Université de Montréal

Sur les solutions invariantes et conditionnellement invariantes des équations de la magnétohydrodynamique

par

Philippe Picard

Département de Physique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Physique

décembre 2003

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Sur les solutions invariantes et conditionnellement invariantes des équations de la magnétohydrodynamique

présentée par :

Philippe Picard

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Pavel Winternitz
(président-rapporteur)

Alfred Michel Grundland
(directeur de recherche)

Alain Vincent
(membre du jury)

Willy Hereman
(examinateur externe)

Véronique Hussin
(représentante du doyen de la FES)

Thèse acceptée le :
05/12/03

Résumé

Cette thèse est consacrée à la résolution des équations de la magnétohydrodynamique en $(3+1)$ dimensions suivant deux méthodes distinctes qui sont basées sur les réductions par symétries et sur les symétries conditionnelles.

Dans le Chapitre 1, nous rappelons les équations constituant la magnétohydrodynamique (MHD) : celles-ci décrivent l'écoulement compressible et isentropique d'un fluide idéal et conducteur soumis à un champ magnétique $\vec{H}$ et dont la conductivité électrique tend vers l'infini. Dans le Chapitre 2, nous présentons d'abord une version de la méthode des symétries conditionnelles pour résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, quasilinéaires, homogènes et du type hyperbolique, cela afin d'obtenir des solutions de rang un (ondes simples) qui s'expriment en termes des invariants de Riemann. Dans la section 2, nous appliquons cette méthode au système constitué des équations MHD pour obtenir les ondes simples de type entropiques, d'Alfvén, magnétoacoustique lente et rapide qui correspondent aux trois modes de propagation en MHD. Dans la section 3, nous généralisons cette méthode aux ondes multiples. Ce qui nous permettra dans la section 4 de construire des ondes doubles décrites par le système MHD qui résultent de la superposition non linéaire de deux ondes simples. Dans la section 5, nous imposons au système MHD des contraintes différentielle desquelles nous obtenons de nouvelles solutions. Dans le chaptre 3, nous appliquons la méthode de réductions par symétries au système MHD. Précisons que l'algèbre de symétrie et la classification des sous-algèbres (dont les dimensions varient entre 1 et 4) par classes de conjugaison ont déjà été calculées dans un travail antérieur [17]. Ici, nous considérons seulement les sous-algèbres du type similitude galiléenne de dimension trois qui nous permettent de réduire le système MHD de départ en un système composé d'équations différentielles ordinaires qui donnent alors des solutions G-invariantes. Dans le Chapitre 4 nous concluons cette thèse par l'analyse des résultats obtenus et des possibles travaux futurs qui en découlent.

Mots clés: MHD, symétries conditionnelles, invariants de Riemann, onde simple, onde double, Groupe de Lie, réductions par symétrie, solutions G-invariantes.

Abstract

This thesis is devoted to the resolution of the equations of magnetohydrodynamics in $(3+1)$ dimensions with two different approaches based on the methods of conditional and classical symmetry reductions.

In Chapter 1, we briefly introduce the equations that constitute magnetohydrodynamics. The flow under consideration is assumed to be ideal, nonstationary and isentropic for a compressible conductive fluid placed in a magnetic field $\vec{H}$. The electrical conductivity of the fluid is assumed to be infinitely large. In Chapter 2, we present in Section 1 a version of the conditional symmetry method for resolving quasilinear hyperbolic systems of partial differential equations of the first order. The rank-one solutions (also called simple waves solutions) obtained by this method are expressed in terms of Riemann invariants. In Section 2, we use it to obtain simple waves of MHD system equations. Section 3 generalizes the above construction to the case of many simple waves described in terms of Riemann invariants. In Section 4 we present some double waves solutions admitted by the MHD equations. Finally, in Section 5 we impose some differential constraints in order to get some new classes of solutions. In Chapter 3, we have applied the symmetry reduction method to the MHD system of equations. The symmetry algebra and its classification by conjugacy classes of r-dimensional subalgebras ($1 \leq r \leq 4$) was already known [17]. We restrict our study to the three dimensional galilean similitude subalgebras that give systems of ordinary differential equation from which we obtain G-invariant solutions. Finally, Chapter 4 contains conclusions of the obtained results and possible futures developments.

Key words : MHD, conditional symmetry, Riemann invariants, simple wave, double wave, Lie groups, symmetry reduction, G-invariant solutions.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé . . . iii

Abstract . . . iv

Liste des tableaux . . . vii

Liste des abréviations et Notation . . . viii

Remerciements . . . x

Introduction . . . 1

CHAPITRE 1. Notions de magnétohydrodynamique. . . . 6

1.1 Les équations de la magnétohydrodynamique. . . . 6

1.2 Les lois de conservation. . . . 14

1.3 La vorticité en MHD. . . . 16

1.4 Le théorème de la conservation du flot magnétique. . . . 17

CHAPITRE 2. Solutions conditionnellement invariantes des équations MHD. Ondes multiples. . . . 19

2.1 Les ondes simples pour des systèmes quasilinéaires d'EDP. . . . 19

2.2 Les ondes simples décrites par le système MHD. . . . 27

2.2.1 Les ondes simples entropiques (E). . . . 31

2.2.2 Les ondes simples d'Alfvén (A). . . . 37

2.2.3 Les ondes simples magnétoacoustiques rapide (F) et lente (S). . . . 40

2.3 Les ondes multiples pour des systèmes quasilinéaires d'EDP. . . . 50

2.4 Les ondes doubles décrites par le système MHD. . . . 55

2.4.1 Les ondes doubles entropiques (E_1E_1). . . . 58

2.4.2 Les ondes doubles d'Alfvén (AA). . . . 61

2.4.3 Les ondes doubles Alfvén-Entropique (AE_1). . . . 62

2.4.4 Les ondes doubles magnétoacoustiques (FF). . . . 70

2.4.5 Les ondes doubles magnétoacoustique et entropique (FE_1). . . . 74

2.5 Résolution du système MHD par imposition de contraintes différentielles. 78

CHAPITRE 3. Réduction par symétrie des équations de la MHD. . 83

3.1 Notions fondamentales sur la théorie des groupes. 83

3.1.1 Groupe local de transformations. 85

3.1.2 Générateur infinitésimal. 86

3.1.3 Groupes et équations différentielles. 89

3.1.4 Prolongation. 91

3.2 La méthode de réduction par symétrie des équations différentielles. . . 95

3.2.1 Conditions frontières. 98

3.3 La M.R.S appliquée aux équations de la MHD. 100

CHAPITRE 4. Conclusion : Discussion et développements futurs. . 164

Références 172

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1. Dégénérescence des vitesses caractéristiques des ondes simples de la magnétohydrodynamique. 48

Tableau 2.2. Propriétés des ondes simples MHD soumises à des contraintes physiques. 49

Tableau 2.3. Les ondes doubles de Riemann décrites par le système d'équations MHD. 57

Tableau 3.1. Liste des variables de symétrie (variables indépendantes) des sous-algèbres de la MHD dont la dimension est trois et la codimension dans l'espace des variables indépendantes est un ; α et $\nu \in I\!R$. 101

Tableau 3.2. Solutions des systèmes réduits ayant en commun comme contrainte sur les composantes de $\vec{H}$: $Z = 0$ 102

Tableau 3.3. Solutions des systèmes réduits ayant en commun comme contrainte sur les composantes de $\vec{H}$: $\beta\gamma X - \beta Y + (1-\gamma t)Z = 0$ 126

Tableau 3.4. Solutions des systèmes réduits ayant en commun comme contrainte sur les composantes de $\vec{H}$: $\beta X + \gamma Y + \frac{dZ}{ds} = 0$ 135

Tableau 3.5. Solutions des systèmes réduits ayant en commun comme contrainte sur les composantes de $\vec{H}$: $\beta X_i + \frac{dX_j}{ds} = 0$ 143

Tableau 3.6. Solutions des systèmes réduits ayant en commun comme contrainte sur les composantes de $\vec{H}$: $\alpha X + s\frac{dX}{ds} - s^2\frac{dY}{ds} = 0$ 149

Liste des abréviations

E.D.O. : équations différentielles ordinaires

E.D.P. : équations aux dérivées partielles

M.H.D. : magnétohydrodynamique

M.R.S. : méthode de réduction par symétrie

M.S.C. : méthode des symétries conditionnelles

Onde E_i $(i = 1,2,3)$: onde simple entropique

Onde A : onde simple d'Alfvén

Onde S/F : onde simple magnétoacoustique lente (S)/rapide (F)

Notation

ε_{ijk} : symbole de Levi-Cevita

δ_{ij} : symbole de Kronecker

E : espace des variables indépendantes

U : espace des variables dépendantes

Γ_f : graphe de la fonction $u = f(x)$

$\vec{e}_i$; $(i = 1,2,3)$: vecteurs orthonormés formant le repère de coordonnées cartésiennes

$\mathrm{x} = \left(t, \vec{\mathrm{x}} = (x,y,z)\right) \in E \subset I\!R^4$: variables indépendantes

ρ : densité du fluide

p : pression hydrodynamique du fluide

$\vec{\mathrm{v}} = (u^i) = (u,v,w)$, $(i = 1,2,3)$: vélocité du flot

$\vec{H} = (H_i) = (H_1, H_2, H_3)$, $(i = 1,2,3)$: champ magnétique

$\mathrm{u} = (\rho, p, \vec{\mathrm{v}}, \vec{H}) \in U \subset I\!R^8$: variables dépendantes

κ : exposant adiabatique du fluide

$a = \left(\kappa p/\rho\right)^{\frac{1}{2}}$: vitesse de propagation du son dans le fluide

$\vec{F}_m = -\frac{1}{4\pi}\vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}) = -\frac{1}{8\pi}\nabla |\vec{H}|^2 + \frac{1}{4\pi}(\vec{H} \cdot \nabla)\vec{H}$: la force de Lorentz

$M = \{J_i, K_i, P_\mu, F, G, H\}$: l'algèbre de symétrie du type similitude-galiléenne des équations de la MHD dont voici la liste des générateurs infinitésimaux qui l'engendrent

$P_\mu = \partial_{x^\mu}$, $(\mu = 0, 1, 2, 3)$: translations,

$K_i = t\partial_{x^i} + \partial_{u^i}$, $(i = 1, 2, 3)$: boosts galiléens,

$J_k = \varepsilon_{ijk}(x^j\partial_{x^j} + u^j\partial_{u^j} + H_j\partial_{H_j})$, $(i, j, k = 1, 2, 3)$: rotations,

$F = x^\mu\partial_{x^\mu}$, $(\mu = 0, 1, 2, 3)$: dilatation,

$G = -t\partial_t - 2\rho\partial_\rho + u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w$: dilatation,

$H = 2\rho\partial_\rho + 2p\partial_p + H_1\partial_{H_1} + H_2\partial_{H_2} + H_3\partial_{H_3}$: dilatation et centre de l'algèbre M,

R et A : les invariants des sous-algèbres étudiées qui sont associés respectivement à la densité et à la pression du fluide,

U, V et W : les invariants des sous-algèbres étudiées qui sont associés respectivement aux composantes de la vitesse $\vec{v}$ du flot,

X, Y et Z : les invariants des sous-algèbres étudiées qui sont associés respectivement aux composantes du champ magnétique $\vec{H}$,

s est désignée comme étant la variable de symétrie de la sous-algèbre étudiée.

$(\ )' = \frac{d}{ds}[\ ]$: la dérivée d'une quantité par rapport à la variable s.

Les constantes arbitraires sont dénotées par C_o, C_1 et $C_2 \in I\!R$; R_o, A_o; U_o, V_o, W_o; X_o, Y_o, Z_o sont des constantes arbitraires réelles associées respectivement à la densité ρ et à la pression p, aux composantes de la vitesse $\vec{v}$ et du champ magnétique $\vec{H}$.

Remerciements

Comme il est coutume de le faire, l'étudiant témoigne d'abord sa profonde gratitude envers son directeur de thèse. Dans mon cas, je dois souligner avec empressement sa contribution inestimable à l'avancement de ma thèse, en l'occurence le professeur Alfred Michel Grundland. En effet, je lui serais toujours redevable pour m'avoir initié à la physique mathématique notamment grâce à son excellent cours "Équations de la Physique Mathématique" et de ses innombrables cours personnels traitant de l'application de la théorie des groupes aux équations différentielles. Sans cet apport académique absolument indispensable, cette thèse n'aurait pas abouti. Je le remercie aussi pour son support financier.

Aussi, je voudrais exprimer ma profonde reconaissance envers le professeur Pavel Winternitz qui a fortement enrichi mes connaissances sur le sujet notamment avec son cours "Symétries et Équations Différentielles" et ses judicieux conseils.

Je tiens à souligner la contribution des professeurs Raynald Laprade, ancien directeur du département de physique, et Jean Le Tourneux qui m'ont permis d'entreprendre ce présent doctorat à l'automne 1999 sous la gouverne du professeur Alfred Michel Grundland et surtout pour avoir veillé à son bon déroulement.

Également, je ne peux passer sous silence le soutien constant et le professionnalisme du personnel du Centre de Recherches Mathématiques, dont le travail contribue grandement à créer un milieu propice à la recherche.

J'aimerais ensuite remercier les membres du jury pour le temps consacré à l'évaluation de ce présent travail.

Finalement, je ne peux oublier le support tant matériel (couvert et gîte) que psychologique de mes parents, soient mon père Jean Picard et ma mère Marie Marthe Gauthier. Sans leur aide, l'accomplissement de cette thèse n'aurait été possible.

Introduction

L'objectif de cette thèse est de trouver certaines classes de solutions pour les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) avec l'approche des symétries ponctuelles de Lie. Celles-ci sont effectuées en appliquant d'abord des cas particuliers de la méthode des symétries conditionnelles dans le but de construire des ondes multiples de Riemann, et ensuite d'y appliquer la méthode de réduction par symétrie (MRS). Les équations MHD étudiées dans ce travail décrivent le flot isentropique et non stationnaire d'un fluide idéal, conducteur et compressible soumis à un champ magnétique $\vec{H}$. Les effets dissipatifs sont négligeables: la viscosité et la conductivité thermique du fluide sont nulles. La conductivité électrique σ est suffisament élevée pour que $\sigma \mapsto \infty$. Nous supposons qu'il n'y a aucune force externe agissant sur le fluide. Le milieu considéré est isotrope, sans conditions frontières et initiales. Sous les hypothèses ci-haut considérées, les équations MHD en $(3+1)$ dimensions peuvent s'exprimer par un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre qui est quasilinéaire et hyperbolique

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\rho + (\nabla\cdot\vec{v})\rho &= 0\,,\\
\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + \nabla p + \frac{1}{4\pi}\vec{H}\times(\nabla\times\vec{H}) &= 0\,,\\
\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)p + \kappa(\nabla\cdot\vec{v})p &= 0\,,\\
\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \nabla\times(\vec{v}\times\vec{H}) &= 0\,,\\
\nabla\cdot\vec{H} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{I}$$

Les variables dépendantes sont notées par ρ, p, $\vec{v}=(u,v,w)$, et $\vec{H}=(H_1,H_2,H_3)$, qui sont respectivement la densité et la pression hydrodynamique du fluide, la vitesse du flot et le champ magnétique, κ est l'exposant adiabatique. Les variables indépendantes sont dénotées par $(x^\mu) = (t, x, y, z) \subset I\!R^4$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Dans la première partie de la thèse, nous introduisons une nouvelle variante de la méthode des symétries conditionnelles (MSC) telle que présentée par A.M. Grundland et J. Tafel [14], [15] pour construire des ondes multiples. Le principe de base de cette approche consiste à ajouter au système de départ certaines contraintes différentielles du premier ordre qui doivent satisfaire le critère de symétrie infinitésimal. Le système d'équations surdéterminé ainsi obtenu, donne dans certains cas un plus large éventail de symétries de Lie ponctuelles et permet alors d'obtenir de nouvelles classes de solutions du système de départ. La MSC a été développée à l'origine par G. Bluman et J. D. Cole [9], puis développée notamment par P. A. Clarkson et P. Winternitz [6], P. J. Olver et P. Rosenau [28], W. I. Fushchych [13]. Pour plus amples informations à ce sujet, on consultera les auteurs P. J. Olver et E.M. Vorobev qui donnent une revue de la MSC dans [29] (vol.3, chap. 11).

Concernant la méthode de réduction par symétrie (MRS) appliquée aux équations MHD, certaines étapes ont déjà été complétées. Voici brièvement le travail accompli. L'algèbre de symétrie du système MHD, dénotée par M, a été déterminée par A.M. Grundland *et al.* [16], et indépendamment par J.C. Fuchs [12]. Elle est engendrée par les 13 générateurs suivants

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial_{x^\mu}, \quad F = x^\mu \partial_{x^\mu}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \\ K_1 &= t\partial_x + \partial_u, \; K_2 = t\partial_y + \partial_v, \; K_3 = t\partial_z + \partial_w, \end{aligned}$$

qui sont identiques à ceux obtenus pour la dynamique des fluides compressibles et idéaux [16], auxquels viennent s'ajouter les générateurs

$$\begin{aligned} G &= -t\partial_t - 2\rho\partial_\rho + u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w, \\ H &= 2\rho\partial_\rho + 2p\partial_p + H_1\partial_{H_1} + H_2\partial_{H_2} + H_3\partial_{H_3}, \\ J_1 &= (y\partial_z - z\partial_y) + (v\partial_w - w\partial_v) + (H_2\partial_{H_3} - H_3\partial_{H_2}), \\ J_2 &= (z\partial_x - x\partial_z) + (w\partial_u - u\partial_w) + (H_3\partial_{H_1} - H_1\partial_{H_3}), \\ J_3 &= (x\partial_y - y\partial_x) + (u\partial_v - v\partial_u) + (H_1\partial_{H_2} - H_2\partial_{H_1}). \end{aligned}$$

Les générateurs P_μ, K_i, et J_k sont associés respectivement aux translations spatiales et temporelle, aux boosts galiléens, et aux rotations. Les générateurs F, G et H représentent des dilatations. Les relations de commutation entre les générateurs sont les suivantes :

(I) L'algèbre galiléenne est engendrée par $\{P_\mu, J_k, K_i\}$:

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k\,, \qquad [J_i, P_j] = \epsilon_{ijk} P_k\,, \qquad [J_i, P_o] = 0,$$
$$[J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k\,, \qquad [K_i, P_o] = -P_i, \qquad [K_i, K_j] = 0,$$
$$[P_i, P_j] = 0, \qquad [K_i, P_j] = 0.$$

Ici ϵ_{ijk} est le symbôle de Levi-Cevita avec $i, j, k = 1, 2, 3$.

(II) L'algèbre similitude-galiléenne est engendrée par $\{P_\mu, J_k, K_i, F, G, H\}$:

$$[F, P_o] = -P_o, \qquad [F, P_i] = -P_i, \qquad [F, K_i] = 0,$$
$$[F, J_G] = 0, \qquad [G, J_i] = 0, \qquad [F, K_i] = 0,$$
$$[G, P_o] = P_o, \qquad [G, P_i] = 0, \qquad [G, K_i] = -K_i\,,$$

où H est le centre de l'algèbre M.

Par la suite A.M. Grundland *et al.* [17] ont classifié les sous-algèbres du type similitude galiléenne par les classes de conjugaison dont les dimensions varient entre 1 et 4 inclusivement. Leur méthode de classification est basée sur un algorithme développé par J. Patera *et al.* [31] [32]. Précisons que la classification des sous-algèbres galiléennes a été établie précédemment par L. Gagnon *et al.* [26].

Dans cette thèse, nous utilisons systématiquement la structure des sous-groupes d'invariance de la MHD pour obtenir toutes les réductions par symétrie. Nous nous limitons ici au cas quand les variables de symétrie sont invariantes par rapport aux sous-groupes ayant des orbites génériques de codimension 1 dans l'espace des variables indépendantes. La MRS permet de reduire le système MHD de départ en un système composé d'équations différentielles ordinaires (EDO). Ensuite, on étudie la structure des singularités des EDO pour déterminer si elles possèdent les propriétés de Painlevé. Nous donnons en détail la procédure de construction des solutions des systèmes réduits et nous présentons une interprétation physique des résultats obtenus.

De nombreux travaux sur les équations MHD ont été effectués en employant les algèbres galiléenes, citons notamment Fuchs [12], Coggeshall [8], Infeld [23]. À notre connaissance, aucune recherche basée sur les sous-algèbres similitude-galiléennes n'a été effectuée jusqu'à maintenant. Par conséquent, dans ce travail nous utilisons systématiquement ce type de sous-algèbres pour étudier les équations MHD en $(3+1)$ dimensions. Le nombre de sous-algèbres de dimension trois déterminées par les classes de conjugaison est égale à 104. Parmis tous ces représentants, 92 de ceux-ci nous mènent à des systèmes réduits d'EDO. Pour les douze sous-algèbres restantes, le rang de la matrice caractéristique constituée des champs vectoriels associés à ces sous-algèbres est de rang 1 (*i.e.* le défaut de structure de la solution $\delta = rang\,[Q_k^\alpha] = 1$). Donc les solutions correspondantes sont partiellement invariantes (SPI), cependant nous ne les abordons pas de manière systématique dans cette thèse.

Le corps de la thèse sur ce sujet comporte trois chapitres. Dans le **Chapitre 1**, nous introduisons les équations classiques de la MHD (*cf.*(I)) par une brève interprétation physique de celles-ci. Ensuite nous donnons les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie. Puis nous concluons par le théorème de Kelvin concernant la vorticité du fluide et le théorème de conservation du flot magnétique.

Dans le **Chapitre 2**, à la **section 1** ; nous présentons la méthode de construction des solutions de rang un (ondes simples de Riemann) pour des systèmes d'EDP hyperboliques et quasi-linéaires du premier ordre. Pour obtenir ces classes de solutions, une version de la MSC a été développée à partir d'une distribution abélienne de champs vectoriels constituant les symétries du système d'EDP de départ et qui est sujette à certaines contraintes différentielles du premier ordre. Dans la **section 2**, nous appliquons cette méthode pour construire des ondes simples de Riemann qui sont admises comme solutions du système MHD en $(3+1)$ dimensions. Par la suite nous retrouvons les trois modes de propagation présents en MHD ; ceux-ci sont déjà connus dans la littérature traitant du sujet: Boillat [3], L. Landau et E. Lifshitz [25]; les ondes entropiques, d'Alfvén et magnétoacoustiques lente et rapide. La **section 3** contient une généralisation de la MSC ayant comme but de construire des solutions de rang k ($k \geq 2$). Cela inclut les ondes multiples de Riemann (k-ondes). Dans la **section 4**, on applique la méthode présentée dans la **section 3** pour construire des ondes doubles admises comme solutions du système MHD : nous en avons trouvé une quinzaine. Finalement **la section 5** est consacrée à la résolution du système MHD par l'imposition de contraintes différentielles du type "side conditions" telles que discutées dans [30]. Dans certains cas, nous retrouvons les résultats obtenus par la MSC mais aussi de nouvelles solutions sont trouvées et une certaine interprétation physique y sera donnée.

Dans le **Chapitre 3, section 1** nous résumons l'application de la théorie des groupes aux équations différentielles. Ce qui nous permet d'introduire dans la **section 2** la MRS par une brève synthèse de celle-ci et de son application aux équations MHD dans la **section 3** : nous présentons les solutions des systèmes réduits et donnons une certaine interprétation physique des résultats obtenus.

Le **Chapitre 4** contient les conclusions et les développements futurs. En particulier, nous considérons la possibilité de traiter les solutions partiellement invariantes en y présentant un exemple. Nous voudrions souligner que très peu de ces classes de solutions sont données dans la littérature traitant de MHD. Celles-ci feront l'objet d'un travail futur.

Finalement, soulignons que cette thèse a fait l'objet de deux publications **(sous presse)** :

A.M. Grundland and P. Picard, "On Conditionally Invariant Solutions of Magnetohydrodynamic Equations. Multiple Waves", *J. Nonlinear Math. Phys.* **11,1**,(2004).

A.M. Grundland and P. Picard, "Invariant and Conditionally Invariant Solutions of Magnetohydrodynamic Equations in (3+1) Dimensions", *Proceedings of the Fifth International Conference SYMMETRY in Nonlinear Mathematical Physics*,(2004).

