\end{aligned}$$

Ce résultat est cohérent avec la formule générale (1.7), en se rappelant que nous avons supposé que η est fonction que de t .

I.2 Schéma semi-discret préservant toutes les symétries de l'équation de Korteweg-de Vries

Dans ce qui suit, nous appliquons la prolongation semi-discrète (I.9) et (I.10) à l'équation de Korteweg-de Vries pour obtenir une discrétisation semi-discrète préservant toutes les symétries de l'équation originale.

L'algorithme permettant de générer un schéma invariant semi-discret est similaire à celui exposé au chapitre 2, à la différence que seule la variable spatiale x est discrète. Ainsi, au lieu d'avoir deux équations spécifiant l'évolution du maillage,

nous nous retrouvons avec une seule équation. La variable t étant maintenant continue, nous n'avons pas à inclure une équation spécifiant comment t doit être échantillonné. Donc le problème qui nous intéresse sera composé des deux équations

$$\begin{aligned}\Omega(x_{--}, x_-, x, x_+, x_{++}, t, u_{--}, u_-, u, u_+, u_{++}, u_t) &= 0, \\ u_t &= \Lambda(x_{--}, x_-, x, x_+, x_{++}, u_{--}, u_-, u, u_+, u_{++}),\end{aligned}\tag{I.19}$$

avec la restriction que dans la limite continue, la première équation tende vers l'identité $0 = 0$ et la deuxième tende vers l'équation de Korteweg-de Vries.

En calculant les invariants semi-discrets de l'algèbre de symétrie (6.2) dans l'espace $\{x_{--}, x_-, x, x_+, x_{++}, t, u_{--}, u_-, u, u_+, u_{++}, u_t\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{h_-}{h_{--}}, & I_2 &= \frac{h_+}{h_-}, & I_3 &= \frac{h_{++}}{h_+}, & I_4 &= \frac{u - u_-}{u_- - u_{--}}, \\ I_5 &= \frac{u_{++} - u_+}{u_+ - u}, & I_6 &= \frac{u_{++} - u_+}{u_+ - u}, & I_7 &= (u_+ - u)h_+^2, & I_8 &= (u_t - uu_x^+)h_+^5.\end{aligned}\tag{I.20}$$

Un schéma semi-discret approximant l'équation de Korteweg-de Vries s'obtient en posant

$$I_2 = 1, \quad I_8 = \frac{1}{2}(I_6 - 1 - I_5^{-1} + (I_4 I_5)^{-1})I_7,\tag{I.21}$$

ce qui donne en terme des variables originales

$$\begin{aligned}h_+ &= h_- \equiv h, \\ u_t - uu_x^+ &= \frac{u_{++} - 2u_+ + 2u_- - u_{--}}{2h^3}.\end{aligned}\tag{I.22}$$

Le résultat obtenu n'est pas très intéressant puisque celui-ci aurait pu être obtenu par une discrétisation habituelle. Néanmoins, remarquons que le système d'équations (I.22) est en accord avec le schéma invariant explicite à pas uniformes (6.6), dans lequel on fait tendre τ et σ vers zéro.