

Université de Montréal

Les aspects mathématiques des stents enrobés

par

Étienne Bourgeois

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en Mathématiques

Orientation Mathématiques appliquées

juin 2006



CLA

3

U54

2006

V.014

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Les aspects mathématiques des stents enrobés

présenté par

Étienne Bourgeois

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Jacques Bélair

(président-rapporteur)

Michel C. Delfour

(directeur de recherche)

André Garon

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

Ce mémoire étudie la modélisation et le design des stents enrobés, qui sont des endoprothèses utilisées en cardiologie interventionnelle pour traiter la sténose des vaisseaux sanguins et prévenir la resténose qui peut résulter du déchirement de l'endothélium lors de la pose du stent.

L'originalité de ce travail tient dans l'utilisation de la théorie du dallage et des patterns pour obtenir les équations de la dose asymptotique lorsque le dallage devient de plus en plus fin tout en maintenant constante l'aire de la surface de contact entre le stent et la paroi du vaisseau. Ce sont des équations aux dérivées partielles du type diffusion-transport sans saut à travers l'interface entre la lumière et la paroi.

On traite non seulement le cas des stents périodiques, mais aussi le cas de stents pour lesquels il n'existe qu'un dallage sans motif régulier qui assure l'homogénéisation du stent lorsque la taille des dalles tend uniformément vers zéro.

Nous concluons en donnant quelques perspectives concernant la recherche du premier *correcteur*, le terme suivant dans le développement asymptotique de la dose.

Mots clés : Sténose, resténose, athérosclérose, matériel bioactif, dose asymptotique, modélisation, stent enrobé, cardiologie interventionnelle, applications médicales, dallage, pattern, passoire de Neumann, optimisation de forme, homogénéisation, éclatement périodique, correcteur.

SUMMARY

The subject of this thesis is the modelling and design of coated stents, which are endoprotheses used in interventional cardiology to treat stenoses of blood vessels and prevent the restenosis that may result from the ripping of the endothelium when the stent is set in place.

The originality of this work is the use of tiling and pattern theory to obtain the equations of the asymptotic dose when the tiling is steadily getting smaller, while the area of the contact surface between the stent and the wall of the vessel remains constant. They are partial differential equations of the diffusion-transport type without jump across the interface between the lumen and the wall.

We treat not only the case of periodic stents but also the case of stents with only a tiling without regular motif that ensures the homogenization of the stent as the size of the tiles uniformly goes to zero.

We conclude by giving some perspectives on the problem of determining the first *corrector*, the next term in the asymptotic expansion of the dose.

Key words : Stenosis, restenosis, atherosclerosis, bioactive material, asymptotic dose, modelling, coated stent, interventional cardiology, medical applications, tiling, pattern, Neumann sieve, shape optimization, homogenization, periodic unfolding, corrector.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	iii
Summary	iv
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	viii
Remerciements	ix
Introduction	1
Chapitre 1. Dallages et patterns	5
1.1. Dallages et patterns dans le plan	6
1.1.1. Dallages	6
1.1.2. Patterns	11
1.1.3. Liens entre dallages et patterns	12
1.1.4. Dallage parallélogrammique d'un pattern périodique	15
1.2. Dallages et patterns sur le cylindre	17
1.2.1. Colonnes	17
Chapitre 2. Résultats d'homogénéisation sur la zone cible	21
2.1. Modélisation du stent par un pattern	21
2.2. Comportement asymptotique d'une suite de fonctions périodiques	23
2.2.1. Construction de la famille $\{f_\varepsilon\}$	24
2.2.1.1. Changement de coordonnées	24
2.2.1.2. Définition de la fonction périodique sur (z', y')	25

2.2.1.3. ...de retour aux coordonnées (z, y)	25
2.2.2. Quelques compléments et notations	26
2.2.3. Théorème de comportement asymptotique	27
2.3. Généralisation en absence de périodicité	33
Chapitre 3. Étude de la dose asymptotique	43
3.1. Description et modélisation du problème	43
3.1.1. Le domaine lumière/stent/paroi	43
3.1.2. La notion de dose	44
3.1.3. Vitesse du sang dans la lumière	45
3.1.4. Équation différentielle	47
3.1.5. Équation variationnelle	48
3.1.6. Espaces de solution	49
3.1.7. Existence	51
3.2. Stent et dose asymptotiques	51
Perspectives	56
Choix de la cellule de périodicité	57
Bibliographie	63
Annexe A. Analyse d'un pattern	A-i
Annexe B. Résolution de l'équation variationnelle	B-i

LISTE DES FIGURES

0.1	Différents types de stents.	1
0.2	Stent à anneaux.	3
0.3	Stent hélicoïdal et à motif hexagonal.	3
1.1	Un des nombreux remplissage du plan d'Escher.	6
1.2	Exemples de dallages.	8
1.3	Exemple d'un motif et d'un pattern associé.	11
1.4	Un pattern, son dallage de Dirichlet et la juxtaposition des deux.	14
1.5	Construction du dallage parallélogrammique d'un pattern périodique.	16
2.1	Zone cible ($\tilde{\Sigma}$).	21
2.2	Déroulement de $\tilde{\Sigma}$	22
2.3	Le parallélogramme de référence et les notations s'y rattachant.	23
2.4	Transformation T du plan.	25
2.5	Subdivision de la zone cible selon ses dalles.	26
2.6	Sommet inférieur gauche de P_{ij}	27
2.7	Stent hélicoïdal déroulé.	34
2.8	Deux raffinements possibles du stent hélicoïdal.	35
2.9	Stent hélicoïdal quadrillé.	41
2.10	Autre dallage possible pour le stent à motif hexagonal.	42
3.1	Coupe de la "vue infrarouge" pour deux stents à anneaux.	59
3.2	Une cellule associée à une dalle du stent.	61

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Correspondance de chaque symétrie de la colonne avec celle de son déroulement.....	20
-----	--	----

REMERCIEMENTS

Mes plus sincères remerciements à mon directeur de recherche, M. Michel Delfour, qui m'a proposé de travailler sur les stents. Ce projet, que j'ai trouvé franchement amusant, m'a fait toucher à plusieurs domaines des mathématiques, et l'accessibilité du sujet m'a permis d'apporter une ou deux petites idées originales. Je tiens à souligner la qualité et la constance du suivi que M. Delfour m'a donné, sans oublier le souci qu'il a su me transmettre d'établir avec soin les bases de tout problème de modélisation : ça facilite drôlement les mathématiques qui suivent !

Je remercie le CRSNG, le FQRNT, le DMS et M. Delfour pour les fonds octroyés durant mes études.

Un merci à MM. Martin Frankland et Mehran Kabraelian pour leur collaboration qui a mené à la construction du dallage 1.2(f), un contre-exemple au théorème 5.4.2 de Grünbaum et Shephard [6, p. 252].

Je tiens à exprimer ma gratitude à M. Francis Forget et aux co-administrateurs du réseau informatique du département pour leur soutien patient et diligent.

Finalement, j'aimerais adresser un clin d'œil à quelques personnes qui m'ont entouré durant mes études à la maîtrise : Éric Brunelle, Isabelle Laporte et Véronique Messier. Rien de ce que j'ai appris à vos côtés n'est consigné dans ce mémoire. Bien sûr. Ce sont des choses trop importantes.

INTRODUCTION

En 1984, un ingénieur électricien, Dominik M. Wiktor (Bellcore, Morristown), subit une chirurgie à cœur ouvert pour pallier une dissection de l'aorte. L'opération complétée, Wiktor se demanda si la même intervention pouvait être envisagée de façon différente, afin de diminuer le stress infligé à l'organisme. Le rétablissement du patient gagnerait sûrement en rapidité, et l'on pourrait espérer diminuer de façon significative la médication post-opératoire.

Wiktor se documenta sur l'angioplastie, et conçut une variété de *stents*, des endoprothèses de forme cylindrique destinées à être insérées à l'intérieur d'un vaisseau sanguin. Peu à peu, le stent devint une importante solution aux problèmes de reconstruction et de recanalisation des artères coronaires. Faits de tantalum, un métal malléable, non-corrosif et parfaitement visible lors d'une fluoroscopie, cette prothèse est très facile à manier et à mettre en place, une nécessité lors d'une intervention d'urgence.

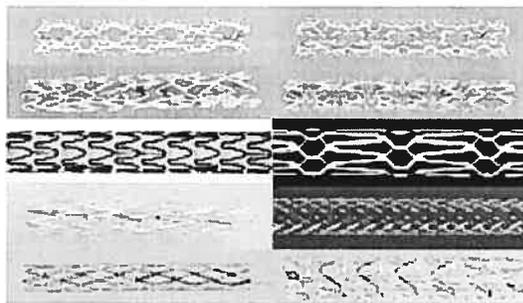


FIG. 0.1. Différents types de stents.

Cependant, la pose d'un stent ne s'avéra pas sans complications. En effet, une bonne proportion des patients développèrent une resténose dans le site soigné au cours

des six mois suivant l'intervention. On découvrit que cette resténose était due à une prolifération anormale de cellules lisses, due en majeure partie aux blessures de l'artère occasionnées par le placement et le déploiement du stent. Les recherches s'orientèrent donc vers différents agents médicaux dont on pourrait enrober la surface du stent et qui inhiberaient cette prolifération, le temps que la paroi du vaisseau se répare.

Cet agent médical trouvé, un autre défi pour la recherche se présente : quelle quantité de produit utiliser, d'une part, pour obtenir l'effet anti-prolifération recherché, mais d'autre part, pour ne pas dépasser le seuil de toxicité du produit ? Cette question entraîne immédiatement une autre qui lui est intimement liée, à savoir : quelle forme donner au stent pour obtenir la meilleure distribution possible du produit dans la paroi du vaisseau, avec cependant la contrainte de préserver le mieux possible les échanges biochimiques entre le sang et la paroi ?

Dans leur article, Delfour, Garon et Longo [4] ont choisi de travailler avec la notion de *dose* qui est directement reliée à la mortalité des cellules. Intuitivement, la distribution de la dose dans la zone ciblée de la paroi du vaisseau devrait être uniforme, d'où l'idée d'utiliser un stent "plein" ; cependant, un tel stent n'est pas acceptable, d'une part parce qu'il bloquerait complètement les échanges biochimiques entre le sang et la paroi du vaisseau, et d'autre part, parce qu'il ne serait pas assez flexible. L'idée naturelle qui vient est donc de concevoir un stent le plus finement distribué dont le rapport entre la surface de contact et celle de la zone cible reste fixé, disons, à 20%. Par exemple, si l'on travaille avec un stent en forme de ressort, on voudra diminuer la largeur de chaque spire tout en augmentant le nombre, pour obtenir un ressort à la fois très fin et très serré.

Afin de comprendre et de quantifier l'effet de l'agent médical, ils ont considéré un stent constitué d'un nombre fini d'anneaux sans épaisseur, de largeur identique et uniformément espacés (voir Figure 0.2). En diminuant la largeur de chaque anneau et en augmentant leur nombre, ils ont été amenés à introduire et à caractériser complètement le *stent asymptotique*, que l'on souhaite être un estimé intéressant du comportement de la dose dans le cas d'un stent à anneaux très fins.

Le but de ce mémoire est de généraliser leurs travaux à des stents de géométrie plus générales, afin de modéliser plus fidèlement les différents stents que l'on retrouve



FIG. 0.2. Stent à anneaux.

dans le monde médical. Entre autres formats, nous voulons être capable d'étendre leurs résultats aux deux stents présentés à la Figure 0.3.



FIG. 0.3. (a) Stent hélicoïdal. (b) Stent à motif hexagonal.

Ce que nous entendons par "géométrie plus générale" tient à une caractéristique commune que partagent tous les stents vus jusqu'ici (c'est-à-dire ceux des Figures 0.1 et 0.3) : ils sont tous construits à partir d'un motif que l'on aurait reproduit périodiquement sur l'interface cylindrique paroi/lumière (la lumière étant la zone où voyage le sang).

Ce sera là le point de départ de notre recherche. Dans un premier chapitre, nous allons explorer quelques notions de la vaste théorie du remplissage périodique du plan ; ceci fait, nous verrons comment adapter ces notions pour passer du plan à une colonne¹. Un second chapitre traitera d'abord de la modélisation du *stent périodique*, fixera les notations qui y sont reliées, et un premier résultat d'homogénéisation sera montré. Une généralisation de ce dernier résultat sera également proposée en fin de chapitre pour

¹Le terme *colonne* fait référence aux colonnes décorées de motifs que l'on retrouve en architecture, en particulier dans certaines mosquées.

une classe encore plus large de stents qui ne sont pas strictement périodiques. Finalement, un dernier chapitre donnera les équations pour la dose asymptotique. Nous donnerons en conclusion quelques perspectives concernant recherche du premier *correcteur*, au sens de la théorie de l'homogénéisation.

Chapitre 1

DALLAGES ET PATTERNS

Le remplissage périodique du plan, du point de vue de l'artiste ou de l'architecte, est un savoir-faire qui remonte aux débuts de la civilisation. Dès que l'homme a voulu utiliser des pierres pour faire un plancher, par exemple, il a dû réfléchir à la façon de s'y prendre pour les choisir et les disposer de telle façon que son plancher n'ait ni de trou, ni de pierre empilée sur une autre. Et si le plan a occupé les esprits de ceux qui concevaient planchers, murs, tapis, raquettes, filets de pêche et autres, d'autres géométries ont retenu l'attention de ceux qui voulaient décorer des colonnes d'un édifice religieux, tresser des paniers de formes variées ou construire un igloo.

Du point de vue mathématique, cependant, le remplissage périodique du plan est une théorie assez récente. C'est un fait assez curieux, puisqu'il est frappant, pour qui s'y attarde un tant soit peu, de voir les ressemblances entre les différentes mosaïques, toutes origines et époques confondues ; il y a là un indice évident que le remplissage périodique du plan obéit à certaines règles, et l'on s'étonne de constater que l'esprit scientifique ait tardé à y mettre ordre et systématisation. D'ailleurs, l'un des premiers à être l'objet de cet étonnement fut non pas un mathématicien, mais l'artiste hollandais Maurits Cornelis Escher (1898-1972), que l'on connaît entre autres pour ses dessins "impossibles"¹. Toute sa vie, il fut hanté par cette obsession de trouver et d'expérimenter de nouveaux motifs pour remplir sa feuille de dessin, et de découvrir les similitudes

¹Escher s'est amusé avec les lois de la perspective pour produire des dessins représentant des scènes de l'espace tout à fait impossibles, telle une chute d'eau perpétuelle.

de symétrie entre ses différents travaux. En ce qui concerne les mathématiciens, il faudra attendre les besoins de la cristallographie pour démarrer l'étude des groupes de symétrie, et incidemment, celle du remplissage périodique du plan.

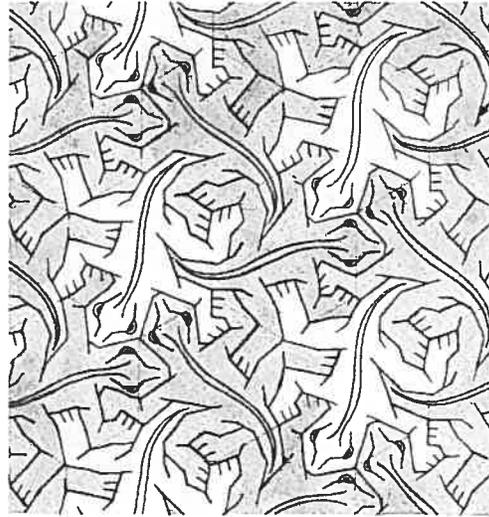


FIG. 1.1. Un des nombreux remplissage du plan d'Escher.

Encore aujourd'hui, de nombreux problèmes ouverts subsistent dans ce domaine, et le néophyte non averti peut aisément se perdre dans une littérature incomplète et décousue. Un effort remarquable et reconnu de systématisation a été fait par Grünbaum et Shephard [6] ; cet ouvrage nous servira de point de départ dans notre exploration pour trouver les résultats dont nous aurons besoin par la suite.

1.1. DALLAGES ET PATTERNS DANS LE PLAN

1.1.1. Dallages

Nous n'allons retenir de la très vaste théorie du dallage du plan qu'un certain nombre de notions qui présentent un intérêt pour notre sujet ; pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Grünbaum et Shephard [6].

Définition 1.1 (Dallage). Un *dallage* \mathcal{D} du plan est une famille dénombrable d'ensembles fermés

$$\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

qui couvrent le plan sans se chevaucher, sans laisser de trou, c'est-à-dire

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i = \mathbb{R}^2, \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \emptyset.$$

Les ensembles D_i sont appelés les *dalles* ou les *tuiles* du dallage.

Un dallage est donc un concept initialement très large, voire potentiellement anarchique. Nous allons restreindre notre attention aux dallages dits *normaux*.

Définition 1.2 (Dallage normal). Un dallage \mathcal{D} est dit *normal* s'il vérifie les trois caractéristiques suivantes :

- chaque tuile de \mathcal{D} est homéomorphe à un disque ;
- l'intersection de deux tuiles est un ensemble connexe ;
- les tuiles sont uniformément bornées.

La Figure 1.2 donne quelques exemples pour illustrer ces différentes notions.

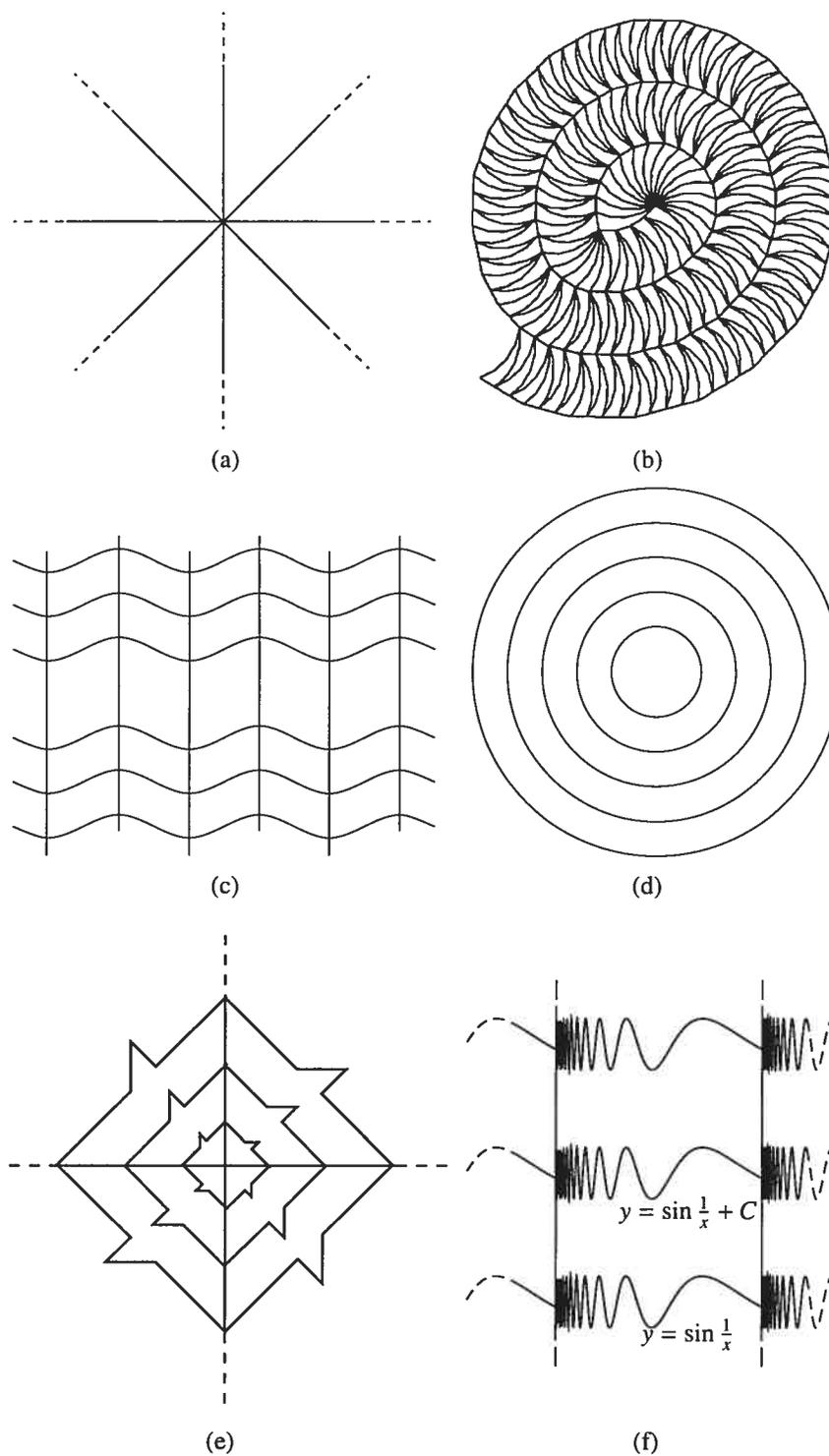


FIG. 1.2. Exemples de dallages. Seuls les dallages b) et c) sont normaux ; en a), d) et e), les tuiles ne sont pas uniformément bornées, tandis qu'en f), elles ne sont pas homéomorphes au disque unité (voir annexe A). Le dallage b) est tiré de Grünbaum et Shephard [6, p.22].