1. Notions de magnétohydrodynamique.

1.1 Les équations de la magnétohydrodynamique.

Dans ce chapitre, nous débutons par une brève description des équations formant la *magnétohydrodynamique idéale* et leurs conditions de validité. Ensuite nous donnons les lois de conservation (impulsion et énergie) et la vorticité du fluide. Puis nous conclurons par le *théorème de conservation du flot magnétique.* Nos principales références sont les ouvrages de Davidson [10], Landau et Lifshitz [25], et Shih-Pai [37].

Nous considérons un fluide *conducteur*, de densité ρ, qui s'écoule dans un champ magnétique externe $\vec{B}$ sans dissiper d'énergie ; le fluide est dit *parfait* ou *idéal.* La présence du champ $\vec{B}$ influence le mouvement hydrodynamique des porteurs de charge qui composent le fluide : des champs électriques y sont induits et il en résulte des courants électriques. Mais, des forces d'origine électromagnétique agissent sur ces courants et peuvent alors modifier notablement le mouvement du fluide. D'autre part, ces mêmes courants électriques changent le champ magnétique lui-même. Les effets hydrodynamiques et électromagnétiques sont donc inter-reliés. Qualitativement pour décrire le mouvement du fluide, on doit ajouter aux équations de l'*hydrodynamique* celles de Maxwell qui régissent les interactions électromagnétiques entre $\vec{B}$ et la vitesse du flot $\vec{\mathrm{v}}$. Nous obtenons alors un système d'équations couplées qui composent la *magnétohydrodynamique* (MHD).

Nous commençons par *l'équation de continuité* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\mathrm{v}}) = 0. \tag{1.1.1}$$

qui représente la conservation de la masse à l'intérieur d'un volume fixe.

On introduit la dérivée *lagrangienne* (ou *convective*) qui donne la variation d'une quantité dans le référentiel se déplaçant avec une particule de fluide :

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) . \tag{1.1.2}$$

Dans l'équation (1.1.2), la partie $\partial/\partial t$ donne la variation dans le temps en un point fixe alors que $(\vec{v} \cdot \nabla)$ traduit le changement spatial dans la direction de $\vec{v}$ résultant du déplacement du fluide à un instant donné.

L'équation de continuité se récrit dans le référentiel en mouvement comme suit :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0. \tag{1.1.3}$$

Ensuite nous avons l'*équation d'Euler*

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{F}_{em} . \tag{1.1.4}$$

qui donne le bilan des forces volumiques (force par unité de volume) agissant sur un élément de fluide : p étant la *pression hydrodynamique* exercée par la matière environnante, les seules forces extérieures présentes sont d'origine électromagnétique: $\vec{F}_{em}$ (on y reviendra plus loin), l'influence de la gravité est supposée ici comme négligeable.

Les interactions électromagnétiques sont décrites par les équations de Maxwell exprimées en *unités gaussiennes* (cgs) :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \; ; \quad \textit{loi de Faraday,} \tag{1.1.5}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \; ; \quad \textit{loi d'Ampère,} \tag{1.1.6}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \; ; \quad \text{inexistance de monopôles magnétiques,} \tag{1.1.7}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide, $\vec{E}$, $\vec{H}$, et $\vec{J}$ sont respectivement le champ électrique, l'intensité magnétique et la densité de courant. Le milieu considéré n'est pas magnétique si bien que la perméabilité μ_m est proche de l'unité : $\vec{B} \sim \vec{H}$.

Par ailleurs, la densité de courant $\vec{J}$ est reliée aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par la *loi d'Ohm*

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \frac{\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}}{c}\right), \tag{1.1.8}$$

où le *champ d'induction électrique* $(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B})/c$ s'ajoute au champ électrique $\vec{E}$ produit dans le repère fixe, la conductivité électrique σ est scalaire et elle n'est pas modifée par la présence du champ magnétique $\vec{B}$; le milieu considéré est isotrope.

La validité de la magnétohydrodynamique repose sur trois conditions auxquelles sont associées les trois paramètres suivants :

(i) la vitesse du flot est non relativiste :

$$R_c \equiv \frac{|\vec{\mathrm{v}}|^2}{c^2} \ll 1,$$

(ii) le champ électrique mesuré $\vec{E}_o$ et le champ d'induction sont du même ordre :

$$R_e \equiv \frac{cE_o}{\mathrm{v}_o H_o} \sim 1,$$

où l'indice "o" spécifie les valeurs expérimentales. Puisque le fluide est un conducteur parfait ($\sigma \to \infty$), pour des valeurs finies de $\vec{J}$ et $\vec{B}$ il faut donc que $\vec{E} + (\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B})/c = 0$.

(iii) l'échelle de temps considérée t_o est du même ordre que le rapport entre la *longueur caractéristique* L : la distance sur laquelle $\vec{\mathrm{v}}$ et $\vec{H}$ varient notablement et $\vec{\mathrm{v}}_o$:

$$R_t \equiv \frac{t_o \mathrm{v}_o}{L} \sim 1,$$

autrement dit, les phénomènes de hautes fréquences sont ignorés.

Ces conditions nous permettent de faire certaines approximations. Pour les justifier, nous introduisons les variables sans dimension suivantes (toutes proches de l'unité) :

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad \nabla^* = L \cdot \nabla, \quad t^* = \frac{t}{t_o}, \quad \vec{V}^* = \frac{\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{v}_o},$$
$$\vec{E}^* = \frac{\vec{E}}{E_o}, \quad \vec{H}^* = \frac{\vec{H}}{H_o}, \quad \vec{J}^* = \frac{c\vec{J}}{\sigma \mathrm{v}_o H_o}.$$

La loi d'Ampère (1.1.6) s'exprime en terme de ces quantités comme suit:

$$\frac{1}{R_\sigma}\nabla^* \times \vec{H}^* = \vec{J}^* + \frac{R_c}{R_\sigma}\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial t^*}, \tag{1.1.9}$$

où

$$R_\sigma = \frac{4\pi\sigma}{c^2} L \mathrm{v}_o$$

est une quantité sans dimension appelée le *nombre de Reynolds magnétique.* En pratique, pour un fluide conducteur, on a $R_c/R_\sigma \ll 1$. Par conséquent, le courant de déplacement, qui correspond au dernier terme de l'équation (1.1.9), est toujours négligeable par rapport au rotationnel de $\vec{H}$.

Ainsi la loi d'Ampère (1.1.6) se résume à

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}, \tag{1.1.10}$$

où l'on note que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$: le courant de déplacement est effectivement nul.

Maintenant nous pouvons déterminer l'équation d'évolution de $\vec{H}$ à partir de la loi de Faraday (1.1.6) dans laquelle les variables $\vec{E}$ et $\vec{J}$ sont éliminées aux moyens des équations (1.1.8) et (1.1.10) pour obtenir :

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{\mathrm{v}} \times \vec{H}) + \nu_H \nabla^2 \vec{H}, \tag{1.1.11}$$

où

$$\nu_H = \frac{c^2}{4\pi\sigma} = \frac{L\mathrm{v}_o}{R_\sigma}$$

est la *viscosité magnétique.* L'équation (1.1.11) met en évidence le couplage entre $\vec{H}$ et le champ de vitesse $\vec{\mathrm{v}}$; si le mouvement du fluide est connu, elle décrit l'évolution de $\vec{H}$. De plus, il ressort de cette équation deux mécanismes différents qui font évoluer $\vec{H}$ en un point donné : le premier dépend de la vitesse du fluide alors que l'autre est proportionnel à sa résistivité.

Supposons que le fluide soit au repos, l'équation (1.1.11) se réduit à

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nu_H \nabla^2 \vec{H}.$$

Sous cette forme, on retrouve l'analoge vectorielle d'une équation de diffusion : ν_H étant le coefficient de diffusion de $\vec{H}$. Ceci exprime le fait que toute perturbation locale de $\vec{H}$ tend à s'attenuer par diffusion dans un temps de relaxation $\tau_d \sim 1/\nu_H$.

Au contraire, quand la conductivité électrique $\sigma \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \nu_H \to 0$ (ou $R_\sigma \gg 1$), c'est-à-dire pour des durées $t \ll \tau_d$: ce qui correspond aux conditions de validité de la MHD, on a comme équation d'évolution de $\vec{H}$:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{\mathrm{v}} \times \vec{H}). \tag{1.1.12}$$

Le mécanisme de convection est dominant: les lignes de force sont alors entraînées avec le fluide. Nous le prouverons dans la dernière section de ce chapitre.

Pour calculer $\vec{\mathrm{v}}$ à partir de l'équation d'Euler (1.1.4), on doit d'abord faire le bilan des forces volumiques d'origine électromagnétique :

$$\vec{F}_{em} = \rho_e \vec{E} + \vec{F}_m$$

où $\rho_e \vec{E}$ est la force électrique par unité de volume engendrée par la densité de charge ρ_e et $\vec{F}_m$ est la force de Lorentz volumique :

$$\vec{F}_m = \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{H}\,.$$

En comparant la force électrique et la force de Lorentz $\vec{F}_m$, on a

$$\frac{|\rho_e \vec{E}|}{\frac{1}{c}|\vec{J} \times \vec{B}|} \sim R_c \ll 1 \; :$$

ceci confirme l'hypothèse du conducteur parfait car tout écart à la neutralité électrique du fluide est immédiatement compensée, on peut donc considérer $\rho_e = 0$.

En tenant compte de l'expression (1.1.9), la force de Lorentz s'écrit

$$\vec{F}_m = -\frac{1}{4\pi} \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H})\,,$$

qui peut également s'exprimer sous la forme

$$\vec{F}_m = -\frac{1}{8\pi} \nabla |\vec{H}|^2 + \frac{1}{4\pi} (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H}. \tag{1.1.13}$$

Pour mettre en évidence l'action qu'exerce $\vec{H}$ sur la *matière fluide*, on exprime $\vec{F}_m$ dans le *repère de Frenet-Serret* fixé à une ligne de force locale qui se déplace avec le fluide [11]. On note par $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$ les vecteurs unitaires formant ce repère et ceux-ci sont respectivement tangentiel, normal et binormal à cette ligne de force locale. Les dérivées dans ces directions respectives sont notées par : $\partial/\partial\tau$, $\partial/\partial n$ et $\partial/\partial b$.

Dans le repère de Frenet-Serret, on exprime

$$(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H} = \vec{H}\frac{\partial}{\partial b}(H\vec{\tau}) = \frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial b}(|\vec{H}|^2) + \frac{|\vec{H}|^2}{\mathcal{R}_c}\vec{n}$$

en précisant que

$$\frac{\partial\vec{\tau}}{\partial b} = \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}_c}$$

où $\mathcal{R}_c$ est le *rayon de courbure locale.* La force de Lorentz s'écrit donc dans ce repère:

$$\vec{F}_m = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{|\vec{H}|^2}{\mathcal{R}_c} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}(|\vec{H}|^2)\right)\vec{n} - \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial}{\partial b}(|\vec{H}|^2)\right)\vec{b}. \tag{1.1.14}$$

Ainsi, dans le plan perpendiculaire à $\vec{H}$ (*i.e.* le plan normal formé par les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{b}$), la force de Lorentz $\vec{F}_m$ est la somme d'un gradient de pression isotrope, appelée la *pression magnétique* : $p_M = |\vec{H}|^2/8\pi$, et d'une *tension magnétique* (ou force de traction) qui "tend" les lignes de force (comme des cordes élastiques soumises à une tension) dans la direction $\vec{n}$ (*i.e.* le terme $|\vec{H}|^2/\mathcal{R}_c$ provenant de $(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}$).

Nous obtenons alors la forme définitive de l'équation d'Euler (1.1.4) :

$$\rho\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} + \nabla p + \frac{1}{4\pi}\vec{H}\times(\nabla\times\vec{H}) = 0. \tag{1.1.15}$$

Pour décrire complètement le flot, on doit ajouter aux équations (1.1.1), (1.1.12) et (1.1.15) l'*équation d'état* qui relie la densité ρ et la pression p. Le fluide étant parfait: il n'y aucune dissipation d'énergie sous forme de frottement, ni d'échange de chaleur entre le fluide et le milieu environnant. Ces conditions sont vérifiées par les relations:

$$R_\nu \equiv \frac{\mathrm{v}_o L}{\nu} \ll 1\,, \qquad R_{\mathcal{K}} \equiv \frac{\mathcal{K}}{c_p} \ll 1$$

où R_ν est le *nombre de Reynolds hydrodynamique*, ν est la viscosité cinématique, $\mathcal{K}$ est la *conductivité thermique*, et c_p est la chaleur spécifique du fluide à pression constante par unité de volume.

L'écoulement du fluide est *adiabatique* (absence d'apport calorifique) de sorte que l'*entropie* s du fluide est une quantité conservée le long du flot :

$$\frac{ds}{dt} = 0.$$

Ceci implique que tout processus est par nature *réversible*. Le flot est dit *isentropique*. En MHD, l'approximation du gaz parfait est valable pour décrire la fonction d'état du fluide en équilibre thermodynamique. Selon la théorie cinétique classique, l'équation d'état d'un tel gaz s'exprime par

$$p = \rho R T$$

où R est la *constante spécifique* propre au gaz et T est sa température. La chaleur spécifique à volume constant c_V est reliée à c_p par l'*équation de Mayer* :

$$c_p - c_V = R\,.$$

On considère ici c_p et c_V comme des constantes. Dans ce cas l'entropie est donnée par

$$s = c_V \ln\left[p\rho^{-\kappa}\right] + s_o\,,$$

où s_o est une constante arbitraire et $\kappa = c_p/c_V$ est *l'exposant adiabatique* qui vaut en particulier 5/3 pour un gaz monoatomique situé dans un espace à trois dimensions. On peut alors relier p et ρ par une fonction de l'entropie

$$A(s) = \frac{p}{\rho^\kappa}\,,$$

où $A(s)$ satisfait la loi de conservation (1.1.15) qui donne en considérant (1.1.3) :

$$\frac{dp}{dt} + \kappa(\nabla \cdot \vec{v})p = 0\,. \tag{1.1.16}$$

Maintenant nous sommes en mesure d'introduire le système MHD qui se compose des équations (1.1.1), (1.1.15), (1.1.16), (1.1.12) et (1.1.7) disposées dans l'ordre suivant

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} + (\nabla\cdot \vec{\mathrm{v}})\rho &= 0\,,\\
\rho\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} + \nabla p + \frac{1}{4\pi}\vec{H}\times(\nabla\times\vec{H}) &= 0\,,\\
\frac{dp}{dt} + \kappa(\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}})p &= 0\,,\\
\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \nabla\times(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{H}) &= 0\,,\\
\nabla\cdot\vec{H} &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{1.1.17}
$$

Celles-ci, appelées aussi les *équations de Lundquist*, décrivent complètement le mouvement du fluide et le champ magnétique $\vec{H}$ dans lequel il s'écoule. Elles forment un système *hyperbolique* composé de neuf équations aux dérivées partielles *quasilinéaires* du premier ordre dont les inconnues sont les composantes de $\vec{\mathrm{v}} = (u,\, v,\, w)$, la densité ρ, la pression p, et les composantes de $\vec{H} = (H_1,\, H_2,\, H_3)$.

Les équations (1.1.17) sont invariantes sous les transformations de Galilée entre deux référentiels K et K' en mouvement l'un par rapport à l'autre suivant une vitesse constante $\vec{\mathrm{v}}_o$. Les lois de transformations correspondantes s'écrivent :

$$
\begin{array}{lll}
t' = t\,, & \vec{\mathrm{x}}' = \vec{\mathrm{x}} + \vec{\mathrm{v}}_o\, t\,, & \vec{\mathrm{v}}'(\vec{\mathrm{x}}',t') = \vec{\mathrm{v}}(\vec{\mathrm{x}},t) + \vec{\mathrm{v}}_o\, t\,,\\
\rho'(\vec{\mathrm{x}}',t') = \rho(\vec{\mathrm{x}},t)\,, & p'(\vec{\mathrm{x}}',t') = p(\vec{\mathrm{x}},t)\,, & \\
\vec{H}'(\vec{\mathrm{x}}',t') = \vec{H}(\vec{\mathrm{x}},t)\,, & \vec{E}'(\vec{\mathrm{x}}',t') = \vec{E}(\vec{\mathrm{x}},t) - \vec{\mathrm{v}}_o\times\vec{H}(\vec{\mathrm{x}},t)\,. &
\end{array}
$$

Cela traduit le caractère non-relativiste du flot exprimé par la condition (i).

Nous terminons cette section à propos des systèmes d'unités employés en MHD. Dans le présent travail, nous optons pour le système **cgs** dont les unités fondamentales sont la longueur (en *cm*), la masse (en *g*) et le temps (en *seconde*). En unités **MKSA** ou **SI**, les équations MHD conservent la même forme que celles exprimées en unités **cgs** à l'exception de l'équation d'Euler (1.1.15) dont le facteur $1/4\pi$ est remplacé par $1/\mu_o$ où la perméabilté du milieu considéré est proche de celle du vide ($i.e.\ \mu_m \sim \mu_o$).

1.2 Les lois de conservation.

Dans cette section nous résumons les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie qui sont obtenues à partir des équations de la MHD.

Conservation de l'impulsion.

À l'aide des équations (1.1.3) et (1.1.5) on obtient la loi de conservation de l'impulsion

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{\Pi}^h_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial \hat{\Pi}^m_{ik}}{\partial x_k}\,, \qquad i,k = 1,2,3\,, \tag{1.2.1}$$

avec la sommation implicite sur l'indice k, cette équation contient les termes :

$$\hat{\Pi}^h_{ik} = \rho u_i u_k + p\,\delta_{ik} \ : \textit{le tenseur flux de densité d'impulsion hydrodynamique,} \tag{1.2.2}$$

où $\rho u_i u_k$ correspond au transport de la composante ρu_i dans la direction i de l'impulsion par les particules de fluide en mouvement dans la direction k, et $p\,\delta_{ik}$ est le transport de l'impulsion associé aux forces de pression :

$$\hat{\Pi}^m_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\delta_{ik}H^2 - H_i H_k\right] \ : \ \textit{le tenseur des contraintes de Maxwell,} \tag{1.2.3}$$

dont la divergence donne la force de Lorentz $\vec{F}_m$ (*e.g.* (1.1.13))

Conservation de l'énergie.

La loi de conservation de l'énergie s'exprime sous la forme abrégée

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(E_h + E_m\right) = -\nabla\cdot\left(\vec{q}_h + \vec{S}\right). \tag{1.2.4}$$

Les quantités E_h et $\vec{q}_h$ sont respectivement la densité d'énergie et le flux d'énergie hydrodynamique qui résultent exclusivement du mouvement du fluide :

$$E_h = E_c + \rho K \tag{1.2.5}$$

où $E_c = \frac{1}{2}\rho v^2$ est l'énergie cinétique et $K = \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p}{\rho}$ est l'*énergie interne.*

$$\vec{q}_h = \vec{q}_c + \rho W \vec{\mathrm{v}}\,; \tag{1.2.6}$$

$\vec{q}_c = \frac{\rho|\vec{\mathrm{v}}|^2}{2}\vec{\mathrm{v}}$ est le flux associé à l'énergie cinétique et $W = K + \frac{p}{\rho}$ est l'*enthalpie.*

On doit ajouter aux équations (1.2.5) et (1.2.6) la densité d'énergie magnétique E_m :

$$E_m = \frac{|\vec{H}|^2}{8\pi}, \tag{1.2.7}$$

précisons que la densité d'énergie électrique est négligeable puisque $E_e \sim R_c|\vec{H}|^2/8\pi$. Le flux d'énergie électromagnétique est donné par le vecteur de Poynting $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi}\vec{H} \times (\vec{v} \times \vec{H}). \tag{1.2.8}$$

Maintenant nous pouvons prouver l'assertion du début : à savoir que les effets hydrodynamiques et électromagnétiques sont effectivement couplés. Pour cela, nous séparons l'équation de conservation de l'énergie en deux sous-équations :

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q}_c - (\vec{v} \cdot \nabla p) + (\vec{F}_m \cdot \vec{v}), \tag{1.2.9}$$

qui signifie que la variation temporelle de l'énergie cinétique E_c résulte des puissances exercées par les forces de pression et de Lorentz et aussi des pertes causées par le flux d'énergie cinétique $\vec{q}_c$ traversant la surface de l'élément de fluide.

De même que

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = -(\vec{F}_m \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{S}, \tag{1.2.10}$$

indique également que la variation temporelle de l'énergie magnétique E_m résulte de la puissance exercée par la force de Lorentz et des pertes causées par le flux d'énergie de Poynting traversant la surface de l'élément de fluide.

Les deux équations (1.2.9) et (1.2.10) nous démontre clairement qu'un changement dans l'énergie cinétique amène un changement dans les forces magnétiques qui conséquemment influencent à leur tour le mouvement du fluide.

1.3 La vorticité en MHD.

La circulation de la vitesse se définit par l'intégrale

$$\Gamma = \oint_C \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{d\ell} = \int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n}\, ds \tag{1.3.1}$$

faite le long d'un contour fermé entourant l'élément de fluide considéré. En utilisant le théorème de Stokes, où l'intégration est faite sur la surface S bornant l'élément de fluide, on a introduit le champ de vecteur $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{\mathrm{v}}$ qui est appelé *vorticité de l'écoulement.*

En présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, la variation de Γ est donnée par

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \cdot \vec{d\ell} = \int_S \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \hat{n}\, ds\,. \tag{1.3.2}$$

Pour déterminer la variation de $\vec{\mathrm{v}}$, on utilise l'équation d'Euler (1.1.4) exprimée sous la *forme de Lamb*

$$\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}} + \frac{1}{2}\nabla[\,|\vec{\mathrm{v}}|^2] = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{4\pi\rho}\vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}). \tag{1.3.3}$$

En prenant le rotationnel de l'équation (1.3.3), on obtient la variation de $\vec{\omega}$

$$\mathcal{D}\,[\vec{\omega}] \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt} + (\nabla \cdot \vec{\mathrm{v}})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{\mathrm{v}} = -\frac{1}{\rho^2}\,[\nabla\rho \times \nabla p] + \frac{1}{4\pi}\,\nabla \times \left[\frac{1}{\rho}\,[\vec{H} \times (\nabla \times \vec{H})]\right]. \tag{1.3.4}$$

En l'absence de $\vec{H}$, pour un fluide parfait dont la densité ρ s'exprime comme une fonction de la densité (fluide *barotrope*) et soumis à des forces conservatrices (*i.e.* dérivant d'un potentiel), la circulation est une quantité conservée (*i.e.* $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$) et $\vec{\omega}$ obéit à une équation d'évolution ayant la même forme que l'équation (1.1.12) ; les lignes de vorticité sont entraînées avec celles du fluide. C'est précisément le *théorème de Kelvin.*

Par contre, ce théorème n'est plus valide en MHD du fait que la force de Lorentz n'est pas nécéssairement conservatrice : elle communique au fluide un mouvement de rotation. Dans ce cas, il démontrable que $\mathcal{D}\,[\vec{\omega}] \geq 0$ et $|\vec{\omega}|$ est donc une fonction croissante [37].

1.4 Le théorème de la conservation du flot magnétique.

Suite à l'équation (1.1.12), nous avons affirmé que pour un fluide parfait, les lignes de force de $\vec{H}$ étaient entraînées avec le flot par convection. Dans cette section, nous l'attesterons en prouvant le théorème de la conservation du flot magnétique ou aussi connu comme le *théorème de convection.* Celui-ci a été énoncé par Alfvén [2].

