

Université de Montréal

Stabilité d'un réseau de neurones à délai distribué  
modélisant la mémoire spatiale

par

François Grégoire-Lacoste

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

Orientation mathématiques appliquées

septembre 2006



QA

3

U54

2006

v.018



## AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

## NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Stabilité d'un réseau de neurones à délai distribué  
modélisant la mémoire spatiale

présenté par

François Grégoire-Lacoste

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Michel Delfour*

---

(président-rapporteur)

*Jacques Bélair*

---

(directeur de recherche)

*Alain Vinet*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

*12 septembre 2006*

---

# SOMMAIRE

---

Nous considérons un modèle de mémoire spatiale sous la forme d'un réseau de neurones à délai distribué. L'étude de la stabilité globale présente des conditions suffisantes d'unicité et de stabilité asymptotique globale du point d'équilibre. Une analyse de stabilité locale est utilisée pour calculer les frontières de stabilité pour plusieurs distributions de délais en termes des valeurs propres, réelles ou complexes, de la matrice produit de la matrice de connexion et de la Jacobienne de la fonction d'activation au point d'équilibre. Ces résultats sont comparés entre eux et au cas discret. Un exemple simple d'application est ensuite examiné semi-numériquement.

## MOTS-CLÉS

Réseau de neurones, Mémoire spatiale, Délai distribué, Stabilité asymptotique globale, Frontières de stabilité.

## SUMMARY

---

We consider a distributed delay neural network model of spatial memory. Sufficient conditions are derived for the uniqueness and global asymptotic stability of an equilibrium point. Local analysis is used to determine stability boundaries for many delay distributions, in terms of real or complex eigenvalues of a matrix which is product of the connection matrix and the Jacobian matrix of the activation function at equilibrium. These results are compared between them and to the discrete case. A simple illustrative application is semi-numerically examined.

### KEYWORDS

Neural network, Spatial memory, Distributed delay, Global asymptotic stability, Stability boundaries.

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
Mots-clés .....	iii
<b>Summary</b> .....	iv
Keywords.....	iv
<b>Liste des figures</b> .....	viii
<b>Remerciements</b> .....	x
<b>Chapitre 1. Présentation du modèle</b> .....	1
1.1. La mémoire spatiale .....	1
1.2. Les équations .....	2
1.3. Apprentissage et auto-organisation des connexions .....	5
1.4. Connexions récurrentes .....	6
1.5. Connexions idiothétiques.....	8
1.6. Simulation des états de mémoire spatiale.....	10
1.7. Les distributions de délai .....	11
<b>Chapitre 2. Analyse de stabilité globale</b> .....	17
2.1. Introduction.....	17
2.2. Hypothèses .....	18
2.3. Existence et unicité de l'équilibre .....	18

2.4.	Stabilité asymptotique globale .....	19
2.5.	Application au modèle particulier .....	22
<b>Chapitre 3. Étude de stabilité locale .....</b>		<b>23</b>
3.1.	Introduction .....	23
3.2.	Linéarisation et équation caractéristique .....	23
3.3.	Conditions suffisantes simples de stabilité .....	25
3.3.1.	Condition suffisante de stabilité en coordonnées polaires .....	25
3.3.2.	Conditions suffisantes de stabilité en coordonnées cartésiennes ..	26
3.4.	Frontières de stabilité pour les valeurs propres $\mu$ réelles .....	28
3.5.	Frontière de stabilité pour les valeurs propres $\mu$ complexes .....	44
3.6.	Simulation numérique des frontières de stabilité .....	52
3.7.	Comparaison des frontières de stabilité .....	54
3.7.1.	Frontières de stabilité avec un délai discret [1] .....	54
3.7.2.	Pour $A$ n'admettant que des valeurs propres $\mu$ réelles .....	55
3.7.3.	Pour $A$ admettant des valeurs propres $\mu$ complexes .....	59
<b>Chapitre 4. Stabilité d'un réseau de neurones minimal .....</b>		<b>61</b>
4.1.	Introduction .....	61
4.2.	Connexions symétriques .....	62
4.2.1.	Matrice de connexion symétrique .....	62
4.2.2.	Valeurs propres et stabilité .....	62
4.3.	Applications à une matrice de connexion bisymétrique .....	68
4.4.	Connexions asymétriques .....	69



4.4.1. La matrice de connexion totale.....	70
4.4.2. Pour $h = e^{-1}/2$ et r libre.....	70
4.4.3. Pour $r = r_2$ et h libre .....	80
<b>Conclusion.....</b>	<b>89</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>91</b>
<b>Annexe A. Théorie fondamentale des équations différentielles à</b>	
<b>délai .....</b>	<b>A-i</b>
A.1. Introduction.....	A-i
A.2. Les équations différentielles à délai .....	A-i
A.3. Stabilité Locale .....	A-iii
A.3.1. Linéarisation et équation caractéristique .....	A-iv
A.3.2. Le critère de Routh-Hurwitz.....	A-v
A.4. Méthode de la fonctionnelle de Lyapounov.....	A-vi

## LISTE DES FIGURES

---

1.1	Graphique du profil de connexion avec la cellule de lieu $i = 210$ .....	7
1.2	Graphique du profil de connexion récurrente avec la cellule de lieu $i = 210$ au centre de la rangée $j = 201 \cdots 220$ .....	8
1.3	Graphique du profil de connexion idiothétique avec la cellule de lieu $i = 210$ au centre de la rangée $j = 201 \cdots 220$ .....	9
1.4	Propagation du paquet de mémoire sur la carte spatiale $20 \times 20$ dans la direction des $x$ positifs.....	12
1.5	Comparaison, à délai moyen égal, des distributions de délai.....	13
1.6	Distributions exactes des distances entre neurones pour différents formats de tapis de 400 neurones.....	14
1.7	Ajustement d'une exponentielle sur la distribution des distances du tapis de neurones de format $5 \times 80$ . ....	15
1.8	Ajustement d'une gamma sur la distribution des distances du tapis de neurones de format $16 \times 25$ . ....	15
3.1	Frontière de stabilité pour la distribution uniforme.....	31
3.2	Détection de la frontière de stabilité pour la distribution uniforme....	35
3.3	Frontières de stabilité pour la distribution gamma.....	43
3.4	Frontière de stabilité pour la distribution exponentielle et $\mu$ complexe. 46	
3.5	Comparaison des frontières de stabilité suivant $\mu$ et $\bar{\tau} < 3$ . ....	56
3.6	Comparaison des frontières de stabilité suivant $\mu$ et $\bar{\tau} > 1$ . ....	58

3.7	Comparaison, pour $\mu$ complexe, des frontières de stabilité pour les délais discret et distribué exponentiellement. ....	60
4.1	Valeurs propres $m$ de la matrice $J^{sym}$ . ....	65
4.2	Régions déstabilisable, non-déstabilisable et instable, pour les connexions symétriques. ....	67
4.3	Valeurs propres pour les connexions totales et $h = e^{-1}/2$ . ....	73
4.4	Trajectoires des valeurs propres complexes pour $h = e^{-1}/2$ et $\gamma = 1$ ... ..	74
4.5	Intersection des trajectoires des valeurs propres $v_2$ et $z_1$ avec la frontière de stabilité $\gamma = 1$ , pour $h = e^{-1}/2$ . ....	75
4.6	Intersection des trajectoires des valeurs propres $v_2$ , $z_1$ et $z_3$ avec la frontière de stabilité $\gamma = 1$ . ....	76
4.7	Trajectoires des valeurs propres complexes pour $h = e^{-1}/2$ avec $\gamma = 50$ . ..	77
4.8	Frontière de stabilité dans le plan $\beta a, r$ , lorsque $h = e^{-1}/2$ . ....	79
4.9	Valeurs propres lorsque $r = r_2$ . ....	81
4.10	Valeurs propres réelles lorsque $r = r_2$ et $e^{-2} < h < \frac{1}{2}e^{-1}$ . ....	82
4.11	Trajectoires des valeurs propres complexes pour $r = r_2$ et diverses valeurs de $h$ . ....	83
4.12	Intersection des trajectoires respectives des valeurs propres $v_2$ et $z_1$ , avec la frontière $\gamma = 1$ , pour $r = r_2$ . ....	84
4.13	Frontière de stabilité dans le plan $\beta a, h$ , lorsque $r = r_2$ . ....	86
4.14	Intersections des courbes de perte de stabilité pour $v_2$ et $z_1$ pour diverses valeurs de $\gamma$ . ....	87
4.15	Trajectoires des valeurs propres complexes pour $r = r_2$ et diverses valeurs de $\gamma$ . ....	88

## REMERCIEMENTS

---

Je remercie le professeur Jacques Bélair pour son aide, particulièrement à la révision du mémoire, ainsi que pour le support financier sans lequel ce mémoire n'aurait pas été possible. Un Merci particulier et chaleureux à Marité et à son "rameau de minou" porte-bonheur qui m'a soutenu ces dernières semaines. Les ours savent survivre à la mort, et renaître de la décomposition du gel ovni de grenouille. Je peux alors remercier sincèrement Maëlle sur [4.4.24, 6.2.6), en souhaitant un prolongement sous une autre forme... Je remercie toute la famille, Simon et Annie-Claude pour leurs encouragements m'ayant permis de traverser les naufrages. Je suis très reconnaissant à Tamara, Karim, TERENCE pour les discussions non-mathématiques salutaires, de même qu'à Steven et Fred, Francis, Remi, Calvin et puis à tous ceux que j'ai côtoyés.

# Chapitre 1

---

## PRÉSENTATION DU MODÈLE

### 1.1. LA MÉMOIRE SPATIALE

Les **cellules de lieu** de l'hippocampe ont depuis leur identification par [13] été largement étudiées. Celles-ci s'activent maximalement lors de la présence de l'animal en des endroits particuliers de son environnement, chacune d'entre elles correspondant à un lieu différent.

On appelle **carte spatiale** l'ensemble des cellules de lieu assemblées de sorte que soient voisines dans un plan abstrait les cellules associées à des lieux contigus, indépendamment de l'organisation physique des cellules. Neurophysiologiquement, ils s'agit de neurones pyramidaux se répartissant dans la couche neuronale unique de la corne d'Ammon de l'hippocampe.

Un environnement est appliqué sur la carte spatiale de manière bijective et un grand nombre de telles cartes peuvent être mémorisées dans la même et unique couche de neurones de l'hippocampe. Le mécanisme par lequel une carte entre en fonction est sujet à controverse [16]. Le modèle décrit dans les sections suivantes se concentrera cependant sur le cas d'une carte unique.

L'activité d'un neurone se mesure à sa fréquence de décharge. Dans une carte spatiale, au voisinage d'une cellule de lieu active, les neurones présentent un profil de décharge croissant avec la proximité de la cellule de lieu et symétrique par rapport à celle-ci, alors que les neurones éloignés demeurent inactifs. Cette configuration particulière formant un paquet d'activité localisé se nomme un **champ**

**de lieu.** Le sens psychologique en est que même les yeux fermés, l'animal possède une représentation de sa position.

Dans différents modèles [16], [17], [20], la carte spatiale se traduit mathématiquement par une carte d'attracteurs où les états de mémoire constituent, sous la forme de champs de lieu, des états stables d'activité.

Même en l'absence de signaux extérieurs, un champ de lieu persistera en raison de l'encodage des relations spatiales dans les connexions synaptiques dont les intensités entre cellules de lieu diminuent avec la distance sur la carte spatiale.

La mise à jour de la carte spatiale et du champ de lieu, appelé **intégration de chemin**, est effectuée en intégrant l'information extéroceptive et idiothétique, (concernant le mouvement de l'animal) [16]. Même à défaut de signaux sensitifs suffisants, l'animal doit réussir à s'orienter dans un environnement connu. Des études neurobiologiques [18] confirment l'existence, dans certaines régions sous-corticales, de **cellules de direction** sensibles à l'orientation de la tête de l'animal ainsi que de **cellules de mouvement** indiquant la vitesse, dans le système moteur et les vestibules.

Samsonovich [16] postule, dans son modèle, des cellules intégratrices assurant la mise à jour de la carte en associant l'activité des cellules de direction, de vitesse et de lieu. Cependant, le modèle de Stringer [17] que nous adaptons ci-après, montre qu'une double synapse peut suffire à intégrer toutes ces informations idiothétiques pour effectuer la mise à jour.

L'étude du mécanisme de la mémoire spatiale et de l'intégration de chemin, en plus d'être intéressante pour les neurosciences, débouche également sur des applications en intelligences artificielles pour doter les robots d'une représentation aveugle de leur position.

## 1.2. LES ÉQUATIONS

On fait l'hypothèse que chaque neurone de la carte spatiale est une cellule de lieu, ce qui n'est pas nécessairement le cas neurophysiologiquement, de sorte que, dans un modèle à  $N$  neurones, la carte, carrée, compte  $N$  pixels.

Ces  $N$  neurones forment un réseau gouverné par une équation analogue à l'intégrateur à fuite, où  $V_j$  est, pour le neurone  $j$ , une variable d'activation ne s'identifiant pas au potentiel membranaire :

$$T \frac{dV_i(t)}{dt} = -V_i(t) + \sum_{j=1}^N \int_0^{\infty} J_{ij} \xi(\tau) \phi^P [V_j(t - \tau)] d\tau + I_i, \quad i = 1 \cdots N, \quad (1.2.1)$$

où

$T$  est la constante de temps ;

$\xi(\tau)$  est une distribution de délai, décrite à la section 1.7 ;

$I_i$  est un courant de perception principalement visuelle.

La quantité la plus importante pour l'interprétation du modèle est la fréquence moyenne de décharge  $\phi^P$  de chaque neurone  $j$ , que détermine la variable d'activation  $V_j$  par l'entremise de la fonction sigmoïdale :

$$\phi^P[V_j] = \frac{1}{2} (\tanh[2\beta (V_j - V_{seuil})] + 1), \quad (1.2.2)$$

où  $\beta$  est le gain et  $V_{seuil}$ , le seuil. La fonction  $\phi^P$  à valeur entre 0 et 1, peut être interprétée comme une densité de probabilité de décharge [4].

Un tel modèle qui évite la description des impulsions et suit plutôt l'évolution de la fréquence moyenne de décharge des neurones est appelé un modèle fréquentiel. Celui-ci ne rend pas compte des moments précis de décharge et n'est valide que si les impulsions sont non-corrélées [4].

Les réponses en fréquence  $\phi^P[V_j]$  des neurones  $j$  afférents au neurone  $i$  sont sommées ensuite selon la pondération de leur connexion synaptique  $J_{ij}$  auxquelles s'ajoute le courant entrant  $I_i$  de perception visuelle.

Nous avons ajouté au modèle sans délai de Stringer [17], un délai  $\tau$  distribué suivant  $\xi$  pour tenir compte de l'effet de la non-instantanéité de la communication interneuronale.

Le terme général  $J_{ij}$  de la matrice de connexion totale entre les neurones  $i$  et  $j$  se divise en deux termes :

$$J_{ij} = a J_{ij}^{sym} + b \sum_{k=1}^{N_V} \sum_{l=1}^{N_D} J_{ijkl}^{id} \phi_k^D \phi_l^V, \quad (1.2.3)$$

avec

- a, b, l'amplitude respective des termes symétrique et asymétrique,
- $N_D$ , le nombre de directions, et donc de cellules de directions, considérées,
- $N_V$ , le nombre de vitesses, et donc de cellules de vitesse, considérées,
- $\mathbf{J}^{\text{sym}}$ , la matrice des connexions synaptiques récurrentes (voir la section 1.4),
- $\mathbf{J}^{\text{id}}$ , le tenseur des connexions synaptiques idiothétiques (section 1.5).

Les synapses des connexions récurrentes impliquent les neurones de lieu  $i$  et  $j$  tandis que les doubles synapses dites idiothétiques associent la paire de cellules de lieu  $(i, j)$  à une cellule de direction  $k$  et à une cellule de vitesse  $l$  de fréquences de décharge respectives  $\phi_k^D$  et  $\phi_l^V$ . Neurophysiologiquement, il s'agirait des synapses des fibres moussues rejoignant depuis d'autres structures sous-corticales, les neurones pyramidaux de la corne d'Ammon formant la carte.

Pour la suite, nous limitons le modèle à une vitesse unique  $N_V = 1$  pour simplifier l'expression (1.2.3), l'activité  $\phi^V$  prenant les valeurs de 0 ou 1 selon que le paquet d'activation soit immobile ou en déplacement.

Les  $N_D$  directions  $k$  sont équiréparties sur la circonférence et sont fixes dans le référentiel de la carte spatiale. Quant à la direction  $k_{max}$ , elle désigne la direction visée par l'animal. Le profil de décharge des neurones de direction, représentation interne de la direction du mouvement, est le vecteur de terme

$$\phi_k^D = e^{-\frac{1}{\sigma_D} S_k}, \quad k = 1 \cdots N_D, \quad (1.2.4)$$

où la distance angulaire depuis la direction  $k_{max}$  est

$$S_k = \frac{2\pi}{N_D} |k_{max}(t) - k| \pmod{2\pi}, \quad k = 1 \cdots N_D. \quad (1.2.5)$$

C'est dans la direction  $k_{max}$  que la réponse  $\phi_k^D$  atteint son maximum, de sorte que  $k_{max}$  est la direction optimale de propagation. Si la trajectoire n'est pas rectiligne,  $k_{max}$  évoluera dans le temps, mais selon une échelle beaucoup plus longue que la constante  $T$ . Dès lors, pour l'équation différentielle (1.2.1), les connexions peuvent quand même être approximées comme indépendantes du temps.



Le paramètre  $\sigma_D$  indique la précision de la représentation de la direction du mouvement. La forme exacte du profil de décharge des cellules de direction n'est pas cruciale. Seul importe que ce soit une fonction décroissante de la distance angulaire et nous avons préféré ici l'exponentiel pour sa simplicité, là où Stringer [17] avait opté pour un profil gaussien.

### 1.3. APPRENTISSAGE ET AUTO-ORGANISATION DES CONNEXIONS

Le profil des connexions synaptiques récurrentes permettant de maintenir la localisation du champ de lieu, ainsi que celui des connexions idiothétiques le propageant, ne sont pas donnés a priori, mais résultent plutôt d'un apprentissage de l'environnement par l'animal.

L'algorithme d'apprentissage utilisé par Stringer [17] pour montrer en simulation numérique l'auto-organisation des connexions synaptiques récurrentes ne fait pas appel à l'équation (1.2.1). Les auteurs représentent plutôt la fréquence de décharge selon un profil gaussien pour traduire le paquet d'activation que les signaux visuels induisent sur la carte spatiale. Les connexions récurrentes sont ensuite ajustées par la règle de Hebb de façon à ce que l'ensemble des activations des neurones reproduise le même profil de décharge que celui présenté comme provenant des signaux visuels. La règle de Hebb, qui consiste ici à renforcer les connexions  $J_{ij}$  des neurones  $i$  et  $j$  co-stimulés, s'exprime

$$\Delta J_{ij}^{sym} = k\phi_i^P \phi_j^P, \quad (1.3.1)$$

où  $k$  est une constante arbitraire. Le profil des connexions récurrentes obtenu par Stringer [17] avait l'aspect d'une gaussienne, mais l'important en est la forme qualitative.

L'auto-organisation des connexions idiothétiques s'effectue en déplaçant systématiquement et dans chacune des direction  $k = 1, \dots, N_D$ , le champ de lieu gaussien induit, comme au paragraphe précédent, par les signaux visuels. Cette exploration de l'environnement par l'animal s'accompagne de l'adaptation hebdomadaire des synapses idiothétiques suivant l'équation

$$\Delta J_{ij}^{id} = k\phi_i^P \phi_j^P \phi_k^D, \quad (1.3.2)$$

où  $\phi_k^D$  est le profil de décharge des cellules de direction (1.2.4). Ces connexions associent ainsi le champ de lieu initial  $i$  et le champ de lieu final  $j$  à un déplacement dans la direction  $k$ . Stringer [17] suppose pour cela que les cellules de direction sont déjà organisées et parviennent déjà à rendre compte correctement de la direction de l'animal.

Le profil des connexions idiothétiques se caractérise par une asymétrie. Le sommet est décalé dans la direction de propagation, et la décroissance de l'intensité des connexions est plus douce dans cette direction que dans la direction opposée.

#### 1.4. CONNEXIONS RÉCURRENTES

La section 1.3 nous enseigne non pas que le profil des connexions récurrentes doit être nécessairement de forme gaussienne, mais plutôt qu'il doit être symétrique et atteindre un maximum en son centre, tout en décroissant en s'éloignant de celui-ci. Aussi, par simplicité, nous adoptons un profil exponentiel, sur une carte spatiale carrée, avec la distance

$$d(i, j) = \max(|x_i - x_j|, |y_i - y_j|) \quad (1.4.1)$$

entre les lieux de coordonnées  $(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$  que représentent respectivement les neurones  $i$  et  $j$ , où

$$x_i = (i - 1) \bmod \sqrt{N} + 1, \quad \text{et} \quad y_i = \left[ \frac{i - 1}{\sqrt{N}} \right]^E + 1, \quad (1.4.2)$$

le symbole  $[ \cdot ]^E$  dénotant la partie entière.

Si on considère qu'il n'y a pas de connexion d'un neurone  $i$  à lui-même, i.e d'autoconnexion, le profil se trouve en son centre de sorte que le maximum est plutôt atteint dans le voisinage immédiat de la cellule  $i$ .

Formellement, la matrice de connexion, symétrique, s'écrit donc

$$J_{ij}^{sym} = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\sigma_P} d(i,j)} - h, & \text{pour } i \neq j \\ 0, & \text{pour } i = j, \end{cases} \quad (1.4.3)$$

où le paramètre  $\sigma_P$  contrôle le taux spatial de décroissance de l'intensité des connexions à la cellule de lieu  $i$  et, par conséquent, le diamètre du champ de lieu

correspondant. Le terme soustractif  $h$  représente un feedback global inhibiteur transmis par les interneurons gabaergiques et assurant une compétition entre les neurones pyramidaux. Les connexions récurrentes sont donc, au total, excitatrices à courte distance et inhibitrices à longue distance.

Les graphiques 1.1 et 1.2 illustrent l'équation (1.4.3) pour la cellule de lieu  $i = 210$  avec  $N = 400$ , et l'inhibition

$$h = \frac{1}{2} e^{\frac{-1}{\sigma_P}},$$

le premier dressant le profil de l'entièreté des neurones de la carte, tandis que le second s'attarde uniquement à la rangée centrale.

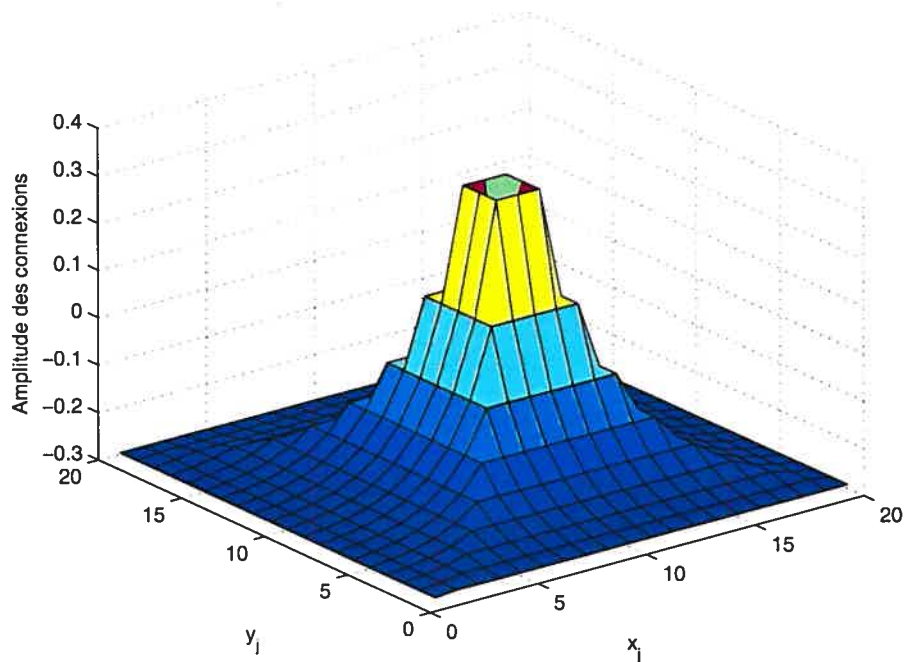


FIG. 1.1. Graphique du profil de connexion des cellules  $j$  avec la cellule  $i = 210$ , représenté dans le plan  $x_j, y_j$  de la carte spatiale avec  $N = 400$  et  $\sigma_P = 2$ , pour  $j = 1 \dots N$ , le couple  $(x_j, y_j)$  étant le lieu correspondant à la cellule  $j$ . La cellule  $i = 210$  est associée à  $(x_i = 10, y_i = 11)$ , au centre de la carte et l'auto-connexion  $y$  est nulle.

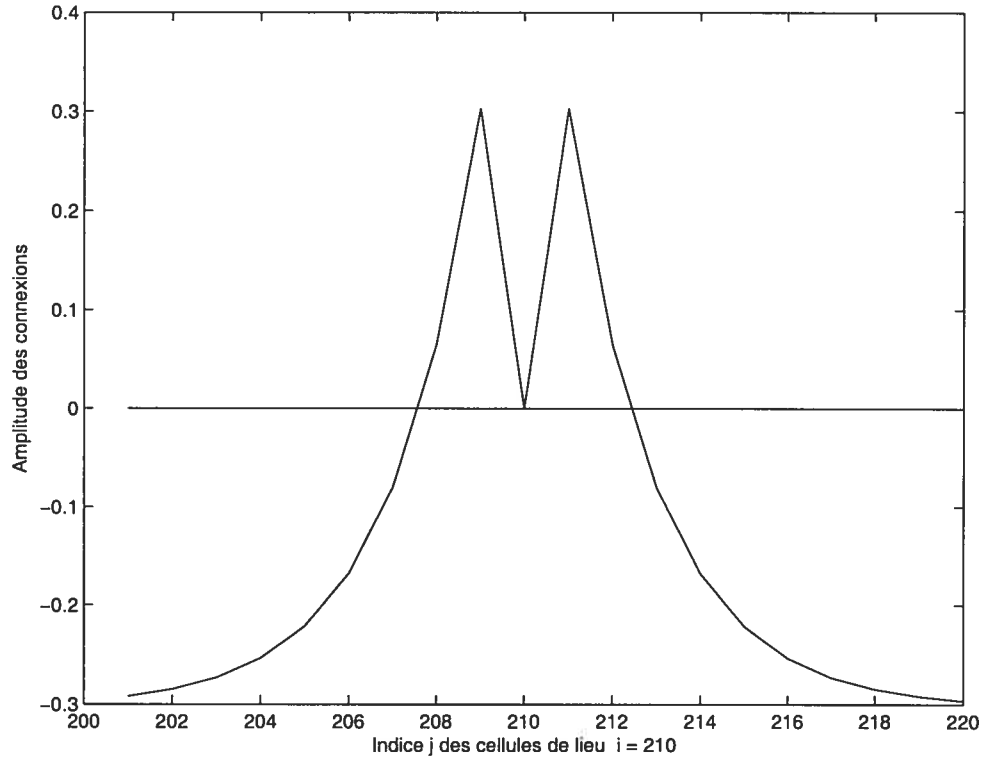


FIG. 1.2. Graphique du profil de connexion récurrentes avec la cellule de lieu  $i = 210$  au centre de la rangée  $j = 201 \cdots 220$ , pour  $N = 400$  et  $\sigma_P = 2$ .

## 1.5. CONNEXIONS IDIOTHÉTIQUES

Ne pouvant reproduire simplement le profil exact des connexions idiothétiqes obtenu par Stringer [17] à la section 1.3, nous en exprimons équationnellement les principales caractéristiques au moyen de fonctions exponentielles.

En se limitant aux quatre directions cardinales,  $N_D = 4$ , on modélise donc la matrice des connexions idiothétiqes pour la direction des  $x$  positifs correspondant à  $k = 1$  par

$$\mathbf{J}_{ijk=1}^{\text{id}} = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\sigma_1}|x_{i+1}-x_j|}, & \text{si } x_j \geq x_i \text{ et } y_i = y_j \text{ et } x_i < \sqrt{N} \\ e^{\frac{-1}{\sigma_2}|x_{i+1}-x_j|}, & \text{si } x_j < x_i \text{ et } y_i = y_j \text{ et } x_i < \sqrt{N} \\ 0, & \text{si } y_i \neq y_j \text{ ou } x_i = \sqrt{N}, \end{cases} \quad (1.5.1)$$

où  $x_i$  et  $y_i$  sont donnés à l'équation (1.4.2).

Si la cellule de lieu  $i$  n'est pas associée à l'extrémité d'une rangée d'où l'on ne peut avancer (i.e.  $x_i < \sqrt{N}$ ), toute cellule  $j$  correspondant à la même rangée que la cellule de lieu  $i$  (i.e.  $y_i = y_j$ ) établit des connexions. Le sommet du profil est décalé d'une cellule dans la direction de propagation. La décroissance au taux  $\sigma_1$  de l'intensité des connexions est lente dans la direction de propagation et rapide au taux  $\sigma_2$  dans la direction opposée.

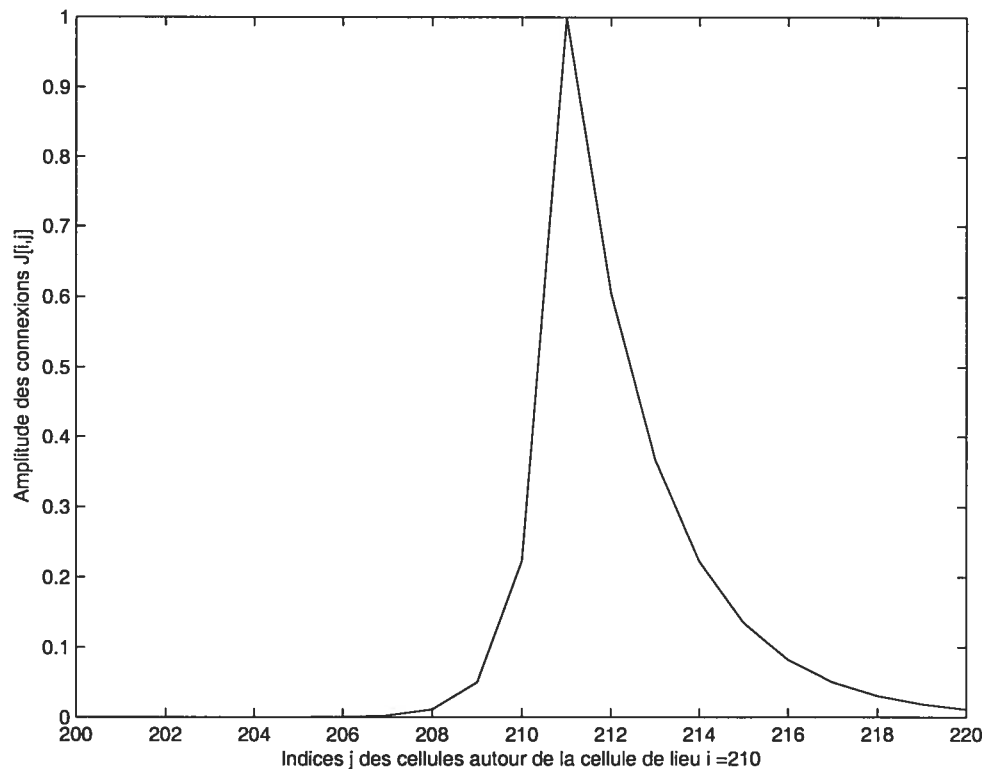


FIG. 1.3. Graphique du profil de connexion idiothétique avec la cellule de lieu  $i = 210$  au centre de la rangée  $j = 201 \dots 220$ , pour  $N = 400$ , pour la direction  $k = 1$ . Avec les valeurs de paramètre  $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma_2 = 3$

Le graphique 1.3 illustre le profil de connexion idiothétique dans la direction des  $x$  positifs, c'est-à-dire  $k = 1$ , décrit à l'équation (1.5.1). Le tracé n'indique que les connexions entre la cellule de lieu  $i$  fixée et les cellules situées sur la même rangée, puisque les connexions entre cellules de rangées différentes sont nulles.

Les profils des autres directions sont symétriques. Il suffit d'interchanger les  $x$  et les  $y$  de l'expression (1.5.1), pour la transformer en la matrice  $\mathbf{J}_{ijk=2}^{\text{id}}$  des connexions idiotrhétiques pour la direction des  $y$  positifs,  $k = 2$ .

La direction des  $x$  négatifs,  $k = 3$ , s'obtient en permutant chaque cellule d'une rangée de la carte autour du centre de la rangée.

$$\mathbf{J}_{ijk=3}^{\text{id}} = \mathbf{P}_x \mathbf{J}_{ijk=1}^{\text{id}}, \quad (1.5.2)$$

où la matrice de permutation est définie par

$$\mathbf{P}_x = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_{\sqrt{N}} & \mathbf{0}_{\sqrt{N}} & \mathbf{0}_{\sqrt{N}} \\ \mathbf{0}_{\sqrt{N}} & \ddots & \mathbf{0}_{\sqrt{N}} \\ \mathbf{0}_{\sqrt{N}} & \mathbf{0}_{\sqrt{N}} & \mathbb{J}_{\sqrt{N}} \end{pmatrix}, \quad (1.5.3)$$

avec  $\mathbb{J}_{\sqrt{N}}$  désignant la matrice anti-identité de taille  $\sqrt{N}$ . La diagonale de blocs  $\mathbb{J}_{\sqrt{N}}$  représente les profils de connexions de chacune des rangées telles que  $x_i = x_j$  et le matrice anti-identité effectue la permutation demandée.

De manière analogue, la matrice  $\mathbf{J}_{ijk=4}^{\text{id}}$  des connexions idiotrhétiques pour la direction des  $y$  négatifs,  $k = 4$  provient de la permutation de chaque cellule d'une colonne de la carte autour du centre de cette colonne, de sorte que

$$\mathbf{J}_{ijk=4}^{\text{id}} = \mathbf{P}_y \mathbf{J}_{ijk=2}^{\text{id}}, \quad (1.5.4)$$

où la matrice de permutation  $\mathbf{P}_y$  est

$$\mathbf{P}_y = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\sqrt{N}} & \mathbf{0}_{\sqrt{N}} & \mathbb{I}_{\sqrt{N}} \\ \mathbf{0}_{\sqrt{N}} & \ddots & \mathbf{0}_{\sqrt{N}} \\ \mathbb{I}_{\sqrt{N}} & \mathbf{0}_{\sqrt{N}} & \mathbf{0}_{\sqrt{N}} \end{pmatrix}, \quad (1.5.5)$$

avec  $\mathbb{I}_{\sqrt{N}}$ , la matrice identité de taille  $\sqrt{N}$ .