Un aspect intéressant et important des dallages est l'étude des différentes symétries qu'ils présentent. Afin de préciser ce que nous entendons par une symétrie d'un dallage, on commence par rappeler la définition d'une transformation affine du plan.

Définition 1.3 (Transformation affine du plan). Une *transformation du plan* est une application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (x', y') \in \mathbb{R}^2$ bijective ; si de plus est de la forme

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + p \\ y' &= cx + dy + q \end{aligned}, \quad \text{où } a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R},$$

alors elle est appelée transformation *affine* du plan.

Définition 1.4 (Symétrie d'un dallage). Une transformation affine du plan σ est appelée une *symétrie* du dallage \mathcal{D} si $\sigma\mathcal{D} = \mathcal{D}$.

L'identité est bien entendu une symétrie pour tout dallage. On peut également s'imaginer sans difficulté des dallages pour lesquels une (ou plusieurs) des transformations élémentaires du plan, c'est-à-dire les rotations, les translations, les réflexions ainsi que toutes leurs composées, est une symétrie.

On pourrait croire qu'à ces transformations élémentaires s'ajoutent un nombre inimaginable de transformations dont on ne possède pas l'intuition et qui peuvent être une symétrie pour un dallage donné. Ce n'est pourtant pas le cas.

Proposition 1.5. *Toute symétrie d'un dallage donné est l'une des quatre transformations suivantes :*

- *une rotation à partir d'un point du plan, dit centre de rotation ;*
- *une translation dans une direction et sur une distance données ;*
- *une réflexion par rapport à un axe donné, dit droite de réflexion ;*
- *une réflexion-glissée, c'est-à-dire une réflexion par une droite L , suivie d'une translation dans une direction parallèle à L .*

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, l'identité est toujours une symétrie pour un dallage donné. La composition de deux symétries est encore une symétrie, toute symétrie admet une inverse (par définition d'une transformation affine) qui est encore une symétrie, et on voit facilement que la composition de symétries est associative. On

peut donc associer à tout dallage son *groupe de symétrie*, ce qui constitue une première façon de classifier l'immense famille des dallages. Dans cette optique de classification, le théorème suivant est central :

Théorème 1.6. *À un isomorphisme près, le groupe de symétrie d'un dallage normal est l'un des suivants :*

- e , le groupe trivial ;
- cn , le groupe cyclique d'ordre n ($n \geq 2$)² ;
- dn , le groupe diédral d'ordre $2n$ ($n \geq 1$)³ ;
- un des 7 groupes de frises⁴ ;
- un des 17 groupes de cristallographie⁵.

REMARQUE 1.7. On ne trouve aucune translation dans les groupes e , cn et dn . Dans un groupe de frise, toutes les translations sont dans la même direction, tandis que dans un groupe de cristallographie, on peut en trouver au moins deux de directions différentes.

Dans le cas particulier où le groupe de symétrie d'un dallage est l'un des groupes de cristallographie, on dit que le dallage est *périodique*.

Reconsidérons les dallages de la Figure 1.2 à la lumière de ce théorème. Le dallage en a), bien qu'il ne soit pas normal, présente un groupe de symétrie de type $d8$. Celui en b) n'admet que l'identité comme symétrie, et donc son groupe est le groupe trivial $\{e\}$. En c), on voit facilement une périodicité selon la direction horizontale, mais la rangée de dalles plus hautes au centre empêche toute périodicité dans une autre direction ; ce dallage admet donc un des groupes de frises comme groupe de symétrie. Le dallage en d) admet une infinité de symétries : toute rotation autour de l'origine et toute symétrie par rapport à un axe passant par l'origine envoie le dallage sur lui-même. Son groupe

²La représentation classique de ce groupe est $\langle r \mid r^n = 1 \rangle$. Géométriquement, on conçoit le générateur r comme une rotation antihoraire du plan autour de l'origine d'un angle de $2\pi/n$; il est clair qu'en composant cette rotation n fois, on retrouve l'identité, d'où $r^n = 1$.

³Pour $n \geq 3$, le groupe diédral d'ordre $2n$ est le groupe de symétrie du polygone régulier à n sommets centré à l'origine ; une représentation courante est $\langle r, s \mid r^n = s^2 = 1, rs = sr^{-1} \rangle$. r est ici aussi la rotation antihoraire autour de l'origine d'un angle de $2\pi/n$, tandis que s est la symétrie par rapport à la droite passant par l'origine et un sommet fixé. La composition de deux symétries ramène les choses dans l'état initial, d'où $s^2 = 1$; quant à l'autre relation, $rs = sr^{-1}$, quelques instants de réflexion suffisent pour en montrer la justesse. On déduit de la représentation générale les groupes $d1$ et $d2$.

⁴On trouvera une description de ces groupes dans Grünbaum et Shephard [6, p. 39].

⁵Idem, [6, pp. 40-42]. Voir également l'excellent article de Schattschneider [13] sur le sujet.

n'est donc pas dans la liste ci-dessus, ce qui ne contredit pas le théorème puisque nous avons déjà remarqué que ce dallage n'était pas normal. En e), nous avons un exemple d'un groupe de symétrie cyclique (en l'occurrence, c_4), et un groupe de cristallographie en f).

1.1.2. Patterns

Nous avons introduit le concept du dallage du plan parce que les stents que nous allons considérer vont présenter une structure périodique dans leur conception. Cependant, un dallage n'est à proprement parler qu'une subdivision, qu'un morcellement du plan en plusieurs sous-ensembles, alors qu'un stent ressemble davantage à un motif que l'on aurait copié de façon systématique sur un cylindre. C'est pourquoi nous introduisons ici le concept de *pattern*.

Définition 1.8 (Pattern). Soit M , un sous-ensemble non-vide du plan. Un *pattern* à un motif M est une famille non-vide $\mathcal{P} = \{M_i \mid i \in I\}$ de sous-ensembles du plan indicés par les éléments de I , telle que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) les ensembles M_i sont deux à deux disjoints ;
- (2) $\forall i, M_i$ est congru⁶ à M ; M_i est appelé *copie* de M ;
- (3) pour chaque paire (M_i, M_j) de copies du motif, il existe une transformation affine du plan σ telle que $\sigma\mathcal{P} = \mathcal{P}$ et $\sigma M_i = M_j$.

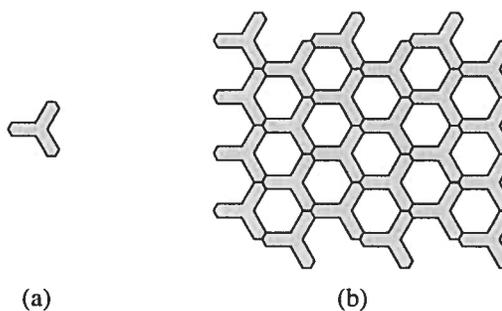


FIG. 1.3. Exemple d'un motif (a) et d'un pattern associé (b).

Ici aussi, cette définition est un peu large pour nos besoins. Introduisons la classe des patterns dits *discrets*.

⁶Deux sous-ensembles de \mathbb{R}^2 sont *congrus* s'il existe une symétrie du plan qui amène l'un sur l'autre.

Définition 1.9 (Pattern discret). Soit \mathcal{P} , un pattern de motif M . \mathcal{P} est *discret* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- le motif M est un sous-ensemble borné et connexe de \mathbb{R}^2 ;
- $\forall i$, il existe E_i , un ouvert du plan, qui contient la copie M_i sans en intersecter une autre, c'est-à-dire que $\forall j \neq i, E_i \cap M_j = \emptyset$.

Si, en plus, \mathcal{P} contient au moins deux copies de M , alors le pattern sera dit *non-trivial*.

REMARQUE 1.10. D'après cette définition, le motif de la Figure 1.3(a) engendre un pattern discret non-trivial si on n'en prend que l'intérieur ; à ce moment, pour les besoins de vérification, on pourrait prendre $E_i = M_i$, et toutes les conditions de la définition 1.9 seront vérifiées.

De façon tout à fait analogue, une symétrie d'un pattern est une transformation affine du plan qui laisse le pattern inchangé ; on peut également parler de groupes de symétrie d'un pattern. On serait tenté de croire que si les restrictions imposées dans la définition d'un pattern discret ont été bien choisies, il existerait un lien étroit entre les groupes de symétrie des dallages et ceux des patterns discrets. De fait, le théorème suivant confirme cette intuition.

Théorème 1.11. *La liste des groupes de symétrie possibles d'un pattern discret non-trivial coïncide avec la liste de la théorème 1.6.*

De façon analogue aux dallages, un pattern dont le groupe de symétrie est l'un des groupes de cristallographie est dit *pattern périodique*.

1.1.3. Liens entre dallages et patterns

Nous approfondissons dans cette section quelques connexions entre les concepts (tout de même assez voisins) de dallage et de pattern.

Définition 1.12 (Dallage isohédral). Un dallage $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots\}$, possiblement non normal, est dit *isohédral* si pour tout choix de tuiles D_i, D_j , il existe une symétrie σ de \mathcal{D} telle que $\sigma(D_i) = D_j$.

Cette propriété calque la condition 3 de la définition d'un pattern (définition 1.8). Aussi la proposition suivante ne surprend pas.

Proposition 1.13. *L'intérieur des tuiles d'un dallage normal et isohédral forme un pattern discret dont le motif est l'intérieur d'une tuile. Le motif est homéomorphe au disque ouvert.*

La question inverse est plus intéressante pour notre sujet : un pattern discret étant donné, existe-t-il un dallage isohédral dont chaque tuile contient exactement une copie du motif du pattern ? Si l'on enlève le mot "isohédral", la réponse est évidemment oui : puisque chaque copie est supposée connexe et disjointe de toute autre copie du pattern, on peut découper le plan de façon à les isoler les unes des autres. Pour avoir un dallage isohédral, nous introduisons le concept de dallage de Dirichlet d'un pattern.

Soit $\mathcal{P} = \{M_i \mid i \in I\}$, un pattern discret non-trivial. On associe à chaque copie M_i du motif le sous-ensemble du plan

$$D(M_i) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_{M_i}(x) \leq d_{M_j}(x), \forall j \neq i\},$$

où

$$d_M(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf\{\|y - x\|_{\mathbb{R}^2} \mid y \in M\}.$$

L'ensemble $\mathcal{D}(\mathcal{P}) \stackrel{\text{déf}}{=} \{D(M_i) \mid i \in I\}$ est un dallage du plan, appelé *le dallage de Dirichlet associé au pattern \mathcal{P}* . Il convient de remarquer ici que ce dallage n'est pas nécessairement normal ; par exemple, si le pattern \mathcal{P} est constitué d'un nombre fini de copies de son motif, son dallage de Dirichlet contiendra au moins une tuile non bornée.

Par contre, ce dallage est nécessairement isohédral, puisque pour tout choix de $M_i, M_j \in \mathcal{P}$, la symétrie du pattern σ_{ij} qui amène M_i sur M_j ⁷ amène également $D(M_i)$ sur $D(M_j)$; on doit donc avoir $\sigma_{ij}(D(M_i)) = D(M_j)$. D'où l'on peut répondre par l'affirmative à notre question.

On trouve dans Grünbaum et Shephard [6, p. 252, th. 5.4.2] la proposition suivante.

⁷Cette symétrie est donnée dans le point 3 de la définition de pattern, déf. 1.8.

Proposition 1.14. *Le dallage de Dirichlet de chaque pattern discret périodique⁸ est un dallage normal et isohédral dont chaque tuile contient exactement une copie du motif du pattern.*

REMARQUE 1.15. On ne trouve pas le mot "normal" dans l'énoncé de Grünbaum et Shephard. Nous l'avons ajouté parce que nous avons défini le concept de dallage isohédral (définition 1.12) sur des dallages possiblement non normaux, alors que pour Grünbaum et Shephard, "an isohedral tiling is a *normal tiling* whose symmetry group acts transitively on the tiles"⁹ (italiques ajoutés).

Or, nous vérifions dans l'annexe A que le pattern construit à partir de l'intérieur des dalles de la Figure 1.2(f) contredit cette proposition. Le fait que le pattern soit périodique donne un dallage de Dirichlet associé dont les tuiles sont uniformément bornées, ce qui est l'une des conditions pour avoir un dallage normal. Mais en général, les tuiles ne sont pas homéomorphes au disque unité.

Nous terminons cette sous-section en remarquant que les groupes de symétrie du pattern \mathcal{P} et de son dallage de Dirichlet $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ ne coïncident pas nécessairement. Toute symétrie de \mathcal{P} est une symétrie de $\mathcal{D}(\mathcal{P})$, mais la réciproque n'est en général pas vérifiée. La Figure 1.4 illustre cette situation : on y remarquera, par exemple, que $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ admet une translation horizontale d'une unité comme symétrie, ce que \mathcal{P} n'admet pas.

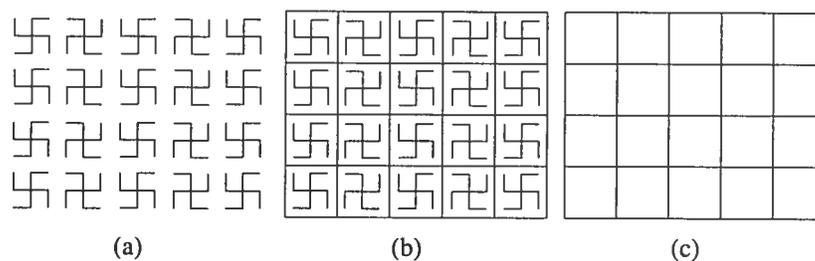


FIG. 1.4. Un pattern (a), son dallage de Dirichlet (c) et la juxtaposition des deux (b). Exemple tiré de Grünbaum et Shephard [6, p.251].

⁸Rappelons qu'un pattern est dit *périodique* si son groupe de symétrie est l'un des groupe de cristallographie, c'est-à-dire un groupe qui contient au moins deux translations non-colinéaires.

⁹Grünbaum et Shephard [6], p. 250.

1.1.4. Dallage parallélogrammique d'un pattern périodique

Les patterns qui vont particulièrement nous intéresser sont les patterns périodiques. À de tels patterns, on peut associer un dallage qui le subdivise en dalles parallélogrammiques de telle façon que chacune d'entre elles contienne une portion identique du pattern. Ce dallage étant un élément clé dans l'analyse du pattern, nous montrons ici en détail sa construction.

Soient \mathcal{P} , un tel pattern périodique, et \vec{a} , \vec{b} , avec $\vec{a} \# \vec{b}$, des vecteurs induisant deux translations non parallèles qui transportent \mathcal{P} sur lui-même. Supposons que \vec{a} et \vec{b} sont les plus petites translations dans leur direction respective qui soient des symétries de \mathcal{P} , c'est-à-dire que

$$\forall n, n' \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n} \vec{a} \text{ et } \frac{1}{n'} \vec{b} \text{ n'induisent pas une symétrie de } \mathcal{P}.$$

En choisissant un point du plan, disons \mathcal{O} (l'origine), on peut construire un *réseau* de points "équivalents", c'est-à-dire l'ensemble des points que l'on obtient en translatant l'origine par un vecteur $n \vec{a} + m \vec{b}$, où $m, n \in \mathbb{Z}$.

Notons A et B , les points obtenus par translation de l'origine selon les vecteurs \vec{a} et \vec{b} , respectivement. Il est possible que le parallélogramme ayant comme sommets \mathcal{O}, A et B contienne d'autres points du réseau ; dans cette éventualité, on redéfinit B comme étant le point parmi ceux-ci le plus proche du côté $\overline{\mathcal{O}A}$. On forme ainsi le *parallélogramme générateur*, ou encore la *maille parallélogrammique* du pattern \mathcal{P} . C'est la plus petite sous-unité parallélogrammique qui engendre \mathcal{P} par translations, c'est-à-dire qu'en la recopiant indéfiniment dans les directions \vec{a} et \vec{b} (le vecteur \vec{b} a été redéfini avec le nouveau point B), on reconstruit le pattern périodique. De cette idée naît le concept de *dallage parallélogrammique*.

Définition 1.16 (Dallage parallélogrammique). Le dallage parallélogrammique associé au pattern \mathcal{P} est l'ensemble constitué du parallélogramme générateur ainsi que toutes ses translations par les vecteurs $n \vec{a} + m \vec{b}$, où $m, n \in \mathbb{Z}$.

La Figure 1.5 illustre la construction du dallage parallélogrammique du pattern de la Figure 1.3(b).

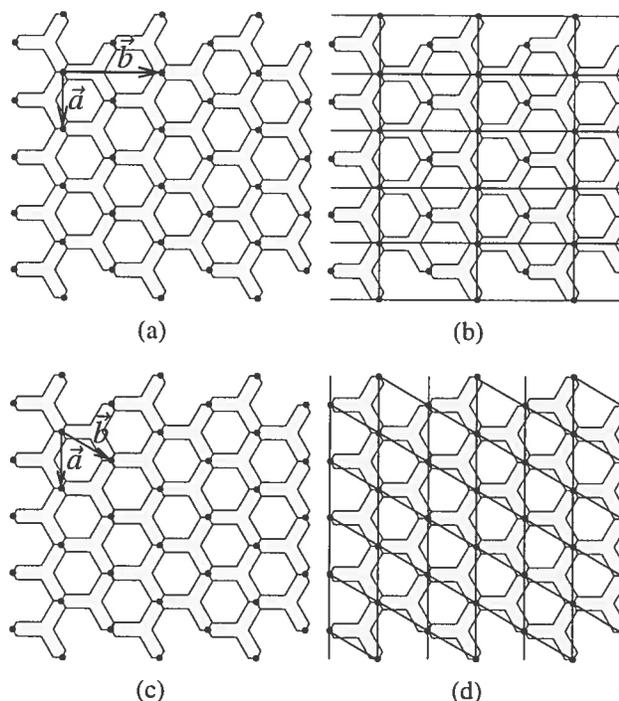


FIG. 1.5. Construction du dallage parallélogrammique du pattern périodique de la Figure 1.3(b). En a), on fait un premier choix de vecteurs \vec{a} et \vec{b} et on identifie le réseau de points équivalents. On voit en b) que l'on peut faire mieux, puisqu'il y a un point du réseau dans chaque dalle ; on corrige le tir en c), qui aboutit à un résultat nettement plus satisfaisant en d).

REMARQUE 1.17. À la différence du dallage de Dirichlet, les tuiles d'un dallage parallélogrammique ne contiennent pas nécessairement une copie entière du motif, c'est-à-dire une copie non brisée. La Figure 1.5(d) illustre cette possibilité. Cependant, chaque tuile contiendra toujours tous les morceaux nécessaires à la reconstruction d'un nombre entier de copies complètes du motif.

Le parallélogramme générateur n'est pas unique : le choix du point initial à partir duquel on construit le réseau de points ainsi que le choix de \vec{a} et \vec{b} induisent différents parallélogrammes générateurs. Bravais [1, p. 19] identifie toutefois une caractéristique invariante de tous ces parallélogrammes générateurs.

Théorème 1.18. *Un réseau de points équivalents d'un pattern périodique étant donné, l'aire du parallélogramme générateur est constante, quelle que soit la manière dont il est construit. De plus, on peut toujours en choisir un tel que les points \mathcal{O} , A et B (en*

reprenant les mêmes notations que ci-dessus) forment un triangle aux angles intérieurs aigus, avec possiblement un angle droit.

1.2. DALLAGES ET PATTERNS SUR LE CYLINDRE

L'étude que nous avons faite sur les dallages et les patterns du plan peut se transposer sur une colonne¹⁰. C'est ce que nous allons faire ici ; une fois ce travail fait, la définition du stent périodique deviendra tout à fait naturelle.

1.2.1. Colonnes

On peut concevoir une colonne de rayon r_0 comme une bande infinie du plan de largeur $2\pi r_0$ que l'on aurait enroulée de façon naturelle en identifiant les deux bords de la bande ; si le plan portait initialement un dallage (resp. un pattern), on obtiendra par cet enroulement un dallage (resp. un pattern) sur la colonne. Cependant, on se doute déjà que quelques précautions doivent être prises concernant l'identification des bords de la bande.

NOTATION 1.19. Une colonne arbitraire sera notée \mathcal{C} ; on lui donnera un rayon r_0 et son axe reposera sur l'axe x_3 du référentiel (x_1, x_2, x_3) . Nous allons également utiliser le référentiel cylindrique (ϕ, x_3) , où

$$x_1 = r_0 \cos \phi$$

$$x_2 = r_0 \sin \phi ,$$

qui décrit lui aussi \mathcal{C} .

Dans les définitions qui vont suivre, nous allons exploiter le fait qu'un point du cylindre dans le référentiel (x_1, x_2, x_3) est transporté dans le système (ϕ, x_3) sur une infinité de points, étant donné la périodicité des fonctions sinusoïdales.

¹⁰Le terme *colonne* sera utilisé pour désigner un cylindre de longueur infinie, alors qu'un *cylindre* aura une longueur finie.