Considérons un fluide conducteur dont l'écoulement est adiabatique et soumis à un champ magnétique $\vec{H}$. À un instant t donné, soient C un contour fermé bornant un élément de fluide et ℓ une ligne de force de $\vec{H}$. À un instant ultérieur t', les éléments du fluide se sont déplacés : les points de la ligne ℓ décrivent maintenant la ligne ℓ', idem pour le contour C qui s'est transformé en un contour C'. *Par le théorème de convection, il s'ensuit que le flux magnétique $\Phi(C')$ passant à travers C' est égale au flux initial $\Phi(C)$ passant par C, de même que la ligne de force magnétique ℓ' se confond avec la ligne de force initiale ℓ. Il y a donc conservation du flot magnétique.*

La démonstration de ce théorème comporte deux parties. Débutons par l'équation (1.1.5) que l'on intègre comme suit :

$$\int_s (\nabla\times \vec{E}) \cdot \hat{n}\, ds = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \hat{n}\, ds\,, \tag{1.4.1}$$

où $\hat{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface S délimitant l'élément de fluide. Par le théorème de Stokes et à l'aide de l'équation (1.1.6), l'expression (1.4.1) se récrit :

$$\oint_C [\vec{E} + \frac{(\vec{v}\times\vec{H})}{c}] \cdot \vec{d\ell} = \frac{d\Phi}{dt}\,,$$

où Φ est le flux magnétique :

$$\Phi = \int \vec{H} \cdot \vec{ds}.$$

Or nous savons que pour un conducteur parfait $(\sigma \to \infty)$; $\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{H}/c) = 0$, donc la variation dans le temps du flux magnétique est nulle. Conséquemment le nombre de lignes de force traversant le contour fermé demeure toujours constant. Nous venons de prouver la *loi de Faraday.*

La démonstration se complète à partir de l'équation (1.1.12) récrite sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = (\vec{H} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{H} - \vec{H}(\nabla \cdot \vec{v}) \tag{1.4.2}$$

dans laquelle on élimine $\nabla \cdot \vec{v}$ à l'aide de l'équation (1.1.3) pour finalement obtenir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{H}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{H}}{\rho} \cdot \nabla\right)\vec{v}\,. \tag{1.4.3}$$

Maintenant prenons une ligne de fluide quelconque se déplaçant avec les particules qui la compose. Pour établir sa variation dans le temps, on considère un arc infinitésimale $\vec{\delta\ell}$ de cette ligne. Si $\vec{v}$ est la vitesse de l'une de ces extrémités, l'autre bout aura une vitesse $\vec{v} + (\vec{\delta\ell} \cdot \nabla)\vec{v}$. Pendant une durée dt, cet arc aura varié de la quantité $dt(\vec{\delta\ell} \cdot \nabla)\vec{v}$ de sorte que la variation dans le temps de $\vec{\delta\ell}$ est donnée par

$$\frac{d}{dt}[\vec{\delta\ell}] = (\vec{\delta\ell} \cdot \nabla)\vec{v}\,. \tag{1.4.4}$$

Ainsi les lignes de force $\vec{H}/\rho$ obéissent à la même équation différentielle que l'arc $\vec{\delta\ell}$. Par conséquent, les particules de fluide situées sur une même ligne de force magnétique y demeuront indéfiniment et la grandeur $|\vec{H}|/\rho$ va varier proportionnellement à la distance qui les sépare. On dit alors que "les lignes de force magnétiques et la *matière fluide* sont gelées l'un et l'autre". Donc, lorsque la conductivité électrique est très élevée ; *i.e.* $\sigma \mapsto \infty$, les lignes de force du champ magnétique $\vec{H}$ sont entraînées par le fluide, on peut alors leur associer des propriétés élastiques (pression et tension) qui ressortent finalement comme celles du fluide.

2. Solutions conditionnellement invariantes des équations MHD. Ondes multiples.

2.1 Les ondes simples pour des systèmes quasilinéaires d'EDP.

Nous étudions les systèmes composés de m équations aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre, qui sont quasilinéaires (QL), homogènes et du type hyperbolique. Ceux-ci sont exprimés sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{\alpha=1}^{q} A_{\alpha}^{i\,l}(\mathrm{u})\, u_{x^i}^{\alpha} = 0\,, \quad l = 1, \ldots, m, \tag{2.1.1}$$

avec p variables indépendantes $\mathrm{x} = (x^1, \ldots, x^p) \in E \subset I\!R^p$ et q variables dépendantes $\mathrm{u} = (u^1, \ldots, u^q) \in U \subset I\!R^q$; les dérivées partielles sont notées par $u_{x^i}^{\alpha} = \partial u^{\alpha}/\partial x^i$. Le système (2.1.1) est dit *bien déterminé* si $m = q$. Nos considérations seront toujours locales ; il suffit de déterminer les solutions définies au voisinage de l'origine $\mathrm{x} = 0$. Les fonctions considérées ici seront suffisament lisses pour en justifier les manipulations.

Le système (2.1.1) peut se mettre sous la forme matricielle (avec la sommation implicite sur les indices) :

$$A^{\mu}(\mathrm{u})\mathrm{u}_{x^{\mu}} = 0\,, \quad \mu = 1, \ldots, p, \tag{2.1.2}$$

où $A^1, \ldots, A^p$ sont des matrices de dimensions $m \times q$. Il est convenu d'adopter la notation suivante pour les variables indépendantes : $t = x^o, x^1, \ldots, x^n$ avec $p = n+1$, de sorte que l'équation (2.1.2) se récrit :

$$A^o(\mathrm{u})\,\mathrm{u}_t + \sum_{i=1}^{n} A^i(\mathrm{u})\,\mathrm{u}_{x^i} = 0. \tag{2.1.3}$$

Si $m = q$, la matrice A^o est l'identité et nous obtenons *la forme évolutive* de (2.1.2) :

$$\mathrm{u}_t + \sum_{i=1}^{n} A^i(\mathrm{u})\,\mathrm{u}_{x^i} = 0\,.$$

Définition 2.1.1. *Un vecteur d'onde associé aux matrices* $\{A^1, \dots, A^p\}$ *est un vecteur non nul*

$$\lambda(\mathrm{u}) = (\lambda_1(\mathrm{u}), \dots, \lambda_p(\mathrm{u}))$$

tel que

$$ker\,(\lambda_\mu A^\mu) \neq 0\,.$$

Cette définition implique la *relation d'onde* :

$$\gamma \in U \quad \text{tel que} \quad \Big(\lambda_\mu(\mathrm{u}) A^\mu_\alpha(\mathrm{u})\Big)\gamma^\alpha = 0. \tag{2.1.4}$$

L'équation (2.1.4) admet des solutions non triviales pour le *vecteur de polarisation* γ:

$$\begin{aligned} &1)\ \text{si } m = q, \quad det\ [\lambda_\mu(\mathrm{u}) A^\mu(\mathrm{u})] = 0, \\ &2)\ \text{si } m \neq q, \quad rang\,[\lambda_\mu(\mathrm{u}) A^\mu(\mathrm{u})] < min\,(m, q). \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

L'équation (2.1.5) est appelée la *relation de dispersion.*

Définition 2.1.2. *La fonction*

$$r(\mathrm{x}, \mathrm{u}) = \lambda_\mu(\mathrm{u}) x^\mu \tag{2.1.6}$$

est appelée un invariant de Riemann associé au vecteur d'onde λ.

L'équation

$$\mathrm{u} = f(r(\mathrm{x}, \mathrm{u})) \tag{2.1.7}$$

définit de manière unique la fonction u(x) au voisinage de l'origine $\mathrm{x} = 0$ pour toute fonction $f : I\!R \to I\!R^q$.

Sa dérivée partielle par rapport à x^μ est donnée par

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} = \phi(\mathrm{x})^{-1} \lambda_\mu(\mathrm{u}(\mathrm{x}))\, f'^\alpha(r(\mathrm{x}, \mathrm{u}))\,, \tag{2.1.8}$$

où l'on a introduit la notation suivante :

$$\phi(\mathrm{x}) = 1 - \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}(\mathrm{x}, \mathrm{u}(\mathrm{x}))\ f'^\alpha \quad \text{est un } \textit{scalaire} \text{ supposé non nul,} \tag{2.1.9}$$

et la dérivée de la fonction f par rapport à r est notée par

$$f'^{\alpha} = \frac{df^{\alpha}}{dr} .$$

Démontrons l'expression (2.1.8) en calculant explicitement la dérivée partielle de u^{α} par rapport à x^{μ} :

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \frac{df^{\alpha}}{dr}\left\{\frac{\partial r}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial r}{\partial u^{\beta}}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\mu}}\right\},$$

sachant que $\lambda_{\mu} = \partial r / x^{\mu}$, on récrit l'équation ci-haut sous la forme

$$\Psi^{\alpha}_{\beta}\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\mu}} = \lambda_{\mu}\, f'^{\alpha}, \tag{2.1.10}$$

où Ψ^{α}_{β} est une matrice supposée inversible :

$$\Psi^{\alpha}_{\beta} \equiv \delta^{\alpha}_{\beta} - \frac{\partial r}{\partial u^{\beta}} f'^{\alpha}. \tag{2.1.11}$$

Multiplions l'équation (2.1.10) par la matrice inverse $(\Psi^{-1})^{\alpha}_{\beta}$ qui donne

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \lambda_{\mu}(\Psi^{-1})^{\alpha}_{\beta}\, f'^{\beta}. \tag{2.1.12}$$

Pour compléter la démonstration, il suffit de déterminer la matrice $(\Psi^{-1})^{\alpha}_{\beta}$ de la manière suivante. On multiplie d'abord l'équation (2.1.11) par f'^{β} pour obtenir :

$$\Psi^{\alpha}_{\beta}\, f'^{\beta} = \phi\,(\mathrm{x})\, f'^{\alpha} . \tag{2.1.13}$$

Ensuite, après avoir multiplié l'équation (2.1.13) par Ψ^{-1}, on compare membre à membre avec l'équation (2.1.12) pour finalement aboutir à l'expression (2.1.8).

Les solutions de l'équation (2.1.2) ayant la forme préscrite par l'expression (2.1.7) sont appelées *ondes de Riemann* ou *ondes simples*. Le rang de la solution u(x) est au plus égale à un. En effet car la formule (2.1.8) exprime le fait que les dérivées partielles de u(x) soient décomposables dans le sens

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \sim \gamma^{\alpha}\,(\mathrm{u})\,\lambda_{\mu}\,(\mathrm{u}) \tag{2.1.14}$$

avec

$$\gamma^\alpha = \frac{df^\alpha}{dr}\,, \quad \alpha = 1, \ldots, q. \tag{2.1.15}$$

Afin d'en donner une interprétation géométrique, on introduit les vecteurs suivants:

$$\xi_a(\mathrm{u}) = \left(\xi_a^1(\mathrm{u}), \ldots, \xi_a^p(\mathrm{u})\right)^T, \quad a = 1, \ldots, p-1\,, \tag{2.1.16}$$

qui satisfont la relation d'orthogonalité

$$\lambda \cdot \xi_a = 0. \tag{2.1.17}$$

En fixant le vecteur d'onde λ, nous pouvons alors choisir un ensemble de vecteurs ξ_a qui soint orthogonaux à λ. Notons que le choix des ξ_a n'est pas unique et que l'ensemble des vecteurs $\{\lambda, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}\}$ forment une base dans l'espace des variables indépendantes E.

Multiplions l'équation (2.1.8) par ξ_a, nous obtenons l'expression

$$\xi_a^\mu(\mathrm{u(x)})\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} = 0$$

impliquant que $u^1(\mathrm{x}), \ldots, u^q(\mathrm{x})$ soient des invariants par rapport aux champs vectoriels

$$\xi_a^\mu(\mathrm{u(x)})\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

agissant dans l'espace E. Par conséquent le graphe $\Gamma = \{(\mathrm{x}, \mathrm{u(x)})\}$ (qui est une sous-variété de dimension p) est invariant sous l'action de chaque champ vectoriel :

$$X_a = \xi_a^\mu(\mathrm{u})\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,, \quad a = 1, \ldots, p-1\,, \tag{2.1.18}$$

agissant dans l'espace des variables indépendantes et dépendantes $E \times U \subset I\!R^p \times I\!R^q$. Ces champs vectoriels forment une distribution abélienne :

$$[X_a, X_b] = 0\,, \quad a, b = 1, \ldots, p-1. \tag{2.1.19}$$

Réciproquement, si $u(x)$ est une fonction à q composantes, définie au voisinage de $x = 0$, tel que son graphe $\Gamma = \{(x, u(x))\}$ soit invariant sous l'action de tous les champs vectoriels donnés par (2.1.18) satisfaisant la relation (2.1.17) alors $u(x)$ est une solution de l'équation (2.1.7) pour une certaine fonction f. Ainsi, on caractérise géométriquement les solutions exprimées sous la forme (2.1.7).

Si $u(x)$ est solution de (2.1.7) alors

$$A^{\mu}(u(x))\frac{\partial u}{\partial x^{\mu}} = \phi^{-1}(x)\,\lambda_{\mu}(u(x))A^{\mu}(u(x))\,f'(r(x,u)), \tag{2.1.20}$$

donc $u(x)$ est une solution de l'équation (2.1.2) si et seulement si

$$\lambda_{\mu}(f)\,A^{\mu}(f)\,f' = 0 \tag{2.1.21}$$

autrement dit ; si et seulement si f' est un élément de $ker\,(\lambda_{\mu}A^{\mu})$.

Résumons les caractéristiques des solutions de rang un.

(1). L'équation (2.1.21) constitue un système sous-déterminé d'équations différentielles ordinaires (EDO) du premier ordre pour la fonction f qui dépend de la dimension de $ker\,(\lambda_{\mu}A^{\mu})$. Par exemple : si $\lambda_{\mu}A^{\mu} = 0$ alors il y a aucune contrainte sur la fonction f.

(2). Le rang de la solution de l'équation (2.1.2) est au plus égal à un. Le graphe $\Gamma = \{(x, u(x))\}$ est invariant sous l'action des champs vectoriels donnés par l'expression (2.1.18) qui satisfont la relation d'orthogonalité $\lambda \cdot \xi_a = 0$ et commutent entre eux.

(3). On peut faire un changement d'échelle du vecteur d'onde λ sans que la solution (2.1.7) soit changée (ces solutions appartiennent à la même classe d'équivalence) puisque l'équation de départ (2.1.2) est homogène : seule la direction de λ importe et non sa norme.

Maintenant, nous choisissons un repère de coordonnées dans l'espace $E \times U$ de manière à *rectifier* les champs vectoriels (2.1.18) et d'obtenir les *conditions d'invariance* qui assurent l'existence des solutions de rang un. Supposons que l'une des composantes de λ soit non nulle : choisissons $\lambda_1 \neq 0$. À partir de la relation d'orthogonalité

(2.1.17), nous exprimons les composantes des vecteurs ξ_a ; $a = 2, \ldots, p$, en termes des composantes du vecteur d'onde λ :

$$\xi_2(\mathrm{u}) = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, 1, \ldots, 0, \ldots, 0\right)^T, \quad \ldots, \quad \xi_p(\mathrm{u}) = \left(-\frac{\lambda_p}{\lambda_1}, 0, \ldots, 0, 1\right)^T. \qquad (2.1.22)$$

En substituant les expressions (2.1.22) dans la formule (2.1.18), on obtient $(p-1)$ champs vectoriels qui sont linéairement indépendants

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \ldots, \quad X_p = \frac{\partial}{\partial x^p} - \frac{\lambda_p}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad (2.1.23)$$

et ceux-ci forment une distribution abélienne.

Ensuite on fait le changement de coordonnées dans l'espace $E \times U$:

$$\overline{x}^1 = r(\mathrm{x}, \mathrm{u}), \quad \overline{x}^2 = x^2, \ \ldots, \overline{x}^p = x^p, \quad \overline{u}^1 = u^1, \ \overline{u}^2 = u^2, \ldots, \overline{u}^q = u^q, \qquad (2.1.24)$$

où les champs vectoriels donnés par (2.1.23) deviennent rectifiés comme suit :

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^2}, \ldots, X_p = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^p}. \qquad (2.1.25)$$

Pour prouver l'expression (2.1.25), on prend par exemple le champ vectoriel X_2

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \overline{x}^1} + \frac{\partial \overline{x}^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \overline{x}^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial \overline{x}^1},$$

en particulier

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^2} &= \frac{\partial r(\mathrm{x}, \mathrm{u})}{\partial x^2} = \frac{\partial r}{\partial x^2} + \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial \overline{x}^1}{\partial x^1} &= \frac{\partial r(\mathrm{x}, \mathrm{u})}{\partial x^1} = \frac{\partial r}{\partial x^1} + \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1},
\end{aligned} \qquad (2.1.26)$$

puisque $r = \lambda_\mu(\mathrm{u})x^\mu$, alors

$$\frac{\partial r}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial u^\alpha}x^\mu,$$

et à l'aide de la formule (2.1.8) nous obtenons

$$X_2 = \left\{\lambda_2 + \left(\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial u^\alpha}x^\mu\right)(\phi^{-1}(\mathrm{x})\lambda_2)\, f'^\alpha\right\}\frac{\partial}{\partial \overline{x}^1} + \frac{\partial}{\partial \overline{x}^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left\{\lambda_1 + \left(\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial u^\alpha}x^\mu\right)(\phi^{-1}(\mathrm{x})\lambda_1)\, f'^\alpha\right\}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \overline{x}^1}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \overline{x}^2}.$$

Cette démonstration se généralise aisément aux autres champs vectoriels X_a.

L'ensemble des invariants sous l'action des champs vectoriels (2.1.25) est

$$\left\{\overline{x}^1 = r(\mathrm{x},\mathrm{u}),\, u^1,\, \ldots\,, u^q\right\}. \tag{2.1.27}$$

Notons qu'une sous-variété à p dimensions est transversale à la projection $(\mathrm{x},\mathrm{u}) \to \mathrm{x}$ à l'origine $\mathrm{x} = 0$ si et seulement si elle est transversale à la projection $(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{u}}) \to \overline{\mathrm{x}}$ à $\overline{\mathrm{x}} = 0$. Ces sous-variétés transversales, invariantes sous l'action des champs vectoriels $X_2, \ldots, X_p$, sont définies par les équations ayant la forme :

$$\overline{\mathrm{u}} = f\,(\overline{x}^1) \tag{2.1.28}$$

où $f : I\!R \to I\!R^q$ est une fonction arbitraire (comparée à (2.1.7)), *i.e.* $\overline{\mathrm{u}} = f\,(\overline{x}^1)$ est une solution générale des conditions d'invariance :

$$\overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^2} = 0\,, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^p} = 0\,. \tag{2.1.29}$$

Le système (2.1.2) se récrit en termes des nouvelles coordonnées $(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{u}})$ comme suit :

$$\overline{A}^i\,(\overline{\mathrm{x}},\overline{\mathrm{u}},\overline{\mathrm{u}}_{\overline{\mathrm{X}}})\,\overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^i} = 0\,, \tag{2.1.30}$$

où

$$\overline{A}^i \equiv \frac{D\overline{x}^i}{Dx^j}\,A^j\,,$$

en particulier :

$$\overline{A}^1 = \frac{Dr}{Dx^i}\,A^i\,, \quad \overline{A}^2 = A^2\,,\ \ldots\ ,\ \overline{A}^p = A^p\,, \tag{2.1.31}$$

où

$$\left.\frac{Dr}{Dx^i}\right|_{\overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^2}\,,\ldots,\overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^p}=0} = \Phi^{-1}\lambda_i \qquad \text{avec} \quad \Phi = 1 - \frac{\partial r}{\partial \overline{u}^\alpha}\overline{\mathrm{u}}_1^\alpha.$$

La démonstration de l'expression (2.1.31) est directe. D'abord on récrit l'équation de départ (2.1.2) comme ceci :

$$A^i\,(\mathrm{u})u_{x^i} = A^i_\alpha\,(\overline{\mathrm{u}})\frac{\partial \overline{u}^\alpha}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i} = 0.$$

Puis en utilisant les équations (2.1.26) et (2.1.29), on arrive à

$$A^1(\overline{\mathrm{u}})\frac{\partial \overline{\mathrm{u}}}{\partial \overline{x}^1}\left[\frac{\partial r}{\partial x^1}+\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1}\right]+\ldots+A^p(\overline{\mathrm{u}})\frac{\partial \overline{\mathrm{u}}}{\partial \overline{x}^1}\left[\frac{\partial r}{\partial x^p}+\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^p}\right]=0,$$

qui donne effectivement l'expression (2.1.31) compte tenue de la formule (2.1.8).

En ajoutant les conditions d'invariance (2.1.29) au système (2.1.30), nous obtenons le système surdéterminé

$$\Delta : \begin{cases} [\lambda_i(\overline{\mathrm{u}})A^i(\overline{\mathrm{u}})]\overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^1}=0, \\ \overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^2}=0,\ldots,\overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^p}=0, \end{cases} \tag{2.1.32}$$

qui admet comme solution générale

$$\overline{\mathrm{u}}(\overline{\mathrm{x}})=f(\overline{x}^1)$$

où $f : I\!R \to I\!R^q$ est une fonction satisfaisant l'équation (2.1.21).

Supposons maintenant que la courbe intégrale Γ, associée au champ vectoriel $\gamma^\alpha(\mathrm{u})\partial/\partial u^\alpha$ agissant dans l'espace des variables dépendantes U, satisfait les équations différentielles ordinaires (2.1.15). Supposons également que le vecteur d'onde $\lambda(\mathrm{u})$ soit ramené sur la courbe Γ par “pull back” ; *i.e.* $f^*(\lambda)$. Alors les fonctions $\lambda_\mu(\mathrm{u})$ deviennent des fonctions du paramètre r défini sur la courbe Γ. Les ensembles (2.1.6) et (2.1.7) définissent des relations implicites entre les variables u^α, x^μ et r qui peuvent s'écrire sous la forme

$$u^\alpha=f^\alpha(r), \qquad r=\lambda_\mu(r)x^\mu. \tag{2.1.33}$$

2.2 Les ondes simples décrites par le système MHD.

Dans cette section nous utilisons les ondes simples pour résoudre le système MHD (1.1.17). Rappelons que ce système comporte $m = 9$ EDPs qui sont quasilinéaires et du premier ordre, il est homogène et hyperbolique. Ce système peut s'exprimer sous la *forme normale* (Cauchy-Kovalewski) si on le dispose de cette façon :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + (\nabla\cdot \vec{\mathrm{v}})\rho = 0\,, \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{p}{\rho^{\kappa}}\right] = 0\,, \\ \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{1}{2}\nabla(|\vec{H}|^2) - (\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\right] = 0\,, \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \nabla\times(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{H}) = 0\,, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

où l'équation (1.1.7) est alors considérée comme une *contrainte différentielle* ;

$$\nabla\cdot\vec{H} = 0. \tag{2.2.2}$$

Pour justifier cette affirmation, il suffit de prendre la divergence de la loi de Faraday (1.1.5) pour obtenir que

$$\nabla\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{H}) = -\frac{1}{c}\nabla\cdot(\nabla\times\vec{E}) = 0\ :$$

si les données initiales satisfont l'équation (2.2.2) à l'instant $t = 0$ alors elles la satisferont pour tout instant $t > 0$ [7]. Introduit de cette façon, le système MHD (1.1.17) comporte dorénavant $m = 8$ équations avec $p = 3+1$ variables indépendantes: $\mathrm{x} = (t, \vec{\mathrm{x}})$, et $q = 8$ variables dépendantes : $\mathrm{u} = \Big(\rho, p,\ \vec{\mathrm{v}} = (u, v, w),\ \vec{H} = (H_1, H_2, H_3)\Big)$.

