

Université de Montréal

Les graphes asymétriques minimaux de longueur
induite 3

par

Jérôme Gagnon

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

août 2006



CLA
3
U54
2006
V.013

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Les graphes asymétriques minimaux de longueur
induite 3**

présenté par

Jérôme Gagnon

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

M. Abraham Broer

(président-rapporteur)

M. Gert Sabidussi

(directeur de recherche)

M. Ivo Rosenberg

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

21 Août 2006

SOMMAIRE

Un graphe est dit asymétrique (resp. sans involution) minimal s'il est asymétrique (resp. sans involution) et qu'aucun de ses sous-graphes induits propres non triviaux n'a cette propriété. Ce mémoire traite de la classification des graphes asymétriques minimaux. On y montre en fait qu'il n'existe que neuf graphes asymétriques minimaux de longueur induite 3 et que ceux-ci sont aussi les seuls graphes sans involution minimaux de longueur induite 3. Comme il a déjà été démontré qu'il n'existe qu'un nombre fini de graphes asymétriques minimaux de longueur induite supérieure ou égale à 4, il est maintenant possible d'affirmer qu'il n'existe qu'un nombre fini (en effet, il en existe exactement 18) de graphes asymétriques minimaux et que ceux-ci sont aussi les seuls graphes sans involution minimaux, démontrant ainsi la conjecture de J. Nešetřil sur la finitude de ces ensembles.

MOTS CLEFS

Automorphisme, graphe asymétrique minimal, graphe sans involution minimal, longueur induite, clump.

SUMMARY

A graph is minimal asymmetric (minimal involution-free) if it is asymmetric (involution-free) but none of its proper non-trivial induced subgraph has this property. This M.Sc. thesis is concerned with the classification of the minimal asymmetric graphs. We show that there is only nine minimal asymmetric graphs of induced length 3 and that they are at the same time the only minimal involution-free graphs of induced length 3. As it has already been shown that there is only a finite number of minimal asymmetric graphs of induced length greater or equal to 4, it is now possible to state that the class of minimal asymmetric graphs is finite (in fact, there are 18 minimal asymmetric graphs) and that these graphs are at the same time the only minimal involution-free graphs, this proving the conjecture of J. Nešetřil on the finiteness of these sets.

KEY WORDS

Automorphism, minimal asymmetric graphs, minimal involution-free graphs, induced length, clump.

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier mes parents du fond de mon coeur pour m'avoir permis tout au long de ces années de pouvoir conjuguer les mathématiques et le tennis. Votre support tant financier qu'affectif m'a permis de grandir en tant qu'être humain.

Un autre merci particulier revient à mon directeur de recherche M. Sabidussi pour sa patience à mon égard. C'est vraiment grâce à vous si en ce moment je suis si fier de moi. Vous m'avez appris énormément au cours de cette dernière année et je vous en suis grandement reconnaissant.

Merci à Samy et Maciek, mes deux grands amis, à Louis et à toutes les autres personnes qui ont défilé au cours des années dans cette merveilleuse organisation qu'est l'équipe de tennis des Carabins de l'Université de Montréal. J'ai passé les plus beaux moments de ma vie jusqu'à maintenant en votre compagnie.

Finalement, merci à tout le monde du département de mathématiques. J'ai passé six très belles années en votre compagnie et je vous en remercie.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Mots clefs	iii
Summary	iv
Key words.....	iv
Remerciements	v
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
Chapitre 1. Quelques notions en théorie des graphes	4
1.1. Notions de base.....	4
1.1.1. Graphes et sous-graphes induits.....	4
1.1.2. Distance, diamètre et longueur induite	5
1.2. Automorphismes.....	7
1.2.1. Automorphismes et graphes asymétriques.....	7
1.2.2. Graphes complémentaires	8
1.2.3. Clumps.....	9
Chapitre 2. Classification des graphes asymétriques minimaux ..	11
2.1. Définition et propriétés	11
2.2. Classification des graphes asymétriques minimaux.....	15

2.2.1. Longueur induite $\lambda \geq 5$	16
2.2.2. Longueur induite $\lambda = 4$	17
2.2.3. Longueur induite $\lambda \leq 2$	17
2.2.4. Longueur induite $\lambda = 3$	19
Chapitre 3. Classification des graphes asymétriques minimaux de longueur induite 3	22
3.1. Types de voisinage admissibles et compatibilité	22
3.2. Élimination des sommets de niveaux supérieurs	27
3.3. Suite et fin de la démonstration	61
Bibliographie	67
Annexe A. Compatibilité entre les types de voisinages admissibles	A-i

LISTE DES FIGURES

1.1.1	Un graphe	5
1.1.2	Longueur induite vs diamètre	7
2.1.1	Graphes asymétriques minimaux de longueur induite 5	12
2.1.2	Graphes asymétriques minimaux de longueur induite 4	13
2.1.3	Graphes asymétriques minimaux de longueur induite 3	14
3.1.1	Types de voisinage admissibles	24
3.1.2	Élimination de A_7	25
3.1.3	Q_{23}^- et Q_{23}^+	26
3.3.1	Élimination de A_6	65
3.3.2	Élimination de A_4	66

LISTE DES TABLEAUX

3.1.1	Tableau de compatibilité des types de voisinage	27
-------	---	----

INTRODUCTION

Un graphe est asymétrique si l'identité est son seul automorphisme. Il est sans involution si aucun de ses automorphismes n'est d'ordre 2. On dit d'un graphe qu'il est asymétrique (resp. sans involution) minimal s'il est asymétrique (resp. sans involution) et qu'aucun de ses sous-graphes induits propres non triviaux n'a cette propriété. Les graphes des figures 2.1.1 à 2.1.3 sont asymétriques minimaux et sans involution minimaux. Une conjecture de J. Nešetřil [1,2], vieille d'une vingtaine d'années, stipule que la classe des graphes finis ne contient qu'un nombre fini, à isomorphisme près, de graphes asymétriques minimaux et que ceux-ci sont aussi les seuls graphes sans involution minimaux. Cet énoncé peut sembler étonnant pour deux raisons :

(i) À priori, un graphe sans involution minimal n'est pas nécessairement asymétrique minimal et vice versa.

(ii) Les graphes asymétriques sont en très grande proportion dans la classe des graphes finis. En fait, il a été démontré par Erdős et Rényi en 1963 [4] que presque tous les graphes sont asymétriques.

En travaillant à la résolution de cette conjecture, il s'est avéré utile de séparer le problème en quelques cas selon la longueur induite des graphes (c.-à-d. la longueur d'une plus longue chaîne induite dans le graphe). Il a été démontré par G. Sabidussi en 1987 [1] qu'il n'existe que deux graphes asymétriques minimaux de longueur induite supérieure ou égale à 5 (fig 2.1.1) et que ces graphes sont les seuls graphes sans involution minimaux de longueur induite supérieure ou égale à 5. Ces deux graphes sont en fait de longueur induite 5. Finalement, il a été démontré par J. Nešetřil et G. Sabidussi en 1992 [2] qu'il n'existe que

sept graphes asymétriques minimaux de longueur induite 4 et que ceux-ci sont aussi les seuls graphes sans involution minimaux de longueur induite 4 (fig 2.1.2).¹

Comme il est bien connu (folklore) que tout graphe de longueur induite 2 a une involution, le but de mes recherches était de démontrer la conjecture de Nesetril pour le dernier cas demeurant sans preuve, celui des graphes de longueur induite 3.

La technique utilisée pour prouver la conjecture pour le cas des graphes de longueur induite 3 est somme toute la même que celle utilisée dans les théorèmes de [1] et [2]. Nous considérons un graphe G asymétrique minimal de longueur induite 3 différent de ceux déjà connus (fig 2.1.3). À l'intérieur de ce graphe, on se fixe une chaîne induite de longueur maximale en occurrence de longueur 3. À l'aide de certaines propriétés des graphes asymétriques minimaux, il est possible de montrer que les sommets de G à l'extérieur de la chaîne sont situés de façon à ce que G ait une involution contredisant le fait que G n'en ait pas. Contrairement aux théorèmes démontrés dans [1] et [2], certains arguments de la preuve feront appel au complémentaire de G .

Le premier chapitre de ce mémoire sera consacré aux définitions de base de la théorie des graphes qui seront utilisées tout au long du texte.

C'est dans le deuxième chapitre qu'on retrouve un premier résultat original. En effet, on montre que tout graphe biparti de longueur induite 3 a une involution, résultat technique utilisé dans la démonstration du théorème principal mais aussi d'intérêt indépendant. La preuve s'inspire du théorème folklorique sur les involutions dans les graphes de longueur induite 2.

Finalement, c'est au troisième chapitre qu'on retrouve chacune des étapes menant à la preuve de la conjecture de J. Nesetril pour le cas des graphes de

¹Comme la preuve de ce théorème est extrêmement longue, certains détails techniques ont été omis dans [2]. Pour une version complète de la preuve, veuillez vous référer au preprint [5].

longueur induite 3. Les détails sont nombreux, techniques et répétitifs. Nous avons eu recours au logiciel GAP pour la recherche des sous-graphes interdits.

Chapitre 1

QUELQUES NOTIONS EN THÉORIE DES GRAPHES

Le but de ce chapitre est de familiariser le lecteur avec certaines notions de la théorie des graphes qui nous seront utiles tout au long du mémoire. Comme nous allons parler plus tard de graphes asymétriques minimaux, les notions de sous-graphe induit et d'automorphisme de graphes seront les définitions les plus importantes pour une bonne compréhension du sujet.

1.1. NOTIONS DE BASE

1.1.1. Graphes et sous-graphes induits

Tout au long du mémoire, les graphes seront *finis* et *simples*, c'est-à-dire sans arêtes multiples ni boucles.

Un *graphe fini* $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini V dont les éléments sont appelés *sommets* de G et par l'ensemble E dont les éléments sont appelés *arêtes* de G . Une arête e de l'ensemble E est définie comme une paire non-ordonnée de sommets de G . On appelle ces sommets, les *extrémités* de e . On dira que deux sommets x et y de G sont *adjacents* s'il existe une arête dans G qui a x et y comme extrémités. On écrira alors xEy . Si x et y ne sont pas adjacents, on écrira $x\bar{E}y$. Soit e , une arête de G ayant x et y comme extrémités, on écrit donc

$e = [x, y]$. Tout au long de ce mémoire, nous noterons N_x , l'ensemble des *voisins* d'un sommet $x \in V(G)$, c'est-à-dire,

$$N_x := \{y \in V(G) \mid xEy\}.$$

Le *degré* du sommet x est la cardinalité de N_x .

On dit d'un graphe qu'il est *discret* s'il ne contient aucune arête. Un graphe est *trivial* s'il possède au plus un sommet. Finalement, G est *biparti* s'il existe une partition des sommets de G en deux ensembles A et B telle que toute arête de G a une extrémité dans A et l'autre dans B .

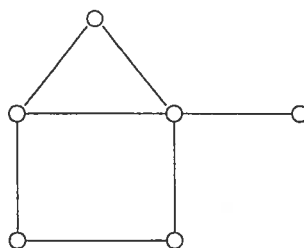


FIG. 1.1.1. Un graphe

Soient G et H deux graphes. On dit que H est un *sous-graphe induit* de G si l'ensemble des sommets de H , noté $V(H)$, est contenu dans $V(G)$ et que $E(H)$ est constitué de toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont des sommets de H . Donc, étant donné un sous-ensemble $X \subseteq V(G)$, on peut considérer $\langle X \rangle$, le *sous-graphe de G induit par X* .

1.1.2. Distance, diamètre et longueur induite

Au cours des prochains chapitres, on aura parfois besoin de connaître la distance entre deux sommets d'un graphe ou entre un sommet et un sous-graphe induit d'un graphe.

Avant de définir ces deux concepts, nous aurons besoin de la notion suivante. Soient u et v deux sommets distincts d'un graphe G . Une *chaîne* de u à v dans G est une suite $P = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ de sommets distincts de G tels que $x_0 = u, x_k = v$ et $x_i E x_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$. La *longueur* de la chaîne

P , notée $l(P)$, est le nombre d'arêtes qu'elle possède, c.-à-d. $l(P) = k$.

On dit qu'un graphe G est *connexe* si pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne P reliant u et v . Lorsque G est non connexe, chacun de ses sous-graphes induits connexes maximaux par rapport à l'inclusion de G se nomme *composante connexe* de G .

Si G est un graphe connexe, on définit la *distance* entre u et v , deux sommets de G , de la manière suivante. Notons d'abord $\mathbf{P}(u, v)$ l'ensemble des chaînes reliant u et v dans G . On pose alors

$$d(u, v) := \min\{l(P) \mid P \in \mathbf{P}(u, v)\}.$$

Si H est un sous-graphe induit de G et u un sommet quelconque de G , nous définissons la *distance* de u à H de la manière suivante :

$$d(u, H) := \min\{d(u, v) \mid v \in V(H)\}.$$

Soit x , un sommet de G . Il est possible de partitionner $V(G)$ selon la distance des sommets à x . Notons

$$N_x^k := \{y \in V(G) \mid d(y, x) = k\}, k \in \mathbf{N}.$$

On appelle ces ensembles les *classes de distance* de G par rapport à x .

Soit x , un sommet de G . On définit l'*excentricité* de x de la manière suivante :

$$\epsilon(x) := \max\{d(x, y) \mid y \in V(G)\}.$$

Le *diamètre* d'un graphe connexe G , noté $\delta(G)$, est la distance maximale entre deux sommets de G . C'est-à-dire,

$$\delta(G) := \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}.$$

On remarque que le diamètre peut aussi être défini comme le maximum des excentricités,

$$\delta(G) = \max\{\epsilon(u) \mid u \in V(G)\}.$$

Une *chaîne induite* dans G est une chaîne x_0, \dots, x_k telle que le sous-graphe de G formé des sommets et des arêtes de la chaîne est induit.

La *longueur induite* d'un graphe G (connexe ou non), notée $\lambda(G)$, est la longueur d'une plus longue chaîne induite dans G .

L'observation suivante est évidente :

Remarque 1.1.1. Soit G , un graphe connexe quelconque. Alors $\delta(G) \leq \lambda(G)$.

En général, ces deux paramètres ne sont pas égaux. La figure 1.1.2 montre un exemple de graphe où le diamètre est 2 et la longueur induite est k . Nous pouvons donc prendre k aussi grand que l'on veut pour remarquer que la différence entre la longueur induite d'un graphe et son diamètre peut être arbitrairement grande.

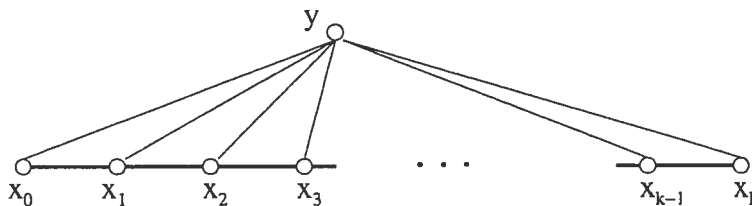


FIG. 1.1.2. Longueur induite vs diamètre

1.2. AUTOMORPHISMES

1.2.1. Automorphismes et graphes asymétriques

Soit $G = (V, E)$, un graphe quelconque. Un *automorphisme* de G est une fonction bijective $\sigma : V(G) \rightarrow V(G)$ telle que pour tous $x, y \in V(G)$

$$xEy \iff \sigma(x)E\sigma(y).$$

En d'autres mots, σ est une permutation des sommets de G qui préserve la structure du graphe, c.-à-d. l'adjacence. L'ensemble des automorphismes d'un graphe G forme un groupe sous la composition de permutations. On note ce groupe $Aut(G)$. Une *involution* de G est un automorphisme d'ordre 2.

Soit G , un graphe et $u, v \in V(G)$. S'il existe un automorphisme σ tel que $\sigma(u) = v$, on dit que les sommets u et v sont *semblables*.

Les graphes dont le groupe d'automorphismes se réduit à l'identité seulement sont dits *asymétriques*. En d'autres mots, on dit qu'un graphe est asymétrique si chacun de ces sommets n'est semblable qu'à lui-même. La figure 1.1.1 montre un exemple de graphe asymétrique. Les graphes asymétriques forment une très grande classe de graphes. En fait, il a été démontré par Erdős et Rényi [4] que presque tous les graphes sont asymétriques. Cette affirmation signifie que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{|G_n|} = 1$$

où A_n désigne l'ensemble des graphes asymétriques d'ordre n à isomorphisme près et G_n désigne l'ensemble des graphes d'ordre n à isomorphisme près, l'ordre d'un graphe étant son nombre de sommets.

1.2.2. Graphes complémentaires

Soit G et H , deux graphes. On dit que H est le *complémentaire* de G si $V(H) = V(G)$ et si pour tous $x, y \in V(H)$ distincts,

$$xEy \text{ dans } H \iff x\bar{E}y \text{ dans } G.$$

On note alors $H = \bar{G}$.

Lemme 1.2.1. *Pour tout graphe G , $Aut(\bar{G}) = Aut(G)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma \in Aut(G)$ et $x, y \in V(G)$ distincts. On a alors que :

$$\begin{aligned} xEy \in \bar{G} &\iff x\bar{E}y \in G \\ &\iff \sigma(x)\bar{E}\sigma(y) \in G \\ &\iff \sigma(x)E\sigma(y) \in \bar{G} \end{aligned}$$

c.-à-d. σ est un automorphisme de \bar{G} si et seulement s'il est un automorphisme de G . □

En particulier, on remarque ici qu'une involution de G demeure une involution dans \overline{G} .