Définition 1.20 (Dallages/Patterns sur une colonne).

- (1) Une famille de sous-ensembles de \mathcal{C} , considérés dans le référentiel (x_1, x_2, x_3) , est un *dallage (normal) (isohédral) (périodique) de la colonne* \mathcal{C} si cette famille, une fois transportée dans le plan (ϕ, x_3) , est un dallage (normal) (isohédral) (périodique) du plan au sens de la définition 1.1 (1.2) (1.12) (voir section 1.1.1, p. 10). Ce dallage du plan (ϕ, x_3) sera appelé le *déroulement* du dallage de la colonne.

- (2) Soit M un sous-ensemble non-vide de \mathcal{C} considéré dans le référentiel (ϕ, x_3) . Une famille de sous-ensembles de \mathcal{C} , considérés dans le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) , est un *pattern (discret) (non-trivial) (périodique) de la colonne* \mathcal{C} à un motif M si cette famille, une fois transportée dans le plan (ϕ, x_3) , y est un pattern (discret) (non-trivial) (périodique) au sens de la définition 1.8 (1.9) (1.9) (Voir section 1.1.2, p. 12). Ce pattern dans le plan (ϕ, x_3) sera appelé le *déroulement* du pattern de la colonne.

On étend le concept de transformation affine dans \mathbb{R}^2 (définition 1.3) à celui dans \mathbb{R}^3 sans difficulté, ce qui permet de définir une symétrie d'un dallage ou d'un pattern d'une colonne comme étant une transformation affine de \mathbb{R}^3 qui laisse inchangé ce dallage ou ce pattern.

Dès lors surgit la même question que nous avons posée pour les dallages, puis pour les patterns : que sont les groupes de symétrie possibles d'une colonne donnée ? Quelques observations simples donnent une bonne intuition sur la réponse à cette question.

- À chaque symétrie de la colonne correspond une symétrie de son déroulement ; le Tableau 1.1 établit la concordance entre les deux. On en déduit donc que tout groupe de symétrie d'une colonne est isomorphe à l'un des groupes énumérés dans la Proposition 1.6.
- Puisque le déroulement contient toujours une translation de longueur $2\pi r_0$ dans la direction de l'axe des ϕ due au fait qu'une rotation de 2π de la colonne autour de son axe la ramène nécessairement sur elle-même, on peut écarter les groupes cn et dn comme candidats potentiels.

- Certaines symétries possibles du développement n'ont pas de correspondance au niveau de la colonne. On remarque, par exemple, qu'il ne peut y avoir que deux type de réflexion qui transportent une colonne sur elle-même : elle doit s'effectuer ou bien selon un plan normal à l'axe du cylindre, ou bien selon un plan qui contient cet axe. Dans le déroulement du cylindre, ces réflexions correspondent à des réflexions selon des droites parallèles ou bien à l'axe des ϕ , ou bien à l'axe des x_3 , respectivement. Or, il n'est pas difficile d'imaginer des dallages ou des patterns dans le plan qui admettent des réflexions selon des axes différents.

On en conclut donc que l'ensemble des groupes de symétrie possibles d'un cylindre est un sous-ensemble strict des groupes de frises et de cristallographie. Le théorème suivant (tiré de Roman [12]) confirme cette intuition.

Théorème 1.21. *Les groupes de symétrie possibles pour une colonne sont au nombre de 17. Parmi ces groupes, il y a $\{e\}$, le groupe trivial, les 7 groupes de frise et 9 groupes¹¹ cristallographiques parmi les 17 annoncés au théorème 1.6.*

On termine cette section par l'extension des concepts reliés aux patterns périodiques sur une colonne. Par abus de langage, on parle souvent d'une *colonne périodique*.

REMARQUE 1.22. Pour qu'une colonne soit périodique, il faut et il suffit qu'elle ait parmi ses symétries une rototranslation (θ, \vec{t}) , avec $0 \leq \theta < 2\pi$ et $\vec{t} \neq \vec{0}$.

Il est également possible de construire sur une telle colonne son dallage parallélogrammique, qui n'est rien d'autre que le dallage parallélogrammique de son développement transporté sur la colonne. Mais ainsi que nous l'avons déjà précisé (voir la construction du dallage parallélogrammique, section 1.1.4), ce dallage parallélogrammique n'est pas unique. Pour ce qui vient, il sera utile de choisir le vecteur \vec{a} comme étant la plus petite translation dans la direction de l'axe ϕ ; la symétrie de la colonne (θ, \vec{t}) correspondant au vecteur \vec{b} sera alors une *rototranslation minimale*, en ce sens que toute rototranslation (θ', \vec{t}') avec $\|\vec{t}'\| < \|\vec{t}\|$ ne sera pas une symétrie de la colonne.

¹¹On en trouvera la liste dans Roman [12, p.301]. À noter que les notations utilisées par cet auteur ne sont pas les notations internationales ; on trouvera une table de concordance dans Schattschneider [13, p.449].

Symétrie de la colonne	Symétrie du développement de la colonne
Translation parallèle à l'axe de la colonne	Translation parallèle à l'axe x_3
Rotation autour de l'axe de la colonne	Translation parallèle à l'axe ϕ
Rototranslation autour de l'axe de la colonne	Translation dans une autre direction que celles des axes
Réflexion (ou réflexion suivie d'une rotation autour de l'axe de la colonne) par rapport à un plan normal à l'axe de la colonne	Réflexion (ou réflexion-glissée) par rapport à l'axe ϕ
Réflexion (ou réflexion-glissée) par rapport à un plan contenant l'axe de la colonne	Réflexion (ou réflexion-glissée) par rapport à l'axe x_3
Rotation de 180° autour d'une droite normale à l'axe de la colonne	Rotation de 180° autour d'un centre de rotation donné

Tab. 1.1. Correspondance de chaque symétrie de la colonne avec celle de son déroulement. Tiré de Roman [12, p.302].

Chapitre 2

RÉSULTATS D'HOMOGENÉISATION SUR LA ZONE CIBLE

2.1. MODÉLISATION DU STENT PAR UN PATTERN

Le but de cette section est de définir le *stent périodique* et de fixer toutes les notations (sinon un bon nombre !) qui s'y rattachent et qui vont être utilisées dans ce qui va suivre.

Définition 2.1 (Stent périodique). Soit une colonne périodique $\mathcal{C} = \{M_i \mid i \in I\}$ de motif M , de rayon R et admettant une rototranslation minimale (θ, \vec{t}) . Un stent périodique de motif M est la famille

$$\{M_i \cap \tilde{\Sigma} \mid i \in I\},$$

où $\tilde{\Sigma}$ est une section cylindrique droite de la colonne de longueur finie, mais strictement plus grande que $\|\vec{t}\|$.

NOTATION 2.2. La section cylindrique $\tilde{\Sigma}$ de la dernière définition sera appelée *zone cible*, et sa longueur sera notée L_s . On a donc $0 < \|\vec{t}\| < L_s < \infty$.

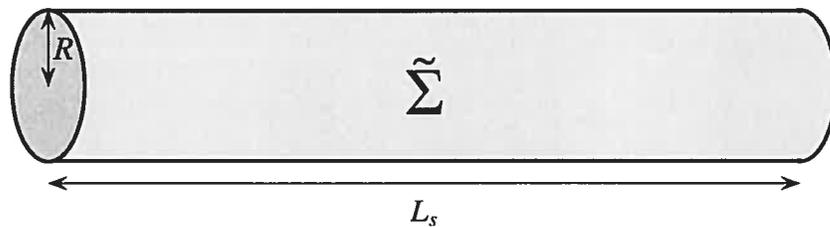


FIG. 2.1. Zone cible ($\tilde{\Sigma}$).

REMARQUE 2.3. On aura compris que les ensembles $M_i \cap \tilde{\Sigma}$ modélisent la surface sans épaisseur occupée par le matériau du stent. À ce niveau, la définition ci-dessus est purement mathématique, en ce sens qu'elle laisse imprécisés un nombre important de paramètres mécaniques essentiels. Par exemple, un ensemble de cercles disjoints de petit rayon, disposés de façon périodique sur un cylindre, est un stent périodique au sens de la dernière définition ; cependant, il ne pourra visiblement pas servir de maquette pour un véritable stent !

Nous allons maintenant dérouler la zone cible $\tilde{\Sigma}$; il y a plusieurs façons de le faire. Choisissons un axe de coupe sur $\tilde{\Sigma}$, disons une droite parallèle à l'axe du cylindre, et déroulons la surface sur le plan ; on obtient alors un fort joli rectangle (Figure 2.2(a)).

L'inconvénient d'un tel découpage est que l'on n'a tenu compte en rien de la périodicité de notre stent, ce qui va éventuellement compliquer l'analyse plus tard. On le voit d'ailleurs dans la Figure 2.2(a) : on a découpé au-travers les dalles du dallage parallélogrammique. Une meilleure idée (Figure 2.2(b)) serait donc de recoller $\tilde{\Sigma}$ et de la redécouper le long des dalles, c'est-à-dire le long de l'hélice passant par l'origine et déterminée par le vecteur \vec{b} (p. 19 pour la définition de \vec{a} et \vec{b}).

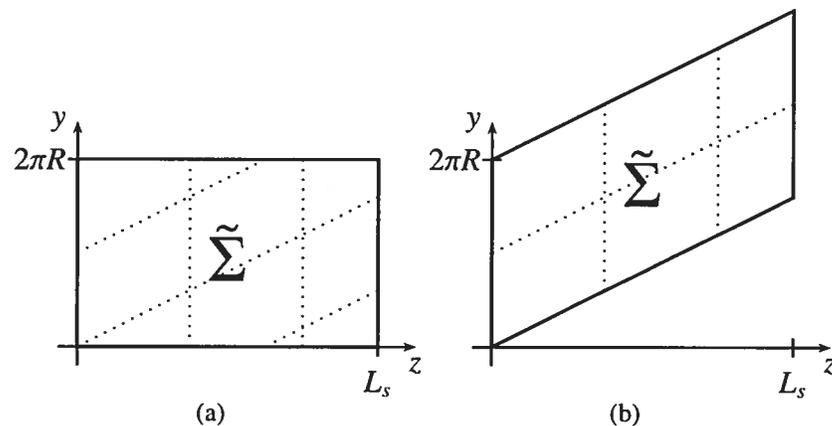


FIG. 2.2. Déroulement de $\tilde{\Sigma}$. Les lignes en pointillé représentent les frontières des tuiles du dallage parallélogrammique de la colonne de laquelle est issu le stent.

NOTATION 2.4. Le parallélogramme générateur du dallage parallélogrammique de notre stent jouera un rôle déterminant dans l'analyse qui va suivre ; c'est pourquoi nous allons l'extraire du stent, le normaliser pour lui donner une aire unité et le placer dans un référentiel sans dimension. La Figure 2.3 fixe les différentes notations qui seront

utilisées : on y voit que l'angle θ et la longueur ℓ définissent ce parallélogramme P d'aire unité. En fait de terminologie, on utilisera souvent l'appellation plus concise *parallélogramme de référence*.

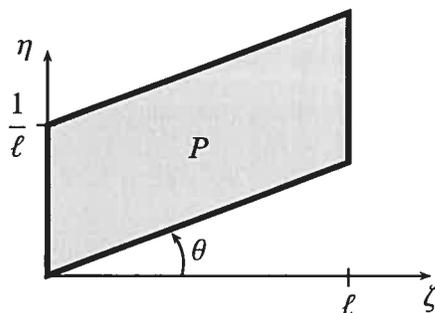


FIG. 2.3. Le parallélogramme de référence et les notations s'y rattachant.

NOTATION 2.5. Il sera utile d'avoir un repère permettant d'identifier chacune des dalles de la colonne qui recouvrent $\tilde{\Sigma}$. Nous allons donc noter par P_{ij} la dalle ayant comme sommet inférieur gauche l'origine translatée par le vecteur $i\vec{b} + j\vec{a}$ ($i, j \in \mathbb{N}$).

REMARQUE 2.6. En général, les dalles P_{Mj} , où M est le plus grand indice i admissible, ne sont pas incluses complètement dans $\tilde{\Sigma}$, étant donné que la colonne de laquelle est issu notre stent a pu être "coupée" d'une longueur qui ne coïncide pas avec un multiple entier de $\|\vec{r}\|$, ($\|\vec{r}\|$ est, rappelons-le, la composante de translation de la rototranslation minimale de la colonne).

Par contre, s'il est possible d'avoir un nombre non-entier de dalles dans la direction du vecteur \vec{b} , il n'en va pas de même dans la direction du vecteur \vec{a} . En effet, une rotation du stent de 2π autour de son axe est toujours une symétrie du stent, et donc la translation correspondante de $2\pi R$ du déroulement doit être la composition d'un nombre entier de translations induites par \vec{a} .

2.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE SUITE DE FONCTIONS PÉRIODIQUES

Nous allons maintenant démontrer un résultat d'homogénéisation sur la zone cible. Donnons-en l'idée générale avant de formaliser les choses.

Supposons que l'on se donne une fonction \hat{f} définie sur P , le parallélogramme de référence de notre stent. Par un changement de variable, on peut sans difficulté

transporter cette fonction sur chacune des dalles¹ de la zone cible $\tilde{\Sigma}$, et ainsi y construire par superposition la fonction périodique f_1 , ayant comme cellules de périodicité les dalles de $\tilde{\Sigma}$.

Imaginons maintenant que par un changement d'échelle, la dimension de chaque dalle soit réduite par un facteur ε donné (le nombre de tuile est donc augmenté pour couvrir tout $\tilde{\Sigma}$), et que l'on reprenne la démarche décrite dans le paragraphe précédent, menant à la construction de la fonction f_ε sur $\tilde{\Sigma}$. À ce stade, on peut s'intéresser à ce qu'il advient de f_ε quand ε tend vers 0.

Le résultat attendu dans cette section est que la suite de fonction $\{f_\varepsilon\}$ converge faiblement vers une fonction constante sur $\tilde{\Sigma}$ quand $\varepsilon \searrow 0$, et que cette constante est la moyenne de \hat{f} sur P (c'est-à-dire simplement l'intégrale de \hat{f} sur P puisque P est d'aire unité).

2.2.1. Construction de la famille $\{f_\varepsilon\}$

Soit $\hat{f} : P \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction que l'on prend quelconque pour le moment.

2.2.1.1. *Changement de coordonnées*

Une bonne idée pour procéder avec facilité et élégance serait de construire f_ε dans un système de coordonnées auxiliaires où P est ramené au carré unité $[0, 1]^2$. Introduisons le changement de coordonnées linéaire

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(\zeta, \eta) \stackrel{\text{déf}}{=} (\zeta/\ell, (\eta - \zeta \tan \theta) \ell),$$

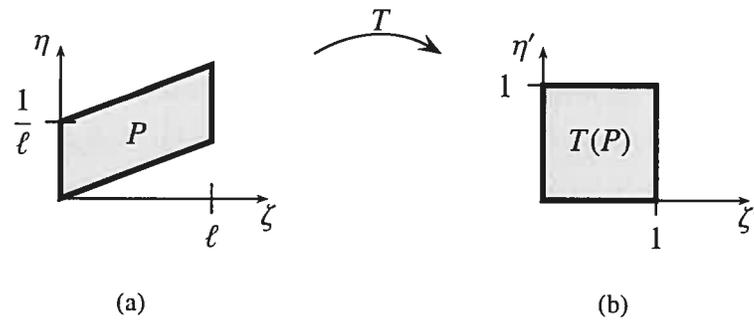
qui a comme inverse

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T^{-1}(\zeta', \eta') \stackrel{\text{déf}}{=} (\ell \zeta', \eta'/\ell + \ell \zeta' \tan \theta).$$

NOTATION 2.7. T a été définie dans le système de coordonnées (ζ, η) , mais elle est également bien définie dans les coordonnées (z, y) de la zone cible. Dans ce cas, nous noterons également les coordonnées d'arrivées avec des primes :

$$(z, y) \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} (z', y') \in \mathbb{R}^2; .$$

¹Nous faisons ici la supposition que la zone cible ne contient que des dalles entières. Dans la construction formelle qui va suivre, les tuiles non-entières seront traitées sans discrimination.

FIG. 2.4. Transformation T du plan.

À la fonction \hat{f} , on peut associer sa transportée \hat{f}' sur $[0, 1]^2$ par T :

$$\hat{f}' \stackrel{\text{déf}}{=} \hat{f} \circ T^{-1} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R} .$$

2.2.1.2. Définition de la fonction périodique sur (z', y')

Soit $\varepsilon > 0$, suffisamment petit². En une étape, on définit f'_ε : cette fonction fait subir un changement d'échelle au plan (z', y') à l'aide du paramètre ε , et étend la fonction \hat{f}' de façon périodique :

$$f'_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'_\varepsilon(z', y') \stackrel{\text{déf}}{=} \hat{f}' \left(\frac{(z', y')}{\varepsilon} - \left\lfloor \frac{(z', y')}{\varepsilon} \right\rfloor \right),$$

où, si $[z]$ est la partie entière de z , on définit $[(z_1, z_2)] \stackrel{\text{déf}}{=} ([z_1], [z_2])$.

2.2.1.3. ...de retour aux coordonnées (z, y)

On complète la démarche en revenant dans les coordonnées (z, y) de la zone cible.

$$f_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(z, y) \stackrel{\text{déf}}{=} (f'_\varepsilon \circ T)(z, y) .$$

²Nous verrons plus loin quelles sont les valeurs admissibles de ε .

Déterminons la forme explicite de f_ε :

$$\begin{aligned}
 f_\varepsilon(z, y) &= f'_\varepsilon(T(z, y)) \\
 &= \hat{f}'\left(\frac{T(z, y)}{\varepsilon} - \left\lfloor \frac{T(z, y)}{\varepsilon} \right\rfloor\right) \\
 &= (\hat{f} \circ T^{-1})\left(\frac{T(z, y)}{\varepsilon} - \left\lfloor \frac{T(z, y)}{\varepsilon} \right\rfloor\right) \\
 &= \hat{f}\left(\frac{(z, y)}{\varepsilon} - T^{-1}\left\lfloor \frac{T(z, y)}{\varepsilon} \right\rfloor\right) \quad (\text{par linéarité de } T) \\
 &= \hat{f}\left(\frac{z}{\varepsilon} - \ell \left\lfloor \frac{z}{\varepsilon \ell} \right\rfloor, \frac{y}{\varepsilon} - \frac{1}{\ell} \left\lfloor \frac{y - z \tan \theta}{\varepsilon / \ell} \right\rfloor - \ell \tan \theta \left\lfloor \frac{z}{\varepsilon \ell} \right\rfloor\right).
 \end{aligned}$$

Bien que f_ε soit définie sur tout le plan, nous allons bien sûr nous intéresser plus spécialement à sa restriction à la zone cible $\tilde{\Sigma}$.

2.2.2. Quelques compléments et notations

D'un point de vue physique, le paramètre ε détermine la taille des tuiles du dallage parallélogrammique du stent, et \hat{f} est une même fonction associée à chacune d'elles. Nous serons particulièrement intéressés, plus loin, à prendre \hat{f} comme la fonction indicatrice du pattern (c'est-à-dire la fonction indicatrice du sous-ensemble de $\tilde{\Sigma}$ occupé par le stent).

Le domaine de f_ε peut être morcellé selon les dalles du stent, ainsi qu'illustré à la Figure 2.5.

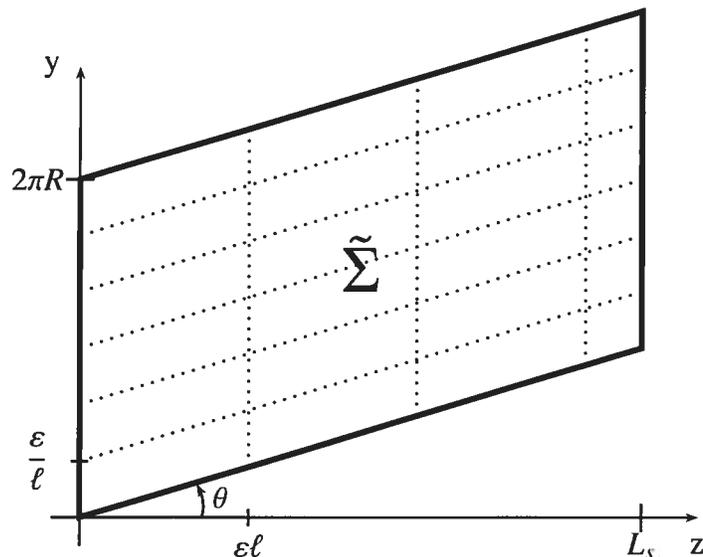


FIG. 2.5. Subdivision de la zone cible selon ses dalles.

Avec les notations déjà établies, on peut identifier le sommet inférieur gauche de la dalle P_{ij} comme étant le point $(i\epsilon\ell, \epsilon\left[\frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta\right])$ (voir Figure 2.6). Bien que P_{ij} dépende de ϵ , il ne sera pas utile, la plupart du temps, d'alourdir davantage cette notation ; là où ce sera nécessaire, cependant, nous écrirons $P_{ij}(\epsilon)$.