Maintenant on écrit le système MHD (2.2.1) sous la forme évolutive (2.1.3) :

$$A^{o}\,\mathrm{u}_t + A^1\,\mathrm{u}_x + A^2\,\mathrm{u}_y + A^3\,\mathrm{u}_z = 0\,, \tag{2.2.3}$$

où les matrices carrées 8×8 sont les suivantes :

$$A^{o} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A^1 = \begin{pmatrix} u & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & \kappa p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho u & 0 & 0 & 0 & \frac{H_2}{4\pi} & \frac{H_3}{4\pi} \\ 0 & 0 & 0 & \rho u & 0 & 0 & -\frac{H_1}{4\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho u & 0 & 0 & \frac{H_1}{4\pi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & -H_1 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & H_3 & 0 & -H_1 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & \kappa p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho v & 0 & 0 & -H_2/4\pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \rho v & 0 & H_1/4\pi & 0 & H_3/4\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho v & 0 & 0 & -H_2/4\pi \\ 0 & 0 & -H_2 & H_1 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_3 & -H_2 & 0 & 0 & v \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & \kappa p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho w & 0 & 0 & -H_3/4\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho w & 0 & 0 & -H_3/4\pi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \rho w & H_1/4\pi & H_2/4\pi & 0 \\ 0 & 0 & -H_3 & 0 & H_1 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -H_3 & H_2 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}.$$

Nous cherchons les *éléments simples* du système (2.2.1) en employant la formule (2.1.15). Ainsi, pour chaque variable dépendante on lui associe une composante du *vecteur de polarisation* γ tel que noté par

$$\left(\rho, p, \vec{v}, \vec{H}\right) \longrightarrow \left(\gamma_\rho \equiv \frac{d\rho}{ds}\,,\ \gamma_p \equiv \frac{dp}{ds}\,,\ \vec{\gamma} \equiv \frac{d\vec{v}}{ds}\,,\ \vec{h} \equiv \frac{d\vec{H}}{ds}\right), \tag{2.2.4}$$

et les variables indépendantes sont associées aux composantes du *vecteur d'onde* λ :

$$(t, \vec{x}) \longrightarrow (\lambda_o, \vec{\lambda}).$$

Les dérivées partielles se récrivent en termes des éléments simples :

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} \to \lambda_o \gamma^\alpha\,, \qquad \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} \to \lambda_\mu \gamma^\alpha, \quad \mu = 0,1,2,3\,; \ \ \alpha = 1, \ldots, 8\,, \tag{2.2.5}$$

et la dérivée lagrangienne (1.1.2) s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \longrightarrow \lambda_o + \vec{v} \cdot \vec{\lambda} \equiv \delta|\vec{\lambda}|\,, \tag{2.2.6}$$

où on définit la grandeur $\delta|\vec{\lambda}|$ comme étant la *fréquence caractéristique* de l'onde simple mesurée dans le référentiel se déplaçant avec le fluide.

Donc, en décomposant les dérivées partielles du système (2.2.1) et de la contrainte différentielle (2.2.2) suivant les éléments simples (2.2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma_\rho\, \delta|\vec{\lambda}| + \rho\, (\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda}) &=0\,,\\
\rho\, \delta|\vec{\lambda}|(\gamma_p - \kappa\frac{p}{\rho}\gamma_\rho) &=0\,,\\
\rho\, \delta|\vec{\lambda}|\vec{\gamma} + \gamma_p\, \vec{\lambda} + \frac{1}{4\pi}(\vec{H}\cdot\vec{h})\vec{\lambda} - \frac{1}{4\pi}(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})\vec{h} &=0\,,\\
\delta|\vec{\lambda}|\vec{h} + (\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda})\vec{H} - (\vec{H}\cdot\vec{\lambda})\vec{\gamma} &=0\,,\\
\vec{h}\cdot\vec{\lambda} &=0\,.
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Le système (2.2.7) est appelé le *système caractéristique*, il admet des solutions non-triviales pour le vecteur de polarisation $\gamma = (\gamma_\rho, \gamma_p, \vec{\gamma}, \vec{h})$ si et seulement si le *déterminant caractéristique* de sa forme matricielle apparaissant dans l'équation (2.2.3) est nul : c'est la *relation de dispersion* (*e.g.* équation (2.1.5));

$$\delta^2|\vec{\lambda}|^2\left(\delta^2|\vec{\lambda}|^2 - \frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})^2}{4\pi\rho}\right)\left[\delta^4|\vec{\lambda}|^4 - \delta^2|\vec{\lambda}|^2\left(\frac{|\vec{H}|^2}{4\pi\rho} + a^2\right) + a^2\,\frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})^2}{4\pi\rho}\right] = 0\,, \tag{2.2.8}$$

où

$$a = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\kappa p}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{est la vitesse de propagation du son dans le fluide.} \tag{2.2.9}$$

L'équation (2.2.8) est un polynôme du huitième degré en $\delta|\vec{\lambda}|$ dont les racines donnent les fréquences caractéristiques des trois branches de propagation des ondes en MHD:

$$\textbf{(1)} \quad \delta_E|\vec{\lambda}| = 0 \quad \text{pour } \textit{les ondes entropiques,} \tag{2.2.10}$$

$$\textbf{(2)} \quad \delta_{A^\varepsilon}|\vec{\lambda}| = \frac{\varepsilon(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad \text{pour } \textit{les ondes d'Alfvén,} \tag{2.2.11}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(3)} \quad \delta_F|\vec{\lambda}| &=\frac{\varepsilon}{2}\left[\left[\left(a\vec{\lambda} + \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\left(a\vec{\lambda} - \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right],\\
\delta_S|\vec{\lambda}| &=\frac{\varepsilon}{2}\left[\left[\left(a\vec{\lambda} + \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[\left(a\vec{\lambda} - \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right],
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

pour les *ondes simples magnétoacoustiques rapides* (F) et *lentes* (S), $\varepsilon = \pm 1$ indique que dans une direction donnée, l'onde peut se propager dans un sens ou dans l'autre.

On peut établir certaines correspondances entre les ondes simples et les *modes propres* qui sont obtenus en résolvant le système MHD (1.1.17) par *linéarisation* [1], [38] ; c'est-à-dire en y remplaçant $\mathrm{u} = (\mathrm{u})^o + (\mathrm{u})^1$ où $(\mathrm{u})^o$ sont les variables dépendantes à l'équilibre et $(\mathrm{u})^1$ sont celles perturbées par le passage de l'onde ; on fait l'hypothèse que $(\mathrm{u})^1 \ll (\mathrm{u})^o$. Les solutions du système MHD ainsi linéarisées s'expriment en termes d'ondes planes et de leurs superpositions linéaires comme

$$(u^\alpha)^1 = A^\alpha \exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{\mathrm{x}} - \omega_k t)\right], \quad \alpha = 1, \ldots, 8, \tag{2.2.13}$$

où A^α est l'*amplitude* du mode propre et correspond au vecteur de polarisation : $A^\alpha \longleftrightarrow \gamma^\alpha$. Ensuite, $(\omega_k, \vec{k}) \longleftrightarrow \lambda = (\lambda_o, \vec{\lambda})$; ω_k est la *fréquence d'oscillations* des modes propres et correspond à λ_o, $\vec{k}$ est le *vecteur d'onde* et correspond à $\vec{\lambda}$: la famille constituée de plans d'onde se propage suivant la direction de $\vec{k}$ avec la vitesse de phase $v_\phi = \omega_k/|\vec{k}|$ qui correspond à la *vitesse caractéristique* δ. Selon notre approche, la vitesse de groupe se définit par

$$\vec{\mathrm{v}}_g = -\frac{d\lambda_o}{d\vec{\lambda}}. \tag{2.2.14}$$

Dans la section suivante, nous présentons les solutions de rang un du système MHD (1.1.17) qui sont obtenues en résolvant le système réduit (2.2.7) (*cf.*(2.1.21)). Les équations (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.17) déterminent les directions caractéristiques λ, γ et ξ_a pour lesquelles il en existe de quatre types. Les différentes symétries associées aux champs vectoriels X_a (2.1.18) nous conduisent à quatre types de solutions.

2.2.1 Les ondes simples entropiques (E).

En substituant $\delta_E|\vec{\lambda}| = 0$ dans le système caractéristique (2.2.7) nous obtenons le système qui détermine les *éléments simples entropiques* :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda} &= 0\,, \\ \gamma_p\vec{\lambda} + \frac{1}{4\pi}(\vec{H}\cdot\vec{h})\vec{\lambda} - \frac{1}{4\pi}(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})\vec{h} &= 0\,, \\ (\vec{H}\cdot\vec{\lambda})\vec{\gamma} &= 0\,, \\ \vec{h}\cdot\vec{\lambda} &= 0\,, \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

La résolution du système (2.2.15) nous conduisent à trois types de solutions. D'abord deux de ces solutions sont données par

$$\gamma = \Big(\gamma_\rho, -\frac{(\vec{H}\cdot\vec{h})}{4\pi}, \vec{\gamma}, \vec{h}\Big) \quad \text{et} \quad \lambda = (-\vec{v}\cdot\vec{\lambda}, \vec{\lambda})\,, \tag{2.2.16}$$

avec les contraintes vectorielles :

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda} = 0\,, \qquad \vec{H}\cdot\vec{\lambda} = 0\,, \qquad \vec{h}\cdot\vec{\lambda} = 0\,. \tag{2.2.17}$$

L'analyse des relations (2.2.17) nous amène à conclure que les vecteurs $\vec{H}$, $\vec{\lambda}$ et $\vec{h}$ doivent être linéairement dépendants. Il en découle deux possibilités auxquelles sont associées les *ondes entropiques de types* E_1 et E_2.

La troisième solution, appelée l'*onde entropique de type* E_3, est donnée par :

$$\gamma = \big(\gamma_\rho, 0, \vec{0}, \vec{0}\big) \quad \text{et} \quad \lambda = (-\vec{v}\cdot\vec{\lambda}, \vec{\lambda})\,. \tag{2.2.18}$$

(i). Le Cas E_1 : les ondes de type E_1 se caractérisent par le fait que les vecteurs $\vec{\gamma}, \vec{h}, \vec{H}$ forment un plan (*i.e.* ne sont pas parallèles l'un à l'autre). Ainsi pour chaque vecteur $\vec{\gamma}$, il existe un seul et unique vecteur $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Comme choix des vecteurs ξ_a orthogonaux au vecteur d'onde λ, nous prenons

$$\xi_1 = \left(\frac{\lambda_1}{(\vec{v}\cdot\vec{\lambda})}, 1, 0, 0\right)^T, \quad \xi_2 = \left(\frac{\lambda_2}{(\vec{v}\cdot\vec{\lambda})}, 0, 1, 0\right)^T, \quad \xi_3 = \left(\frac{\lambda_3}{(\vec{v}\cdot\vec{\lambda})}, 0, 0, 1\right)^T, \tag{2.2.19}$$

desquels sont déterminés les champs vectoriels par l'expression (2.1.18)

$$X_1 = \frac{\lambda_1}{(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\lambda})}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\lambda_2}{(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\lambda})}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\lambda_3}{(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\lambda})}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.2.20}$$

Les invariants de la sous-algèbre $\{X_1, X_2, X_3\}$ sont

$$\left\{ s = \vec{\lambda}(s)\cdot\vec{\mathrm{x}} - (\vec{\lambda}(s)\cdot\vec{\mathrm{v}})t\,;\ \rho,\, p,\, \vec{\mathrm{v}},\, \vec{H} \right\}. \tag{2.2.21}$$

En faisant le changement de coordonnées (2.1.24) dans l'espace $E \times U$:

$$\begin{cases} \overline{x} = r(x,\mathrm{u}) = \vec{\lambda}(s)\cdot\vec{\mathrm{x}} - (\vec{\lambda}(s)\cdot\vec{\mathrm{v}})t \quad \overline{t} = t, \quad \overline{y} = y, \quad \overline{z} = z, \\ \overline{\rho} = \rho,\ \overline{p} = p, \quad \overline{u} = u,\ \ \overline{v} = v,\ \ \overline{w} = w, \quad \overline{H}_i = H_i, \quad i = 1,2,3, \end{cases}$$

les champs vectoriels (2.2.20) sont rectifiés comme suit :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \overline{t}}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \overline{y}}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\ .$$

L'ensemble des invariants sous l'action de ces champs rectifiés coïncide avec celui des invariants (2.2.21) par rapport aux invariants des champs vectoriels (2.2.20).

En posant que $\rho, p, \vec{\mathrm{v}}, \vec{H}$ soient toutes des fonctions de la variable de symétrie s, et après les avoir substituées dans le système de départ (2.2.1), nous obtenons les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} \rho = \rho(s), \quad p(s) + \frac{1}{8\pi}|\vec{H}|^2 = p_o, \quad \vec{\mathrm{v}} &= u(s)\vec{e}_1 + v(s)\vec{e}_2 + w(s)\vec{e}_3, \\ \vec{H} &= H_1(s)\vec{e}_1 + H_2(s)\vec{e}_2 + H_3(s)\vec{e}_3, \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

où p_o est une constante arbitraire, et les vecteurs $\vec{\mathrm{v}}$ et $\vec{H}$ doivent satisfaire la relation:

$$\left(\frac{d\vec{H}}{ds} \times \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{ds}\right)\cdot\vec{H} = 0, \tag{2.2.23}$$

attestant que $\vec{\gamma}$, $\vec{h}$ et $\vec{H}$ sont situés dans plan, et le vecteur $\vec{\lambda}(s)$ est donné par

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|^2} \times \frac{d\vec{H}}{ds}. \tag{2.2.24}$$

De ces résultats, nous pouvons déduire certaines propriétés des ondes entropiques E_1. D'abord, on en déduit par la forme de la variable de symétrie s que les solutions

(2.2.22) sont constantes sur les plans perpendiculaires au vecteur $\vec{\lambda}(s)$: les ondes E_1 sont donc des *ondes planes*, et $\vec{H}$ demeure toujours tangent à ces plans. De plus, les ondes E_1 n'existent que dans un fluide incompressible, comme l'indique la relation $\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda}=0$, et se propagent avec le flot puisque leur vitesse de groupe $\vec{\mathrm{v}}_g=\vec{\mathrm{v}}$.

La force de Lorentz associée aux ondes entropiques E_1 est donnée par :

$$\vec{F}_m=-\frac{1}{8\pi}\nabla(|\vec{H}|^2)=\nabla p\,, \tag{2.2.25}$$

il y a donc équilibre entre la force magnétique et la pression hydrodynamique : l'élément de fluide n'est pas soumis à des forces de torsion provenant du terme $(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}$. Conséquemment, en vertu du théorème de Kelvin, la circulation

$$\Gamma=\oint_C \vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{d\ell} \tag{2.2.26}$$

autour d'un élément de fluide est préservée. Le fait que

$$\vec{F}_m\cdot\vec{\mathrm{v}}\neq 0 \tag{2.2.27}$$

indique la présence d'un couplage entre les effets hydrodynamique et magnétique dans le bilan de l'énergie cinétique (1.2.9).

L'action de l'opérateur d/dt (donné par l'expression (2.2.6)) sur les fonctions ρ, p, $\vec{\mathrm{v}}$, et $\vec{H}$ est identiquement nulle. Conséquemment toutes ces quantités sont conservées le long du flot.

À partir de la loi de conservation de l'impulsion (1.2.1) ;

$$\frac{\partial(\rho\mathrm{v}_i)}{\partial t}=-\frac{\partial\hat{\Pi}^h_{ik}}{\partial x_k}-\frac{\partial\hat{\Pi}^m_{ik}}{\partial x_k}\,,\qquad i,k=1,2,3\,, \tag{2.2.28}$$

qu'on peut reformuler à l'aide de (2.2.25) comme suit :

$$\frac{\partial(\rho\vec{\mathrm{v}})}{\partial t}=-(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)(\rho\vec{\mathrm{v}})\,, \tag{2.2.29}$$

cela signifie que pour les ondes E_1 la variation de l'impulsion d'une particule de fluide n'a pas d'incidence sur l'évolution du champ magnétique $\vec{H}$.

Finalement considérons le *cas stationnaire*, c'est-à-dire quand $\vec{v} \cdot \vec{\lambda} = 0$, on peut exprimer la solution (2.2.22) sous la forme

$$\vec{\lambda} = \vec{e}_o\,; \quad \rho = \rho(s), \quad \vec{v} = \vec{\alpha}(s) \times \vec{e}_o, \quad \vec{H} = \vec{\beta}(s) \times \vec{e}_o, \quad p(s) + \frac{1}{8\pi}|\vec{H}|^2 = p_o, \tag{2.2.30}$$

où $\vec{e}_o$ est vecteur unitaire constant, $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sont des vecteurs arbitraires, et p_o est une constante arbitraire. La solution (2.2.30) est constante sur les plans orthogonaux à $\vec{e}_o$ qui sont engendrés par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{H}$.

(ii). Le cas E_2 de la solution (2.2.16) correspond à la situation où les vecteurs $\vec{\gamma}$, $\vec{h}$ et $\vec{H}$ sont parallèles l'un à l'autre. Alors les solutions sont appelées des ondes entropiques de type E_2 : les vecteurs $\vec{\gamma}$ et $\vec{h}$ sont tous les deux colinéaires à $\vec{H}$;

$$\vec{\gamma} = \zeta \vec{H}, \qquad \text{et} \qquad \vec{h} = \chi \vec{H}, \tag{2.2.31}$$

où ζ et χ sont des fonctions arbitraires de u. Les éléments simples correspondants s'écrivent

$$\gamma = \Big(\gamma_\rho, -\frac{(\vec{H}\cdot\vec{h})}{4\pi}, \vec{\gamma}, \vec{h}\Big) \quad \text{et} \quad \lambda = \Big(-\vec{v}\cdot(\vec{\alpha}^i \times \vec{H}), \vec{\alpha}^i \times \vec{H}\Big), \quad i = 1,2, \tag{2.2.32}$$

où $\vec{\alpha}^1$ et $\vec{\alpha}^2$ sont deux vecteurs linéairement indépendants dont les composantes sont des fonctions arbitraires de u.

Dans ce cas, pour un vecteur $\vec{\gamma}$ donné, il existe deux vecteurs $\vec{\lambda}^1$ et $\vec{\lambda}^2$ linéairement indépendants qui engendrent un plan orthogonal à $\vec{\gamma}$.

Par simplicité, nous choisissons le repère de coordonnées tel que

$$\vec{H} = (0,0,H), \qquad \vec{\alpha}^1 = (\alpha_1, \alpha_2, 0) \quad \text{et} \quad \vec{\alpha}^2 = (-\alpha_2, \alpha_1, 0)\,.$$

Les vecteurs d'onde s'écrivent

$$\lambda^1 = \Big(-\vec{v}\cdot\vec{\lambda}^1, \alpha_2 H, -\alpha_1 H, 0\Big) \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \Big(-\vec{v}\cdot\vec{\lambda}^2, \alpha_1 H, \alpha_2 H, 0\Big)\,. \tag{2.2.33}$$

Nous choisissons comme vecteurs orthogonaux à λ^1 et λ^2 :

$$\xi_1 = \Big(1,\, 1/v,\, u/v,\, 1,\, 0\Big)^T \quad \text{et} \quad \xi_2 = \Big(0,\, 0,\, 0,\, 1\Big), \tag{2.2.34}$$

desquels nous obtenons les champs vectoriels

$$X_1 = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.2.35}$$

Les invariants sont de la sous-algèbre $\{X_1, X_2\}$ sont

$$\left\{ s = x + y - (u+v)t \; ; \quad \rho, p, \vec{\mathrm{v}}, \vec{H} \right\}. \tag{2.2.36}$$

En substituant dans le système (2.2.1) les fonctions $\rho, p, \vec{\mathrm{v}}, \vec{H}$, qui dépendent de la variable de symétrie s, on obtient les solutions associées aux ondes entropiques E_2

$$\rho = \rho(s), \;\; p(s) + \frac{1}{8\pi}|\vec{H}|^2 = p_o, \;\; \vec{\mathrm{v}} = u(s)\vec{e}_1 + v(s)\vec{e}_2 + w(s)\vec{e}_3, \quad \vec{H} = H(s)\vec{e}_3\,, \tag{2.2.37}$$

ayant comme contrainte que

$$u(s) + v(s) = C_o\,, \tag{2.2.38}$$

où p_o et C_o sont des constantes arbitraires. Cependant nous devons tenir compte de la relation (2.2.31) et de l'orientation prise pour $\vec{H}$: les composantes de la vitesse situées dans le plan généré par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont donc des constantes ; $u = u_o$ et $v = v_o$, ceci satisfait évidemment la contrainte (2.2.38).

Par une transformation de Galilée appropriée, nous pouvons toujours choisir un référentiel tel que $u_o = v_o = 0$, la solution (2.2.37) se résume alors à

$$\rho = \rho(s), \;\; p(s) + \frac{1}{8\pi}|\vec{H}|^2 = p_o, \;\; \vec{\mathrm{v}} = \alpha(s)\vec{e}_3, \;\; \vec{H} = \beta(s)\vec{e}_3\,; \;\; \vec{H}\cdot\vec{\lambda}^i = 0\,, \;\; i = 1,2\,, \tag{2.2.39}$$

où ρ,α et β sont des fonctions arbitraires de la variable de symétrie $s = x + y$, et p_o est une constante arbitraire. Dans ce cas, l'onde entropique E_2 est une *onde stationnaire* qui se propageant dans un fluide incompressible s'écoulant suivant $\vec{H}$.

La force de Lorentz est donnée par l'expression (2.2.25) mais elle n'a pas de composante suivant $\vec{e}_3$; il n'y a donc pas de couplage entre les effets hydrodynamique et magnétique dans le bilan de l'énergie cinétique car $\vec{F}_m \cdot \vec{\mathrm{v}} = 0$.

(iii) Finalement, il reste la troisième solution (2.2.18) qui correspond aux *ondes entropiques de type* E_3. Dans ce cas, pour chaque vecteur $\vec{\gamma} = \vec{0}$, il existe trois vecteurs $\vec{\lambda}$ linéairement indépendants qui sont normalisés par les trois vecteurs unitaires $\vec{e}_i$. Les vecteurs d'ondes λ^i s'écrivent alors

$$\lambda^i = \Big(-\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{e}_i, \vec{e}_i \Big) \quad \text{avec} \quad |\vec{e}_i|^2 = 1, \quad \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.2.40}$$

Le vecteur ξ orthogonal à chaque λ^i $(i = 1, 2, 3)$ est donné par

$$\xi = \Big(1,\ u,\ v,\ w \Big)^T, \tag{2.2.41}$$

duquel on déduit le seul champ vectoriel

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{2.2.42}$$

Les invariants de la sous-algèbre $\{X\}$ sont

$$\Big\{ s = x + y + z - (u + v + w)t\ ;\ \rho, p, \vec{\mathrm{v}}, \vec{H} \Big\}. \tag{2.2.43}$$

Nous obtenons les solutions associées aux ondes E_3 en remplaçant $\rho, p, \vec{\mathrm{v}}, \vec{H}$ dans le système de départ (2.2.1)

$$\rho = \rho\,(s), \quad \vec{\mathrm{v}} = u\,(s)\vec{e}_1 + v\,(s)\vec{e}_2 + w\,(s)\vec{e}_3, \quad \vec{H} = H_1\,(s)\vec{e}_1 + H_2\,(s)\vec{e}_2 + H_3\,(s)\vec{e}_3, \tag{2.2.44}$$

ayant comme contraintes que

$$\begin{aligned} &u\,(s) + v\,(s) + w\,(s) = C_o, && \mathcal{H}\frac{d}{ds}\,[\vec{\mathrm{v}}] = \vec{0}, \\ &H_1\,(s) + H_2\,(s) + H_3\,(s) = \mathcal{H}_o, && \nabla\,[p + \frac{1}{8\pi}|\vec{H}|^2\,] = \frac{1}{4\pi}(\vec{H} \cdot \nabla)\vec{H}\,, \end{aligned} \tag{2.2.45}$$

où C_o et $\mathcal{H}_o$ sont des constantes arbitraires.

En se reportant à l'expression (2.2.18), nous avons que $\gamma_p = 0$, $\vec{\gamma} = \vec{0}$ et $\vec{h} = \vec{0}$: la vitesse du fluide et le champ magnétique sont donc des vecteurs constants ; $\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_o$ et $\vec{H} = \vec{H}_o$, et la pression est constante : $p = p_o$. Dans ce cas, les contraintes (2.2.44) sont effectivement vérifiées, la solution (2.2.43) se récrit alors

$$\rho = \rho\,(s), \quad p = p_o, \quad \vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_o \quad \vec{H} = \vec{H}_o\,. \tag{2.2.46}$$

Par une transformation de Galilée appropriée, on peut toujours poser que $\vec{\mathrm{v}}_o = \vec{0}$ de telle sorte que l'onde E_3 soit une *onde stationnaire* se propageant dans un fluide incompressible et la force de Lorentz qui en résulte est évidemment nulle.