## 1.6. SIMULATION DES ÉTATS DE MÉMOIRE SPATIALE

L'article de Stringer [17] montrait que les valeurs des connexions auto-organisées par l'algorithme d'apprentissage permettaient la représentation des champs de lieu ainsi que leur propagation sur la carte. Nous vérifions ici qu'avec les profils de connexions définis en équations aux sections 1.4 et 1.5, le modèle (1.2.1), sans

délai, parvient à reproduire la mémoire spatiale de même que l'intégration de chemin.

L'algorithme du test se déroule comme suit : (1) repos de l'animal, sans vision (i.e  $I_{ij} = 0, \forall i$ ), où l'équilibre trivial se stabilise; (2) poursuite du repos avec un courant de vision  $I_i$  d'amplitude  $c$  reflétant la forme du paquet d'activation; (3) l'animal se repose en fermant les yeux ( $I_i = 0$ ), un nouveau paquet d'activation se stabilise en se fondant sur les connexions synaptiques récurrentes; (4) l'animal exécute, sans signaux visuels, un trajet dans son environnement; étant donné  $k_{max}$ , sa direction visée, seules les connexions idiothétiques guident le déplacement du champ de lieu sur la carte.

Nous verrons par la proposition (2.3.1) que les états de mémoire du système à délai (1.2.1) sont des états de mémoire du système sans délai, puisque l'ajout d'un délai n'affecte pas les points d'équilibre mais seulement leur stabilité.

Le graphique 1.4 illustrant la propagation d'un paquet d'activation vers les  $x$  positifs, depuis sa position initiale  $x_0 = 8, y_0 = 4$ , a été réalisé avec la distribution de Dirac  $\xi(\tau) = \delta(\tau)$  et les paramètres suivants :

$$N = 400, \quad N_D = 4, \quad V_{seuil} = 30, \quad \beta = 0.2, \quad T = 20, \quad a = \frac{1600}{N}, \quad \sigma_P = 2, \\ b = 400a, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_2 = 3, \quad \sigma_D = \frac{\pi}{9}, \quad h = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{\sigma_P}}.$$

## 1.7. LES DISTRIBUTIONS DE DÉLAI

Le délai ajouté au modèle (1.2.1) peut être fini ou non, pourvu que

$$\int_0^{\infty} \xi(\tau) d\tau = 1 \tag{1.7.1}$$

et que sa moyenne soit finie

$$\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \tau \xi(\tau) d\tau < \infty. \tag{1.7.2}$$

Nous examinerons plus particulièrement au chapitre 3 les frontières de stabilité avec les distributions suivantes :

la **distribution uniforme** sur un intervalle  $[0, d]$  :

$$\xi(\tau) = \frac{1}{d}, \quad \text{de moyenne } \bar{\tau} = \frac{d}{2}; \tag{1.7.3}$$

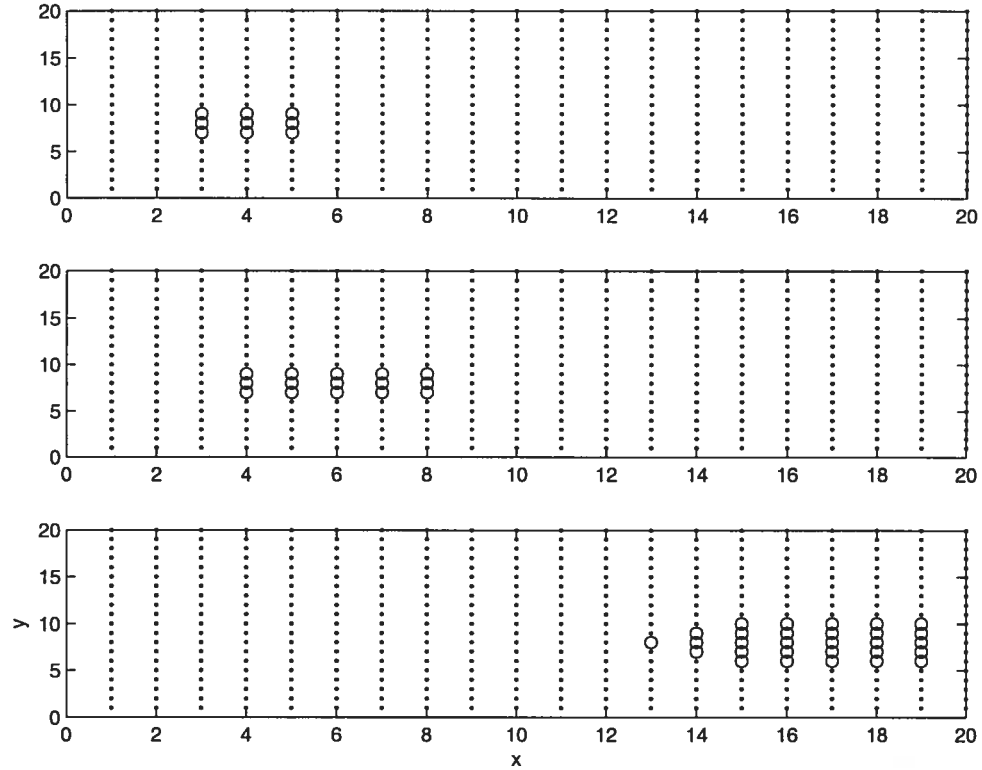


FIG. 1.4. Propagation du paquet de mémoire sur la carte spatiale  $20 \times 20$  dans la direction des  $x$  positifs,  $k_{max} = 1$ . Les activités  $\Phi_P$  proches de 1 sont marquées de cercles, et celles proches de 0, de points.

la **distribution triangulaire** sur l'intervalle  $[0, d]$  :

$$\xi(\tau) = \frac{2}{d} \left(1 - \frac{\tau}{d}\right), \quad \text{de moyenne } \bar{\tau} = \frac{d}{3}; \quad (1.7.4)$$

la **distribution exponentielle** sur l'intervalle  $[0, \infty)$  :

$$\xi(\tau) = \sigma e^{-\sigma\tau}, \quad \text{de moyenne } \bar{\tau} = \frac{1}{\sigma}; \quad (1.7.5)$$

la **distribution gamma** de paramètres  $n$  et  $\sigma$  sur l'intervalle  $[0, \infty)$  :

$$\xi(\tau) = \frac{\sigma^{n+1}}{n!} \tau^n e^{-\sigma\tau}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.7.6)$$

Son délai moyen s'exprime comme  $\bar{\tau} = \frac{n+1}{\sigma}$  et sa variance est  $\frac{n+1}{\sigma^2}$ .

La distribution triangulaire est celle des distances présentes entre chaque paire de points dans une population de points alignés.



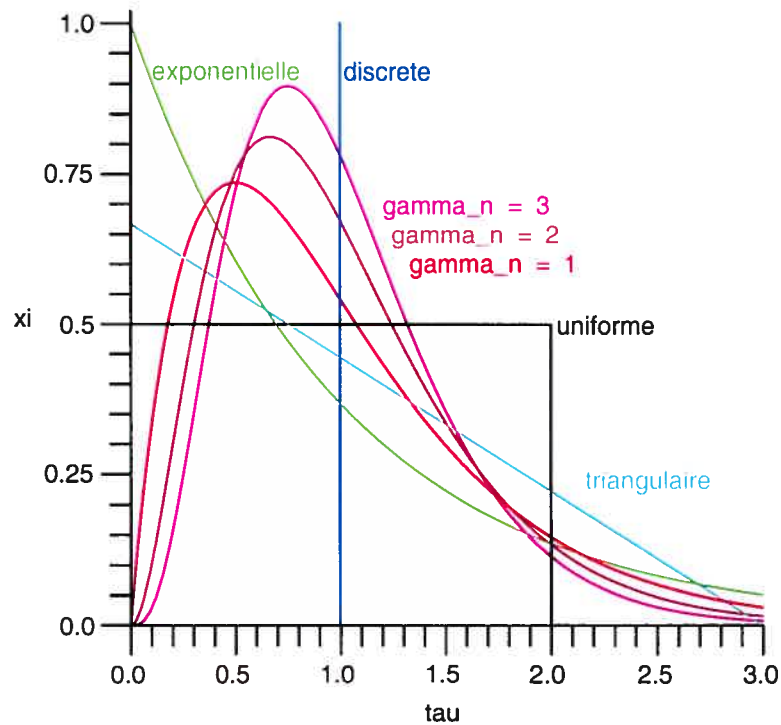


FIG. 1.5. Comparaison, à délai moyen égal, des distributions de délai ici présentées. L'axe des délais  $\tau$  est normalisé par rapport au délai moyen  $\bar{\tau}$ .

On sait que le tapis de neurones pyramidaux que forme l'hippocampe déroulé est rectangulaire. À l'aide d'un court programme Matlab, nous avons calculé les distributions  $\rho_{ab}$  exactes des distances interneuronales pour certains formats  $a \times b$  de tapis, en gardant un nombre total de neurones égal à  $N = ab = 400$ , puis en normalisant les résultats.

Le graphique 1.6 affiche ces distributions. On remarque que plus le tapis est de format allongé, plus la distribution se rapproche du triangle (1.7.4), tandis qu'un format tendant vers le carré, voit la distribution se symétriser en même temps que se hausse le sommet. La succession de ces distributions  $\rho_{ab}$  ne manque pas d'évoquer la suite des distributions gamma alors que, pour un tapis carré, la distribution ressemble au sommet d'une gaussienne.

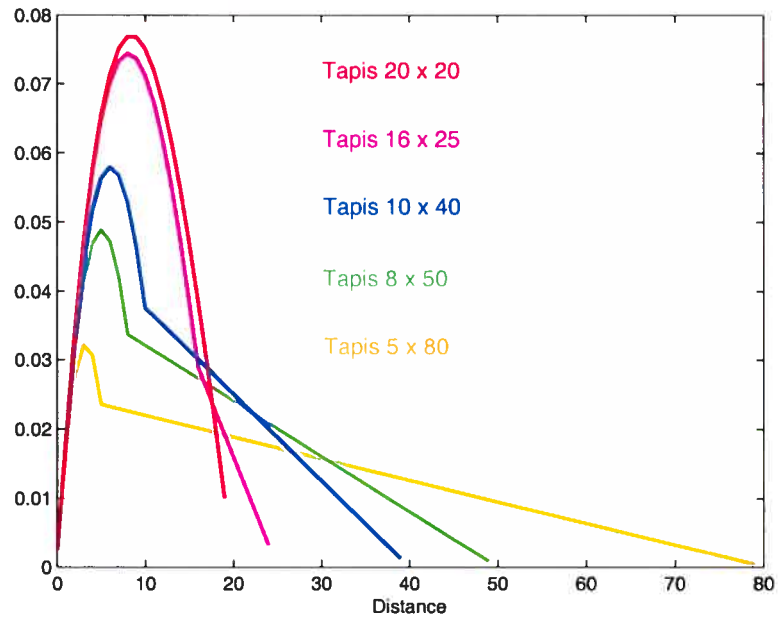


FIG. 1.6. Distributions exactes des distances entre neurones pour différents formats de tapis de 400 neurones.

Nous avons ensuite cherché à comparer ces distributions exactes avec les distributions exponentielle et gamma. Les graphiques 1.7 et 1.8 montrent les ajustements des distributions exactes de formats  $5 \times 80$  et  $16 \times 25$ .

L'ajustement a consisté à rechercher les paramètres  $n$  et  $\sigma$  qui minimisent, sur l'intervalle  $]0, 2b]$ , la fonction

$$V(n, \sigma) = \sum_{s=0}^{2b} |\xi_{n,\sigma}(s) - \rho_{ab}(s)| \quad (1.7.7)$$

représentant une approximation de l'aire entre  $\rho_{ab}$  et la distribution idéalisée gamma ou exponentielle, dénotée  $\xi_{n,\sigma}$ . Pour  $\rho_{5,80}$ , on a  $n = 0$  et  $\sigma = 0,032$  avec  $V = 29\%$  alors que le résultat concorde mieux pour  $\rho_{16,25}$ , avec  $V = 9\%$  pour  $n = 2.8$  et  $\sigma = 0,33$ , où  $\sigma$  est en  $[\text{Nombre de distances interneuronales}]^{-1}$ . Pour convertir  $\sigma$  en unité de  $[\text{Temps}]^{-1}$ , la vitesse de conduction des axones des neurones de la corne d'Ammon peut être évaluée à  $0,5m^{-1}$  ([3]) tandis que la distance interneuronale effective estimée est de l'ordre de  $10\mu m$  [5].

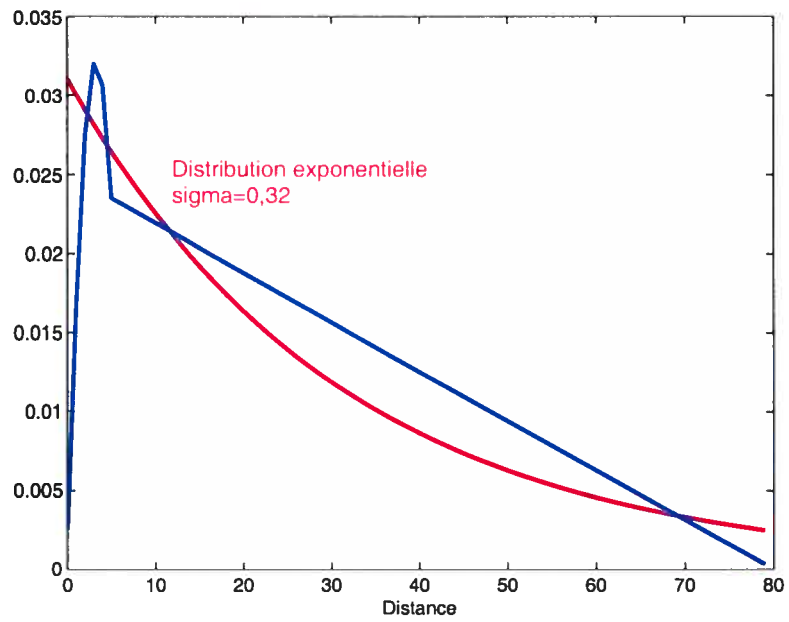


FIG. 1.7. Ajustement d'une exponentielle sur la distribution des distances du tapis de neurones de format  $5 \times 80$ .

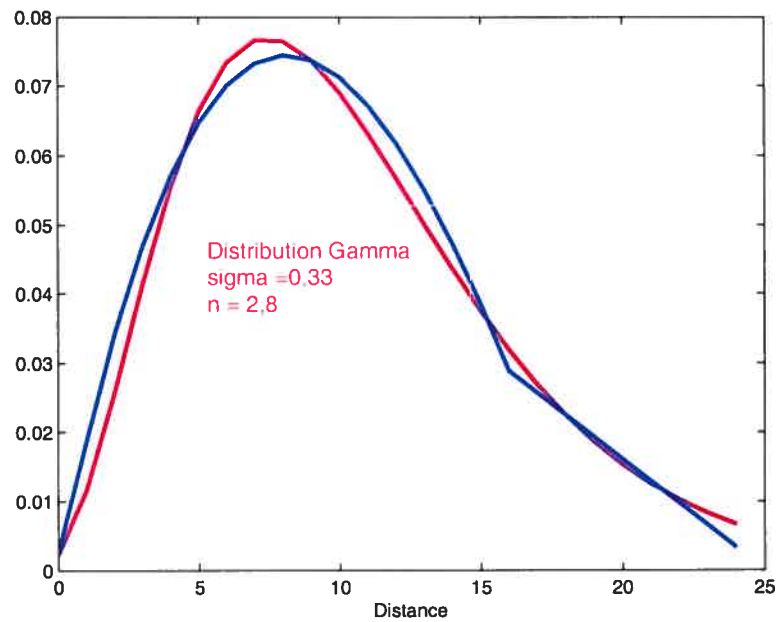


FIG. 1.8. Ajustement d'une gamma sur la distribution des distances du tapis de neurones de format  $16 \times 25$ .

Aussi grossières soient-elles, les approximations des distributions  $\rho_{ab}$  par les distributions exponentielles et gamma apparaissent donc physiologiquement pertinentes. Quant à la distribution uniforme, elle est étudiée pour la comparaison.

## Chapitre 2

---

### ANALYSE DE STABILITÉ GLOBALE

#### 2.1. INTRODUCTION

L'activité à l'équilibre du réseau de neurones correspond à un état de mémoire, qui devra être unique et globalement stable pour ne pas être ambigu.

Gopalsamy et He [6] ont étudié la stabilité asymptotique globale d'un réseau de Hopfield asymétrique pour des délais discrets ainsi que pour des délais distribués de la forme

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = -b_i U_i(t) + \sum_{j=1}^N a_{ij} f \left( \beta \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) U_j(s) ds \right) + F_i(t), \quad i = 1, \dots, N.$$

Pour notre part, nous devons plutôt étudier une équation à délai distribué dont la fonction d'activation  $g$  se trouve dans l'intégrale.

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = -b_i U_i(t) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s) g(\beta U_j(s)) ds + F_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.1.1)$$

On montrera par la méthode de la fonctionnelle de Lyapounov que ce système, plus général que les équations de la mémoire spatiale dotées des connexions (1.2.3) introduites précédemment, possède sous certaines hypothèses un point d'équilibre unique et globalement asymptotiquement stable. Le réseau correspondant associera alors de façon univoque la stimulation externe  $F = (F_1, F_2, \dots, F_N)$  à un état de mémoire  $U^*$ .

## 2.2. HYPOTHÈSES

En référant à la théorie fondamentale sur les équations à délai infini introduite à la remarque A.2.1, la stabilité globale du système (2.1.1) sera traitée sous les hypothèses suivantes :

- (H1)  $F_i(t) = c_i$  : la stimulation externe est considérée comme constante pendant la convergence de  $U_i(t)$  vers l'équilibre ;
- (H2) le noyau  $K_{ij} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\forall i, j = 1, 2, \dots, N$ , pour  $h < \infty$ ,
- (i) est continu par morceau,
  - (ii)  $\int_0^\infty K_{ij}(s) ds = 1$ ,
  - (iii)  $\int_0^\infty s K_{ij}(s) ds < \infty$ ;
- (H3) la fonction d'activation  $g(x)$
- (i) est continue et monotone croissante sur  $(-\infty, \infty)$ ,
  - (ii)  $g'(x) < 1$  si  $x \neq 0$   
 $g'(x) = 1$  si  $x = 0$  ;
- (H4)  $\beta > 0$  et  $b_i > 0$ , pour  $i = 1, 2, \dots, N$ .

## 2.3. EXISTENCE ET UNICITÉ DE L'ÉQUILIBRE

Sous les hypothèses de la section précédente, nous présentons une condition d'existence et d'unicité du point d'équilibre découlant du lemme suivant démontré dans Gopalsamy et He[6].

**Lemme 2.3.1** (Existence et unicité de l'équilibre de l'équation sans délai).

*Soit l'équation différentielle sans délai de la forme*

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -b_i u_i(t) + \sum_{j=1}^N a_{ij} g(\beta u_j) + F_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3.1)$$

*satisfaisant aux hypothèses H1, H3, H4.*

*Si*

$$\max_{1 \leq j \leq N} \left( \frac{\beta}{b_j} \sum_{i=1}^N |a_{ij}| \right) < 1, \quad (2.3.2)$$

*alors le système (2.3.1) possède un unique point d'équilibre  $u^* = (u_1^*, u_1^*, \dots, u_N^*)$ .*

*pour tout  $F = (F_1, F_2, \dots, F_N)$  donné,*

*i.e. le système  $b_i u_i^* = \sum_{j=1}^N a_{ij} g[\beta u_j^*] + F_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  n'admet qu'une unique solution  $u^*$ .*

**Proposition 2.3.1** (Existence et unicité de l'équilibre de l'équation à délai). *Sous les hypothèses H1 à H4 et la condition (2.3.2), l'équation à délai distribué (2.1.1) possède le même point d'équilibre unique  $u^*$  que l'équation sans délai (2.3.1), i.e. le système*

$$b_i U_i^* = \sum_{j=1}^N a_{ij} \int_0^{\infty} K_{ij}(\tau) g[\beta U_j^*] d\tau + F_i \quad (2.3.3)$$

à pour unique solution  $U^* = (U_1^*, U_1^*, \dots, U_N^*) = u^*$ .

**Démonstration.** Puisque  $g[\beta U_j]$  est indépendant de  $t$ , l'équation de l'équilibre (2.3.3) devient, en utilisant l'hypothèse H2,

$$\begin{aligned} b_i U_i^* &= \sum_{j=1}^N a_{ij} g[\beta U_j^*] \int_0^{\infty} K_{ij}(\tau) d\tau + F_i \\ &= \sum_{j=1}^N a_{ij} g[\beta U_j^*] + F_i \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Le lemme (2.3.1) prouve alors immédiatement la proposition.  $\square$

## 2.4. STABILITÉ ASYMPTOTIQUE GLOBALE

Plutôt que d'utiliser le lemme de Barbalat comme le font Gopalsamy et He [6], nous appliquons directement la méthode de la fonctionnelle de Lyapounov telle qu'elle est présentée à la section (A.4).

**Proposition 2.4.1.** *Soit le point d'équilibre  $u^*$  du système (2.1.1).*

*Si les hypothèses H1 à H4 ainsi que la condition (2.3.2) sont respectées, alors le point d'équilibre  $u^*$  est globalement uniformément asymptotiquement stable.*

**Démonstration.** Réécrivons, pour  $i = 1, 2, \dots, N$ , l'équation (2.1.1) en posant  $\tau = t - s$  :

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = -b_i U_i(t) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \int_0^{\infty} K_{ij}(\tau) g[\beta U_j(t - \tau)] d\tau + F_i \quad (2.4.1)$$

Posons  $y_i(t) = U_i(t) - u_i^*$ , de sorte que l'on obtient le système

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -b_i y_i(t) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \int_0^\infty K_{ij}(\tau) \{g[\beta U_j(t-\tau)] - g[\beta u_j^*]\} d\tau.$$

Par le théorème de la moyenne, il existe un certain  $\theta_{ij}(t)$  entre  $\beta U_j(t-\tau)$  et  $\beta u_j^*$  tel que  $g[\beta U_j(t-\tau)] - g[\beta u_j^*] = g'(\theta_{ij}(t)) \beta \{U_j(t-\tau) - u_j^*\}$ .

Par conséquent, le système devient enfin

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -b_i y_i(t) + \sum_{j=1}^N a_{ij} \int_0^\infty K_{ij}(\tau) y_j(t-\tau) \beta \theta_{ij}(t) d\tau. \quad (2.4.2)$$

Il suffit donc de montrer, sous les hypothèses H1 à H4, la stabilité asymptotique globale uniforme du point d'équilibre  $y^* = 0$  de l'équation (2.4.2) en appliquant les théorèmes (A.4.1) et (A.4.2). Prenons la même fonctionnelle de Lyapounov que Gopalsamy dans [6] :

$$V(t, y) = \sum_{i=1}^N \left( |y_i(t)| + \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \beta \int_{t-\tau}^t |y_j(s)| ds \right). \quad (2.4.3)$$

On borne la dérivée de (2.4.3) en utilisant la condition (2.3.2) ainsi que les hypothèses H1 à H4 (voir [6]) :

$$\dot{V}(t, y) \leq -\mu \sum_{i=1}^N |y_i(t)|, \quad \text{où } \mu = \min_{1 \leq i \leq N} \left( b_i \left( 1 - \max_{1 \leq j \leq N} \left( \frac{\beta}{b_j} \sum_{i=1}^N |a_{ij}| \right) \right) \right).$$

On sait que pour un espace linéaire normé fini, toutes les normes sont équivalentes. Choisissons donc  $|y(t)| = \sum_{i=1}^N |y_i(t)|$  comme norme de  $\mathbb{R}^N$ . Puisque  $|\phi(0)| = |y(t)|$ , on a

$$\dot{V}(t, y) \leq -\omega_3(|\phi(0)|) \quad \text{avec } \omega_3(x) = -\mu x. \quad (2.4.4)$$

On borne aussi inférieurement la fonctionnelle de Lyapounov (2.4.3) :

$$V(t, y) \geq \sum_{i=1}^N |y_i(t)| = |y(t)| = \omega_1(|y(t)|). \quad (2.4.5)$$



Observons que pour  $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{t-\tau}^t |y_j(s)| ds &= \int_{t-\tau}^t |y_j(s)| \frac{e^{-\alpha(s-t)}}{e^{-\alpha(s-t)}} ds \\
&\leq \max_{s \in [t-\tau, t]} (e^{-\alpha(s-t)}) \int_{t-\tau}^t \frac{|y_j(s)|}{e^{-\alpha(s-t)}} ds \\
&= e^{\alpha\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{|y_j(s)|}{e^{-\alpha(s-t)}} ds.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Ce qui entraîne qu'en posant  $a' = \max_{i \leq N, j \leq N} |a_{ij}|$  et  $\gamma = a' \beta e^{\alpha\tau}$ ,

$$\begin{aligned}
V(t, y) &\leq |y(t)| + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \beta \int_{t-\tau}^t |y_j(s)| ds \\
&\leq |y(t)| + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \beta e^{\alpha\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{|y_j(s)|}{e^{-\alpha(s-t)}} ds \\
&\leq |y(t)| + a' \beta e^{\alpha\tau} \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau}^t \sum_{j=1}^N \frac{|y_j(s)|}{e^{-\alpha(s-t)}} ds \\
&\leq |y(t)| + \gamma \sum_{i=1}^N \sup_{s \in [t-\tau, t]} \sum_{j=1}^N \frac{|y_j(s)|}{e^{-\alpha(s-t)}}
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

$$\leq (\gamma N + 1) \|\phi\|_e = \omega_2(\|\phi\|_e). \tag{2.4.8}$$

La dernière ligne vient de ce qu'avec un délai infini,

$$\begin{aligned}
\sup_{s \in [t-\tau, t]} \left( \frac{\sum_{j=1}^N |y_j(s)|}{e^{-\alpha(s-t)}} \right) &= \sup_{s \in [t-\tau, t]} \left( \frac{|y(s)|}{e^{-\alpha(s-t)}} \right) = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \left( \frac{|y(t+\theta)|}{e^{-\alpha\theta}} \right) \\
&\leq \sup_{\theta \leq 0} \left( \frac{|y(t+\theta)|}{e^{-\alpha\theta}} \right) \\
&= \sup_{\theta \leq 0} \frac{|y_t(\theta)|}{e^{-\alpha\theta}} = \|y_t\|_e = \|\phi\|_e
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

et que  $|y(t)| \leq \|y_t\|_e$ .

On vérifie que les fonctions  $\omega_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont continues non-décroissantes telles que  $\omega_i(0) = 0$  et  $\omega_i(r) > 0$  pour  $r > 0$ . Par (2.4.5), (2.4.8), (2.4.4) et le théorème (A.4.1), on conclut alors que l'équilibre  $y^* = 0$  de l'équation (2.4.2) est uniformément asymptotiquement stable. De plus, on voit que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \omega_1(x) = \infty.$$

Ce qui par le théorème (A.4.2) complète la démonstration de la stabilité asymptotique globale de  $y^* = 0$  et par conséquent, le point d'équilibre  $u^*$  du système (2.1.1) est globalement uniformément asymptotiquement stable.  $\square$

## 2.5. APPLICATION AU MODÈLE PARTICULIER

Reformulons les résultats précédents en termes du modèle (1.2.1).

Les points d'équilibre  $V^*$  s'expriment matriciellement sous la forme

$$V^* = \mathbf{J}\Phi^P[V^*] + I \quad (2.5.1)$$

avec  $\mathbf{J} = [J_{ij}]$ ,  $I = (I_1, \dots, I_N)$ , et  $\Phi^P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{+N}$ , tel que

$$(V_1^*, \dots, V_N^*) \rightarrow (\phi^P(V_1^*), \dots, \phi^P(V_N^*)).$$

**Corollaire 2.5.1.** *Soit le système (1.2.1) représentant le modèle. Il possède un unique point d'équilibre  $V^*$  globalement uniformément asymptotiquement stable à la condition que*

$$\beta \max_{1 \leq j \leq N} \left( \sum_{i=1}^N |J_{ij}| \right) < 1. \quad (2.5.2)$$

**Démonstration.** Exprimons l'équation du modèle (1.2.1) sous la forme de l'équation (2.4.1) afin de vérifier les hypothèses H1 à H4 dans ce cas particulier.

Soit  $K_{ij}(\tau) = \xi(\tau)$  une distribution respectant (H2).

En posant  $U_j(t) = V_j(t) - V_{seuil}$ , on dégage la relation liant les fonctions d'activation des deux systèmes d'équations :

$$\phi^P[V_j] = \frac{1}{2} \tanh[2\beta(V_j - V_{seuil}) + 1] = g(\beta U_j) \quad (2.5.3)$$

$$\text{où } g(x) = \frac{1}{2} \tanh[2x + 1] \text{ vérifie bien } g'(x) \begin{cases} = 1, & \text{si } x = 0 \\ < 1, & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad (\text{H3})$$

En substituant  $V_j = U_j + V_{seuil}$ , dans (2.1.1) on obtient enfin l'équation (2.4.1),

$$\text{où } a_{ij} = \frac{J_{ij}}{T}, \quad b_i = \frac{1}{T} > 0 \quad (\text{H4}),$$

et  $F_i = \frac{I_i - V_{seuil}}{T} = \text{une constante. (H1)}$  La conclusion du corollaire découle directement des propositions (2.4.1) et (2.3.1).  $\square$

# Chapitre 3

---

## ÉTUDE DE STABILITÉ LOCALE

### 3.1. INTRODUCTION

La linéarisation du système (1.2.1) autour de ces points d'équilibre  $V^*$  permet l'analyse de la stabilité locale par l'étude des valeurs propres de l'équation caractéristique. Nous présentons d'abord des conditions simples garantissant la stabilité, avant de mener une étude plus précise de la frontière de stabilité, pour chacune des distributions de délai de la section (1.7). Les régions de stabilité obtenues sont alors comparées entre elles.

### 3.2. LINÉARISATION ET ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

Localement, autour d'un point d'équilibre  $\mathbf{V}^* = (V_1^*, \dots, V_N^*)$ , le système (1.2.1) apparaît linéarisé, et se réécrit en notation vectorielle sous la forme

$$T\dot{\mathbf{V}}(t) = -\mathbf{V}(t) + \mathbf{A} \int_0^d \xi(\tau) \mathbf{V}(t - \tau) d\tau, \quad (3.2.1)$$

où  $\mathbf{A} = \mathbf{J} \text{Jac} \Phi^{\mathbf{P}}|_{\mathbf{V}^*}$ . La matrice  $\mathbf{J}$ ,  $N \times N$ , représente les connexions  $J_{ij}$  et  $\text{Jac} \Phi^{\mathbf{P}}|_{\mathbf{V}^*}$  est la matrice jacobienne,  $N \times N$ , de la fonction d'activation, évaluée au point d'équilibre, et dont les éléments sont les dérivées partielles

$$\left. \frac{\partial \phi^{\mathbf{P}} [V_i]}{\partial V_j} \right|_{\mathbf{V}^*} = \begin{cases} \beta \text{sech}^2 [2\beta (V_j^* - V_{seuil})], & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}, \text{ pour } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

En particulier, s'il existe un point d'équilibre  $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}_{seuil}$ , la matrice  $\mathbf{A}$  est alors réduite à  $\mathbf{A} = \beta \mathbf{J}$ .

La stabilité du système non-linéaire (1.2.1) en  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^*$  est équivalente à celle de la solution nulle de l'équation linéarisée (3.2.1). En substituant  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{c}e^{\lambda t}$  dans cette expression, on obtient l'équation caractéristique

$$\Delta(\lambda) = \det \left[ (T\lambda + 1)I - \mathbf{A} \int_0^d \xi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau \right] = 0, \quad (3.2.2)$$

où  $I$  est la matrice identité de dimension  $N$ .

On sait de par le théorème (A.3.1), que l'analyse des valeurs propres  $\lambda$  de l'équation caractéristique (3.2.2) indique la stabilité de l'équation (3.2.1).

Le lemme qui suit réduira l'étude des valeurs propres de (3.2.2) à celles de l'équation caractéristique d'une équation scalaire. Bélair dans [1] avait procédé de façon semblable pour établir la frontière de stabilité d'un réseau de Hopfield de dimension arbitraire avec délai discret.

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $\mathbf{A} = \mathbf{J} \text{Jac} \Phi^{\mathbf{P}}|_{\mathbf{v}^*}$  et soit l'équation caractéristique scalaire*

$$D(\lambda) = T\lambda + 1 - \mu \int_0^d \xi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau = 0. \quad (3.2.3)$$

*La solution nulle de l'équation (3.2.1) est uniformément asymptotiquement stable, si et seulement si, pour toutes valeurs propres  $\mu$  de  $\mathbf{A}$ , l'équation caractéristique scalaire  $D(\lambda)$  est stable*

**Démonstration.** Considérons l'équation caractéristique (3.2.2),  $\Delta(\lambda) = 0$ . En divisant l'argument du déterminant par  $\int_0^d \xi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau$ , celle-ci devient

$$\Delta(\lambda) = \det \left[ \mathbf{A} - \frac{(T\lambda + 1)I}{\int_0^d \xi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau} \right] = 0. \quad (3.2.4)$$

On en déduit que les  $\mu_i = \frac{(T\lambda + 1)I}{\int_0^d \xi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau}$ ,  $i = 1 \dots N$ , sont les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  lorsque les  $\lambda$  sont les valeurs propres de l'équation caractéristique (3.2.2). Il s'ensuit donc que l'équation caractéristique  $\Delta(\lambda) = 0$  est équivalente au système

$$D_i(\lambda) = T\lambda + 1 - \mu_i \int_0^d \xi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau = 0, \quad i = 1 \dots N, \quad (3.2.5)$$

où  $\mu_i \in \mathbb{C}$ .

De cette équivalence, on tire que la condition de stabilité (condition (1) du théorème (A.3.1)) est vérifiée pour la solution nulle de l'équation linéarisée (3.2.1) si et seulement si, pour toutes les valeurs  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , les valeurs propres  $\lambda$  de l'équation caractéristique scalaire  $D_i(\lambda)$  sont toutes négatives.  $\square$

Ainsi, il nous suffira dans les sections suivantes de chercher des conditions  $C$  sur le paramètre  $\mu$  assurant la stabilité de l'équation scalaire, pour conclure par le lemme (3.2.1) à la stabilité du système linéarisé dès que toutes les valeurs propres  $\mu$  de  $\mathbf{A}$  satisferont les conditions  $C$ .

### 3.3. CONDITIONS SUFFISANTES SIMPLES DE STABILITÉ

Écrire en coordonnées polaires l'équation caractéristique scalaire (3.2.5) pour un  $\mu$  donné nous donnera une équation sur la phase de  $D(\lambda)$  et une sur son amplitude. De même des équations sur ses parties réelle et imaginaire apparaîtront en l'écrivant sous forme cartésienne. De chacune de ces quatre équations, on peut chercher des conditions simples sur  $\mu$  empêchant  $D(\lambda)$  d'être égal à zéro et assurant ainsi la stabilité de l'équation scalaire.