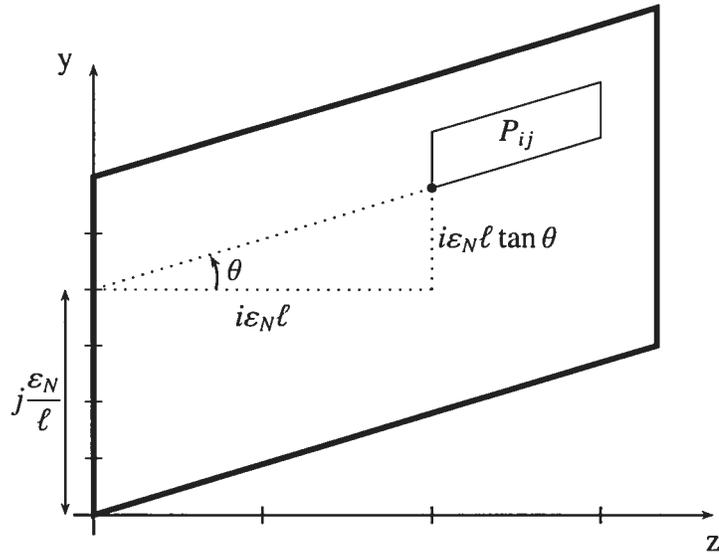


FIG. 2.6. Sommet inférieur gauche de P_{ij}

D'après la remarque 2.6, on a toujours un nombre entier de dalles selon l'axe y . Nous allons noter N cet entier. La valeur correspondante de ϵ sera notée ϵ_N , et elle vaut

$$\epsilon_N \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{2\pi R\ell}{N}. \quad (1)$$

L'entier M , quant à lui, va désigner le plus grand indice i admissible. Il dépend également de N , et donc nous allons le noter M_N ; il vaut

$$M_N \stackrel{\text{déf}}{=} \max \left\{ i \in \mathbb{N} \mid i < \frac{L_s}{\epsilon_N \ell} \right\}. \quad (2)$$

Remarquons finalement qu'en restreignant la fonction f_{ϵ_N} à la dalle P_{ij} , on obtient

$$f_{\epsilon_N}|_{P_{ij}} = \hat{f} \left(\frac{z}{\epsilon_N} - i\ell, \frac{y}{\epsilon_N} - j\frac{1}{\ell} - i\ell \tan \theta \right).$$

2.2.3. Théorème de comportement asymptotique

Suivant toutes les notations précédemment établies, nous sommes (enfin) prêts à énoncer et démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.8. Soient $\hat{f} : P \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction définie sur le parallélogramme de référence, et $N \in \mathbb{N}$. On définit

$$f_{\varepsilon_N} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(z, y) \mapsto \hat{f} \left(\frac{z}{\varepsilon_N} - \ell \left\lfloor \frac{z}{\varepsilon_N \ell} \right\rfloor, \frac{y}{\varepsilon_N} - \frac{1}{\ell} \left\lfloor \frac{y - z \tan \theta}{\varepsilon_N / \ell} \right\rfloor - \ell \tan \theta \left\lfloor \frac{z}{\varepsilon_N \ell} \right\rfloor \right).$$

Si $\hat{f} \in L^2(P)$, alors on a les conclusions suivantes :

- (1) la suite $\{f_{\varepsilon_N}|_{\tilde{\Sigma}}\}$ est bornée dans $L^2(\tilde{\Sigma})$;
- (2) la suite $\{f_{\varepsilon_N}|_{\tilde{\Sigma}}\}$ converge faiblement dans $L^2(\tilde{\Sigma})$ vers une fonction constante sur $\tilde{\Sigma}$ lorsque N tend vers l'infini ($\Leftrightarrow \varepsilon_N \searrow 0$). La valeur de cette constante, notée $\overline{\hat{f}}$, est la moyenne de \hat{f} sur P , c'est-à-dire

$$\overline{\hat{f}} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_P \hat{f} \, d\eta d\zeta.$$

DÉMONSTRATION. (i) Pour montrer le premier point, on évalue au long le carré de la norme de la fonction f_{ε_N} : on a

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Sigma}} f_{\varepsilon_N}^2 \, dz dy &= \sum_{i=0}^{M_N} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{P_{ij} \cap \tilde{\Sigma}} f_{\varepsilon_N}^2 \, dz dy \\ &= \sum_{i=0}^{M_N} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{P_{ij} \cap \tilde{\Sigma}} \left[\hat{f} \left(\frac{z}{\varepsilon_N} - i\ell, \frac{y}{\varepsilon_N} - \frac{j}{\ell} - i\ell \tan \theta \right) \right]^2 \, dz dy \\ &\leq \varepsilon_N^2 \sum_{i=0}^{M_N} \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\int_P [\hat{f}(\zeta, \eta)]^2 \, d\zeta d\eta}_{\|\hat{f}\|_{L^2(P)}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{z}{\varepsilon_N} - i\ell \\ \eta &= \frac{y}{\varepsilon_N} - j \frac{1}{\ell} - i\ell \tan \theta \end{aligned}$$

en "complétant" les dalles $P_{M_N j}$;

$$= \|\hat{f}\|_{L^2(P)}^2 N (M_N + 1) \varepsilon_N^2 < \|\hat{f}\|_{L^2(P)}^2 N \left(\frac{L_S}{\varepsilon_N \ell} + 1 \right) \varepsilon_N^2$$

par définition de M_N
(éq. 2);

$$= 2\pi R\ell \|\hat{f}\|_{L^2(P)}^2 \left(\frac{L_s}{\ell} + \varepsilon_N \right) \leq 2\pi R\ell \|\hat{f}\|_{L^2(P)}^2 \left(\frac{L_s}{\ell} + 2\pi R\ell \right) < \infty ,$$

uniformément en N .

(ii) Pour le second point, il faut montrer que

$$\forall f^* \in L^2(\tilde{\Sigma})^*, \quad \lim_{\varepsilon_N \searrow 0} f^*(f_{\varepsilon_N}) = f^*(\overline{\hat{f}}),$$

où $L^2(\tilde{\Sigma})^*$ est l'espace dual de $L^2(\tilde{\Sigma})$, c'est-à-dire l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires continues $f^* : L^2(\tilde{\Sigma}) \rightarrow \mathbb{R}$. Rappelons que $L^2(\tilde{\Sigma})$ est un espace de Hilbert, avec comme produit scalaire

$$\forall f, g \in L^2(\tilde{\Sigma}), \quad \langle f, g \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\tilde{\Sigma}} f g \, dz dy .$$

Or, le théorème de représentation de Riesz stipule que dans un espace de Hilbert, toute fonctionnelle linéaire continue peut s'écrire comme un produit scalaire :

$$\forall f^* \in L^2(\tilde{\Sigma})^*, \quad \exists! \varphi \in L^2(\tilde{\Sigma}) \text{ telle que } f^* \equiv \langle \cdot, \varphi \rangle .$$

Bien sûr, la réciproque est aussi vraie, c'est-à-dire que toute fonction $\varphi \in L^2(\tilde{\Sigma})$ définit une fonctionnelle $f^* \in L^2(\tilde{\Sigma})^*$ en posant :

$$f^*(\cdot) = \langle \cdot, \varphi \rangle .$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in L^2(\tilde{\Sigma}), \quad \langle f_{\varepsilon_N}, \varphi \rangle &\xrightarrow{\varepsilon_N \searrow 0} \langle \overline{\hat{f}}, \varphi \rangle \\ \Leftrightarrow \int_{\tilde{\Sigma}} f_{\varepsilon_N} \varphi \, dz dy &\xrightarrow{\varepsilon_N \searrow 0} \overline{\hat{f}} \int_{\tilde{\Sigma}} \varphi \, dz dy . \end{aligned}$$

Prenons d'abord $\varphi \in C^1(\tilde{\Sigma})$; on a alors que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Sigma}} f_{\varepsilon_N} \varphi \, dz dy &= \sum_{i=0}^{M_N} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{P_{ij} \cap \tilde{\Sigma}} f_{\varepsilon_N} \varphi \, dz dy \\ &= \sum_{i=0}^{M_N} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{P_{ij} \cap \tilde{\Sigma}} \hat{f} \left(\frac{z}{\varepsilon_N} - i\ell, \frac{y}{\varepsilon_N} - \frac{j}{\ell} - i\ell \tan \theta \right) \varphi(z, y) \, dz dy \\ &\quad \zeta = \frac{z}{\varepsilon_N} - i\ell \\ &\quad \eta = \frac{y}{\varepsilon_N} - \frac{j}{\ell} - i\ell \tan \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_N^2 \sum_{i=0}^{M_N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_P \hat{f}(\zeta, \eta) \varphi \left(\varepsilon_N[\zeta + i\ell], \varepsilon_N \left[\eta + j \frac{1}{\ell} + i\ell \tan \theta \right] \right) d\zeta d\eta \\
&+ \varepsilon_N^2 \sum_{j=0}^{N-1} \int_{P'} \hat{f}(\zeta, \eta) \varphi \left(\varepsilon_N[\zeta + M_N \ell], \varepsilon_N \left[\eta + j \frac{1}{\ell} + M_N \ell \tan \theta \right] \right) d\zeta d\eta,
\end{aligned} \tag{3}$$

où P' est l'image des dalles possiblement incomplètes $P_{M_N j} \cap \tilde{\Sigma}$ par le changement de variable. Le deuxième terme de (3) tend vers 0 : en effet,

$$\begin{aligned}
&\left| \varepsilon_N^2 \sum_{j=0}^{N-1} \int_{P'} \hat{f}(\zeta, \eta) \varphi \left(\varepsilon_N[\zeta + M_N \ell], \varepsilon_N \left[\eta + j \frac{1}{\ell} + M_N \ell \tan \theta \right] \right) d\zeta d\eta \right| \\
&\leq \varepsilon_N^2 \sum_{j=0}^{N-1} \int_{P'} |\hat{f}(\zeta, \eta)| \left| \varphi \left(\varepsilon_N[\zeta + M_N \ell], \varepsilon_N \left[\eta + j \frac{1}{\ell} + M_N \ell \tan \theta \right] \right) \right| d\zeta d\eta \\
&\leq \varepsilon_N^2 \sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| \sum_{j=0}^{N-1} \int_{P'} |\hat{f}(\zeta, \eta)| d\zeta d\eta
\end{aligned}$$

$\sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| < \infty$, car φ est continue sur le compact $\tilde{\Sigma}$;

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon_N^2 \sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| \sum_{j=0}^{N-1} \int_P |\hat{f}(\zeta, \eta)| d\zeta d\eta \\
&= \varepsilon_N^2 \sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| N \|\hat{f}\|_{L^1(P)}
\end{aligned}$$

$\hat{f} \in L^1(P)$, car $\hat{f} \in L^2(P)$ et la mesure de Lebesgue est finie sur P ;

$$= 2\pi R \ell \varepsilon_N \sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| \|\hat{f}\|_{L^1(P)} \longrightarrow 0$$

par définition de ε_N (éq. (1)).

Seul le premier terme de (3) est donc intéressant, soit

$$\varepsilon_N^2 \sum_{i=0}^{M_N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_P \hat{f}(\zeta, \eta) \varphi \left(\varepsilon_N[\zeta + i\ell], \varepsilon_N \left[\eta + j \frac{1}{\ell} + i\ell \tan \theta \right] \right) d\zeta d\eta.$$

Écrivons

$$\begin{aligned} \varphi\left(\varepsilon_N[\zeta + i\ell], \varepsilon_N\left[\eta + \frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta\right]\right) &= \underbrace{\varphi\left(i\varepsilon_N\ell, \varepsilon_N\left[\frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta\right]\right)}_{(*)} \\ &+ \underbrace{\varphi\left(\varepsilon_N[\zeta + i\ell], \varepsilon_N\left[\eta + \frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta\right]\right) - \varphi\left(i\varepsilon_N\ell, \varepsilon_N\left[\frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta\right]\right)}_{(**)}. \end{aligned}$$

On substitue cette expression dans l'intégrale, que l'on peut ensuite séparer en deux morceaux. En évaluant le premier (avec (*)), on trouve que

$$\begin{aligned} \varepsilon_N^2 \sum_{i=0}^{M_N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_P \hat{f}(\zeta, \eta) \varphi\left(i\varepsilon_N\ell, \varepsilon_N\left[\frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta\right]\right) d\zeta d\eta \\ = \varepsilon_N^2 \sum_{i=0}^{M_N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi\left(i\varepsilon_N\ell, \varepsilon_N\left[\frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta\right]\right) \underbrace{\int_P \hat{f}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}_{\bar{f}} \\ = \bar{f} \sum_{i=0}^{M_N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_N^2 \varphi\left(i\varepsilon_N\ell, \varepsilon_N\left[\frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta\right]\right). \end{aligned} \quad (4)$$

La somme (4) est presque une somme de Riemann. En effet, $(i\varepsilon_N\ell, \varepsilon_N[\frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta])$ est la coordonnée du coin inférieur gauche de la dalle P_{ij} , et ε_N^2 , son aire. L'écart entre la vraie somme de Riemann (celle qui comprend les termes associés aux dalles $P_{M_N j} \cap \tilde{\Sigma}$) et la somme (4) est donc

$$\left| \bar{f} \sum_{j=0}^{N-1} A(P_{M_N j} \cap \tilde{\Sigma}) \varphi\left(M_N \varepsilon_N \ell, \varepsilon_N\left[\frac{j}{\ell} + M_N \ell \tan \theta\right]\right) \right|$$

où $A(P_{M_N j} \cap \tilde{\Sigma})$ est l'aire de la dalle $P_{M_N j} \cap \tilde{\Sigma}$;

$$\begin{aligned} &\leq \bar{f} \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_N^2 \left| \varphi\left(M_N \varepsilon_N \ell, \varepsilon_N\left[\frac{j}{\ell} + M_N \ell \tan \theta\right]\right) \right| \\ &\leq \bar{f} \sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| \sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon_N^2 \\ &= \bar{f} \sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| 2\pi R \ell \varepsilon_N \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Le premier morceau converge donc vers

$$\bar{f} \int_{\bar{\Sigma}} \varphi \, dzdy \quad (= \langle \bar{f}, \varphi \rangle).$$

On espère donc que le second morceau (celui avec (**)) tende vers 0 ! C'est effectivement le cas. Étant donné que $\varphi \in C^1(\bar{\Sigma})$, son gradient est continu sur le compact $\bar{\Sigma}$, et donc borné ; φ est par conséquent uniformément lipschitzienne (disons de constante K) sur $\bar{\Sigma}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon_N^2 \sum_{i=0}^{M_N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_P \hat{f}(\zeta, \eta) \left[\varphi \left(\varepsilon_N[\zeta + i\ell], \varepsilon_N \left[\eta + \frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta \right] \right) \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \varphi \left(i\varepsilon_N \ell, \varepsilon_N \left[\frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta \right] \right) \right] d\zeta d\eta \right| \\ & \leq \varepsilon_N^2 \sum_{i=0}^{M_N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_P |\hat{f}(\zeta, \eta)| \left| \varphi \left(\varepsilon_N[\zeta + i\ell], \varepsilon_N \left[\eta + \frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta \right] \right) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - \varphi \left(i\varepsilon_N \ell, \varepsilon_N \left[\frac{j}{\ell} + i\ell \tan \theta \right] \right) \right| d\zeta d\eta \\ & \leq \varepsilon_N^2 \sum_{i=0}^{M_N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_P |\hat{f}(\zeta, \eta)| K \|(\varepsilon_N \zeta, \varepsilon_N \eta)\|_{\mathbb{R}^2} d\zeta d\eta \\ & = \varepsilon_N^2 \sum_{i=0}^{M_N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_P |\hat{f}(\zeta, \eta)| K \varepsilon_N \|(\zeta, \eta)\|_{\mathbb{R}^2} d\zeta d\eta. \end{aligned}$$

Un brin de calcul trigonométrique montre que la norme maximale d'un point dans P est $K' \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{1}{\ell} + \ell \tan \theta\right)^2}$; d'où on a

$$\begin{aligned} & \leq K' K \varepsilon_N^3 \sum_{i=0}^{M_N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \int_P |\hat{f}(\zeta, \eta)| d\zeta d\eta \\ & \leq K' \varepsilon_N^3 K N M_N \|\hat{f}\|_{L^1(P)} \\ & \leq K' K N \frac{L_s}{\varepsilon_N \ell} \varepsilon_N^3 \|\hat{f}\|_{L^1(P)} \quad (\text{par définition de } M_N \text{ (voir éq. (2))}; \\ & = 2\pi R K' K L_s \varepsilon_N \|\hat{f}\|_{L^1(P)} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Le résultat est donc montré pour $\varphi \in C^1(\tilde{\Sigma})$. On l'étend maintenant aux fonctions $\varphi \in L^2(\tilde{\Sigma})$. Puisque $C^1(\tilde{\Sigma})$ est dense dans $L^2(\tilde{\Sigma})$,

$$\exists \{\varphi_n\} \subseteq C^1(\tilde{\Sigma}) \quad \text{telle que} \quad \|\varphi_n - \varphi\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0.$$

Ainsi, pour tout n ,

$$\left| \int_{\tilde{\Sigma}} (f_{\varepsilon_N} - \bar{f}) \varphi \, dzdy \right| \leq \left| \int_{\tilde{\Sigma}} (f_{\varepsilon_N} - \bar{f}) (\varphi - \varphi_n) \, dzdy \right| + \left| \int_{\tilde{\Sigma}} (f_{\varepsilon_N} - \bar{f}) \varphi_n \, dzdy \right|.$$

Soit $\delta > 0$, arbitrairement donné. D'une part, les inégalités de Hölder et de Minkowski entraînent que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tilde{\Sigma}} (f_{\varepsilon_N} - \bar{f}) (\varphi - \varphi_n) \, dzdy \right| &\leq \|f_{\varepsilon_N} - \bar{f}\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \\ &\leq \left(\|f_{\varepsilon_N}\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} + \|\bar{f}\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \right) \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \leq \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

ceci étant vrai pour $n = n_0$ suffisamment grand (rappelons ici que la suite $\{f_{\varepsilon_N}\}$ est bornée dans $L^2(\tilde{\Sigma})$).

D'autre part, en prenant $n = n_0$, la fonction $\varphi_{n_0} \in C^1(\tilde{\Sigma})$, et donc le résultat précédent s'applique :

$$\left| \int_{\tilde{\Sigma}} (f_{\varepsilon_N} - \bar{f}) \varphi_{n_0} \, dzdy \right| < \frac{\delta}{2} \quad \text{dès que } \varepsilon_N \text{ est assez petit.}$$

Ce qui conclut la démonstration. □

2.3. GÉNÉRALISATION EN ABSENCE DE PÉRIODICITÉ

Un coup d'œil aux stents que l'on s'est donné à étudier au départ nous rassure : tous les stents de la Figure 0.1, ainsi que les deux stents de la Figure 0.3 (qui nous servent un peu de "points de repère") sont périodiques, et donc le résultat établi à la section précédente s'applique.

Pendant, dans le cas du stent hélicoïdal (Figure 0.3(a)), on s'aperçoit que la suite de stents construite pour les différentes valeurs de N ne correspond pas à ce que l'on souhaite faire physiquement. En effet, selon la construction proposée dans la section précédente, on trouve d'abord que $\tilde{\Sigma}$ est un rectangle, et que chaque dalle contient

une spire complète (on suppose pour le moment que chaque dalle est complète ; voir Figure 2.7).