1.2.3. Clumps

Définition 1.2.1. Soit G , un graphe quelconque. Un *clump*¹ de G est un sous-ensemble $A \subseteq V(G)$ tel que pour tous $x, y \in A$,

$$N_x \setminus A = N_y \setminus A.$$

En d'autres mots, les sommets de A ont un voisinage constant à l'extérieur de A .

On remarque qu'un graphe G quelconque contient toujours quelques clumps. En effet, soit $x \in V(G)$, nous avons que le singleton $\{x\}$ est un clump de G . De plus, nous avons aussi que \emptyset ainsi que $V(G)$ en entier sont des clumps de G . On appelle ces trois types les *clumps triviaux* de G .

Soit A , un clump de G tel que $|A| \geq 2$ et $A \neq V(G)$, on dit alors que A est un *clump non trivial* de G .

Le prochain lemme sur les extensions d'automorphismes, quoique trivial, sera d'une importance capitale lors des prochains chapitres.

Lemme 1.2.2. Soit G , un graphe quelconque et A , un clump non trivial de G . Si $\sigma \in \text{Aut}(\langle A \rangle)$, alors il est possible d'étendre σ à un automorphisme de G .

DÉMONSTRATION. Soit G un graphe quelconque et A un clump non trivial de G . Regardons le sous-graphe induit par les sommets de A . Soit $\sigma \in \text{Aut}(\langle A \rangle)$. Soit $\rho : V(G) \rightarrow V(G)$ définie par $\rho(x) = \sigma(x)$, pour tout $x \in A$ et $\rho(x) = x$ pour tout $x \in V(G) \setminus A$.

¹Le seul terme français en usage est intervalle. Emprunté de la théorie des ensembles ordonnés, il se prête mal à la théorie des graphes. Le terme *clump* semble paraître pour la première fois dans un article de M. Aschbacher [3].

Comme A est un clump de G , il est évident que ρ est un automorphisme de G . □

Lemme 1.2.3. *Soit G , un graphe quelconque et A , un clump non trivial de G . Alors, A est aussi un clump dans \overline{G} .*

DÉMONSTRATION. Soit $x, y \in V(G) = V(\overline{G})$. Nous savons que dans G , $N_x \setminus A = N_y \setminus A$ car A est un clump de G . Calculons donc le voisinage de x et y à l'extérieur de A dans \overline{G} . Pour les besoins de la cause, notons le voisinage de x dans G , $(N_x)_G$ et le voisinage de x dans \overline{G} , $(N_x)_{\overline{G}}$.

Nous avons que :

$$\begin{aligned} (N_x)_{\overline{G}} \setminus A &= (V(G) \setminus A) \setminus ((N_x)_G \setminus A) \\ &= (V(G) \setminus A) \setminus ((N_y)_G \setminus A) \\ &= (N_y)_{\overline{G}} \setminus A \end{aligned}$$

Donc, A est un clump de \overline{G} . □

Chapitre 2

CLASSIFICATION DES GRAPHEs ASYMÉTRIQUES MINIMAUX

Dans ce chapitre, il sera question de graphes asymétriques minimaux. En fait, après avoir défini ces objets et énoncé quelques-unes de leurs propriétés, nous entamerons leur classification.

2.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Définition 2.1.1. (i) Un graphe G est un *graphe asymétrique minimal* s'il est asymétrique et que tous ses sous-graphes induits non-triviaux ont au moins un automorphisme autre que l'identité.

(ii) On dira que G est un *graphe sans involution minimal* s'il n'admet aucune involution mais que tous ses sous-graphes induits non-triviaux en ont au moins une.

Les figures 2.1.1 à 2.1.3 montrent la liste des 18 graphes asymétriques minimaux qu'on retrouve dans [2].¹ On remarque aussi que ces graphes sont aussi sans involution minimaux. Comme le montrent les figures, M_1 et M_2 sont de longueur induite 5, M_3 à M_9 sont de longueur induite 4 et les neuf derniers, de longueur induite 3.

¹En fait, nous avons complété la liste disponible dans [2] en ajoutant les complémentaires de certains graphes.

En observant ces graphes, on remarque que ceux-ci sont tous connexes et qu'ils sont tous par paire de complémentaires. En effet, $M_1 = \overline{M}_{14}$, $M_2 = \overline{M}_{16}$, $M_3 = \overline{M}_{13}$, $M_4 = \overline{M}_{16}$, $M_5 = \overline{M}_6$, $M_7 = \overline{M}_{10}$, $M_8 = \overline{M}_{18}$, $M_9 = \overline{M}_{15}$ et $M_{11} = \overline{M}_{12}$.

À remarquer que M_i et \overline{M}_i n'ont pas nécessairement la même longueur induite. En fait, M_5 et M_6 ainsi que M_{11} et M_{12} sont les seules paires de complémentaires ayant la même longueur induite.

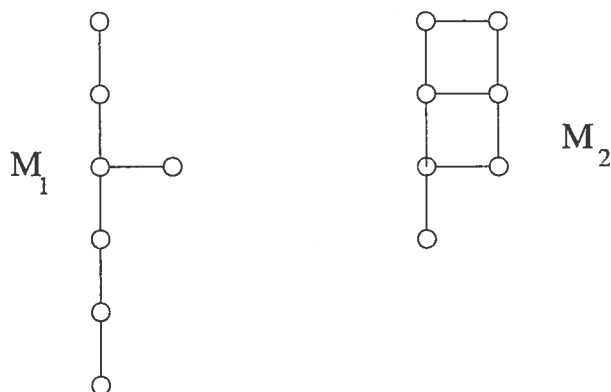
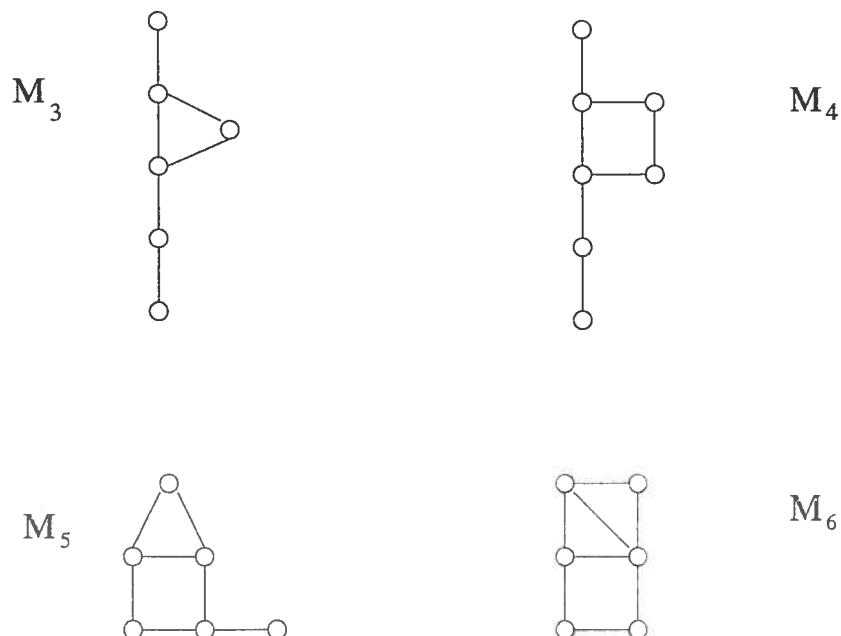


FIG. 2.1.1. Graphes asymétriques minimaux de longueur induite 5



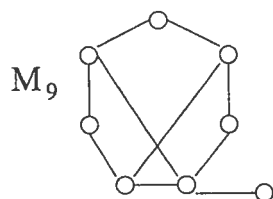
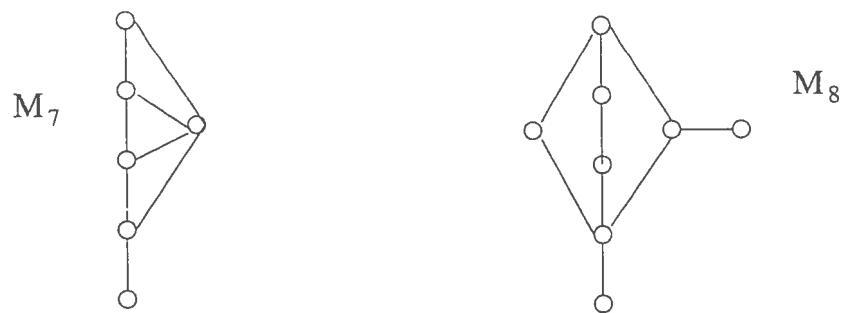
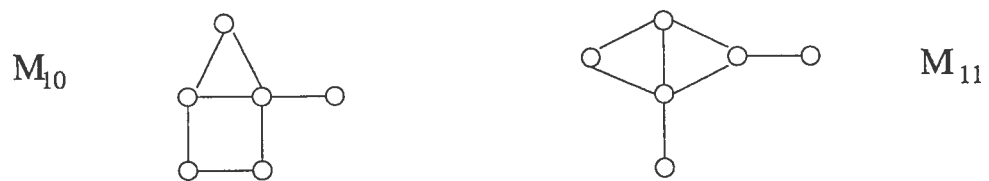


FIG. 2.1.2. Graphes asymétriques minimaux de longueur induite 4



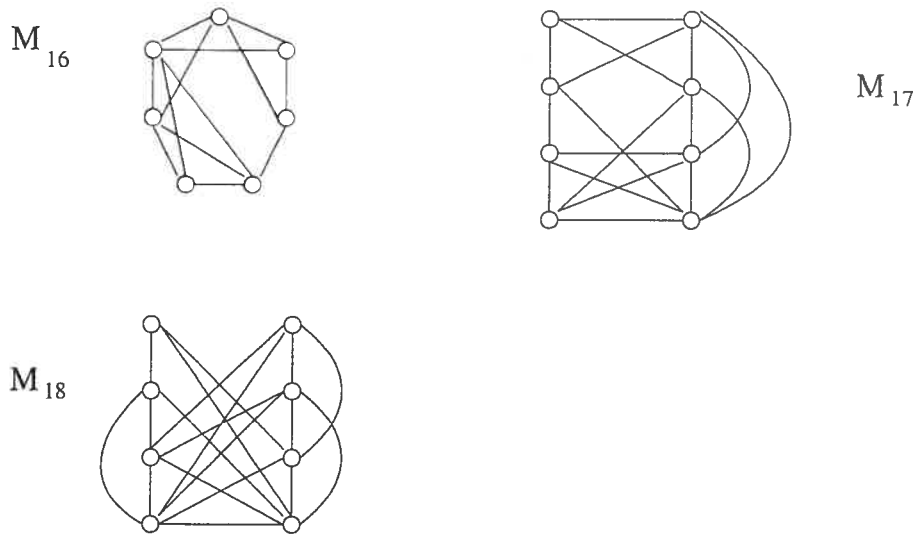


FIG. 2.1.3. Graphes asymétriques minimaux de longueur induite 3

Démontrons maintenant quelques propriétés des graphes asymétriques minimaux.

Lemme 2.1.1. *Si G est un graphe asymétrique minimal (resp. sans involution minimal), alors \overline{G} , le complémentaire de G , est aussi asymétrique minimal (resp. sans involution minimal).*

DÉMONSTRATION. Pour montrer ceci, on utilise le lemme 1.2.1. Comme un sous-graphe induit de \overline{G} est le complémentaire du sous-graphe de G induit par les mêmes sommets, les groupes d'automorphismes des sous-graphes induits de \overline{G} sont égaux à ceux des sous-graphes induits par les mêmes sommets dans G . Ceci montre que si G est asymétrique minimal, \overline{G} l'est aussi. L'argument fonctionne aussi pour les graphes sans involution minimaux. \square

La prochaine propriété des graphes asymétriques minimaux jouera un rôle clef lors de leur classification.

Lemme 2.1.2. *Si G est un graphe asymétrique minimal ou sans involution minimal, alors G ne contient aucun clump non trivial.*

DÉMONSTRATION. Pour démontrer ceci, on utilise le lemme 1.2.2. sur les extensions d'automorphismes.

Supposons le contraire. Soient G , un graphe asymétrique minimal et A , un clump non-trivial de G , alors, par la définition de graphe asymétrique minimal, $\langle A \rangle$ a un automorphisme qui diffère de l'identité. En étendant cet automorphisme à G , on obtient que G a un automorphisme non-trivial. Ceci contredit le fait que G est asymétrique. Pour le cas des graphes sans involution minimaux, il suffit de remarquer que si G est un graphe sans involution minimal et A , un clump non-trivial de G , il est clair qu'en étendant une involution de $\langle A \rangle$ à G en entier, on obtient une involution de G . \square

Corollaire 2.1.1. *Si G est un graphe asymétrique minimal ou sans involution minimal, alors G est connexe.*

DÉMONSTRATION. Supposons donc le contraire. Soit G un graphe asymétrique minimal non connexe. Il est clair qu'au moins une composante connexe de G est non triviale car si G contient parmi ses composantes connexes deux singletons, la transposition de ceux-ci constituerait un automorphisme de G qui diffère de l'identité. Donc, si H est une composante connexe non triviale de G , alors $V(H)$ est un clump non trivial de G , ce qui contredit le lemme précédent. On remarque que l'argument tient pour les graphes sans involution minimaux. \square

2.2. CLASSIFICATION DES GRAPHES ASYMÉTRIQUES MINIMAUX

Voici la conjecture proposée ([1], [2]) :

Conjecture 2.2.1. *La classe des graphes finis ne contient qu'un nombre fini à isomorphisme près de graphes asymétriques minimaux. Ces graphes sont par surcroît les seuls graphes sans involution minimaux.*

Cette affirmation peut paraître à l'encontre de notre intuition compte tenu de la très grande proportion de graphes asymétriques dans la classe des graphes finis.

En travaillant à la résolution de cette conjecture, il s'est avéré utile de séparer le problème en plusieurs cas selon la longueur induite des graphes. En fait, quelques résultats très intéressants ont été démontrés en ce sens.

2.2.1. Longueur induite $\lambda \geq 5$

Le premier résultat que nous allons énoncer est dû à G. Sabidussi [1]. Ce résultat se rapporte au graphes de longueur induite supérieure ou égale à 5. On montre en fait que M_1 et M_2 sont les seuls graphes asymétriques minimaux de longueur induite 5, qu'ils sont aussi les seuls graphes sans involution minimaux de longueur induite 5 et qu'aucun graphe de longueur induite supérieure ou égale à 6 n'a ces propriétés. En effet, dans [1] on démontre successivement les trois théorèmes suivants qui sont légèrement plus forts.

Théorème 2.2.1. *Si G est un graphe connexe de longueur induite $\lambda \geq 7$, alors (i) G contient un des graphes asymétriques minimaux M_1, M_3, M_4, M_6 comme sous-graphe induit, ou (ii) G a un clump non trivial, ou (iii) G est une chaîne de longueur λ ou un $(\lambda + 2)$ -cycle.*

Théorème 2.2.2. *Si G est un graphe connexe de longueur induite $\lambda = 6$, alors (i) G contient un des graphes asymétriques minimaux M_1, M_3, M_4, M_5, M_6 comme sous-graphe induit, ou (ii) G a un clump non trivial, ou (iii) G est une chaîne de longueur 6 ou un 8-cycle ou il consiste en deux pentagones avec exactement une arête en commun.*

Théorème 2.2.3. *Si G est un graphe connexe de longueur induite $\lambda = 5$, alors (i) G contient un des graphes asymétriques minimaux M_i , $i = 1, \dots, 7$, comme sous-graphe induit, ou (ii) G a un clump non trivial, ou (iii) G a une involution.*

2.2.2. Longueur induite $\lambda = 4$

Le prochain résultat est dû conjointement à G. Sabidussi et J. Nešetřil [2]. Continuant leur travail de classification des graphes asymétriques minimaux, ils ont montré qu'il n'existe que sept graphes asymétriques minimaux de longueur induite 4 et que ces sept graphes sont en même temps les seuls graphes sans involution minimaux de longueur induite 4. Dans [2], on montre un théorème qui est encore une fois un peu plus fort.

Théorème 2.2.4. *Si G est un graphe connexe de longueur induite $\lambda = 4$, alors (i) G contient un des graphes asymétriques minimaux M_3, \dots, M_{13} comme sous-graphe induit, ou (ii) G a un clump non trivial, ou (iii) G a une involution.*

2.2.3. Longueur induite $\lambda \leq 2$

Dans cette section, nous démontrerons que tout graphe non trivial de longueur induite inférieure ou égale à 2 a une involution.

Pour les graphes de longueur induite 0 ou 1, ceci est très facile à voir. En effet, un graphe non trivial de longueur induite 0 est un graphe ayant au moins deux sommets et aucune arête et un graphe de longueur induite 1 est un graphe où chacune de ses composantes connexes est complète avec au moins une composante non triviale. Dans ces deux cas, il est évident que le graphe a une involution.

Le cas des graphes de longueur induite 2 est plus délicat. Nous allons montrer un théorème bien connu mais apparemment jamais publié disant que tout graphe de longueur induite 2 a une involution. La raison pour laquelle ce théorème sera démontré ici est qu'il sert de modèle pour l'obtention d'un résultat semblable pour les graphes bipartis de longueur induite 3.

Théorème 2.2.5. *Tout graphe de longueur induite 2 a une involution.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire. Soit G , un graphe de longueur induite 2 n'ayant pas d'involution et minimal par rapport au nombre de sommets. Soit x , un sommet de degré minimal dans G .

Premièrement, montrons que N_x^2 n'est pas vide.