#### 3.3.1. Condition suffisante de stabilité en coordonnées polaires

**Proposition 3.3.1.** *Soient  $\mu_j \in \mathbb{C}$ , les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  de dimension  $N$ . Alors la solution nulle de l'équation (3.2.1) est uniformément asymptotiquement stable indépendamment de la distribution du délai  $\xi(\tau)$ , dès que  $\|\mu_j\| < 1$  pour tout  $j = 1, \dots, N$ ,*

**Démonstration.** Considérons une équation caractéristique scalaire (3.2.3),  $D(\lambda) = 0$ , avec la valeur  $\mu$  écrite en coordonnées polaires,  $\mu = Me^{i\nu}$ . Notons  $\mathcal{F}(\omega) = \int_0^\infty \xi(\tau) e^{-\omega\tau} d\tau$  la transformée de Fourier de la distribution. Supposons des valeurs propres imaginaires pures  $\lambda = i\omega$ , l'équation caractéristique devient

$$\begin{aligned} D(i\omega) &= i\omega T + 1 - Me^{i\nu} \mathcal{F}(\omega) \\ &= \sqrt{(\omega^2 T^2 + 1)} e^{i \arctan \omega T} - Me^{i\nu} \mathcal{F}(\omega). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Ce qui donne, en isolant le terme comprenant le radical,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\omega^2 T^2 + 1)} &= \|\sqrt{(\omega^2 T^2 + 1)} e^{i \arctan \omega T}\| \\
&\leq \|D(i\omega)\| + \|M e^{i\nu} \mathcal{F}(\omega)\| \\
&= \|D(i\omega)\| + M \|\mathcal{F}(\omega)\| \quad (\text{car } M = \|\mu\| > 0) \\
&\leq \|D(i\omega)\| + M
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

car  $\|\mathcal{F}(\omega)\| = \|\int_0^\infty \xi(\tau) e^{-\omega\tau} d\tau\| \leq \int_0^\infty \xi(\tau) \|e^{-\omega\tau}\| d\tau = \int_0^\infty \xi(\tau) d\tau = 1$ .

De (3.3.2), on a  $\|D(i\omega)\| \geq \sqrt{(\omega^2 T^2 + 1)} - M > 0$  dès que  $M < 1$ . Ce qui montre que sous cette condition, aucune valeur propre n'est imaginaire pure. Il ne peut donc y avoir de changement de stabilité, et comme l'équation est stable pour  $M = 0$  car  $\lambda = -\frac{1}{T}$  y est la seule valeur propre, alors elle est stable pour tout  $M < 1$ . L'application du lemme (3.2.1) clôt la démonstration.  $\square$

**Corollaire 3.3.1.** *En particulier pour  $\mu \in \mathbb{R}$ , l'équation (3.2.1) est uniformément asymptotiquement stable indépendamment de la distribution  $\xi(\tau)$  dès que  $|\mu| < 1$ .*

On retrouve ainsi la condition suffisante de stabilité provenant de l'analyse globale, à la différence que la conclusion du corollaire (3.3.1) est moins forte.

### 3.3.2. Conditions suffisantes de stabilité en coordonnées cartésiennes

**Proposition 3.3.2.** *Supposons que toutes les valeurs propres  $\mu_j, 1 \leq j \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$  soient réelles. Alors une condition suffisante de stabilité asymptotique uniforme pour la solution nulle de l'équation (3.2.1) est que, pour tout  $j = 1, \dots, N$ ,*

$$-\max\left(1, \frac{T}{\bar{\tau}}\right) < \mu_j < 1, \tag{3.3.3}$$

où  $\bar{\tau}$  est le délai moyen, suivant la distribution  $\xi(\tau)$ , doit être fini.

**Démonstration.** Supposons des valeurs propres imaginaires pures  $\lambda = i\omega$ , et écrivons en deux équations séparées les parties réelle et imaginaire de l'équation

caractéristique scalaire (3.2.3) :

$$\Re[D(i\omega)] = 1 - \mu \int_0^{\infty} \xi(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (3.3.4)$$

$$\Im[D(i\omega)] = \omega T + \mu \int_0^{\infty} \xi(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (3.3.5)$$

Pour  $\omega > 0$  On utilise  $-\omega \tau < \sin \omega \tau$  pour borner (3.3.5) :

$$\begin{aligned} \omega T + \mu \int_0^{\infty} \xi(\tau) \sin \omega \tau d\tau &> \omega (T - \mu \bar{\tau}) \\ &> 0, \quad \text{si } \mu \frac{\bar{\tau}}{T} < 1, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

où  $\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \tau \xi(\tau) d\tau$  est le délai moyen.

Pour  $\omega < 0$  On utilise maintenant  $\omega \tau < \sin \omega \tau$  de la même manière :

$$\begin{aligned} \omega T + \mu \int_0^{\infty} \xi(\tau) \sin \omega \tau d\tau &> \omega (T + \mu \bar{\tau}) \\ &> 0 \quad \text{si } \mu \frac{\bar{\tau}}{T} > -1. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Pour  $\omega = 0$  L'équation (3.3.4) devient

$$\Re[D(0)] = 1 - \mu \neq 0, \quad \text{si } \mu \neq 1. \quad (3.3.8)$$

Puisque  $\mu = 0$  correspond à une équation stable, il s'ensuit de (3.3.6), de (3.3.7) et de (3.3.8), que

$$|\mu| < \frac{T}{\bar{\tau}} \quad \text{et} \quad \mu < 1 \quad (3.3.9)$$

est une condition suffisante de stabilité. En faisant l'union de celle-ci et de la condition suffisante du corollaire (3.3.1) demandant que  $|\mu| < 1$ , on obtient de manière équivalente

$$-\max\left(1, \frac{T}{\bar{\tau}}\right) < \mu < 1.$$

On en déduit par le lemme (3.2.1), la condition (3.3.3) pour l'équation vectorielle.

□

### 3.4. FRONTIÈRES DE STABILITÉ POUR LES VALEURS PROPRES $\mu$ RÉELLES

Nous étudierons les régions de stabilité pour les distributions uniforme, triangulaire, exponentielle et gamma d'ordre  $n = 1, 2, 3$ , lorsque  $\mu \in \mathbb{R}$ . Nous trouverons pour chaque distribution, les conditions de déstabilisation du système par le délai, c'est-à-dire les conditions telles que le système puisse être stable pour le délai maximal  $d = 0$ , mais instable pour une certaine valeur de  $d > 0$ .

À cette fin, le lemme suivant donne d'abord la condition de stabilité du système (3.2.1) lorsque  $d = 0$ .

**Lemme 3.4.1.** *Supposons  $d = 0$  dans l'équation linéaire (3.2.1) et soient  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq N$  les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$ . Alors la solution nulle de l'équation (3.2.1) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si  $\Re(\mu_j) < 1$ ,  $1 \leq j \leq N$ .*

**Démonstration.** Considérons la distribution de délai  $\xi_d(t)$  de paramètre  $d$ . En particulier, si le support de la distribution est compact  $[0, d]$ ,  $d$  représente le délai maximal.

Une des hypothèses sur la distribution est que

$$\int_0^{\infty} \xi_{\infty}(t) dt = 1, \quad \text{pour tout } d. \quad (3.4.1)$$

Suivant les notions d'analyse fonctionnelle et de théorie des distributions étudiées dans [9], cette hypothèse ne peut rester satisfaite lorsque  $d \rightarrow 0$  que si on considère la convergence \*-faible. C'est-à-dire que si, pour toute fonction de test  $\phi$  on a

$$\lim_{d \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \xi_d(t) \phi(t) dt = \phi(0), \quad (3.4.2)$$

alors  $\xi_d$  converge \*-faiblement vers  $\delta$ , le delta de Dirac. Ainsi, lorsque  $d \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \xi_d(t) dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.4.3)$$

et

$$\lim_{d \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \xi_d(t) V(t - \tau) dt = \int_0^{\infty} \delta(t) V(t - \tau) dt = V(\tau). \quad (3.4.4)$$



L'équation (3.2.1) se transforme alors en l'équation différentielle ordinaire

$$T\dot{\mathbf{V}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{V}(t), \quad (3.4.5)$$

qui est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si  $\Re(\mu) < 1$ . □

**Proposition 3.4.1** (Frontière de stabilité en  $\mu = 1$ ). *Supposons que toutes les valeurs propres  $\mu_j, 1 \leq j \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$  soient réelles. Si, étant donnée la distribution de délai  $\xi(\tau)$ , le délai moyen  $\bar{\tau}$  est fini, alors la solution nulle de l'équation (3.2.1) perd sa stabilité lorsque, pour  $1 \leq k \leq N$ , il existe  $\mu_k = 1$ . La solution nulle de l'équation (3.2.1) est instable dès que pour  $1 \leq k \leq N$ , il existe  $\mu_k > 1$ .*

**Démonstration.** Commençons par montrer que l'équation caractéristique scalaire  $D(\lambda) = T\lambda + 1 - \mu \int_0^\infty \xi(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau = 0$  présente la valeur propre  $\lambda = 0$  si et seulement si  $\mu = 1$ . En effet, puisque la distribution du délai est normalisée telle que  $\int_0^\infty \xi(\tau) d\tau = 1$ , une substitution immédiate de  $\lambda = 0$  dans  $D(\lambda) = 0$ , implique que  $\mu = 1$ . C'est-à-dire que lorsque  $\mu = 1$ , une valeur propre se trouve sur l'axe imaginaire, faisant de cette valeur de  $\mu$  une frontière de stabilité possible sachant que l'équation est stable pour  $\mu = 0$ .

Pour montrer cette frontière de stabilité, nous devons, en utilisant  $\mu$  comme paramètre de l'équation scalaire, prouver que  $\left. \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right|_{\lambda=0} > 0$ , où l'on note  $\lambda = \lambda_1 + i\omega$ .

Substituons donc  $\lambda = \lambda_1 + i\omega$  dans l'équation caractéristique  $D(\lambda) = 0$ , en considérant les parties réelle et imaginaire comme des fonctions  $\lambda_1 = \lambda_1(\mu)$  et  $\omega = \omega(\lambda_1, \mu)$  et dérivons implicitement  $\frac{d\lambda_1}{d\mu}$ . Le calcul de  $\frac{dD(\lambda)}{d\mu} = 0$  et la séparation des parties réelle et imaginaire donne le système

$$[T + \mu J_{\tau c}] \frac{d\lambda_1}{d\mu} + \mu J_{\tau s} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \mu} + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right] - J_c = 0, \quad (3.4.6)$$

$$\mu J_{\tau s} \frac{d\lambda_1}{d\mu} - [T + \mu J_{\tau c}] \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \mu} + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right] + J_s = 0, \quad (3.4.7)$$

où l'on a utilisé comme notation

$$J_c = \int_0^\infty \xi(\tau) e^{-\lambda\tau} \cos \omega\tau d\tau, \quad J_{\tau c} = \int_0^\infty \tau \xi(\tau) e^{-\lambda\tau} \cos \omega\tau d\tau,$$

$$J_s = \int_0^\infty \xi(\tau) e^{-\lambda\tau} \sin \omega\tau d\tau, \quad J_{\tau s} = \int_0^\infty \tau \xi(\tau) e^{-\lambda\tau} \sin \omega\tau d\tau.$$

On peut éliminer directement  $\left[ \frac{\partial \omega}{\partial \mu} + \frac{\partial \omega}{d\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right]$  entre (3.4.8) et (3.4.8) pour isoler enfin

$$\frac{d\lambda_1}{d\mu} = \frac{\mu J_s J_{\tau s} + J_c (T + \mu J_{\tau c})}{\mu^2 J_{\tau s}^2 + (T + \mu J_{\tau c})^2}. \quad (3.4.8)$$

En  $\lambda = 0$ , on a  $\mu = 1$ ,  $J_s = 0$ ,  $J_{\tau s} = 0$ ,

$J_c = \int_0^\infty \xi(\tau) d\tau = 1$  car la distribution est normalisée, et  $J_{\tau c} = \int_0^\infty \tau \xi(\tau) d\tau = \bar{\tau} < \infty$  par hypothèse du délai fini, de sorte qu'évaluée sur la frontière de stabilité présumée  $\mu = 1$ , la dérivée (3.4.8) devient

$$\frac{d\lambda_1}{d\mu} = \frac{1}{T + \bar{\tau}} > 0. \quad (3.4.9)$$

Puisque cette dernière est positive, la droite  $\mu = 1$  est effectivement la frontière de stabilité et donc l'équation scalaire devient instable pour  $\mu > 1$ . Le lemme (3.2.1) assure que l'équation vectorielle devient instable dès qu'il existe un  $\mu$  pour lequel l'équation scalaire devient instable, ce qui complète la preuve.  $\square$

**Remarque 3.4.1.** *La proposition (3.4.1) reste valide même si le support de la distribution  $\xi(\tau)$  n'est pas compact, car le délai peut devenir infini pourvu que le délai moyen  $\bar{\tau}$  demeure fini.*

Cette proposition (3.4.1) certifie que la frontière de stabilité pour  $\mu > 0$  est identique pour toutes les distributions de délai, contrairement à la frontière pour  $\mu < 0$  qui différera.

**Proposition 3.4.2** (Frontière de stabilité pour la distribution uniforme). *Supposons que toutes les valeurs propres  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$  sont réelles. Alors, pour la distribution uniforme  $\xi(\tau) = \frac{1}{d}$  sur un intervalle  $[0, d]$ , la solution nulle de l'équation (3.2.1) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si,  $\forall j = 1, \dots, N$ , on a*

1.  $\mu_j < 1$  et
2. (a)  $2T\mu_j + d \geq 0$  ou

(b) si  $2T\mu_j + d < 0$ ,

$$C_1(\mu, d) = \arccos\left(\frac{d + T\mu_j}{T\mu_j}\right) + \pi - \frac{1}{T}\sqrt{-d(2T\mu_j + d)} > 0.$$

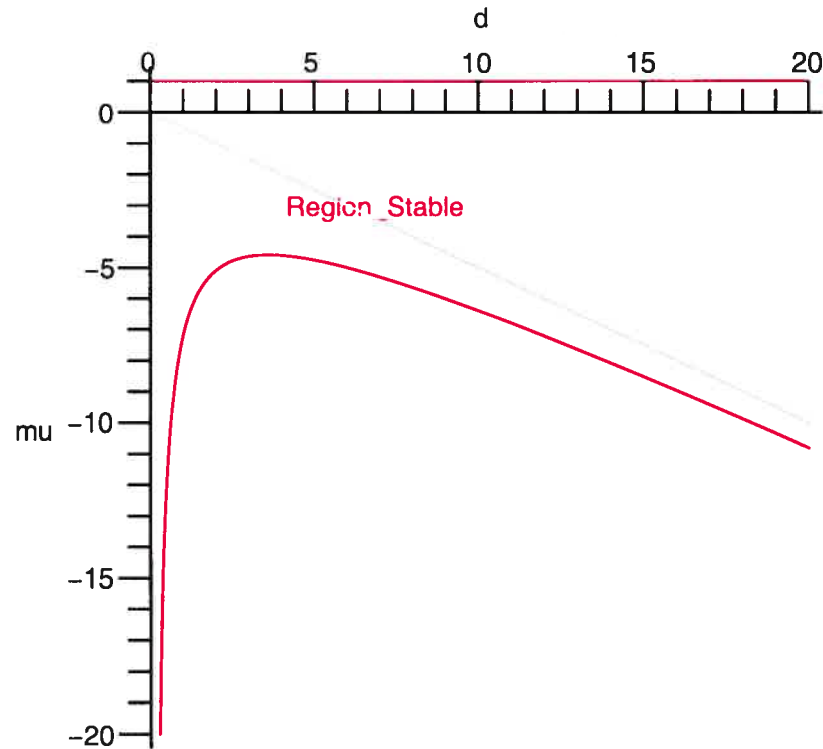


FIG. 3.1. Frontière de stabilité pour la distribution uniforme, avec  $\mu \in \mathbb{R}$  en fonction de  $d$ , à la prop. (3.4.2), lorsque  $T = 1$

**Démonstration.** Substituons la distribution  $\xi(\tau) = \frac{1}{d}$ ,  $\tau \in [0, d]$ , dans l'équation caractéristique scalaire (3.2.3). Lorsque  $\lambda = 0$  est valeur propre de celle-ci, nous avons montré à la proposition (3.4.1) que  $\mu = 1$  était la frontière de stabilité associée. Nous décrirons maintenant la courbe correspondant à une perte de stabilité pour  $\lambda \neq 0$ . On intègre sous cette dernière condition, et l'équation caractéristique scalaire devient

$$D(\lambda) = T\lambda + 1 + \frac{\mu}{\lambda d} (e^{-\lambda d} - 1) = 0. \quad (3.4.10)$$

Substituer  $\lambda = \lambda_1 + i\omega$  dans (3.4.10), et séparer les parties réelle et imaginaire de l'équation nous mène à un système que l'on peut transformer en

$$G_s(\lambda_1, \omega, \mu) = \mu e^{-d\lambda_1} \sin(\omega d) - (2\lambda_1 T + 1)\omega d = 0, \quad (3.4.11)$$

$$G_c(\lambda_1, \omega, \mu) = \mu e^{-d\lambda_1} \cos(\omega d) + Td\lambda_1^2 + d\lambda_1 - Td\omega^2 - \mu = 0. \quad (3.4.12)$$

Isoler le sinus et le cosinus dans le système ci-dessus et appliquer l'identité trigonométrique  $\cos^2(\omega d) + \sin^2(\omega d) - 1 = 0$  nous donne une équation quadratique en  $y = \omega^2$

$$A_2 y^2 + A_1 y + A_0 = 0, \quad \text{où} \quad (3.4.13)$$

$$A_2 = T^2 d^2,$$

$$A_1 = (2T^2 \lambda_1^2 + 2T\lambda_1 + 1) d^2 + 2Td\mu,$$

$$A_0 = (T^2 \lambda_1^4 + 2T\lambda_1^3 + \lambda_1^2) d^2 + (-2\lambda_1 \mu - 2T\lambda_1^2 \mu) d + \mu^2 - \mu^2 e^{-2d\lambda_1},$$

dont la paire de solutions est  $y_{\pm} \in \mathbb{R}$  lorsque le discriminant est positif. Les racines  $\omega_{\pm} = \sqrt{y_{\pm}}$  n'existent respectivement dans les réels que pour  $y_{\pm} \geq 0$ , et les quatre racines, non nécessairement toutes réelles, de l'équation (3.4.13) en  $\omega$  sont  $\pm\omega_{\pm}$ .

Lorsque l'on ne considère que les valeurs propres imaginaires pures,  $\lambda_1 = 0$ , et la racine  $y_+$  de (3.4.13) devient

$$\omega_{0+}^2 = y_{0+} = -\left(\frac{2T\mu + d}{T^2 d}\right), \quad (3.4.14)$$

de sorte que  $y_{0+}$  n'est positif et que  $\omega_{0+}$  n'est réel que si  $\mu < \frac{-d}{2T}$ . Quant à la racine  $\omega_-$ , elle se réduit à  $\omega_{0-} = 0$  lorsque  $\lambda_1 = 0$ . Or, on exclut ici la valeur propre  $\lambda = 0$ , et donc seules les racines  $\pm\omega_{0+}$  sont à considérer dans la présente analyse.

En joignant ce résultat aux équations (3.4.11), (3.4.12) dans lesquelles on substitue également  $\lambda_1 = 0$ , on tient le système d'équations qui décrit dans le plan  $\mu, d$ , la courbe où est possible la perte de stabilité :

$$F_s(\mu, d) = \mu \sin(\omega d) - \omega d = 0, \quad (3.4.15)$$

$$F_c(\mu, d) = \mu \cos(\omega d) - T\omega^2 d - \mu = 0, \quad (3.4.16)$$

$$\text{avec } \omega = \pm\sqrt{y_{0+}}, \quad \text{pour } \mu < \frac{-d}{2T}.$$

On peut en fait ne conserver dans ce système que  $\omega = +\sqrt{y_+}$ , car on vérifie que les équations  $F_s(\mu, d) = 0$  et  $F_c(\mu, d) = 0$  sont invariantes sous le changement de signe de  $\omega$ .

L'examen de la dérivée  $\frac{d\lambda_1}{d\mu}$  le long de cette courbe nous la confirmera comme frontière de stabilité.

La relation  $G_s(\lambda_1, \omega, \mu) = 0$ , (3.4.11), représente, à  $d$  fixé, une courbe dans le plan  $(\lambda_1, \mu)$  lorsque la partie imaginaire de  $\lambda$  est posée comme une fonction  $\omega = \omega(\lambda_1, \mu)$ . La dériver implicitement par rapport à  $\mu$  et lui injecter  $\lambda_1 = 0$  entraîne que

$$\left. \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right|_{G_s, \lambda_1=0} = \frac{-d [\mu \cos(\omega d) - 1] \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \right|_{\lambda_1=0} - \sin(\omega d)}{d [\mu \cos(\omega d) - 1] \left. \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_1} \right|_{\lambda_1=0} - \omega d (2T + 1)}, \quad (3.4.17)$$

où la notation du membre de gauche signifie que la dérivée est prise sur la courbe  $G_s$ , lorsqu'on fixe  $\lambda_1 = 0$ .

De manière semblable, à partir de la relation (3.4.12) décrivant à  $d$  fixé, une courbe dans le plan  $(\lambda_1, \mu)$  lorsque  $G_c(\lambda_1, \omega, \mu) = 0$  où  $\omega = \omega(\lambda_1, \mu)$ , les mêmes étapes nous amènent à

$$\left. \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right|_{G_c, \lambda_1=0} = \frac{-d [\mu \sin(\omega d) + 2T\omega] \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \right|_{\lambda_1=0} + \cos(\omega d) - 1}{d [\mu \sin(\omega d) + 2T\omega] \left. \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_1} \right|_{\lambda_1=0} + d (Td\omega^2 + \mu - 1)}, \quad (3.4.18)$$

Puisqu'en  $\lambda_1 = 0$ , on n'est intéressé que par les racines non nulles  $\pm\omega_{0+}$ , la fonction  $\omega(\lambda_1, \mu)$  utilisée dans les expressions (3.4.17) et (3.4.18) ne peut être que la racine  $\omega_+$  du polynôme (3.4.13). Les dérivées de celle-ci, évaluées en  $\lambda_1 = 0$  pour  $d + 2T\mu < 0$ , donnent

$$\left. \frac{\partial \omega_+}{\partial \lambda_1} \right|_{\lambda_1=0} = \frac{\sqrt{d} (3T\mu - T\mu^2 + d)}{-(d + 2T\mu)^{3/2}}, \quad (3.4.19)$$

$$\left. \frac{\partial \omega_+}{\partial \mu} \right|_{\lambda_1=0} = \frac{-1}{\sqrt{-(d + 2T\mu)}}, \quad (3.4.20)$$

Après la substitution de ces dérivées  $\left. \frac{\partial \omega_+}{\partial \mu} \right|_{\lambda_1=0}$  et  $\left. \frac{\partial \omega_+}{\partial \lambda_1} \right|_{\lambda_1=0}$  dans les expressions (3.4.17) et (3.4.18) de  $\left. \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right|_{\lambda_1=0}$ , puis l'élimination des  $\sin(\omega d)$  et  $\cos(\omega d)$ , isolés

des équations (3.4.15) et (3.4.16), il suffit d'injecter  $\omega = \sqrt{y_{0+}}$  avec la relation (3.4.14), pour aboutir, après plusieurs simplifications à

$$\left. \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right|_{G_s|\lambda_1=0} = \left. \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right|_{G_c|\lambda_1=0} = \frac{-(\mu-1)(d+2T\mu)}{\mu(2d^2+3Td+6Td\mu-Td\mu^2+8T^2\mu)}, \quad (3.4.21)$$

où  $d+2T\mu < 0$ .

Il était nécessaire de vérifier l'égalité des dérivées  $\left. \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right|_{\lambda_1=0}$  calculées sur chacune des deux courbes  $G_s = 0$  et  $G_c = 0$  du plan  $(\lambda_1, \mu)$  pour nous assurer de l'existence de cette même dérivée sur la frontière présumée de stabilité. Celle-ci, présentée aux équations (3.4.15) et (3.4.16) comme l'intersection de  $F_s = 0$  et  $F_c = 0$  dans le plan  $(\mu, d)$  est regardée ici à  $d$  fixé dans le plan  $(\lambda_1, \mu)$  lorsque  $\lambda_1 = 0$ . A priori, il eut été en effet possible que les courbes  $G_s = 0$  et  $G_c = 0$  se croisent avec des dérivées différentes, mais alors leur intersection dans le plan  $(\lambda_1, \mu)$ , n'aurait pas été différentiable et l'apparition de valeurs propres de partie réelle nulle n'aurait pu causer d'instabilité.

L'étude du signe de la dérivée (3.4.21) demande qu'on en examine les zéros et les singularités. Les deux zéros que présente le numérateur sont  $\mu = 1$ , qui n'a aucun effet puisqu'on étudie la perte de stabilité pour  $\mu < 0$ , et  $\mu = \frac{-d}{2T}$ . Il en résulte que le numérateur est nécessairement négatif, car la relation (3.4.14) exige que  $d+2T\mu < 0$ . Quant au dénominateur, son premier zéro est  $\mu = 0$ , tandis que les deux suivants sont zéros de l'équation quadratique

$$p(\mu) = 2d^2 + 3Td + 6Td\mu - Td\mu^2 + 8T^2\mu = 0,$$

dont la solution pour  $\mu < 0$  est

$$\mu_-(\gamma) = 3 + 4\gamma - \sqrt{2\gamma}\sqrt{1+2\gamma} \left( 2 + \frac{1}{\gamma} \right), \quad \text{où } \gamma = \frac{T}{d} > 0. \quad (3.4.22)$$

En utilisant  $\sqrt{4\gamma^2+2\gamma} < \sqrt{4\gamma^2+4\gamma+\frac{1}{4}} = 2\gamma + \frac{1}{2}$  dans (3.4.22), on parvient immédiatement à borner  $\mu_-(\gamma) > \frac{-1}{2\gamma}$  pour tout  $\gamma > 0$ . Que la droite des zéros négatifs de la dérivée (3.4.21) soit ainsi toujours dominée par la courbe (3.4.22) de ses singularités, nous assure que la dérivée existe et ne peut changer de signe dans toute la région du plan  $(\mu, d)$  où  $\mu < \frac{-d}{2T}$ , c'est-à-dire précisément là où se trouve

la frontière possible de stabilité. Cette situation est illustrée numériquement au graphique (3.2).

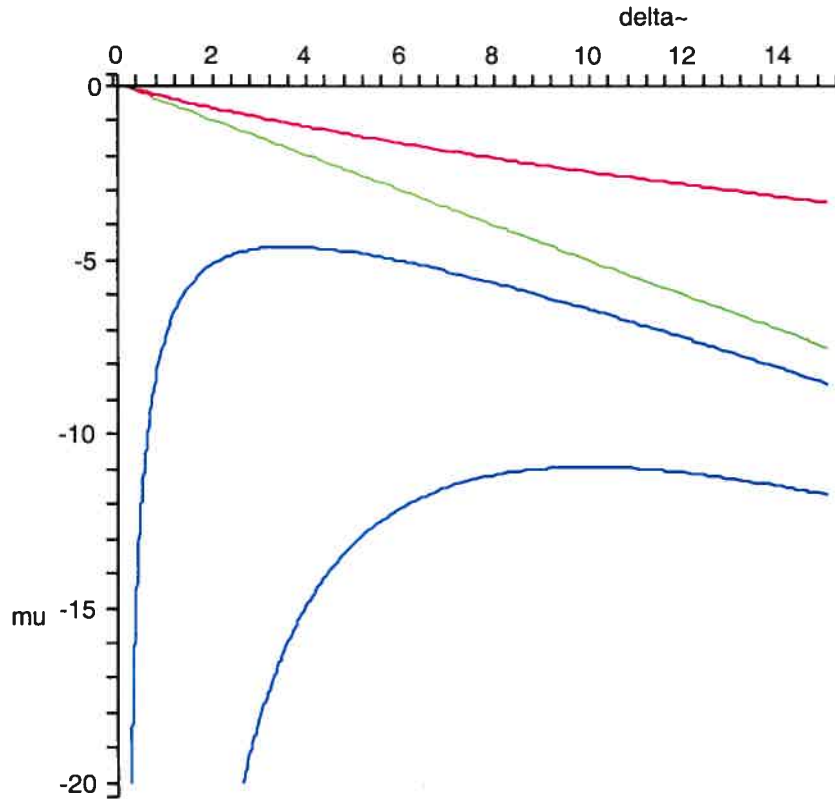


FIG. 3.2. Détection de la frontière de stabilité pour la distribution uniforme. En bleu : les courbes où  $\lambda_1 = 0$ . En vert : la droite où s'annule le numérateur de  $\left. \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right|_{\lambda_1=0}$ . En rouge : la courbe où s'annule le dénominateur de la même dérivée.

La position relative de la courbe (3.4.22) nous dit aussi qu'il suffit d'évaluer sur la droite  $\mu = \frac{-d}{2T}$  des zéros de la dérivée, le polynôme  $p(\mu)$  du dénominateur pour connaître le signe de la dérivée (3.4.21) sur la frontière présumée de stabilité. Étant donné que

$$p\left(\frac{-d}{2T}\right) = -d \left( T + d + \frac{d^2}{4T} \right) < 0,$$

on arrive finalement à  $\left. \frac{d\lambda_1}{d\mu} \right|_{\lambda_1=0} < 0$ .

L'équation (3.2.1) étant connue stable pour  $\mu = 0$ , le signe de la dérivée signifie que  $\lambda_1$  croît à mesure que  $\mu$  se dirige vers les négatifs pour franchir la courbe décrite par (3.4.15) et (3.4.16) des valeurs propres imaginaires pures, ce qui confirme qu'il y a perte de stabilité.

Cette frontière de stabilité peut cependant être présentée de manière plus concise en étudiant le domaine du cosinus dans la courbe (3.4.16),  $F_c = 0$ . On reconnaît d'abord que substituer  $\omega^2 = y_{0+}$  de (3.4.14) dans (3.4.16) permet de réécrire le système

$$\cos(\omega d) = \eta, \quad (3.4.23)$$

$$\sin(\omega d) = \frac{\omega d}{\mu}, \quad (3.4.24)$$

où l'on a posé  $\eta = -\left(\frac{d}{T\mu} + 1\right)$ . L'inégalité  $\mu < \frac{-d}{2T} < 0$  entraîne d'une part que  $-1 < \eta < 1$  et permet de vérifier que  $\arccos \eta$  existe dans les réels, où  $\arccos$  à son image dans  $[0, \pi]$ . En prenant  $\omega = +\omega_+ > 0$ , la même inégalité conduit également à  $\frac{\omega d}{\mu} < 0$ , qui étant donnée la relation (3.4.24), restreint donc le domaine de  $\sin(\omega d)$  et de  $\cos(\omega d)$ , aux intervalles  $\omega d \in [(2n-1)\pi, 2n\pi]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . En considérant les branches de  $\arccos$  sur ces intervalles, isoler  $\omega d$  dans l'expression (3.4.23), amène à

$$\omega d = 2n\pi - \arccos \eta, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.4.25)$$

que l'on réécrit en utilisant  $\pi - \arccos \eta = \arccos(-\eta)$  comme

$$C_n(\mu, d) = (2n-1)\pi + \arccos(-\eta) - \omega d = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.4.26)$$

Si on resubstitue (3.4.25) dans (3.4.24), on constate en simplifiant que l'on retrouve l'équation (3.4.24),

$$\sin \omega_n d = \sin(-\arccos \eta) = -\sqrt{1-\eta^2} = \frac{\omega d}{\mu}, \quad (3.4.27)$$

et donc que l'équation (3.4.26) équivaut à elle seule au système des équations (3.4.23) et (3.4.24). On constate que la frontière de stabilité a priori possible, illustrée en bleu au graphique (3.2), est formée de  $n$  branches.

Montrons maintenant que la véritable frontière est associée à  $n = 1$ , c'est-à-dire que la courbe notée  $C_1(\mu, d)$  de (3.4.26) domine toutes les branches  $n > 1$  et



études en la forme. Pour chercher dans le plan  $(\mu, d)$  les sommets des courbes  $C_n = 0$  posées comme fonction  $\mu(d)$ , dérivons implicitement

$$\frac{d\mu}{dd} = \frac{-\mu(d + T + T\mu)}{Td(\mu - 1)}. \quad (3.4.28)$$

On tire de  $\frac{d\mu}{dd} = 0$ ,  $\mu \neq 0$ , que les sommets se trouvent sur la droite  $d = -T(\mu + 1)$ . Substituer cette expression dans (3.4.26) produit l'équation suivante dont la solution, pour un  $n$  donné, est la coordonnée  $\mu$  du sommet de la  $n^{\text{ième}}$  branche :

$$\Xi_n(\alpha) = \chi(\alpha), \quad \text{où } \chi(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 - \alpha^2}, \quad \text{avec } \alpha = \frac{-1}{\mu} \quad (3.4.29)$$

$$\Xi_n(\alpha) = \arccos \alpha + (2n - 1)\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cette équation étant transcendante, nous examinerons géométriquement la position de la solution  $\alpha$ . Le membre de gauche est une fonction connue pour être monotone décroissante telle que  $\Xi_n(0) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi(n - 1)$  et  $\Xi_n(1) = (2n - 1)\pi$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On doit par contre étudier la fonction  $\chi(\alpha)$  en dérivant

$$\frac{d\chi(\alpha)}{d\alpha} = \frac{-1}{\alpha^2 \sqrt{1 - \alpha^2}} < 0, \quad (3.4.30)$$

on voit que la fonction  $\chi(\alpha)$  est monotone décroissante telle que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \chi(\alpha) = \infty$  et que  $\chi(1) = 0$ . La continuité des fonctions  $\Xi_n(\alpha)$  et  $\chi(\alpha)$  implique alors que pour tout  $n$ , il existe une solution  $\alpha_n$  et que  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  forme une suite décroissante telle que  $\alpha_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire que  $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante négative telle que  $\mu_n \rightarrow -\infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Par conséquent, on a  $\max_{n \in \mathbb{N}} \mu_n = \mu_{n=1}$  ce qui montre que la courbe  $C_1(\mu, d) = 0$  forme la véritable frontière de stabilité.

La condition 2. (b) de la proposition est donc démontrée dans le cas de l'équation scalaire et le lemme (3.2.1) achève la démonstration de la proposition.