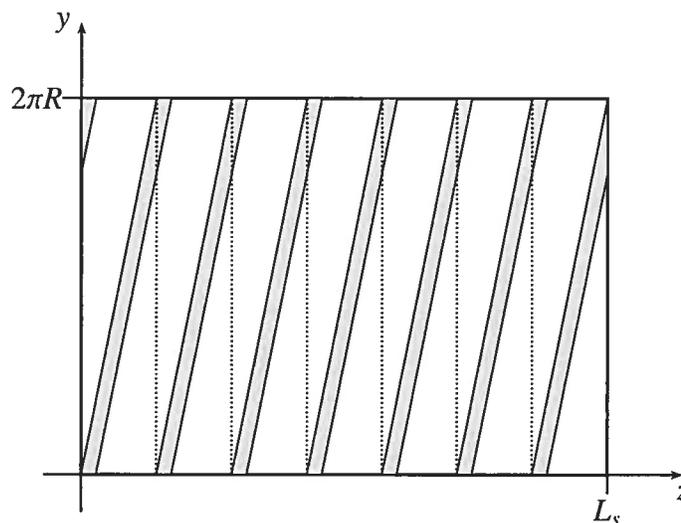
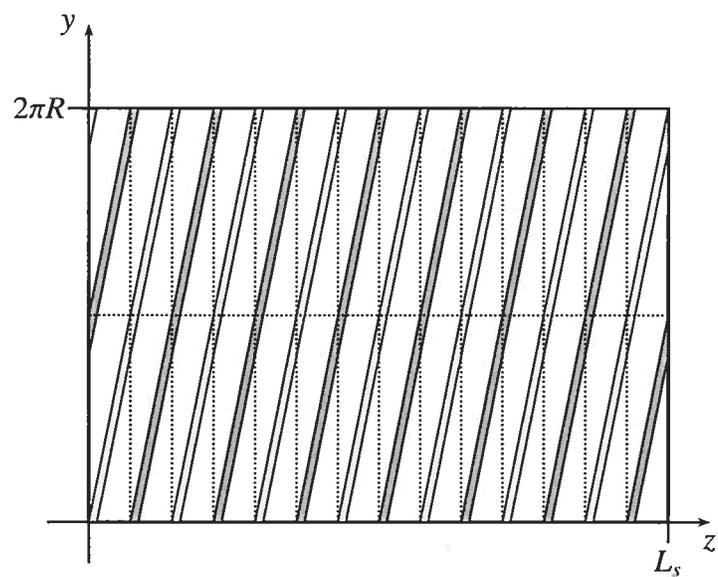
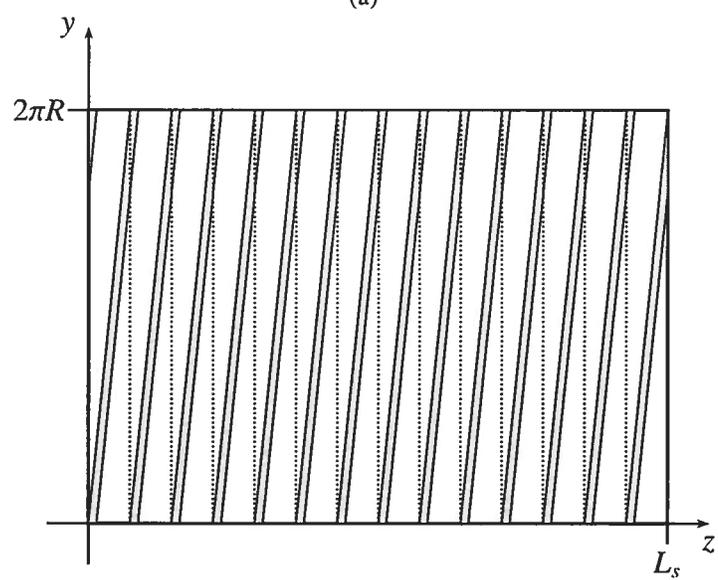


FIG. 2.7. Stent hélicoïdal déroulé.

La Figure 2.8 illustre deux façons de raffiner ce stent par un facteur $1/2$. La première (Figure 2.8(a)) est celle proposée dans la section précédente : on procède à un changement d'échelle dans les deux dimensions, ce qui conduit à la construction d'un stent composé de deux ressorts plus fins, indépendants et emboîtés l'un dans l'autre. Ce n'est pas vraiment la construction physique que l'on voudrait : on voudrait le raffiner en prenant un brin plus fin et en resserrant les spires, ce qu'illustre la Figure 2.8(b). Autrement dit, on veut faire un changement d'échelle *que sur l'axe z*.



(a)



(b)

FIG. 2.8. Deux raffinements possibles du stent hélicoïdal.

Le résultat de la section précédente demeure-t-il vrai si l'on fait un changement d'échelle que sur l'axe z , plutôt que sur les deux axes ? Hélas, non. Prenons par exemple un stent pour lequel le déroulement de $\tilde{\Sigma}$ est le rectangle $[0, L_s] \times [0, 2\pi R]$, et dont le parallélogramme de référence P est $[0, 1/2\pi R] \times [0, 2\pi R]$. Si l'on prend

$$\hat{f} \stackrel{\text{déf}}{=} \chi_{[0, 1/2\pi R] \times [0, \pi R]} ,$$

la fonction indicatrice du demi-rectangle inférieur de P , alors $\{f_\varepsilon\}$ est une suite constante qui converge fortement, donc faiblement vers

$$\chi_{[0, L_s] \times [0, \pi R]} ,$$

la fonction indicatrice du demi-rectangle inférieur de $\tilde{\Sigma}$. De toute évidence, ce n'est pas la fonction constante \bar{f} sur $\tilde{\Sigma}$.

Pourtant, on sent intuitivement que la fonction indicatrice du stent hélicoïdal, elle, devrait converger $L^2(\tilde{\Sigma})$ -faible vers sa moyenne avec un seul changement d'échelle sur l'axe z . En effet, à mesure que le nombre de spires augmente, le stent "s'homogénise" dans la zone cible. Y aurait-il moyen de montrer ce fait intuitif ?

Revenons sur l'idée du théorème 2.8. D'une fonction arbitraire \hat{f} de $L^2(\tilde{\Sigma})$, nous avons construit f_{ε_N} . Le domaine de cette dernière fonction est un treillis parallélogrammique dont la taille des mailles tend vers 0 à mesure que N augmente. Sur chacune de ces mailles, la restriction de f_{ε_N} , pour ε_N fixé, est toujours la même, à savoir un changement d'échelle de la fonction originale \hat{f} . Lorsque $N \rightarrow \infty$, le treillis, qui devient de plus en plus fin, homogénise les valeurs prises par \hat{f} , d'où le résultat obtenu.

Mais est-il nécessaire que ces restrictions de f_{ε_N} sur chacune des mailles, pour ε_N fixé, soit toujours la même ? L'essentiel ne serait-il pas que les valeurs prises par f_{ε_N} soient "semblables" d'une maille à l'autre, de telle façon que lorsque $N \rightarrow \infty$, le treillis homogénise ces valeurs "semblables" pour mener le tout, à la limite (faible), vers la moyenne ? Telle est l'idée qui m'a conduit à la formulation du théorème suivant.

NOTATION 2.9. Dans ce qui va suivre, si $D \subseteq \mathbb{R}^2$, on écrira

- $A(D) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_D dzdy$ pour noter son aire, et
- $\text{diam}(D) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in D\}$ pour noter son diamètre.

Théorème 2.10. Soit $\{f_\varepsilon\}$, une suite de fonctions définies sur \mathbb{R}^2 . Supposons qu'existent les constantes strictement positives ε_0 , ρ et K telles que

- (1) la sous-suite $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon < \varepsilon_0}$ est bornée dans $L^2(\tilde{\Sigma})$;
- (2) $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe un dallage normal

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \{D_{\varepsilon,1}, D_{\varepsilon,2}, \dots, D_{\varepsilon,N(\varepsilon)}\}$$

qui recouvre $\tilde{\Sigma}$, avec $N(\varepsilon) < \infty$, vérifiant les deux conditions suivantes :

- (a) $\forall i, 1 \leq i \leq N(\varepsilon), \quad \text{diam}(D_{\varepsilon,i}) < K\varepsilon$;
- (b) $\forall i, 1 \leq i \leq N(\varepsilon), \quad \int_{D_{\varepsilon,i}} f_\varepsilon \, dzdy = \rho A(D_{\varepsilon,i})$.

Alors la suite $\{f_\varepsilon\}$ converge $L^2(\tilde{\Sigma})$ -faible vers la fonction constante ρ sur $\tilde{\Sigma}$.

REMARQUE 2.11. Si l'on somme sur toutes les dalles la condition 2(b), on trouve que la moyenne de la fonction f_ε sur \mathcal{D}_ε est précisément la constante ρ . Nous avons donc traduit la condition "prendre des valeurs semblables sur chaque dalle" par "avoir la même moyenne sur chaque dalle".

Ce théorème est déjà une bonne généralisation du théorème 2.8. Étant donné que le dallage \mathcal{D}_ε recouvre la section cylindrique $\tilde{\Sigma}$, il tient déjà compte des éventuelles dalles incomplètes situées près du bord.

Nous alourdissons légèrement l'énoncé précédent afin qu'il puisse s'appliquer aux stents dont les dallages \mathcal{D}_ε contiennent un certain nombre de dalles "singulières", couvrant une aire éventuellement négligeable, sur lesquelles la condition 2(b) du théorème ci-dessus n'est pas vérifiée. En pratique, ces dalles pourront modéliser des motifs spéciaux du stent, des soudures, etc.

Théorème 2.12. Soit $\{f_\varepsilon\}$, une suite de fonctions définies sur \mathbb{R}^2 . Supposons qu'existent les constantes strictement positives ε_0 , ρ , K_1 et K_2 telles que

- (1) la sous-suite $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon < \varepsilon_0}$ est bornée dans $L^2(\tilde{\Sigma})$;
- (2) $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe le triplet $(\mathcal{D}_\varepsilon, n(\varepsilon), N(\varepsilon))$, où $n(\varepsilon)$ et $N(\varepsilon)$ sont des constantes telles que $1 < n(\varepsilon) \leq N(\varepsilon) < \infty$, et

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \{D_{\varepsilon,1}, D_{\varepsilon,2}, \dots, D_{\varepsilon,n(\varepsilon)}, \dots, D_{\varepsilon,N(\varepsilon)}\},$$

un dallage normal qui recouvre $\tilde{\Sigma}$ et qui vérifie les trois conditions suivantes :

- (a) $\forall i, 1 \leq i \leq n(\varepsilon), \quad \text{diam}(D_{\varepsilon,i}) < K_1 \varepsilon;$
 (b) $\forall i, 1 \leq i \leq n(\varepsilon), \quad \int_{D_{\varepsilon,i}} f_\varepsilon \, dzdy = \rho A(D_{\varepsilon,i});$
 (c) $A\left(\bigcup_{i=n(\varepsilon)+1}^{N(\varepsilon)} D_{\varepsilon,i}\right) \leq K_2 \varepsilon.$

Alors la suite $\{f_\varepsilon\}$ converge faiblement dans $L^2(\tilde{\Sigma})$ vers la fonction constante ρ sur $\tilde{\Sigma}$.

REMARQUE 2.13. Les $n(\varepsilon)$ premières dalles de chaque dallage \mathcal{D}_ε sont des dalles régulières, qui satisfont les mêmes hypothèses que dans l'énoncé précédent. Les $N(\varepsilon) - n(\varepsilon)$ autres dalles, dites singulières, ne satisfont que la propriété 2(c), à savoir que leur aire cumulée est au plus d'ordre ε . Bien entendu, un dallage \mathcal{D} qui vérifierait les conditions du point 2 mais dont les tuiles ne seraient pas dans le bon ordre peut être réordonné pour former un dallage \mathcal{D}' faisant parfaitement l'affaire.

DÉMONSTRATION. L'idée de la démonstration est la même que celle du théorème 2.8. Il s'agit de montrer que

$$\forall \varphi \in L^2(\tilde{\Sigma}), \quad \int_{\tilde{\Sigma}} f_\varepsilon \varphi \, dzdy \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \rho \int_{\tilde{\Sigma}} \varphi \, dzdy,$$

et comme avant, nous voulons morceller l'intégrale sur $\tilde{\Sigma}$ selon le dallage \mathcal{D}_ε , et ne retenir que la contribution des "bonnes" dalles. Or, nous avons ici trois types de dalles :

- (1) les dalles régulières qui sont complètement incluses dans $\tilde{\Sigma}$;
- (2) les dalles régulières qui débordent de $\tilde{\Sigma}$;
- (3) les dalles singulières.

Les "bonnes" dalles sont celles du premier type. Les dalles du second type, quant à elles, se trouvent nécessairement dans la bande des points situés à une distance moindre que ε du bord de $\tilde{\Sigma}$, et donc leur aire cumulée n'excède pas $2(L_s + 2\pi R)\varepsilon$. On peut donc réordonner les dalles des dallages \mathcal{D}_ε et redéfinir $n(\varepsilon)$ (sans changer de notation) pour que les $n(\varepsilon)$ premières dalles soient celles du premier type, et que les $N(\varepsilon) - n(\varepsilon)$ autres soient celles du deuxième et du troisième type réunies ; la constante K_2 peut alors être redéfinie comme étant $K_2 + 2(L_s + 2\pi R)$.

Ainsi, pour $\varphi \in C^1(\tilde{\Sigma})$, on a

$$\int_{\tilde{\Sigma}} f_\varepsilon \varphi \, dzdy = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{D_{\varepsilon,i}} f_\varepsilon \varphi \, dzdy + \int_{\bigcup_{n(\varepsilon)+1}^{N(\varepsilon)} D_{\varepsilon,i} \cap \tilde{\Sigma}} f_\varepsilon \varphi \, dzdy. \quad (5)$$

Le deuxième terme de (5) tend vers 0 ; en effet,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\bigcup_{n(\varepsilon)+1}^{N(\varepsilon)} D_{\varepsilon,i} \cap \tilde{\Sigma}} f_\varepsilon \varphi \, dzdy \right| &\leq \sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| \int_{\tilde{\Sigma}} |f_\varepsilon| \chi_{\bigcup_{n(\varepsilon)+1}^{N(\varepsilon)} D_{\varepsilon,i}} \, dzdy \\ &\leq \sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| \|f_\varepsilon\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \|\chi_{\bigcup_{n(\varepsilon)+1}^{N(\varepsilon)} D_{\varepsilon,i}}\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder ;

$$\leq \sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| \|f_\varepsilon\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} (K_2 \varepsilon)^{1/2} \longrightarrow 0.$$

Le premier terme de (5), quant à lui, peut s'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{D_{\varepsilon,i}} f_\varepsilon \varphi \, dzdy &= \\ &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{D_{\varepsilon,i}} f_\varepsilon(z, y) (\varphi(z, y) - \varphi(z_i, y_i)) \, dzdy + \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{D_{\varepsilon,i}} f_\varepsilon(z, y) \varphi(z_i, y_i) \, dzdy \end{aligned}$$

où (z_i, y_i) est un point
arbitrairement choisi dans la
dalle $D_{\varepsilon,i}$;

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{D_{\varepsilon,i}} f_\varepsilon(z, y) (\varphi(z, y) - \varphi(z_i, y_i)) \, dzdy + \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \varphi(z_i, y_i) \underbrace{\int_{D_{\varepsilon,i}} f_\varepsilon(z, y) \, dzdy}_{= \rho A(D_{\varepsilon,i})} \\ &= \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{D_{\varepsilon,i}} f_\varepsilon(z, y) (\varphi(z, y) - \varphi(z_i, y_i)) \, dzdy + \rho \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \varphi(z_i, y_i) A(D_{\varepsilon,i}). \quad (6) \end{aligned}$$

Le premier terme de (6) tend vers 0 :

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{D_{\varepsilon,i}} f_{\varepsilon}(z, y) (\varphi(z, y) - \varphi(z_i, y_i)) \, dz dy \right| &\leq \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{D_{\varepsilon,i}} |f_{\varepsilon}(z, y)| |\varphi(z, y) - \varphi(z_i, y_i)| \, dz dy \\
 &\leq \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \int_{D_{\varepsilon,i}} |f_{\varepsilon}(z, y)| K K_1 \varepsilon \, dz dy \\
 &\qquad \text{où } K \text{ est la constante de Lipschitz de } \varphi ; \\
 &\leq K K_1 \varepsilon \int_{\tilde{\Sigma}} |f_{\varepsilon}(z, y)| \, dz dy \\
 &= K K_1 \varepsilon \|f_{\varepsilon}\|_{L^1(\tilde{\Sigma})} \longrightarrow 0 ,
 \end{aligned}$$

puisque l'on a supposé la suite $\{f_{\varepsilon}\}_{\varepsilon < \varepsilon_0}$ bornée dans $L^2(\tilde{\Sigma})$. Quant au second terme de (6), il est presque une somme de Riemann qui tend vers

$$\rho \int_{\tilde{\Sigma}} \varphi \, dz dy .$$

Il le devient si l'on complète la somme sur les $N(\varepsilon) - n(\varepsilon)$ dernières dalles³ : l'écart entre les deux est

$$\left| \rho \sum_{i=n(\varepsilon)+1}^{N(\varepsilon)} \varphi(z_i, y_i) A(D_{\varepsilon,i} \cap \tilde{\Sigma}) \right| \leq \rho \sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| \sum_{i=n(\varepsilon)+1}^{N(\varepsilon)} A(D_{\varepsilon,i}) \leq \rho \sup_{\tilde{\Sigma}} |\varphi| K_2 \varepsilon \longrightarrow 0 .$$

Le résultat est donc montré pour $\varphi \in C^1(\tilde{\Sigma})$. La démonstration de l'extension pour $\varphi \in L^2(\tilde{\Sigma})$ ne diffère en rien de ce qui a été présenté à la section précédente. \square

COROLLAIRE 2.14. Le théorème 2.8 est un corollaire de ce résultat. En effet, soit $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_N$, avec disons $N = 1$. Alors $\exists N' \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_{N'} < \varepsilon \leq \varepsilon_{N'-1}$. Prenons comme dallage $\mathcal{D}_{\varepsilon} = \{P_{ij}(\varepsilon_{N'}) \cap \tilde{\Sigma}\}$ (voir la notation établie à la section 2.2.2). Les dalles incomplètes $P_{M_{N'}j}(\varepsilon_{N'}) \cap \tilde{\Sigma}$ couvrent une aire bornée par

$$N' \varepsilon_{N'}^2 = 2\pi R l \varepsilon_{N'} < 2\pi R l \varepsilon .$$

³Il est possible que l'on doive morceler les dalles singulières pour que leur diamètre tende vers 0 avec $\varepsilon \searrow 0$, et choisir un point (z_i, y_i) à l'intérieur de chacun des morceaux créés. Nous ne changerons cependant pas la notation pour tenir compte de ce détail.

D'autre part, quelle que soit la dalle $P_{ij}(\varepsilon_{N'})$ choisie avec $i \neq M_{N'}$, la fonction $f_{\varepsilon_{N'}}$ vérifie

$$\begin{aligned} \int_{P_{ij}(\varepsilon_{N'})} f_{\varepsilon_{N'}} dzdy &= \int_{P_{ij}(\varepsilon_{N'})} \hat{f}\left(\frac{z}{\varepsilon_{N'}} - i\ell, \frac{y}{\varepsilon_{N'}} - \frac{j}{\ell} - i\ell \tan \theta\right) dzdy \\ &= \varepsilon_{N'}^2 \int_P \hat{f}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta, \end{aligned}$$

où $\varepsilon_{N'}^2$ est bien l'aire de la dalle $P_{ij}(\varepsilon_{N'})$, et $\int_P \hat{f}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta$, une constante indépendante de ε .

COROLLAIRE 2.15. Supposons que l'on fait subir un changement d'échelle de facteur ε du stent hélicoïdal uniquement selon l'axe z , et que $f_\varepsilon = \chi_s$, la fonction caractéristique du stent. Quadrillons $\tilde{\Sigma}$ comme illustré en Figure 2.9 pour construire notre dallage $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_{N(\varepsilon)}\}$. Alors on remarque que chaque tuile D_i contient l'équivalent d'un petit parallélogramme de stent. Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{A(D_i)} \int_{D_i} \chi_s dzdy &= \frac{\text{Aire du parallélogramme}}{\text{Aire de la tuile}} \\ &= \frac{\text{Base du parallélogramme} \times \text{Hauteur de la tuile}}{\text{Largeur de la tuile} \times \text{Hauteur de la tuile}} \\ &= \frac{\text{Base du parallélogramme}}{\text{Largeur de la tuile}} \end{aligned}$$

est un rapport tenu constant lors du changement d'échelle. Le résultat voulu suit donc.

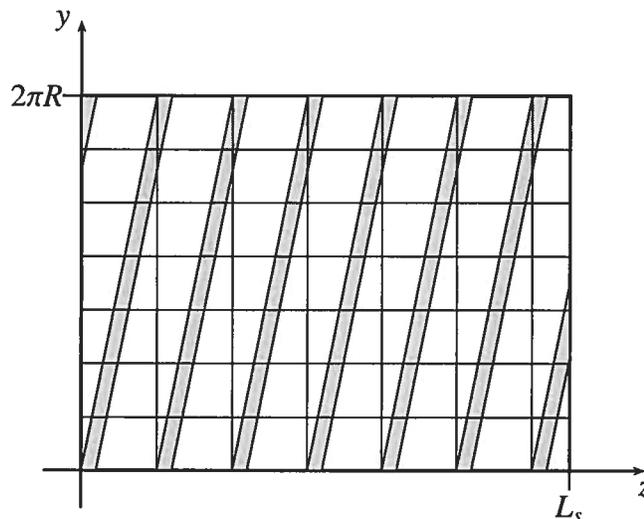


FIG. 2.9. Stent hélicoïdal quadrillé. On découpe en autant de rangée qu'il y a de spires.

COROLLAIRE 2.16. Une autre conséquence de ce résultat est que l'on peut très bien choisir un autre dallage que le dallage parallélogrammique pour obtenir le résultat dans le cas d'un stent périodique. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué (remarque 1.17), le dallage parallélogrammique ne contient pas nécessairement un motif entier, ce qui peut être agaçant dans l'analyse. Le théorème assure, par exemple, qu'un dallage tel que celui de la Figure 2.10 peut tout aussi bien remplacer celui de la Figure 1.5(d).