2.2.2 Les ondes simples d'Alfvén (A).

On substitue la fréquence caractéristique (2.2.11) des *ondes d'Alfvén*

$$\delta_{A^\epsilon}|\vec{\lambda}| = \varepsilon\frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})}{\sqrt{4\pi\rho}}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

dans le système (2.2.7) pour obtenir le *système caractéristique* correspondant :

$$\begin{aligned}
\varepsilon\frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})}{\sqrt{4\pi\rho}}\,\gamma_\rho + \rho\,(\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda}) &= 0,\\
\varepsilon\frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})}{\sqrt{4\pi\rho}}\left(\gamma_p - \kappa\frac{p}{\rho}\gamma_\rho\right) &= 0,\\
\varepsilon\frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})}{\sqrt{4\pi\rho}}\,\vec{\gamma} + \frac{\gamma_p}{\rho}\,\vec{\lambda} + \frac{1}{4\pi\rho}(\vec{H}\cdot\vec{h})\,\vec{\lambda} - \frac{1}{4\pi\rho}(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})\,\vec{h} &= 0,\\
\varepsilon\frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})}{\sqrt{4\pi\rho}}\,\vec{h} + (\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda})\,\vec{H} - (\vec{H}\cdot\vec{\lambda})\,\vec{\gamma} &= 0,\\
\vec{h}\cdot\vec{\lambda} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.2.47}$$

La résolution du système (2.2.47) donne les *éléments simples d'Alfvén* suivants:

$$\begin{aligned}
&\gamma = \left(0, 0, \frac{\varepsilon\vec{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \vec{h}\right), \qquad \varepsilon = \pm 1,\\
&\lambda = (\lambda_o, \vec{\lambda}) \quad \text{où} \quad \lambda_o \equiv \frac{\varepsilon(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})}{\sqrt{4\pi\rho}} - \vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\lambda}, \quad \text{et} \quad \vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).
\end{aligned} \tag{2.2.48}$$

En fixant le vecteur d'onde λ, on choisit les trois vecteurs ξ_a qui lui sont orthogonaux:

$$\xi_1 = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_o}, 1, 0, 0\right)^T, \quad \xi_2 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_o}, 0, 1, 0\right)^T, \quad \xi_3 = \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_o}, 0, 0, 1\right)^T,$$

desquels, par l'expression (2.1.18), on calcule les champs vectoriels correspondants :

$$X_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_o}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_o}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_o}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.2.49}$$

Les invariants de la sous-algèbre $\{X_1, X_2, X_3\}$ sont

$$\left\{ s = \vec{\lambda}(s)\cdot\vec{\mathrm{x}} + \lambda_o t\,;\ \rho, p, \vec{\mathrm{v}}, \vec{H} \right\}. \tag{2.2.50}$$

Soulignons que le changement de coordonnées (2.1.24) dans l'espace $E \times U$:

$$\begin{cases}
\overline{x} = r(x, \mathrm{u}) = \vec{\lambda}\cdot\vec{\mathrm{x}} + \lambda_o t, \quad \overline{t} = t, \quad \overline{y} = y, \quad \overline{z} = z,\\
\overline{\rho} = \rho,\ \overline{p} = p, \quad \overline{u} = u,\ \overline{v} = v,\ \overline{w} = w, \quad \overline{H}_i = H_i, \quad i = 1, 2, 3,
\end{cases}$$

mène à la rectification des champs vectoriels (2.2.49) :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

et que l'ensemble des invariants sous leur action est identique à (2.2.50).

On pose que les fonctions $\rho, p, \vec{v}, \vec{H}$ soient toutes des fonctions de la variable de symétrie s. Après les avoir substituées dans le système de départ (2.2.1), on obtient les solutions suivantes

$$\rho = \rho_o, \quad p = p_o, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi \rho_o}}, \quad |\vec{H}|^2 = \mathcal{H}_o^2, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{2.2.51}$$

où ρ_o, p_o et $\mathcal{H}_o^2$ sont des constantes arbitraires, et avec les contraintes :

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{\lambda} = 0, \qquad \vec{h} \cdot \vec{\lambda} = 0. \tag{2.2.52}$$

De ces résultats, nous en déduisons que les ondes d'Alfvén ne modifient ni la densité ni la pression du fluide ; l'écoulement est incompressible ; $\vec{\gamma} \cdot \vec{\lambda} = 0$, et suit les lignes de force. Aussi, nous avons que $\lambda_o = 0$, celles-ci sont donc des *ondes stationnaires* n'ayant pas de vitesse de groupe ; elles ne sont pas *dispersives*, ce qui est en accord avec la théorie linéaire [25].

De même, la norme de $\vec{H}$ est préservée. Cela s'explique par la force de Lorentz

$$\vec{F}_m = \frac{1}{4\pi} (\vec{H} \cdot \vec{\lambda}) \vec{h},$$

qui ne contient que le terme associé aux forces de tension suivant les lignes de force magnétiques : elle est orientée perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde $\vec{\lambda}$; ainsi on dit que l'onde d'Alfvén est une onde *transversale* bien qu'elle se propage longitudinalement aux lignes de force magnétiques [38].

Les ondes d'Alfvén n'existent qu'en MHD comme en témoigne leur mécanisme de propagation que nous en résumons ainsi. La matière fluide et le champ magnétique étant gelés l'un dans l'autre, le déplacement transversal des particules de fluide, résultant de la force de Lorentz, courbe les lignes de force qui les composent, et conséquemment les éloignent ou les pacquent par endroits. Mais en tenant compte des propriétés des forces électromagnétiques exprimées par le *tenseur des contraintes de Maxwell* (*cf.* (1.2.3)) ; les lignes de force sont comprimées tout en se repoussant mutuellement. Pour le prouver, supposons que l'une de ces lignes de force coïncide avec l'axe $\vec{e}_3$; la contrainte longitudinale est donnée par $\hat{\Pi}^m_{zz} = -\mathcal{H}_o^2/8\pi$ tandis que les contraintes transversales $\hat{\Pi}^m_{xz}$ et $\hat{\Pi}^m_{yz}$ sont égales au terme positif $\mathcal{H}_o^2/8\pi$.

Les lignes de force peuvent se comparer à des cordes vibrantes tendues par la force magnétique $\vec{F}_m$, il en résulte des forces quasi-élastiques qui tendent à les redresser de nouveau vers leur état de repos, d'où l'apparition d'oscillations qui se propagent à la *vitesse d'Alfvén* :

$$v_A = \frac{\mathcal{H}_o}{\sqrt{4\pi\rho_o}}. \tag{2.2.53}$$

Concernant les lois de conservation de l'impulsion (1.2.1) et de l'énergie (1.2.4), celles-ci sont identiquement vérifées. En effet, la densité d'impulsion d'un élément de fluide s'écrit

$$\vec{\mathcal{P}} = \sqrt{\frac{\rho_o}{4\pi}}\,\vec{H}\,.$$

Par le caractère stationnaire des ondes d'Alfvén, on a que $\frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} = 0$. Le tenseur d'impulsion total (*cf.* (1.2.2) et (1.2.3)) s'exprime alors comme une matrice diagonale de dimensions 3×3 dont les éléments sont des constantes :

$$\hat{\Pi}_{ii} = p_o + \frac{\mathcal{H}_o^2}{8\pi}\,, \quad i = 1,2,3\,.$$

L'énergie totale $E = E_h + E_m$ et le flux d'énergie correspondant $\vec{q}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} E =& \frac{1}{\kappa-1}\,p_o + \frac{\mathcal{H}_o^2}{4\pi}\,, \\ \vec{q}_E =& \frac{\varepsilon\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho_o}}\left(\frac{\mathcal{H}_o^2}{8\pi} + \frac{2\kappa-1}{\kappa-1}\,p_o\right). \end{aligned}$$

Il n'y a pas d'influx d'énergie magnétique puisque $\vec{S} = \vec{0}$ (*cf.*(1.2.8)), ni même de couplage entre les énergies hydrodynamique et magnétique car $\vec{F}_m \cdot \vec{\mathrm{v}} = 0$. Ainsi les ondes d'Alfvén ne modifient que la direction du champ magnétique $\vec{H}$ sans en changer la norme.

2.2.3 Les ondes simples magnétoacoustiques rapide (F) et lente (S).

En premier lieu, rappelons que l'équation de dispersion de ces ondes correspond à l'expression (2.2.12)

$$\delta^4|\vec{\lambda}|^4 - \delta^2|\vec{\lambda}|^2\left(\frac{|\vec{H}|^2}{4\pi\rho} + a^2\right) + a^2\,\frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})^2}{4\pi\rho} = 0\,, \tag{2.2.54}$$

où $a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}$ est la vitesse de propagation du son dans le fluide. Les racines du polynôme (2.2.54) sont les *fréquences caractéristiques* des ondes simples magnétoacoustiques:

$$\begin{aligned}
\delta_F\,|\vec{\lambda}| =& \varepsilon\frac{|\vec{\lambda}|}{\sqrt{2}}\left[\left(a^2 + \frac{|\vec{H}|^2}{\sqrt{4\pi\rho}}\right) + \sqrt{\left(a^2 + \frac{|\vec{H}|^2}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2 - \frac{a^2}{\pi\rho}(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})^2}\,\right]^{\frac{1}{2}}\,,\\
\delta_S\,|\vec{\lambda}| =& \varepsilon\frac{|\vec{\lambda}|}{\sqrt{2}}\left[\left(a^2 + \frac{|\vec{H}|^2}{\sqrt{4\pi\rho}}\right) - \sqrt{\left(a^2 + \frac{|\vec{H}|^2}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2 - \frac{a^2}{\pi\rho}(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})^2}\,\right]^{\frac{1}{2}}\,,
\end{aligned} \tag{2.2.55}$$

qui peut aussi s'exprimer sous la forme plus commode :

$$\begin{aligned}
\delta_F\,|\vec{\lambda}| =& \frac{\varepsilon}{2}\left[\sqrt{\left(a\vec{\lambda} + \frac{\vec{H}\,|\vec{\lambda}|}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2} + \sqrt{\left(a\vec{\lambda} - \frac{\vec{H}\,|\vec{\lambda}|}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2}\,\right]\,,\\
\delta_S\,|\vec{\lambda}| =& \frac{\varepsilon}{2}\left[\sqrt{\left(a\vec{\lambda} + \frac{\vec{H}\,|\vec{\lambda}|}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2} - \sqrt{\left(a\vec{\lambda} - \frac{\vec{H}\,|\vec{\lambda}|}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2}\,\right]\,,
\end{aligned} \tag{2.2.56}$$

où $\varepsilon = \pm 1$. Le système caractéristique des ondes magnétoacoustiques est obtenu en substituant la valeur $\delta|\vec{\lambda}|$, donnée par (2.2.56), dans le système (2.2.7) :

$$\begin{aligned}
\gamma_\rho\,\delta_M + \rho\,(\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda}) =& 0\,,\\
\rho\,\delta_M\,(\gamma_p - \kappa\frac{p}{\rho}\gamma_\rho) =& 0\,,\\
\rho\,\delta_M\,\vec{\gamma} + \gamma_p\,\vec{\lambda} + \frac{1}{4\pi}(\vec{H}\cdot\vec{h})\vec{\lambda} - \frac{1}{4\pi}(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})\vec{h} =& 0\,,\\
\delta_M\,\vec{h} + (\vec{\gamma}\cdot\vec{\lambda})\vec{H} - (\vec{H}\cdot\vec{\lambda})\vec{\gamma} =& 0\,,\\
\vec{h}\cdot\vec{\lambda} =& 0\,,
\end{aligned} \tag{2.2.57}$$

où l'indice M désigne respectivement F pour l'*onde magnétoacoustique rapide* et S pour l'*onde magnétoacoustique lente*. La résolution du système (2.2.57) donne les *éléments simples magnétoacoustiques* :

$$\gamma=\left(\rho\delta_M^2|\vec{\lambda}|^2-(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})^2, \kappa p\left[\delta_M^2|\vec{\lambda}|^2-(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})^2\right], \varepsilon\delta_M|\vec{\lambda}|\left[(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})\frac{\vec{H}}{\rho}-\delta_M^2\vec{\lambda}\right], \delta_M^2\left[|\vec{\lambda}|^2\vec{H}-(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})\vec{\lambda}\right]\right),$$
$$\lambda=\left(\delta_M\,|\vec{\lambda}|-\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\lambda},\,\vec{\lambda}\right), \qquad \varepsilon=\pm 1. \tag{2.2.58}$$

Soulignons que les éléments simples magnétoacoustiques (2.2.58) peuvent également s'exprimer sous la forme

$$\gamma=\left(\gamma_\rho,\,\kappa\frac{p}{\rho}\gamma_\rho,\,\frac{|\vec{h}|}{\sqrt{4\pi\rho\left[|\vec{h}|^2-\frac{\gamma_\rho}{\rho}(\vec{H}\cdot\vec{h})\right]}}\,(\vec{h}-\frac{\gamma_\rho}{\rho}\vec{H}),\,\vec{h}\right),$$
$$\lambda=\left(\frac{\pm|\vec{h}||\vec{H}\times\vec{h}|^2}{\sqrt{4\pi\rho\left[|\vec{h}|^2-\frac{\gamma_\rho}{\rho}(\vec{H}\cdot\vec{h})\right]}}-\vec{\mathrm{v}}\cdot[\vec{h}\times(\vec{H}\times\vec{h})],\,\vec{h}\times(\vec{H}\times\vec{h})\right),$$

où pour chaque $\vec{\lambda}$ fixé, il existe quatre vecteurs linéairement indépendants $\vec{\gamma}$, γ_ρ et $|\vec{h}|$ sont des paramètres qui doivent satisfaire la contrainte

$$\frac{|\vec{h}|^2}{4\pi\rho}\left[\frac{\gamma_\rho}{\rho}|\vec{H}|^2-\vec{H}\cdot\vec{h}\right]-\frac{\kappa p}{\rho}\frac{\gamma_\rho}{\rho}\left[|\vec{h}|^2-\frac{\gamma_\rho}{\rho}\vec{H}\cdot\vec{h}\right]=0.$$

Pour résoudre le système (2.2.57) par la MSC, nous fixons d'abord le vecteur d'onde $\vec{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ donné par (2.2.58) et nous choissisons les vecteurs ξ_a qui lui sont orthogonaux:

$$\xi_1=\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_o},\,1,\,0,\,0\right)^T, \qquad \xi_2=\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_o},\,0,\,1,\,0\right)^T, \qquad \xi_3=\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_o},\,0,\,0,\,1\right)^T,$$

desquels nous obtenons par la formule (2.1.18) les champs vectoriels suivants :

$$X_1=-\frac{\lambda_1}{\lambda_o}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2=-\frac{\lambda_2}{\lambda_o}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3=-\frac{\lambda_3}{\lambda_o}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.2.59}$$

Les invariants de la sous-algèbre $\{X_1,X_2,X_3\}$ sont

$$\left\{s=\vec{\lambda}(s)\cdot\vec{\mathrm{x}}+\left(\delta_M|\vec{\lambda}|-\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\lambda}(s)\right)t\,;\;\rho,p,\vec{\mathrm{v}},\vec{H}\right\}. \tag{2.2.60}$$

On peut vérifier que le changement de coordonnées (2.1.24) dans l'espace $E \times U$:

$$\begin{cases} \overline{x} = r(x, \mathrm{u}) = \vec{\lambda}(s) \cdot \vec{\mathrm{x}} + (\delta_M |\vec{\lambda}| - \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\lambda}(s)), & \overline{t} = t, \quad \overline{y} = y, \quad \overline{z} = z, \\ \overline{\rho} = \rho, \ \overline{p} = p, \quad \overline{u} = u, \ \overline{v} = v, \ \overline{w} = w, & \overline{H}_i = H_i, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

permet de rectifier les champs vectoriels (2.2.60) sous la forme

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \overline{t}}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \overline{y}}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial \overline{z}},$$

et que l'ensemble des invariants sous l'action de ces champs rectifiés coïncide avec l'ensemble des invariants de la sous-algèbre $\{X_1, X_2, X_3\}$.

Ensuite on pose $\rho, p, \vec{\mathrm{v}}, \vec{H}$ comme étant des fonctions de la variable de symétrie s que l'on remplace dans le système de départ (2.2.1) pour obtenir le système réduit constitué d'EDO non linéaires :

$$\begin{aligned} \gamma_\rho &= \frac{\eta(s)}{\delta_M^2} \rho \left[\delta_M^2 - \frac{(\vec{H} \cdot \hat{\lambda})^2}{4\pi\rho} \right], \\ \vec{\gamma} &= -\frac{\eta(s)}{\delta_M} \left[\delta_M^2 \hat{\lambda} - \frac{(\vec{H} \cdot \hat{\lambda})}{4\pi\rho} \vec{H} \right], \\ \vec{h} &= \eta(s) [\vec{H} - (\vec{H} \cdot \hat{\lambda}) \hat{\lambda}] \end{aligned} \tag{2.2.61}$$

où $\hat{\lambda} = \vec{\lambda}/|\vec{\lambda}|$ et le coefficient $\eta(s)$ est défini par

$$\eta = a^2 \left[\delta_M^2 - \frac{|\vec{H}|^2}{4\pi\rho} \right]^{-1}. \tag{2.2.62}$$

Quand $\delta_M^2 = |\vec{H}|^2/4\pi\rho$, les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{\lambda}$ sont alors colinéaires : nous traitons ce cas particulier subséquemment. Au système réduit (2.2.61) s'ajoutent les contraintes:

$$p = A_o \rho^\kappa, \qquad \vec{H} \cdot (\vec{\lambda} \times \vec{h}) = 0, \quad \vec{H} \cdot (\vec{\lambda} \times \vec{\gamma}) = 0 \tag{2.2.63}$$

où A_o est une constante arbitraire. La première relation de l'équation (2.2.63) signifie que les ondes magnétoacoustiques n'existent que dans un fluide compressible, les deux relations restantes indiquent que les vecteurs $\vec{\lambda}$ et $\vec{H}$ génèrent un plan dans lequel se trouve les vecteurs $\vec{h}$ et $\vec{\gamma}$ et donc $\vec{H}$ demeure toujours dans ce plan.

La vitesse de groupe de l'onde magnétoacoustique F est donnée par

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{v}}_{g_F} = \vec{\mathrm{v}} + \frac{\varepsilon a}{2\sqrt{4\pi\rho}}\left(\left[\left(a\vec{\lambda}+\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} + \left[\left(a\vec{\lambda}-\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right)\left[\vec{\lambda}\times\left(\vec{H}\times\vec{\lambda}\right)\right] \\ -\frac{\varepsilon}{2}\left(\left[\left(a\vec{\lambda}+\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\left(a\vec{\lambda}-\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)\vec{\lambda}, \qquad \varepsilon = \pm 1\,,\end{aligned} \tag{2.2.64}$$

et celle pour l'onde magnétoacoustique S par

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{v}}_{g_S} = \vec{\mathrm{v}} + \frac{\varepsilon a}{2\sqrt{4\pi\rho}}\left(\left[\left(a\vec{\lambda}+\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[\left(a\vec{\lambda}-\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right)\left[\vec{\lambda}\times\left(\vec{H}\times\vec{\lambda}\right)\right] \\ -\frac{\varepsilon}{2}\left(\left[\left(a\vec{\lambda}+\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[\left(a\vec{\lambda}-\frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)\vec{\lambda}, \qquad \varepsilon = \pm 1\,.\end{aligned} \tag{2.2.65}$$

La force de Lorentz associée à ces ondes s'écrit

$$\vec{F}_m = \eta(s)\,\vec{H}\times(\vec{H}\times\vec{\lambda}). \tag{2.2.66}$$

Les effets hydrodynamiques et magnétiques sont couplés sauf quand $\vec{\mathrm{v}} \parallel \vec{H}$ pour lequel $\vec{F}_m\cdot\vec{\mathrm{v}} \equiv 0$ et conséquemment les lois de conservation des énergies hydrodynamique (1.2.9) et magnétique (1.2.10) sont séparées.

La résolution du système (2.2.61) s'avère être une tâche ardue. Néanmoins, on peut aborder le problème en prenant deux cas limites où les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{\lambda}$ sont perpendiculaires et parallèles l'un à l'autre, on en tire les deux théorèmes suivants.

Théorème 2.2.1. *Pour $\vec{H}\cdot\vec{\lambda} = 0$;*

$$\textit{la direction de } \vec{H} \textit{ est constante} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_S = 0\,, \\ \nabla\times\vec{\mathrm{v}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \delta_F = \varepsilon\sqrt{a^2+\dfrac{|\vec{H}|^2}{4\pi\rho}}, \quad \varepsilon = \pm 1\,. \end{cases}$$

D'après l'expression (2.2.56), les ondes magnétoacoustiques S deviennent des ondes entropiques. Les ondes magnétoacoustiques F se propagent transversalement au champ magnétique $\vec{H}$ qui pointe dans une direction fixe, et dans ce cas l'écoulement est *irrotationnel* ; le champ des vitesses $\vec{\mathrm{v}}$ dérive d'un potentiel. Nous obtenons comme solutions

$$\rho = \rho(s), \quad p = A_o \rho^{\kappa}, \quad \vec{H} = \rho \vec{H}_o, \tag{2.2.67}$$

où A_o et p_o sont des constantes arbitraires, $\vec{H}_o$ est un vecteur constant et perpendiculaire à $\vec{\lambda}$. La vitesse du flot est colinéaire au vecteur $\vec{\lambda}$:

$$\vec{\mathrm{v}} = \varepsilon \mathrm{v}(\rho)\, \vec{\lambda}, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{2.2.68}$$

dont sa norme est donnée par

$$\mathrm{v}(\rho) = 2 \begin{cases} \sqrt{A_o}\left[\sqrt{\beta_o \rho + 1} - arc\, tanh[\sqrt{\beta_o \rho + 1}]\right] \quad \text{pour} \quad \kappa = 1\,, \\ \sqrt{2A_o(\beta_o + 1)}\,\sqrt{\rho} \quad \text{pour} \quad \kappa = 2\,, \\ \dfrac{\sqrt{\kappa A_o}}{(\kappa - 1)}\sqrt{\rho^{\kappa-1} + \beta_o \rho}\left[1 + \dfrac{(\kappa-2)\sqrt{\beta_o}}{\sqrt{\rho^{\kappa-2} + \beta_o}}\right] {}_2F_1\left(a_1, b_1, c_1; \dfrac{-\rho^{\kappa-2}}{\beta_o}\right) \quad \text{pour } \kappa \neq 1, 2\,, \end{cases} \tag{2.2.69}$$

où ${}_2F_1\,(a_1, b_1, c_1; z)$ est une fonction hypergéométrique de seconde espèce dépendant de la variable $z = -\rho^{\kappa-2}/\beta_o$, avec

$$\beta_o \equiv \frac{|\vec{H}_o|^2}{4\pi\kappa A_o} \sim \frac{\delta_A^2}{a^2}\,, \tag{2.2.70}$$

et des paramètres $a_1 = 1/2(\kappa - 2)$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 1 + 1/2(\kappa - 2)$.

Le paramètre β_o donne l'importance relative entre le pression magnétique $p_M = |\vec{H}_o|^2/8\pi$ et la pression hydrodynamique $\rho \mathrm{v}^2/2 \sim A_o$ ($|\vec{H}_o|^2$ et A_o étant des *données expérimentales*) qui agissent toutes deux sur l'écoulement du fluide. Si $\beta_o \sim 1$, les effets hydrodynamiques et magnétiques sont comparables. Au contraire, si $\beta_o \gg 1$: l'action de champ magnétique $\vec{H}$ devient prédominante sur l'écoulement du fluide .

Les solutions (2.2.67) – (2.2.69) dépendent de la variable de symétrie

$$s = \vec{\lambda}(s) \cdot \vec{\mathrm{x}} + \left(\left[\kappa\, A_o \rho^{\kappa-1} + \frac{\rho|\vec{H}_o|^2}{4\pi}\right]^{\frac{1}{2}} - \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\lambda}(s)\right) t. \tag{2.2.71}$$

Par analogie avec des ondes acoustiques, l'onde magnétoacoustique F se propage dans le fluide par compressions et extensions des lignes de force des régions fortes en densité magnétique vers des régions moins denses sans en changer la direction. Ceci s'explique par la force de Lorentz qui dérive du gradient de pression magnétique $p_M = |\vec{H}_o|^2/8\pi$:

$$\vec{F}_m = -\frac{1}{8\pi}\nabla(|\vec{H}|^2) = -\frac{|\vec{H}_o|^2}{4\pi}\rho\frac{d\rho}{ds}\vec{\lambda};$$

il n'y a pas de torsion des particules de fluide causée par le terme $(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}$. Puisque $\nabla\times\vec{v} = 0$, le fluide n'a pas de vorticité, et du fait que $\vec{F}_m$ soit une force conservatrice force, la circulation (1.3.1) est une constante en vertu du théorème de Kelvin.