On veut en outre montrer analytiquement la forme de la frontière de stabilité illustrée numériquement au graphique (3.1). On peut d'abord approximer la position du sommet en linéarisant  $\Xi_1(\alpha) = \pi + \arccos \alpha \approx \frac{3\pi}{2} - \alpha$  avec petit  $\alpha > 0$ , pour résoudre ensuite l'équation (3.4.29) qui se réécrit  $\alpha^4 - 3\alpha^3\pi + (\frac{9}{4}\pi^2 + 1)\alpha^2 - 1 = 0$ . Ce polynôme de degré 4 possède une unique racine réelle  $\alpha$  que l'on peut calculer,

et qui permet de trouver

$$\mu \approx -4,605 \text{ et, si } T = 1, d = -(\mu + 1) \approx 3,605. \quad (3.4.31)$$

On constate à l'équation (3.4.28), que  $\frac{d\mu}{dd}$  possède une asymptote en  $d = 0$  où  $\mu \rightarrow -\infty$ . De plus, avec  $\beta = 2T\mu + d$  dans l'équation (3.4.26), pousser  $d$  vers  $+\infty$  sous la contrainte que  $C_1 = 0$  oblige  $\beta$  à tendre vers 0, ce qui confirme l'asymptote

$$2T\mu + d = 0. \quad (3.4.32)$$

□

**Corollaire 3.4.1.** *Considérons la distribution uniforme  $\xi(\tau) = \frac{1}{d}$  sur un intervalle  $[0, d]$  dans l'équation (3.2.1) et supposons que toutes les valeurs propres  $\mu_j, 1 \leq j \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$  sont réelles. Alors,*

- (1) *La solution nulle de l'équation (3.2.1) reste uniformément asymptotiquement stable indépendamment de  $d$  si et seulement si, pour  $1 \leq j \leq N$ ,*

$$1 > \mu_j > \mu^*, \quad (3.4.33)$$

où  $\mu^*$  est la solution de  $\arccos \alpha + \pi - \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 - \alpha^2} = 0$ , avec  $\alpha = \frac{-1}{\mu^*}$ .  
C'est une constante  $\mu^* \approx -4,605$ .

- (2) *Soit  $m_i = \frac{\mu_i}{\beta}, 1 \leq i \leq N$ , les valeurs propres de la matrice de connexions  $\mathbf{J}$  et appelons  $m_{max} = \max_{1 \leq i \leq N} m_i$ . Supposons  $m_{max} \geq 0$ . Indépendamment du gain  $\beta$ , une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'un délai  $d_1 < d_0$  déstabilisant le point d'équilibre nul, et d'un délai  $d_2 > d_0$  restabilisant ce même point d'équilibre est que*

$$\frac{|m_{min}|}{|m_{max}|} > |\mu^*|. \quad (3.4.34)$$

**Démonstration.** (1) Au lemme (3.4.1), il est montré que sans délai, le système est stable si  $\mu_j < 1$ , pour tout  $j = 1, \dots, N$ . D'autre part, la coordonnée  $\mu$  du sommet de la frontière de stabilité a été déterminée comme étant la solution de l'équation (3.4.29) lorsque  $n = 1$ , et a été approximée en (3.4.31).

- (2) Lorsque le point d'équilibre nul est considéré, la matrice de connexion s'exprime comme  $\mathbf{J} = \frac{1}{\beta}\mathbf{A}$  et ses valeurs propres sont  $m_i = \frac{\mu_i}{\beta}$ .

Appelons  $\mu_{max} = \max_{1 \leq j \leq N} \mu_j$  et  $\mu_{min} = \min_{1 \leq j \leq N} \mu_j$ . Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de valeur de  $d$  déstabilisant le point d'équilibre nul et le restabilisant, est que

$$\mu_{max} < 1, \quad \text{et} \quad \mu_{min} < \mu^*. \quad (3.4.35)$$

Lorsque  $\mu_{max} = \beta m_{max} > 0$ , cette condition equivaut à

$$\frac{|\mu_{min}|}{|\mu_{max}|} > |\mu^*|. \quad (3.4.36)$$

Ce qui, après simplification des  $\beta$ , complète la démonstration. □

**Proposition 3.4.3** ( Frontière de stabilité pour la distribution triangulaire ).

*Supposons que toutes les valeurs propres  $\mu_j, 1 \leq j \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$  sont réelles. Alors, pour la distribution triangulaire  $\xi(\tau) = \frac{2}{d} \left(1 - \frac{\tau}{d}\right)$  sur un intervalle  $[0, d]$ , la solution nulle de l'équation (3.2.1) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si,  $\forall j = 1, \dots, N$ , on a  $\mu_j < 1$ .*

**Démonstration.** Substituons la distribution  $\xi(\tau) = \frac{2}{d} \left(1 - \frac{\tau}{d}\right)$ ,  $\tau \in [0, d]$ , dans l'équation caractéristique scalaire (3.2.3). Lorsque  $\lambda = 0$  est valeur propre de celle-ci, nous avons montré à la proposition (3.4.1) que  $\mu = 1$  était la frontière de stabilité associée. Montrons qu'il n'y a aucune perte de stabilité possible pour  $\lambda \neq 0$ . On intègre sous cette dernière condition, et l'équation caractéristique scalaire devient

$$D(\lambda) = T\lambda + 1 - 2\mu \frac{(\lambda d - 1 + e^{-\lambda d})}{d^2 \lambda^2} = 0. \quad (3.4.37)$$

Considérons des valeurs propres imaginaires pures  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega \neq 0$ , dans (3.4.37), et séparons les parties réelle et imaginaire de l'équation en un système que l'on peut réécrire

$$2\mu \cos \omega d + d^2 \omega^2 - 2\mu = 0, \quad (3.4.38)$$

$$2\mu \sin \omega d - \omega d (2\mu + Td\omega^2) = 0. \quad (3.4.39)$$

Isoler les  $\cos \omega d$  et  $\sin \omega d$  de ce système et les recombinaer à l'aide de  $\cos^2 \omega d + \sin^2 \omega d - 1 = 0$  produit une équation quadratique en  $y = \omega^2$  :

$$f(y) = T^2 d^2 y^2 + d(d + 4\mu T)y + 4\mu(\mu - 1). \quad (3.4.40)$$

Ces deux racines sont  $y_{\pm} = \frac{-d - 4\mu T \pm \sqrt{\Delta}}{2T^2 d}$ ,  
de discriminant  $\Delta = d^2 + 8\mu T(d + 2T)$ .

Si  $\Delta < 0$ , les racines  $y_{\pm}$  ne sont pas réelles et l'équation (3.4.37) ne possède aucune valeur propre  $\lambda \neq 0$ . D'autre part, si  $\Delta \geq 0$ , il faut, pour que l'équation caractéristique scalaire (3.4.37) admette au moins une valeur propre imaginaire pure, que la racine  $y_+$  soit positive. On calcule que cette condition est équivalente à  $\mu(\mu - 1) < 0$ . C'est donc dire que  $\mu \in (0, 1)$  est nécessaire pour l'existence de  $\lambda = \omega i$ ,  $\omega \neq 0$ . Or, le corollaire (3.3.1) a montré qu'il n'existait pas de telles valeurs propres imaginaires pures lorsque  $\mu \in [-1, 1]$ , et par conséquent, l'unique frontière de stabilité est  $\mu = 1$ . La proposition découle alors directement du lemme (3.2.1).  $\square$

La distribution exponentielle  $\xi(\tau) = \sigma e^{-\sigma\tau}$  pour laquelle nous allons maintenant étudier la frontière de stabilité n'est plus définie sur un intervalle compact, ce qui, en permettant aux exponentielles de disparaître, produit un polynôme caractéristique pouvant être étudié par des méthodes appropriées aux systèmes linéaires sans délai. Nous allons ici appliquer le critère de Routh-Hurwitz rappelé à la proposition (A.3.2).

**Proposition 3.4.4** (Frontière de stabilité : distribution exponentielle pour  $\mu \in \mathbb{R}$ ).  
*Supposons que toutes les valeurs propres  $\mu_j, 1 \leq j \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$  sont réelles. Alors, pour la distribution exponentielle  $\xi(\tau) = \sigma e^{-\sigma\tau}$  définie sur  $[0, \infty)$ , la solution nulle de l'équation (3.2.1) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si,  $\forall j = 1, \dots, N$ , on a  $\mu_j < 1$ .*

**Démonstration.** Supposant  $\mu \in \mathbb{R}$  et en substituant la distribution  $\xi(\tau) = \sigma e^{-\sigma\tau}$ ,  $\tau \in [0, \infty)$ ,  $\sigma > 0$ , on peut intégrer pour  $\lambda + \sigma \neq 0$  et obtenir, après

simplifications, le polynôme caractéristique

$$D(\lambda) = T\lambda^2 + (\sigma T + 1)\lambda + \sigma(1 - \mu) = 0. \quad (3.4.41)$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz, l'équation scalaire est stable si et seulement si  $T > 0$ ,  $\sigma T + 1 > 0$ ,  $\sigma(1 - \mu) > 0$ . Cette condition se résume à  $\mu < 1$ , pour tout  $\sigma$ , prouvant la frontière de stabilité pour l'équation scalaire. On étend au moyen du lemme (3.2.1) cette condition à l'équation vectorielle (3.2.1), achevant la démonstration.  $\square$

Dans le cas de la distribution gamma, Blythe et al.[2] ont étudié les changements de stabilité de l'équation,

$$T\dot{x}(t) = -x(t) + \mu \int_0^\infty \xi(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (3.4.42)$$

réécrite ici dans notre notation, avec  $\xi(\tau)$  la distribution gamma (1.7.6).

Il s'agit de la version scalaire de l'équation (3.2.1).

Bien que n'ayant pas calculé explicitement les frontières de stabilité dans le plan des paramètres  $\mu$  et  $\bar{\tau}$ , les auteurs obtiennent des conditions de déstabilisation et de restabilisation que nous paraphrasons ici.

**Proposition 3.4.5** (Blythe et al.[2]). *Concernant la stabilité de l'équation scalaire (3.4.42). Posons  $P = -(\cos(\frac{\pi}{n+2}))^{n+2}$  et  $M = -(\cos(\frac{\pi}{n+1}))^{n+1}$ .*

*Considérons  $\mu$  telle que l'équation sans délai soit stable.*

- 1 *Pour  $\mu > \frac{T}{P}$ , la déstabilisation par le délai est impossible.*
- 2 *Pour  $\mu = \frac{T}{P}$ , la frontière de stabilité atteint un maximum pour un délai moyen  $\bar{\tau} = (n+1)T$ .*
- 3 *Pour  $\frac{T}{M} < \mu < \frac{T}{P}$ , il y a une déstabilisation pour un certain délai moyen  $\bar{\tau} < (n+1)T$  et une restabilisation irréversible pour un délai moyen  $\bar{\tau} > (n+1)T$ .*
- 4 *Pour  $\mu < \frac{T}{M}$ ,  $M \neq 0$ , il y a une déstabilisation pour un certain délai moyen  $\bar{\tau} < (n+1)T$ , mais aucune restabilisation.*

Élargir le résultat de Blythe à l'équation vectorielle (3.2.1) par le truchement du lemme (3.2.1) est maintenant immédiat.

**Corollaire 3.4.2.** *Supposons que toutes les valeurs propres  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$  sont réelles. Alors, pour la distribution gamma  $\xi(\tau) = \frac{\sigma^{n+1}}{n!} \tau^n e^{-\sigma\tau}$ , la*

stabilité de la solution nulle de l'équation (3.2.1) est caractérisée par les conclusions de la proposition 3.4.5 si et seulement si toutes les valeurs propres  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , satisfont aux prémisses de l'énoncé correspondant.

Blythe remarque que dans le cas où  $n = 1$  dans l'expression de la distribution gamma, on a  $M = 0$ , et donc  $-\infty < \mu < \frac{T}{P}$ , de sorte que toute déstabilisation est nécessairement suivie d'une restabilisation. Pour le cas  $n = 2$ , cependant, la restabilisation n'existe que dans un intervalle borné (cas 3 de la proposition 3.4.5), qui est ici  $\mu \in (-8, -4)$ . De plus, à mesure que  $n$  augmente, cet intervalle de restabilisation décroît jusqu'à disparaître à la limite qui coïncide avec le cas discret.

La proposition (3.4.5), bien que donnant des indications schématiques au sujet de la frontière, ne peut, contrairement à la proposition suivante, servir à une comparaison détaillée des régions de stabilité entre les distributions gamma et la distribution uniforme.

**Proposition 3.4.6** (Frontières de stabilité pour les distributions  $gamma(n, \sigma)$ ). *Supposons que toutes les valeurs propres  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$  sont réelles. Alors, pour les distributions  $gamma(n, \sigma)$  décrites en (1.7.6), la solution nulle de l'équation (3.2.1) est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si,  $\forall j = 1, \dots, N$ ,*

$$F_n(\bar{\tau}) < \mu_j < 1,$$

où la frontière  $F_n(\bar{\tau})$  en termes du délai moyen  $\bar{\tau}$  est, pour  $n = 1, 2$  et  $3$ ,

$$F_1(\bar{\tau}) = -\frac{(2T + \bar{\tau})^2}{T\bar{\tau}}, \quad (3.4.43)$$

$$F_2(\bar{\tau}) = -8 \frac{(T\bar{\tau} + 3)^3}{\bar{\tau} (T\bar{\tau} + 9)^2}, \quad (3.4.44)$$

$$(3.4.45)$$

$$F_3(\tau) = \frac{1}{2T^2\bar{\tau}} \left( 448T^3 + 144T^2\bar{\tau} + 20T\bar{\tau}^2 + \bar{\tau}^3 - (80T^2 + 16T\bar{\tau} + \bar{\tau}^2) \sqrt{\Delta} \right), \quad (3.4.46)$$

$$\text{avec } \Delta = 32T^2 + 8T\bar{\tau} + \bar{\tau}^2.$$

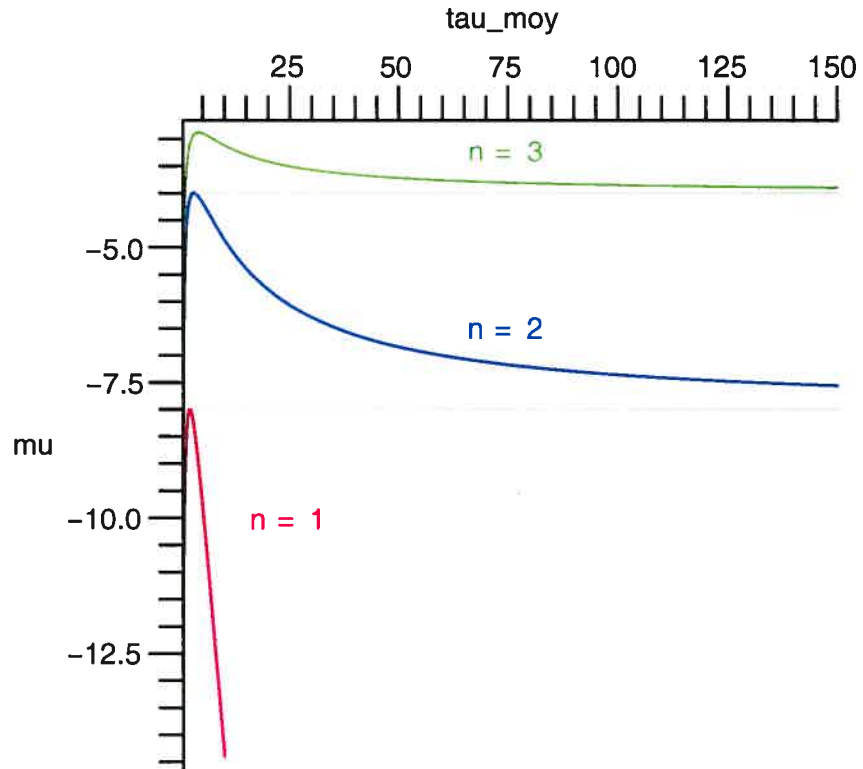


FIG. 3.3. Frontières de stabilité pour la distribution gamma, lorsque  $n = 1, 2$  ou  $3$ . Les droites grises  $\mu = -4$  et  $\mu = -8$  divisent l'axe  $\mu$  en fenêtres de déstabilisation et de restabilisation. Elle forme une asymptote pour la frontière de l'ordre  $n + 1$  tout en passant par le sommet de la frontière de l'ordre  $n$ .

**Démonstration.** Avec la distribution  $gamma(n, \sigma)$  (1.7.6), le délai moyen est de  $\bar{\tau} = \frac{n+1}{\sigma}$  et, comme dans [2], l'équation caractéristique scalaire devient

$$(T\lambda + 1) \left( 1 + \frac{\lambda \bar{\tau}}{n+1} \right)^{n+1} - \mu = 0. \quad (3.4.47)$$

Après la substitution de  $\lambda = \omega i$ ,  $\omega \neq 0$ , les parties réelle et imaginaire forment un système de deux équations dont seule la première dépend de  $\mu$ , alors que la seconde est un polynôme en  $\omega^2$ .

Les zéros  $\omega^2$  de cette seconde équation sont uniques dans le cas de  $n=1$  et  $n=2$ . Les réinjecter dans l'équation de la partie réelle permet d'isoler  $\mu = F_n(\bar{\tau})$  qui représente la frontière aux expressions (3.4.43) et (3.4.44).

Lorsque  $n = 3$ , l'équation de la partie imaginaire étant quadratique en  $\omega^2$ , elle possède deux zéros  $\omega_{\pm}^2(\bar{\tau})$ . En resubstituant chacun de ces zéros dans l'équation de la partie réelle, seule la branche de  $\omega_+$  entraîne que  $\mu(\bar{\tau}) < 0$  pour tout  $\bar{\tau}$ . Cette dernière expression de  $\mu$  correspond à  $\mu = F_3(\bar{\tau})$ , la frontière de stabilité (3.4.46). La proposition de Blythe nous garantit qu'il y a effectivement perte de stabilité le long des frontières de stabilité  $F_n(\bar{\tau})$ . La frontière supérieure de la région de stabilité  $\mu = 1$  a déjà été montrée en (3.4.1) et le lemme (3.2.1) termine alors la démonstration.  $\square$

On constate que les frontières détaillées du graphique 3.3 présentent les caractéristiques d'asymptotes et de sommets découlant des conditions de déstabilisation et de restabilisation prévues par Blythe [2] à la proposition (3.4.5).

### 3.5. FRONTIÈRE DE STABILITÉ POUR LES VALEURS PROPRES $\mu$ COMPLEXES

**Proposition 3.5.1** (Frontière de stabilité : distribution exponentielle pour  $\mu \in \mathbb{C}$ ).  
*Supposons complexe au moins une des valeurs propres  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$ , et écrivons  $\mu = Me^{i\nu}$ ,  $0 \leq \nu < 2\pi$ . Alors pour la distribution exponentielle  $\xi(\tau) = \sigma e^{-\sigma\tau}$  définie sur  $[0, \infty)$ , la solution nulle de l'équation (3.7.1) est asymptotiquement stable si et seulement si  $\forall j = 1 \dots N$ ,  $\mu_j$  se trouve, dans le plan complexe, à gauche de la frontière de stabilité donnée par*

$$M(\nu, \gamma) = \begin{cases} M_+(\nu, \gamma), & \text{si } \nu \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi[ \\ M_0(\gamma), & \text{si } \nu = \frac{\pi}{2} \\ M_-(\nu, \gamma), & \text{si } \nu \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}, \quad (3.5.1)$$

où



$$M_0(\gamma) = \frac{1 + \gamma}{\sqrt{\gamma}}, \quad (3.5.2)$$

$$M_{\pm}(\nu, \gamma) = \frac{1}{2\gamma \tan^2 \nu} \sqrt{[2(1 + \gamma) \tan^2 \nu + \Xi_{\pm}][2\gamma(1 + \gamma) \tan^2 \nu + \Xi_{\pm}]}, \quad (3.5.3)$$

$$\Xi_{\pm} = \gamma^2 + 2\gamma + 1 \mp \sqrt{\Delta}(1 + \gamma),$$

$$\text{et } \Delta = \gamma^2 + 2\gamma(1 + 2 \tan^2 \nu) + 1, \quad \text{avec } \gamma = \sigma T.$$

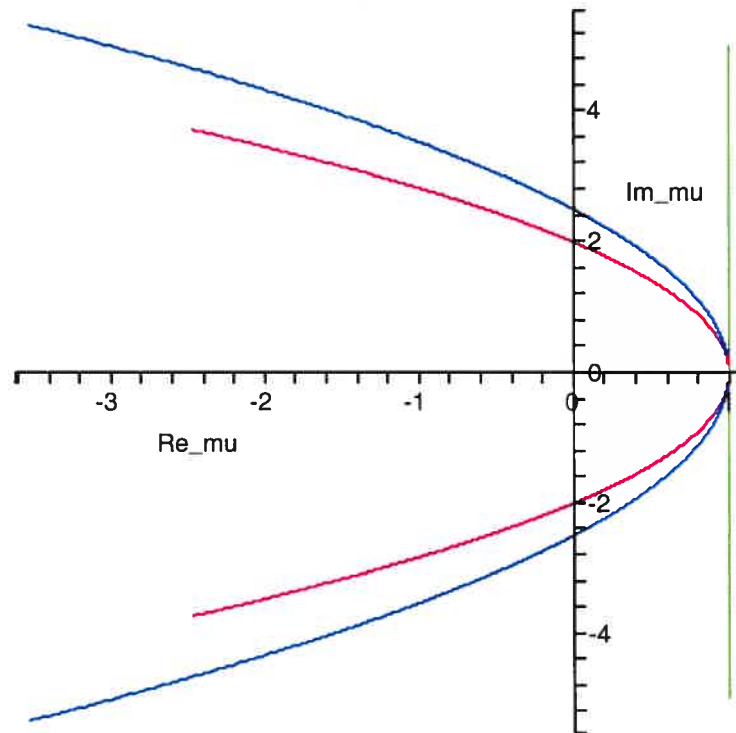


FIG. 3.4. Frontière de stabilité, dans le plan complexe de  $\mu$ , pour la distribution exponentielle à la prop. (3.5.1). Les régions stables se trouvent à gauche des courbes. En bleu : la courbe délimitant la région de stabilité pour  $\gamma = 4$  ou  $\gamma = 1/4$  ( $\sigma$ , le paramètre de la distr. exponentielle est  $\sigma = \gamma$  lorsque  $T = 1$ ). En rouge : la courbe délimitant la région où aucune déstabilisation par un délai n'est possible. (Il s'agit d'une parabole). En vert : droite délimitant la région de stabilité dans le cas limite sans délai,  $\gamma = \infty$ .

**Démonstration.** Avec  $\mu = Me^{i\nu}$ ,  $0 \leq \nu < 2\pi$ , la représentation polaire des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$ , et  $\xi(\tau) = \sigma e^{-\sigma\tau}$  la distribution définie sur  $[0, \infty)$ , l'équation caractéristique scalaire (3.2.3) devient, après intégration,

$$T\lambda + 1 - Me^{i\nu} \frac{\sigma}{\lambda + \sigma} = 0. \quad (3.5.4)$$

Posons  $\lambda = \lambda_1 + i\omega$ . Réécrire  $(T\lambda + 1)$  et  $(\lambda + \sigma)$  en coordonnées polaires transforme l'équation caractéristique scalaire (3.5.4) en une expression que l'on décompose en une équation sur le module (3.5.5) et une équation sur la phase (3.5.6).

$$\sigma M = \sqrt{(T\lambda_1 + 1)^2 + T^2\omega^2} \sqrt{(\lambda_1 + \sigma)^2 + \omega^2}, \quad (3.5.5)$$

$$\alpha + \beta - \nu = 0 \pmod{2\pi}, \quad (3.5.6)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$ , qui représentent respectivement les phases de  $(T\lambda + 1)$  et  $(\lambda + \sigma)$ , sont tels que  $\tan \alpha = \frac{T\omega}{T\lambda_1 + 1}$ ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$  et  $\tan \beta = \frac{\omega}{\lambda_1 + \sigma}$ ,  $0 \leq \beta < 2\pi$ .

$$\text{L'équation de phase implique que } \tan \nu = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

Y substituer les expressions de  $\tan \alpha$  et de  $\tan \beta$  mène à l'équation quadratique

$$(T \tan \nu) \omega^2 + (2T\lambda_1 + 1 + T\sigma) \omega - (\lambda_1 (1 + \sigma T + \lambda_1 T) + \sigma) \tan \nu = 0. \quad (3.5.7)$$

Appelons  $\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(\nu, \lambda_1)$  les solutions de cette équation (3.5.7) considérées comme fonctions de  $\nu$  et de  $\lambda_1$ . L'expression (3.5.3) de  $M_{\pm}(\nu)$  découle, après simplifications, de la substitution de  $\omega_{\pm}$  dans l'équation (3.5.5) lorsque  $\lambda_1 = 0$ .

Pour aboutir à l'expression (3.5.1), il nous reste à préciser le domaine de  $\tan \nu$  pour  $M_+(\nu)$  et  $M_-(\nu)$ .

Dénotons les phases  $\alpha$  et  $\beta$  par  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , et les constantes  $\frac{1}{T}$  et  $\sigma$ , par  $c_i$ ,  $i = 1, 2$ , respectivement, afin d'écrire

$$\tan \alpha_i = \frac{\omega}{\lambda_1 + c_i} \begin{cases} > 0, & \text{si } \omega > 0 \text{ et } \lambda_1 > -c \\ < 0, & \text{si } \omega > 0 \text{ et } \lambda_1 < -c \\ > 0, & \text{si } \omega < 0 \text{ et } \lambda_1 < -c \\ < 0, & \text{si } \omega < 0 \text{ et } \lambda_1 > -c \end{cases}, \text{ i.e. } \lambda + c \in \begin{cases} \text{quadrant I} \\ \text{quadrant II} \\ \text{quadrant III} \\ \text{quadrant IV} \end{cases} \text{ de } \mathbb{C}.$$

Puisque  $\arctan\left(\frac{\omega}{\lambda_1 + c_i}\right) \in \begin{cases} (0, \frac{\pi}{2}) \\ (-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$ , si  $\frac{\omega}{\lambda_1 + c_i} \begin{cases} > 0 \\ < 0, \end{cases}$ , et que l'on cherche  $\alpha_i$  dans l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2})$ , on trouve, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\alpha_i = \arctan\left(\frac{\omega}{\lambda_1 + c_i}\right) + n\pi, \quad \text{où } n = \begin{cases} 0, & \text{dans le quadrant I} \\ 1, & \text{dans les quadrants II} \\ & \text{et III} \\ 2, & \text{dans le quadrant IV.} \end{cases} \quad (3.5.8)$$

On situe  $\mu$  dans le plan complexe en étudiant le signe de l'expression de  $\tan \nu$  provenant de (3.5.7) lorsque  $\lambda_1 = 0$  :

$$\tan \nu = \frac{\omega(T\sigma + 1)}{\sigma - T\omega^2} \begin{cases} > 0, & \text{si } \omega > 0 \text{ et } \epsilon\omega^2 < 1 \\ > 0, & \text{si } \omega > 0 \text{ et } \epsilon\omega^2 > 1 \\ < 0, & \text{si } \omega < 0 \text{ et } \epsilon\omega^2 > 1 \\ < 0, & \text{si } \omega < 0 \text{ et } \epsilon\omega^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \mu \in \begin{cases} \text{quadrant I} \\ \text{quadrant II} \\ \text{quadrant III} \\ \text{quadrant IV} \end{cases}, \quad (3.5.9)$$

où l'on a noté  $\epsilon = \frac{T}{\sigma}$ .

Posons  $\nu_0 = \arctan\left(\frac{\omega(T\sigma + 1)}{\sigma - T\omega^2}\right)$ . On peut alors écrire, pour chacun des quadrants, la phase  $\nu \in [0, 2\pi)$  de la valeur propre  $\mu$  :

$$\nu = \nu_0 + \begin{cases} 0 \\ \pi \\ \pi \\ 2\pi \end{cases}, \quad \text{si } \mu \in \begin{cases} \text{quadrant I} \\ \text{quadrant II} \\ \text{quadrant III} \\ \text{quadrant IV} \end{cases}. \quad (3.5.10)$$

Lorsque  $\lambda_1 = 0$ , les solutions de l'équation (3.5.7) deviennent, en posant  $\gamma = T\sigma$ ,

$$\omega_{\pm} = \frac{-(1 + \gamma) \pm \sqrt{\Delta}}{2T \tan \nu}, \quad \text{où } \Delta = \gamma^2 + 2\gamma(1 + 2 \tan^2 \nu) + 1. \quad (3.5.11)$$

En nous servant de (3.5.9), nous allons connaître les quadrants dans lesquels s'appliquent les solutions respectives  $\omega_+$  et  $\omega_-$ . Pour  $\omega = \omega_-$ , on borne

$$\frac{T\omega_-^2}{\sigma} = \frac{(1 + \gamma + \sqrt{\Delta})^2}{4\gamma \tan^2 \nu} = 1 + \frac{(1 + \gamma + \sqrt{\Delta}) \sqrt{\Delta} + \gamma^2 + 2\gamma + 1}{2\gamma \tan^2 \nu} > 1. \quad (3.5.12)$$

Pour  $\omega = \omega_+$ , on remarque

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma(1 + 2 \tan^2 \nu) + 1} > \sqrt{\gamma^2 + 2\gamma + 1} = 1 + \gamma,$$

de sorte que

$$\frac{T\omega_+^2}{\sigma} = \frac{(1 + \gamma - \sqrt{\Delta})^2}{4\gamma \tan^2 \nu} = 1 + \frac{(1 + \gamma)}{2\gamma \tan^2 \nu} (1 + \gamma - \sqrt{\Delta}) < 1. \quad (3.5.13)$$

De ces inégalités (3.5.12) et (3.5.13), il ressort que la solution  $\omega_-$  est valide lorsque  $\mu$  tombe dans les quadrants II et III tandis que la solution  $\omega_+$  s'applique dans les quadrants I et IV. Les première et troisième ligne de l'expression (3.5.1) sont maintenant démontrées. L'égalité des limites

$$\lim_{\tan \nu \rightarrow \infty} M_+(\nu, \gamma) = \lim_{\tan \nu \rightarrow \infty} M_-(\nu, \gamma) = \frac{1 + \gamma}{\sqrt{\gamma}} \quad (3.5.14)$$

définit  $M_0(\gamma)$  de sorte que par construction, la fonction  $M(\nu, \gamma)$  est continue en  $\nu = \frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$ .

Il ne reste plus qu'à examiner, le long de la frontière décrite par (3.5.1), le signe de la dérivée de  $\lambda_1$  par rapport au paramètre  $\gamma$ .

Dériver implicitement l'expression (3.5.5) avec les solutions  $\omega_{\pm}$  de (3.5.7), et en substituant l'équation du module  $M = M_{\pm}(\nu; \gamma)$  exprimée à l'équation (3.5.3) mène, lorsque  $\lambda_1 = 0$ , à l'expression de

$$\left. \frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma} \right|_{\pm} (\gamma, \nu) = \frac{P(\gamma, \nu) \mp \sqrt{\Delta} Q(\gamma, \nu)}{T\gamma [R(\gamma, \nu) \mp \sqrt{\Delta} S(\gamma, \nu)]}, \quad (3.5.15)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
 P(\gamma, \nu) &= (3\eta^2 + 2)\gamma(1 - \gamma^2) - \gamma^4 + 1 \\
 Q(\gamma, \nu) &= ((\eta^2 + 1)\gamma(1 - \gamma) - \gamma^3 + 1) \\
 R(\gamma, \nu) &= \eta^2(15\gamma(\gamma + 1) + \gamma^3 + 1) + 12\gamma(\gamma + 1) + 4(\gamma^3 + 1) \\
 S(\gamma, \nu) &= (\eta^2(\gamma^2 + 6\gamma + 1) + 4(\gamma^2 + 2\gamma + 1)) \\
 \eta &= \tan \nu.
 \end{aligned}$$

On référera par la suite au numérateur et au dénominateur de cette expression au moyen des appellations respectives  $N_{\pm}$  et  $D_{\pm}$ .

La parité en  $\eta$  de la dérivée (3.5.15) lorsque  $\gamma > 0$  réduit l'étude du signe de cette dernière au cas où  $\eta > 0$ .

On montre qu'indépendamment de  $\nu$ ,

$$\left. \frac{\partial \lambda_1}{\partial \gamma}(\gamma, \nu) \right|_{\pm} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \text{ si et seulement si } \begin{cases} \gamma > 1 \\ \gamma = 1 \\ 0 < \gamma < 1. \end{cases} \quad (3.5.16)$$

En effet, annuler le numérateur de la dérivée (3.5.15) equivaut à écrire

$$0 = \Delta Q^2 - P^2 = 4\eta^6 \gamma^3 (\gamma - 1)^2. \quad (3.5.17)$$

Ainsi le seul zéro non nul du numérateur est  $\gamma = 1$  et puisque, pour cette valeur, le dénominateur

$$D_{\pm} = \gamma T \left( 32(\eta^2 + 1) \mp \sqrt{\eta^2 + 1}(\eta^2 + 2) \right)$$

ne s'annule pas pour  $\eta$  général, on conclut à la seconde ligne de l'énoncé (3.5.16).

Les deux autres cas de (3.5.16) découleront de la dérivée de la fonction (3.5.15) évaluée en  $\gamma = 1$  comme

$$\left. \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \gamma^2} \right|_{\pm}^{\gamma=1}(\eta) = \frac{N_{\gamma=1}^{\pm}}{D_{\gamma=1}}, \quad (3.5.18)$$

où les dénominateur et numérateur sont respectivement :

$$D_{\gamma=1} = 2T\sqrt{\eta^2 + 1} \left( -8\eta^2 - 3 + (4\eta^2 + 8)\sqrt{\eta^2 + 1} \right)^2 > 0, \quad (3.5.19)$$

$$N_{\gamma=1}^{\pm} = \pm U(\eta) - V(\eta)\sqrt{\eta^2 + 1}, \quad (3.5.20)$$

avec

$$U(\eta) = 44 + 119\eta^2 + 95\eta^4 + 20\eta^6 > 0, \quad (3.5.21)$$

$$V(\eta) = 44 + 97\eta^2 + 52\eta^4 + 4\eta^6 > 0. \quad (3.5.22)$$

Puisque le dénominateur  $D_{\gamma=1}$  est toujours positif, le signe du numérateur est celui de la dérivée seconde (3.5.18). De par le signe des fonctions  $U(\eta)$  et  $V(\eta)$ , il est immédiat que  $N_{\gamma=1}^- < 0$ . Pour montrer que  $N_{\gamma=1}^+ < 0$ , on commence par chercher les racines possibles de  $N_{\gamma=1}^+ = 0$ . Cette équation implique le polynôme

$$16x^7 + 3x^6 + 96x^5 + 135x^4 + 55x^3 = 0, \quad \text{avec } x = \eta^2. \quad (3.5.23)$$

Comme tous les signes de ce polynôme sont positifs, la seule racine réelle en est  $\eta = 0$  et donc  $N_{\gamma=1}^+(\eta)$  ne change jamais de signe pour  $\eta > 0$ . On vérifie que ce signe est négatif en injectant une valeur arbitraire, par exemple  $\eta = 1$  pour laquelle on a  $N_{\gamma=1}^+(1) = 278 - 197\sqrt{2} < 0$ . La dérivée seconde (3.5.18) en  $\gamma = 1$  est par conséquent toujours négative pour les deux branches  $\omega = \omega_{\pm}$ , aboutissant au résultat (3.5.16).