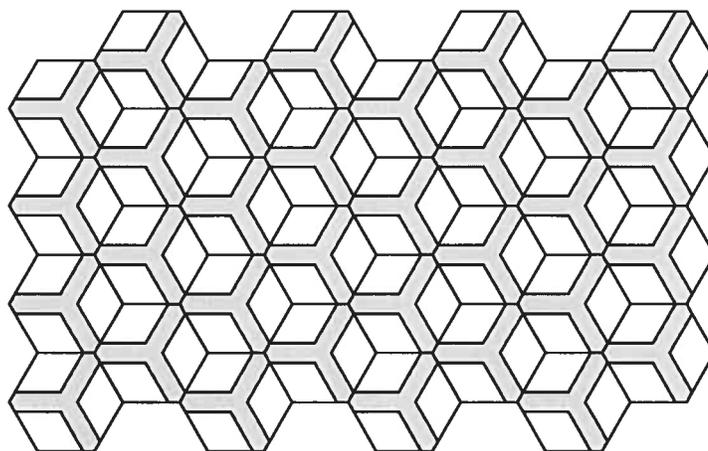


Fig. 2.10. Autre dallage possible pour le stent à motif hexagonal.

À la lumière de ces différents cas de figure étudiés dans ce chapitre, nous concluons en définissant un concept qui est resté jusqu'à maintenant intuitif.

Définition 2.17 (Raffinement d'un stent). Soit un stent périodique de motif M . On peut associer à ce stent χ , la fonction caractéristique qui vaut 1 sur le sous-ensemble de $\tilde{\Sigma}$ occupé par le stent. Soit la suite

$$\{\chi_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1},$$

où $\chi_\varepsilon : \tilde{\Sigma} \rightarrow \{0, 1\}$ est la fonction caractéristique du stent de départ auquel on a fait subir un changement d'échelle ε . Si le changement d'échelle est effectué sur les deux dimensions de périodicité du pattern, on a un *raffinement sur deux dimensions*; s'il est effectué sur une seule dimension et que la suite $\{\chi_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ satisfait les hypothèses du théorème 2.12, alors on a un *raffinement sur une dimension*.

Chapitre 3

ÉTUDE DE LA DOSE ASYMPTOTIQUE

Nous entrons avec ce chapitre dans le vif du sujet : découvrir ce qu'il advient de la dose lorsque l'on raffine de plus en plus le stent tout en conservant constante sa surface de contact avec la paroi. Dans une première section, nous allons définir la dose et donner l'équation aux dérivées partielles qui la modélise. Nous énoncerons et démontrerons dans une seconde section la convergence de la dose vers une limite dont nous dériverons l'équation.

3.1. DESCRIPTION ET MODÉLISATION DU PROBLÈME

3.1.1. Le domaine lumière/stent/paroi

Soit

$$C_r \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x_1, x_2, z) : x_1^2 + x_2^2 < r^2, \quad 0 < z < H\},$$

le cylindre ouvert fini de rayon $r > 0$ et de longueur $H > 0$. La *lumière*, l'endroit où le sang voyage, est le domaine¹ cylindrique

$$\tilde{\Omega}_l \stackrel{\text{déf}}{=} C_r,$$

et la paroi du vaisseau, d'épaisseur radiale $E > 0$, est le domaine

$$\tilde{\Omega}_w \stackrel{\text{déf}}{=} C_{R+E} \setminus \overline{C_r},$$

¹Nous adoptons la définition selon laquelle un *domaine* est un ouvert connexe de l'espace euclidien.

qui forme un "tube" de rayon intérieur R , de rayon extérieur $R + E$ et de longueur H . Du point de vue mathématique, $\tilde{\Omega}_l$ et $\tilde{\Omega}_w$ sont des sous-ensembles ouverts, connexes et bornés de \mathbb{R}^3 .

Un stent d'épaisseur nulle et de longueur L_s , $0 < L_s < H$, est déployé au milieu de la zone cible $\tilde{\Sigma}$, que nous plaçons comme suit dans \mathbb{R}^3

$$\tilde{\Sigma} = \left\{ (x_1, x_2, z) \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, \quad \frac{H - L_s}{2} \leq z \leq \frac{H + L_s}{2} \right\}.$$

Soit $\chi : \tilde{\Sigma} \rightarrow \{0, 1\}$, une fonction caractéristique mesurable sur $\tilde{\Sigma}$. Cette fonction définit un stent (potentiellement de forme peu orthodoxe) occupant le sous-ensemble

$$\tilde{\Sigma}_s(\chi) \stackrel{\text{déf}}{=} \chi^{-1}\{1\} \subseteq \tilde{\Sigma}.$$

NOTATION 3.1. Supposons $\tilde{\Sigma}_s(\chi)$ fermé. Le bord de chacun de ces domaines comporte plusieurs parties, et il sera utile pour l'analyse du problème d'établir une notation pour chacune. Nous diviserons le bord $\tilde{\Gamma}_l = \partial\tilde{\Omega}_l$ en quatre :

- $\tilde{\Sigma}_s(\chi)$, le stent ;
- $\tilde{\Gamma}_{lw}$, l'interface de contact entre $\tilde{\Omega}_l$ et $\tilde{\Omega}_w$ ² ;
- $\tilde{\Gamma}_{li}$, la partie de la frontière de $\tilde{\Omega}_l$ par où le sang entre³ ;
- $\tilde{\Gamma}_{lo}$, la partie de la frontière de $\tilde{\Omega}_l$ par où le sang sort⁴ ;

La frontière $\tilde{\Gamma}_w = \partial\tilde{\Omega}_w$, quant à elle, sera subdivisée en cinq parties :

- $\tilde{\Sigma}_s(\chi)$, le stent ;
- $\tilde{\Gamma}_{lw}$, l'interface de contact entre $\tilde{\Omega}_l$ et $\tilde{\Omega}_w$ ⁵ ;
- $\tilde{\Gamma}_{wi}$, la partie de la frontière de $\tilde{\Omega}_w$ où $z = 0$;
- $\tilde{\Gamma}_{wo}$, la partie de la frontière de $\tilde{\Omega}_w$ où $z = H$;
- $\tilde{\Gamma}_{R+E}$, la frontière latérale extérieure du cylindre C_{R+E} .

3.1.2. La notion de dose

Ce stent d'épaisseur nulle est enrobé d'un polymère, lequel est imprégné d'un agent médicamenteux limitant la trop grande multiplication des cellules lisses occasionnée par la

²Le "w" provient de l'équivalent anglais pour paroi, "wall".

³Le "i" provient du terme anglais "inlet".

⁴Le "o" provient du terme anglais "outlet".

⁵On peut remarquer que l'on a $\tilde{\Gamma}_{lw} = (\tilde{\Gamma}_l \cap \tilde{\Gamma}_w) \setminus \tilde{\Sigma}_s$.

pose du stent. Ainsi qu'annoncé dans l'introduction, l'objectif est de trouver la bonne quantité de produit à disposer sur le stent : il faut en mettre suffisamment pour limiter efficacement la croissance des cellules lisses, sans toutefois dépasser le seuil de toxicité du produit.

Pour ce faire, nous devons trouver une quantité physique reflétant l'impact de l'agent médicamenteux en chaque point du vaisseau sanguin. Les études expérimentales sur ce type de situation indiquent que c'est l'effet combiné de la concentration et du temps de contact qui contrôle la mortalité des cellules : une forte concentration subie sur un court laps de temps peut avoir un effet semblable à une faible concentration soutenue sur une longue période. Il est alors naturel de considérer, en chaque point x du domaine, l'intégrale de la concentration sur toute la période de temps $t > 0$:

$$q(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{\infty} c(x, t) dt .$$

Nous appellerons cette quantité $q(x)$ la *dose* du produit au point x . C'est la quantité qu'ont déjà utilisée Delfour, Garon et Longo [4] dans leur étude asymptotique du stent à anneaux, et que nous utiliserons ici aussi pour traiter des stents de géométries plus générales⁶.

La dose est déterminée par une équation différentielle découlant de l'équation de diffusion-transport satisfaite par la concentration. Avant de présenter cette équation, nous allons discuter d'une quantité importante qui y intervient, à savoir la vitesse u à laquelle voyage le sang.

3.1.3. Vitesse du sang dans la lumière

Dans le modèle que nous utilisons, l'agent médicamenteux diffuse dans la paroi et dans le sang, mais il est aussi transporté par ce dernier qui voyage dans la lumière du vaisseau. Prenons quelques lignes pour examiner le déplacement de ce liquide.

Nous ferons l'hypothèse que le sang se comporte comme un fluide incompressible, et donc que la vitesse vérifie

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Omega}_l ,$$

⁶Nous précisons plus loin ce qu'englobe l'expression "géométries plus générales".

ce qui est une hypothèse raisonnable compte tenu du fait que les vaisseaux dans lesquels on déploie les stents sont d'un calibre largement supérieur aux capillaires, par exemple, là où les effets non-newtoniens du sang deviennent importants.

Nous supposons de plus que la vitesse est indépendante du temps, qu'elle est bornée et qu'elle vérifie l'un ou l'autre des deux ensembles suivants de conditions au bord :

$$\begin{cases} u \cdot n_l \leq 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{li} , \\ u \cdot n_l \geq 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{lo} , \\ u = 0 & \text{sur } \tilde{\Sigma}_s \cup \tilde{\Gamma}_{lw} ; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \exists \beta > 0, \exists \gamma_{li} \subset \tilde{\Gamma}_{li} \text{ tel que } -u \cdot n_l \geq \begin{cases} \beta & \text{sur } \tilde{\gamma}_{li} , \\ 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{li} \setminus \tilde{\gamma}_{li} , \end{cases} \\ u \cdot n_l \geq 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{lo} , \\ u \cdot n_l = 0 & \text{sur } \tilde{\Sigma}_s \cup \tilde{\Gamma}_{lw} , \end{cases} \quad (8)$$

où $\tilde{\gamma}_{li}$ est une sous-région fixée de $\tilde{\Gamma}_{li}$ autour de son centre de capacité strictement positive⁷. Les conditions (7) et (8) constituent un choix de modélisation du problème correspondant à deux hypothèses quant au comportement du sang au contact de la paroi.

Condition de vitesse nulle. La condition (7) modélise un transport sanguin où le sang adhère ou "colle" à la paroi : d'où $u = 0$ sur la paroi.

Condition de glissement. La condition (8) modélise cette hypothèse selon laquelle il existerait une fine couche lubrifiante le long de la paroi ; dans cette éventualité, le sang glisse comme sur un roulement à bille contre la paroi, et alors on n'a simplement $u \cdot n_l = 0$, c'est-à-dire que le sang ne traverse pas la paroi. À remarquer que nous avons renforcé la condition sur $\tilde{\Gamma}_{li}$; nous reviendrons plus loin sur ce détail.

⁷Au sens de la 2-capacité définie dans Evans et Gariepy [5, p.146].

3.1.4. Équation différentielle

Delfour, Garon et Longo [4] ont déterminé les équations satisfaites par la dose à partir de celles de la concentration du produit, qui satisfait une équation de diffusion dans la paroi et une équation de diffusion-transport dans la lumière.

NOTATION 3.2. Il sera commode de poser

$$q^+ = q|_{\tilde{\Omega}_w}, \quad q^- = q|_{\tilde{\Omega}_l}.$$

Ces équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(D_w \nabla q^+) = 0 & \text{sur } \tilde{\Omega}_w, \\ \operatorname{div}(D_l \nabla q^- - q^- u) = 0 & \text{sur } \tilde{\Omega}_l. \end{cases}$$

Si l'on modélise la vitesse du sang avec les conditions (7) (le cas où le sang "colle" à la paroi), les conditions au bord sur q sont

$$\begin{aligned} \text{au bord de la paroi :} & \begin{cases} D_w \frac{\partial q^+}{\partial n_w} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{wi} \cup \tilde{\Gamma}_{wo} \cup \tilde{\Gamma}_{R+E}, \\ D_w \frac{\partial q^+}{\partial n_w} = c_s & \text{sur } \tilde{\Sigma}_s(\chi); \end{cases} \\ \text{au bord de la lumière :} & \begin{cases} q^- = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{li}, \\ D_l \frac{\partial q^-}{\partial n_l} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{lo}, \\ \frac{\partial q^-}{\partial n_l} = 0 & \text{sur } \tilde{\Sigma}_s(\chi), \end{cases} \end{aligned}$$

où c_s est la concentration surfacique de l'agent médicinal sur le stent. Si l'on modélise la vitesse du sang avec les conditions (8), on remplace la condition $q^- = 0$ sur $\tilde{\Gamma}_{li}$ par

$$D_l \frac{\partial q^-}{\partial n_l} - u \cdot n_l q^- = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{li}.$$

Dans tous les cas, la condition à l'interface paroi-lumière est

$$D_w \frac{\partial q}{\partial n_w} + D_l \frac{\partial q}{\partial n_l} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{lw},$$

où nous avons repris ici la notation simple q pour la dose, puisque sur l'interface, $q^+ = q^-$ (seule la région occupée par le stent peut induire un saut sur la dose).

NOTATION 3.3. Nous désignerons l'ensemble des conditions au bord et celles sur u dans le cas où le sang "colle" à la paroi par \mathcal{C} ; celui de l'autre problème, lorsque le sang "glisse", sera noté par \mathcal{G} . Cette distinction n'aura en bout de compte qu'une importance mathématique secondaire, puisque l'équation variationnelle sera la même dans les deux cas.

Avec les conditions \mathcal{C} , on suppose que l'entrée $(\tilde{\Gamma}_{li} \cup \tilde{\Gamma}_{wi})$ est suffisamment éloignée pour que la diffusion du produit ne puisse compenser l'effet de transport du sang pour s'y rendre, d'où la condition $q = 0$ sur $\tilde{\Gamma}_{li}$.

Avec les conditions \mathcal{G} , on lève cette hypothèse en utilisant des conditions de "transparence" sur $\tilde{\Gamma}_{li}$ et $\tilde{\Gamma}_{lo}$ ⁸, semblables à celles introduites par Chalifour et Delfour [2]. Ces conditions permettent une bonne modélisation de notre problème par un cylindre de longueur finie dans lequel le sang entre par un bout et sort de l'autre, plutôt que de considérer un cylindre de longueur infinie. Notons finalement que nous accompagnons ces nouvelles conditions d'une condition renforcée sur la vitesse à l'entrée (voir les conditions (8)) : nous verrons à l'annexe B que cet ajout permet de pallier la perte de l'inégalité de Poincaré sur le domaine.

3.1.5. Équation variationnelle

On trouve l'équation variationnelle satisfaite par la dose par la technique habituelle : on multiplie par une fonction-test, on intègre par partie et on opère les simplifications que permettent les conditions au bord. Menons pour l'instant ces calculs formellement, c'est-à-dire sans se demander à quel espace appartient cette fonction test. On obtient alors, indifféremment du choix des conditions au bord \mathcal{C} ou \mathcal{G} , que la solution $q(x)$ est telle que pour toute fonction-test v admissible,

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla q \cdot D \nabla v \, dx - \int_{\tilde{\Omega}_l} q u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{lo}} u \cdot n_l q v \, d\Gamma = \int_{\tilde{\Sigma}} c_s \chi v^+ \, d\tilde{\Sigma}, \quad (9)$$

où $D = D(x)$ est la fonction qui donne le coefficient de diffusion du milieu où se trouve x :

$$D(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} D_w & \text{si } x \in \tilde{\Omega}_w, \\ D_l & \text{si } x \in \tilde{\Omega}_l. \end{cases}$$

⁸En fait, celle sur $\tilde{\Gamma}_{lo}$ était déjà utilisée dans le cas précédent.

NOTATION 3.4. Pour simplifier l'écriture, nous noterons la forme bilinéaire constituant le membre de gauche de (9) par

$$a(q, v) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\tilde{\Omega}} \nabla q \cdot D \nabla v \, dx - \int_{\tilde{\Omega}_l} q u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_{lo}} u \cdot n_l q v \, d\Gamma,$$

et la forme linéaire constituant le membre de droite de (9) par

$$\ell(\chi; v) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\tilde{\Sigma}} c_s \chi v^+ \, d\tilde{\Sigma}.$$

3.1.6. Espaces de solution

À voir la forme que prend l'équation variationnelle (9), on sent que la table est mise pour l'utilisation du théorème de Lax-Milgram. Il est donc temps de choisir correctement les espaces dans lesquels nous allons travailler.

Ce point est assez délicat, étant donné notre projet de travailler avec des raffinements de stents. En effet, la concentration du produit, et donc la dose, ne sont pas définies sur le sous-ensemble fermé de C_{R+E} occupé par le stent. En effet, et c'est là le point majeur, comme le stent est une barrière physique dans le vaisseau sanguin, la dose peut avoir des discontinuités, des sauts lorsque l'on passe d'un côté à l'autre du stent. Ce dernier induit donc des surfaces de fissure dans le domaine, et alors d'un stent à l'autre dans un raffinement donné, la dose induite n'est pas définie sur le même domaine ouvert fissuré. Le concept de convergence devra par conséquent être traité avec soin : on se trouve dans le cas de problèmes posés sur des domaines ouverts variables.

Considérons le domaine (donc ouvert et connexe selon notre convention)

$$\tilde{\Omega} \stackrel{\text{déf}}{=} C_{R+E} \setminus \tilde{\Sigma}.$$

Il s'agit d'un domaine avec une fissure, et donc qui n'est pas lipschitzien. On peut tout de même parler de l'espace de Sobolev associé à ce domaine,

$$V(\tilde{\Omega}) \stackrel{\text{déf}}{=} \{v \in H^1(\tilde{\Omega}) \mid v \text{ vérifie les conditions } \mathcal{C} \text{ ou } \mathcal{G}\}.$$

Les fonctions de $V(\tilde{\Omega})$ peuvent donc présenter des sauts le long de $\tilde{\Sigma}$, c'est-à-dire que si l'on introduit

$$v^+ \stackrel{\text{déf}}{=} v|_{\tilde{\Omega}_w} \quad \text{et} \quad v^- \stackrel{\text{déf}}{=} v|_{\tilde{\Omega}_l},$$

alors le saut des traces

$$[v] \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} v^+ \Big|_{\tilde{\Sigma}} - v^- \Big|_{\tilde{\Sigma}}$$

n'est pas n\u00e9cessairement nul sur tout $\tilde{\Sigma}$. Introduisons le sous-espace de $V(\tilde{\Omega})$

$$V(C_{R+E}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{v \in V(\tilde{\Omega}) : [v] = 0 \text{ p.p.}\} .$$

Alors on a le lemme suivant.

LEMME 3.5. Le sous-espace $V(C_{R+E})$ de $V(\tilde{\Omega})$ est ferm\u00e9.

D\u00c9MONSTRATION. Soit une suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset V(C_{R+E})$, qui converge vers $v \in V(\tilde{\Omega})$. Il s'agit de montrer que $v \in V(C_{R+E})$, c'est-\u00e0-dire que $[v] = 0$ presque partout.

Par le th\u00e9or\u00e8me des traces⁹, les applications

$$v \mapsto v^+ \Big|_{\tilde{\Sigma}} \quad \text{et} \quad v \mapsto v^- \Big|_{\tilde{\Sigma}}$$

sont continues, de telle sorte que par lin\u00e9arit\u00e9, l'application $u \mapsto [u]$ est aussi continue. On a donc que

$$0 = [v_n] \longrightarrow [v] \quad \text{dans } L^2(\tilde{\Sigma}) ,$$

et donc que $[v] = 0$ p.p. sur $\tilde{\Sigma}$. □

REMARQUE 3.6. Il n'est pas sorcier de montrer que l'espace $V(C_{R+E})$ est isomorphe \u00e0 $H^1(C_{R+E})$, muni des conditions au bord \mathcal{C} ou \mathcal{G} selon le cas (en prenant $\tilde{\Sigma}_s(\chi) = \emptyset$).

\u00c0 ce stade, les domaines $\tilde{\Omega}$ (fissur\u00e9) et C_{R+E} (sans fissure), qui satisfont l'inclusion $\tilde{\Omega} \subset C_{R+E}$, nous ont permis de construire les espaces de Sobolev $V(\tilde{\Omega})$ et $V(C_{R+E})$, qui satisfont quant \u00e0 eux l'inclusion inverse, $V(C_{R+E}) \subset V(\tilde{\Omega})$. Ces deux espaces sont les "extr\u00eames"; l'espace solution de notre \u00e9quation variationnelle devrait \u00eatre situ\u00e9 quelque part entre les deux. Sa construction selon un proc\u00e9d\u00e9 similaire rencontre cependant une petite difficult\u00e9.