Supposons le contraire. Nous avons alors que $V(G) = \{x\} \cup N_x$. Comme G a été choisi avec la propriété d'être sans involution et minimal par rapport au nombre de sommets, il s'en suit que $\langle N_x \rangle$ a une involution. Comme N_x est un clump dans G , il est possible d'étendre cet involution à G en entier. Ceci contredisant le fait que G est sans involution.

Montrons maintenant que $\langle N_x^2 \rangle$ est discret.

Pour ce faire, nous allons démontrer que chaque composante connexe de $\langle N_x^2 \rangle$ est un clump dans G .

Soit $u, v \in N_x^2$ tels que uEv . Supposons par l'absurde que u et v n'ont pas les mêmes voisins dans N_x . Sans perdre de généralité, supposons qu'il existe un sommet $w \in N_x$ tel que uEw et $v\bar{E}w$. Alors, $\langle x, w, u, v \rangle$ est une chaîne induite de longueur 3 dans G contredisant le fait que $\lambda(G) = 2$.

Comme deux sommets adjacents de N_x^2 ont les mêmes voisins dans N_x , il s'en suit que chaque composante connexe de $\langle N_x^2 \rangle$ est un clump dans G . Supposons donc qu'une de ces composante connexe soit non triviale. Soit H , cette composante connexe. On a alors que H a une involution par minimalité de G et on peut étendre cet involution à G en entier. Ceci contredit le fait que G est sans involution. Donc, $\langle N_x^2 \rangle$ est discret.

Soit $u \in N_x^2$, comme x est de degré minimal dans G , on a alors que $N_u = N_x$. Ceci implique que la transposition $x \longleftrightarrow u$ est une involution de G . Ceci étant la contradiction finale. \square

2.2.4. Longueur induite $\lambda = 3$

L'objectif principal de ce mémoire est de vérifier la véracité de la conjecture 2.2.1 en démontrant celle-ci pour le cas des graphes de longueur induite 3.

Avant de s'attaquer à la classification des graphes asymétriques minimaux de longueur induite 3 (chapitre 3), remarquons d'abord que parmi ceux de la figure 2.1.3, c.-à-d. M_{10} à M_{18} , aucun n'est biparti. Cette observation mène à nous poser la question suivante : Existe-t-il des graphes bipartis asymétriques de longueur induite 3 ? La réponse à cette question se situe dans le prochain théorème. En fait, celui-ci démontre un résultat un peu plus fort.

Théorème 2.2.6. *Tout graphe biparti de longueur induite 3 a une involution.*

DÉMONSTRATION. Nous allons démontrer ce résultat par l'absurde. Soit G , un graphe biparti de longueur induite 3 qui n'admet aucune involution et $u \in V(G)$ de degré minimal.

Premièrement, nous allons vérifier que les classes de distance N_u^2 et N_u^3 ne sont pas vides.

Comme G est biparti, il n'y a aucune arête à l'intérieur des classes de distance. Comme $\lambda(G) = 3$, ceci implique que $N_u^2 \neq \emptyset$ car sinon $\lambda(G)$ serait 1. Supposons maintenant que $N_u^3 = \emptyset$. Comme u est de degré minimal, nous avons que pour tout $x \in N_u^2$, $N_x = N_u$. Donc, comme x et u ont le même voisinage, $x \longleftrightarrow u$ est une involution de G . Ceci contredit le fait que G n'a pas d'involution. Donc, $N_u^3 \neq \emptyset$.

Démontrons maintenant que tous les sommets de N_u ont des voisins dans N_u^2 .

Supposons le contraire. Soit $x \in N_u$ tel que x n'a pas de voisin dans N_u^2 , ceci implique que $N_x = \{u\}$. Comme $N_u^2 \neq \emptyset$, la cardinalité de N_u est supérieure ou égale à 2. Le fait que x soit de degré 1 contredit la minimalité du degré de u .

De la même façon, nous pouvons montrer que tous les sommets de N_u^2 ont des voisins dans N_u^3 .

En supposant le contraire, soit $x \in N_u^2$ tel que x n'a pas de voisin dans N_u^3 . Comme u est de degré minimal, $N_x = N_u$. Donc, $x \longleftrightarrow u$ est une involution de G .

Montrons maintenant que le sous-graphe H induit par les sommets de $N_u \cup N_u^2$ est un graphe biparti complet.

Supposons le contraire, soit $x \in N_u$ et $y \in N_u^2$ tels que $x\bar{E}y$. Soit $z \in N_u$ tel que zEy et $w \in N_u^3$ tel que wEy également. Alors, $\langle w, y, z, u, x \rangle$ est une chaîne induite de longueur 4 dans G contredisant le fait que G est de longueur induite 3.

Comme H est biparti complet, nous avons que pour tout $v \in N_u$, $N_v = N_u^2 \cup \{u\}$. Ceci implique que $|N_u| = 1$ car sinon pour tous $x, y \in N_u$ distincts, $x \longleftrightarrow y$ est une involution car ils ont le même voisinage.

Nous allons maintenant démontrer que les voisinages des sommets de N_u^3 forment une chaîne par rapport à l'inclusion c.-à-d. pour tous $x, y \in N_u^3$, soit $N_x \subseteq N_y$ soit $N_y \subseteq N_x$.

Supposons le contraire. Soit $u_1, u_2 \in N_u^3$ et $x, y \in N_u^2$ tels que $x \in N_{u_1} \setminus N_{u_2}$ et $y \in N_{u_2} \setminus N_{u_1}$. Nommons w l'unique sommet de N_u . Alors, nous avons que $\langle u_1, x, w, y, u_2 \rangle$ est une chaîne induite de longueur 4 dans G contredisant le fait que $\lambda(G) = 3$.

Nous pouvons reproduire le même argument pour les voisinages des sommets de N_u^2 restreints à N_u^3 . Ceux-ci forment aussi une chaîne par rapport à l'inclusion.

Comme deux sommets de G ne peuvent pas avoir le même voisinage, il s'en suit que $|N_u^2| = |N_u^3|$.

Il en découle que G a la structure suivante :

$$V(G) = \{u, w, u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$$

$$E(G) = \{[u, w]\}$$

$$\cup \{[w, u_i] : i = 1, \dots, n, \}$$

$$\cup \{[u_i, v_j] : i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, i\}$$

où $\{u_1, \dots, u_n\} = N_u^2$ et $\{v_1, \dots, v_n\} = N_u^3$.

On remarque alors que $\sigma := (u \ v_n)(w \ u_n) \prod_{i=1}^{n-1} (u_i \ v_{n-i})$ est une involution de G . Ceci étant la contradiction finale. \square

Chapitre 3

CLASSIFICATION DES GRAPHEs ASYMÉTRIQUES MINIMAUX DE LONGUEUR INDUITE 3

Dans ce chapitre, nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème principal. *Les seuls graphes asymétriques minimaux de longueur induite 3 sont $M_{10}, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{15}, M_{16}, M_{17}$ et M_{18} . Ces graphes sont aussi les seuls graphes sans involution minimaux de longueur induite 3.*

La preuve de ce théorème se fera en plusieurs étapes. En fait, nous procéderons par contradiction. Nous allons considérer G , un graphe asymétrique minimal de longueur induite 3, différent des M_i ci-dessus. En utilisant que G ne contient aucun M_i ni de chaîne induite de longueur 4 comme sous-graphe induit (*sous-graphes interdits*), qu'il n'admet aucun clump non trivial (lemme 2.1.2) et que son complémentaire est aussi un graphe asymétrique minimal (lemme 2.1.1), nous réussirons à démontrer que G n'existe pas. On remarque que la preuve fonctionne également dans le cas où G est sans involution minimal.

3.1. TYPES DE VOISINAGE ADMISSIBLES ET COMPATIBILITÉ

Comme G est de longueur induite 3, nous allons d'abord choisir $P = \langle p_0, p_1, p_2, p_3 \rangle$ une chaîne induite de longueur 3 dans G . Remarquez ici que le choix de cette

choix de cette chaîne est totalement arbitraire car G en contient peut-être plus d'une. Cette chaîne sera fixée tout au long de la démonstration.

Remarque 3.1.1. (i) Comme le choix de la chaîne P est totalement arbitraire, chacune des étapes de la preuve sera vraie pour chacune des chaînes induites de longueur 3 dans G .

(ii) Comme G est un graphe asymétrique minimal de longueur induite 3 différent des M_i déjà connus, il en est de même pour \overline{G} . En effet, si \overline{G} était de longueur induite supérieure à 3, comme nous connaissons tous les graphes asymétriques minimaux de longueur induite supérieure à 3, \overline{G} ferait donc partie de la liste des M_i déjà connus et donc, G aussi. Ceci contredirait le fait que G soit différent de tous les M_i .

(iii) Comme \overline{G} est aussi un graphe asymétrique minimal de longueur induite 3 différent de ceux déjà connus, il en découle que chacune des étapes de la preuve sera vraie aussi pour n'importe quelle chaîne induite de longueur 3 dans \overline{G} .

Par rapport à la chaîne de référence P , nous allons étiqueter chacun des autres sommets de G selon son type de voisinage. En fait, en premier lieu, nous allons seulement nous intéresser au sommets de G qui sont à distance 1 de la chaîne P et nous allons noter l'ensemble de ces sommets de la façon suivante :

$$U_1 = \{x \in V(G) \mid d(x, P) = 1\}.$$

Le *type de voisinage* d'un sommet $x \in U_1$ est l'ensemble des $p_i \in V(P)$ tels que $p_i \in N_x$. On dit que ce type de voisinage est *admissible* si le sous-graphe induit par $P \cup \{x\}$ ne contient aucune chaîne induite de longueur 4. Remarquons que nous avons $2^4 - 1 = 15$ types à vérifier. De ces 15 types, 13 sont admissibles. Les voici :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \{p_0, p_1, p_2, p_3\}, \alpha_1 = \{p_0, p_3\}, \alpha_2 = \{p_1, p_2\}, \alpha_3 = \{p_1\}, \\ \alpha_4 &= \{p_0, p_1\}, \alpha_5 = \{p_0, p_2\}, \alpha_6 = \{p_0, p_1, p_2\}, \alpha_7 = \{p_0, p_1, p_3\} \\ &\text{et } \alpha_i^* = \pi[\alpha_i], i = 3, \dots, 7. \end{aligned}$$

π étant la permutation qui, pour $i = 0, \dots, 3$, associe à p_i la valeur p_{3-i} . On appelle cette permutation l'*involution naturelle* de P .

Les deux seuls types non-admissibles sont donc $\{p_0\}$ et $\{p_3\}$ car dans ces deux cas, le sous-graphe induit par $P \cup \{x\}$ est une chaîne induite de longueur 4 qu'on notera tout au long de la preuve P_4 .

La figure 3.1.1 montre le sous-graphe induit par $P \cup \{x\}$ où x est de type α_i , $i = 0, \dots, 7$.

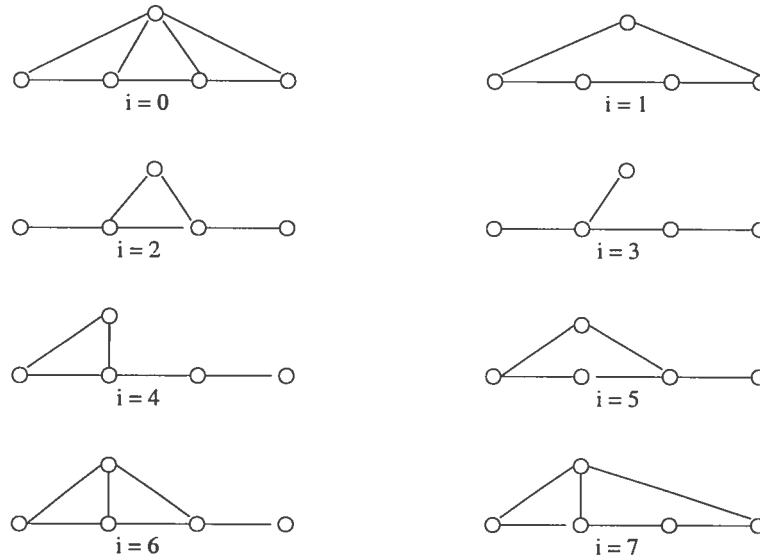


FIG. 3.1.1. Types de voisinage admissibles

Remarque 3.1.2. Nous avons ici défini les types de voisinages par rapport à la chaîne de référence P , mais ces types sont les mêmes pour n'importe quelle chaîne induite de longueur 3 dans G ou dans \overline{G} .

Notons

$$A_i := \{x \in U_1 \mid x \text{ est de type } \alpha_i\},$$

$$A_i^* := \{x \in U_1 \mid x \text{ est de type } \alpha_i^*\}.$$

Voici une première observation.

Lemme 3.1.1. $A_7 \cup A_7^* = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Comme A_7 et A_7^* sont symétriques par rapport à l'involution naturelle de P , il suffit donc seulement de démontrer que $A_7 = \emptyset$.

Supposons donc par l'absurde qu'il existe dans G , un sommet $x \in A_7$. En regardant le sous-graphe induit dans \overline{G} par les sommets de $P \cup \{x\}$, nous remarquons que celui-ci est une chaîne induite de longueur 4 (voir figure 3.1.2). Comme \overline{G} est aussi un graphe de longueur induite 3 (remarque 3.1.1(ii)), ceci est impossible. Nous avons donc que $A_7 = \emptyset$. \square

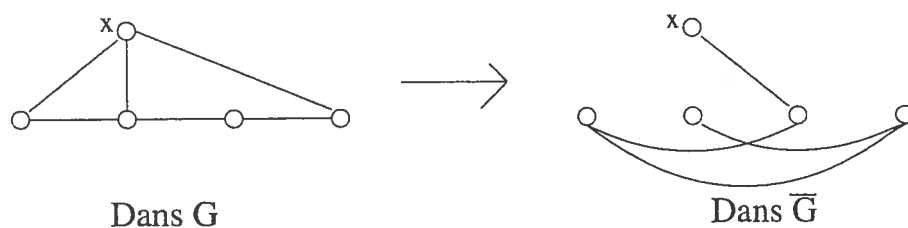


FIG. 3.1.2. Élimination de A_7

Maintenant que nous connaissons les types de voisinage admissibles, nous allons nous poser la question suivante. Est-ce que deux sommets x et y de types différents peuvent exister simultanément dans G et si oui, que pouvons nous dire à propos de l'existence d'arêtes entre ces deux sommets.

Définissons donc, pour deux sommets $x \neq y \in V(G)$, P_{xy} , le sous-graphe induit par $P \cup \{x, y\}$.

Soient α_i et α_j , $i \neq j$, deux types de voisinage admissibles. Notons Q_{ij}^- , le graphe consistant de P , de deux sommets additionnels a_i et a_j , des arêtes pEa_i où $p \in \alpha_i$ et des arêtes pEa_j où $p \in \alpha_j$. Soit Q_{ij}^+ , le graphe obtenu de Q_{ij}^- en ajoutant l'arête reliant a_i et a_j .

Donc, si nous prenons deux sommets $x, y \in U_1$ tels que $x \in A_i$ et $y \in A_j$, $i \neq j$, il est clair que P_{xy} est isomorphe à Q_{ij}^+ ou Q_{ij}^- selon que x et y soient adjacents ou non.

Dans la prochaine étape, nous examinerons de plus près chacun des graphes Q_{ij}^+ et Q_{ij}^- pour voir si ceux-ci contiennent des sous-graphes interdits. Nous entendons ici par sous-graphes interdits, tous les M_i déjà connus ainsi que P_4 .

Ces vérifications seront très importantes pour la suite des choses car elles nous permettront de voir qu'est-ce qui se passent entre des sommets de U_1 de types différents. En fait, quatre cas peuvent survenir :

- (1) Q_{ij}^- contient un sous-graphe interdit et Q_{ij}^+ n'en contient pas. Dans ce cas, toutes les A_iA_j -arêtes existent dans G .
- (2) Q_{ij}^+ contient un sous-graphe interdit et Q_{ij}^- n'en contient pas. Dans ce cas, aucune A_iA_j -arête existe dans G .
- (3) Q_{ij}^- et Q_{ij}^+ contiennent un sous-graphe interdit. Dans ce cas, nous aurons que les sommets de A_i et ceux de A_j ne peuvent pas coexister dans G (*incompatibilité*).
- (4) Q_{ij}^- et Q_{ij}^+ ne contiennent pas de sous-graphe interdit. Dans ce dernier cas, nous ne pouvons rien dire sur l'existence d'arêtes entre les sommets des deux types. On dit alors qu'il y a une *indétermination* entre les deux types.

Comme ces vérifications sont très longues, pour ne pas allourdir le texte, nous les détaillerons en annexe. Voici tout de même un exemple.

Regardons Q_{23}^- et Q_{23}^+ . Nous pouvons remarquer grâce à la figure 3.2.3 que Q_{23}^+ contient un M_{11} comme sous-graphe induit (en fait, Q_{23}^+ est isomorphe à M_{11}) et que Q_{23}^- ne contient aucun sous-graphe interdit. Nous pouvons donc conclure que dans G , aucune A_2A_3 -arête existe.