Considérons  $\mu_* = \mu_1 + i\mu_2$  de la région  $\left\{ \mu_1 + i\mu_2 \in \mathbb{C} \mid 1 - \frac{\mu_2^2}{4} < \mu_1 < 1 \right\} = \mathcal{R}$ , appartenant à la courbe décrite en (3.5.1). Si  $\gamma = 0$ , on sait que  $\mathcal{R}$  est une région de stabilité. Lorsque  $\gamma$  croît entre 0 et 1, la dérivée positive en (3.5.16) indique une perte de stabilité pour les  $\mu_*$  le long de la frontière, de sorte qu'en  $\gamma = 1$ , la région  $\mathcal{R}$  en est une d'instabilité. À l'inverse, lorsque  $\gamma$  s'élève au delà de 1 pour tendre vers l'infini, la dérivée négative en (3.5.16) produit une restabilisation le long de la frontière et la région  $\mathcal{R}$  redevient alors stable. Ainsi, la courbe (3.5.1) est la frontière qui partage la région de stabilité, à gauche, de celle d'instabilité s'étendant à droite.  $\square$

**Corollaire 3.5.1.** *Considérons la distribution exponentielle  $\xi(\tau) = \sigma e^{-\sigma\tau}$  définie sur  $[0, \infty)$  dans l'équation (3.2.1) et supposons complexe au moins une des valeurs propres  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$ . Alors,*

- (1) *La solution nulle de l'équation (3.2.1) reste uniformément asymptotiquement stable indépendamment de  $\sigma$  si et seulement si, pour  $1 \leq j \leq N$ ,*

$$\Re(\mu_j) < 1 - \frac{1}{4} (\Im(\mu_j))^2, \quad (3.5.24)$$

(2) Si pour le système sans délai la solution nulle de l'équation (3.2.1) est uniformément asymptotiquement stable, une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une valeur de  $\sigma$  déstabilisant cette solution est que la condition (3.5.24) ne soit pas satisfaite.

**Démonstration.** Lorsque  $\gamma = 1$ , l'équation (3.5.3) se simplifie, au moyen des identités trigonométriques, pour aboutir à

$$M = \frac{2}{1 - \cos \nu}. \quad (3.5.25)$$

On reconnaît, exprimée en coordonnées polaires, la parabole de foyer à l'origine qui se réécrit, en coordonnées cartésiennes,

$$\Re(\mu) = 1 - \left( \frac{\Im(\mu)}{2} \right)^2. \quad (3.5.26)$$

Étudions le signe de la dérivée du module par rapport au paramètre  $\gamma = \sigma T$ ,

$$\frac{dM}{d\gamma}(\lambda 1, \nu, \gamma) = \frac{N^\pm}{M \gamma^3 \eta^4 \sqrt{\Delta}}, \quad (3.5.27)$$

où  $\Delta$  est défini à l'équation (3.5.11),

$$\begin{aligned} \eta &= \tan \nu, \\ N^\pm &= (\gamma - 1)(\gamma + 1)(\eta^2 + 1)G^\pm, \\ \text{avec } G^\pm &= (E\sqrt{\Delta_2} \mp F), \\ E &= \gamma^2 + (2 + \eta^2)\gamma + 1, \\ F &= (\gamma + 1)(\gamma^2 + (3\eta^2 + 2)\gamma + 1). \end{aligned}$$

La fonction  $G^\pm$  n'a jamais de zéro, car, l'annuler entraîne l'équation

$$\gamma^3 \eta^6 = 0,$$

qui ne présente aucun zéro pour  $\gamma > 0$ . Le seul zéro du numérateur  $N^\pm$  est par conséquent  $\gamma = 1$  et le signe de  $N^\pm$  correspond à celui du facteur  $(\gamma - 1)$ . Le

dénominateur de la dérivée (3.5.27) étant positif indépendamment de  $\eta$  et de  $\gamma$ , le signe de celle-ci apparaît :

$$\frac{dM}{d\gamma}(\lambda_1, \nu, \gamma) = \begin{cases} < 0, & \text{si } \gamma < 1 \\ = 0, & \text{si } \gamma = 1 \\ > 0, & \text{si } \gamma > 1 \end{cases} . \quad (3.5.28)$$

Le module de la frontière de stabilité atteint donc, indépendamment de la phase  $\nu$ , un minimum en  $\gamma = 1$ . Les bras de la frontière s'ouvrent à mesure que le paramètre  $\gamma$  s'éloigne de 1, et l'intersection des régions stables pour chaque  $\gamma$  correspond à la région de stabilité lorsque  $\gamma = 1$ . L'équation (3.5.26) entraîne alors que la région de déstabilisation impossible par le délai est décrite par (3.5.24).  $\square$

### 3.6. SIMULATION NUMÉRIQUE DES FRONTIÈRES DE STABILITÉ

Les frontières de stabilité obtenues aux propositions (3.5.1) et (3.4.2) ont été vérifiées par des simulations numériques de l'équation linéarisée (3.2.1) au moyen du logiciel Matlab. La fonction *dde23* de Matlab résout numériquement les équations différentielles à délai discret, mais non celles à délai distribué.

Cependant, en discrétisant le délai continu suivant la distribution, on peut approximer l'intégrale par une somme de Riemann que l'on représente matriciellement

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \xi(\tau) \mathbf{V}(t - \tau) d\tau &\approx \Delta\tau \mathbf{A} \sum_{n=1}^{M_\tau} \mathbf{V}(t - \tau_n) \xi(\tau_n) \\ &= \Delta\tau \mathbf{A} \mathbf{W} \boldsymbol{\Xi}, \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{V}$  sont comme en (3.2.1), tandis que  $\mathbf{W} = [V_j(t - \tau_n)]$  est une matrice avec  $j = 1, \dots, N$ , et  $n = 1, \dots, M_\tau$ . Le vecteur  $\boldsymbol{\Xi} = [\xi(\tau_n)]$ ,  $n = 1, \dots, M_\tau$ , représente le vecteur colonne de la distribution échantillonnée, avec  $M_\tau = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\Delta\tau}$ .

L'équation à délai distribué est alors approximée par une équation à  $M_\tau$  délais discrets que peut calculer la fonction *dde23*. Puisque cette fonction ne gère que des délais non nuls, nous choisissons  $\tau_1 = 10^{-4}$ , pour approximer 0. Dans le cas où la distribution est à support compact, on appelle  $\tau_2 = d$ , le délai maximal.



Avec la distribution exponentielle (1.7.5), au contraire, il est nécessaire de tronquer la distribution pour qu'elle soit supportée par un intervalle borné. L'écart relatif de la moyenne de la distribution tronquée

$$\bar{\tau} = \int_0^d \tau \sigma e^{-\sigma \tau} d\tau$$

par rapport à la moyenne  $\frac{1}{\sigma}$  est

$$\epsilon(\sigma, d) = \sigma \left( \frac{1}{\sigma} - \bar{\tau} \right) = e^{-\sigma d} (1 + \sigma d).$$

L'erreur  $\epsilon$  induite en choisissant  $d = \frac{10}{\sigma}$  reste de l'ordre de  $10^{-9}$ .

D'autre part, la discrétisation adoptée dans tous les cas,  $\Delta\tau = \frac{\tau_2 - \tau_1}{200}$ , est assez fine pour permettre une bonne approximation tout en limitant le temps de calcul.

La condition initiale ayant été systématiquement employée est  $\phi_0 = 5 \sin t$ , quoique d'autres fonctions aient été tentées, toujours avec le même résultat. Avec une constante de temps de  $T = 20$ , la durée des simulations, choisie au cas par cas et suffisamment longue pour permettre d'observer la tendance de la dynamique, variait entre 200 et 700. Pour obtenir des résultats numériques comparables aux graphiques des frontières théoriques, les paramètres à considérer étaient  $\mu$  et  $d$ . Pour chaque choix de ces deux paramètres, le verdict de stabilité a été constaté subjectivement à partir du graphique de  $V(t)$  en fonction du temps.

Lorsque le paramètre  $\mu$  est réel, l'équation différentielle simulée est scalaire avec la matrice  $\mathbf{A}$  ramenée à  $\mu$ . Dans le cas de la distribution uniforme étudiée en (3.4.2) avec  $\mu$  réel, on a déterminé numériquement 41 points localisés sur la frontière de stabilité, avec une précision relative variant entre 0,5% et 5% selon la valeur de  $\mu$ , pour  $\mu$  entre -4,45 et  $\mu = -20$ , et  $d$  entre 5,5 et 162. Ces résultats numériques s'accordaient parfaitement avec la frontière démontrée analytiquement en (3.1).

Les frontières de stabilité trouvées pour les distributions triangulaire et exponentielle lorsque le paramètre  $\mu$  est réel, correspondent également exactement aux résultats analytiques de (3.4.3) et (3.4.4). Les paramètres  $\mu$  et  $d$  ont respectivement été explorés de -0.1 à 1,5, et de  $10^{-2}$  à  $10^2$ .

Pour étudier numériquement la dynamique associée à des valeurs propres complexes, nous utilisons la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad (3.6.2)$$

dont les valeurs propres sont  $\mu = a \pm bi$ .

La frontière de stabilité obtenue avec la distribution exponentielle et  $\mu$  complexe, à l'équation (3.5.1), est vérifiée pour le paramètre  $a$  fixé en  $a = 0$ . Le paramètre  $b$  devient alors  $M_0(\gamma)$ . Avec le paramètre  $\gamma$  entre 0,25 et 2, ainsi que la valeur imaginaire  $b_{num}$  entre 1,8 et 2,5, les huit points de déstabilisation simulés numériquement se situent sur la frontière de stabilité théorique donnée par (3.5.2) avec des écarts relatifs  $\frac{b_{num} - M_0}{M_0}$  allant de 0.11% à 2.8%. Ces erreurs s'expliquent par l'incertitude de lecture de même que par l'erreur numérique provenant de la fonction *dde23* dont la tolérance était fixée à  $10^{-2}$ .

### 3.7. COMPARAISON DES FRONTIÈRES DE STABILITÉ

Tant lorsque les valeurs propres  $\mu$  de la matrice  $\mathbf{A}$  sont réelles, à la section (3.4), que lorsqu'elles sont complexes, à la section (3.5), les différentes frontières de stabilité obtenues seront comparées entre elles, avec les critères suffisants de stabilité de la section (3.3), et avec les résultats du cas discret rappelé ci-après.

#### 3.7.1. Frontières de stabilité avec un délai discret [1]

L'équation vectorielle linéaire, analogue par sa forme à l'équation (3.2.1),

$$T\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(t - \tau), \quad (3.7.1)$$

a été étudiée par Bélair [1] sous la forme normalisée avec  $T = 1$ . Les notations ont été ajustées pour faciliter la comparaison.

**Théorème 3.7.1** (Bélair [1]). *Supposons réelles toutes les valeurs propres  $\mu_i$  de la matrice  $\mathbf{A}$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Alors, la solution nulle de l'équation (3.7.1) est asymptotiquement stable si et seulement si  $\forall i = 1 \dots N$ ,*

$$(1) \quad -1 < \mu_i < 1 \quad \text{ou}$$

(2)  $\mu_i < -1$  et  $\tau < [\arccos(1/\mu_i)]/\sqrt{\mu_i^2 - 1}$  où l'arccos prend ses valeurs dans l'intervalle  $[\pi/2, \pi]$ .

**Corollaire 3.7.1.** *Supposons réelles toutes les valeurs propres  $\mu_i$  de la matrice  $\mathbf{A}$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Lorsque la solution nulle de l'équation (3.7.1) est asymptotiquement stable pour  $\tau = 0$ , une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un délai  $\tau$  déstabilisant la solution nulle de l'équation (3.7.1) est que*

$$\mu_{\max} < 1 < \mu_{\min}, \quad (3.7.2)$$

où l'on a appelé  $\mu_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} \Re[\mu_i]$  et  $\mu_{\min} = \max_{1 \leq i \leq n} \|\mu_i\|$ .

Le théorème suivant montre la frontière de stabilité de l'équation (3.7.1) pour un délai  $\tau$  donné lorsque  $\mu$  est complexe. La formulation a été réajustée pour fin de comparaison.

**Théorème 3.7.2** (Bélair [1]). *Supposons complexe au moins une des valeurs propres  $\mu_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$ , et écrivons  $\mu - 1 = Re^{i\phi}$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Alors, la solution nulle de l'équation (3.7.1) est asymptotiquement stable si et seulement si  $\forall j = 1 \dots N$ ,  $\mu_j$  se trouve à l'intérieur du domaine décrit par les arcs des spirales d'Archimède  $R = [\phi - \frac{\pi}{2}]/\tau$  et  $R = [\frac{3\pi}{2} - \phi]/\tau$ , pour  $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$ .*

**Corollaire 3.7.2** (Bélair [1]). *Supposons complexe au moins une des valeurs propres  $\mu_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , de la matrice  $\mathbf{A}$ . Supposons le cas où la solution nulle de l'équation (3.7.1) est asymptotiquement stable pour  $\tau = 0$ . Alors, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un délai  $\tau$  déstabilisant la solution nulle de l'équation (3.7.1) est que*

$$\max_{1 \leq i \leq N} \Re[\mu_i] < 1 < \max_{1 \leq i \leq N} \|\mu_i\|. \quad (3.7.3)$$

### 3.7.2. Pour $\mathbf{A}$ n'admettant que des valeurs propres $\mu$ réelles

Pour chacune des distributions de délai présentées au graphique 3.6, nous disposons maintenant de la frontière de stabilité en termes de  $\mu$  réel. Ces différentes courbes sont comparées au graphique 3.5 pour  $\bar{\tau}$  petit, et au graphique 3.6, pour  $\bar{\tau}$  grand.

La condition suffisante de stabilité (3.3.3) de la proposition (3.3.2) ne dépend pas de la forme précise de la distribution  $\xi(\tau)$  du délai, mais seulement de sa

moyenne  $\bar{\tau}$  et s'applique donc également au délai discret. Par conséquent, la région délimitée par la condition (3.3.3) doit être nécessairement plus étroite que la région de stabilité du cas discret de délai  $\tau_0 = \bar{\tau}$ . C'est ce que nous constatons au graphique 3.5. La condition (3.3.3) ne constitue donc pas un critère utile en pratique pour connaître la stabilité d'une équation à délai distribué dont l'équivalent discret (3.7.1) serait stable.

Il a été observé [19] qu'élargir la distribution simplifiait en général la dynamique et tendait à la stabiliser. Si le système est stable avec un délai discret de  $\tau_0$ , le système conservera sa stabilité pour toute distribution élargie de moyenne  $\bar{\tau} = \tau_0$ . Les régions de stabilité pour toutes les distributions étudiées sont donc nécessairement plus larges que celle associée au cas discret.

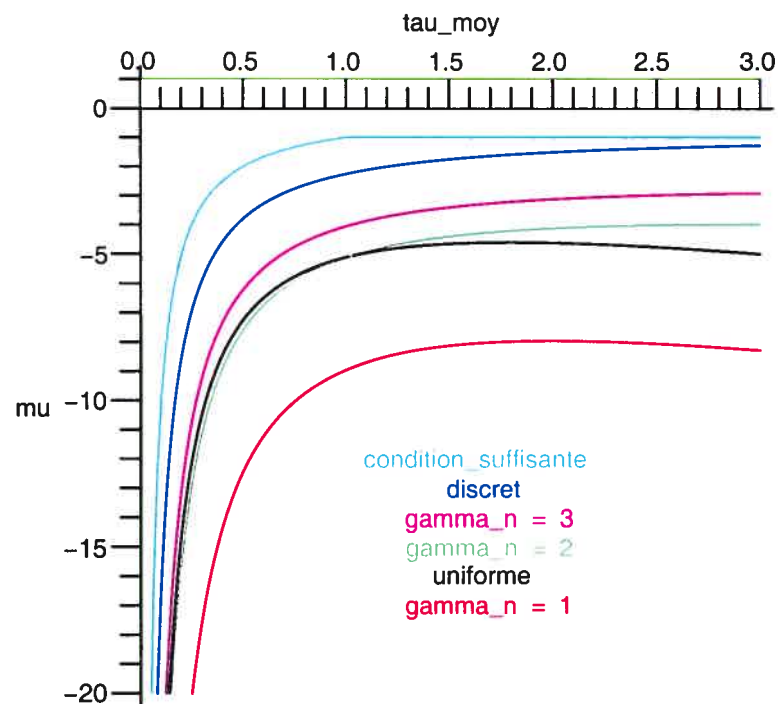


FIG. 3.5. Comparaison des frontières de stabilité suivant les valeurs de  $\mu$  et du délai moyen  $\bar{\tau}$  normalisé par rapport à  $T$ , pour  $\bar{\tau} < 3$ .

La variance des distributions de délai mesure l'élargissement d'une distribution par rapport au délai moyen  $\bar{\tau}$ . Normalisée en la divisant par  $\bar{\tau}^2$ , la variance pour chacune des distributions est affichée au tableau 3.1. À un ordre croissant non-strict de la taille des régions de stabilité, correspond une croissance également non-strict de la variance. Cette ambiguïté limite l'utilité de la variance pour prédire les distributions de délai les plus stabilisantes.

En particulier, les distributions gamma d'ordre  $n$ , définies en (1.7.6) assistent, à mesure que  $n$  croît, à leur élargissement associé à leur variance

$$\text{Var}[\tau(n)] = \frac{\bar{\tau}^2}{n+1}.$$

Dès lors, on constate aux graphiques 3.5 et 3.6 que les frontières de stabilité associées s'emboîtent et forment, suivant la proposition (3.4.5), une suite convergeant vers la frontière du cas discret.

On sait depuis les propositions (3.4.4) et (3.4.3), que les régions de stabilité des distributions exponentielle et triangulaire sont maximales. Ces distributions de délai se concentrent proche de  $\tau = 0$  et s'apparentent davantage à des élargissements d'un délai discret nul qu'à ceux du délai discret  $\tau_0 = \bar{\tau}$ , ce qui explique sans doute que la variance ne soit pas le critère le plus approprié dans ces cas. Même si leurs variances sont les plus élevées du tableau, corroborant la stabilité maximale associée, cette indication est imparfaite car elle attribue la même valeur  $v = \frac{1}{2}$  aux cas triangulaire et gamma pour  $n=1$ , alors que la région de stabilité est bien plus limitée pour ce dernier cas.

Les frontières de stabilité correspondant aux distributions uniforme et gamma pour  $n=1$ , illustrées aux graphiques 3.6, tendent vers des asymptotes parallèles lorsque le délai moyen normalisé  $\bar{\tau}_n = \frac{\bar{\tau}}{T}$  croît. Calculées à partir de (3.4.32) et de (3.4.43), ces asymptotes s'écrivent respectivement

$$\mu = -\bar{\tau}_n \quad \text{et} \quad \mu = -(\bar{\tau}_n + 4), \quad (3.7.4)$$

affichant la même pente de  $-1$ . Ainsi, pour tout  $\bar{\tau} > 0$ , la frontière associée à la distribution uniforme, notée  $C_1(\mu, 2\bar{\tau}) = 0$  d'après (3.4.2), domine la frontière  $\mu = F_1(\bar{\tau})$  de la distribution gamma pour  $n=1$ .

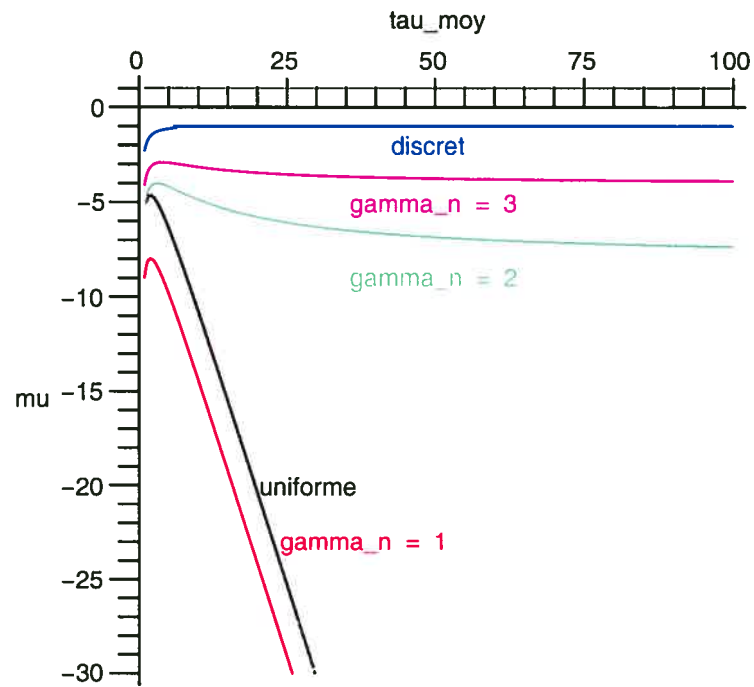


FIG. 3.6. Comparaison des frontières de stabilité suivant les valeurs de  $\mu$  et du délai moyen  $\bar{\tau}$  normalisé par rapport à  $T$ , pour  $1 < \bar{\tau} < 100$ .

Au graphique 3.5, on découvre que les frontières de stabilité des distributions uniforme et gamma pour  $n=2$  s'intersectent en  $\bar{\tau}_n = 1$ . Alors que pour  $\bar{\tau}_n < 1$ , l'équation avec la distribution uniforme est moins stable d'une différence négligeable, elle devient la plus stable lorsque  $\bar{\tau}_n > 1$ . Les comportements pour  $n$  grand, visibles au graphique 3.6, ont déjà été expliqués en (3.7.4) et au graphique 3.3.

En adoptant comme critère le moment d'ordre  $\frac{1}{2}$ , défini par

$$M_{\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} \xi(\tau) \sqrt{\tau} d\tau \quad (3.7.5)$$

qui mesure l'écart d'une distribution par rapport au délai nul en accentuant le poids des faibles délais, les distributions de délai  $\xi(\tau)$  étudiées jusqu'ici peuvent être classées en fonction de la taille de leur région de stabilité associée. Au tableau

3.1 présenté ci-dessous, on vérifie que l'ordre strictement décroissant des valeurs de  $M_{\frac{1}{2}}$  correspond à l'ordre décroissant non strict des régions de stabilité observées au graphique 3.6. Les cas des distributions triangulaire et exponentielle montrent qu'en général deux distributions pour lesquelles les régions de stabilité sont égales n'ont pas des valeurs  $M_{\frac{1}{2}}$  égales. Le classement ainsi réalisé ne signifie pas non plus l'inclusion des régions de stabilité les unes dans les autres.

Une étude plus approfondie de la validité du critère  $M_{\frac{1}{2}}$  exigerait une plus grande diversité de distributions de délai et permettrait d'en décrire les limitations.

Distribution	Variance normalisée	$M_{\frac{1}{2}}$ normalisé
Discrète	0	1
gamma( $n = 3$ )	$\frac{1}{4}$	96,9%
gamma( $n = 2$ )	$\frac{1}{3}$	95,9%
Uniforme	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 94,2\%$
gamma( $n = 1$ )	$\frac{1}{2}$	94%
Triangulaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{13}\sqrt{3} \approx 92,4\%$
Exponentielle	1	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \approx 88,6\%$

TAB. 3.1. Variance et moment- $\frac{1}{2}$  normalisés correspondant aux distributions ordonnées suivant la taille de leur région de stabilité.

### 3.7.3. Pour A admettant des valeurs propres $\mu$ complexes

Que les valeurs propres soient réelles ou complexes, l'élargissement des distributions joue le même rôle stabilisateur. Le graphique 3.7 en rend compte, puisque, pour tout délai moyen  $\bar{\tau}$ , la région de stabilité du cas discret, en forme de goutte d'eau, est incluse dans la région de stabilité du cas exponentiel délimitée par la courbe ouverte vers la gauche.

Les courbes en rouge décrivent les régions où la déstabilisation par le délai est impossible. Avec le délai discret, c'est lorsque le délai tend vers l'infini qu'apparaît la région, circulaire de rayon unitaire, de déstabilisation impossible par le délai.

Pour la distribution exponentielle, ces circonstances sont plutôt atteintes lorsque  $\gamma = 1$ , comme le corollaire (3.5.1) l'a montré, et la frontière de stabilité est alors la parabole rouge illustrée au graphique 3.4.

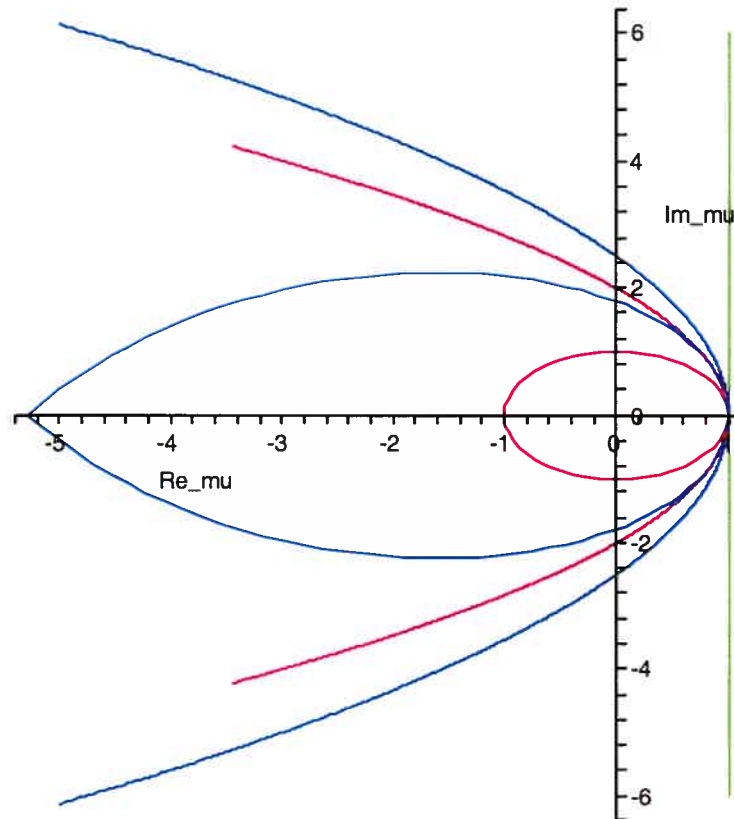


FIG. 3.7. Comparaison, dans le plan complexe des valeurs de  $\mu$ , des frontières de stabilité pour le délai discret (courbes fermées), et pour le délai distribué exponentiellement. En bleu : les courbes délimitant les régions de stabilité pour le délai moyen  $\bar{\tau} = 0,25$  avec  $T = 1$  (Dans le cas de la distribution exponentielle,  $\sigma = \gamma = \frac{1}{\bar{\tau}} = 4$ ). En rouge : les courbes délimitant les régions où il n'y a pas de déstabilisation possible par un délai. Le cercle de rayon unitaire et la parabole rouge correspondent respectivement aux cas discret et exponentiel. En vert : le cas limite sans délai,  $\bar{\tau} = 0$ .



# Chapitre 4

---

## STABILITÉ D'UN RÉSEAU DE NEURONES MINIMAL

### 4.1. INTRODUCTION

Au chapitre 3, des frontières de stabilité détaillées ont été décrites pour des valeurs propres de  $\mathbf{A}$ , tant réelles que complexes. L'utilité de telles frontières est de prédire exactement la déstabilisation des points d'équilibre d'un système comme celui de la mémoire spatiale modélisé au chapitre 1. Il est alors nécessaire d'étudier la perte de stabilité des états de mémoire, non plus en termes des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$ , mais bien dans l'espace des paramètres physiques. La complexité du modèle interdit une analyse mathématique générale pour  $N$  neurones et oblige l'examen semi-numérique de cas spécifiques.

Le réseau de neuf neurones ( $N = 9$ ) correspond à la carte spatiale de taille minimale,  $3 \times 3$ , sur laquelle le déplacement d'un paquet d'activation reste possible. La matrice de connexion totale associée,  $9 \times 9$ , est en même temps parmi les plus grandes à être diagonalisable symboliquement dans un temps raisonnable par un logiciel comme Maple.

Pour simplifier, seul le point d'équilibre  $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}_{seuil}$  du système non-linéaire est étudié ici, de manière à ce que  $\mathbf{A} = \beta\mathbf{J}$ . En fait, cet équilibre ne correspond pas à un état de mémoire du modèle du chapitre 1 qui nécessite un profil bombé d'activation. On aurait pu calculer numériquement un tel point d'équilibre pertinent en utilisant (2.5.1), pour ensuite lui appliquer la démarche qui suit.

## 4.2. CONNEXIONS SYMÉTRIQUES

Pour la plupart des distributions considérées au chapitre 3 dans le cas de  $\mu$  réel, nous étudierons les régions de stabilité, de déstabilisation possible par le délai et d'instabilité sans délai en termes de l'inhibition  $h$  et du gain  $\beta$ .

### 4.2.1. Matrice de connexion symétrique

En choisissant  $\sigma_p = 1$  dans l'équation (1.4.3), la matrice des connexions récurrentes pour  $N = 9$  s'écrit

$$\mathbf{J}^{sym} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_1 \end{pmatrix} \quad (4.2.1)$$

$$\text{avec les blocs } \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & e_2 \\ e_1 & 0 & e_1 \\ e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} e_1 & e_1 & e_2 \\ e_1 & e_1 & e_1 \\ e_2 & e_1 & e_1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{E}_3 = e_2 \mathcal{I},$$

où on a noté  $e_m = e^{-m} - h$ , et utilisé  $\mathcal{I}$  pour désigner la matrice pleine ne contenant que des 1.

### 4.2.2. Valeurs propres et stabilité

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{J}^{sym}$ , dénotées  $z_i(h)$ ,  $1 \leq i \leq 9$ , peuvent toutes s'écrire analytiquement comme fonction de  $h$ . Puisque la matrice  $\mathbf{J}^{sym}$  est symétrique, toutes les valeurs propres sont réelles. Le graphique 4.1 les affiche en n'identifiant que les seules racines susceptibles de déstabiliser le système. En fonction de ces dernières, le maximum  $m_{max}$  des valeurs propres, de même que le minimum  $m_{min}$  s'expriment respectivement comme

$$m_{max}(h) = \begin{cases} z_3(h) & \text{pour } h \in [0, h_0] \\ z_6(h) & \text{pour } h \in [h_0, \infty) \end{cases} \quad (4.2.2)$$

et

$$m_{min}(h) = \begin{cases} z_2(h) & \text{pour } h \in [0, h_1] \\ z_4(h) & \text{pour } h \in [h_1, \infty) . \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Les valeurs de  $h_0$  et  $h_1$  y sont définies comme les abscisses des intersections respectives  $z_3(h) = z_6(h)$  et  $z_2(h) = z_4(h)$ . On évalue numériquement que  $h_0 = 0,2344 \pm 0,0001$ , tandis que l'on vérifie que  $h_1 = e^{-2}$  en calculant  $z_4(e^{-2}) - z_2(e^{-2}) = 0$  avec une erreur absolue de l'ordre de  $10^{-10}$ .

Sur le graphique 4.1, le courbe bleue décrivant  $z_3$ , ainsi que la courbe brune d'une valeur propre sans dénomination particulière, semblent disparaître en se rapprochant de la valeur de zéro. Il n'en est rien cependant, car il est connu que les valeurs propres d'une matrice quelconque sont toujours définies et continues en fonction de ces éléments. L'expression de  $z_3$  ayant a priori une composante imaginaire, la séquence compliquée des opérations, durant son évaluation numérique, a provoqué une erreur d'un ordre de grandeur similaire sur les composantes réelle et imaginaire, qui toutes deux devaient tendre vers 0. La valeur obtenue étant ainsi interprétée comme complexe plutôt que réelle, elle ne pouvait plus dès lors être affichée au graphique. Aucune simplification analytique supplémentaire n'a été trouvée.

Détaillons maintenant les expressions des valeurs propres  $z_2$ ,  $z_4$  et  $z_6$

$$z_2(h) = e^{-2} - 2e^{-1} + h, \quad (4.2.4)$$

$$z_4(h) = \frac{-1}{6} \left[ \Delta_4^{1/6} \left( \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \right) - 4e^{-1} - 8e^{-2} + 12h \right. \\ \left. + \Delta_4^{-1/6} \left( \Delta_8 \cos \theta + \Delta_7 \sqrt{3} \sin \theta \right) \right] \quad (4.2.5)$$

$$z_6(h) = h + \sqrt{2}e^{-1} - \left( 1 + \sqrt{2} \right) e^{-2},$$

où  $\Delta_4$ ,  $\Delta_7$ ,  $\Delta_8$  et  $\theta$  sont donnés ci-après.

$$\begin{aligned}
\Delta_8 &= (19e^{-4} + 22e^{-3} + 40e^{-2} - 60e^{-2}h - 102e^{-1}h + 81h^2), \\
\Delta_7 &= (e^{-2}(40 - 60h) + 22e^{-3} + 19e^{-4} + 81h^2 - 102e^{-1}h), \\
\Delta_4 &= -427392he^{-5} + 1109052e^{-7}h^2 - 2007666e^{-1}h^5 + 2753676e^{-5}h^2 \\
&\quad - 917064e^{-6}h + 3287061e^{-2}h^4 + 531441h^6 - 2953908e^{-3}h^3 + 142692e^{-8} \\
&\quad - 613296e^{-8}h + 3464208e^{-3}h^4 + 2299266e^{-6}h^2 + 126336e^{-7} - 247878e^{-9}h \\
&\quad + 23124e^{-11} + 116260e^{-9} + 50176e^{-6} - 4286520e^{-4}h^3 - 63468he^{-10} \\
&\quad - 2641896e^{-5}h^3 - 919548e^{-7}h - 746496e^{-6}h^3 + 1220346e^{-4}h^4 + 1527012e^{-4}h^2 \\
&\quad + 282609e^{-8}h^2 + 66129e^{-10} + 6724e^{-12} - 9e^{-2}\Delta_3 - 1180980e^{-2}h^5, \\
\theta &= \frac{1}{3} \arctan \left( \frac{3e^{-1}\sqrt{-\Delta_3}}{\Delta_5} \right) + \frac{\pi}{3},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta_5 &= 282e^{-4} - 954e^{-2}h + 224e^{-3} + 82e^{-6} - 387e^{-4}h + 141e^{-5} \\
&\quad + 810e^{-2}h^2 - 729h^3 + 1377e^{-1}h^2 - 846e^{-3}h
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= 6912e^{-3}h - 17424e^{-2}h^3 + 1164he^{-5} - 3264e^{-5}h^2 - 1536e^{-4} + 360e^{-6}h \\
&\quad + 18948e^{-3}h^2 - 12252e^{-2}h^2 - 3159h^4 + 10020e^{-1}h^3 + 6318e^{-1}h^4 \\
&\quad - 3159e^{-2}h^4 + 4788e^{-3}h^3 - 531e^{-8} + 168e^{-8}h - 1146e^{-6}h^2 + 588e^{-7} \\
&\quad + 2304e^{-5} - 10056e^{-4}h - 78e^{-9} - 732e^{-6} + 2616e^{-4}h^3 + 1452e^{-7}h \\
&\quad - 2286e^{-4}h^2 - 15e^{-10}.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres  $z_2(h)$  et  $z_6(h)$  sont des droites croissantes, alors que  $z_3(h)$  présente un minimum et  $z_4(h)$ , un maximum.