Théorème 2.2.2. *Pour $\vec{H} \parallel \vec{\lambda}$.*

Si $\delta_A^2 \equiv |\vec{H}|^2/4\pi\rho < a^2 \equiv \kappa p/\rho$; $\begin{cases} \vec{H} \text{ est constant} \Leftrightarrow & \delta_F = a, \\ |\vec{H}| \text{ est constant} \Leftrightarrow & \delta_S = \delta_A . \end{cases}$

Si $\delta_A^2 \equiv |\vec{H}|^2/4\pi\rho > a^2 \equiv \kappa p/\rho$; $\begin{cases} \vec{H} \text{ est constant} \Leftrightarrow & \delta_S = a, \\ |\vec{H}| \text{ est constant} \Leftrightarrow & \delta_F = \delta_A . \end{cases}$

Si $\delta_A < a$, l'onde magnétoacoustique F (ou S si $\delta_A > a$) devient simplement une onde acoustique qui se propage dans la direction d'un champ magnétique constant $\vec{H}_o$. La vitesse d'écoulement est aussi orientée suivant $\vec{H}_o$ et il n'y a pas ici d'effet magnétique car $\vec{F}_m \equiv \vec{0}$. L'onde magnétoacoustique S (ou F si $\delta_A > a$) devient une onde d'Alfvén; $\delta_S = \delta_A$, qui a la particularité de se propager dans un fluide compressible: l'onde magnétoacoustique S (ou F si $\delta_A > a$) est dite une *onde d'Aflvén compressive* [38].

Pour l'onde S (ou F si $\delta_A > a$), les solutions du *système caractéristique* (2.2.57) s'écrivent en terme du paramètre β_o :

$$\rho = \left[\left(\frac{2\kappa+1}{2\beta_o}\right)^{(1+2/\kappa)} - \frac{(\kappa+2)}{\beta_o}s\right]^{-1/(\kappa+2)}, \quad p = A_o\rho^\kappa, \qquad \vec{H} = H_o\hat{\lambda}(s), \qquad (2.2.72)$$

où A_o et H_o sont des constantes arbitraires. La vitesse du flot s'exprime comme la somme vectorielle de deux composantes qui sont respectivement longitudinale et transversale au vecteur unitaire $\hat{\lambda}$:

$$\vec{\mathrm{v}} = \varepsilon \mathrm{v}[sin\,\theta\,\hat{\lambda}(s) - cos\,\theta\,\hat{\lambda}_{\perp}(s)]\,, \quad \varepsilon = \pm 1 \tag{2.2.73}$$

dont l'angle $\theta = \angle(\hat{\lambda}, \vec{\gamma})$ est donné par

$$tan\,\theta \equiv -\frac{\delta_A^2}{a^2} \sim -\beta_o \rho^{-\kappa}\,, \tag{2.2.74}$$

et sa norme par

$$\mathrm{v}\,(\rho) = \frac{H_o}{\sqrt{\pi}}\,\rho^{-(\kappa+\frac{1}{2})}\left[\sqrt{\rho^{2\kappa} + {\beta_o}^2} - \frac{2\kappa\beta_o}{(1+2\kappa)}\,{}_2F_1\left(a_1, b_1, c_1\,; -\frac{\rho^{2\kappa}}{{\beta_o}^2}\right)\right] \tag{2.2.75}$$

où ${}_2F_1\,(a_1, b_1, c_1; z)$ est une fonction hypergéométrique de seconde espèce dépendant de la variable $z = -\rho^{2\kappa}/{\beta_o}^2$, avec $\beta_o = H_o^2/4\pi\kappa A_o$, et des paramètres $a_1 = -(1+2\kappa)/4\kappa$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 1 - (1+2\kappa)/4\kappa$.

La densité ρ est une fonction de la variable de symétrie

$$s = \hat{\lambda}(s)\cdot\vec{\mathrm{x}} + (\delta_A - \mathrm{v}\,sin\,\theta)t\,.$$

Ainsi pour $\beta_o \sim 1$, les lignes de force, étant gelées à la "matière fluide", subissent en alternance des compressions et des extensions résultant de la composante longitudinale de $\vec{\gamma}$ suivant $\hat{\lambda}$ mais aussi des forces de torsion qui proviennent de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_m = \frac{H_o^2}{4\pi\rho}\,\hat{\lambda}_{\perp}(s)\,.$$

Pour $\beta_o \gg 1$, le champ magnétique est si intense que le fluide devient incompressible :

$$(\hat{\lambda}\cdot\vec{\gamma}) = \frac{a^2}{\delta_A^2} \longrightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}\,;$$

la densité et la pression sont alors des constantes. Dans cette limite, les expressions (2.2.73) – (2.2.75) donnent comme vitesse du flot :

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{\varepsilon H_o}{\sqrt{4\pi\rho_o}}\,\hat{\lambda}(s)\,, \qquad \varepsilon = \pm 1\,.$$

qui correspond à l'expression (2.2.51) obtenue pour l'onde d'Alfvén décrite dans la **section (2.2.2)** : dans cas on l'appelle l'*onde d'Alfvén de torsion* [38] car elle se propage dans un fluide incompressible et stationnaire en "tordant" les lignes de force.

Dans la situation plus générale où l'onde magnétoacoustique se propage dans une direction donnée (*i.e.* $\vec{\lambda}$ est constant), les solutions du système réduit (2.2.61) peuvent se reformuler en terme de la densité ρ :

$$\vec{v} = -\left(\int \delta_M \frac{d\rho}{\rho}\right) \vec{\lambda} + v_\perp(\rho)\,\vec{\lambda}_\perp\,, \qquad p = A_o\,\rho^\kappa\,. \tag{2.2.76}$$

En tenant compte des théorèmes (2.2.1) et (2.2.2), la composante longitudinale de $\vec{H}$ suivant $\vec{\lambda}$; H_o, demeure constante alors que sa composante transversale à $\vec{\lambda}$ varie en fonction de la densité ρ :

$$\vec{H} = H_o\,\vec{\lambda} + H_\perp(\rho)\,\vec{\lambda}_\perp\,. \tag{2.2.77}$$

Les fonctions $v_\perp(\rho)$ et $H_\perp(\rho)$ sont déterminées en résolvant les EDO suivantes :

$$\frac{dH_\perp}{d\rho} \equiv \frac{4\pi\delta_M^2\,H_\perp}{(4\pi\rho\,\delta_M^2 - H_o^2)}\,, \qquad \frac{dv_\perp}{d\rho} \equiv \frac{H_o\,\delta_M}{(4\pi\rho\,\delta_M^2 - H_o^2)}\left(\frac{H_\perp}{\rho}\right)\,,$$

où la vitesse caractéristique δ_M est égale à

$$\delta_M = \frac{1}{2}\left[a^2 + \frac{H_\perp^2 + H_o^2}{4\pi\rho} + \frac{2aH_o}{\sqrt{4\pi\rho}}\right]^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2}\left[a^2 + \frac{H_\perp^2 + H_o^2}{4\pi\rho} - \frac{2aH_o}{\sqrt{4\pi\rho}}\right]^{\frac{1}{2}}\,,$$

et la densité ρ une fonction arbitraire de la variable de symétrie

$$s = \left(\delta_M - \int \delta_M \frac{d\rho}{\rho}\right) t + \vec{\lambda}\cdot\vec{x}.$$

En conclusion, nous résumons les liens entre les ondes simples et la MHD. D'abord, nous donnons dans le tableau (2.1) les relations entre les vitesses caractéristiques des ondes simples selon des critères liés à leur direction de propagation par rapport au champ magnétique $\vec{H}$ et les caractéristiques physiques du fluide.

Tableau 2.1. Dégénérescence des vitesses caractéristiques pour des ondes simples.

$\delta_A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{H} \cdot \vec{\lambda} = 0$
$\delta_S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_F = \pm\sqrt{a^2 + \frac{\lvert\vec{H}\rvert^2}{4\pi\rho}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{H} \perp \vec{\lambda}$
Si $\frac{\lvert\vec{H}\rvert^2}{4\pi\rho} < a^2$ alors $\left(\delta_S = \frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \delta_F = a\right) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{H} \parallel \vec{\lambda}$
Si $\frac{\lvert\vec{H}\rvert^2}{4\pi\rho} > a^2$ alors $\left(\delta_S = a, \quad \delta_F = \frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})}{\sqrt{4\pi\rho}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{H} \parallel \vec{\lambda}$
$\delta_S = \delta_F \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{\lvert\vec{H}\rvert^2}{4\pi\rho}$ et $\vec{H} \parallel \vec{\lambda}$

En vertu de l'équation (2.2.55), les vitesses caractéristiques δ_M satsifont la relation :

$$(\delta_M^2 - a^2)\left(\delta_M^2 - \frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})^2}{4\pi\rho}\right) = \delta_M^2\left(\frac{|\vec{H}|^2}{4\pi\rho} - \frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})^2}{4\pi\rho}\right) \geq 0$$

de laquelle nous tirons les inégalités :

$$\delta_S \leq a \leq \delta_F, \qquad \delta_S \leq \frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda})}{\sqrt{4\pi\rho}} \leq \delta_S$$

qui mènent finalement à

$$0 = \delta_E \leq \delta_S \leq \delta_A \leq \delta_F. \tag{2.2.78}$$

Pour conclure cette section, nous faisons la synthèse des propriétes des ondes simples de la *magnétohydrodynamique* en présentant dans le tableau (2.2) la propagation de ces ondes dans fluide soumis à certaines contraintes physiques.

Tableau 2.2. Propriétés des ondes simples MHD soumises à des contraintes physiques.

Contraintes Physiques	E_1	E_2	E_3	A	F	S
$\rho = constante$	$\times$	$\times$	$-$	$+$	$-$	$-$
$p = constante$	$\times$	$\times$	$+$	$+$	$-$	$-$
$p = A_o \rho^{\kappa}$	$\times$	$\times$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\vec{v}$ *est constant*	$\times$	$\times$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\vec{H}$ *est constant*	$\times$	$\times$	$+$	$-$	a	$-$
$\mid \vec{H} \mid^2 = constante$	$\times$	$\times$	$+$	$+$	a	A
$p^2 + \frac{\mid\vec{H}\mid^2}{8\pi} = constante$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\times$	E
$\nabla \times \vec{v} = 0$	$\times$	$\times$	$+$	$-$	$\times$	E
$\vec{F}_m = 0$	$\times$	$\times$	$+$	$-$	a	a
$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0,\ \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$	E_2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Légende	
$+$	Aucune contrainte sur la propagation
$\times$	Contrainte sur la propagation de l'onde
$-$	L'onde simple n'existe pas
E	L'onde simple devient une onde entropique
A	L'onde simple devient une onde d'Alfvén
a	L'onde simple devient une onde acoustique

Les solutions de rang un coïncident avec les ondes de Riemann. Les résultats obtenus pour les ondes simple sont une reconstruction déja établie dans la littérature traitant de la MHD : [1], [24], [37].

2.3 Les ondes multiples pour des systèmes quasilinéaires d'EDP.

Dans cette section, nous généralisons la théorie des ondes simples donnée dans la section (3.1) au cas des ondes multiples qui résultent de la superposition de plusieurs ondes simples : celles-ci sont décrites en termes des invariants de Riemann. Pour cela, nous fixons d'abord k vecteurs d'onde linéairement indépendants

$$\lambda^1, \ldots, \lambda^k, \qquad 1 \leq k \leq p,$$

pour lesquels sont associés les invariants de Riemann correspondants

$$r^1(\mathrm{x}, \mathrm{u}) = \lambda^1_\mu(\mathrm{u}) x^\mu, \quad \ldots \quad, r^k(\mathrm{x}, \mathrm{u}) = \lambda^k_\mu(\mathrm{u}) x^\mu . \tag{2.3.1}$$

L'équation

$$\mathrm{u} = f\left(r^1(\mathrm{x}, \mathrm{u}), \ldots, r^k(\mathrm{x}, \mathrm{u})\right) \tag{2.3.2}$$

définit de manière unique la fonction u(x) au voisinage de l'origine $\mathrm{x} = 0$ pour toute fonction $f : I\!R^k \to I\!R^q$. La matrice de Jacobie est donnée par

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} = \left(\phi^{-1}(\mathrm{x})\right)^l_j \lambda^j_\mu(\mathrm{u(x)}) \frac{\partial f^\alpha}{\partial r^l}(r(\mathrm{x}, \mathrm{u})), \quad l, j = 1, \ldots, k\,; \;\; \mu = 1, \ldots, p\,; \;\; \alpha = 1, \ldots, q\,, \tag{2.3.3}$$

où

$$\left(\phi(\mathrm{x})\right)^l_j = \delta^l_j - \frac{\partial r^l}{\partial u^\alpha} \frac{\partial f^\alpha}{\partial r^j}(r(\mathrm{x}, \mathrm{u})).$$

est une matrice de dimensions $k \times k$ considérée comme inversible. Cette supposition exclut la catastrophe du gradient pour la fonction u. La preuve de la formule (2.3.3) est analogue à celle faite pour l'onde simple (2.1.8). Notons que le rang de la matrice de Jacobie est au plus égal à k.

Nous choisissons un ensemble de $(p-k)$ vecteurs

$$\xi_a(\mathrm{u}) = \left(\xi^1_a(\mathrm{u}), \ldots, \xi^p_a(\mathrm{u})\right)^T, \quad a = 1, \ldots, p-k\,, \tag{2.3.4}$$

tels qu'ils soient tous orthogonaux à chaque vecteur d'onde λ^i :

$$\lambda^i \cdot \xi_a = 0\,, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{2.3.5}$$

L'ensemble des vecteurs $\{\lambda^1, \ldots, \lambda^k, \xi_1, \ldots, \xi_{p-k}\}$ forment une base dans l'espace des variables indépendantes $E \subset I\!R^p$. Soulignons que le choix des vecteurs ξ_a n'est pas unique et que seule la direction des vecteurs d'onde importe et non leur norme.

Alors, nous obtenons de l'équation (2.3.3) que

$$\xi_a^\mu \left(u^\alpha (\mathrm{x})\right) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} = 0\,, \quad a = 1, \ldots, p-k\,, \tag{2.3.6}$$

impliquant que $u^1(\mathrm{x}), \ldots, u^q(\mathrm{x})$ soient invariants par rapport aux champs vectoriels

$$\xi_a^\mu \left(\mathrm{u}(\mathrm{x})\right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,, \quad a = 1, \ldots, p-k\,,$$

agissant dans l'espace E. Par conséquent le graphe $\Gamma = \{(\mathrm{x}, \mathrm{u}(\mathrm{x}))\}$ est une sous-variété invariante sous l'action de chaque champ vectoriel :

$$X_a = \xi_a^\mu \left(\mathrm{u}\right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,, \quad a = 1, \ldots, p-k\,, \tag{2.3.7}$$

agissant dans l'espace des variables indépendantes et dépendantes $E \times U \subset I\!R^p \times I\!R^q$.

Si $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ est une fonction à q composantes, définie au voisinage de $\mathrm{x} = 0$, tel que son graphe $\Gamma = \{(\mathrm{x}, \mathrm{u}(\mathrm{x}))\}$ soit invariant sous l'action de tous les champs vectoriels X_a (2.3.7) satisfaisant la propriété (2.3.5) alors $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ est une solution de l'équation (2.3.2) pour une certaine fonction f. Les fonctions $r^1, \ldots, r^k$, $u^1 \ldots, u^q$ forment un ensemble complet d'invariants de l'algèbre abélienne engendrée par les champs vectoriels X_a. Cela caractérise géométriquement les solutions exprimées sous la forme (2.3.2). En substituant l'expression (2.3.2) dans le système (2.1.3), on obtient le système réduit

$$\left(\phi^{-1}(\mathrm{x})\right)^l_j \lambda^j_i \left(\mathrm{u}(\mathrm{x})\right) A^i \left(\mathrm{u}(\mathrm{x})\right) \frac{\partial f^\alpha}{\partial r^l} \left(r\left(\mathrm{x}, \mathrm{u}(\mathrm{x})\right)\right) = 0\,. \tag{2.3.8}$$

La comparaison avec (2.1.20) nous laisse entrevoir qu'une réduction semblable à celle menant à (2.1.21) est plus difficile à obtenir ici car ϕ est dorénavant une matrice $k \times k$.

En conséquence de ces faits nous pouvons énoncé ceci.

Proposition. Une fonction u(x), définie au voisinage de x = 0, satisfait l'équation (2.3.2) pour une certaine fonction $f : I\!R^k \to I\!R^q$ si et seulement si son graphe $\Gamma = \{(\mathrm{x}, \mathrm{u}(\mathrm{x}))\}$ est invariant sous l'action de tous les champs vectoriel X_a (2.3.7). Une telle fonction u(x) est une solution du système (2.1.3) si et seulement si les équations aux dérivées partielles (2.3.8) sont satisfaites.

Maintenant, nous faisons un changement de variables qui permet de rectifier les champs vectoriels X_a et d'obtenir conséquemment un système réduit qui admet comme solutions des ondes multiples. Pour cela, nous introduisons la matrice carrée $k \times k$ supposée inversible :

$$\Lambda = \left(\lambda^i_j\right), \quad 1 \leq i, j \leq k. \tag{2.3.9}$$

Les champs vectoriels s'expriment comme

$$X_{k+1} = \frac{\partial}{\partial x^{k+1}} - \sum_{i,j=1}^{k} (\Lambda^{-1})^j_i \, \lambda^i_{k+1} \frac{\partial}{\partial x^j}, \ldots, X_p = \frac{\partial}{\partial x^p} - \sum_{i,j=1}^{k} (\Lambda^{-1})^j_i \, \lambda^i_p \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{2.3.10}$$

qui ont la même forme que l'expression (2.1.18) avec la propriété d'orthogonalité (2.3.5). Le changement des variables indépendantes et dépendantes

$$\overline{x}^1 = r^1(\mathrm{x}, \mathrm{u}), \ldots, \overline{x}^k = r^k(\mathrm{x}, \mathrm{u}), \ \overline{x}^{k+1} = x^{k+1}, \ldots, \overline{x}^p = r^p, \ \overline{u}^1 = u^1, \ldots, \overline{u}^q = u^q \tag{2.3.11}$$

permet de rectifier les champs vectoriels comme suit

$$X_{k+1} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^{k+1}}, \ldots, X_p = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^p}. \tag{2.3.12}$$

La preuve de cette rectification est analogue à celle faite dans la section (2.1) pour l'expression (2.1.25). Par conséquent, le graphe $\Gamma = \{(\mathrm{x}, \mathrm{u}(\mathrm{x}))\}$, étant invariant par rapport aux champs vectoriels $X_{k+1}, \ldots, X_p$, est défini par les équations de la forme:

$$\overline{\mathrm{u}} = f(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^k) \tag{2.3.13}$$

où $f : I\!R^k \to I\!R^q$ est une fonction arbitraire (comparativement à (2.3.2)) qui est une solution générale des conditions d'invariance :

$$\overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^{k+1}} = 0, \ldots, \overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^p} = 0. \tag{2.3.14}$$

Le système (2.1.2) se récrit en termes des nouvelles variables $(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{u}})$ comme :

$$\overline{A}^{i}\,(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{u}}, \overline{\mathrm{u}}_{\overline{\mathrm{X}}})\,\overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^i} = 0\,, \tag{2.3.15}$$

où l'on a introduit la notation :

$$\overline{A}^{i} \equiv \frac{D\overline{x}^i}{Dx^\mu} A^\mu\,,$$

en particulier pour chaque terme :

$$\overline{A}^{1} = \frac{Dr^1}{Dx^\mu} A^\mu, \quad \dots \quad, \overline{A}^{k} = \frac{Dr^k}{Dx^\mu} A^\mu, \quad \overline{A}^{k+1} = A^{k+1}, \quad \dots, \quad \overline{A}^{p} = A^p\,, \tag{2.3.16}$$

où

$$\left.\frac{Dr^i}{Dx^\mu}\right|_{\overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^{k+1}}, \dots, \overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^p} = 0} = \left(\Phi^{-1}\right)^i_j \lambda^j_\mu\,,$$

avec

$$\left(\Phi^{-1}\right)^i_j = \delta^i_j - \frac{\partial r^i}{\partial \overline{u}^\alpha} \overline{u}^\alpha_j\,, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

En ajoutant les conditions d'invariance (2.3.14) au système (2.3.15), on obtient alors un système d'EDP quasilinéaire et surdéterminé qui s'exprime en termes des nouvelles variables $(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{u}})$ sous la forme :

$$\Delta : \begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{k} \sum\limits_{l=1}^{p} \left(\Phi^{-1}\right)^i_j \lambda^j_l A^l \overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^i} = 0\,, \\ \overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^{k+1}} = 0\,, \dots, \overline{\mathrm{u}}_{\overline{x}^p} = 0\,. \end{cases} \tag{2.3.17}$$

Pour $k \geq 2$, le système (2.3.17) devient plus compliqué à résoudre que son correspondant (2.1.32) de rang un puisque Φ n'est plus ici un scalaire mais une matrice $k \times k$.

Comme il a été démontré dans [14] (page 885, Théorème 2) ; le critère infinitésimal nous assure l'existence de solutions G-invariantes (2.3.2) (*i.e.* solutions de rang-k) du système surdéterminé (2.3.17) tant que

$$pr^{(1)} X_a\,[\Delta] = 0\,, \qquad a = 1, \dots, p-k \tag{2.3.18}$$

où les équations $\Delta = 0$ sont satisfaites.

Nous complétons notre construction de solutions de rang k par "pullback" des vecteurs d'onde $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ sur la sous-variété $\mathcal{S} \subset U$ de dimensions k qui est obtenue en résolvant le système (2.3.17). Alors les vecteurs d'onde $\lambda^1(\mathrm{u}), \dots, \lambda^k(\mathrm{u})$ deviennent des fonctions des paramètres $r^1, \dots, r^k$. Les ensembles (2.3.1) et (2.3.2) définissent des relations implicites entre les variables u^α, x^μ et $r^1, \dots, r^k$ qui peuvent s'exprimer ainsi :

$$\mathrm{u} = f(r), \quad r^s = \lambda^s_\mu(r)\, x^\mu, \quad s = 1, \dots, k \tag{2.3.19}$$

où $r = (r^1, \dots, r^k)$. Notons que les solutions (2.3.19) incluent les k-ondes de Riemann.

Il a été prouvé dans [19] et [33] que si les conditions initiales sont suffisament petites pour les fonctions $R^s(t, \vec{\mathrm{x}})$ telles que

(i) les dérivées partielles $\partial R^s/\partial x^\mu$ possèdent supports compacts et disjoints :

$$\exists\, a_s,\, b_s \in I\!R^1, \quad s = 1,2, \quad supp\left(\frac{\partial R^s}{\partial x^\mu}\right)(t_o, \vec{\mathrm{x}}) \subset [a_s, b_s]\,,$$
$$supp\left(\frac{\partial R^1}{\partial x^\mu}\right)(t_o, \vec{\mathrm{x}}) \cap supp\left(\frac{\partial R^2}{\partial x^\mu}\right)(t_o, \vec{\mathrm{x}}) = \emptyset\,,$$

(ii) la condition suivante est satisfaite :

$$\exists\, c > 0, \ \ \forall (t, \vec{\mathrm{x}}),\, (t', \vec{\mathrm{x}}') \in [t_o, T] \times I\!R^3 \ \text{ tel que } \ |v_1(t, \vec{\mathrm{x}}) - v_2(t', \vec{\mathrm{x}}')| \geq c;$$

c'est-à-dire que chaque caractéristique de la famille C^1 a une tangente dont l'angle d'inclinaison est plus petit que toute caractéristique de la famille C^2.