FIG. 3.1.3. Q_{23}^- et Q_{23}^+

	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_3^*	α_4^*	α_5^*	α_6^*
α_0		-	-	1	-	1	-	1	-	1	-
α_1			1	1	1	-	-	1	1	-	-
α_2				0	0	1	1	0	0	1	1
α_3					-	-	1	-	0	0	0
α_4						1	1	0	-	0	-
α_5							-	0	0	1	1
α_6								0	-	1	-

TAB. 3.1.1. Tableau de compatibilité des types de voisinage

Le tableau 3.1.1 résume toutes ces vérifications. Nous avons éliminé les sommets de $A_7 \cup A_7^*$ avant de procéder à ces vérifications seulement pour éviter d'avoir à calculer leur compatibilité avec les autres types de voisinage admissibles.

Les entrées de ce tableau sont :

- (i) 0, si aucune $A_i A_j$ -arête n'existe ;
- (ii) 1, si toutes les $A_i A_j$ -arêtes existent ;
- (iii) -, s'il y a indétermination entre les deux types.

On remarque qu'il n'y a aucune paire de types incompatibles.

Ceci termine donc les vérifications de base. Le reste de la démonstration consistera à l'élimination des sommets appartenant à chacun des ensembles A_i et A_i^* .

3.2. ÉLIMINATION DES SOMMETS DE NIVEAUX SUPÉRIEURS

Rien pour l'instant nous indique que G ne puisse pas contenir de sommets à l'extérieur de $P \cup U_1$. Nous allons donc noter

$$U_i = \{x \in V(G) \mid d(x, P) = i\}, i = 1, 2, \dots$$

Comme G est de longueur induite 3, il est clair que $U_i = \emptyset$ pour tout $i \geq 4$.

Dans cette section, nous démontrerons le lemme suivant :

Lemme 3.2.1. $U_2 = \emptyset$.

On remarque qu'un corollaire immédiat de ce lemme est que $U_3 = \emptyset$.

La preuve de ce lemme consiste en les lemmes 3.3.2 à 3.3.5 dans lesquels nous éliminerons successivement les voisins supérieurs (c.-à-d. appartenant à U_2) des sommets des ensembles A_i et A_i^* .

Premièrement, reprenons P , la chaîne induite de longueur 3 de G que nous avons fixée au début du chapitre. Rappelons cependant que l'argument est valable pour chacune des chaînes induites de longueur 3 dans G .

Définissons les ensembles suivants :

$$A'_i = \{x \in A_i \mid N_x \cap U_2 \neq \emptyset\},$$

$$A''_i = A_i \setminus A'_i.$$

Donc, nous aurons seulement à montrer que A'_i est vide pour chacun des 11 types de voisinages admissibles restants.

Définissons également :

$$D_i = \{x \in U_2 \mid N_x \cap A_i \neq \emptyset\},$$

$$D_i^* = \{x \in U_2 \mid N_x \cap A_i^* \neq \emptyset\}.$$

Lemme 3.2.2. $A'_1 = A'_3 = A'_4 = A'_6 = A_3^{*'} = A_4^{*'} = A_6^{*'} = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Comme certains de ces types sont symétriques par rapport à l'involution naturelle de P , nous n'aurons qu'à montrer que $A'_1 = A'_3 = A'_4 = A'_6 = \emptyset$. Supposons donc le contraire. Soit $x \in A'_1 \cup A'_3 \cup A'_4 \cup A'_6$ et $y \in U_2$ tels que xEy .

(i) Si $x \in A'_1$, alors $\langle y, x, p_0, p_1, p_2 \rangle$ est un P_4 .

(ii) Si $x \in A'_3$, alors $\langle y, x, p_1, p_2, p_3 \rangle$ est un P_4 .

(iii) Si $x \in A'_4$, alors $\langle y, x, p_1, p_2, p_3 \rangle$ est un P_4 .

(iv) Si $x \in A'_6$, alors $\langle y, x, p_0, p_1, p_2, p_3 \rangle$ est isomorphe à M_{11} .

Comme G est de longueur induite 3 et qu'il ne contient aucun M_i comme sous-graphe induit, il en résulte que $A'_1 = A'_3 = A'_4 = A'_6 = \emptyset$. \square

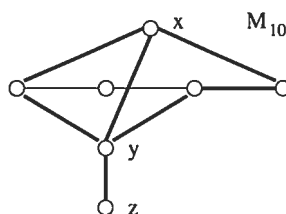
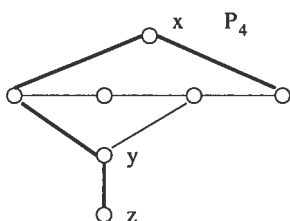
Lemme 3.2.3. $A'_5 = A_5^* = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Encore une fois, comme ces deux types sont symétriques par rapport à l'involution naturelle de P , nous n'avons qu'à montrer que $A'_5 = \emptyset$. Cette preuve se fera aussi en plusieurs étapes. Nous procéderons par contradiction. Supposons donc l'existence d'un sommet dans A'_5 . La présence de ce sommet permettra l'élimination de quelques types en formant des clumps non triviaux. Ensuite, nous examinerons G pour nous rendre compte que si A'_5 n'est pas vide, alors G est biparti. Nous pourrons donc utiliser le résultat démontré au chapitre 2 qui dit que tout graphe biparti de longueur induite 3 a une involution.

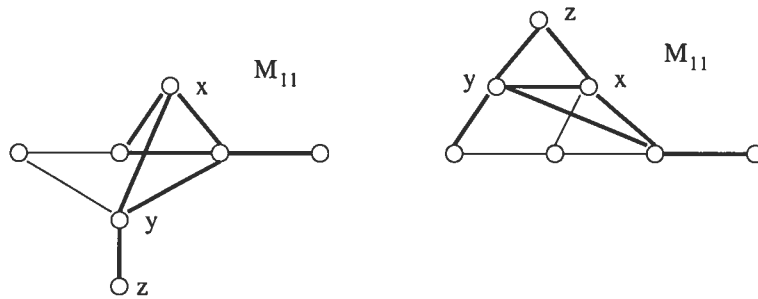
Étape 1 : $A'_5 \neq \emptyset \implies A_1 = A_2 = \emptyset$.

Montrons premièrement que $A_1 = \emptyset$.

Supposons donc le contraire. Soit $x \in A_1$. Comme $A'_5 \neq \emptyset$, il existe $y \in A'_5$ et $z \in D_5$ tels que yEz . Comme il y a indétermination entre les types A_1 et A_5 , nous avons deux cas à vérifier. Premièrement, si x et y ne sont pas adjacents, nous avons que $\langle z, y, p_0, x, p_3 \rangle$ est un P_4 . Si x et y sont adjacents, $\langle z, y, p_0, x, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{10} . Donc, $A_1 = \emptyset$.

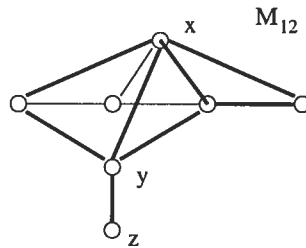


Supposons maintenant que $A_2 \neq \emptyset$. Soit $x \in A_2$ et soit y et z comme avant. Le tableau de compatibilité nous dit que x et y sont adjacents. Comme, jusqu'à maintenant, A_2 peut avoir des voisins dans U_2 , nous avons encore deux cas à vérifier. Si x et z ne sont pas adjacents, nous avons que $\langle z, y, p_1, x, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{11} . Si x et z sont adjacents, alors $\langle z, y, p_1, x, p_2, p_3 \rangle$ est aussi un M_{11} .



Étape 2 : $A'_5 \neq \emptyset \implies$ toutes les A_0D_5 -arêtes existent (i.e. $D_5 \subseteq D_0$).

Supposons le contraire. Soit $x \in A_0$, $y \in A'_5$ et $z \in D_5$ tels que yEz et $x\bar{E}y$. Nous avons alors que $\langle z, y, p_0, x, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{12} .

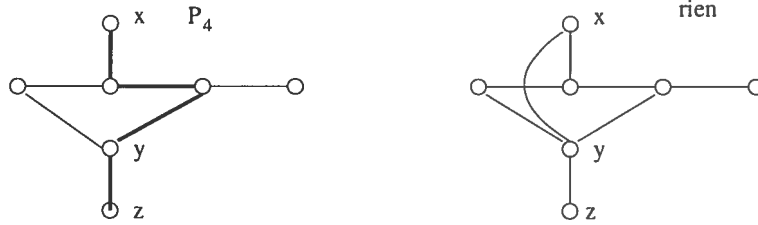


Étape 3 : Soit $y \in A'_5$. Alors,

$$N_y \setminus A'_5 := \{p_0, p_2\} \cup A_0 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5^* \cup A_6^* \cup (N_x \cap D_5).$$

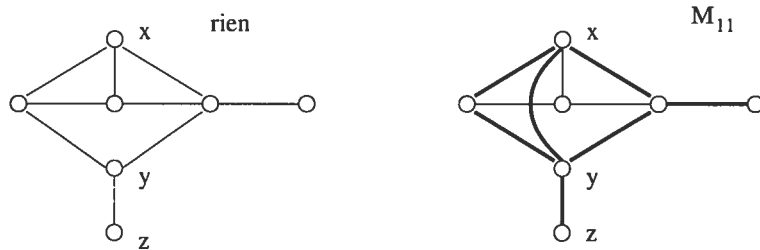
(a) Toutes les A'_5A_3 -arêtes existent.

Supposons le contraire, soit $x \in A_3$ et $y \in A'_5$ non adjacents. Comme $y \in A'_5$, il existe $z \in D_5$, yEz . Nous avons donc que $\langle z, y, p_2, p_1, x \rangle$ est un P_4 . On peut aussi remarquer que si x et y sont adjacents, il ne se passe rien d'interdit.



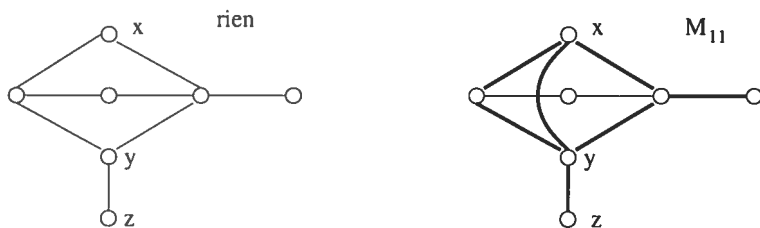
(b) Aucune $A'_5 A_6$ -arête n'existe.

Supposons le contraire, soit $x \in A_6$ et $y \in A'_5$ adjacents. Comme $y \in A'_5$, il existe $z \in D_5$, yEz . Nous avons donc que $\langle z, y, x, p_0, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{11} . On peut aussi remarquer que si x et y ne sont pas adjacents, il ne se passe rien d'interdit.



(c) Aucune $A'_5 A'_5$ -arête n'existe.

Supposons le contraire, soit $x \in A'_5$ et $y \in A'_5$ adjacents. Comme $y \in A'_5$, il existe $z \in D_5$, yEz . Nous avons donc que $\langle z, y, x, p_0, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{11} . On peut aussi remarquer que si x et y ne sont pas adjacents, il ne se passe rien d'interdit.



Donc, par le tableau de compatibilité ainsi que par (a), (b) et (c) nous avons bien que si $x \in A'_5$, $N_x \setminus A'_5 = \{p_0, p_2\} \cup A_0 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5^* \cup A_6^* \cup (N_x \cap D_5)$.

Étape 4 : $A'_5 \neq \emptyset \implies A_6 = \emptyset$.

Définissons $X := \{x \in A_5'' \mid N_x \cap A_6 \neq \emptyset\}$. Nous allons montrer que $C := \{p_1\} \cup A_6 \cup X \cup B$ est un clump avec $N_v \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_0 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5^* \cup A_6^*$ pour tout $v \in C$ où

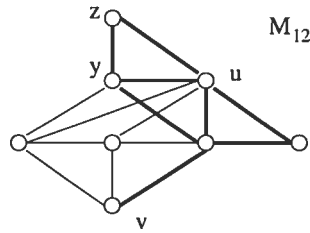
$$B := \{x \in A_5'' \setminus X \mid N_x \cap X \neq \emptyset\}.$$

Pour p_1 , c'est clair : $N_{p_1} \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_0 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5^* \cup A_6^*$.

Soit maintenant $v \in A_6$.

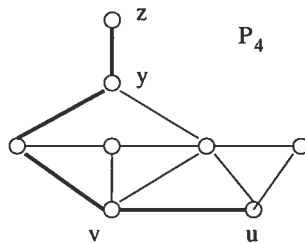
(a) Toutes les A_0A_6 -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_0$ et $v \in A_6$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $A_5' \neq \emptyset$, il existe aussi $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ tels que yEz . En reliant les sommets de la bonne façon à l'aide du tableau et des étapes précédentes, nous avons que $\langle z, y, u, v, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{12} .



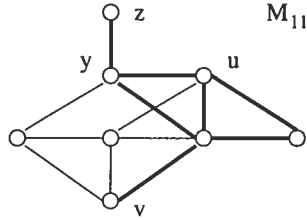
(b) Aucune $A_6A_4^*$ -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_4^*$ et $v \in A_6$ tels que uEv . Gardons y et z comme dans (a). Alors, nous avons que $\langle z, y, u, v, p_0 \rangle$ est un P_4 .



(c) Toutes les $A_6^*A_6$ -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_6^*$ et $v \in A_6$ tels que $u\bar{E}v$. Toujours en gardant y et z comme dans (a), nous avons maintenant que $\langle z, y, u, v, p_0 \rangle$ est un M_{11} .

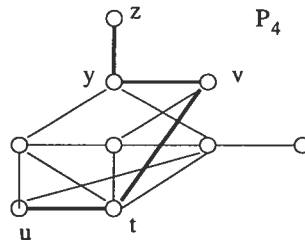


Donc, à l'aide du tableau de compatibilité ainsi que de (a), (b) et (c), nous voyons que $N_v \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_0 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5^* \cup A_6^*$ pour tout $v \in A_6$.

Prenons maintenant un sommet $u \in X$.

(a) Toutes les XA_3 -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in X$ et $v \in A_3$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $u \in X$, il existe $t \in A_6$ tel que uEt . Comme $A'_5 \neq \emptyset$, nous avons toujours $y \in A'_5$ et $z \in D_5$ adjacents. Nous avons donc que $\langle z, y, u, v, t \rangle$ est un P_4 .

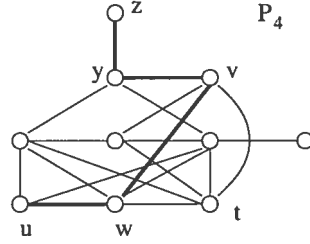


Donc, à l'aide du tableau 3.1.1 et de (a), nous remarquons que $N_u \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_0 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5^* \cup A_6^*$ pour tout $u \in X$.

Finalement, soit $u \in B$.

(a) Toutes les BA_3 -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in B$ et $v \in A_3$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $u \in B$, il existe $w \in X$ tels que $u\bar{E}w$. Il existe aussi $t \in A_6$ tel que wEt . Soit toujours, $y \in A'_5$ et $z \in D_5$ adjacents. On remarque alors que $\langle z, y, u, v, w \rangle$ est un P_4 .



(b) On peut aussi remarquer que les sommets de B ne peuvent pas avoir de voisins dans $A_5'' \setminus (B \cup X)$ car sinon nous obtiendrions un P_4 .

Donc, $N_u \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_0 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5^* \cup A_6^*$ pour tout $u \in B$.

Ceci termine donc la preuve que C est un clump dans G . Ceci implique donc qu'il se réduit à un seul sommet et ce sommet est p_1 . Donc, nous avons montré que si A_5' n'est pas vide, alors A_6 l'est.

Étape 5 : $A_5' \neq \emptyset \implies A_6^* = \emptyset$.

Définissons $X := \{x \in A_5^{*''} \mid N_x \cap A_6^* \neq \emptyset\}$. Nous allons montrer que $C := \{p_2\} \cup A_6^* \cup X \cup B$ est un clump avec $N_v \setminus C = \{p_1, p_3\} \cup A_0 \cup A_5 \cup A_3^* \cup A_4^*$ pour tout $v \in C$ où

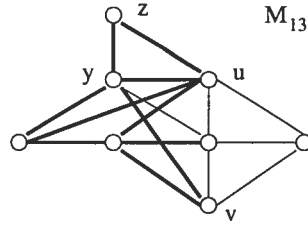
$$B := \{x \in A_5^{*''} \setminus X \mid N_x \cap X \neq \emptyset\}.$$

Pour p_2 , c'est clair : $N_{p_2} \setminus C = \{p_1, p_3\} \cup A_0 \cup A_5 \cup A_3^* \cup A_4^*$.

Soit maintenant $v \in A_6^*$.

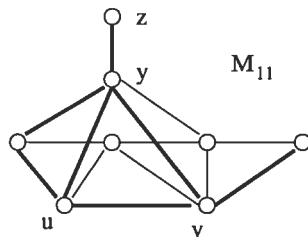
(a) Toutes les $A_0A_6^*$ -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_0$ et $v \in A_6^*$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $A_5' \neq \emptyset$, il existe aussi $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ tels que yEz . En reliant les sommets de la bonne façon à l'aide du tableau et des étapes précédentes, nous avons que $\langle z, y, u, v, p_0, p_1 \rangle$ est un M_{13} .



(b) Aucune $A_6^*A_4^*$ -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_4^*$ et $v \in A_6^*$ tels que uEv . Gardons y et z comme dans (a). Alors, nous avons que $\langle z, y, u, v, p_0, p_3 \rangle$ est un M_{11} .

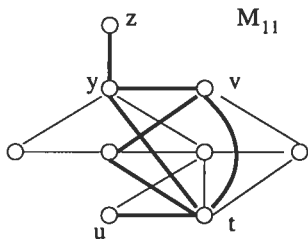


Donc, $N_v \setminus C = \{p_1, p_3\} \cup A_0 \cup A_5 \cup A_3^* \cup A_4^*$ pour tout $v \in A_6^*$.