Lorsque  $h \leq e^{-2}$ , la matrice de connexion est non-negative et d'après le théorème de Perron-Frobenius, on a  $m_{max} > |m_{min}|$ , de sorte que, quelle que soit la forme et le délai moyen de la distribution du délai, la perte de stabilité sera causée par l'atteinte de  $m_{max} = \frac{1}{\beta}$ . De même, lorsque  $h > e^{-1}$ , la matrice est

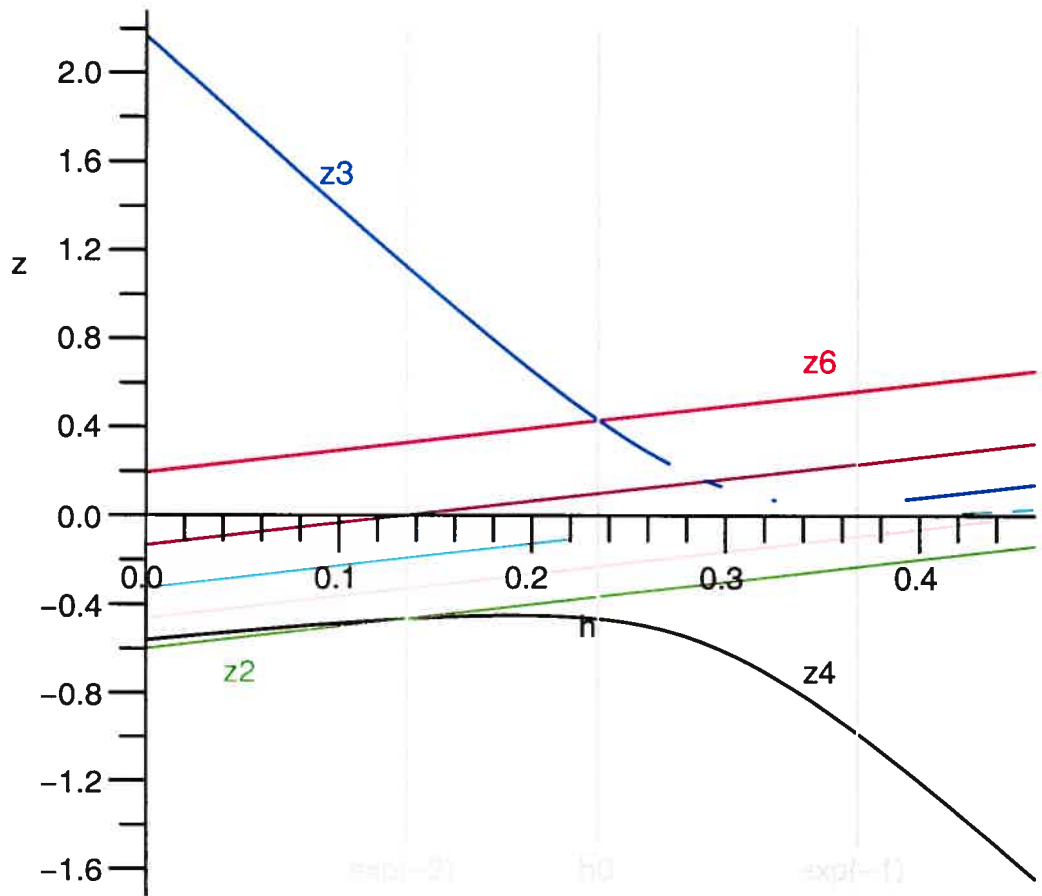


FIG. 4.1. Valeurs propres  $m$  de la matrice  $J^{sym}$ . En particulier, on reconnaît  $z_2$  (en vert),  $z_3$  (en bleu),  $z_4$  (en noir),  $z_6$  (en rouge). Proche de zéro, contrairement à ce que suggère numériquement le graphique, les valeurs propres existent et restent continues pour tout  $h$ . Les droites grises identifient l'intervalle  $[e^{-2}, e^{-1}]$  de  $h$ , ainsi que la valeur abscissale  $h_0$  minimisant  $m_{max}(h)$ .

non-positive. Nécessitant à la fois des connexions inhibitrices et excitatrices, le modèle de mémoire exige alors que  $h \in [e^{-2}, e^{-1}]$ .

Dans le cas où le délai suit la distribution exponentielle (1.7.5) ou triangulaire (1.7.4), la perte de stabilité a lieu lorsque  $m_{max}(h) = \frac{1}{\beta}$ . Le graphique 4.2 représente en rouge cette frontière de stabilité maximale correspondant également au cas sans délai et indépendante du paramètre de délai. Puisque l'équation est stable lorsque  $\beta = 0$ , c'est la région sous la frontière qui est stable.

Au graphique 4.2, figurent la région d'instabilité sans délai ainsi que les régions de stabilité, déstabilisables ou non par un délai discret ou uniformément distribué. On remarque que la région déstabilisable par un délai distribué uniformément, entre les courbes verte et rouge, est presque négligeable comparativement à celle, entre les courbes rouge et bleue, où le délai discret peut causer la perte de stabilité des états de mémoire.

On a dénoté, au même graphique, par  $h_2$  la valeur d'inhibition où s'intersectent les courbes  $\beta_{rouge} = \frac{1}{m_{max}(h)}$  et  $\beta_{bleu} = \frac{-1}{m_{min}(h)}$ , et par  $h_3$ , celle où la courbe  $\beta_{verte} = \frac{\mu_0}{m_{max}(h)}$  rencontre la courbe  $\beta_{rouge}$ . Ainsi,  $h_2$  et  $h_3$  sont les inhibitions minimales pour lesquelles la déstabilisation par un délai suivant les distributions discrète et uniforme est respectivement possible. Pour déterminer la valeur de  $h_2$ , il suffit de résoudre

$$H_2(h) = m_{min}(h) + m_{max}(h) = 0. \quad (4.2.6)$$

Numériquement évaluée au moyen de la méthode de Newton, la valeur en est  $h_2 = 0,22947 \pm 0,00001 < h_0$ .

De manière semblable, on obtient  $h_3$  en résolvant

$$H_3(h) = m_{min}(h) - \mu_0 m_{max}(h) = 0. \quad (4.2.7)$$

La méthode de Newton retourne la valeur numérique de  $h_3 = 0,87843 \pm 0,00001$ .

Notons que sur la base du graphique 4.2, on ne peut conclure que les régions déstabilisables par le délai se continuent jusqu'à  $h$  infini. Cela demandera un argument analytique.

Montrer que  $\beta_{rouge} > \beta_{vert}$  pour tout  $h > h_3$  équivaut à

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{-m_{min}}{m_{max}} > |\mu_0|. \quad (4.2.8)$$

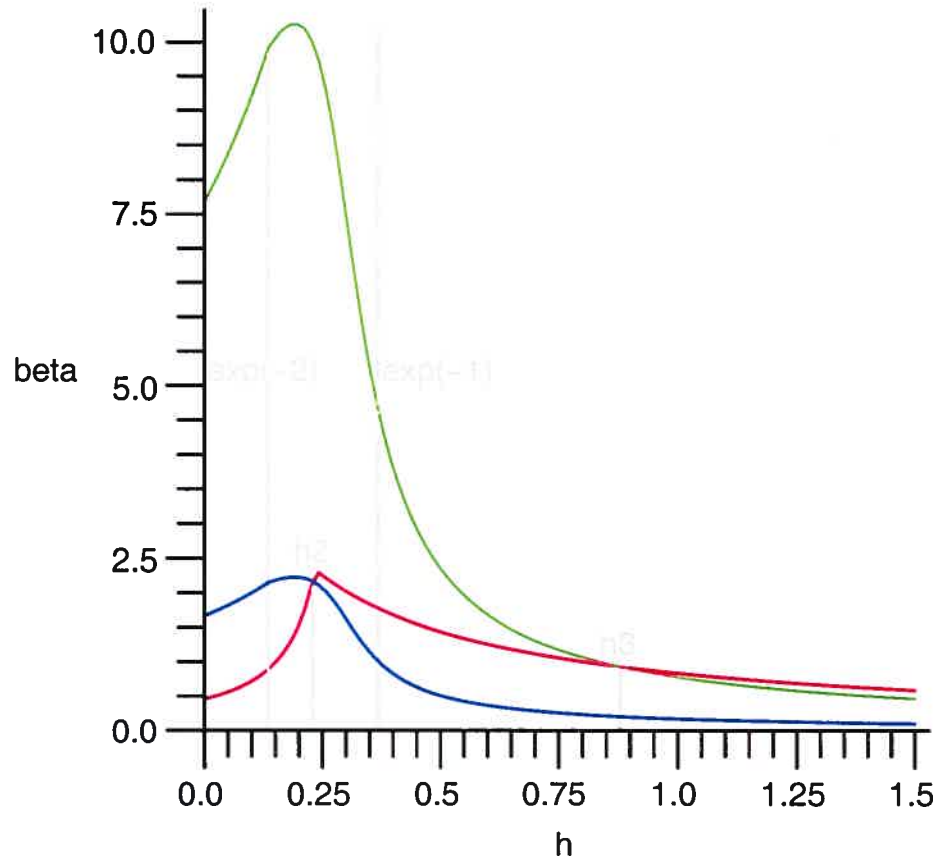


FIG. 4.2. Régions déstabilisable, non-déstabilisable et instable, pour les connexions symétriques. En rouge : la courbe  $\beta_{rouge}m_{max}(h) = 1$  correspondant à la frontière de stabilité en absence de délai. En bleu : la courbe  $\beta_{bleu}m_{min}(h) = -1$ . En vert : la courbe  $\beta_{vert}m_{max}(h) = -\mu_0$  avec la constante du corrolaire (3.4.1). La région au dessus de  $\beta_{rouge}$  est instable même sans délai. La région déstabilisable par un délai discret (respectivement par un délai uniformément distribué) est celle entre  $\beta_{rouge}$  et  $\beta_{vert}$  (respect. entre  $\beta_{rouge}$  et  $\beta_{bleu}$ ). La région non-déstabilisable par un délai discret (respectivement par un délai uniformément distribué) est celle à la fois sous  $\beta_{rouge}$  et sous  $\beta_{vert}$  (respect. sous  $\beta_{rouge}$  et sous  $\beta_{bleu}$ ).

Après simplifications, et en ne conservant que les termes dominants pour  $h$  grand, les quantités  $\Delta_3$ ,  $\Delta_4$ ,  $\Delta_5$  et  $\theta$  impliquées dans l'expression de la valeur propre  $z_4$ , se comportent asymptotiquement comme

$$\Delta_3(h) \sim -3150h^4 \quad (4.2.9)$$

$$\Delta_4(h) \sim 531441h^6 \quad (4.2.10)$$

$$\Delta_5(h) \sim -729h^3 \quad (4.2.11)$$

$$\theta(h) \rightarrow \frac{\pi}{3}. \quad (4.2.12)$$

Substituer ces relations dans la fonction  $z_4$  (4.2.5) aboutit, après simplifications, à une expression au comportement asymptotique linéaire  $z_4(h) \sim -8h$ . Comme la valeur propre  $z_6$  est linéaire de pente 1, il apparaît que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{-z_4(h)}{z_6(h)} = 8 > -\mu_0. \quad (4.2.13)$$

On en tire donc que  $\beta_{rouge} > \beta_{vert}$  pour tout  $h > h_3$  et a fortiori que  $\beta_{rouge} > \beta_{bleu}$  pour tout  $h > h_2$ , puisque  $\beta_{vert} = \frac{-|\mu_0|}{m_{min}} > \frac{-1}{m_{min}} = \beta_{bleu}$ .

### 4.3. APPLICATIONS À UNE MATRICE DE CONNEXION BISYMÉTRIQUE

On appelle **persymétrique** une matrice qui est symétrique par rapport à son anti-diagonale et **bisymétrique** une matrice à la fois symétrique et persymétrique. Grâce à un théorème de Reid [15], les matrices de connexions de format  $2n \times 2n$  ayant cette propriété voient la taille du problème aux valeurs propres se réduire à l'étude de deux matrices  $n \times n$ .

**Théorème 4.3.1** (Reid [15]). *Soit  $\mathbf{A}^F$  la transposée de la matrice  $\mathbf{A}$  par rapport à l'anti-diagonale.*

*Les valeurs propres de la matrice bisymétrique  $\mathbf{A}$ , de structure par bloc*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^F & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{G} \end{pmatrix}, \quad (4.3.1)$$

*où  $\mathbf{G}$  est symétrique et  $\mathbf{B}$  est persymétrique, sont les valeurs propres des matrices*

$$\mathbf{G} + \mathbf{B}\mathbb{J} \text{ et } \mathbf{G} - \mathbf{B}\mathbb{J}, \text{ avec la matrice anti-identité } \mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$



Par exemple, lorsque  $N = 16$ , en accord avec la description de (1.2.3) et (1.4.3), la matrice de connexions  $\mathbf{J}^{sym}$  est de la forme (4.3.1), où

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{P} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

avec

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} e_2 & e_2 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_2 & e_2 & e_2 \\ e_2 & e_2 & e_2 & e_2 \\ e_3 & e_2 & e_2 & e_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} e_1 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_1 & e_1 & e_2 \\ e_2 & e_1 & e_1 & e_1 \\ e_3 & e_2 & e_1 & e_1 \end{pmatrix}, \quad (4.3.3)$$

$$\mathbf{R} = e_3 \mathcal{I}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{Q} - e_1 \mathbb{I}, \quad (4.3.4)$$

où on a noté  $e_m = e^{-m} - h$  et utilisé  $\mathcal{I}$  pour désigner la matrice pleine ne contenant que des 1.

Alors que ce problème de taille  $N = 16$  n'était pas accessible au logiciel Maple sous sa forme d'origine, le théorème (4.3.1) conduit à un nouveau problème aux valeurs propres équivalent qui se résout plus rapidement encore que le cas  $N = 9$  à la section (4.2.1). Les résultats sont analogues à ceux de la section (4.2.1) et ne seront pas présentés ici.

#### 4.4. CONNEXIONS ASYMÉTRIQUES

En considérant uniquement un délai distribué exponentiellement comme à l'équation (1.7.5), nous étudierons le comportement explicite des valeurs propres des matrices de connexions asymétriques pour exprimer la frontière de stabilité du système de mémoire spatiale en termes de l'inhibition  $h$ , du coefficient d'asymétrie  $r$  défini plus bas, du gain  $\beta$ , et du paramètre  $\gamma = \sigma T$  de l'exponentiel, sans toutefois être exhaustif, puisqu'une étude analytique complète reste hors d'atteinte. On découvre en particulier les intervalles des différents paramètres où la perte de stabilité est causée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées, ce lieu de l'espace des paramètres devant généralement correspondre à une bifurcation de Hopf.

#### 4.4.1. La matrice de connexion totale

Pour simplifier l'expression des connexions totales (1.2.3), approximations le profil d'activation  $\phi^D$  des cellules de direction par un delta de Kronecker  $\delta_{k,k_{max}}$  en  $k_{max} = 1$ , de sorte que

$$\sum_{k=1}^{N_D} J_{ijk}^{id} \phi_k^D = J_{ij,k=1}^{id}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.4.1)$$

exprime la matrice des connexions idiothétiqes déplaçant le paquet d'activation dans la direction  $k_{max} = 1$  des  $x$  positifs. Nous choisissons les valeurs de paramètres  $\sigma_p = 1$  et  $\sigma_2 = 2$  et l'on ajuste  $\sigma_1$  en le faisant tendre vers 0 de manière à ce que  $e^{\frac{-|x_{i+1}-x_j|}{\sigma_1}} \rightarrow 0$ . Pour  $N = 9$ , la matrice (4.4.1) devient

$$J^{id} = J_{k=1}^{id} = \begin{pmatrix} X & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & X & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & X \end{pmatrix}, \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.2)$$

Avec la matrice de connexions récurrentes  $J^{sym}$  de (4.2.1), la matrice de connexion totale s'exprime comme

$$J = aJ^{sym} + bJ^{id} = a(J^{sym} + rJ^{id}), \quad (4.4.3)$$

où on appelle  $r = \frac{b}{a}$  le coefficient d'asymétrie.

Diagonaliser la matrice  $\frac{A}{\beta a}$  donne explicitement les trois valeurs propres

$$v_1 = h - e^{-2}, \quad (4.4.4)$$

$$v_{2,3} = h - e^{-2} \pm \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{e^{-3} - 2e^{-2} - (r+1)e^{-1} + r}, \quad (4.4.5)$$

alors que les six autres sont les racines d'un polynôme de degré six en  $z$  que nous appelons  $P(z; r, h)$ .

#### 4.4.2. Pour $h = e^{-1}/2$ et $r$ libre

Ne pouvant exhaustivement étudier les changements de stabilité pour toutes les valeurs de  $h \in [e^{-2}, e^{-1}]$  et de  $r > 0$ , nous nous limiterons dans cette section au cas  $h = \frac{1}{2}e^{-1}$ .

Les valeurs propres de  $\frac{A}{\beta a}$  sont alors  $v_1$  et  $v_{2,3}$ , comme en (4.4.4) et (4.4.5), ainsi que les racines  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , du polynôme  $P(z; r, h = e^{-1})$  qui se réécrit

$$P_r(z; r) = 32z^6 + A_5z^5 + A_4z^4 + A_3z^3 + A_2z^2 + A_1z + A_0, \quad (4.4.6)$$

où

$$\begin{aligned} A_5 &= 48e^{-1} - 96e^{-2}, \\ A_4 &= -(176 + 64r)e^{-2} + 192e^{-3} - 256e^{-4} - 32e^{-1}r, \\ A_3 &= 384e^{-6} - 1152e^{-5} + (752 - 64r)e^{-4} - (264 + 32r)e^{-3} \\ &\quad - 96r(1 + r)e^{-2}r + 48e^{-1}r^2, \\ A_2 &= -32e^{-8} + 384e^{-7} + (196r - 576)e^{-6} - (112 + 320r)e^{-5} \\ &\quad + (96r^2 - 80r + 186)e^{-4} + (64r - 224r^2)e^{-3} + 56r^2e^2, \\ A_1 &= -32e^{-10} + 144e^{-9} - (288 + 64r)e^{-8} + (576 + 160r)e^{-7} \\ &\quad + (208r - 32r^2 - 774)e^{-6} + (304r^2 - 696r + 335)e^{-5} \\ &\quad + (64r^3 - 472r^2 + 344r)e^{-4} + (164r^2 - 96r^3)e^{-3} + 32r^3e^{-2}, \\ A_0 &= 32(r - 1)e^{-9} + (32r^2 - 224r + 144)e^{-8} + (560r - 192r^2 - 200)e^{-7} \\ &\quad + (84 - 584r + 464r^2 - 64r^3)e^{-6} + (192r^3 - 464r^2 + 210r)e^{-5} \\ &\quad + (154r^2 - 176r^3)e^{-4} + 48r^3e^{-3}. \end{aligned}$$

On manipulera symboliquement, à l'aide de Maple, les racines de ce polynôme calculées numériquement.

On montre au graphique 4.3, les valeurs propres réelles ainsi que les parties réelles et imaginaires des valeurs propres complexes, en n'identifiant cependant que les racines susceptibles de causer la déstabilisation. Appelons  $m_{max}(r)$ , la valeur maximale des valeurs propres réelles en fonction du paramètre  $r$ , c'est-à-dire

$$m_{max}(r) = \begin{cases} z_2(r) & \text{si } r \leq r_0 \\ v_2(r) & \text{si } r > r_0 \end{cases}, \quad (4.4.7)$$

où  $r_0$  est la valeur de l'intersection, au graphique 4.3, des courbes  $z_2(r)$  et  $v_2(r)$ .

Un calcul numérique nous donne  $r_0 = 4,1605148 \pm 0,0000005$ . D'après l'expression

analytique de  $v_2(r)$  donnée en (4.4.5), on conclut que  $m_{max}(r)$  est une fonction monotone croissante sur  $[0, \infty)$ .

Les valeurs propres  $z_1$  et  $z_2$  sont dégénérées en  $r = r_1$ , alors qu'elles sont réelles positives pour  $r < r_1$  et complexes conjuguées pour  $r > r_1$ . La solution numérique de l'intersection des fonctions  $z_1(r)$  et  $z_2(r)$  est  $r_1 = 4,31751347 \pm 0,00000001$ .

Une autre paire de racines complexes conjuguées, identifiée comme  $z_3$ , apparaît dès  $r = 0$  au même graphique 4.3.

Pour étudier davantage les valeurs propres complexes, on montre leurs trajectoires dans le plan complexe lorsque le paramètre  $r$  croît de 0 à  $r_{max}$ , et on examine ensuite l'interaction de ces dernières avec la frontière de stabilité, étudiée à la proposition (3.5.1), lorsque  $\beta a = 1/m_{max}(r_{max})$ . Rappelons qu'il y a perte de stabilité lorsqu'une valeur propre traverse cette frontière de gauche à droite. Avec ces choix de paramètres, la frontière de stabilité s'appuie sur l'abscisse à l'origine

$$Re(m) = \frac{1}{\beta a} = m_{max}(r_{max}), \quad (4.4.8)$$

c'est-à-dire, du fait de la croissance de cette fonction, sur l'extrémité droite de la trajectoire des valeurs propres réelles.

La frontière de stabilité de la proposition (3.5.1) se réécrit pour  $\gamma$  arbitraire en termes des valeurs propres  $m$  de la matrice  $\frac{\mathbf{A}}{\beta a}$  :

$$m = \frac{M(\nu)}{\beta a} e^{1\nu}, \quad \nu \in [0, 2\pi). \quad (4.4.9)$$

Dans le cas particulier où  $\gamma = 1$ , cette expression se simplifie en la parabole

$$Re(m) = \frac{1}{\beta a} - \frac{\beta a}{4} (Im(m))^2. \quad (4.4.10)$$

C'est cette approche que le graphique 4.4 utilise avec  $r_{max} = 10$  et la frontière de stabilité (4.4.10). On constate qu'aucune des racines  $z_1$  ou  $z_3$  n'y intersecte la frontière de sorte que la perte de stabilité est causée par la valeur propre réelle  $v_2$  lorsque  $r = r_{max} = 10$ . C'est-à-dire qu'il y a déstabilisation lorsque  $r$  augmente jusqu'à atteindre cette valeur  $r_{max}$  avec  $\beta a$  fixé à  $\beta a = 1/v_2(r_{max})$ .

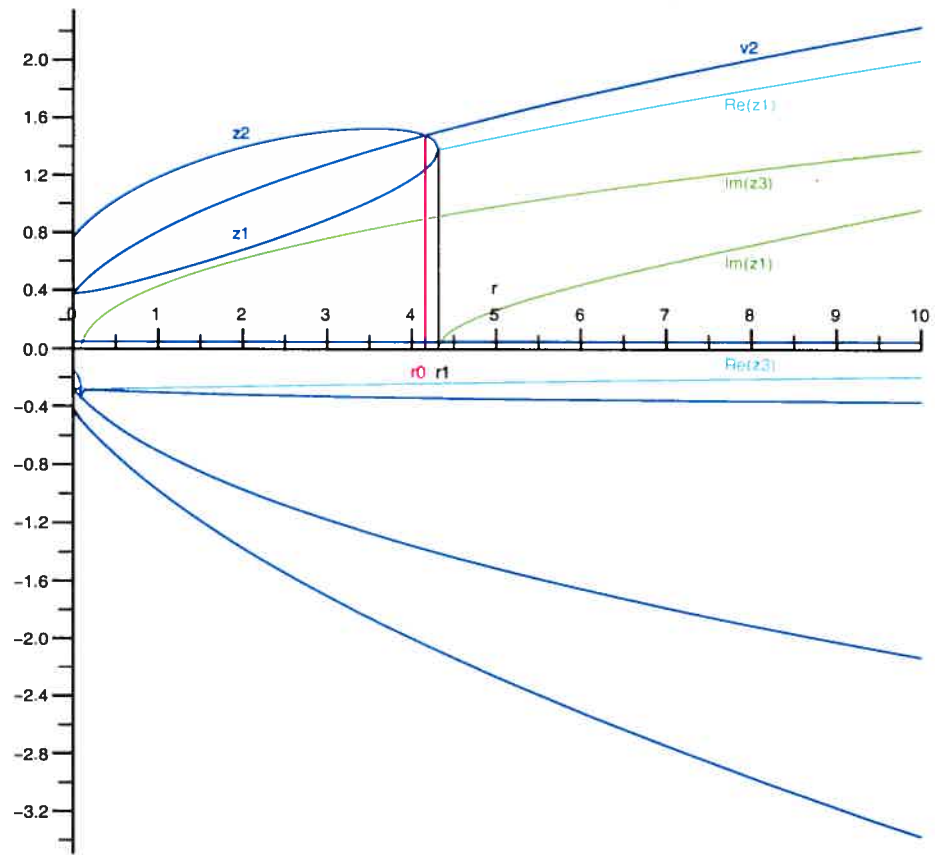


FIG. 4.3. Valeurs propres réelles (en bleu) (dont  $v_2$ ,  $z_1$  et  $z_2$ ) et parties réelles (en cyan) et imaginaires (en vert) des valeurs propres complexes ( $z_3$  et  $z_1$ ) de la matrice  $\frac{A}{\beta a}$  lorsque  $h = e^{-1}/2$  et  $r \in [0, 10]$ . On y distingue les valeurs abscissales  $r_0$  et  $r_1$ . À la première se produit l'intersection entre les valeurs propres  $z_2$  et  $v_2$ , tandis qu'à la seconde se rencontrent les racines  $z_1$  et  $z_2$  qui acquièrent ainsi une composante imaginaire. Les parties imaginaires sont prises en valeurs absolues de sorte que pour  $r > r_1$ , où seule est affichée  $z_1$ , on a aussi  $z_2 = \bar{z}_1$ . Quant aux racines  $z_3$  et  $\bar{z}_3$ , on constate qu'elles ne sont jamais réelles pour  $0 < r < 10$ .

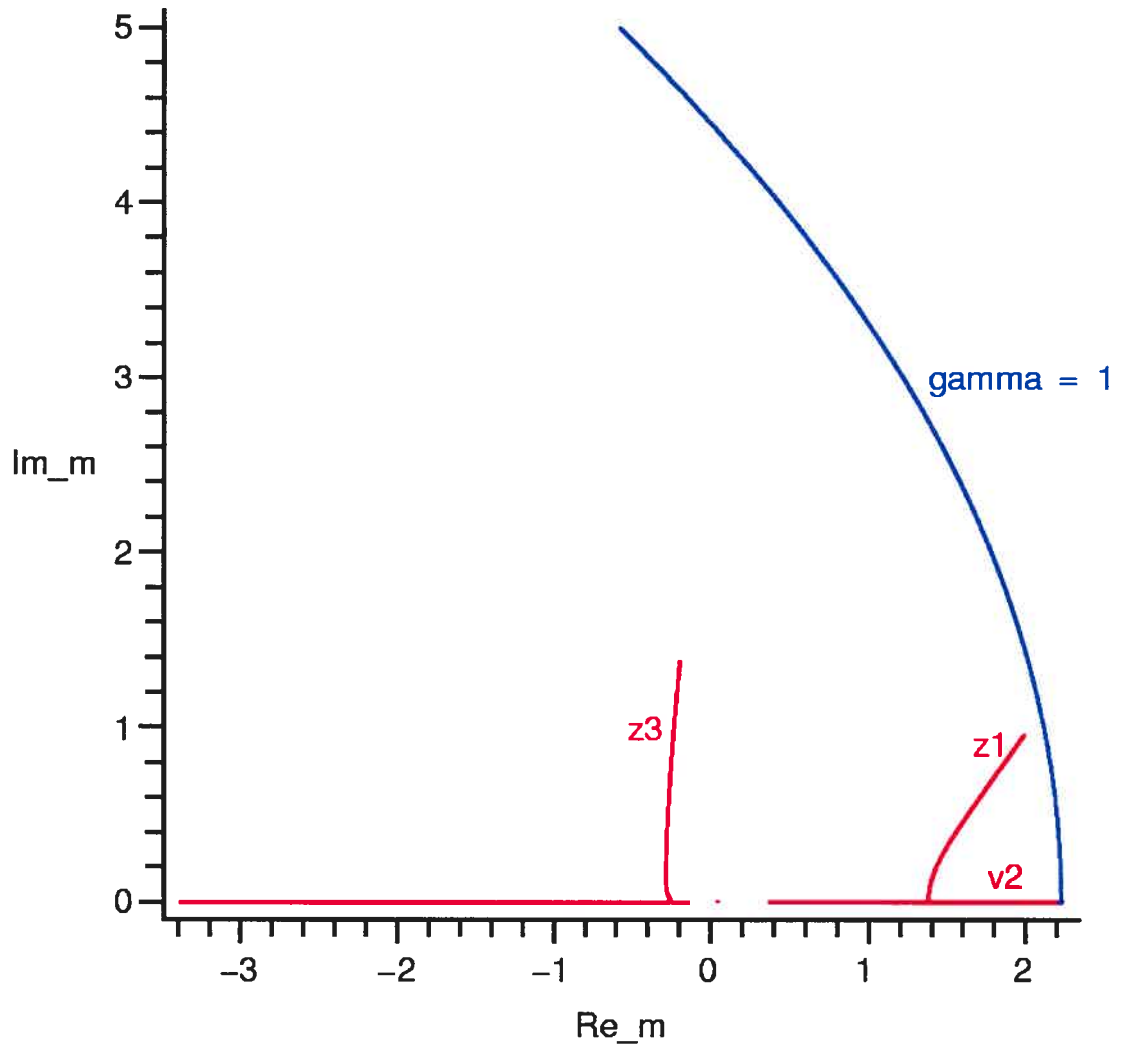


FIG. 4.4. Plan complexe des trajectoires des valeurs propres (en rouge) lorsque, pour  $h = e^{-1}/2$ , le paramètre  $r$  passe de 0 à 10. On superpose la frontière de stabilité (en bleu) pour la matrice  $\frac{\mathbf{A}}{\beta a}$  lorsque  $\beta a = 1/v_2(r)$  en  $r = 10$  pour  $\gamma = 1$

La valeur de  $\beta a$  telle qu'une valeur propre arbitraire  $m(r)$  traverse la frontière de stabilité pour un  $r$  donné, est déterminée par

$$\beta a = \frac{M(\nu_m)}{\|m\|}, \quad (4.4.11)$$

où, toutes deux fonction de  $\gamma$ ,  $\|m\|$  et  $\nu_m$  sont respectivement la norme complexe et la phase de  $m$ . Pour  $m$  réel, l'expression se simplifie en

$$\beta a = \frac{1}{m(r)}. \quad (4.4.12)$$

Les graphiques 4.5 et 4.6 sont réalisés suivant ce principe. Le premier présente les courbes de  $\beta a$  en fonction de  $r$  correspondant à l'intersection des valeurs propres  $\nu_2$  et  $z_1$  avec la frontière lorsque  $\gamma = 1$ , tandis que le second surajoute au précédent

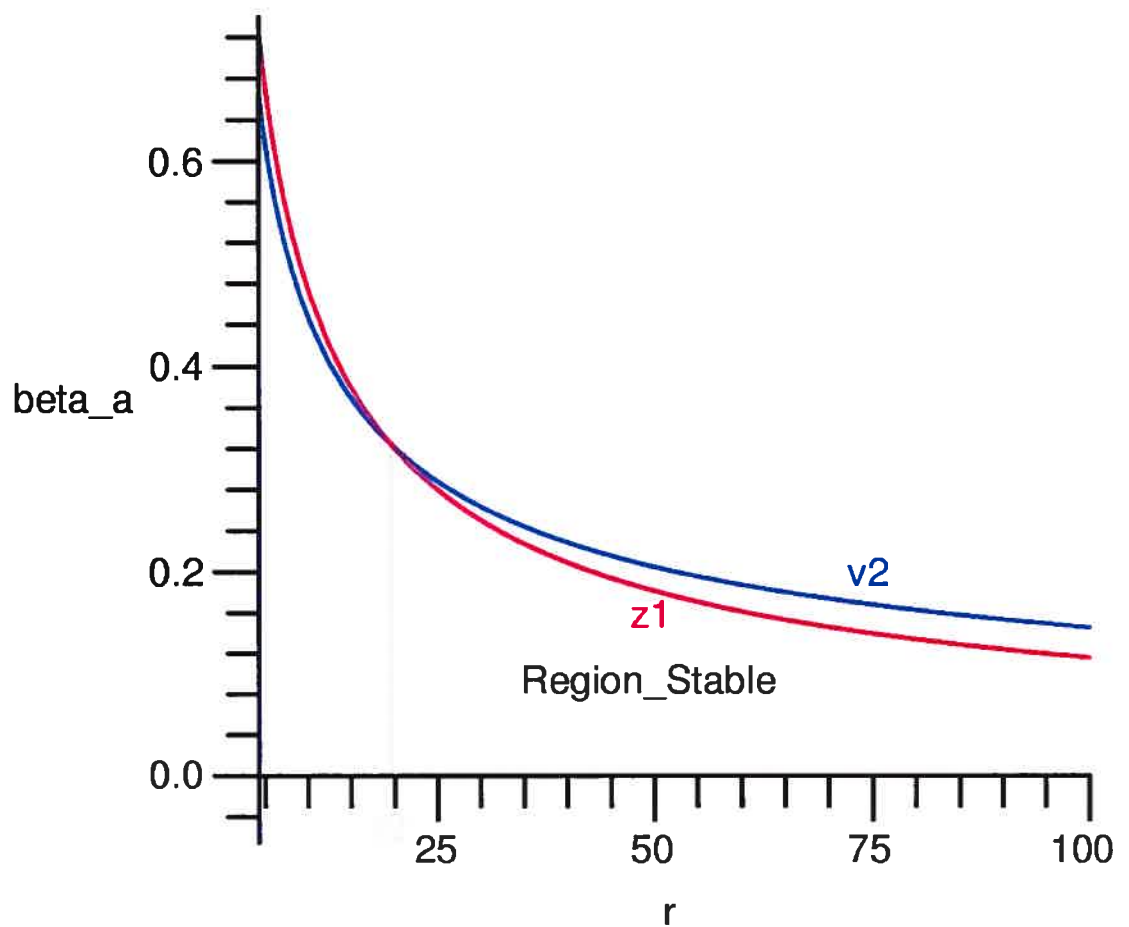


FIG. 4.5. Valeurs du paramètre  $\beta a$  correspondant à l'intersection des trajectoires des valeurs propres  $\nu_2$  (en bleu) et  $z_1$  (en rouge) avec la frontière de stabilité  $\gamma = 1$ , lorsqu'en abscisse,  $r \in [r_1, 25]$  et que  $h = e^{-1}/2$ . On constate qu'en  $r = r_2$ , se croisent les deux valeurs propres ci-dessus.

l'intersection de la valeur  $z_3$  pour un paramètre  $r$  passant cette fois de 0 à 2500.