Alors la superposition de deux ondes simples, qui peuvent être décrites en termes des invariants de Riemman, se décompose exactement en deux ondes du même type présentes à l'instant initial $t = 0$. Dans ce cas, il y a conservation du nombre et du type d'ondes simples. Suivant la terminologie employée [7], on est en présence d'une "interaction élastique" d'ondes simples.

2.4 Les ondes doubles décrites par le système MHD.

Dans cette section, nous construisons des ondes doubles pour le système MHD (2.2.1) qui résultent de la superposition non linéaire de deux ondes simples telles que décrites dans la section (2.2). D'abord, nous appliquons la théorie des ondes multiples introduite dans la section précédente pour le cas $k = 2$. Puis nous posons certaines hypothèses de travail afin d'en simplifier les calculs.

Soient les deux vecteurs d'onde linéairement indépendants suivants :

$$\lambda^s = (\lambda^s_o, \vec{\lambda}^s), \quad \text{où} \quad \lambda^s_o = \delta_s - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}^s, \qquad s = 1, 2, \tag{2.4.1}$$

dont les *vecteurs unitaires* $\vec{\lambda}^s$ s'expriment dans le repère de coordonnées sphériques:

$$\vec{\lambda}^1 = (\, sin\,\beta\, cos\,\varphi,\, sin\,\beta\, sin\,\varphi, cos\,\beta\,)\,, \quad \vec{\lambda}^2 = (\, sin\,\gamma\, cos\,\theta,\, sin\,\gamma\, sin\,\theta, cos\,\gamma\,)\,. \tag{2.4.2}$$

où les angles $\beta = \beta(\mathrm{u})$, $\gamma = \gamma(\mathrm{u})$, $\varphi = \varphi(\mathrm{u})$ et $\theta = \theta(\mathrm{u})$ sont des fonctions à être déterminées. On introduit le vecteur $\vec{\mathrm{n}} = (\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \mathrm{n}_3) = \vec{\lambda}^1 \times \vec{\lambda}^2$ donné par

$$\vec{n} = \Big(sin\,\beta\, cos\,\gamma\, sin\,\varphi - sin\,\gamma\, cos\,\beta\, sin\,\theta,\; sin\,\gamma\, cos\,\beta\, cos\,\theta - sin\,\beta\, cos\,\gamma\, cos\,\varphi,\; sin\,\gamma\, sin\,\beta\, sin(\theta - \varphi) \Big) \tag{2.4.3}$$

qui n'est pas forcément un vecteur unitaire, le fait qu'il ne soit pas nul nous assure que les vecteurs d'onde λ^1 et λ^2 sont linéairement indépendants.

Nous déterminons les vecteurs $\xi_a(\mathrm{u}) = \Big(\xi^o_a(\mathrm{u}), \xi^1_a(\mathrm{u}), \xi^2_a(\mathrm{u}), \xi^3_a(\mathrm{u})\Big)$, $a = 1, 2$; qui sont orthogonaux à chaque vecteur d'onde λ^s; $s = 1, 2$, en résolvant la relation (2.3.5) :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \left(\frac{\mathrm{n}_3}{det[\Lambda]}, \frac{1}{det\,[\Lambda]} \left[\delta_2\, sin\,\beta\, sin\,\varphi - \delta_1\, sin\,\gamma\, sin\,\theta + \mathrm{n}_3\, u - \mathrm{n}_1\, w\right], 1, 0 \right)^T, \\ \xi_2 &= \left(-\frac{\mathrm{n}_2}{det\,[\Lambda]}, \frac{1}{det\,[\Lambda]} \left[\delta_2\, cos\,\beta - \delta_1\, sin\,\gamma + \mathrm{n}_2\, u + \mathrm{n}_1\, v\right], 0, 1 \right)^T, \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

où $det[\Lambda]$ est le déterminant de la matrice Λ de dimensions 2×2 (*cf.* (2.3.9))

$$det[\Lambda] \equiv \delta_1\, sin\,\gamma\, cos\,\theta - \delta_2\, sin\,\beta\, cos\,\varphi + \mathrm{n}_3\, v - \mathrm{n}_2\, w\,. \tag{2.4.5}$$

De la formule (2.3.7) on déduit l'expression des champs vectoriels X_a:

$$X_1 = \xi_1^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_1^1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \xi_2^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_2^1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.4.6}$$

Les invariants de la sous-algèbre $\{X_1, X_2\}$ forment l'ensemble suivant

$$\left\{ s,\, r\, ;\, \rho,\, p,\, \vec{\mathrm{v}},\, \vec{H} \right\}$$

où les variables de symétrie s et r coïncident avec les invariants de Riemann:

$$s = \lambda_\mu^1 x^\mu = (\delta_1 - \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\lambda}^1)t + \vec{\lambda}^1 \cdot \vec{\mathrm{x}}, \quad r = \lambda_\mu^2 x^\mu = (\delta_2 - \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\lambda}^2)t + \vec{\lambda}^2 \cdot \vec{\mathrm{x}}. \tag{2.4.7}$$

Ensuite, nous supposons que les fonctions inconnues $\mathrm{u} = (\rho, p, \vec{\mathrm{v}}, \vec{H})$ s'expriment en termes des invariants de Riemann s et r

$$\begin{aligned} &\rho = \rho(s,r), \quad p = p(s,r), \quad \vec{\mathrm{v}} = u(s,r)\vec{e}_1 + v(s,r)\vec{e}_2 + w(s,r)\vec{e}_3\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{H} = H_1(s,r)\vec{e}_1 + H_2(s,r)\vec{e}_2 + H_3(s,r)\vec{e}_3\,, \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

et conséquemment ces fonctions sont invariantes sous l'action des champs vectoriels (2.4.6). En les remplaçant dans le système de départ (2.2.1), nous obtenons ainsi un système réduit composé d'EDPs qui décrit les ondes doubles à partir des vecteurs d'onde λ^s relatifs aux deux ondes simples superposées. Vu la complexité de ce système réduit, nous posons certaines hypothèses supplémentaires sur les différentes orientations possibles des vecteurs $\vec{\lambda}^s$. De cette façon, nous abordons le problème en deux cas élémentaires qui vont nous permettre de construire des ondes doubles.

I) Configuration planaire. Dans ce cas, nous fixons les deux vecteurs $\vec{\lambda}^s$ dans le plan généré par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ de sorte que la dépendence en z des solutions (2.4.8) disparait. Cela se traduit dans l'expression des champs vectoriels (2.4.6):

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{sin(\theta-\varphi)}{det[\Lambda]}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{[\delta_2\, sin\,\varphi - \delta_1\, sin\,\theta + u\, sin(\theta-\varphi)]}{det[\Lambda]}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\,, \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial z}\,, \quad \text{où} \quad det[\Lambda] = \delta_1\, cos\,\theta - \delta_2\, cos\,\varphi + v\, sin(\theta-\varphi)\,. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Nous retrouvons l'analogue de l'*écoulement plan* en hydrodynamique : le champ magnétique et la vitesse n'ont que deux composantes alors que la troisième suivant l'axe z est un paramètre qu'on peut fixer. Puisque $\nabla\cdot \vec{H} = 0$, le champ magnétique peut s'exprimer à partir d'une certaine fonction scalaire $\Phi(s,r)$ appelée *la fonction courant* [36] telles que ses composantes s'écrivent sous la forme :

$$H_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \qquad H_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}. \tag{2.4.10}$$

De même si le fluide est incompressible ; $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, le champ de vitesse peut aussi s'exprimer directement à partir d'une seule composante d'une *fonction courant* $\Psi(s,r)$.

II) Configuration axiale. Dans ce cas, on fixe le vecteur $\vec{\lambda}^1$ le long de l'axe z tandis que l'autre vecteur $\vec{\lambda}^2$ est libre de circuler dans le plan généré par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Le vecteur $\vec{n}$ n'a que deux composantes et il est perpendiculaire à $\vec{\lambda}^2$. Les champs vectoriels (2.4.6) s'écrivent donc

$$X_1 = -\tan\theta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (u + v\tan\theta - \delta_2)\frac{\partial}{\partial x} + (w - \delta_1)\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.4.11}$$

Dans la section suivante, nous présentons les solutions de rang-2 qui résultent des différentes combinaisons possibles des champs vectoriels X_a. Nous les dénotons par E_iE_j, $A^\epsilon A^\epsilon$, $A^\epsilon E_i$, FF, FE_i, $\ldots$, $i,j = 1,2,3$, où les indices i,j représente la dimension générée par les vecteurs λ^s. Pour chaque type de solution, nous faisons une brève description physique de la synergie obtenue par la superposition non linéaire de deux ondes simples. Les résultats de notre analyse sont résumés dans le tableau (2.3).

Tableau 2.3. Les ondes doubles de Riemann décrites par les équations MHD, + indique que l'onde double existe ; – indique que l'onde double n'existe pas, $\epsilon = \pm 1$.

Ondes	E	A^ϵ	F^ϵ	S^ϵ
E	+	+	+	–
A^ϵ	+	+	–	–
F^ϵ	+	–	+	–
S^ϵ	–	–	–	–

2.4.1 Les ondes doubles entropiques (E_1E_1).

Dans l'analyse des ondes doubles entropiques E_1E_1, on a traité séparément les deux cas suivants.

1). Configuration planaire. Les deux vecteurs $\vec{\lambda}^1$ et $\vec{\lambda}^2$ sont situés dans le plan généré par les vecteurs unitaires $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. On a donc

$$\begin{aligned} \lambda^1 &=(- (\vec{\lambda}^1 \cdot \vec{v}), \vec{\lambda}^1), \quad \lambda^2 = (- (\vec{\lambda}^2 \cdot \vec{v}), \vec{\lambda}^2), \\ \vec{\lambda}^1 &=(cos\,\varphi, sin\,\varphi, 0), \quad \vec{\lambda}^2 = (cos\,\theta, sin\,\theta, 0), \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

où φ et θ sont des fonctions des invariants de Riemann s et r à être déterminées. La solution du type E_1E_1 est invariante sous l'action des champs vectoriels (2.4.9)

$$X_1 = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{2.4.13}$$

qui est déterminée par le système d'équations

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{\rho, p, \vec{v}, \vec{H}\} &= 0, && (i) \\ \nabla p = -\frac{1}{8\pi}\nabla|\vec{H}|^2 &+ \frac{1}{4\pi}(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}, && (ii) \\ (\vec{H}\cdot\nabla)\vec{v} &= 0, && (iii), \\ \nabla\cdot\vec{v} = 0, \quad \nabla\cdot\vec{H} &= 0, && (iv) \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

où ρ, p, $\vec{v}$ et $\vec{H}$ sont des fonctions arbitraires des invariants de Riemann

$$s = \vec{\lambda}^1(s,r)\cdot(\vec{x} - \vec{v}t), \qquad r = \vec{\lambda}^2(s,r)\cdot(\vec{x} - \vec{v}t). \tag{2.4.15}$$

Le système réduit (2.4.14) décrit la propagation d'une onde double entropique E_1E_1 dans un fluide incompressible pour lequel les quantités ρ, p, $\vec{v}$ et $\vec{H}$ sont conservées le long de son flot. Dans le bilan des forces agissant sur celui-ci, il y a équilibre entre le gradient de pression hydrodynamique et la force de Lorentz qui résulte d'un gradient de pression magnétique $|\vec{H}|^2/8\pi$ et d'une force de tension $(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}$. Le vecteur ∇p est en tout point dirigé suivant la surface normale à la *surface isobarique* passant par ce point. En se référant aux équations (1.1.10) et (1.1.13), la contrainte (*ii*) indique que les vecteurs $\vec{J}$ et $\vec{H}$ sont situés dans le plan tangent à cette surface isobarique. Soulignons que la contrainte (*ii*) avec la loi d'Ampère (1.1.10) servent de base à la théorie simplifiée du confinement d'un plasma par un champ magnétique [11].

La contrainte $(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{v}=0$ implique que la vitesse de l'écoulement demeure constante suivant les lignes de force de $\vec{H}$. Par conséquent, les lignes de force magnétiques et les lignes de courant sont tracées sur des surfaces isobariques et sur lesquelles la vitesse du flot demeure constante. L'onde double entropique génère de la vorticité, et la circulation du fluide est préservée puisque la force de Lorentz bien qu'étant non conservatrice (*i.e.* elle ne dérive d'un potentiel) est contrebalancée par la pression hydrodynamique. Si nous imposons que la force de Lorentz ne dépend que de la pression magnétique, nous obtenons alors comme solution

$$\rho=\rho(s,r),\quad p(s,r)+\frac{1}{2}|\vec{H}(s,r)|^2=p_o,\quad \vec{v}=w(s,r)\vec{e}_3,\quad \vec{H}=H(s,r)\vec{e}_3, \tag{2.4.16}$$

où p_o est une constante arbitraire ; ρ, w et H sont des fonctions arbitraires des invariants de Riemann ;

$$s=\vec{\lambda}^1(s,r)\cdot\vec{x},\qquad r=\vec{\lambda}^2(s,r)\cdot\vec{x}. \tag{2.4.17}$$

L'onde double entropique se propage dans un fluide incompressible dont le flot est unidimensionel et stationnaire sans vorticité.

2). Configuration axiale. On fixe la direction du vecteur $\vec{\lambda}^1$ suivant $\vec{e}_3$ tandis que le vecteur $\vec{\lambda}^2$ circule dans le plan perpendiculaire à $\vec{\lambda}^1$. Les vecteurs d'onde entropiques s'écrivent sous la forme

$$\lambda^1=(-w,0,0,1),\quad \lambda^2=(-(\vec{\lambda}^2\cdot\vec{v}),\vec{\lambda}^2), \tag{2.4.18}$$

où $\vec{\lambda}^2=(\cos\theta,\sin\theta,0)$; θ est une fonction des invariants de Riemann s et r qui sont à être déterminés. Les champs vectoriels correspondants (2.1.7) sont donnés par

$$X_1=-\tan\theta\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial t}+(u+v\tan\theta)\frac{\partial}{\partial x}+w\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.4.19}$$

Maintenant, on peut considérer deux types de solutions MHD, invariantes sous l'action de l'algèbre $\{X_1, X_2\}$, qui dépendent de l'orientation choisie pour le champ magnétique $\vec{H}$ par rapport aux vecteurs $\vec{\lambda}^1$ et $\vec{\lambda}^2$.

2.a). Le champ magnétique $\vec{H}$ est perpendiculaire aux deux vecteurs $\vec{\lambda}^1$ et $\vec{\lambda}^2$.

Dans ce cas, la solution est donnée par

$$\rho = \rho(s,r), \;\; p(s,r) + \frac{1}{2}|\vec{H}(s,r)|^2 = p_o, \;\; \vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}(s,r)\vec{\lambda}^2_\perp(r) + w(s)\vec{e}_3, \;\; \vec{H} = H(s,r)\vec{\lambda}^2_\perp(r), \quad (2.4.20)$$

où p_o est une constante arbitraire; ρ, v, w et H sont fonctions arbitraires de leurs arguments, le vecteur unitaire $\vec{\lambda}^2_\perp = \Big(-\sin\theta\,(r), \cos\theta\,(r), 0\Big)$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{\lambda}^2$ et l'angle θ est une fonction arbitraire de r. Les invariants de Riemann s et r sont donnés par

$$s = \vec{\lambda}^2\,(r)\cdot\vec{\mathrm{x}}, \qquad r = z - w(s)t\,. \qquad (2.4.21)$$

2.b). Le champ magnétique $\vec{H}$ est perpendiculaire au vecteur constant $\vec{\lambda}^2_o$. Dans ce cas, la solution s'écrit sous la forme

$$\rho = \rho(s,r), \;\; p(s) + \frac{1}{2}|\vec{H}(s)|^2 = p_o, \;\; \vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}(s)\vec{e}_o + w(s)\vec{e}_3, \;\; \vec{H} = H_\perp(s)\vec{e}_o + H_3(s)\,\vec{e}_3\,, \quad (2.4.22)$$

où p_o est une constante arbitraire, le vecteur constant $\vec{e}_o = \Big(-\sin\theta_o, \cos\theta_o, 0\Big)$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{\lambda}^2_o$, ρ est une fonction arbitraire des deux invariants de Riemann s et r ; de même pour v, w, $H_\perp$ et H_3 qui sont des fonctions arbitraires de l'invariant de Riemann s. Les invariants s et r sont donnés par

$$s = \vec{\lambda}^2_o\cdot\vec{\mathrm{x}}, \qquad r = z - w(s)t\,. \qquad (2.4.23)$$

Dans les deux cas **2.a)** et **2.b)**, La force de Lorentz force est contrebalancée par le gradient de pression hydrodynamique. Donc, le fluide n'est soumis à aucune force, et en vertu du théorème de Kelvin, la circulation du fluide est préservée.

2.4.2 Les ondes doubles d'Alfvén (AA).

Nous discutons de la superposition de deux ondes d'Alfvén A^{ε} pour lesquelles leurs vecteurs d'onde sont de la forme

$$\lambda^1 = (\lambda_o^1,\ \lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1)\,, \qquad \lambda^2 = (\lambda_o^2,\ \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)\,, \tag{2.4.24}$$

où

$$\lambda_o^i = \varepsilon \frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda}^i)}{\sqrt{4\pi\rho}} - \vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\lambda}^i\,, \quad i=1,2,\ \ \varepsilon=\pm 1\,. \tag{2.4.25}$$

Nous supposons que les vecteurs $\vec{\lambda}^1$ et $\vec{\lambda}^2$ soient linéairement indépendants ; et donc il en va de même pour les vecteurs d'onde λ^1 et λ^2 qui leurs sont associés.

Les champs vectoriels correspondants sont donnés par

$$\begin{aligned} X_1 =& \frac{(\lambda_1^1\lambda_2^2 - \lambda_2^1\lambda_1^2)}{(\lambda_o^1\lambda_1^2 - \lambda_1^1\lambda_o^2)}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{(\lambda_2^1\lambda_o^2 - \lambda_o^1\lambda_2^2)}{(\lambda_o^1\lambda_1^2 - \lambda_1^1\lambda_o^2)}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\,, \\ X_2 =& \frac{(\lambda_1^1\lambda_3^2 - \lambda_3^1\lambda_2^2)}{(\lambda_o^1\lambda_1^2 - \lambda_1^1\lambda_o^2)}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{(\lambda_3^1\lambda_o^2 - \lambda_o^1\lambda_3^2)}{(\lambda_o^1\lambda_1^2 - \lambda_1^1\lambda_o^2)}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\,. \end{aligned} \tag{2.4.26}$$

Les solutions invariantes sous l'action de $\{X_1, X_2\}$ sont

$$\rho=\rho_o, \quad p=p_o, \quad \vec{\mathrm{v}}\,(s,r) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi\rho_o}}\vec{H}\,(s,r), \quad |\vec{H}|^2 = \mathcal{H}_o^2, \quad \varepsilon=\pm 1\,, \tag{2.4.27}$$

où ρ_o, p_o, $\mathcal{H}_o^2$ sont des constantes arbitraires, $\vec{\mathrm{v}}$ et $\vec{H}$ sont des fonctions vectorielles des invariants de Riemann suivants

$$s = \vec{\lambda}^1\,(s,r)\cdot\vec{\mathrm{x}}\,, \qquad r = \vec{\lambda}^2\,(s,r)\cdot\vec{\mathrm{x}}\,. \tag{2.4.28}$$

Le champ magnétique $\vec{H}$ doit satisfaire les contraintes suivantes

$$\frac{d\vec{H}}{ds}\cdot\vec{\lambda}^1\cdot = 0, \quad \frac{d\vec{H}}{dr}\cdot\vec{\lambda}^2 = 0\,. \tag{2.4.29}$$

L'onde double d'Alfvén AA se propage dans un fluide incompressible et stationnaire qui s'écoule suivant les lignes de force du champ magnétique $\vec{H}$.

2.4.3 Les ondes doubles Alfvén-Entropique (AE_1).

Dans cette sous-section, nous construisons des ondes doubles AE_1 à partir des vecteurs d'onde respectifs de l'onde simple d'Alfvén A^ϵ et de l'onde entropique E_1 :

$$\lambda^1 = (\lambda^1_o,\ \lambda^1_1, \lambda^1_2, \lambda^1_3), \qquad \lambda^2 = (\lambda^2_o,\ \lambda^2_1, \lambda^2_2, \lambda^2_3), \tag{2.4.30}$$

où les vecteurs $\vec{\lambda}^1$ et $\vec{\lambda}^2$ sont associés respectivement aux vecteurs $\vec{\lambda}^A$ de l'onde d'Alfvén et $\vec{\lambda}^E$ de l'onde entropique, et

$$\lambda^1_o = \varepsilon \frac{(\vec{H}\cdot\vec{\lambda}^1)}{\sqrt{4\pi\rho}} - \vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\lambda}^1, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \lambda^2_o = -\vec{\lambda}^2\cdot\vec{\mathrm{v}}. \tag{2.4.31}$$

Les solutions du système MHD (2.1.2) doivent être invariantes sous l'action des champs vectoriels (2.3.7) :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{(\lambda^1_1\lambda^2_2 - \lambda^1_2\lambda^2_1)}{(\lambda^1_o\lambda^2_1 - \lambda^1_1\lambda^2_o)}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{(\lambda^1_2\lambda^2_o - \lambda^1_o\lambda^2_2)}{(\lambda^1_o\lambda^2_1 - \lambda^1_1\lambda^2_o)}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2 &= \frac{(\lambda^1_1\lambda^2_3 - \lambda^1_3\lambda^2_2)}{(\lambda^1_o\lambda^2_1 - \lambda^1_1\lambda^2_o)}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{(\lambda^1_3\lambda^2_o - \lambda^1_o\lambda^2_3)}{(\lambda^1_o\lambda^2_1 - \lambda^1_1\lambda^2_o)}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{2.4.32}$$

celles-ci sont données par

$$\begin{aligned} &\rho = \rho(r), \quad p(r) + \frac{1}{8\pi}\mathcal{H}^2(r) = p_o, \quad |\vec{H}|^2 = \mathcal{H}^2(r), \\ &\vec{\mathrm{v}} = \frac{\varepsilon\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho(r)}} + \vec{\phi}(r), \quad \vec{H} = \alpha(s,r)\dot{\vec{\phi}} + \beta(s,r)\ddot{\vec{\phi}} + \dot{\vec{\psi}}(r), \qquad \varepsilon = \pm 1, \end{aligned} \tag{2.4.33}$$

et elles s'expriment en termes des invariants de Riemann s et r :

$$s = \vec{\lambda}^1(s,r)\cdot\vec{x}, \qquad r = \vec{\lambda}^2(s,r)\cdot\vec{x} - \Big(\vec{\lambda}^2(s,r)\cdot\vec{\mathrm{v}}\Big)t. \tag{2.4.34}$$

Précisons que p_o est une constante arbitraire, ρ, p et $\mathcal{H}$ sont des fonctions arbitraires de r. Les fonctions vectorielles $\vec{\phi}$ et $\vec{\psi}$ doivent satisfaire les relations :

$$\vec{\phi}\cdot\vec{\lambda}^1 = 0, \quad \dot{\vec{\phi}}\cdot\vec{\lambda}^s = 0, \quad \ddot{\vec{\phi}}\cdot\vec{\lambda}^s = 0, \quad \dddot{\vec{\phi}}\cdot\vec{\lambda}^2 = 0, \quad \vec{\psi}\cdot\vec{\lambda}^2 = 0, \quad \dot{\vec{\psi}}\cdot\vec{\lambda}^2 = 0 \ \text{ pour } s = 1,2. \tag{2.4.35}$$

Dans les expressions (2.4.33) et (2.4.35) nous avons adopté la notation suivante:

$$\dot{\vec{\phi}} = \frac{d\vec{\phi}}{dr}, \quad \ddot{\vec{\phi}} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dr^2}, \quad \dddot{\vec{\phi}} = \frac{d^3\vec{\phi}}{dr^3}, \quad \dot{\vec{\psi}} = \frac{d\vec{\psi}}{dr}. \tag{2.4.36}$$

La fonction $\alpha(s,r)$ s'exprime en termes de $\beta(s,r)$, des fonctions vectorielles $\vec{\phi}$, $\vec{\psi}$ et de leurs dérivées respectives :

$$\alpha = \frac{-[(\dot{\vec{\phi}}\cdot\ddot{\vec{\phi}})\beta + (\dot{\vec{\phi}}\cdot\vec{\psi})] \pm \sqrt{\Delta}}{|\dot{\vec{\phi}}|^2}, \tag{2.4.37}$$

où la solution (2.4.37) est réelle si le discriminant Δ est positif, *i.e.*

$$\Delta = \left[(\dot{\vec{\phi}}\cdot\ddot{\vec{\phi}})\beta + (\dot{\vec{\phi}}\cdot\vec{\psi})\right]^2 - |\dot{\vec{\phi}}|^2\left[|\ddot{\vec{\phi}}|^2\beta^2 + 2(\ddot{\vec{\phi}}\cdot\vec{\psi})\beta + |\vec{\psi}|^2 - \mathcal{H}^2(r)\right] \geq 0. \tag{2.4.38}$$

Pour déterminer la fonction β, on doit résoudre une équation différentielle non-linéaire dont les coefficients sont exprimés en termes de $\vec{\phi}$, $\vec{\psi}$ et de leurs dérivées respectives:

$$\begin{gathered}\left[(\dot{\vec{\phi}}\times\vec{\psi})\cdot\ddot{\vec{\phi}}\right]\frac{\partial\beta}{\partial r} + \left[(\dot{\vec{\phi}}\times\ddot{\vec{\phi}})\cdot\dddot{\vec{\phi}}\right]\beta^2 + \left[(\dot{\vec{\phi}}\times\vec{\psi})\cdot\dddot{\vec{\phi}} + (\dot{\vec{\phi}}\times\ddot{\vec{\phi}})\cdot\dot{\vec{\psi}} - |\dot{\vec{\phi}}|^{-2}[(\dot{\vec{\phi}}\times\vec{\psi})\cdot\ddot{\vec{\phi}}(\dot{\vec{\phi}}\cdot\ddot{\vec{\phi}})]\right]\beta \\ - |\dot{\vec{\phi}}|^{-2}[(\dot{\vec{\phi}}\times\vec{\psi})\cdot\ddot{\vec{\phi}}]\left[(\dot{\vec{\phi}}\cdot\vec{\psi}) \mp \sqrt{\Delta}\right] + [(\dot{\vec{\phi}}\times\vec{\psi})\cdot\dot{\vec{\psi}}] = 0.\end{gathered} \tag{2.4.39}$$

Notons que la dépendance de la fonction β en terme de s intervient de manière paramétrique. Donc l'équation (2.4.39) peut être considérée comme une EDO du premier ordre pour la fonction β par rapport à la variable r.