Prenons maintenant un sommet $v \in X$.

(a) Toutes les XA_3^* -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_3^*$ et $v \in X$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $v \in X$, il existe $t \in A_6^*$ tel que vEt . Comme $A_5' \neq \emptyset$, nous avons toujours $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ adjacents. Nous avons donc que $\langle z, y, u, v, t, p_1 \rangle$ est un M_{11} .



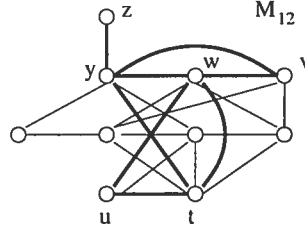
Donc, $N_v \setminus C = \{p_1, p_3\} \cup A_0 \cup A_5 \cup A_3^* \cup A_4^*$ pour tout $v \in X$.

Finalement, soit $v \in B$.

(a) Toutes les BA_3^* -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_3^*$ et $v \in B$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $v \in B$, il

existe $w \in X$ tels que vEw . Il existe aussi $t \in A_6^*$ tel que wEt . Soit toujours, $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ adjacents. On remarque alors que $\langle z, y, u, v, w, t \rangle$ est un M_{12} .



(b) On peut aussi remarquer que les sommets de B ne peuvent pas avoir de voisins dans $A_5^{*'} \setminus (B \cup X)$ car sinon nous obtenons un P_4 .

Donc, $N_v \setminus C = \{p_1, p_3\} \cup A_0 \cup A_5 \cup A_3^* \cup A_4^*$ pour tout $v \in B$.

Ceci termine donc la preuve que C est un clump dans G . Ceci implique donc qu'il se réduit à un seul sommet et ce sommet est p_2 . Donc, nous avons montré que si A_5' n'est pas vide, alors A_6^* l'est.

Étape 6 : $A_5' \neq \emptyset \implies A_4 = \emptyset$.

Définissons $X := \{x \in A_3 \mid N_x \cap A_4 \neq \emptyset\}$. Nous allons montrer que $C := \{p_0\} \cup A_4 \cup X \cup B$ est un clump avec $N_v \setminus C = \{p_1\} \cup A_0 \cup A_5$ pour tout $v \in C$ où

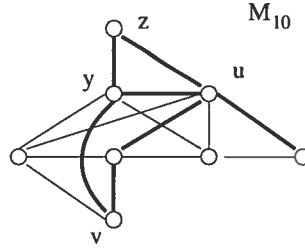
$$B := \{x \in A_3 \setminus X \mid N_x \cap X \neq \emptyset\}.$$

Pour p_0 , c'est clair : $N_{p_0} \setminus C = \{p_1\} \cup A_0 \cup A_5$.

Soit maintenant $v \in A_4$.

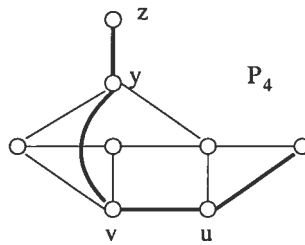
(a) Toutes les A_0A_4 -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_0$ et $v \in A_4$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $A_5' \neq \emptyset$, il existe aussi $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ tels que yEz . En reliant les sommets de la bonne façon à l'aide du tableau et des étapes précédentes, nous avons que $\langle z, y, u, v, p_1, p_3 \rangle$ est un M_{10} .



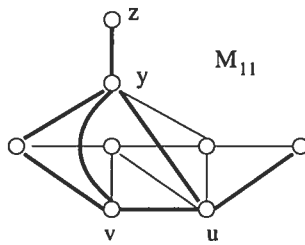
(b) Aucune $A_4A_4^*$ -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_4^*$ et $v \in A_4$ tels que uEv . Gardons y et z comme dans (a). Alors, $\langle z, y, u, v, p_3 \rangle$ est un P_4 .



(c) Aucune $A_4A_6^*$ -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_6^*$ et $v \in A_4$ tels que uEv . Gardons y et z comme dans (a). Alors, nous avons que $\langle z, y, u, v, p_0, p_3 \rangle$ est un M_{11} .



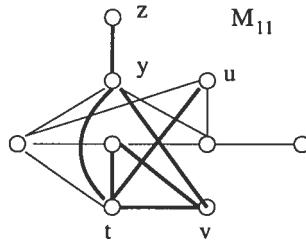
Donc, à l'aide du tableau de compatibilité ainsi que de (a), (b) et (c), nous voyons que $N_v \setminus C = \{p_1\} \cup A_0 \cup A_5$ pour tout $v \in A_4$.

Soit maintenant $v \in X$.

(a) Toutes les XA_5 -arêtes existent.

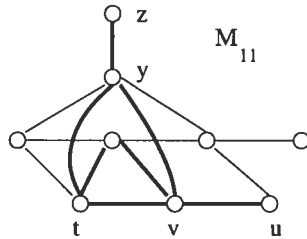
Supposons le contraire. Comme nous savons déjà que toutes les A'_5A_3 -arêtes existent, soit $u \in A''_5$ et $v \in X$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $v \in X$, il existe $t \in A_4$ tel que vEt . Comme $A'_5 \neq \emptyset$, il existe aussi $y \in A'_5$ et $z \in D_5$ tels que yEz . Alors,

nous avons donc que $\langle z, y, u, v, t, p_2 \rangle$ est un M_{11} .



(b) Aucune XA_3^* -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_3^*$ et $v \in X$ tels que uEv . Comme $v \in X$, il existe $t \in A_4$ tel que vEt . Comme $A_5' \neq \emptyset$, il existe aussi $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ tels que yEz . Par conséquent, $\langle z, y, u, v, t, p_2 \rangle$ est un M_{11} .

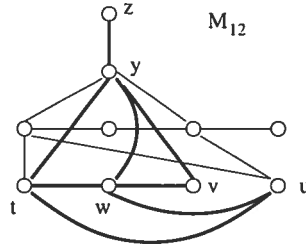


Donc, par (a) et (b) et par le tableau de compatibilité,
 $N_v \setminus C = \{p_1\} \cup A_0 \cup A_5$ pour tout $v \in X$.

Finalement, considérons un sommet $v \in B$.

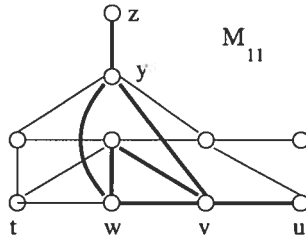
(a) Toutes les BA_3^* -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_5$ et $v \in B$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $v \in B$, il existe $w \in X$ tels que vEw . Il existe aussi $t \in A_4$ tel que wEt . Soit toujours, $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ adjacents. On remarque alors que $\langle z, y, u, v, w, p_2 \rangle$ est un M_{12} .



(b) Aucune BA_3^* -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_3^*$ et $v \in B$ tels que uEv . Comme $v \in B$, il existe $w \in X$ tels que vEw . Il existe aussi $t \in A_4$ tel que wEt . Soit toujours, $y \in A'_5$ et $z \in D_5$ adjacents. On remarque alors que $\langle z, y, u, v, w, p_2 \rangle$ est un M_{11} .



(c) Il est aussi facile de remarquer que les sommets de B ne peuvent avoir de voisins dans $A_3 \setminus (B \cup X)$ car sinon nous obtenons une chaîne de longueur 4.

Donc, par (a), (b) et (c) ainsi que par le tableau 3.1.1, nous venons de démontrer que $N_v \setminus C = \{p_1\} \cup A_0 \cup A_5$ pour tout $v \in B$.

Donc, nous avons bel et bien que C est un clump ce qui conclue la preuve que si $A'_5 \neq \emptyset$, alors $A_4 = \emptyset$.

Étape 7 : $A'_5 \neq \emptyset \implies A_6^* = \emptyset$.

Définissons $X := \{x \in A_3^* \mid N_x \cap A_4^* \neq \emptyset\}$. Nous allons montrer que $C := \{p_3\} \cup A_4^* \cup X \cup B$ est un clump avec $N_v \setminus C = \{p_2\} \cup A_0 \cup A_5^*$ pour tout $v \in C$ où

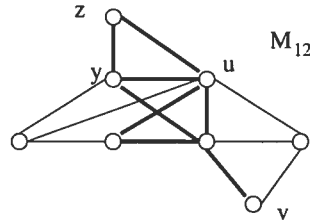
$$B := \{x \in A_3^* \setminus X \mid \exists N_x \cap X \neq \emptyset\}.$$

Pour p_3 , c'est clair : $N_{p_3} \setminus C = \{p_2\} \cup A_0 \cup A_5^*$.

Soit maintenant $v \in A_4^*$.

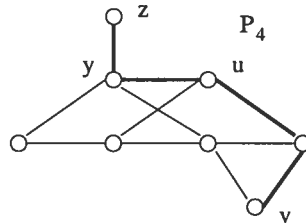
(a) Toutes les $A_0A_4^*$ -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_0$ et $v \in A_4^*$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $A_5' \neq \emptyset$, il existe aussi $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ tels que yEz . En reliant les sommets de la bonne façon à l'aide du tableau et des étapes précédentes, nous avons que $\langle z, y, u, v, p_1, p_2 \rangle$ est un M_{12} .



(b) Toutes les $A_5^*A_4^*$ -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_5^*$ et $v \in A_4^*$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $A_5' \neq \emptyset$, il existe aussi $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ tels que yEz . Nous avons donc que $\langle z, y, u, v, p_3 \rangle$ est un P_4 .

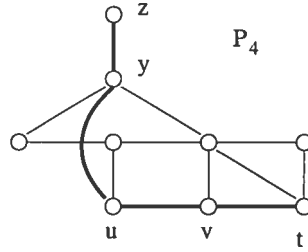


Donc, par (a) et (b) ainsi que par le tableau de compatibilité, nous avons bien que $N_v \setminus C = \{p_2\} \cup A_0 \cup A_5^*$ pour tout $v \in A_4^*$.

Soit maintenant $v \in X$.

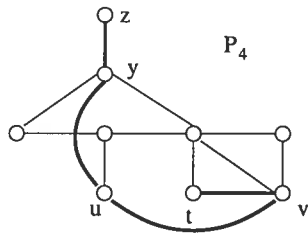
(a) Aucune XA_3 -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_3$ et $v \in X$ tels que uEv . Comme $v \in X$, il existe $t \in A_4^*$ tel que vEt . Comme $A_5' \neq \emptyset$, nous avons toujours $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ adjacents. Nous avons donc que $\langle z, y, u, v, t \rangle$ est un P_4 .



(b) Toutes les XA_5^* -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_5^*$ et $v \in X$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $v \in X$, il existe $t \in A_4^*$ tel que vEt . Comme $A_5' \neq \emptyset$, nous avons toujours $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ adjacents. On remarque alors que $\langle z, y, u, v, t \rangle$ est un P_4 .

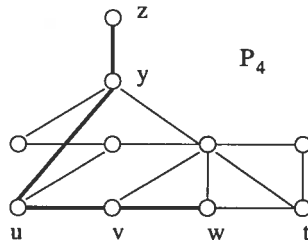


Donc, nous avons bien que $N_v \setminus C = \{p_2\} \cup A_0 \cup A_5^*$ pour tout $v \in X$.

Finalement, soit $v \in B$.

(a) Aucune BA_3 -arête existe.

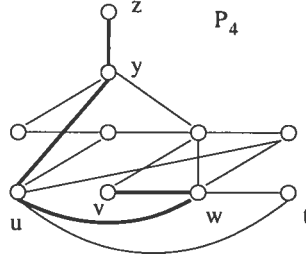
Supposons le contraire. Soit $u \in A_3$ et $v \in B$ tels que uEv . Comme $v \in B$, il existe $w \in X$ tel que vEw et il existe $t \in A_4^*$ tel que wEt . Comme $A_5' \neq \emptyset$, nous avons toujours $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ adjacents. Nous avons donc que $\langle z, y, u, v, w \rangle$ est un P_4 .



(b) Toutes les BA_5^* -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_5^*$ et $v \in B$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $v \in B$, il

existe $w \in X$ tel que vEw et il existe $t \in A_4^*$ tel que wEt . Comme $A_5' \neq \emptyset$, nous avons toujours $y \in A_5'$ et $z \in D_5$ adjacents. Par conséquent, $\langle z, y, u, v, w \rangle$ est un P_4 .



(c) Nous pouvons aussi facilement montrer que les sommets de B ne peuvent pas avoir de voisins dans $A_3^* \setminus (X \cup B)$ car sinon, G contiendrait un P_4 .

Donc, par (a), (b) et (c) ainsi que par le tableau 3.1.1, nous voyons que $N_v \setminus C = \{p_2\} \cup A_0 \cup A_5^*$ pour tout $v \in B$.

Ceci conclue donc la preuve que C est un clump dans G , ce qui démontre que si $A_5' \neq \emptyset$ alors, $A_4^* = \emptyset$.

Étape 8 : $A_5' \neq \emptyset \implies A_0 = \emptyset$.

Pour démontrer ce fait, nous allons montrer que $C := P \cup (U_1 \setminus A_0) \cup D_5 \cup D_5^*$ est un clump non trivial dans G avec $N_x \setminus C = A_0$ pour tout $x \in C$.

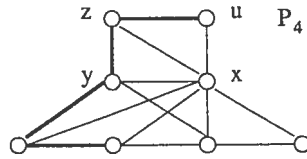
Ceci n'est pas très difficile à voir. À ce moment-ci de la preuve, nous avons que $U_1 \setminus A_0 = A_3 \cup A_5 \cup A_3^* \cup A_5^*$. Les sommets qui à priori peuvent se retrouver à l'extérieur de C sont les sommets de A_0 ainsi que les sommets de $D_0 \setminus (D_5 \cup D_{5*})$.

À l'aide du tableau de compatibilité et de l'étape 2, on voit que toutes les CA_0 -arêtes existent. Il nous reste seulement à montrer qu'aucune $C(D_0 \setminus (D_5 \cup D_5^*))$ -arête existe.

Il est clair que si une telle arête existe, elle relie nécessairement un sommet de

$(D_5 \cup D_5^*)$ avec un sommet de $D_0 \setminus (D_5 \cup D_5^*)$.

Supposons donc qu'une telle arête existe et supposons sans perdre de généralité qu'une de ses extrémités est dans D_5 . Donc, soit $z \in D_5$ et $u \in D_0 \setminus (D_5 \cup D_5^*)$ tels que zEu . Comme $z \in D_5$, il existe $y \in A'_5$ tel que yEz . Comme $u \in D_0 \setminus (D_5 \cup D_5^*)$, il existe $x \in A_0$ tel que xEu . Par le tableau de compatibilité, nous avons que xEy et par l'étape 2, nous avons que xEz . Nous avons alors que $\langle z, y, u, p_0, p_1 \rangle$ est un P_4 .



Donc, C est un clump dans G contenant plus qu'un élément, donc $C = V(G)$ ce qui implique que si $A'_5 \neq \emptyset$, alors, $A_0 = \emptyset$.

Étape 9 : $A'_5 \neq \emptyset \implies G$ est biparti.

En fait, nous allons montrer que $A := \{p_0, p_2\} \cup A_3 \cup A_5^* \cup D_5$ et $B := \{p_1, p_3\} \cup A_3^* \cup A_5 \cup D_5^*$ est une bipartition de G .

Pour ce faire, nous n'avons qu'à montrer qu'il n'y a aucune arête à l'intérieur de A et par symétrie, nous aurons le résultat pour B .

(a) Il est clair que p_0 et p_2 ne sont adjacents à aucun sommet de A .

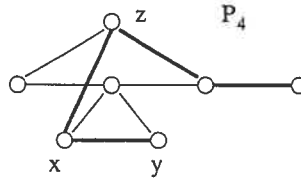
(b) $A'_5 \neq \emptyset \implies \langle A_3 \rangle$ est discret.

Pour ce faire, nous allons montrer que chaque composante connexe du sous-graphe induit par les sommets de A_3 est un clump dans G . Pour montrer ceci, nous n'avons qu'à montrer que deux sommets adjacents de A_3 ont les mêmes voisins à l'extérieur de A_3 .

Soit $x \in A_3$, $N_x \setminus A_3 := \{p_1\} \cup (N_x \cap A_5) \cup (N_x \cap A_3^*)$.

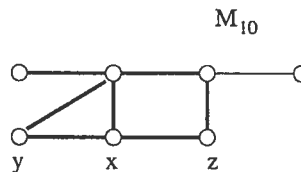
(i) Soient $x, y \in A_3$ tels que xEy , alors $N_x \cap A_5 = N_y \cap A_5$.

Supposons le contraire. Soit $z \in A_5$ tel que xEz et $y\bar{E}z$. Alors, $\langle z, y, x, p_2, p_3 \rangle$ est un P_4 .



(ii) Soient $x, y \in A_3$ tels que xEy , alors $N_x \cap A_3^* = N_y \cap A_3^*$.

Supposons le contraire. Soit $z \in A_3^*$ tel que $x\bar{E}z$ et $y\bar{E}z$. Il s'en suit que $\langle z, y, x, p_0, p_1, p_2 \rangle$ est un M_{10} .



Donc, par (i) et (ii), deux sommets adjacents de A_3 ont les mêmes voisins à l'extérieur de A_3 , ce qui implique que deux sommets d'une même composante connexe du sous-graphe induit par les sommets de A_3 ont les mêmes voisins dans G à l'extérieur de A_3 , ce qui implique que chacune de ces composantes est un clump dans G . Donc, $\langle A_3 \rangle$ est discret.