Nous apprenons par le graphique 4.5 qu'il existe un  $r = r_2$  tel que, pour  $r > r_2$ , la valeur propre  $z_1$  atteint la frontière de stabilité avant  $v_2$ , et sa valeur a été numériquement déterminée comme  $r_2 = 19,608 \pm 0,001$ . C'est donc dire que pour  $r = r_2$  et  $\beta a$  comme en (4.4.11) avec  $m = z_1$ , la déstabilisation est causée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées, alors que pour  $r \in (r_1, r_2)$ , la perte de stabilité a pour origine une valeur propre réelle.

Quant à  $r < r_1$ , on ne peut exclure a priori qu'une frontière appuyée sur  $Re(m) = m_{max}(r)$  puisse intersecter avec la trajectoire de la racine  $z_3$ , puisque, au graphique 4.4, le moment où  $r = r_1$  correspond à la naissance de la branche non-réelle de  $z_1$ . Par contre, le graphique 4.6 nous montre que ce n'est pas le cas, de sorte que finalement la déstabilisation provient d'une valeur propre réelle pour tout  $r \in [0, r_2)$ .

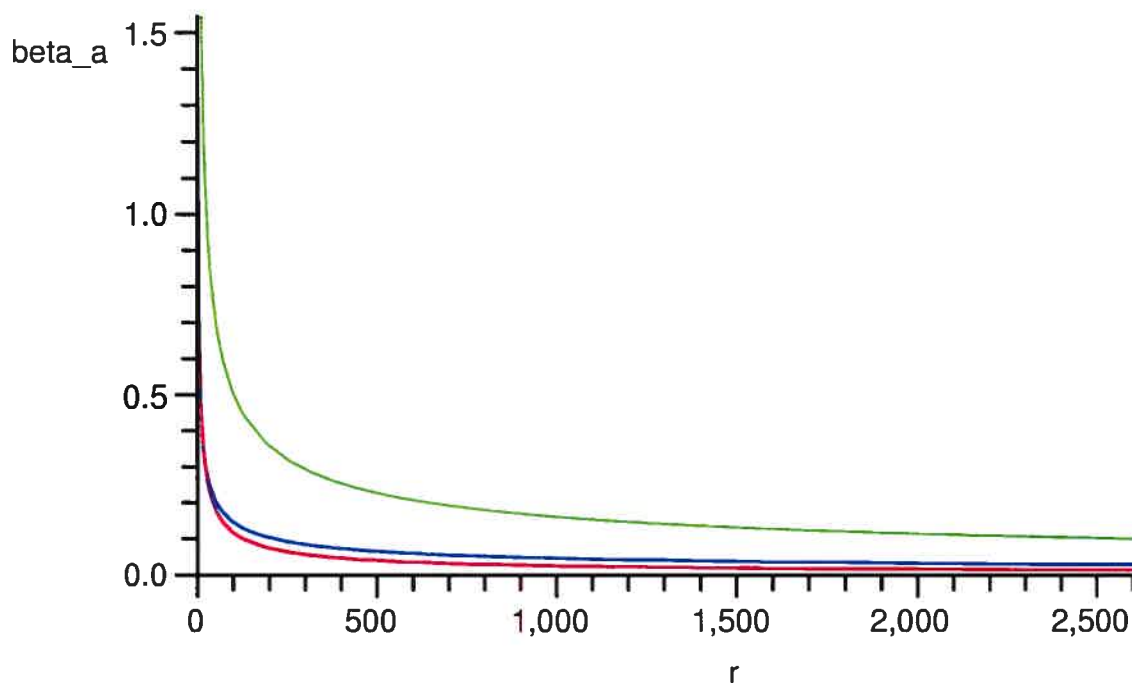


FIG. 4.6. Valeurs du paramètre  $\beta a$  correspondant à l'intersection des trajectoires des valeurs propres  $v_2$  (en bleu),  $z_1$  (en rouge) et  $z_3$  (en vert), avec la frontière de stabilité  $\gamma = 1$ , lorsqu'en abscisse,  $r \in (0, 2500]$ .



De plus, le graphique 4.6 nous indique que jamais en augmentant  $r$  jusqu'à 2500, la trajectoire de  $z_3$  ne rejoint la frontière de stabilité avant celle de  $z_1$ . Il sera a posteriori vrai pour tout  $\gamma$ , que la valeur complexe  $z_3$  ne cause jamais de perte de stabilité, puisque les bras de la frontière s'ouvrent lorsque  $\gamma$  s'éloigne de 1.

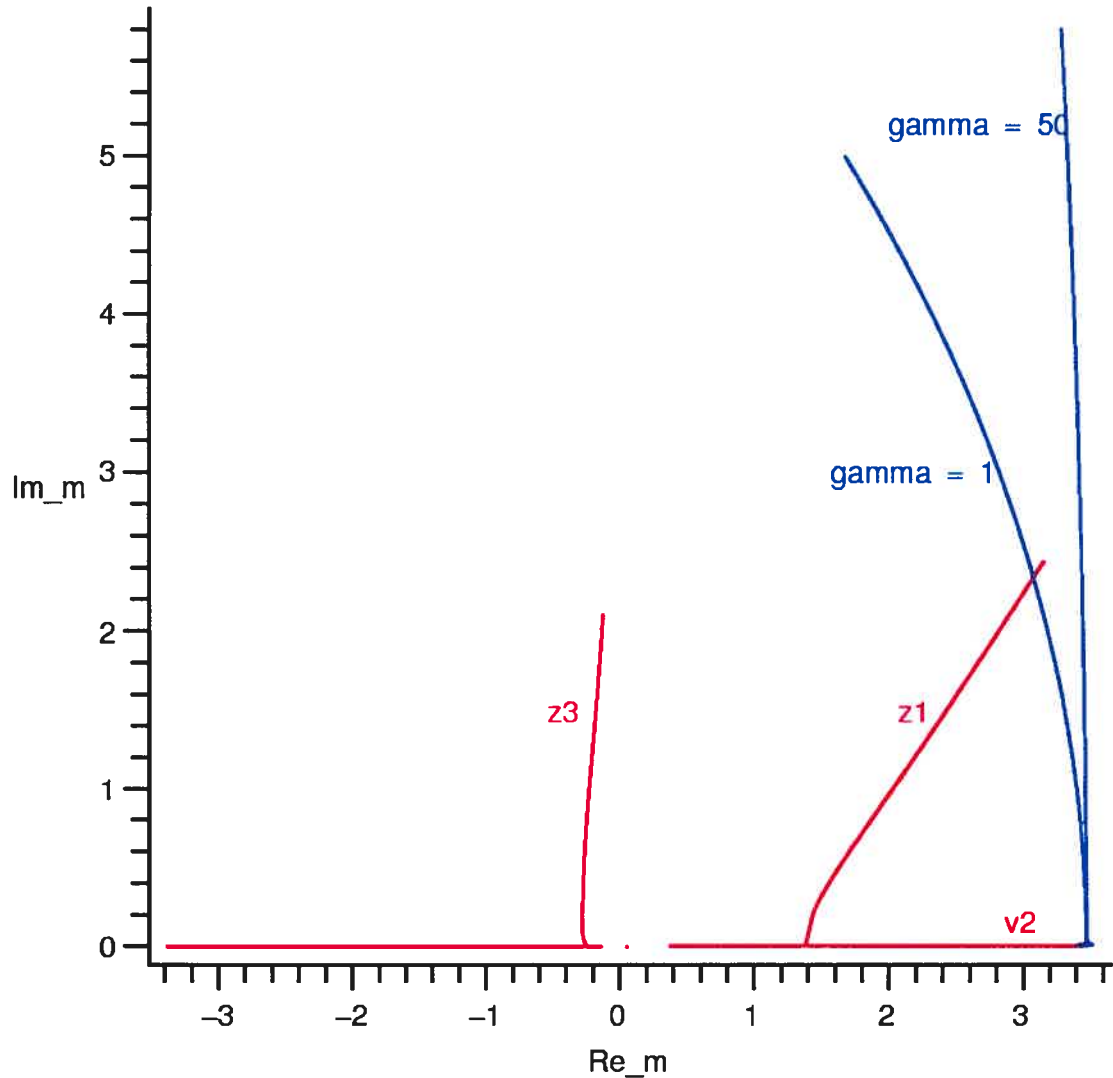


FIG. 4.7. Plan complexe des trajectoires des valeurs propres (en rouge) lorsque, pour  $h = e^{-1}/2$ , le paramètre  $r$  passe de 0 à 25. Se superposent pour  $\gamma = 1$  et  $\gamma = 50$ , les frontières de stabilité respectives (en bleu) associées à la matrice  $\frac{\mathbf{A}}{\beta a}$  lorsque  $\beta a = 1/v_2(r)$  en  $r = 25$ .

Au graphique 4.7, nous traçons, comme au graphique 4.4, les trajectoires des valeurs propres superposées à la frontière de stabilité pour  $\gamma = 1$ , et à celle pour  $\gamma = 50$  de l'expression (4.4.9), en laissant cette fois le paramètre  $r$  dépasser  $r_2$  jusqu'à atteindre  $r_{max} = 25$ .

On constate, lorsque  $\gamma = 1$ , l'intersection de la frontière de stabilité avec les racines complexes conjuguées  $z_1$ , comme l'annonçait le graphique 4.5, alors que ce n'est plus le cas si  $\gamma = 50$ . Par continuité de la fonction (4.4.11) par rapport à  $\gamma$ , il existe donc, à tout le moins pour  $h = e^{-1}/2$ , un  $\gamma_0$  fini tel que, pour tout  $\gamma < \gamma_0$ , la perte de stabilité, lorsque  $r$  augmente, soit causée par une paire de valeurs propres complexes conjuguées. Pour tout  $\gamma > \gamma_0$ , cette perte de stabilité provient de la valeur réelle  $v_2$ .

De plus, en posant  $\beta a = 1/v_2$  et considérant  $\gamma$  arbitraire, sera appelée  $r_{2\gamma}$  la valeur de  $r$  pour laquelle les deux valeurs propres  $z_1$  et  $v_2$  atteignent simultanément la frontière de stabilité. Ainsi, pour tout  $r > r_{2\gamma}$ , la déstabilisation sera causée par  $z_1$ , c'est-à-dire par une paire de valeurs propres complexes conjuguées, ce qui généralise le cas particulier où  $\gamma = 1$  dans lequel  $r_2 = r_{2\gamma}$ . La valeur de  $r_{2\gamma}$  croît de façon monotone avec le paramètre  $\gamma$ . Cependant, fondées sur des calculs restreints à  $\gamma \in [1, 50]$ , ces remarques sont possiblement d'une généralité limitée. (A priori rien n'interdit l'existence d'un  $\gamma_1$  élevé, au-delà duquel seule la valeur propre  $v_2$  pourrait intersecter avec la frontière de stabilité.)

Offrant une véritable synthèse du cas où  $h = e^{-1}/2$ , la frontière de stabilité, en terme des paramètres physiques  $\beta a$  et  $r$  et  $\gamma$ , est la courbe du paramètre  $\beta a$ , en fonction de  $r$ , telle que pour chaque  $r$ , toutes les valeurs propres se situent du côté gauche de la frontière (4.4.9), et elle se traduit équationnellement par

$$\beta a(r) = \min_i \left( \frac{M(\nu_{m_i})}{\|m_i\|} \right) (r). \quad (4.4.13)$$

C'est cette courbe que le graphique 4.8 affiche. La déstabilisation causée par une valeur propre réelle a lieu pour  $r < r_{2\gamma}$ , le long de la courbe

$$\beta a(r) = \begin{cases} \frac{1}{z_2(r)}, & \text{si } r \in [0, r_0) \\ \frac{1}{v_2(r)}, & \text{si } r \in [r_0, r_{2\gamma}) \end{cases} \quad (4.4.14)$$

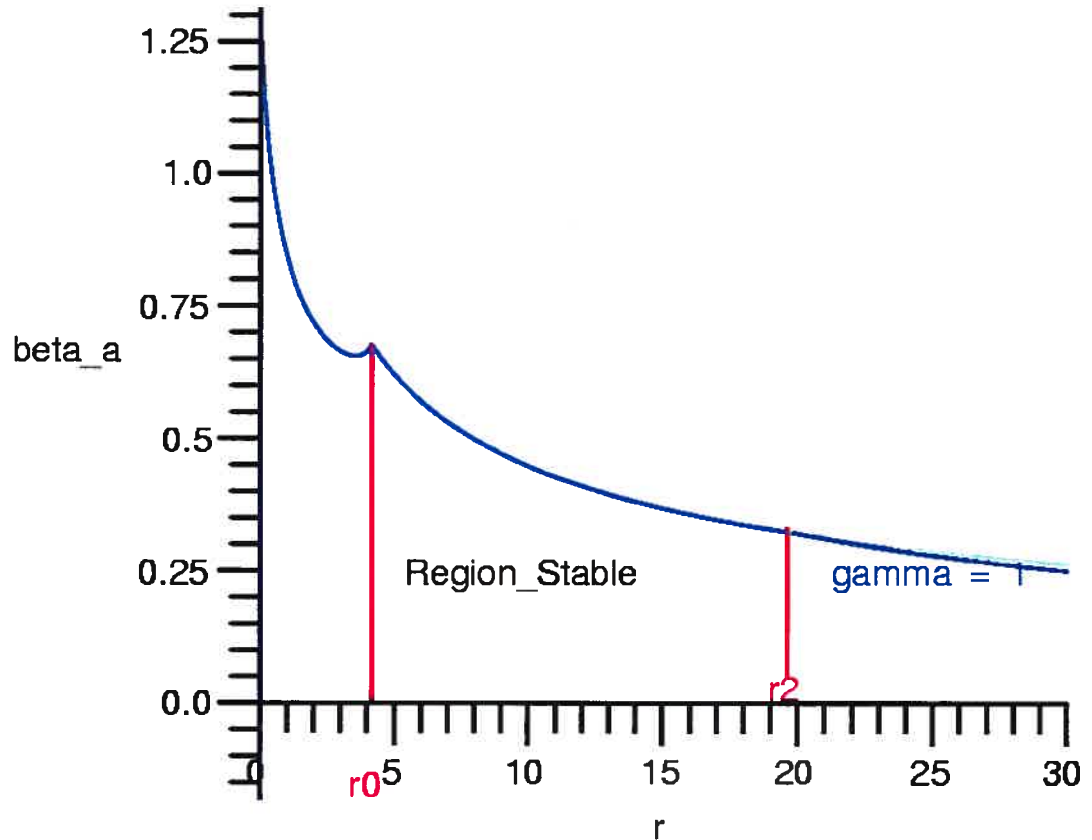


FIG. 4.8. Frontière de stabilité du système dans le plan  $\beta a$ ,  $r$ , lorsque  $h = e^{-1}/2$ . La courbe bleu, à gauche, est le siège d'une perte de stabilité causée par une valeur propre réelle tandis que la déstabilisation sur la courbe bleu marine, en  $r > r_2$  pour  $\gamma = 1$ , provient d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées. La courbe turquoise représente la frontière de stabilité associée à la valeur propre  $v_2$ . Lorsque la valeur de  $\gamma$  augmente, l'intersection entre ces courbes bleu et bleu marine se déplace vers les  $r$  croissants

où se déroulent vraisemblablement des bifurcations col-noeuds ou pitchfork. Pour  $r \geq r_{2\gamma}$ , par contre, la stabilité est perdue à cause de la paire de valeurs propres complexes conjuguées  $z_1$  et  $\bar{z}_1$ , engendrant probablement ainsi une bifurcation de Hopf.

### 4.4.3. Pour $r = r_2$ et $h$ libre

Les changements de stabilité seront maintenant étudiés en fixant le paramètre  $r$  à  $r = r_2$ , tout en laissant libre le paramètre d'inhibition  $h \in [e^{-2}, e^{-1}]$ .

Dans ce cas, les valeurs propres  $m_i$ ,  $i = 1 \dots 9$ , de la matrice  $\frac{\mathbf{A}}{\beta a}$ , appréhendées comme fonctions de  $h$ , sont les valeurs  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ , obtenues en (4.4.4) et (4.4.5), en plus des racines,  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , du polynôme

$$P_r(z; r) = c_1 z^6 + B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0, \quad (4.4.15)$$

où

$$B_5 = 3kh - c_1,$$

$$B_4 = -30kh^2 + c_2 h + c_3,$$

$$B_3 = 70kh^3 + c_4 h^2 + c_5 h + c_6,$$

$$B_2 = c_7 h^2 + c_8 h^3 + c_9 + c_{10} h^4 + c_{11} h,$$

$$B_1 = c_{12} h^4 + c_{13} h^2 + c_{14} h + 39kh^5 + c_{15} + c_{16} h^3,$$

$$B_0 = -8kh^6 + c_{17} h + c_{18} h^3 + c_{19} h^4 + c_{20} h^5 + c_{21} h^2 + c_{22}.$$

avec les constantes

$$\begin{aligned} k &= 25 \cdot 10^8 & c_1 &= 1015014624 & c_2 &= 337629708250 \\ c_3 &= -92343276775 & c_4 &= -1340368687000 & c_5 &= 3683831625000 \\ c_6 &= -517849503250 & c_7 &= -10497435215000 & c_8 &= 2005477957250 \\ c_9 &= -899281535250 & c_{10} &= -187500000000 & c_{11} &= 6457882975000 \\ c_{12} &= -1335293613750 & c_{13} &= -11362217437500 & c_{14} &= 12512063735000 \\ c_{15} &= -1505641376500 & c_{16} &= 10312748660000 & c_{17} &= 6942868435000 \\ c_{18} &= 5422183967500 & c_{19} &= -3406801795000 & c_{20} &= 333569649750 \\ c_{21} &= -11612782200000 & c_{22} &= -715673313500. \end{aligned}$$

Le graphique 4.9 rassemble les valeurs propres réelles, ainsi que les parties réelles et imaginaires positives des valeurs propres complexes, pertinentes à l'étude de la déstabilisation. En  $h = h_1$  les valeurs propres réelles  $z_1$  et  $z_2$  se rencontrent et se transforment, pour les  $h$  croissants consécutifs, en racines complexes conjuguées décrites ici par  $Re(z_1)$  et  $Im(z_1)$ .

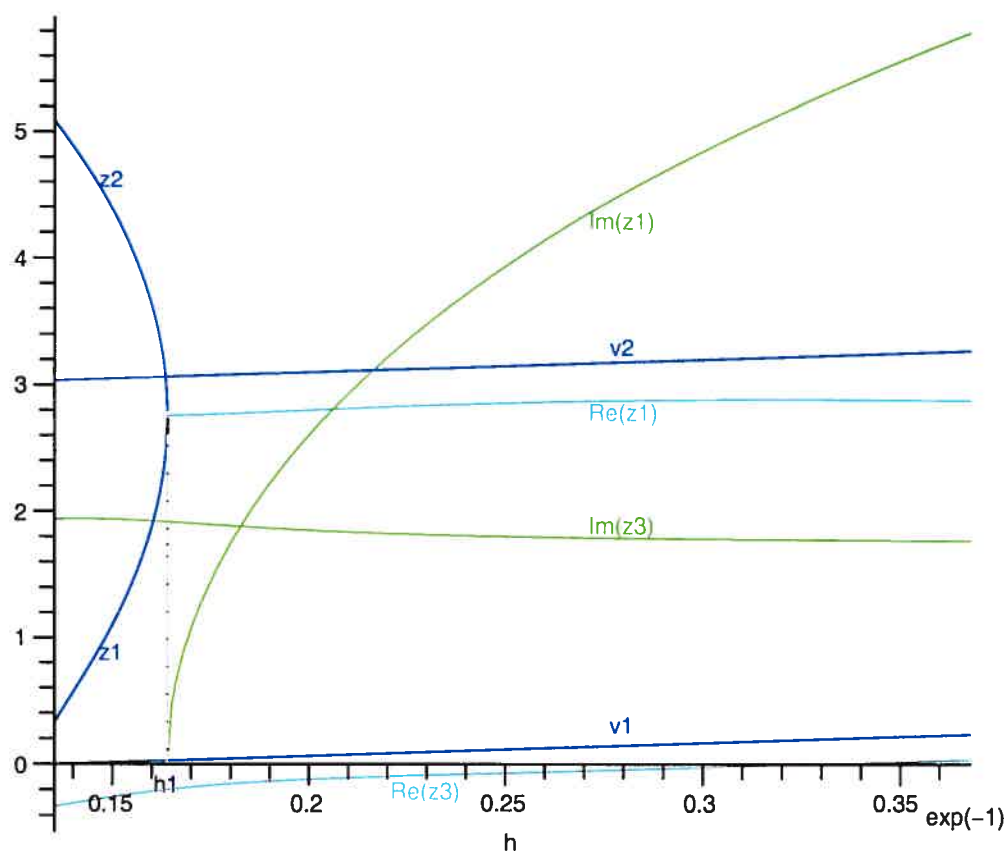


FIG. 4.9. Partie réelle (en cyan) et partie imaginaire (en vert) des valeurs propres complexes ( $z_1$  et  $z_3$ ), et valeurs propres réelles (en bleu) ( $v_1$ ,  $v_2$  et  $z_2$ ) de la matrice  $\frac{A}{\beta a}$  lorsque  $r = r_2$  et  $h \in [e^{-2}, e^{-1}]$ . Notons que la racine  $z_1$ , réelle pour  $h < h_1$ , voit surgir sa partie imaginaire après cette valeur de  $h$ . D'autres valeurs propres réelles négatives se trouvent à l'extérieur de la région illustrée.

En mettant en exergue les valeurs propres réelles pour  $h \in [e^{-2}, \frac{1}{2}e^{-1}]$ , le graphique 4.10 distingue nettement cette valeur  $h_1$  de celle de  $h_0$ , définie comme l'abscisse de l'intersection de  $z_2(h)$  et  $v_2(h)$ . Ces deux valeurs s'évaluent numériquement comme  $h_0 = 0,16342 \pm 0,00001$  et  $h_1 = 0.16398 \pm 0,00001$ .

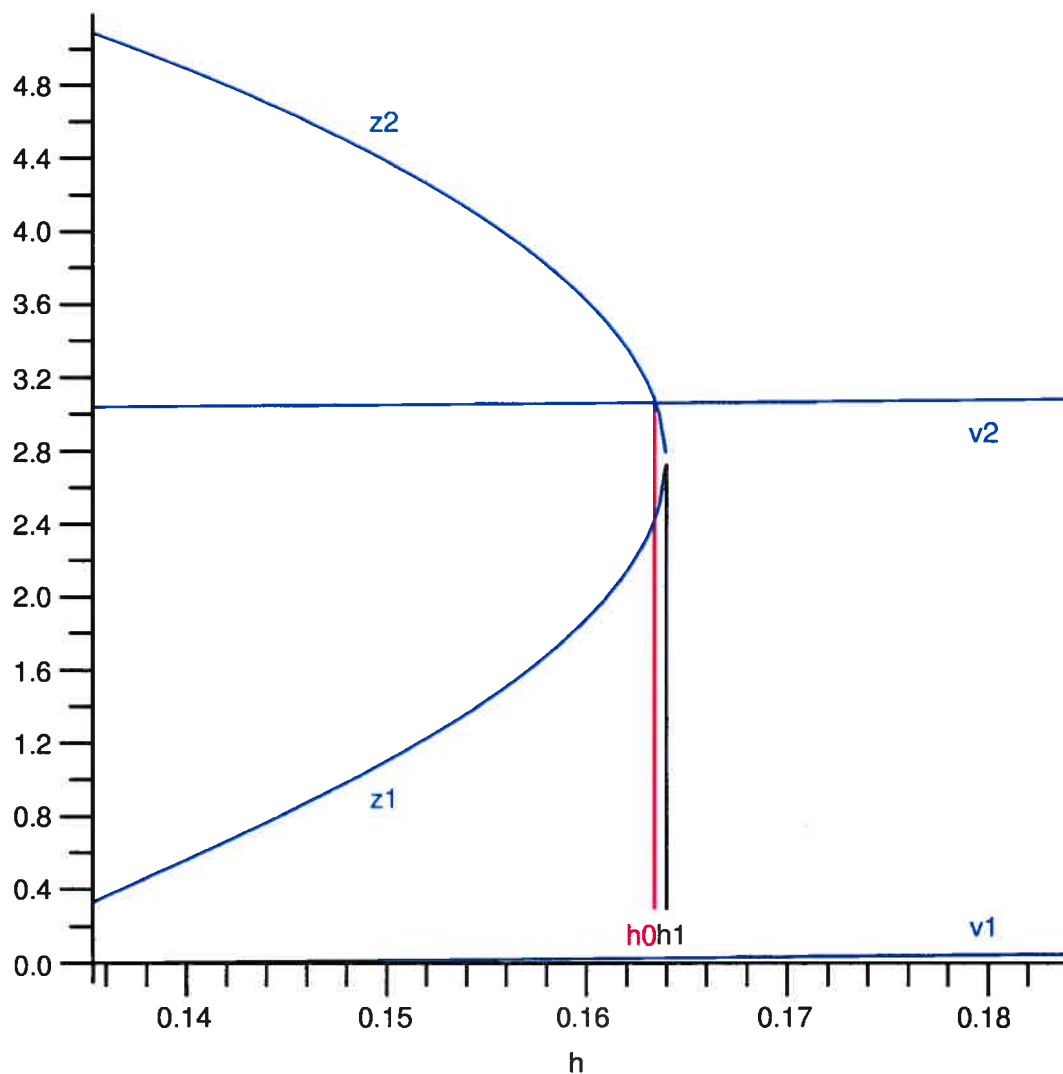


FIG. 4.10. Valeurs propres réelles (en bleu) ( $v_1$ ,  $v_2$ ,  $z_1$  et  $z_2$ ) de la matrice  $\frac{A}{\beta a}$  lorsque  $r = r_2$  et  $h \in [e^{-2}, \frac{1}{2}e^{-1}]$ . On y distingue la valeur abscissale  $h_0$  où se produit une intersection entre les valeurs propres  $z_2$  et  $v_2$ , ainsi que  $h_1$ , où les racines  $z_1$  et  $z_2$  disparaissent dans l'imaginaire.

Notons par

$$m_{max}(h) = \begin{cases} z_2(h) & \text{si } r \leq h_0 \\ v_2(h) & \text{si } r > h_0 \end{cases} \quad (4.4.16)$$

la valeur maximale des valeurs propres réelles en fonction de  $h$ , et remarquons que celle-ci n'est pas monotone croissante.

En suivant une démarche analogue à celle adoptée à la sous-section 4.4.2, nous traçons dans le plan complexe les trajectoires des valeurs propres lorsque le paramètre  $h$  passe de  $e^{-2}$  à  $e^{-1}$ , accompagnées de la frontière de stabilité.

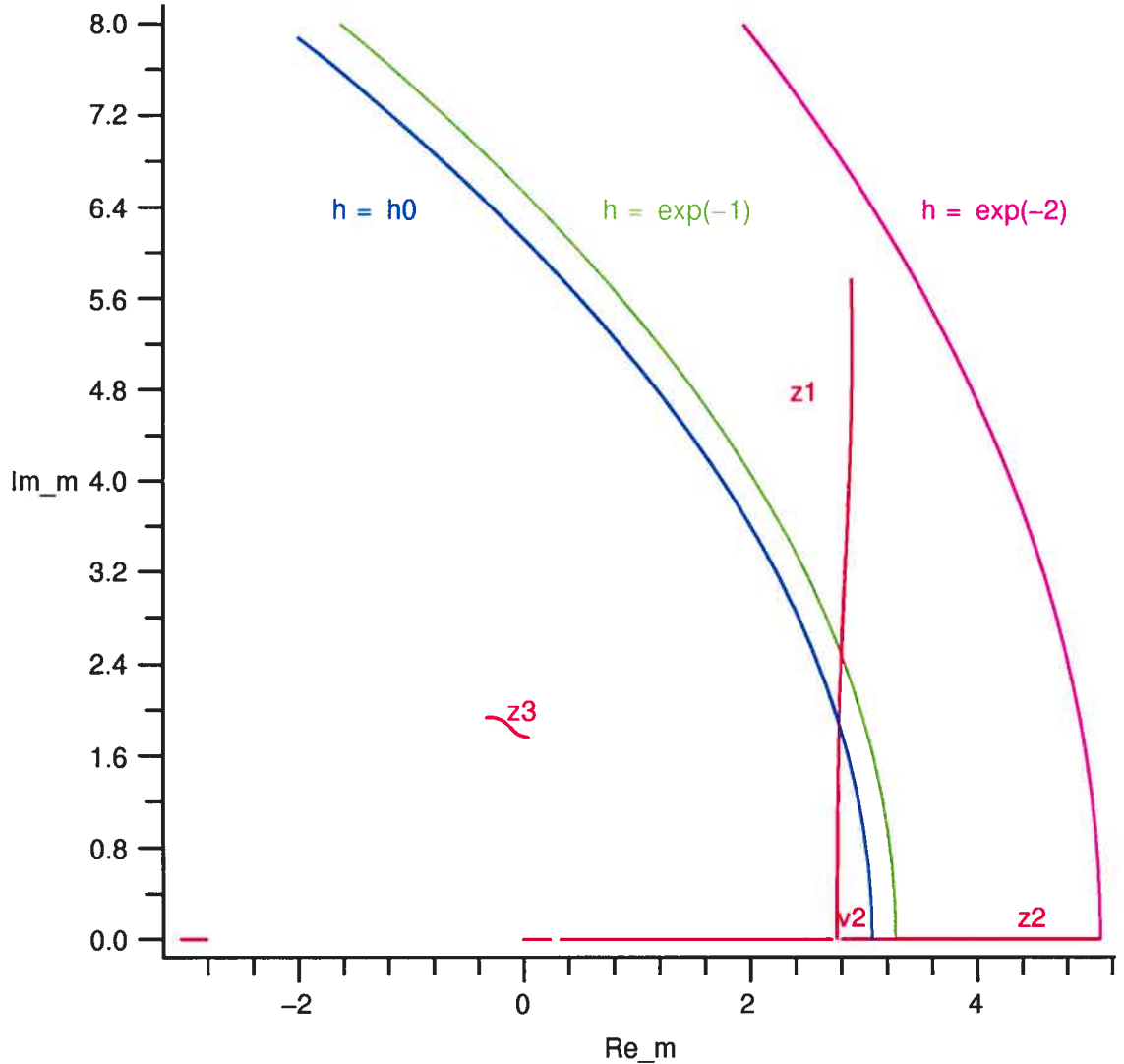


FIG. 4.11. Plan complexe des trajectoires des valeurs propres (en rouge) lorsque, pour  $r = r_2$ , le paramètre  $h$  passe de  $e^{-2}$  à  $e^{-1}$ . Se superposent les frontières de stabilité pour la matrice  $\frac{A}{\beta a}$  lorsque  $\beta a = 1/v_2(h)$  avec  $h = h_0$  (en bleu),  $h = e^{-1}$  (en vert) et  $h = e^{-2}$  (en magenta)

Le graphique 4.11 présente cette situation pour les frontières s'appuyant sur l'abscisse  $Re(m) = \frac{1}{\beta a} = m_{max}(h)$ , lorsque  $h = h_0$ ,  $h = e^{-1}$  et  $h = e^{-2}$ .

Pour  $h$  entre  $e^{-2}$  et  $h_1$ , la valeur propre  $z_1$  n'a pas encore de composante imaginaire et, puisque la frontière s'appuie sur  $m_{max}(h) > v_2(h_0)$  de manière à rester hors d'atteinte de  $z_3$ , la perte de stabilité est nécessairement causée par la valeur propre réelle  $m_{max}(h)$ .

Lorsque  $h = \frac{1}{2}e^{-1}$ , il est clair que  $z_1$  traverse tout juste la frontière, car ayant choisi ici d'étudier le cas  $r = r_2$ , on retrouve dès lors une situation de la sous-section (4.4.2).

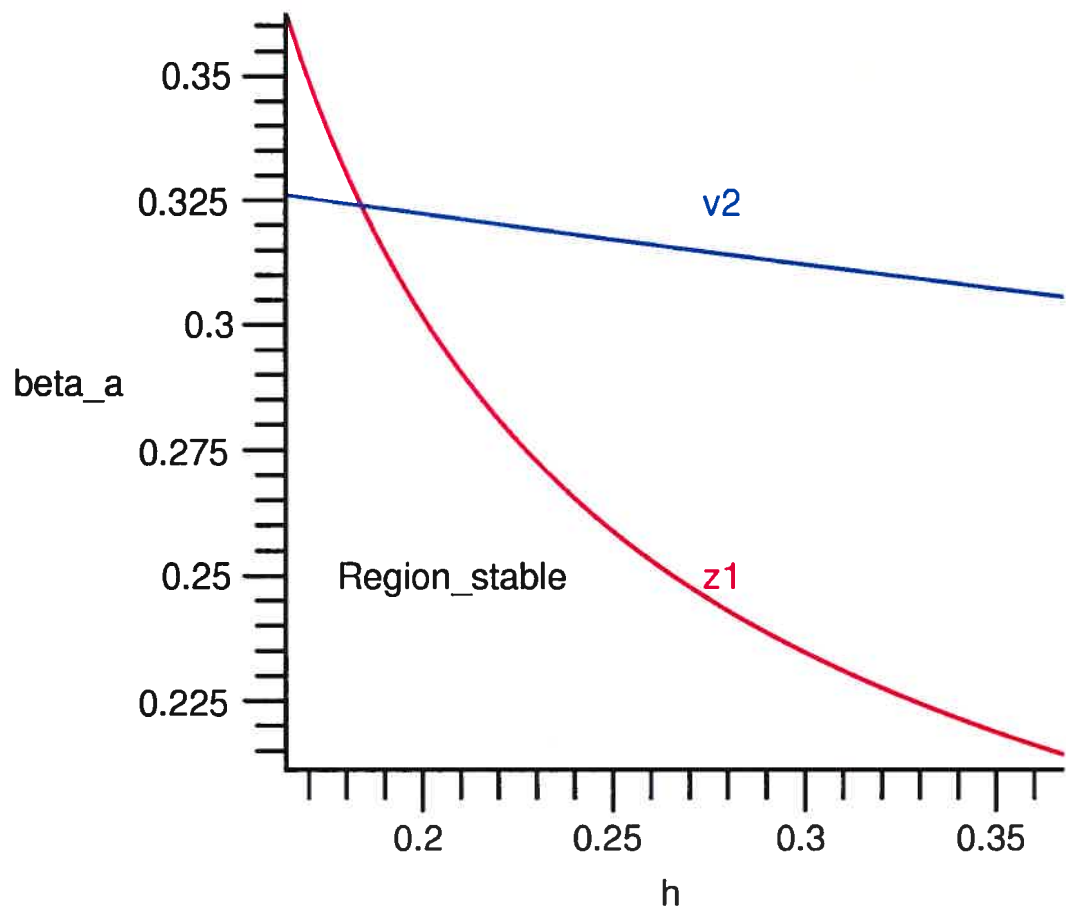


FIG. 4.12. Valeurs du paramètre  $\beta a$  correspondant à l'intersection des trajectoires respectives des valeurs propres  $v_2$  (en bleu) et  $z_1$  (en rouge), avec la frontière de stabilité  $\gamma = 1$ , lorsqu'en abscisse,  $h \in [h_1, e^{-1}]$  et que  $r = r_2$ . Un calcul numérique confirme que la seule intersection, dénommée  $h_2$ , correspond effectivement à la valeur de  $\frac{1}{2}e^{-1}$ .