En effet, si l'on choisit un stent d\u00e9termin\u00e9 par la fonction caract\u00e9ristique mesurable χ , alors l'ensemble $\tilde{\Sigma}_s(\chi)$ est mesurable, mais pas n\u00e9cessairement ferm\u00e9, de telle sorte que

$$C_{R+E} \setminus \tilde{\Sigma}_s(\chi)$$

⁹Cf. Ne\u010das [10, p.15].

n'est pas nécessairement ouvert. En conséquence, on ne peut parler de l'espace de Sobolev défini sur $C_{R+E} \setminus \tilde{\Sigma}_s(\chi)$ qui se situerait entre $V(C_{R+E})$ et $V(\tilde{\Omega})$. Il faut donc procéder différemment : on introduit le sous-espace fermé¹⁰ de $V(\tilde{\Omega})$

$$V(\tilde{\Omega}, \chi) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ v \in V(\tilde{\Omega}) : (1 - \chi)[v] = 0 \text{ p.p. sur } \tilde{\Sigma} \right\},$$

qui ne contient que les fonctions de $V(\tilde{\Omega})$ dont le saut est nul sur $\tilde{\Sigma} \setminus \tilde{\Sigma}_s(\chi)$. On a alors les relations d'inclusion cherchées

$$V(C_{R+E}) \subset V(\tilde{\Omega}, \chi) \subset V(\tilde{\Omega}), \quad (10)$$

et ce, quel que soit le stent mesurable donné.

REMARQUE 3.7. Un raffinement $\{\chi_\varepsilon\}$ d'un stent étant donné, il n'y a généralement pas de relation de monotonie entre les différents espaces $V(\tilde{\Omega}, \chi_\varepsilon)$.

3.1.7. Existence

Les bases du problème étant bien établies, on peut montrer le théorème suivant.

Théorème 3.8. *Quelle que soit la fonction caractéristique mesurable χ donnée sur $\tilde{\Sigma}$, l'équation variationnelle (9) admet une unique solution $q = q(x) \in V(\tilde{\Omega}, \chi)$.*

La démonstration consiste à vérifier que toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont bien vérifiées ; ce travail est fait dans l'annexe B.

3.2. STENT ET DOSE ASYMPTOTIQUES

Supposons que nous ayons $\{\chi_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$, le raffinement¹¹ d'un stent donné. Par le théorème 3.8, on peut associer à cette suite la suite $\{q_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ donnant la dose pour chacun des stents du raffinement, avec $q_\varepsilon \in V(\tilde{\Omega}, \chi_\varepsilon)$ pour tout ε . Dans cette section, nous nous intéressons à la limite de cette suite.

REMARQUE 3.9. La concentration surfacique c_s de l'agent médicamenteux est maintenue constante sur tous les stents de la suite.

¹⁰La preuve est analogue à celle du lemme 3.5.

¹¹Au sens de la définition 2.17 ; on a donc par le théorème 2.12 que la suite $\{\chi_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ converge vers une constante ρ dans $L^2(\tilde{\Sigma})$ -faible.

La chaîne d'inclusions (10) nous permet d'écrire que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad V(C_{R+\varepsilon}) \subset V(\tilde{\Omega}, \chi_\varepsilon) \subset V(\tilde{\Omega}). \quad (11)$$

Plongeons les fonctions q_ε dans l'espace commun, $V(\tilde{\Omega})$. On remarque que la suite $\{q_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ est uniformément bornée dans cet espace ; en effet, par coercivité de a , puis par continuité de ℓ , on a pour certaines valeurs $K_1, K_2 > 0$ ¹²

$$\begin{aligned} K_1 \|q_\varepsilon\|_{V(\tilde{\Omega})}^2 &\leq a(q_\varepsilon, q_\varepsilon) = \ell(\chi_\varepsilon; q_\varepsilon) \leq K_2 \|q_\varepsilon\|_{V(\tilde{\Omega})} \\ &\Rightarrow \|q_\varepsilon\|_{V(\tilde{\Omega})} \leq \frac{K_2}{K_1} \end{aligned}$$

L'espace $V(\tilde{\Omega})$ étant réflexif, on peut extraire une sous-suite $\{q_{\varepsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{q_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ qui converge faiblement vers, disons, $q_0 \in V(\tilde{\Omega})$. Nous nous posons maintenant deux questions :

- Ayant en main cette sous-suite qui converge faiblement ainsi que l'équation variationnelle vérifiée par les éléments de cette sous-suite, à savoir

$$a(q_{\varepsilon_n}, v) = \ell(\chi_{\varepsilon_n}, v), \quad \forall v \in V(\tilde{\Omega}, \chi_{\varepsilon_n}), \quad (12)$$

pourrait-on prendre la limite de chaque côté de cette égalité pour obtenir l'équation variationnelle vérifiée par q_0 ?

- Peut-on montrer que *toute* la suite $\{q_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ converge dans $V(\tilde{\Omega})$ -faible vers la fonction q_0 trouvée ci-dessus ?

Comme nous répugnons à poser des questions pour rien, le lecteur aura deviné que l'on peut répondre par l'affirmative à ces deux questions. Commençons par traiter la première des deux, tout en faisant dans notre raisonnement les remarques utiles pour répondre à la seconde par la suite.

L'équation variationnelle (12). Dans le processus de limite, nous allons fixer la fonction-test v et faire tendre n vers l'infini. On doit donc choisir v pour que l'équation (12) soit vérifiée, $\forall n \in \mathbb{N}$. Étant donné l'inclusion (11), nous prendrons $v \in V(C_{R+\varepsilon})$.

¹²Les constantes K_1 et K_2 sont indépendantes de ε , puisque la coercivité de a et la linéarité de ℓ ont été établies sur $V(\tilde{\Omega})$.

La limite de $a(q_{\varepsilon_n}, v)$. Une fonction $v \in V(C_{R+E})$ étant donnée, $a(\cdot, v)$ définit une application linéaire continue sur $V(\tilde{\Omega})$, et donc la convergence faible de $\{q_{\varepsilon_n}\}$ vers q_0 implique que

$$a(q_{\varepsilon_n}, v) \rightarrow a(q_0, v) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

La limite de $\ell(\chi_\varepsilon, v)$. Puisque les fonctions q_ε n'interviennent pas dans la forme linéaire ℓ , nous allons considérer la convergence de toute la suite. Nous savons par le théorème des traces que $v^+|_{\tilde{\Sigma}} \in L^2(\tilde{\Sigma})$; ainsi la convergence faible de χ_ε donne directement que

$$\ell(\chi_\varepsilon; v) = \int_{\tilde{\Sigma}} c_s \chi_\varepsilon v^+ d\tilde{\Sigma} \rightarrow \ell(\rho; v) \quad \text{quand } \varepsilon \searrow 0. \quad (14)$$

Étant donné les convergences (13) et (14), ainsi que l'équation (12) qui nous assure que pour tout $v \in V(C_{R+E})$, il s'agit dans les deux cas de la même suite, on conclut par unicité de la limite que

$$\boxed{\forall v \in V(C_{R+E}), \quad a(q_0, v) = \ell(\rho; v)}. \quad (15)$$

REMARQUE 3.10. Le raisonnement ci-dessus reste valide pour toute sous-suite de la suite $\{q_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$ qui converge faiblement dans $V(\tilde{\Omega})$ vers, disons, q_0' : on obtiendra que q_0' est aussi une solution à l'équation variationnelle (15).

Il convient ici d'insister sur le fait que q_0 est une fonction de $V(\tilde{\Omega})$, alors que les fonctions-test de l'équation (15) ne sont que dans le sous-espace $V(C_{R+E})$. D'où à ce stade, l'équation variationnelle ci-dessus ne nous permet pas de déterminer la fonction q_0 .

À moins que $q_0 \in V(C_{R+E})$...

LEMME 3.11. Soient $\{\chi_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$, une suite de fonctions caractéristiques mesurables sur $\tilde{\Sigma}$, et la suite correspondante $\{q_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$, q_ε donnant la dose pour le stent χ_ε . Supposons que

$$\chi_\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^2(\tilde{\Sigma})\text{-faible} \quad \text{et} \quad q_\varepsilon \rightharpoonup q_0 \text{ dans } V(\tilde{\Omega})\text{-faible,}$$

où $0 < \rho < 1$. Alors $[q_0] = 0$ p.p. sur $\tilde{\Sigma}$, c'est-à-dire que $q_0 \in V(C_{R+E})$.

DÉMONSTRATION. Par convergence faible de $\{q_\varepsilon\}$ dans $V(\tilde{\Omega}) \subset H^1(\tilde{\Omega})$, le saut $[q_\varepsilon] \stackrel{\text{déf}}{=} q_\varepsilon^+|_{\tilde{\Sigma}} - q_\varepsilon^-|_{\tilde{\Sigma}} \in H^{1/2}(\tilde{\Sigma})$ de q_ε sur $\tilde{\Sigma}$ converge fortement dans $L^2(\tilde{\Sigma})$:

$$[q_\varepsilon] \rightarrow [q_0] \quad \text{dans } L^2(\tilde{\Sigma})\text{-fort,}$$

puisque la trace $v \mapsto (v^+, v^-) : H^1(\tilde{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\tilde{\Sigma}) \times H^{1/2}(\tilde{\Sigma})$ est une application linéaire et continue. De plus, par définition de l'espace $V(\tilde{\Omega}, \chi_\varepsilon)$,

$$(1 - \chi_\varepsilon)[q_\varepsilon] = 0 \text{ p.p.}$$

Or, le produit d'une suite de fonctions convergeant dans $L^2(\tilde{\Sigma})$ -faible avec une suite convergeant dans $L^2(\tilde{\Sigma})$ -fort converge dans $L^1(\tilde{\Sigma})$ -faible vers le produit des limites ; d'où

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in L^\infty(\tilde{\Sigma}), \quad 0 &= \int_{\tilde{\Sigma}} (1 - \chi_\varepsilon)[q_\varepsilon] \varphi \, d\Gamma \rightarrow \int_{\tilde{\Sigma}} \underbrace{(1 - \rho)}_{\neq 0} [q_0] \varphi \, d\Gamma \\ &\Rightarrow \forall \varphi \in L^\infty(\tilde{\Sigma}), \quad \int_{\tilde{\Sigma}} [q_0] \varphi \, d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

Par densité de $L^\infty(\tilde{\Sigma})$ dans $L^2(\tilde{\Sigma})$, on obtient le même résultat pour $\varphi \in L^2(\tilde{\Sigma})$, d'où en prenant $\varphi = [q_0]$, on obtient bien que $[q_0] = 0$ p.p. \square

Récapitulons. La suite $\{q_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$, associée au raffinement $\{\chi_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$, admet au moins une sous-suite qui converge faiblement dans $V(\tilde{\Omega})$; la limite de cette sous-suite, ainsi que les limites de toutes les éventuelles autres sous-suites convergentes de cette suite, sont des fonctions du sous-espace $V(C_{R+E})$ qui satisfont l'équation variationnelle (15).

Mais alors on en déduit que toutes ces sous-suites convergent vers *la même fonction* q_0 . En effet, puisque $V(C_{R+E})$ est un sous-espace fermé de $V(\tilde{\Omega})$, et que la forme linéaire $\ell(\rho; v)$ est linéaire et continue¹³ sur $V(\tilde{\Omega})$, et donc également sur $V(C_{R+E})$, le théorème de Lax-Milgram permet de conclure au lemme suivant.

LEMME 3.12. Il existe une unique fonction $q_0 \in V(C_{R+E})$ telle que

$$\forall v \in V(C_{R+E}), \quad a(q_0, v) = \ell(\rho; v). \quad (16)$$

On obtient donc le résultat suivant.

¹³La démonstration de ce fait est en tout point semblable à celle que nous donnons en annexe pour la démonstration du théorème 3.8.

Théorème 3.13. Soient $\{\chi_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$, une suite de fonctions caractéristiques mesurables sur $\tilde{\Sigma}$, et la suite correspondante $\{q_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon \leq 1}$, q_ε donnant la dose pour le stent χ_ε . Supposons que

$$\chi_\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ dans } L^2(\tilde{\Sigma})\text{-faible ,}$$

où $0 \leq \rho < 1$. Alors toute la suite $\{q_\varepsilon\}$ converge $V(\tilde{\Omega})$ -faible vers q_0 , l'unique solution de l'équation variationnelle (16).

DÉMONSTRATION. Fixons $v \in V(\tilde{\Omega})$, et considérons la suite réelle

$$\left\{ \langle q_\varepsilon, v \rangle_{V(\tilde{\Omega})} \right\}_{0 < \varepsilon \leq 1} ,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V(\tilde{\Omega})}$ est le produit scalaire dans l'espace de Hilbert $V(\tilde{\Omega})$. La suite $\{q_\varepsilon\}$ étant fortement bornée, elle est faiblement bornée, et donc la suite ci-dessus est une suite réelle bornée.

On peut dès lors en extraire une sous-suite convergeant vers la limite inférieure, et une autre convergeant vers la limite supérieure de cette suite. Puisque ces extractions reviennent à extraire deux sous-suites de $\{q_\varepsilon\}$ faiblement convergentes, la discussion précédente permet de conclure que

$$\liminf_{\varepsilon \searrow 0} \langle q_\varepsilon, v \rangle_{V(\tilde{\Omega})} = \limsup_{\varepsilon \searrow 0} \langle q_\varepsilon, v \rangle_{V(\tilde{\Omega})} = \langle q_0, v \rangle_{V(\tilde{\Omega})} ,$$

c'est-à-dire que toute la suite converge. La fonction-test $v \in V(C_{R+E})$ étant arbitraire, on a bien que toute la suite $\{q_\varepsilon\}$ converge $V(\tilde{\Omega})$ -faible vers q_0 . \square

REMARQUE 3.14. Dans tout ce qui a précédé, nous avons fait l'hypothèse que $\{\chi_\varepsilon\}$ était le raffinement d'un stent au sens de la Définition 2.17. En fait, nous avons utilisé moins : il a suffi que $\chi_\varepsilon \rightharpoonup \rho$.

PERSPECTIVES

Le travail accompli dans ce mémoire a permis de caractériser la dose asymptotique pour des stents de géométries variées. Alors que Delfour, Garon et Longo [4] ont fait ce travail pour le seul stent à anneaux, nous avons pu généraliser ce résultat à des stents périodiques, puis ensuite à des stents dont les "motifs" sont définis par une fonction caractéristique mesurable satisfaisant les hypothèses du théorème 2.12. Ce théorème englobe en outre le cas où certaines parties du stent, couvrant une aire éventuellement négligeable, ne se comportent pas de façon régulière.

Après avoir présenté l'essentiel de ces résultats à mes confrères et consœurs dans le cadre du Séminaire des Étudiants Gradués de Mathématiques, j'ai reçu une question intéressante et tout à fait naturelle : est-on en mesure de déterminer quelle géométrie de stent est optimale, considérant les impératifs médicaux que nous avons présentés en introduction ?

En jettant un coup d'œil à l'équation (16) qui décrit la dose limite q_0 , on voit que celle-ci ne dépend que de ρ , la proportion d'aire occupée par le stent sur une dalle complète. C'est dire que la dose asymptotique est la même pour tous les stents ayant le même paramètre ρ , et donc qu'elle est insensible au détail du motif de chacun de ces stents. D'où l'intérêt que nous avons porté, à la suite de ces travaux, à la théorie de l'homogénéisation pour trouver la caractérisation d'un *correcteur* de la dose limite.

Cette théorie de l'homogénéisation trouve ses racines dans des problèmes multi-échelles rencontrés dans plusieurs domaines de la physique. On entend par "problème multi-échelles" un problème impliquant l'interdépendance de variables d'ordres de grandeur complètement différents. Tel est le cas, par exemple, de l'étude de la conductivité thermique ou électrique d'un matériau lamellé (ou "laminé"), où l'épaisseur des

couches des différentes composantes du matériau est de plusieurs ordres de grandeur inférieure à la dimension du matériau lui-même.

L'idée générale pour aborder ce type de problème est de désolidariser variables macroscopique et microscopique. En termes clairs, on postule que la solution $u_\varepsilon(x)$ du problème (le paramètre ε étant l'ordre de grandeur de la petite échelle) admet le développement suivant :

$$u_\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots, \quad (17)$$

où la variable x est considérée comme la variable macroscopique, et $\frac{x}{\varepsilon}$, la variable microscopique, les deux étant traitées comme si elles étaient indépendantes l'une de l'autre. Dans notre cas, la dose asymptotique q_0 , que l'on sait ne dépendre que de la variable macroscopique, correspondrait au terme u_0 de ce développement. Le correcteur recherché, que l'on souhaite dépendre en plus de la variable microscopique, correspondrait au terme u_1 .

Nous avons exploré deux méthodes pour trouver ce correcteur. La première utilise des calculs formels impliquant le développement à deux échelles (17). La seconde est basée sur l'opérateur d'éclatement périodique développé récemment par D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso [3].

CHOIX DE LA CELLULE DE PÉRIODICITÉ

Une première particularité de notre problème par rapport aux "problèmes-écoles" rencontrés dans la littérature est le type de périodicité de notre domaine. Contrairement, par exemple, à un problème de diffusion dans un média poreux dans lequel les pores sont distribués périodiquement dans tout l'espace (périodicité en 3 dimensions), notre stent n'impose une périodicité que selon les variables ϕ et z du système de coordonnées cylindriques (périodicité en 2 dimensions). D'où l'idée de poser

$$q_\varepsilon(r, \phi, z) = q_0(r, \phi, z) + \varepsilon q_1(r, \phi, z, \eta, \zeta) + \varepsilon^2 q_2(r, \phi, z, \eta, \zeta) + \dots, \quad (18)$$

où

$$\eta = \frac{\phi}{\varepsilon}, \quad \zeta = \frac{z}{\varepsilon}.$$

Or, ce choix de cellule de périodicité ne permet pas de caractériser un correcteur utile au sens expliqué précédemment. En effet, dans la description de l'équation différentielle satisfaite par q_ε (section 3.1.4), la seule condition qui dépend du motif du stent est celle de la dérivée normale de q_ε sur $\tilde{\Sigma}$:

$$D_w \frac{\partial q_\varepsilon^+}{\partial n_w} = c_s \quad \text{sur } \tilde{\Sigma}_s(\chi_\varepsilon).$$

Menons le calcul : le développement (18) mène au développement suivant pour le gradient de q_ε :

$$\nabla q_\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos \phi \partial_r q_0 - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi q_0 \\ \sin \phi \partial_r q_0 + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi q_0 \\ \partial_z q_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sin \phi}{r} \partial_\eta q_1 \\ \frac{\cos \phi}{r} \partial_\eta q_1 \\ \partial_\zeta q_1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon),$$

de telle sorte que sur $\tilde{\Sigma}$,

$$D_w \nabla q_\varepsilon \cdot n_w = D_w \nabla q_\varepsilon \cdot \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -D_w \partial_r q_0 + O(\varepsilon).$$

Mais la fonction $\partial_r q_0$ ne dépend pas de la variable microscopique (donc du motif du stent), alors que la dérivée normale de q_ε sur $\tilde{\Sigma}$ doit l'être.

On en conclut que le choix d'une cellule de périodicité en deux dimensions ne nous a pas permis de "voir" ce qui se passe au niveau microscopique, c'est-à-dire qu'il n'a pas permis que la fonction q_1 apparaisse d'une forme ou d'une autre dans le développement de $D_w \nabla q_\varepsilon \cdot n_w$ pour que l'on puisse la caractériser. Cette conclusion que nous tirons de ce calcul formel a été confirmée par un calcul (un peu plus fastidieux) utilisant la technique des éclatements périodiques.

Nous avons donc été menés à réfléchir davantage sur la physique du problème. Notre équation différentielle est une équation de diffusion : imaginons donc que notre stent est un élément chauffant, et que l'on regarde le domaine C_{R+E} avec des lunettes infra-rouges. De toute évidence, plus on raffine le stent, plus la chaleur s'uniformise dans le domaine (voir la Figure 3.1). La fonction q_0 est justement la limite de cette distribution de chaleur parfaitement uniforme, et elle constitue une première approximation de q_ε pour ε petit. La fonction q_1 que l'on cherche, quant à elle, devrait décrire

les oscillations de q_ε autour de q_0 , oscillations que l'on devine avoir surtout lieu proche du stent. En fait, nous pourrions formuler l'hypothèse suivante : le support du correcteur de q_ε devrait être inclus dans une couche autour du stent dont l'épaisseur diminue avec ε . On touche ici au concept de *couche limite*.

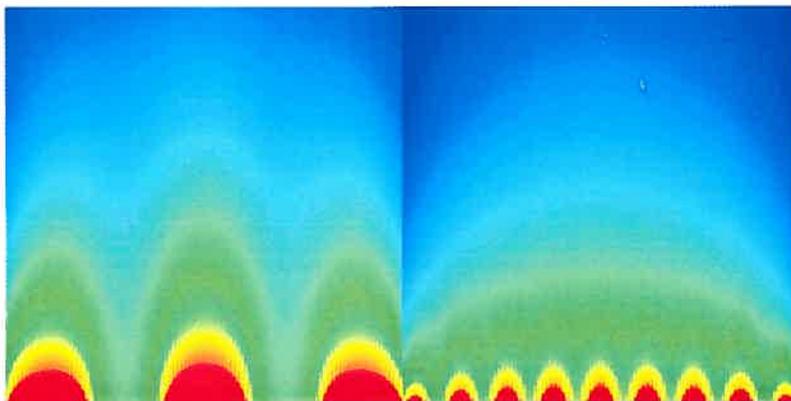


FIG. 3.1. Coupe de la "vue infrarouge" pour deux stents à anneaux.