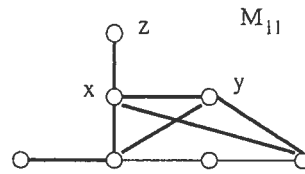
(c) $A'_5 \neq \emptyset \implies \langle A_5^* \rangle$ est discret.

Pour montrer ceci, nous allons procéder en deux étapes. Nous allons premièrement montrer que $\langle A_5^{*'} \rangle$ est discret pour ensuite démontrer que $\langle A_5^{*''} \rangle$ l'est aussi. Comme nous savons qu'aucune $A_5^{*'} A_5^{*''}$ -arête existe, nous aurons que $\langle A_5^* \rangle$ est discret.

(i) $\langle A_5^{*'} \rangle$ est discret.

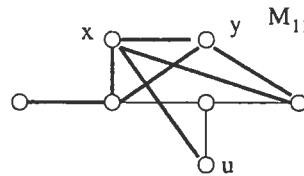
Montrons que deux sommets adjacents de $A_5^{*'}$ ont les mêmes voisins à l'extérieur de $A_5^{*'}$. Soit $x \in A_5^{*'}$, alors $N_x \setminus A_5^{*' := \{p_1, p_3\} \cup A_5 \cup A_3^* \cup (N_x \cap D_5^*)$ (Étape 3).

Il nous faut donc seulement montrer que deux sommets adjacents de $A_5^{*'}$ ont les mêmes voisins dans D_5^* . Supposons le contraire. Soit $x, y \in A_5^{*'}$, xEy et $z \in D_{5^*}$ tel que $x\bar{E}z$ et $y\bar{E}z$. Nous avons alors que $\langle z, y, x, p_1, p_3 \rangle$ est un M_{11} .



(ii) $\langle A_5^{*''} \rangle$ est discret.

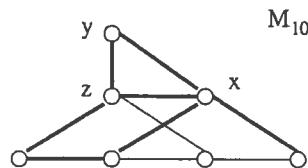
Pour ce faire, montrons que deux sommets adjacents de $A_5^{*''}$ ont les mêmes voisins à l'extérieur de $A_5^{*''}$. Soit $x \in A_5^{*''}$, alors $N_x \setminus A_5^{*''} = \{p_1, p_3\} \cup A_5 \cup (N_x \cap A_3^*)$. Nous n'avons donc qu'à montrer que deux sommets adjacents de $A_5^{*''}$ ont les mêmes voisins dans A_3^* . Supposons le contraire. Soient $x, y \in A_5^{*''}$ tels que xEy et $u \in A_3^*$ tel que uEx et $u\bar{E}y$. Nous avons alors que $\langle u, y, x, p_0, p_1, p_3 \rangle$ est un M_{11} .



Donc, nous avons que 2 sommets adjacents de A_5^* ont les mêmes voisins à l'extérieur de A_5^* , ce qui implique que chaque composante connexe de $\langle A_5^* \rangle$ est un clump dans G , donc que $\langle A_5^* \rangle$ est discret.

(d) Aucune $A_5^*D_5$ -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soit $x \in A_5^*$ et $y \in D_5$ adjacents. Comme $y \in D_5$, il existe $z \in A_5$ tel que yEz . Nous avons alors que $\langle z, y, x, p_0, p_1, p_3 \rangle$ est un M_{10} .



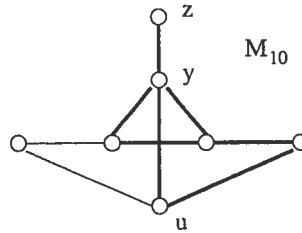
Donc, par (a), (b), (c) et (d), nous voyons que les ensembles A et B forment une bipartition de G . Comme nous avons vu au chapitre 2 que tout graphe biparti de longueur induite 3 a une involution, nous pouvons donc conclure que $A'_5 = \emptyset$. \square

Lemme 3.2.4. $A'_2 = \emptyset$

DÉMONSTRATION. Supposons encore une fois le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un sommet $y \in A'_2$. Comme $y \in A'_2$, il existe un sommet $z \in D_2$ tel que yEz . Nous procéderons encore une fois en plusieurs étapes. Nous éliminerons premièrement quelques-uns des types à l'aide des sous-graphes interdits et des clumps pour ensuite nous rendre compte que sous cet hypothèse, G a une involution. Nous pourrions donc conclure que $A'_2 = \emptyset$.

Étape 1 : $A'_2 \neq \emptyset \implies A_1 = \emptyset$.

Supposons le contraire. Soit $u \in A_1$ et $y \in A'_2$. Nous avons par le tableau de compatibilité que uEy . Comme $y \in A'_2$, il existe $z \in D_2$ tel que yEz . Nous avons alors que $\langle z, y, u, p_1, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{10} .

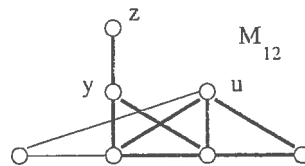


Étape 2 : $A'_2 \neq \emptyset \implies$ Toutes les A_0A_2 -arêtes existent.

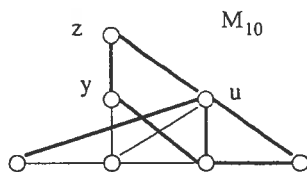
Nous allons premièrement montrer que toutes les $A_0A'_2$ -arêtes existent et ensuite, nous démontrerons que toutes les $A_0A''_2$ -arêtes existent.

(i) Toutes les $A_0A'_2$ -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soient $u \in A_0$ et $y \in A'_2$ tels que $u\bar{E}y$. Comme $y \in A'_2$, il existe $z \in D_2$ tel que yEz . Nous avons deux cas à vérifier. Premièrement si $u\bar{E}z$, nous avons que $\langle z, y, u, p_1, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{12} .

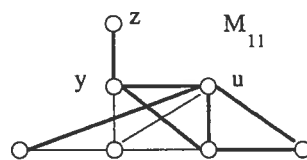


Finalement, si uEz , nous avons que $\langle z, y, u, p_0, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{10} .



(ii) Toutes les A_0D_2 -arêtes existent.

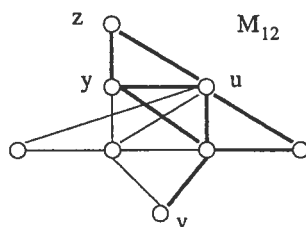
Supposons le contraire. Soient $u \in A_0$ et $z \in D_2$ tels que $u\bar{E}z$. Comme $z \in D_2$, il existe $y \in A'_2$ tel que yEz . Par (i), uEy . Nous avons alors que $\langle z, y, u, p_0, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{11} .



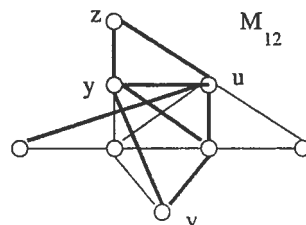
(iii) $A'_2 \neq \emptyset \implies$ Toutes les $A_0A'_2$ -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soient $u \in A_0$ et $v \in A'_2$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $A'_2 \neq \emptyset$, il existe $y \in A'_2$ et $z \in D_2$ tels que yEz . Nous avons deux cas à vérifier :

Si $y\bar{E}v$, nous avons que $\langle z, y, u, v, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{12} .



Si yEv , nous avons que $\langle z, y, u, v, p_0, p_2 \rangle$ est un M_{12} .



Étape 3 : $A'_2 \neq \emptyset \implies A_4 = A_4^* = \emptyset$. Par symétrie, nous n'avons qu'à montrer que $A_4 = \emptyset$.

Définissons $X := \{x \in A_3 \mid N_x \cap A_4 \neq \emptyset\}$. Nous allons montrer que $C := \{p_0\} \cup A_4 \cup X \cup B$ est un clump avec $N_v \setminus C = \{p_1\} \cup A_5 \cup A_6$ pour tout $v \in C$ où

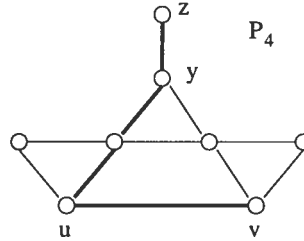
$$B := \{x \in A_3 \setminus X \mid N_x \cap X \neq \emptyset\}.$$

Pour p_0 , c'est clair : $N_{p_0} \setminus C = \{p_1\} \cup A_5 \cup A_6$.

Soit $u \in A_4$.

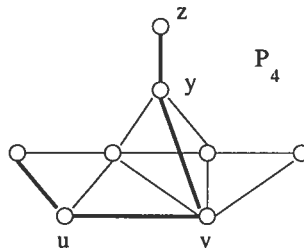
(a) $A'_2 \neq \emptyset \implies$ Aucune $A_4A_4^*$ -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soient $u \in A_4$ et $v \in A_4^*$ tels que uEv . Comme $A'_2 \neq \emptyset$, il existe $y \in A'_2$ et $z \in D_2$ tels que yEz . Nous avons alors que $\langle z, y, u, v, p_1 \rangle$ est un P_4 .



(b) $A'_2 \neq \emptyset \implies$ Aucune $A_4A_6^*$ -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soient $u \in A_4$ et $v \in A_6^*$ tels que uEv . Comme $A'_2 \neq \emptyset$, il existe $y \in A'_2$ et $z \in D_2$ tels que yEz . Alors, $\langle z, y, u, v, p_0 \rangle$ est un P_4 .



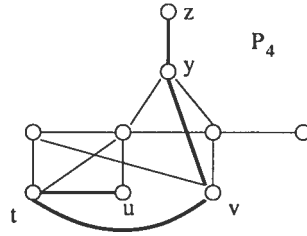
Donc, par (a) et (b) ainsi que par le tableau de compatibilité, nous avons que $N_u \setminus C = \{p_1\} \cup A_5 \cup A_6$ pour tout $u \in A_4$.

Soit maintenant $u \in X$.

(a) $A'_2 \neq \emptyset \implies$ Toutes les XA_5 -arêtes existent.

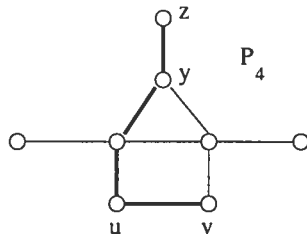
Supposons le contraire. Soient $u \in X$ et $v \in A_5$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $u \in X$, il

existe $t \in A_4$ tel que uEt . Finalement, comme $A'_2 \neq \emptyset$, il existe $y \in A'_2$ et $z \in D_2$ tels que yEz . Nous avons alors que $\langle z, y, u, v, t \rangle$ est un P_4 .



(b) $A'_2 \neq \emptyset \implies$ Aucune $A_3A_3^*$ -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soient $u \in A_3$ et $v \in A_3^*$ tels que uev . Comme $A'_2 \neq \emptyset$, il existe $y \in A'_2$ et $z \in D_2$ tels que yEz . Par conséquent, $\langle z, y, u, v, p_1 \rangle$ est un P_4 .



Donc, par (a) et (b), ainsi que par le tableau 3.1.1, nous avons que $N_u \setminus C = \{p_1\} \cup A_5 \cup A_6$ pour tout $u \in X$.

Soient maintenant $x \in B$.

(a) Toutes les BA_5 -arêtes existent.

À l'étape 9(b) du lemme précédent, nous avons démontré que deux sommets adjacents de A_3 ont les mêmes voisins dans A_5 . Comme x est élément de B , il existe donc un sommet $y \in X$ tel que xEy . Comme y est adjacent à tous les sommets de A_5 , il en est de même pour x .

(b) $A'_2 \neq \emptyset \implies$ Aucune BA_3^* -arête existe.

Comme $x \in B$, x est donc un sommet de A_3 et nous venons de démontrer que si $A'_2 \neq \emptyset$, alors aucune $A_3A_3^*$ -arête existe.

(c) On peut aussi remarquer que les sommets de B ne peuvent pas avoir de voisins dans $A_3 \setminus (B \cup X)$ car sinon nous obtenons un P_4 .

Donc, par (a), (b) et (c) ainsi que par le tableau de compatibilité, nous avons que $N_x \setminus C = \{p_1\} \cup A_5 \cup A_6$ pour tout $x \in B$.

Donc, ceci termine la preuve que C est un clump dans G ce qui prouve que $A_4 = A_4^* = \emptyset$.

Étape 4 : $A'_2 \neq \emptyset \implies A_6 = A_6^* = \emptyset$. Par symétrie, nous n'avons qu'à montrer que $A_6 = \emptyset$.

Définissons $X := \{x \in A_5 \mid N_x \cap A_6 \neq \emptyset\}$. Nous allons montrer que $C := \{p_1\} \cup A_6 \cup X \cup B$ est un clump avec $N_v \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5^* \cup A_6^*$ pour tout $v \in C$ où

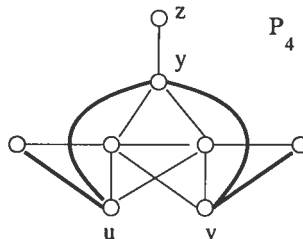
$$B := \{x \in A_5 \setminus X \mid N_x \cap X \neq \emptyset\}.$$

Pour p_1 , c'est clair : $N_{p_1} \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5^* \cup A_6^*$.

Soit $u \in A_6$.

(a) $A'_2 \neq \emptyset \implies$ Toutes les $A_6 A_6^*$ -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soient $u \in A_6$ et $v \in A_6^*$ tels que $u \bar{E} v$. Comme $A'_2 \neq \emptyset$, il existe $y \in A'_2$ et $z \in D_2$ tels que $y E z$. Nous avons alors que $\langle y, u, v, p_0, p_3 \rangle$ est un P_4 .

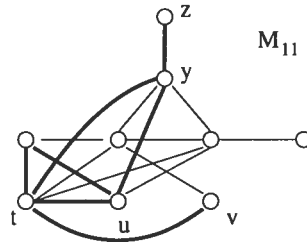


Donc, par (a), ainsi que par le tableau de compatibilité, nous avons que $N_u \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5^* \cup A_6^*$ pour tout $u \in A_6$.

Soit maintenant $u \in X$.

(a) $A'_2 \neq \emptyset \implies$ Toutes les XA_3 -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soient $u \in X$ et $v \in A_3$ tels que $u\bar{E}v$. Comme $u \in X$, il existe $t \in A_6$ tel que uEt . Finalement, comme $A'_2 \neq \emptyset$, il existe $y \in A'_2$ et $z \in D_2$ tels que yEz . Alors, $\langle z, y, u, v, t, p_0 \rangle$ est un M_{11} .



Donc, par (a), ainsi que par le tableau de compatibilité, nous avons que $N_u \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5^* \cup A_6^*$ pour tout $u \in X$.

Soit finalement $x \in B$.

(a) $A'_2 \neq \emptyset \implies$ Toutes les BA_3 -arêtes existent.

À l'étape 9(c) du lemme précédent, nous avons démontré que deux sommets adjacents de A_5^* ont les mêmes voisins dans A_3^* . Par symétrie, nous avons donc que deux sommets adjacents de A_5 ont les mêmes voisins dans A_3 . Comme $x \in B$, il existe $y \in X$ tel que xEy . Comme y est adjacent à tous les sommets de A_3 , il en est de même pour x .

(b) On peut aussi remarquer que les sommets de B ne peuvent avoir de voisins dans $A_5 \setminus (B \cup X)$ car sinon nous obtenons une chaîne de longueur 4.

Donc, par (a), (b), ainsi que par le tableau de compatibilité, nous avons que $N_x \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5^* \cup A_6^*$ pour tout $x \in B$.

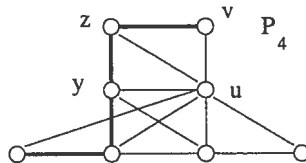
Ceci conclue donc la preuve que C est un clump dans G ce qui prouve que $A_6 = A_6^* = \emptyset$.

Étape 5 : $A'_2 \neq \emptyset \implies A_0 = \emptyset$.

Pour démontrer ceci, nous allons montrer que $C := P \cup (U_1 \setminus A_0) \cup D_2$ est un clump dans G avec $N_x \setminus C := A_0$ pour tout $x \in C$.

Comme $V(G) = P \cup A_0 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_3^* \cup A_5^* \cup D_2 \cup (D_0 \setminus D_2)$, nous avons à l'aide du tableau de compatibilité ainsi que de l'étape 2, que tous les sommets de C sont adjacents à A_0 .

Il nous reste seulement à montrer qu'aucune $D_2(D_0 \setminus D_2)$ -arête n'existe. Supposons le contraire. Soient $z \in D_2$ et $v \in (D_0 \setminus D_2)$ tels que zEv . Comme $z \in D_2$, il existe $y \in A_2$ tel que yEz . Nous avons alors que $\langle z, y, v, p_0, p_1 \rangle$ est un P_4 .



Nous avons donc que C est un clump de G contenant plus d'un sommet, ce qui implique que $C = V(G)$, donc $A_0 = \emptyset$.

Étape 6 : $A'_2 \neq \emptyset \implies \langle A_3 \rangle$ est discret.

Pour démontrer ceci, nous montrerons que deux sommets adjacents de A_3 ont les mêmes voisins à l'extérieur de A_3 .

Soit $x \in A_3$. Nous avons que $N_x \setminus A_3 = \{p_1\} \cup (N_x \cap A_5) \cup (N_x \cap A_3^*)$.