Examinons au graphique 4.12, les valeurs de  $\beta a$  pour lesquelles les trajectoires de  $v_2$  et  $z_1$  franchissent la frontière lorsque  $h$  se situe entre  $h_1$  et  $e^{-1}$ . Que les deux courbes s'intersectent en une valeur abscissale unique nommée  $h_2$  nous indique que cette dernière vaut nécessairement  $h_2 = \frac{1}{2}e^{-1}$ , ce qu'un calcul numérique peut confirmer.

C'est, par conséquent, la valeur propre réelle  $v_2$  qui, pour  $h \in [h_1, h_2)$ , produit la déstabilisation, alors qu'au-delà, pour  $h \in (h_2, e^{-1}]$ , c'est la paire de valeurs propres complexes conjuguées de  $z_1$  qui en est responsable. Quoique l'existence de bifurcation de Hopf n'ait pas été formellement démontrée, la déstabilisation produite par la paire de valeurs propres conjuguées en indique chaque fois la présence vraisemblable.

Pour  $\gamma = 1$ , ceci complète la description, résumée au graphique 4.13, de la frontière de stabilité dans le plan  $\beta a, h$  lorsque  $r = r_2$ . Mais ce même graphique illustre aussi l'effet de l'augmentation du paramètre  $\gamma$ . On sait que lorsque ce paramètre s'éloigne de la valeur  $\gamma = 1$ , la frontière de stabilité s'écarte en tendant vers la droite  $Re(m) = \frac{1}{\beta a}$ , de sorte que la valeur propre atteigne plus difficilement la frontière. Pour  $r = r_2$  et pour tout  $h \in [h_2, e^{-1}]$ , il existe un  $\gamma_0 > 1$  tel que la stabilité est perdue à cause, respectivement, d'une valeur propre réelle, pour tout  $\gamma > \gamma_0$ , et d'une paire de valeurs propres conjuguées, pour tout  $\gamma \in [1, \gamma_0]$ .

Le graphique 4.14 compare, pour différentes valeurs de  $\gamma$ , les valeurs du paramètre  $\beta a$  correspondant à l'intersection des trajectoires des valeurs propres  $v_2$  et  $z_1$  avec la frontière de stabilité. On y constate que pour  $\gamma > 1$ , il existe  $\gamma_1 = 24$  tel que si  $\gamma \leq \gamma_1$ , il existe  $h_{2\gamma} \in [e^{-2}, e^{-1}]$ , tel que pour tout  $h \in (h_{2\gamma}, e^{-1}]$  la déstabilisation est le fruit de la paire  $z_1$  de valeurs propres complexes conjuguées, alors que c'est celui de la valeur propre réelle  $v_2$  pour tout  $h \in [h_1, h_{2\gamma})$ . La valeur  $h = h_3$  apparaissant au graphique 4.13, et évaluée à  $h_3 = 0,28862 \pm 0,00005$ , est le cas particulier de  $h_{2\gamma}$  lorsque  $\gamma = 20$ .

D'autre part, pour tout  $\gamma > \gamma_1$ , la déstabilisation est toujours causée par cette valeur propre réelle. L'exemple de  $\gamma = 50 > \gamma_1$ , dont la frontière est hors d'atteinte de la valeur propre complexe  $z_1$ , est représenté au graphique 4.15 en

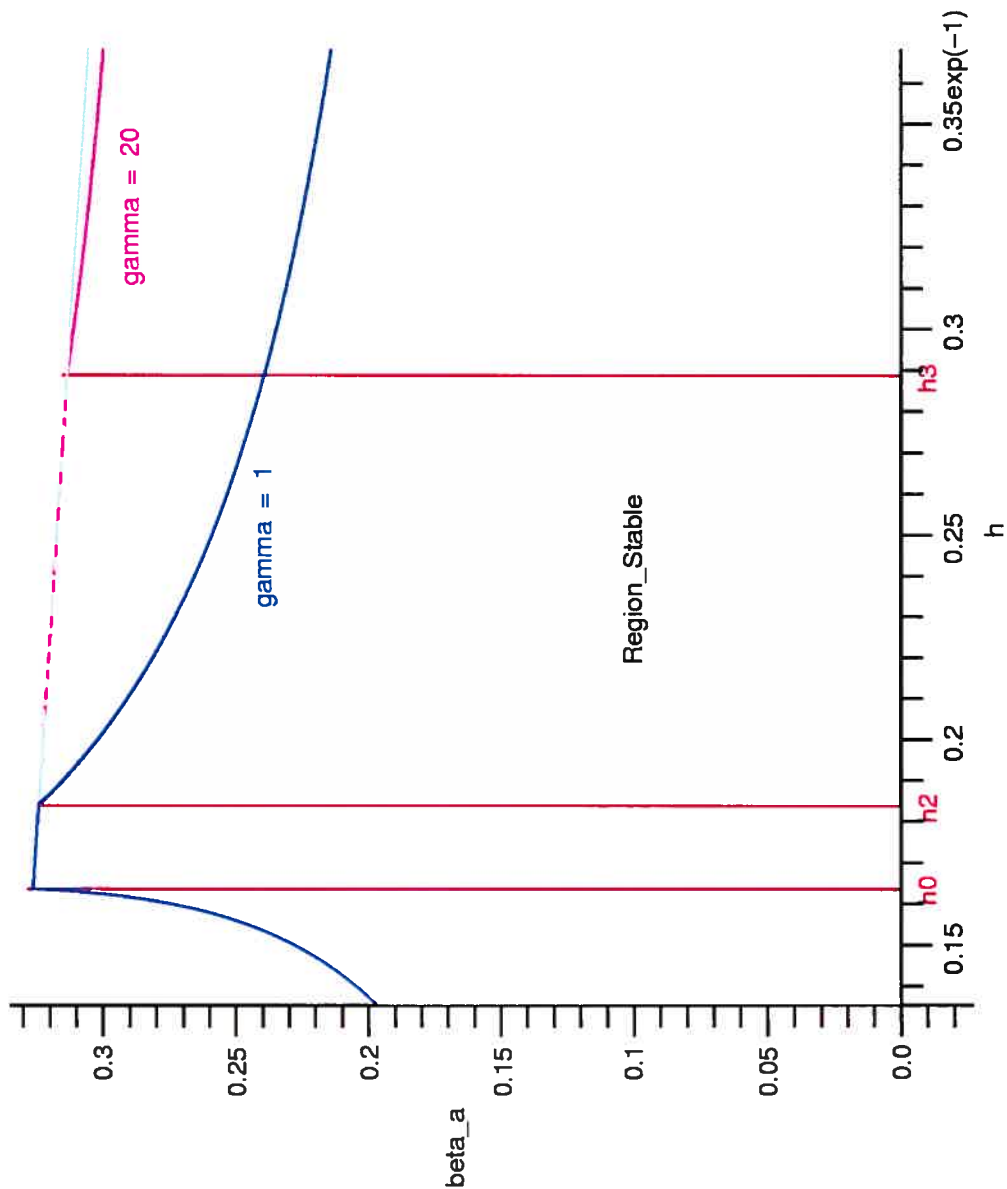


FIG. 4.13. Frontière de stabilité du système dans le plan  $\beta a, h$ , lorsque  $r = r_2$ . La courbe bleu, à gauche, est le siège d'une perte de stabilité causée par une valeur propre réelle tandis que les courbes bleu marine et magenta représentent les déstabilisations produites par une paire de valeurs propres complexes conjuguées correspondant respectivement à  $\gamma = 1$  et  $\gamma = 20$ . La courbe turquoise, qui entre  $h_2$  et  $h_3$  est partagée avec la courbe magenta, représente la frontière de stabilité limite lorsque  $\gamma$  croît, et atteint  $\gamma = 24$ . La perte de stabilité est alors associée à la valeur propre  $v_2$ .

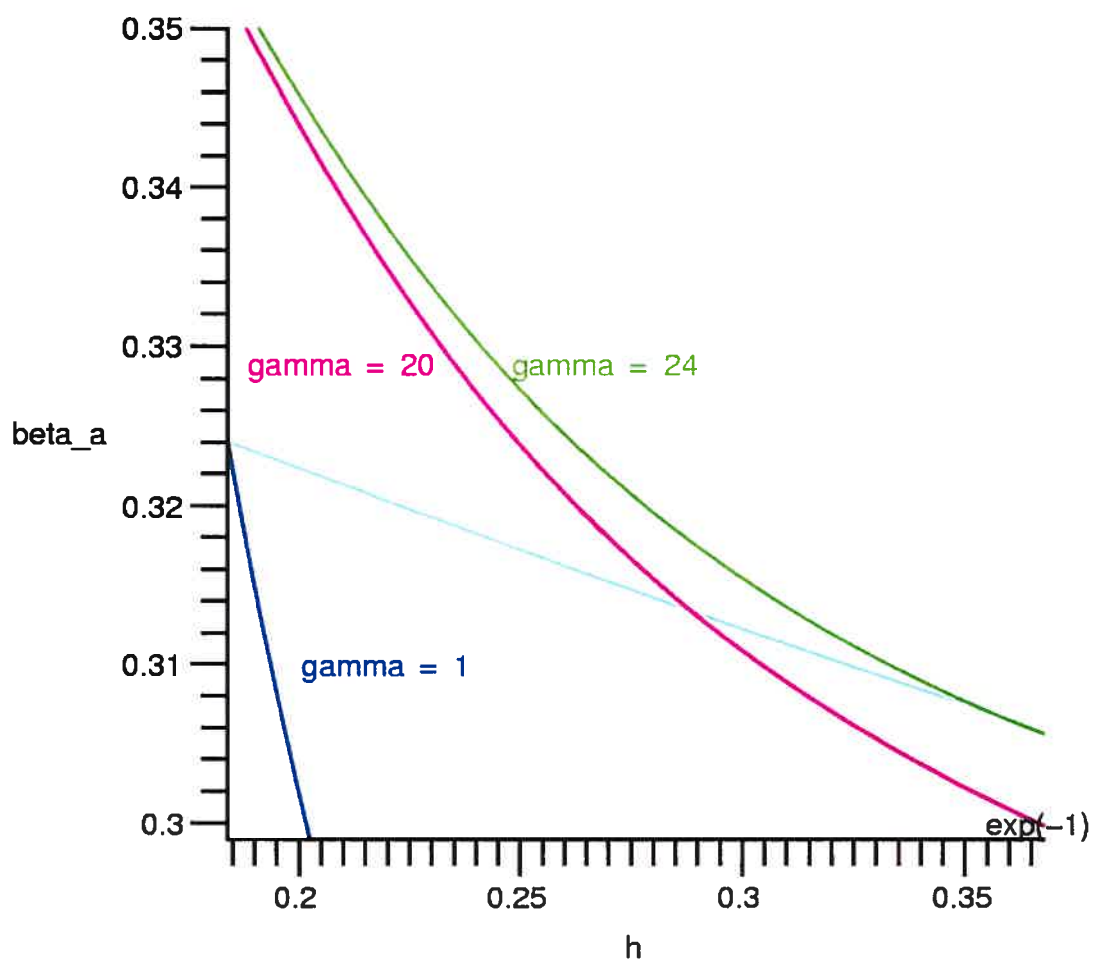


FIG. 4.14. Intersections, lorsque  $h \in [h_1, e^{-1}]$ , de la courbe turquoise associée à la perte de stabilité causée par la valeur propre  $v_2$ , et de trois courbes de perte de stabilité liées à la paire de valeurs propres complexes conjuguées  $z_1$  pour les valeurs respectives de  $\gamma = 1$ ,  $\gamma = 20$  et  $\gamma = 24$ .

même temps que les frontières  $\gamma = 1$  et  $\gamma = 20 < \gamma_1$  qui, elles, sont traversées par  $z_1$ .

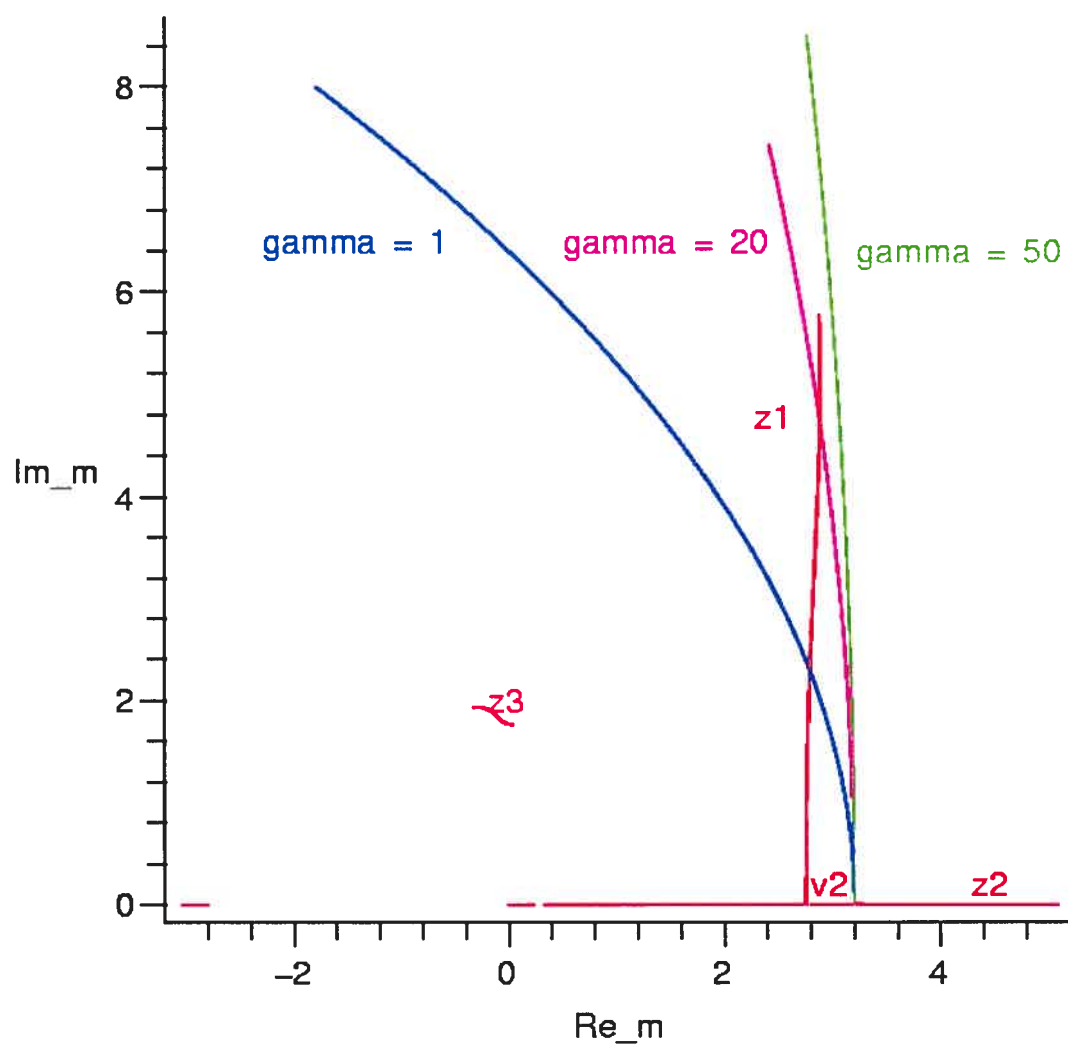


FIG. 4.15. Plan complexe des trajectoires des valeurs propres (en rouge) lorsque, pour  $r = r_2$ , le paramètre  $h$  passe de  $e^{-2}$  à  $e^{-1}$ . Se surimposent les frontières de stabilité pour la matrice  $\frac{A}{\beta a}$  lorsque  $\beta a = 1/v_2(h)$  avec  $h = 0.3$  pour les valeurs de  $\gamma$  indiquées.

## CONCLUSION

---

Nous avons, au chapitre 1 modifié le modèle de mémoire spatiale de Stringer en modélisant en équations les connexions synaptiques, et en y introduisant un délai distribué. Pour veiller à la pertinence du modèle, nous avons simulé les paquets de mémoires ainsi que vérifié la plausibilité biologique des distributions gamma, exponentielle et triangulaire.

L'étude de la stabilité des états de mémoires, qu'elle soit globale, ou locale est autant motivée par la biologie théorique que par les techniques robotiques neuromimétiques. Par la méthode de la fonctionnelle de Lyapounov, le chapitre 2 montre des conditions suffisantes d'unicité et de stabilité asymptotique globale du point d'équilibre. Le chapitre 3 traite de la stabilité locale et de la comparaison des frontières de stabilité, pour plusieurs distributions de délai, en termes des valeurs propres, réelles ou complexes de la matrice  $\mathbf{A}$ , où  $\mathbf{A}$  désigne le produit de la matrices de connexions et de la matrice jacobienne de la fonction d'activation au point d'équilibre. On vérifie qu'en général, la stabilité des équations augmente avec l'élargissement des distributions et on trouve que le moment- $\frac{1}{2}$  normalisé prédit cette stabilité mieux que la variance.

Nous appliquons ensuite les frontières démontrées au cas d'une mémoire spatiale minimale comptant neuf neurones, en recourant à la méthode semi-numérique pour prédire la déstabilisation et la restabilisation en termes des paramètres physiques du modèle. Cet exemple d'application aurait par contre été davantage pertinent biologiquement si le point d'équilibre considéré avait correspondu a un champ de lieu plutôt qu'à l'équilibre trivial plus fréquemment étudié dans la littérature mathématique. Comme discuté au chapitre 1, les distributions gamma

sont plus appropriées au modèle que la distribution uniforme, et l'exemple d'application aurait dû les privilégier.

Enfin, les notions mathématiques utiles à l'étude de la stabilité des équations différentielles à délai figurent à l'annexe A.

L'étape mathématique suivante aurait été d'analyser les bifurcations, en particulier la bifurcation de Hopf, sous certaines hypothèses. À ce sujet, devaient nous guider le cas discret pour deux neurones étudié par Olien et Bélair [14] et plus encore, un système similaire de deux neurones avec distribution exponentielle de délai examiné par Liao [11] et [12]. Toutefois, dans le contexte du modèle de mémoire spatiale, la pertinence biologique de l'étude de la bifurcation de Hopf aurait été faible.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] BÉLAIR, J., *Stability in a Model of a Delayed Neural Network*, J. Dynam. Diff. Eq. 5 (1993) 607-623.
- [2] BLYTHE, J. ET AL., *Stability Switches in Distributed Delay Models*, J. Math. Anal. Appl. 109 (1985) 388-396.
- [3] COLLING, S.B. ET AL., *Limbic gamma rhythms : Phase locked oscillations in hippocampal CA1 and subiculum*, J. Neurophysiol. 80 (1998) 155-161.
- [4] DAYAN, P., ABBOTT, L. F., *Theoretical Neuroscience, Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems*, MIT Press, Cambridge, 2001.
- [5] DUVERNOY, H., *The Human Hippocampus*, J.F. Bergmann Verlag, Munich, 1988.
- [6] GOPALSAMY, K., HE XUEZHONG, *Stability in a asymmetric Hopfield nets with transmission delays*, Physica D 76 (1994) 344-358.
- [7] HALE, J., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New-York, 1977.
- [8] KOLMANOVSKII, V.B., NOSOV, V.R., *Stability of Functional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol 180 , Academic Press, Londres, 1986.
- [9] KOLMOGOROV., *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle* , Éditions MIR, URSS, 1974.
- [10] KUANG, Y., *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Mathematics in Science and Engineering, Vol 191 , Academic Press, San Diego, Californie, États-Unis, 1993.
- [11] LIAO X, ET AL. *Bifurcation analysis on a two-neuron system with distributed delays*, Physica D 149 (2001) 123-141.

- [12] LIAO X, ET AL. *Hopf Bifurcation on a two-neuron System with Distributed Delays : A Frequency Domain Approach*, Nonlinear Dynamics, 31, (2003), 299-326.
- [13] OKEEFE, J. ET DOSTROVSKY, J., *The Hippocampus as a spatial map : preliminary evidence from unit activity in the freely moving brain*, Brain Res. 34 (1971) 171-175.
- [14] OLIEN L., BELAIR, J., *Bifurcations, stability, and monotonicity properties of a delayed neural network model*, Physica D 102 3 (1997) 349-363.
- [15] REID R, *Some Eigenvalues properties of Persymmetric Matrices*, SIAM rev. 32 2 (1997) 313-316.
- [16] SAMSONOVICH, A. ET MCNAUGHTON B.L., *Path integration and cognitive mapping in a continuous attractor neural network model*, J. Neurosci 17 (1997) 5900-5920.
- [17] STRINGER, S.M. ET AL., *Self-organizing continuous attractor network and path integration : two-dimensional models of place cells*, Network : Comput. Neural Syst. 13 (2002) 429-446.
- [18] TAUBE, J.S., ET AL. , *Processing the head direction signal : a review and a commentary*, Brain Research Bulletin 40 (1996) 477-486.
- [19] THIEL, A., SCHWEGLER, H., EURICH, C., *Complex Dynamics is Abolished in Delayed Recurrent Systems with Distributed Feedback Times*, Complexity 8 4 (2003) 102-108.
- [20] TSODYKS, M., *Attractor Neural Network Models of Spatial Maps in Hippocampus* , Hippocampus 9 (1999) 481-489.



# Annexe A

---

## THÉORIE FONDAMENTALE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À DÉLAI

### A.1. INTRODUCTION

Ce chapitre présente les définitions et principaux théorèmes utilisés pour l'étude de la stabilité, globale ou locale, et des points d'équilibre du système. Pour l'essentiel, la théorie suit Kuang [10], mais aussi Kolmanovskii [8] pour les notations.

### A.2. LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À DÉLAI

On note  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$  l'espace de Banach des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Sa norme est  $\|\phi\| = \max_{\theta \in [a, b]} |\phi(\theta)|$ , où  $|\cdot|$  désigne une norme de  $\mathbb{R}^n$ .

Pour un moment initial  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $A \geq 0$  et la fonction  $x \in \mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$ , pour  $t \in [t_0, t_0 + A]$ , on définit  $x_t \in \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  tel que  $x_t = x(t + \theta)$ , pour  $\theta \in [-h, 0]$ .

Nous poserons pour la suite  $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ . Soit un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$  et  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{A.2.1}$$

s'appelle une **équation différentielle à délai**, ou encore une **équation différentielle fonctionnelle retardée**. Lorsqu'elle est autonome, l'équation (A.2.1) se réécrit

$$\dot{x}(t) = f(x_t). \tag{A.2.2}$$

Une fonction  $x$  est une **solution de** (A.2.1) sur  $[t_0 - h, t_0 + A]$  si  $x \in C([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$  pour  $(t, x_t) \in \Omega$  et que  $x$  satisfait à l'équation (A.2.1) pour tout  $t \in [t_0, t_0 + A]$

Pour un moment initial  $t_0$  et une condition initiale  $\phi \in \mathcal{C}$ ,  $x(t_0, \phi)$  est une **solution de** (A.2.1) **de valeur initiale  $\phi$  en  $t_0$**  si  $x_{t_0}(t_0, \phi) = \phi$  et qu'il existe  $A > 0$  tel que  $x(t_0, \phi)$  est une solution de (A.2.1) sur  $[t_0 - h, t_0 + A]$ .

Lorsqu'une équation différentielle à délai est autonome,  $\dot{x}(t) = f(x_t)$ , on peut choisir le moment initial  $t_0 = 0$ .

On trouve les démonstrations des théorèmes fondamentaux suivants dans Hale [7].

**Théorème A.2.1** (Existence). *Soit un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$  et  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

*Si la fonction  $f$  est continue sur  $\Omega$ , alors il existe une solution à l'équation différentielle à délai (A.2.1) pour tout  $(t_0, \phi) \in \Omega$ .*

**Théorème A.2.2** (Unicité). *Soit un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$  et  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

*Si la fonction  $f(t_0, \phi)$  est continue sur  $\Omega$  et qu'elle est lipschitzienne en  $\phi$  pour tout sous-ensemble compact de  $\Omega$ , alors il existe une unique solution à l'équation différentielle à délai (A.2.1) pour tout  $(t_0, \phi) \in \Omega$ .*

**Théorème A.2.3** (Dépendance continue). *Soit un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ , avec  $(t_0, \phi) \in \Omega$  et la fonction  $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Supposons que sur  $[t_0 - h, b)$ ,  $b > t_0$ , il existe  $x$  une unique solution à l'équation (A.2.1) passant par  $(t_0, \phi)$ . Soit  $W = \{(t, x_t) \mid t \in [t_0, b]\}$  et  $V$  un voisinage de  $W$  sur lequel  $f$  est borné. Si*

**Théorème A.2.4** (Propriété de lissage). *Soit  $x(t)$  une solution de*

$$\dot{x} = f(t, x_t), \quad x_{t_0} = \phi, \quad \phi \in \mathcal{C}$$

*où  $f$  est de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , et soit  $I = [t_0, t_x)$  l'intervalle maximum d'existence de  $x(t)$ . Alors  $x(t)$  est de classe  $C^m$  sur l'intervalle  $[t_0 + mh, t_x)$  pour  $m = 0, 1, \dots, k$ .*

C'est donc dire que la solution  $x(t)$  sur  $[t_0 - h, t_x)$  montre une discontinuité en  $t = t_0$  et que pour  $t > t_0$ , elle devient de plus en plus lisse à mesure que  $t$  augmente.

**Remarque A.2.1** (Délai infini). *Lorsque le délai est infini, en lieu et place de l'espace  $\mathcal{C}$ , on considèrera l'espace de mémoire évanescence*

$$\mathcal{UC}_g = \left\{ \phi \in C((-\infty, 0], \mathbb{R}^n) : \frac{\phi}{g} \text{ borné et uniformément continu sur } (-\infty, 0] \right\},$$

où la fonction  $g(s)$  satisfait aux conditions

(g1)  $g : (-\infty, 0] \rightarrow [1, \infty)$ , est continue non-décroissante telle que  $g(0) = 1$ ,

(g2)  $g(s+u)/g(s) \rightarrow 1$  uniformément sur  $(-\infty, 0]$  lorsque  $u \rightarrow 0^-$ ,

(g3)  $g(s) \rightarrow +\infty$  lorsque  $s \rightarrow -\infty$ .

Muni de la norme

$$\|\phi\|_g = \sup_{s \leq 0} \frac{|\phi(s)|}{g(s)},$$

$\mathcal{UC}_g$  est un espace de Banach.

En pratique, on utilisera  $g(s) = e^{-\alpha s}$  et on notera alors la norme  $\|\cdot\|_e$ .

La théorie des sections suivantes, rédigée pour les délais finis, se généralise aux délais infinis en changeant l'espace  $\mathcal{C}$  pour  $\mathcal{UC}_g$ .

### A.3. STABILITÉ LOCALE

Nous présentons dans cette section les définitions et méthodes utilisées au chapitre 3 pour analyser la stabilité linéaire du modèle. Notre présentation suit surtout Kuang [10].

Considérons un système d'équations différentielles à délai de la forme (A.2.1) et supposons que la fonction  $f$  est complètement continue, i.e. que l'image par  $f$  de tout ensemble borné est précompact.

On note la boule fermée  $B(y, \delta) = \{\phi \in \mathcal{C} : \|\phi - y\| \leq \delta\}$ .

**Définition A.3.1.** Supposons  $x^*$  un point d'équilibre, c'est-à-dire que  $f(t, x^*) = 0$ .

(1) La solution  $x^*$  est dite **stable** si, pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$  tel que

$$\phi \in B(x^*, \delta) \Rightarrow \forall t \geq t_0, x_t(t_0, \phi) \in B(x^*, \epsilon).$$

Dans le cas contraire, la solution  $x^*$  est dite **instable**.

(2) La solution  $x^*$  est dite **asymptotiquement stable** si elle est stable et qu'il existe  $b > 0, b = b(t_0)$  tel que

$$\phi \in B(x^*, b) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t_0, \phi)(t) = x^*.$$

(3) La solution  $x^*$  est dite **uniformément stable** si, dans la définition de stable,  $\delta = \delta(\epsilon)$ , c'est-à-dire  $\delta$  est indépendamment de  $t_0$

(4) La solution  $x^*$  est dite **uniformément asymptotiquement stable** si elle est uniformément stable et qu'il existe  $b > 0$  tel que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\sigma(\eta) > 0$  tel que ,

$$\phi \in B(x^*, b) \Rightarrow \forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall t \geq t_0 + \sigma(\eta), x_t(t_0, \phi) \in B(x^*, \eta).$$

### A.3.1. Linéarisation et équation caractéristique

Considérons une équation différentielle à délai autonome (A.2). Elle peut se réécrire sous la forme

$$\dot{x}(t) = L(x_t) + F(x_t), \quad \text{pour } F, L: C \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.3.1})$$

où  $L$  est une fonctionnelle linéaire continue tandis que  $F(x^*) = 0$  et  $\left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right|_{x^*} = 0$ .  
L'équation

$$\dot{x}(t) = L(x_t) \quad (\text{A.3.2})$$

s'appelle alors la **linéarisation** de l'équation (A.2) au point d'équilibre  $x^*$ .

Pour analyser la stabilité locale de  $x^*$ , nous recherchons des solutions de la forme  $x(t) = ce^{\lambda t}$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ . Substituer cette expression dans l'équation linéarisée (A.2) montre que les solutions non triviales pour  $c$  n'existent que lorsque

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - L(e^\lambda \cdot \mathbf{I})) = 0. \quad (\text{A.3.3})$$

On appelle **équation caractéristique** la fonction  $\Delta(\lambda)$  et ses zéros sont les **valeurs propres** de l'équation (A.3.2).

**Théorème A.3.1** ( Stabilité asymptotique uniforme d'une équation linéaire).

(1) Si  $\sup\{\Re(\lambda) \mid \Delta(\lambda) = 0\} < 0$ , alors la solution nulle de l'équation linéaire (A.3.2) est **uniformément asymptotiquement stable**.

(2) S'il existe une valeur propre  $\lambda$  telle que  $\Re(\lambda) > 0$ , alors la solution nulle de l'équation (A.3.2) est instable.

(3) Si  $\Delta(\lambda) = 0$  admet une racine imaginaire pure non-simple, alors la solution nulle de l'équation (A.3.2) est instable.

**Définition A.3.2.** On qualifera de *stable*, une équation caractéristique respectant la condition (1) du théorème (A.3.1).

**Théorème A.3.2** (Stabilité asymptotique uniforme locale). Si la solution nulle de l'équation linéarisée (A.3.2) est uniformément asymptotiquement stable, alors, la solution  $x^*$  de l'équation (A.2) est aussi uniformément asymptotiquement stable. S'il existe une valeur propre  $\lambda$  telle que  $\Re(\lambda) > 0$ , alors la solution nulle de l'équation (A.2) est instable.

### A.3.2. Le critère de Routh-Hurwitz

Dans certains cas particuliers, l'équation caractéristique (A.3.3) se réduit à un polynôme, dont l'étude de la stabilité est simplifiée par le critère de Routh-Hurwitz, tant que son degré reste petit. .

**Théorème A.3.3** (Critère de Routh-Hurwitz). Soit un polynôme caractéristique

$$D(\lambda) = a_1\lambda^n + a_2\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (\text{A.3.4})$$

où  $a_j \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Le **tableau de Routh**, de format  $n \times \left( \left[ \frac{n+1}{2} \right]^E + 1 \right)$ , se présente comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots \end{pmatrix}$$

où, pour  $i > 3$ ,

$$A_{i,j} = \frac{-1}{A_{i-1,1}} \det \begin{pmatrix} A_{i-2,1} & A_{1-2,j+1} \\ A_{i-1,1} & A_{i-1,j+1} \end{pmatrix}.$$

1. La condition nécessaire et suffisante de stabilité du système est que

a) Tous les coefficients  $a_j, 1 \leq j \leq n$ , du polynôme, et

b) tous les éléments de la première colonne du tableau de Routh,

$$A_{k,1}, 1 \leq k \leq n,$$

soient de même signe.

2. Si un des coefficient en a) est nul (resp. négatif) et au moins un autre est positif, il existe  $\lambda$  tel que  $\Re \lambda$  est nul (resp. négatif).

#### A.4. MÉTHODE DE LA FONCTIONNELLE DE LYAPOUNOV

Comme pour l'étude de la stabilité locale, considérons l'équation différentielle à délai de la forme (A.2.1) avec la fonction  $f: \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , complètement continue. Supposons  $f(t, 0) = 0$ , c'est-à-dire que 0 est le point d'équilibre à étudier. Si le point d'équilibre est non-nul, une transformation de la fonction suffira pour retrouver les conditions requises. On note par  $x(t, \phi)$  la solution de l'équation (A.2.1) en  $(t, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ .

La démonstration du prochain théorème sur la stabilité asymptotique uniforme se trouve dans Kuang [10], p. 27.

**Théorème A.4.1** (Stabilité asymptotique uniforme). *Soit  $V(t, \phi)$ ,  $V: \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonctionnelle continue telle que  $V(t, 0) = 0$ . On définit sa dérivée*

$$\dot{V} = \dot{V}(t, \phi) = \limsup_{\Delta t \rightarrow +0} \frac{1}{\Delta t} [V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(t, \phi)) - V(t, \phi)]$$

*Soient de plus  $\omega_i(r): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $i = 1, 2, 3$ , des fonctions continues et non-décroissantes telles que  $\omega_i(0) = 0$  et  $\omega_i(r) > 0$  pour  $r > 0$ .*

*Si*

$$(i) \quad \omega_1(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq \omega_2(\|\phi\|)$$

$$(ii) \quad \dot{V} \leq -\omega_3(\|x(t)\|)$$

*Alors l'équilibre  $x = 0$  de l'équation (A.2.1) est uniformément asymptotiquement stable.*

C'est  $V(t, \phi)$  satisfaisant aux conditions de ce théorème que l'on appelle une fonctionnelle de Lyapounov.

Le théorème suivant sur la stabilité globale asymptotique uniforme est adaptée de Kolmanovskii [8], p.79 et Kuang [10], p.30, en démontre une autre version équivalente.

**Théorème A.4.2** (Stabilité globale asymptotique). *Sous les conditions suffisantes de la stabilité asymptotique, il suffit que*

$$(i) \quad \omega_1(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi)$$

$$(ii) \quad \omega_1(s) \rightarrow \infty, \text{ lorsque } s \rightarrow \infty,$$

*pour que le point d'équilibre  $x = 0$  de (A.2.1) soit globalement uniformément asymptotiquement stable*

Remarquons que lorsque les conditions du théorème (A.4.2) sont satisfaites, il suffit de vérifier le point (ii) pour conclure que le point d'équilibre nul est globalement asymptotiquement stable.