D'où l'idée qu'une variable microscopique *ayant une composante radiale lorsqu'on se trouve proche du stent* serait nécessaire pour "voir" ce qui s'y passe. Nous avons exploré sommairement cette voie avec les éclatements périodiques, juste assez pour constater le défi de recherche que ce problème réserve à celui qui s'y attaquera. Donnons-en quelques idées avec, pour commencer, la présentation de l'opérateur d'éclatement périodique standard.

On considère l'hypercube¹⁵ $Y = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ comme cellule de périodicité d'un éventuel problème. On peut alors écrire

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} \{k + Y\}.$$

Cette union est une union disjointe, et l'on peut étendre le concept de *partie entière* d'un nombre réel à tout élément de \mathbb{R}^n :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \lfloor x \rfloor \stackrel{\text{déf}}{=} (\lfloor x_1 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor).$$

La *partie complémentaire* de $x \in \mathbb{R}^n$ est quant à elle définie par $\{x\} \stackrel{\text{déf}}{=} x - \lfloor x \rfloor$, et l'on remarque que $\{x\} \in Y$. Si l'on procède à un changement d'échelle à l'aide du paramètre

¹⁵On peut bien sûr prendre n'importe quel pavé.

$\varepsilon > 0$, on obtient que

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} \{\varepsilon k + \varepsilon Y\}$$

et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = \varepsilon \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor + \varepsilon \left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\},$$

cette dernière égalité devenant une évidence lorsqu'on la divise par ε . On peut alors considérer le terme $\varepsilon \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor$ comme étant la coordonnée macroscopique de x , et $\left\{ \frac{x}{\varepsilon} \right\}$, sa coordonnée à l'échelle microscopique. Dans l'optique selon laquelle on souhaite désolidariser les coordonnées macroscopique et microscopique, la définition de l'opérateur d'éclatement périodique ne surprend pas.

Définition 3.15 (Opérateur d'éclatement périodique classique). Soit $\varepsilon > 0$. L'opérateur d'éclatement périodique \mathcal{T}_ε associe à toute fonction $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}^n \times Y$:

$$(\mathcal{T}_\varepsilon u)(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} u\left(\varepsilon \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor + \varepsilon y\right).$$

On appelle la fonction $\mathcal{T}_\varepsilon u$ l'éclaté de u .

Théorème 3.16. On a $\mathcal{T}_\varepsilon : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n \times Y)$, et pour toute fonction $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{R}^n \times Y} (\mathcal{T}_\varepsilon u)(x, y) dx dy$$

REMARQUE 3.17. Dans notre cas, $|Y| \stackrel{\text{déf}}{=} \int_Y dx$ est unitaire.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{\varepsilon k + \varepsilon Y} u(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varepsilon^n \int_Y u(\varepsilon k + \varepsilon y) dy \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|Y|} \int_{\varepsilon k + \varepsilon Y} dx \int_Y u(\varepsilon k + \varepsilon y) dy \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|Y|} \int_{\varepsilon k + \varepsilon Y} \int_Y u(\varepsilon \lfloor x \rfloor + \varepsilon y) dy dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{R}^n \times Y} (\mathcal{T}_\varepsilon u)(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

□

Ayant en main cette formule d'intégration, la technique pour obtenir le correcteur peut se résumer ainsi. Le problème multiéchelle est écrit sous forme variationnelle,

cette équation étant dépendante du paramètre ε qui détermine l'échelle microscopique de la solution u_ε (dans notre cas, il s'agit de l'équation $a(q_\varepsilon, v) = \ell(\chi_\varepsilon, v)$). Les intégrales de cette équation variationnelle sont ensuite transportées du domaine Ω au domaine $\Omega \times Y$ grâce à la formule ci-dessus. Finalement, un choix judicieux de fonctions-test et quelques théorèmes de convergence sur les éclatés de la solution u_ε permettent d'obtenir une équation variationnelle caractérisant le correcteur.

Il nous suffirait donc d'adapter cet opérateur à notre situation, et voir s'il satisfait les mêmes propriétés. Donnons nous par exemple un stent périodique ; suivant les idées d'un article de D. Onofrei à paraître (Onofrei [11]), nous pourrions choisir comme cellule de périodicité un "sandwich" d'épaisseur ε autour de chaque dalle $P_{ij}(\varepsilon)$ (voir Figure 3.2).

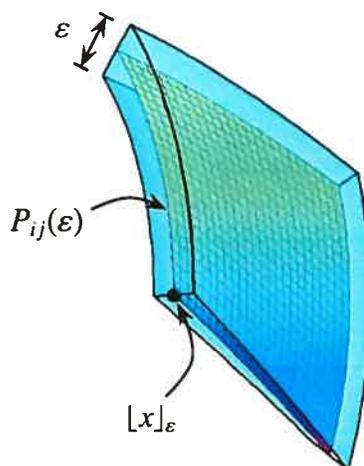


FIG. 3.2. Une cellule associée à une dalle du stent (le maillage à l'intérieur de la dalle n'apparaît que pour aider la visualisation).

La variable macroscopique de tout point de cette cellule correspondrait au "coin inférieur gauche" de la dalle $P_{ij}(\varepsilon)$ (que nous avons noté par $[x]_\varepsilon$ sur la Figure 3.2), et sa variable microscopique serait la différence entre le point considéré et sa coordonnée macroscopique ; on aurait bien ici une variable avec une composante radiale.

Mais beaucoup de questions demeurent. Les théorèmes de convergence sur les éclatés suivront-ils avec cet opérateur adapté ? Comment justifier l'épaisseur arbitraire ε que nous avons donné à notre sandwich, et que fera notre opérateur à l'extérieur de ce sandwich ? Peut-on réellement espérer que q_1 ait son support à l'intérieur d'une couche

limite entourant la zone cible ? Et les dalles incomplètes, dont l'influence était négligeable dans les calculs pour le terme q_0 , seront-elles dérangeantes pour déterminer le correcteur q_1 ?

Ma foi, ces perspectives donnent un léger vertige... Eh bien, soyons sages et faisons comme avec le champagne : arrêtons.

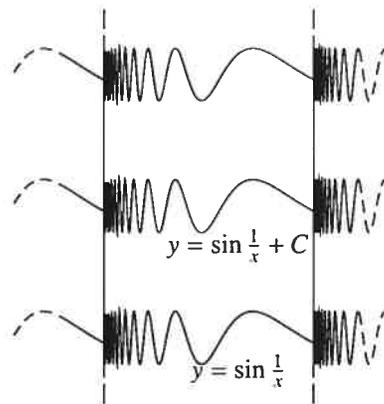
BIBLIOGRAPHIE

1. Bravais, André, *Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace*, Journal de l'École Polytechnique, **19**(1850), 1-128.
2. Chalifour, A., Delfour, M.C., *Optimal distribution of larvicide in running waters*, SIAM J. Appl. Math., **2**(1992), 264-303.
3. Cioranescu, D, Damlamian, A, Griso, G., *Periodic Unfolding and homogenization*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **335**(2002), 99-104.
4. Delfour, M.C., Garon, A., Longo V., *Modeling and design of coated stents to optimize the effect of the dose*, SIAM J. Appl. Math., **65**(2005), 858-881.
5. Evans, L.C, Gariépy, R.F., *Measure theory and the properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
6. Grünbaum, B. et Shephard, G.C., *Tilings and patterns*, éd. W.H.Freeman and compagny, New York, 1986.
7. Le Bris, Claude, *Systèmes multi-échelles : modélisation et simulation*, Springer, New York, 2005.
8. Longo, Vito, *Modélisation des stents en chirurgie cardiaque*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, Montréal, 2003.
9. MacGillavry, Caroline H., *Fantasy & symmetry*, éd. Harry N. Abrams Inc., New York, 1976.
10. Nečas, Jindrich, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, éd. Masson, Paris, 1967.
11. Onofrei, D., *The unfolding operator near a hyperplane and its applications to the Neumann sieve model*, à paraître.
12. Roman, Tiberiu *Les colonnes cylindriques unicolores*, Zeitschrift für Kristallographie, **128**(1969), 300-314.

13. Schattschneider, Doris, *The plane symmetry groups : their recognition and notation*, American Mathematical Monthly, **85**(1978), 439-450

Annexe A

ANALYSE D'UN PATTERN



Nous démontrons dans cette annexe que le pattern construit à partir de l'intérieur des tuiles du dallage de la Figure 1.2(f) est un contre-exemple à la proposition 1.14, tirée de Grünbaum et Shephard [6, p. 252]. Nous en redonnons ici l'énoncé :

Proposition. *Le dallage de Dirichlet de chaque pattern discret périodique est un dallage normal et isohédral dont chaque tuile contient exactement une copie du motif du pattern.*

Nous allons procéder en trois étapes.

- (1) Nous décrivons d'abord mathématiquement ce pattern et son dallage de Dirichlet. Sa périodicité sera immédiate ;
- (2) nous montrerons qu'il est discret,
- (3) mais que son dallage de Dirichlet n'est pas normal, puisque ses dalles ne sont pas homéomorphes au disque unité.

On renvoie le lecteur aux différentes définitions données au chapitre 1 : dallage (p. 6), dallage normal (p. 7), pattern (p. 11) et pattern discret (p. 12).

DÉMONSTRATION. 1. Nous définissons le motif M comme étant

$$M \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, \sin \frac{1}{x} < y < \sin \frac{1}{x} + 1 \right\}$$

et le pattern \mathcal{P} associé comme étant

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ (m, n) + M \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \right\} .$$

Étant toutes délimitées par quatre courbes, les copies de ce pattern sont bien disjointes les unes des autres. Par construction, elles sont des translatés de M , et donc elles sont toutes congrues à M . Finalement, amener la copie $(m_1, n_1) + M$ sur la copie $(m_2, n_2) + M$ se fait bien entendu par la translation $(m_2 - m_1, n_2 - n_1)$, qui est en même temps une symétrie du pattern. Nous avons donc bel et bien défini un pattern au sens de la définition 1.8.

Comme les copies du motifs s'imbriquent parfaitement les unes dans les autres, les tuiles du dallage de Dirichlet de \mathcal{P} , $\mathcal{D}(\mathcal{P})$, sont constituées de l'adhérence de chaque copie du pattern. L'adhérence de M étant

$$M \cup \{0\} \times [-1, 1] \cup \{1\} \times [\sin 1, \sin 1 + 1]$$

on trouve la description de chaque dalle en translatant cet ensemble par $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

2. \mathcal{P} est discret.

- Le motif M est bien sûr borné.
- Il est également connexe par arc, donc connexe. En effet, étant donnés deux points de M , disons $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, on construit un chemin à l'aide de l'unique courbe $\sin \frac{1}{x} + K$, où $0 < K < 1$, qui passe par (x_1, y_1) : si le point (x_2, y_2) n'est pas sur cette courbe, on complète le chemin par une droite verticale unissant la fonction $\sin \frac{1}{x} + K$ et le point (x_2, y_2) . Cette courbe sera rectifiable, puisque $x_1, x_2 > 0$.
- Puisque le motif M est un ouvert, ses copies le sont également, et donc elles sont elles-mêmes les ouverts qui les séparent de toute autre copie du pattern.

3. L'adhérence de M , congrue à chacune des tuiles de $\mathcal{D}(\mathcal{P})$, n'est pas homéomorphe au disque unité. Un homéomorphisme est une bijection continue, dont l'inverse est également continue. Rappelons quelques résultats.

LEMME A.1. Soient (\mathcal{U}, τ) , un espace topologique, $A, B \subset \mathcal{U}$ et $f : A \rightarrow B$ un homéomorphisme. Si ∂A désigne la frontière de A , alors $f(\partial A) = \partial B$, et la restriction de f sur ∂A est un homéomorphisme.

LEMME A.2. Soient (\mathcal{U}, τ) , un espace topologique, $A, B \subset \mathcal{U}$ et $f : A \rightarrow B$ un homéomorphisme. Alors l'image par f d'une composante connexe de A est une composante connexe de B .

Dans le cas où A possède un nombre fini de composantes connexes, le lemme précédent s'énonce souvent : "un homéomorphisme préserve le nombre de composantes connexes".

LEMME A.3. Soient (\mathcal{U}, τ) , un espace topologique et $A \subset \mathcal{U}$ un ensemble connexe. Alors l'adhérence de A , \bar{A} , est connexe, de même que tout ensemble B tel que $A \subset B \subset \bar{A}$.

Ce résultat permet d'établir que

$$\overline{\{(x, y) \mid 0 < x < 1, y = \sin \frac{1}{x}\}} = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \sin \frac{1}{x}\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

est connexe, et que cet ensemble reste connexe si on lui retire le point $(0, 0)$.

L'argument montrant que le motif M n'est pas homéomorphe au disque unité est donc le suivant. Supposons par absurde le contraire ; alors la frontière de M serait homéomorphe au cercle unité. Retirons de ∂M les points $(0, 0)$ et $(0, 1)$, et du cercle l'image de ces deux points par l'homéomorphisme f liant les deux. Les images de ces deux points distincts sont distinctes, et alors en les retirant du cercle, celui-ci se trouve fractionné en deux composantes connexes. Or $\partial M \setminus \{(0, 0), (0, 1)\}$ est encore connexe, et donc on conclut que la restriction de f sur cet ensemble est un homéomorphisme entre deux ensembles n'ayant pas le même nombre de composantes connexe, ce qui est absurde.

D'où M n'est pas homéomorphe au disque unité. □

Annexe B

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION VARIATIONNELLE

Nous donnons ici les détails de la démonstration du Théorème 3.8, que nous rap-
pelons d'abord.

Théorème B.1. *Quelle que soit la fonction caractéristique mesurable χ donnée sur $\tilde{\Sigma}$,
l'équation variationnelle*

$$\int_{\tilde{\Omega}} \nabla q \cdot D \nabla v \, dx - \int_{\tilde{\Omega}_1} q u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_{10}} u \cdot n_1 q v \, d\Gamma = \int_{\tilde{\Sigma}} c_s \chi v^+ \, d\tilde{\Sigma}$$

admet une unique solution $q = q(x)$ dans $V(\tilde{\Omega}, \chi)$.

DÉMONSTRATION. Ainsi que nous l'avons indiqué, il s'agit de vérifier que l'équation (9)
satisfait les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, à savoir que

- (1) la forme bilinéaire a est continue sur $V(\tilde{\Omega}, \chi)$;
- (2) la forme bilinéaire a satisfait la condition de Lax-Milgram sur $V(\tilde{\Omega}, \chi)$, à savoir
que

$$\forall u \in V(\tilde{\Omega}, \chi), \quad |a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_{V(\tilde{\Omega}, \chi)}^2;$$

- (3) la forme linéaire ℓ est continue sur $V(\tilde{\Omega}, \chi)$.

Pour ce faire, il suffit de montrer les trois assertions sur $V(\tilde{\Omega})$, puisque $V(\tilde{\Omega}, \chi)$ est un
sous-espace fermé de $V(\tilde{\Omega})$ quelque soit χ .

1. Pour montrer que a est continue, il faut montrer que

$$\exists C > 0 \quad \forall w, v \in V(\tilde{\Omega}), \quad |a(w, v)| \leq C \|w\|_{V(\tilde{\Omega})} \|v\|_{V(\tilde{\Omega})}$$

Soit $\alpha > 0$, le maximum entre D_w et D_l . On a alors

$$|a(w, v)| \leq \alpha \int_{\bar{\Omega}} |\nabla w|_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|_{\mathbb{R}^3} dx + \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \int_{\bar{\Omega}_l} |w| |\nabla v|_{\mathbb{R}^3} dx + \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \int_{\Gamma_{lo}} |v| |w| d\Gamma,$$

où l'on note, pour $f \in X$ une
fonction à valeurs
vectorielles,

$$\|f\|_X^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^3 \|f \cdot e_i\|_X^2$$

$$\leq \alpha \|\nabla w\|_{L^2(\bar{\Omega})} \|\nabla v\|_{L^2(\bar{\Omega})} + \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \|w\|_{L^2(\bar{\Omega})} \|\nabla v\|_{L^2(\bar{\Omega})} + \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \underbrace{\int_{\partial\bar{\Omega}} |v| |w| d\Gamma}_{\leq \|v\|_{L^2(\partial\bar{\Omega})} \|w\|_{L^2(\partial\bar{\Omega})}}$$

par l'inégalité de Hölder ;

$$\leq \alpha \|\nabla w\|_{L^2(\bar{\Omega})} \|\nabla v\|_{L^2(\bar{\Omega})} + K \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \|\nabla w\|_{L^2(\bar{\Omega})} \|\nabla v\|_{L^2(\bar{\Omega})} + \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \|v\|_{L^2(\partial\bar{\Omega})} \|w\|_{L^2(\partial\bar{\Omega})}$$

par l'inégalité de Poincaré ;

$$\leq \alpha \|\nabla w\|_{V(\bar{\Omega})} \|\nabla v\|_{V(\bar{\Omega})} + K \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \|\nabla w\|_{V(\bar{\Omega})} \|\nabla v\|_{V(\bar{\Omega})} + \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \|v\|_{V(\bar{\Omega})} \|w\|_{V(\bar{\Omega})} \\ \leq [\alpha + (K + 1) \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}] \|\nabla w\|_{V(\bar{\Omega})} \|\nabla v\|_{V(\bar{\Omega})}$$

2. La forme bilinéaire a est aussi coercive, indépendamment du choix de sa définition (c'est-à-dire indépendamment du choix des conditions au bord \mathcal{C} ou \mathcal{G}). En effet, soit cette fois $\alpha > 0$ le minimum entre D_w et D_l . Alors dans les deux cas,

$$a(q, q) = \int_{\bar{\Omega}} D \nabla q \cdot \nabla q dx - \int_{\bar{\Omega}_l} q u \cdot \nabla q dx + \int_{\bar{\Gamma}_{lo}} u \cdot n_l |q|^2 d\Gamma \\ \geq \alpha \int_{\bar{\Omega}} |\nabla q|_{\mathbb{R}^3}^2 dx - \int_{\bar{\Omega}_l} q u \cdot \nabla q dx + \int_{\bar{\Gamma}_{lo}} u \cdot n_l |q|^2 d\Gamma \\ = \alpha \|\nabla q\|_{L^2(\bar{\Omega})}^2 - \int_{\bar{\Omega}_l} \frac{1}{2} u \cdot \nabla |q|^2 dx + \int_{\bar{\Gamma}_{lo}} u \cdot n_l |q|^2 d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 - \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}_i} \operatorname{div}(u |q|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}_i} \operatorname{div} u |q|^2 dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{io}} u \cdot n_l |q|^2 d\Gamma \\
&= \alpha \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 - \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_i} u \cdot n_l |q|^2 d\Gamma + \int_{\tilde{\Gamma}_{io}} u \cdot n_l |q|^2 d\Gamma
\end{aligned}$$

par hypothèse, $\operatorname{div} u = 0$;

$$= \alpha \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 - \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_{ii}} u \cdot n_l |q|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_{io}} u \cdot n_l |q|^2 d\Gamma$$

sur $\tilde{\Sigma}$, soit $u = 0$ avec \mathcal{C} ,

soit $u \cdot n_l = 0$ avec \mathcal{G} .

Dans le cas où $V(\tilde{\Omega})$ est pourvu des conditions \mathcal{C} , on peut faire sauter les deux derniers termes (à cause du signe de $u \cdot n_l$) pour obtenir

$$a(q, q) \geq \alpha \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2,$$

et avec l'inégalité de Poincaré,

$$a(q, q) \geq K\alpha \|q\|_{L^2(\partial\tilde{\Omega})}^2,$$

d'où, en combinant les deux inégalités précédentes, on obtient

$$\Rightarrow a(q, q) \geq \frac{\alpha}{1 + \frac{1}{K}} \|q\|_{V(\tilde{\Omega})}^2.$$

Dans le cas où $V(\tilde{\Omega})$ est pris avec les conditions \mathcal{G} , on perd une condition ($q = 0$ sur une partie de la frontière) garantissant la validité de l'inégalité de Poincaré. C'est à cet endroit que la condition renforcée (8) est utilisée :

$$a(q, q) \geq \alpha \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + \frac{\beta}{2} \int_{\tilde{\gamma}_{ii}} q^2 d\tilde{\Sigma} \geq \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{2}\right\} \left\{ \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + \int_{\tilde{\gamma}_{ii}} q^2 d\tilde{\Sigma} \right\},$$

et la conclusion suit, car le membre de droite est une norme équivalente sur $H^1(\tilde{\Omega})$.

3. On a

$$\begin{aligned}
|\ell(\chi, v)| &\leq c_s \int_{\tilde{\Sigma}} |\chi v^+| d\tilde{\Sigma} \leq c_s \|\chi\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \|v^+\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \\
&\leq c_s \pi R^2 L_s \|v^+\|_{L^2(\partial\tilde{\Omega}_w)} \leq c_s \pi R^2 L_s \|v\|_{V(\tilde{\Omega})}.
\end{aligned}$$

□