Comme nous avons déjà montré que deux sommets adjacents de A_3 ont les mêmes voisins dans A_5 et que si $A'_2 \neq \emptyset$, alors aucune $A_3A_{3^*}$ -arête existe, nous avons donc que si $xEy \in A_3$, alors $N_x \setminus A_3 = N_y \setminus A_3$. Donc, nous avons que chaque composante connexe de $\langle A_3 \rangle$ est un clump dans G . Donc, $\langle A_3 \rangle$ est discret. Par symétrie, nous avons aussi que $\langle A_{3^*} \rangle$ est discret.

Étape 7 : $A'_2 \neq \emptyset \implies \langle A_5 \rangle$ est discret.

Pour démontrer ceci, nous montrerons que deux sommets adjacents de A_5 ont les mêmes voisins à l'extérieur de A_5 .

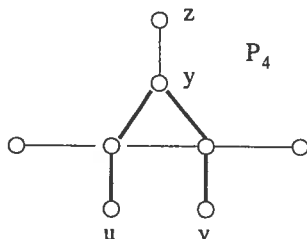
Soit $x \in A_5$. Nous avons que $N_x \setminus A_3 = \{p_0, p_2\} \cup A_2 \cup (N_x \cap A_3) \cup A_5^*$.

Comme nous avons aussi déjà démontré que deux sommets adjacents de A_5 ont les mêmes voisins dans A_3 , nous avons que si $xEy \in A_5$, alors $N_x \setminus A_5 = N_y \setminus A_5$. Donc, nous avons que chaque composante connexe de $\langle A_5 \rangle$ est un clump dans G . Donc, $\langle A_5 \rangle$ est discret. Par symétrie, nous avons aussi que $\langle A_5^* \rangle$ est discret.

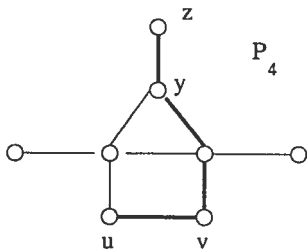
Étape 8 : $A'_2 \neq \emptyset \implies$ (Si $A_3 \neq \emptyset$, alors $A_{3^*} = \emptyset$).

Supposons le contraire. Soient $u \in A_3$ et $v \in A_3^*$. Comme $A'_2 \neq \emptyset$, il existe $y \in A'_2$ et $z \in D_2$ tels que yEz . Nous avons deux cas à vérifier.

(i) Si $u\bar{E}v$, nous avons que $\langle u, v, y, p_1, p_2 \rangle$ est un P_4 .

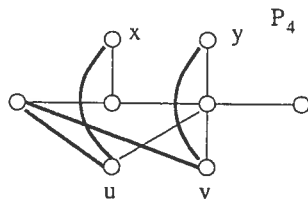


(ii) Si uEv , nous avons que $\langle u, v, y, z, p_2 \rangle$ est un P_4 .



Étape 9 : Soient $x, y \in A_3$. Alors, ou bien $N_x \cap A_5 \subset N_y \cap A_5$, ou bien $N_y \cap A_5 \subset N_x \cap A_5$.

Supposons le contraire. Soient $u \in (N_x \cap A_5) \setminus (N_y \cap A_5)$ et $v \in (N_y \cap A_5) \setminus (N_x \cap A_5)$. Nous avons alors que $\langle u, v, x, y, p_0 \rangle$ est un P_4 .



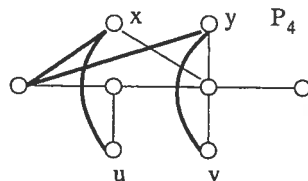
On remarque aussi que x et y ne peuvent pas avoir le même voisinage dans A_5 , car $x \longleftrightarrow y$ serait une involution de G .

Il découle de ce qui précède que $|A_3| \leq |A_5|$.

Nous pouvons aussi facilement remarquer qu'aucun $x \in A_3$ n'est adjacent à tout A_5 car sinon, $x \longleftrightarrow p_0$ serait une involution de G .

Étape 10 : Soient $x, y \in A_5$. Alors, ou bien $N_x \cap A_3 \subset N_y \cap A_3$, ou bien $N_y \cap A_3 \subset N_x \cap A_3$.

Supposons le contraire. Soient $u \in (N_x \cap A_3) \setminus (N_y \cap A_3)$ et $v \in (N_y \cap A_3) \setminus (N_x \cap A_3)$. Nous avons alors que $\langle u, v, x, y, p_0 \rangle$ est un P_4 .



Comme à l'étape précédente, on remarque que x et y ne peuvent pas avoir le même voisinage dans A_5 , car $x \longleftrightarrow y$ serait une involution de G .

Donc, $|A_5| \leq |A_3|$.

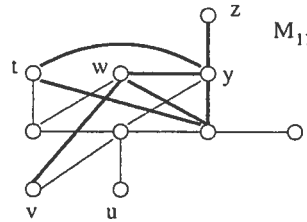
De la même façon, aucun $x \in A_5$ n'est adjacent à tout A_3 car sinon, $x \longleftrightarrow p_1$ serait une involution de G .

Étape 11 : $|A_3| = |A_5| \leq 1$.

Pour la première partie, comme $|A_3| \leq |A_5|$ et $|A_5| \leq |A_3|$, il est clair que $|A_3| = |A_5|$.

Supposons maintenant que $|A_3| = |A_5| \geq 2$. En fait nous pouvons supposer que $|A_3| = |A_5| = 2$. Soient $u, v \in A_3$ et $w, t \in A_5$. Comme $A'_2 \neq \emptyset$, il existe $y \in A'_2$

et $z \in D_2$ tels que yEz . Comme les voisinage de A_3 dans A_5 et de A_5 dans A_3 forment des chaînes par rapport à l'inclusion, qu'aucun sommet de A_3 n'est adjacent à tout A_5 et qu'aucun sommet de A_5 n'est adjacent à tout A_3 , nous avons donc qu'une seule arête entre A_3 et A_5 . Par exemple, vEw . Nous avons alors que $\langle v, t, w, y, z, p_2 \rangle$ est un M_{11} .



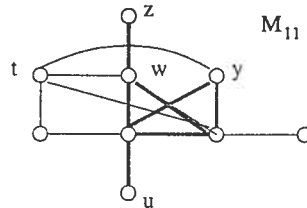
Ceci montre que $|A_3| = |A_5| \leq 1$. Comme nous avons vu à l'étape 8 que si $A_3 \neq \emptyset$, alors $A_3^* = \emptyset$ et vice-versa, nous pouvons supposer qu'un de ces deux ensembles de sommets est non-vide car sinon, comme U_1 serait constitué de seulement A_2 , nous aurions que $p_0 \longleftrightarrow p_3, p_1 \longleftrightarrow p_2$ serait une involution de G . Supposons donc, pour la suite de la démonstration, que $A_3 \neq \emptyset$.

Étape 12 : Avec les hypothèses ci-dessus, $|A_2| = 1$.

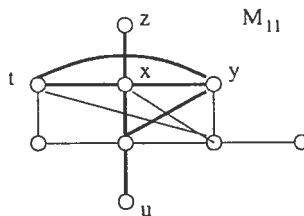
Montrons simplement que deux sommets de A_2 ont le même voisinage. Comme nous connaissons parfaitement le voisinage de A_2 dans U_1 , nous n'avons qu'à montrer que les deux sommets ont le même voisinage dans U_2 .

Supposons donc le contraire. Soient $x, y \in A_2$ et $z \in D_2$ tel que xEz et $y\bar{E}z$. Soient aussi $u \in A_3$ et $t \in A_5$, $u\bar{E}t$. Nous avons deux cas à vérifier :

(i) Si $x\bar{E}y$, nous avons que $\langle x, y, z, u, p_1, p_2 \rangle$ est un M_{11} .

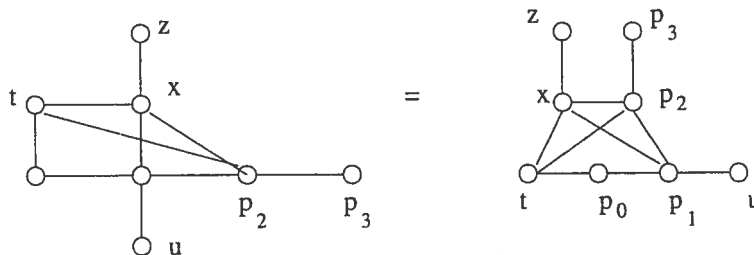


(ii) Si xEz , nous avons que $\langle x, y, z, u, t, p_1 \rangle$ est un M_{11} .



Comme $|A_2| = 1$ et que $A'_2 \neq \emptyset$, il est clair que $|U_2| = 1$ car U_2 est un clump de G .

Il ne reste qu'une seule possibilité pour G . Alors, comme le montre la figure suivante, $p_3 \longleftrightarrow z, x \longleftrightarrow p_2$ est une involution de G .



Ceci conclue donc la preuve que $A'_2 = \emptyset$.

□

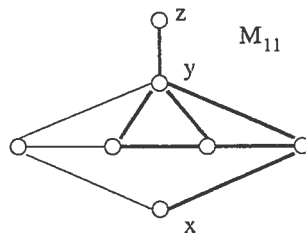
Lemme 3.2.5. $A'_0 = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Pour conclure la preuve que U_2 est vide, il nous reste seulement à montrer qu'aucun sommet de A_0 n'a de voisin dans U_2 . Pour ce faire, nous remarquerons qu'un sommet de A'_0 est adjacent à tout $U_1 \setminus A_0$. Ensuite, nous verrons que deux sommets non adjacents de A_0 ont presque le même voisinage et ceci nous mènera à la construction d'un clump non trivial de G .

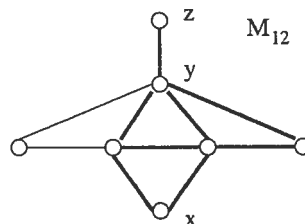
Étape 1 : Toutes les $A'_0(U_1 \setminus A_0)$ -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soient $y \in A'_0$ et $x \in U_1 \setminus A_0$ tels que $x\bar{E}y$. Comme $y \in A'_0$, il existe $z \in D_0$ tel que yEz . Alors :

(i) Si $x \in A_1$, nous avons que $\langle x, y, z, p_1, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{11} .

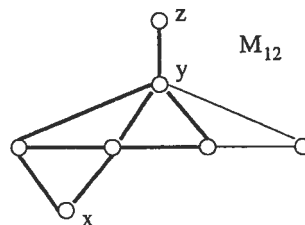


(ii) Si $x \in A_2$, nous avons que $\langle x, y, z, p_1, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{12} .



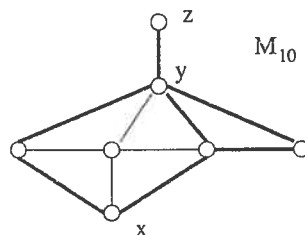
(iii) Si $x \in A_3$, nous avons contradiction avec le tableau de compatibilité.

(iv) Si $x \in A_4$, nous avons que $\langle x, y, z, p_0, p_1, p_2 \rangle$ est un M_{12} .



(v) Si $x \in A_5$, nous avons contradiction avec le tableau de compatibilité.

(vi) Si $x \in A_6$, nous avons que $\langle x, y, z, p_0, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{10} .



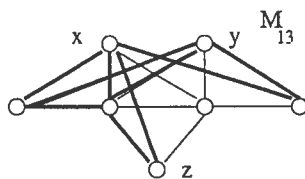
Donc, par symétrie, nous avons que toutes les $A'_0(U_1 \setminus A_0)$ -arêtes existent.

Étape 2 : Soient $x, y \in A_0$ tels que $x\bar{E}y$, alors

$$N_x \cap (U_1 \setminus (A_0 \cup A_1)) = N_y \cap (U_1 \setminus (A_0 \cup A_1)).$$

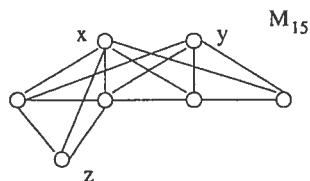
Supposons le contraire. Soient $x, y \in A_0$ non adjacents et $z \in (U_1 \setminus (A_0 \cup A_1))$ tel que xEz et $y\bar{E}z$. Alors,

(i) Si $z \in A_2$, nous avons que $\langle x, y, z, p_0, p_1, p_3 \rangle$ est un M_{13} .



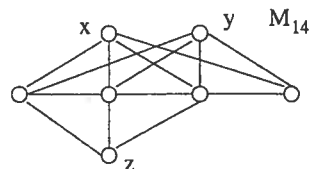
(ii) Si $z \in A_3$, nous avons contradiction avec le tableau de compatibilité.

(iii) Si $z \in A_4$, nous avons que $\langle x, y, z, p_0, p_1, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{15} .



(iv) Si $z \in A_5$, nous avons contradiction avec le tableau de compatibilité.

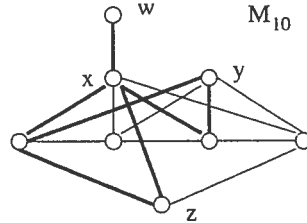
(v) Si $z \in A_6$, nous avons que $\langle x, y, z, p_0, p_1, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{14} .



Donc, nous avons par symétrie que deux sommets non-adjacents de A_0 ont les mêmes voisins dans $U_1 \setminus (A_0 \cup A_1)$.

Étape 3 : Soient $x \in A'_0$, $y \in A''_0$ et $z \in A_1$. Si $x\bar{E}y$, alors yEz .

Supposons le contraire. Comme $x \in A'_0$, il existe $w \in D_0$ tel que xEw et nous savons que xEz . Alors, nous avons que $\langle x, y, z, w, p_0, p_2 \rangle$ est un M_{10} .



Avant de poursuivre avec la dernière étape, définissons les ensembles suivants :

$$B'' := \{x \in A''_0 \mid \text{toutes les } xA'_0\text{-arêtes existent}\},$$

$$C'' := A''_0 \setminus B''.$$

Nous voyons ici que comme A'_0 est non-vide, nous avons que toutes les $C''(U_1 \setminus A_0)$ -arêtes existent, mais ceci n'est pas nécessairement vrai pour B'' (Étapes 2 et 3).

Étape 4 : $A'_0 \neq \emptyset \implies C := P \cup (U_1 \setminus A_0) \cup B_1 \cup B_2$ est un clump non trivial de G .

Définissons premièrement le sous-ensemble B_1 .

$$B_1 := \{x \in B'' \mid \bar{N}_x \cap (U_1 \setminus A_0) \neq \emptyset\},$$

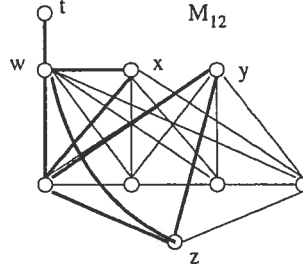
où $\bar{N}_x := \{y \in V(G) \mid x\bar{E}y\}$.

Il est très facile de remarquer que si toutes les $B_1(A_0 \setminus B_1)$ -arêtes existent, nous avons que $P \cup (U_1 \setminus A_0) \cup B_1$ est un clump non trivial de G . Nous pouvons donc supposer que certains sommets de B_1 ne sont pas adjacents à certains sommets de $(A_0 \setminus B_1)$. La question qu'on doit maintenant se poser est la suivante : Où se trouvent ces sommets. Comme nous savons par définition que toutes les $B_1A'_0$ -arêtes existent, on peut donc affirmer qu'un sommet de B_1 et un autre de $(A''_0 \setminus B_1)$ ne sont pas adjacents. Soient donc, $x \in B_1$ et $y \in A''_0 \setminus B_1$ tels que $x\bar{E}y$.

Comme y est adjacent à tout $U_1 \setminus A_0$, nous avons par les étapes précédentes que x est adjacent à tout $U_1 \setminus (A_0 \cup A_1)$. Comme $x \in B_1$, il existe $z \in A_1$ tel que $x\bar{E}z$.

La première chose que nous pouvons remarquer est que $y \in B''$.

Supposons le contraire, i.e. $y \in A''$. Comme $y \in A''$, il existe $w \in A'_0$ tel que $w\bar{E}y$. Il existe aussi $t \in D_0$ tel que wEt . Nous avons alors que $\langle x, y, z, w, t, p_0 \rangle$ est un M_{12} .



Posons maintenant

$$B_2 := \{y \in (B'' \setminus B_1) \mid \bar{N}_y \cap B_1 \neq \emptyset\}.$$

Nous pouvons maintenant montrer que C est bien un clump non-trivial de G avec $N_x \setminus C = A_0 \setminus (B_1 \cup B_2)$ pour tout $x \in C$.

Soit $x \in P$. Il est clair que $N_x \setminus C = A_0 \setminus (B_1 \cup B_2)$.

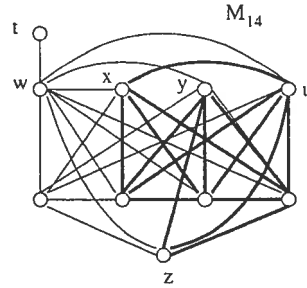
Soit maintenant $x \in (U_1 \setminus A_0)$. Par définition de B_1 , il est aussi clair que $N_x \setminus C = A_0 \setminus (B_1 \cup B_2)$.

Soit $x \in B_1$. Par la définition de B_2 , $N_x \setminus C = A_0 \setminus (B_1 \cup B_2)$.

Finalement, soit $x \in B_2$.

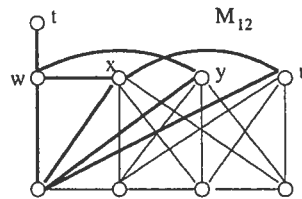
(i) Toutes les $B_2(B'' \setminus (B_1 \cup B_2))$ -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soient $y \in B_2$ et $u \in (B'' \setminus (B_1 \cup B_2))$ tels que $y\bar{E}u$. Soient toujours $x \in B_1$ tel que $x\bar{E}y$ et $z \in A_1$ tel que $x\bar{E}z$. Nous avons alors que $\langle x, y, z, u, p_1, p_2, p_3 \rangle$ est un M_{14} .



(ii) Toutes les B_2A'' -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soient $y \in B_2$ et $u \in A''$ tels que $y\bar{E}u$. Soient $x \in B_1$ tel que $x\bar{E}y$. Comme $u \in A''$, il existe $w \in A_0''$ tel que $u\bar{E}w$. Finalement, soit $t \in D_0$ tel que wEt . Nous avons alors que $\langle x, y, u, w, t, p_0 \rangle$ est un M_{12} .



Donc, par (i) et (ii), $N_x \setminus C = A_0 \setminus (B_1 \cup B_2)$ pour tout $x \in B_2$.

Ceci conclue donc la preuve que C est un clump non trivial de G est ceci ne peut arriver que si $C = V(G)$. Ceci prouve donc que $A'_0 = \emptyset$. \square

Ce dernier lemme clôture la preuve que U_2 est vide. Nous savons donc maintenant que si G est un graphe asymétrique minimal de longueur induite 3 différent des M_i déjà connus, pour n'importe quelle chaîne induite de longueur 3 de G , les sommets à l'extérieur de cette chaîne sont à distance 1 de celle-ci.

Dans la prochaine section, nous nous affairerons à éliminer chacun des types de voisinage restants.

3.3. SUITE ET FIN DE LA DÉMONSTRATION

Dans cette dernière section du chapitre, nous éliminerons les sommets appartenant à certains types de voisinage admissibles pour enfin arriver à la contradiction finale. Ces éliminations seront assez faciles compte tenu du fait que nous savons

que $U_2 = \emptyset$.

Pour éliminer ces sommets, nous aurons parfois besoin de regarder le graphe G sous un autre angle. En effet, jusqu'à maintenant, nous avons toujours considéré la chaîne induite P comme chaîne de référence, mais comme chacune des étapes de la démonstration est vraie pour n'importe quelle chaîne induite de longueur 3 de G ou de \overline{G} (remarque 3.1.1), il sera utile au besoin de se baser sur une nouvelle chaîne pour trouver une contradiction.

Lemme 3.3.1. $A_3 = A_3^* = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Comme ces deux types sont symétriques par rapport à l'involution naturelle de P , il suffit donc de démontrer que $A_3 = \emptyset$.

Pour démontrer ceci, nous allons montrer que $C := \{p_0\} \cup A_3$ est un clump de G avec $N_x \setminus C = A_0 \cup A_1 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$.

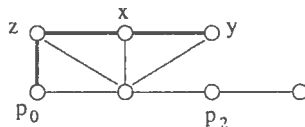
Pour p_0 , c'est clair : $N_{p_0} \setminus C = \{p_1\} \cup A_0 \cup A_1 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$.

Soit maintenant $x \in A_3$.

Avant de trouver le voisinage de x à l'extérieur de C , nous allons montrer que $\langle A_3 \rangle$ est discret. Pour ce faire, nous allons montrer que deux sommets adjacents de A_3 ont les mêmes voisins à l'extérieur de A_3 .

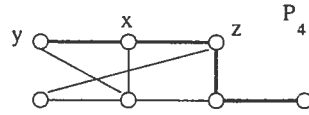
(a) Soit $x, y \in A_3$, alors $N_x \cap A_4 = N_y \cap A_4$.

Supposons le contraire. Soit $z \in A_4$ tel que xEz et $y\bar{E}z$. Nous avons alors que $\langle p_0, x, y, z \rangle$ est une chaîne induite de longueur 3 et p_2 est à distance 2 de cette chaîne.



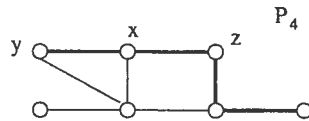
(b) Soit $x, y \in A_3$, alors $N_x \cap A_5 = N_y \cap A_5$.

Supposons le contraire. Soit $z \in A_5$ tel que xEz et $y\bar{E}z$. Nous avons alors que $\langle p_2, p_3, x, y, z \rangle$ est un P_4 .



(c) Soit $x, y \in A_3$, alors $N_x \cap A_3^* = N_y \cap A_3^*$.

Supposons le contraire. Soit $z \in A_3^*$ tel que xEz et $y\bar{E}z$. Alors, $\langle p_2, p_3, x, y, z \rangle$ est un P_4 .

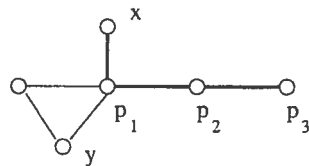


Donc, à l'aide de (a), (b), (c), ainsi que du tableau de compatibilité, nous voyons que deux sommets adjacents de A_3 ont les mêmes voisins à l'extérieur de A_3 . Ceci implique donc que chaque composante connexe de $\langle A_3 \rangle$ est un clump de G , donc $\langle A_3 \rangle$ est discret.

Trouvons maintenant le voisinage d'un sommet $x \in A_3$ à l'extérieur de C .

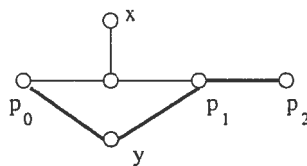
(i) Toutes les A_3A_4 -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $x \in A_3$ et $y \in A_4$ tels que $x\bar{E}y$. Alors, par rapport à la chaîne induite par x, p_1, p_2, p_3 , les sommets p_0 et y sont deux sommets de type α_3 adjacents. Ceci contredit le fait que $\langle A_3 \rangle$ est discret.



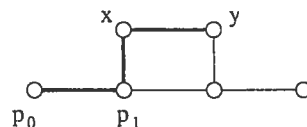
(ii) Toutes les A_3A_5 -arêtes existent.

Supposons le contraire. Soit $x \in A_3$ et $y \in A_5$ tels que $x\bar{E}y$. Nous avons alors que le sommet x est à distance 2 de la chaîne induite par p_0, y, p_2, p_3 . Ceci contredit le fait que $U_2 = \emptyset$.



(iii) Aucune $A_3A_3^*$ -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soit $x \in A_3$ et $y \in A_3^*$ tels que xEy . Par conséquent, le sommet p_3 est à distance 2 de la chaîne induite par p_0, p_1, x, y . Ceci contredit le fait que $U_2 = \emptyset$.



Donc, par (i),(ii) et (iii) ainsi que par le tableau de compatibilité, nous avons que $N_x \setminus C = A_0 \cup A_1 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$ pour tout $x \in A_3$.

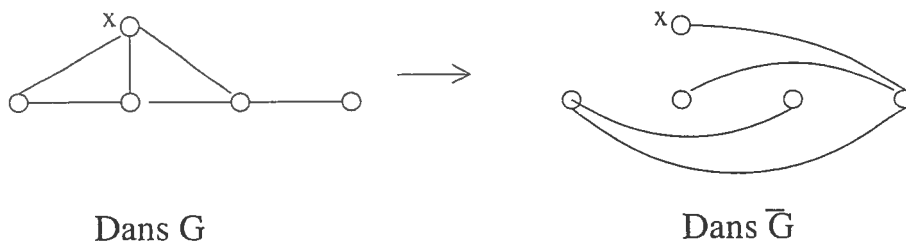
Ceci conclue donc la preuve que C est un clump dans G , ce qui prouve que $A_3 = \emptyset$.

□

Lemme 3.3.2. $A_6 = A_6^* = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Encore une fois, comme ces deux types sont symétriques par rapport à l'involution naturelle de P , nous n'avons qu'à montrer que $A_6 = \emptyset$.

Supposons le contraire. Soit $x \in A_6$. Regardons le sous-graphe induit par $P \cup \{x\}$ dans \overline{G} (fig 3.3.1). Nous voyons alors que le sommet x est un sommet de type α_3 par rapport à la chaîne induite par les sommets de P . Comme \overline{G} est aussi un graphe asymétrique minimal de longueur induite 3 différent de ceux déjà connus, nous avons que tous les résultats obtenus sont aussi vrai pour \overline{G} . Donc, le fait que x soit un sommet de type α_3 dans \overline{G} est une contradiction car $A_3 = \emptyset$. □

FIG. 3.3.1. Élimination de A_6

Lemme 3.3.3. $A_5 = A_5^* = \emptyset$.

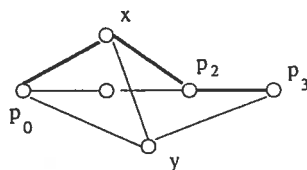
DÉMONSTRATION. Par symétrie, il nous suffit de montrer que $A_5 = \emptyset$. Pour ce faire, nous allons montrer que $C := \{p_1\} \cup A_5$ est un clump dans G avec $N_x \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_0 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5^*$.

Pour p_1 , c'est clair : $N_{p_1} \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_0 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5^*$.

Soit maintenant $x \in A_5$.

(i) Aucune $A_5 A_1$ -arête n'existe.

Supposons le contraire. Soit $x \in A_5$ et $y \in A_1$ tels que $x E y$. Alors, pour la chaîne induite $\langle p_0, x, p_2, p_3 \rangle$, le sommet y est un sommet de type α_7 .



Ceci contredit le fait que $A_7 = \emptyset$.

Donc, par (i) et par le tableau de compatibilité, nous avons que $N_x \setminus C = \{p_0, p_2\} \cup A_0 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_5^*$ pour tout $x \in A_5$.

Ceci conclue donc la preuve que C est un clump dans G , ce qui prouve que A_5 est bel et bien vide.

□

Lemme 3.3.4. $A_4 = A_4^* = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que $A_4 = \emptyset$.

Supposons le contraire. Soit $x \in A_4$. De la même manière que lors de l'élimination de A_6 , nous pouvons nous apercevoir que dans \overline{G} , x est un sommet de type α_5 par rapport à la chaîne induite par les sommets de P .

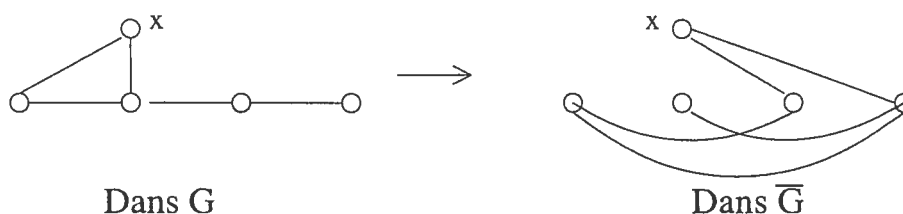


FIG. 3.3.2. Élimination de A_4

Ceci contredit le fait que $A_5 = \emptyset$ dans tout graphe asymétrique minimal de longueur induite 3 différent de ceux déjà connus. \square

Nous sommes maintenant arrivé à la contradiction finale. En effet, nous voyons que $V(G)$ est seulement composé des sommets de P , A_0 , A_1 et A_2 . Comme ces trois types sont symétriques par rapport à l'involution naturelle de P , nous avons alors que $p_0 \longleftrightarrow p_3, p_1 \longleftrightarrow p_2$ est une involution de G , peu importe si les ensembles A_0 , A_1 , A_2 sont vides ou non. Ceci contredit le fait que G soit un graphe sans involution.

Nous pouvons donc maintenant affirmer que les seuls graphes asymétriques minimaux de longueur induite 3 sont $M_{10}, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{15}, M_{16}, M_{17}$ et M_{18} et que ceux-ci sont aussi les seuls graphes sans involution minimaux de longueur induite 3.

Ceci termine donc la preuve de la conjecture de J. Nešetřil sur la finitude de la classe des graphes asymétriques minimaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SABIDUSSI, G., *Clumps, minimal asymmetric graphs and involutions*, J. Combin. Theory B **53** (1991), 40-79.
- [2] NESETRIL, J., SABIDUSSI, G., *Minimal asymmetric graphs of induced length 4*, Graphs and Combinatorics **8** (1992), 343-359.
- [3] ASCHBACHER, M., *An homomorphism theorem for finite graphs*, Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976), 468-470.
- [4] ERDÖS, P., RÉNYI, A., *Asymmetric graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **14** (1963), 295-315.
- [5] NESETRIL, J., SABIDUSSI, G., *Minimal graphs without bilateral symmetry : The case of induced length 4*, preprint, No. 88-512, "Forschungsinst f. Diskrete Mathematik," Bonn University.

Annexe A

COMPATIBILITÉ ENTRE LES TYPES DE VOISINAGES ADMISSIBLES

Dans cet annexe, nous présenterons en détail les calculs de compatibilité des types de voisinages qui nous ont permis de compléter le tableau 3.1.1.

En fait, nous allons examiner les graphes $Q_{i,j}^+$ et $Q_{i,j}^-$ où α_i et α_j sont deux types de voisinages admissibles différents.

(1) α_0, α_1 :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(2) α_0, α_2 :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(3) α_0, α_3 :

$Q_{i,j}^-$ est isomorphe à M_{12} et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, toutes les A_0A_3 -arêtes existent dans G .

(4) α_0, α_4 :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(5) α_0, α_5 :

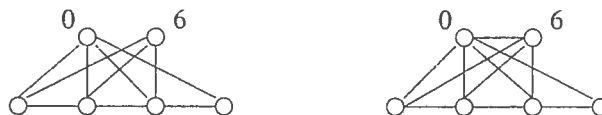
$Q_{i,j}^-$ est isomorphe à M_{13} et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, toutes les A_0A_5 -arêtes existent dans G .

(6) α_0, α_6 :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(7) α_1, α_2 :

$Q_{i,j}^-$ contient un P_4 et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous- graphe induit.



Donc, toutes les A_1A_2 -arêtes existent dans G .

(8) α_1, α_3 :

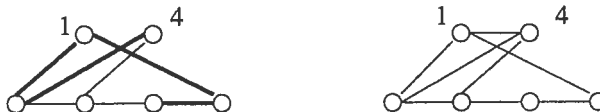
$Q_{i,j}^-$ contient un P_4 et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous- graphe induit.



Donc, toutes les A_1A_3 -arêtes existent dans G .

(9) α_1, α_4 :

$Q_{i,j}^-$ contient un P_4 et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous- graphe induit.



Donc, toutes les A_1A_4 -arêtes existent dans G .

(10) α_1, α_5 :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous- graphe induit.



Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(11) α_1, α_6 : $Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.

Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(12) α_2, α_3 : $Q_{i,j}^+$ est isomorphe à M_{11} et $Q_{i,j}^-$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.Donc, aucune A_2A_3 -arête n'existe dans G .(13) α_2, α_4 : $Q_{i,j}^+$ est isomorphe à M_7 et $Q_{i,j}^-$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.Donc, aucune A_2A_4 -arête n'existe dans G .(14) α_2, α_5 : $Q_{i,j}^-$ est isomorphe à M_{10} et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.Donc, toutes les A_2A_5 -arêtes existent dans G .

(15) α_2, α_6 :

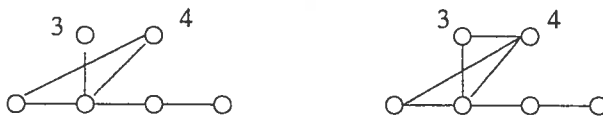
$Q_{i,j}^-$ est isomorphe à M_{12} et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, toutes les A_2A_6 -arêtes existent dans G .

(16) α_3, α_4 :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(17) α_3, α_5 :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(18) α_3, α_6 :

$Q_{i,j}^-$ est isomorphe à M_{11} et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, toutes les A_3A_6 -arêtes existent dans G .

(19) α_3, α_3^* :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(20) α_3, α_4^* :

$Q_{i,j}^+$ est isomorphe à M_5 et $Q_{i,j}^-$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, aucune $A_3A_4^*$ -arête n'existe dans G .

(21) α_3, α_5^* :

$Q_{i,j}^+$ est isomorphe à M_{10} et $Q_{i,j}^-$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, aucune $A_3A_5^*$ -arête n'existe dans G .

(22) α_3, α_6^* :

$Q_{i,j}^+$ est isomorphe à M_{12} et $Q_{i,j}^-$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, aucune $A_3A_6^*$ -arête n'existe dans G .

(23) α_4, α_5 :

$Q_{i,j}^-$ est isomorphe à M_5 et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, toutes les A_4A_5 -arêtes existent dans G .

(24) α_4, α_6 :

$Q_{i,j}^-$ est isomorphe à M_7 et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, toutes les A_4A_6 -arêtes existent dans G .

(25) α_4, α_4^* :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(26) α_4, α_5^* :

$Q_{i,j}^+$ est isomorphe à M_6 et $Q_{i,j}^-$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, aucune $A_4A_5^*$ -arête n'existe dans G .



(27) α_4, α_6^* :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.

Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(28) α_5, α_6 :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, il y a indétermination entre ces deux types.

(29) α_5, α_5^* :

$Q_{i,j}^-$ contient un P_4 et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, toutes les $A_5A_5^*$ -arêtes existent dans G .

(30) α_5, α_6^* :

$Q_{i,j}^-$ est isomorphe à M_6 et $Q_{i,j}^+$ ne contient aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, toutes les $A_5A_6^*$ -arêtes existent dans G .

(31) α_6, α_6^* :

$Q_{i,j}^-$ et $Q_{i,j}^+$ ne contiennent aucun M_i et aucun P_4 comme sous-graphe induit.



Donc, il y a indétermination entre ces deux types.