La force de Lorentz $\vec{F}_m$ résulte de l'action combinée des ondes simples E_1 et A. En effet, le gradient de pression magnétique provient seulement de l'onde E_1 alors que les forces de tension exercées sur les lignes de force sont associées à l'onde d'Alfvén. L'écoulement est rotationnel ($\nabla\times\vec{v}\neq 0$) et incompressible ($\nabla\cdot\vec{v}=0$). La circulation du fluide n'est pas préservée à cause des forces de tension qui rendent $\vec{F}_m$ non conservatrice. La norme et la direction de la vitesse s'en trouvent ainsi modifiées. De plus, le terme $\vec{F}_m\cdot\vec{v}\neq 0$ indique la présence d'un couplage entre les effets hydrodynamiques et magnétiques dans l'équation de conservation de l'énergie (*cf.*(1.2.9) et (1.2.10)).

Onde double AE_1 stationnaire.

En imposant que l'onde double AE_1 soit stationnaire, les calculs pour obtenir des solutions du système MHD (2.2.1) s'en trouvent simplifier notamment si nous considérons les configurations planaire et axiale. Voici les résultats obtenus.

1). Configuration planaire. Les deux vecteurs $\vec{\lambda}^1$ et $\vec{\lambda}^2$ sont contraints de circuler dans le plan généré par les vecteurs unitaires $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. On a donc

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= (\delta_A - (\vec{\lambda}^1 \cdot \vec{v}), \vec{\lambda}^1), \quad \lambda^2 = (- (\vec{\lambda}^2 \cdot \vec{v}), \vec{\lambda}^2), \\ \vec{\lambda}^1 &= (cos\,\varphi, sin\,\varphi, 0), \quad \vec{\lambda}^2 = (cos\,\theta, sin\,\theta, 0), \end{aligned} \tag{2.4.40}$$

où φ et θ sont des fonctions des invariants de Riemann s et r à être déterminées, et

$$\delta_A = \varepsilon \frac{(\vec{H} \cdot \vec{\lambda}^1)}{\sqrt{4\pi\rho}}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

La solution du type AE_1 est invariante sous l'action des champs vectoriels (2.4.9)

$$X_1 = sin(\theta - \varphi)\frac{\partial}{\partial t} - [\delta_A\, sin\,\theta + u\, sin(\varphi - \theta)]\frac{\partial}{\partial x} + [\delta_A\, cos\,\theta + v\, sin(\theta - \varphi)]\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.4.41}$$

Nous posons que les fonctions inconnues $\mathrm{u} = (\rho, p, \vec{v}, \vec{H})$ sont des fonctions des invariants de Riemann $s = \vec{\lambda}^1 \cdot \vec{x} + (\delta_A - (\vec{\lambda}^1 \cdot \vec{v}))t$ et $r = \vec{\lambda}^2 \cdot \vec{x} - (\vec{\lambda}^2 \cdot \vec{v})t$, et après les avoir substituées dans le système (2.2.1), nous obtenons comme solutions *stationnaires*

$$\begin{aligned} \rho = \rho(r), \quad p(r) + \frac{1}{8\pi}\mathcal{H}^2(r) = p_o, \quad \vec{v} &= \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho(r)}} + w(r)\vec{e}_3, \quad \varepsilon = \pm 1, \\ \vec{H} &= \mathcal{H}(r)[cos\,\varphi(s)\vec{e}_1 + sin\,\varphi(s)\vec{e}_2], \end{aligned} \tag{2.4.42}$$

où p_o une constante arbitraire, ρ, p, w $\mathcal{H}$ et φ sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs : les invariants de Riemann r et s sont donnés par

$$s = x\, cos\,\varphi + y\, sin\,\varphi, \quad r = y\, cos\,\varphi - x\, sin\,\varphi. \tag{2.4.43}$$

Les solutions (2.4.42) décrivent la propagation d'une onde double AE_1 dans un fluide incompressible et stationnaire : le vecteur $\vec{\lambda}^1$ est colinéaire au champ magnétique

$\vec{H}$, et tous deux sont perpendiculaires au vecteur $\vec{\lambda}^2$. De plus, le fait que $\vec{v}\cdot\vec{\lambda}^2 = 0$ confirme le caractère stationnaire de l'onde entropique E_1 (*cf.* (2.2.30)). Soulignons que les solutions (2.4.42) satisfont les contraintes

$$\vec{\lambda}^1 \cdot \nabla\rho = 0\,, \quad \vec{\lambda}^1 \cdot \nabla p = 0\,, \quad \vec{\lambda}^1 \cdot \nabla w = 0\,, \tag{2.4.44}$$

qui nous indiquent que ρ, p et w sont des quantités conservées dans la direction $\vec{\lambda}^1$ mais varient suivant $\vec{\lambda}^2$: ainsi l'onde entropique E_1 modifie la densité, la pression et la norme du champ magnétique (et donc celle de la vitesse) suivant sa direction de propagation alors que la contribution de l'onde d'Alfvén consiste seulement à modifier la direction du champ magnétique ; $\theta \equiv \theta(s)$.

Prenons le cas pour lequel l'écoulement est bidimensionnel ; *i.e.* $w(r) \equiv 0$. Les lignes de courant (qui coïncident avec les lignes de force de $\vec{H}$) sont des cercles concentriques de rayon $r = constante$ et le champ de vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur $s = constante$. L'écoulement étant stationnaire : le gradient de pression magnétique contrebalance celui de la pression hydrodynamique, le reste de la force de Lorentz, associé aux forces de tension $(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H} \sim (\vec{H}\cdot\vec{\lambda}^1)\partial\vec{H}/\partial s$, agit sur le fluide comme une force centripète. Quant à la circulation du fluide, elle est conservée sur chaque ligne de courant $r = constante$.

En guise de comparaison, l'action de l'onde double AE_1 sur le fluide est l'analogue en hydrodynamique d'un champ de vitesse engendré par un fil tourbillonnaire infiniment long et de diamètre très petit pour un écoulement plan et incompressible [36]; l'onde d'Alfvén induit la circulation du fluide alors que l'onde entropique maintient l'équilibre entre les gradients de pression ci-haut mentionnés.

II). Configuration axiale. L'onde d'Alfvén circule dans le plan généré par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, et l'onde entropique se propage suivant la direction $\vec{e}_3$. Les vecteurs d'onde sont donnés par

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= (\delta_A - (\vec{\lambda}^1\cdot\vec{v}), \vec{\lambda}^1), \quad \lambda^2 = (-(\vec{\lambda}^2\cdot\vec{v}), \vec{\lambda}^2)\,, \\ \vec{\lambda}^1 &= (\cos\theta, \sin\theta, 0)\,, \quad \vec{\lambda}^2 = (0,0,1)\,, \end{aligned} \tag{2.4.45}$$

où θ est une fonction des invariants de Riemann s et r à être déterminée, et

$$\delta_A = \varepsilon \frac{(\vec{H} \cdot \vec{\lambda}^1)}{\sqrt{4\pi\rho}}, \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Les champs vectoriels (2.4.11) s'expriment dans ce cas-ci sous la forme

$$X_1 = -\tan\theta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t} + (u + v\tan\theta - \delta_A)\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.4.46}$$

Étant donné le caractère stationnaire de l'onde AE_1, nous obtenons comme solutions:

$$\begin{aligned} \rho = \rho(r), \quad p(r) + \frac{1}{8\pi}\mathcal{H}^2(r) = p_o, \quad \vec{v} &= \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho(r)}}, \quad \varepsilon = \pm 1, \\ \vec{H} &= \mathcal{H}(r)[\cos\theta(s)\,\vec{e}_1 + \sin\theta(s)\,\vec{e}_2], \end{aligned} \tag{2.4.47}$$

où p_o une constante arbitraire, ρ, p, θ et $\mathcal{H}$ sont des fonctions arbitraires de leur argument respectif : c'est-à-dire en termes des invariants de Riemann

$$s = x\cos\theta + y\sin\theta, \qquad r = z. \tag{2.4.48}$$

Pour la configuration axiale, l'onde double AE_1 se propage dans un fluide incompressible et stationnaire dont le flot est bidimensionnel et s'écoule suivant les lignes de force du champ magnétique $\vec{H}$. Dans le plan $z = constant$, la densité et la pression du fluide ainsi que la norme de $\vec{H}$ demeurent constantes. Autrement dit, l'onde d'Alfvén ne modifie pas ces quantités :

$$\vec{\lambda}^1 \cdot \nabla\rho = 0, \quad \vec{\lambda}^1 \cdot \nabla p = 0, \quad \vec{\lambda}^1 \cdot \nabla[\mathcal{H}] = 0. \tag{2.4.49}$$

Quant à la force de Lorentz agissant sur le fluide : nous avons dans la direction $\vec{e}_3$ un équilibre entre les pressions hydrodynamique et magnétique (comme l'indique la contrainte obtenue dans (2.4.47)). La contribution de l'onde d'Alfvén est attribuable aux forces de tension $(\vec{H} \cdot \nabla)\vec{H}$, situées dans le plan où circule $\vec{\lambda}^1$, qui agissent sur les lignes de force suivant la direction du vecteur $\vec{n}$ (*cf.*(1.1.14)).

Sous la configuration axiale, l'onde double AE_1 stationnaire contribue à la génération d'une densité de courant $\vec{J}$ (*cf.*(1.1.10)) suivante

$$\vec{J} = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \vec{H} = -\frac{4\pi}{c}\frac{d\mathcal{H}}{dr}[sin\theta\, \vec{e}_1 - cos\,\theta\, \vec{e}_2] - \frac{4\pi}{c}\mathcal{H}\frac{d\theta}{ds}\vec{e}_3 \tag{2.4.50}$$

ainsi une partie du courant produit circule dans le plan où s'écoule le fluide, contrairement à la configuration planaire où celui-ci ne circule que dans la direction transvsersale à l'écoulement.

Outre les configurations planaire et axiale, nous pouvons aussi examiner le cas plus général pour lequel les vecteurs $\vec{\lambda}^1$ et $\vec{\lambda}^2$ sont orthogonaux à un certain vecteur unitaire constant $\vec{e}_o$ qui n'est cependant jamais colinéaire au champ magnétique $\vec{H}$:

$$\vec{\lambda}^1 \cdot \vec{e}_o = 0\,, \qquad \vec{\lambda}^2 \cdot \vec{e}_o = 0\,. \tag{2.4.51}$$

Pour construire l'onde doubles AE_1 à partir de cette configuration, nous procédons de la même façon que précédemment : les expressions générales des vecteurs d'onde λ^1 et λ^2 sont données par (2.4.30) et (2.4.31) et les champs vectoriels, qui laissent les solutions du système MHD (2.2.1), s'expriment sous la forme (2.4.32).

Ensuite, après avoir remplacées les fonctions inconnues $u = (\rho, p, \vec{v}, \vec{H})$ qui dépendent des invariants de Riemann $s = \vec{\lambda}^1 \cdot \vec{x} + (\delta_A - (\vec{\lambda}^1 \cdot \vec{v})t$ et $r = \vec{\lambda}^2 \cdot \vec{x} - (\vec{\lambda}^2 \cdot \vec{v})t$, nous devons tenir compte des *conditions de consistance* des éléments simples entropiques du type E_1 et d'Alfvén A^ϵ; *cf.* (2.2.17), (2.2.30), (2.2.52) :

$$\vec{\lambda}^1 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial s} = 0\,, \quad \vec{\lambda}^1 \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = 0\,, \qquad \vec{\lambda}^2 \cdot \vec{H} = 0\,, \quad \vec{\lambda}^2 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial r} = 0\,, \quad \vec{\lambda}^2 \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} = 0\,. \tag{2.4.52}$$

Ce qui nous amène aux solutions stationnaires suivantes

$$\rho = \rho(r)\,, \quad p(r) + \frac{\mathcal{H}^2(r)}{8\pi} = p_o\,, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho(r)}} + a(r)\vec{e}_o\,, \quad \varepsilon = \pm 1\,, \tag{2.4.53}$$

où p_o est une constante arbitraire, ρ et a sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. L'expression du champ magnétique $\vec{H}$ reste indéterminée : la seule contrainte imposée sur celle-ci est que sa norme $\mathcal{H}$ soit une fonction arbitraire de r.

Les invariants de Riemann sont donnés par

$$s = \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial s} \times \vec{e}_o\right) \cdot \vec{x}\,, \qquad r = (\,\vec{H} \times \vec{e}_o\,) \cdot \vec{x}\,. \tag{2.4.54}$$

Soulignons que pour cette configuration, les vecteurs $\vec{\lambda}^1$ et $\vec{\lambda}^2$ s'écrivent

$$\vec{\lambda}^1 = \frac{\partial \vec{H}}{\partial s} \times \vec{e}_o\,, \qquad \vec{\lambda}^2 = \vec{H} \times \vec{e}_o \tag{2.4.55}$$

puisque les vecteurs $\vec{H}$ et $\partial\vec{H}/\partial s$ sont toujours orthogonaux, nous avons donc que $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont linéairement indépendants et génèrent un plan perpendiculaire à $\vec{e}_o$.

La force de Lorentz associée à l'onde double AE_1 s'exprime

$$\vec{F}_m = \frac{1}{4\pi}(\vec{H} \cdot \vec{\lambda}^1)\frac{\partial \vec{H}}{\partial s} - \frac{\mathcal{H}}{4\pi}\frac{d\mathcal{H}}{dr}\vec{\lambda}^2\,; \tag{2.4.56}$$

le premier terme à droite de l'égalité de (2.4.56) représente la contribution de l'onde d'Afvén : les forces de tension agissant transversalement aux lignes de force, alors que le second terme, qui provient du gradient de pression magnétique, est contrebalancé par la pression hydrodynamique dans la direction $\vec{\lambda}^2$ (*cf.* (2.4.53)).

Notons qu'en choisissant $\vec{e}_o = \vec{e}_3$ et en prenant pour le champ magnétique la forme particulière:

$$\vec{H} = \mathcal{H}(r)\hat{H}(s) \tag{2.4.57}$$

où $\hat{H}$ est un vecteur unitaire situé dans le plan généré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, alors les solutions (2.4.53) coïncident avec celles obtenues pour la configuration planaire (2.4.42).

Finalement, nous pouvons aussi considérer le cas particulier où la direction de propagation de l'onde entropique E_1 est fixée suivant $\vec{e}_3$ alors que l'onde d'Alfvén balaie tout l'espace. Nous tenons compte encore des conditions de consistance (2.4.52) et de la forme (2.4.57) pour le champ magnétique $\vec{H}$. Après avoir répéter les mêmes étapes de calculs que précédemment, nous aboutissons aux solutions suivantes:

$$\begin{gathered} \rho = \rho(r)\,, \quad p(r) + \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi} = p_o\,, \quad \vec{v} = \frac{\varepsilon\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho(r)}}\,, \quad \varepsilon = \pm 1, \\ \vec{H} = \mathcal{H}(r)\Big(\cos\varphi(s)\,, \sin\varphi(s)\,, 0\Big)\,, \end{gathered} \tag{2.4.58}$$

où p_o est une constante arbitraire ; ρ, α et φ sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. Les invariants de Riemann sont donnés par

$$s = x \cos\varphi + y \sin\varphi + \chi z\,, \qquad r = z\,. \tag{2.4.59}$$

où χ est une fonction arbitraire de s qui résulte du fait que l'onde d'Alfvén se propage hors du plan généré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$:

$$\vec{\lambda}^1 = \Big(\cos\varphi(s), \sin\varphi(s), \chi(s)\Big)\,.$$

Les solutions (2.4.58) sont similaires à celles obtenues pour la configuration axiale : elles décrivent la propagation d'une onde double AE_1 dans un fluide incompressible et stationnaire dont l'écoulement est bidimensionnel et suit les lignes de force du champ magnétique $\vec{H}$. Il en va de même pour le bilan des forces agissant sur le fluide: cancellation des gradients de pression hydrodynamique et magnétique, les forces de tension de $\vec{F}_m$ agissent sur les lignes de force magnétiques comme des forces centripètes orientées suivant le rayon de courbure $\mathcal{R}_c$.

Sur chaque plan $z = constant$, les fonctions ρ, p et $\mathcal{H}$ demeurent constantes. Cependant la direction du champ magnétique (et conséquemment la vitesse du flot) varie d'un plan $z = constant$ à l'autre étant donnée la présence de la fonction χ.

Pour cette configuration, nous avons comme densité de courant $\vec{J}$:

$$\vec{J} = \frac{4\pi}{c}\left(\chi\mathcal{H}\frac{d\theta}{ds}\cos\theta - \frac{d\mathcal{H}}{dr}\sin\theta\right)\vec{e}_1 + \frac{4\pi}{c}\left(\chi\mathcal{H}\frac{d\theta}{ds}\sin\theta + \frac{d\mathcal{H}}{dr}\cos\theta\right)\vec{e}_2 - \frac{4\pi}{c}\mathcal{H}\frac{d\theta}{ds}\vec{e}_3 \tag{2.4.60}$$

comparativement à l'expression obtenue pour la configuration axiale (2.4.50), nous avons certains termes supplémentaires liés à la fonction χ qui s'ajoutent au courant circulant dans le plan où s'écoule le fluide.

2.4.4 Les ondes doubles magnétoacoustiques (FF).

Nous traitons séparément deux cas pour lesquels la direction de propagation de chaque onde simple magnétoacoustique F est fixe et orientée perpendiculairement au champ magnétique $\vec{H}$.

(1). Nous considérons que les directions de propagation des ondes simples F soient transversales : nous les choisissons suivant $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, respectivement, avec $\vec{H} = (0, 0, H)$. Leurs vecteurs d'onde respectifs à chaque onde simple F sont

$$\lambda^1 = (\delta_F - u, 1, 0, 0)\ , \quad \lambda^2 = (\delta_F - v, 0, 1, 0)\ . \tag{2.4.61}$$

où la vitesse caractéristique de l'onde magnétoacoustique s'écrit

$$\delta_F = \varepsilon \left[\frac{\kappa p}{\rho} + \frac{|\vec{H}|^2}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \varepsilon = \pm 1\,.$$

Les champs vectoriels (2.3.7) correspondants sont donnés par

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} + (u - \delta_F)\frac{\partial}{\partial x} + (v - \delta_F)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{2.4.62}$$

Nous posons que les fonctions inconnues $\mathrm{u} = (\rho, p, \vec{\mathrm{v}}, \vec{H})$ sont des fonctions des invariants de Riemann $s = x + (\delta_F - u)t$ et $r = y + (\delta_F - u)t$. En les remplaçant dans le système MHD (2.2.1), nous obtenons les solutions

$$\rho = \rho(s,r),\ \ p = A_o \rho^{\kappa},\ \ \vec{\mathrm{v}} = \left[v(s,r) + \frac{1}{2}[f(r) + g(s)] \right] \vec{e}_1 + v(s,r)\vec{e}_2 + w(s-r)\vec{e}_3,\ \ \vec{H} = H_o \rho \vec{e}_3, \tag{2.4.63}$$

où A_o et H_o sont des constantes arbitraires, v et w sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. Les invariants de Riemann s'exprime alors sous la forme

$$s = x + \left(\delta_F - \frac{1}{2}[f(r) + g(s)] - v \right) t, \qquad r = y + (\delta_F - v)t \tag{2.4.64}$$

et les fonctions f et g (également arbitraires) sont reliées à la densité ρ par

$$f(r) - g(s) = 4\varepsilon \begin{cases} \sqrt{A_o}\left[\sqrt{\beta_o \rho + 1} - arc\,tanh[\sqrt{\beta_o \rho + 1}] \right] & \text{pour} \quad \kappa = 1\,, \\ \sqrt{2A_o(\beta_o + 1)}\,\sqrt{\rho} \quad \text{pour} \quad \kappa = 2\,, \\ \dfrac{\sqrt{\kappa A_o}}{(\kappa - 1)} \sqrt{\rho^{\kappa-1} + \beta_o \rho} \left[1 + \dfrac{(\kappa - 2)\sqrt{\beta_o}}{\sqrt{\rho^{\kappa-2} + \beta_o}} \right] {}_2F_1\left(a_1, b_1, c_1; \dfrac{-\rho^{\kappa-2}}{\beta_o} \right) & \text{pour } \kappa \neq 1, 2\,, \end{cases} \tag{2.4.65}$$

où $\varepsilon = \pm 1$, ${}_2F_1(a_1, b_1, c_1; z)$ est une fonction hypergéométrique de seconde espèce qui dépend de la variable $z = -\rho^{(\kappa-2)}/\beta_o$, avec $\beta_o = H_o^2/4\pi\kappa A_o$, et des paramètres $a_1 = 1/2(\kappa-2)$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 1 + 1/2(\kappa - 2)$.

Pour l'onde double FF, la force de Lorentz présente dans le fluide est donnée par

$$\vec{F}_m = -\frac{1}{8\pi}\nabla[|\vec{H}|^2] = -\frac{H_o^2}{4\pi}\rho\left[\frac{\partial\rho}{\partial s}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial\rho}{\partial r}\,\vec{e}_2\right]. \tag{2.4.66}$$

Par conséquent, l'onde double FF se propage dans le fluide en causant des compressions et des extensions sur les lignes de force magnétiques dans les directions $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ qui leurs sont perpendiculaires. Le fait que $\vec{F}_m \cdot \vec{v} \neq 0$ indique que les effets hydrodynamiques et électromagnétiques sont couplés.

Sous ces conditions, la vorticité du fluide $\nabla \times \vec{v}$ n'est pas nulle. Puisque la force de Lorentz dérive du gradient de pression magnétique $p_M = |\vec{H}|^2/8\pi$ (les forces de tension étant nulles) : $\vec{F}_m$ est une force conservatrice. Par conséquent, la circulation du fluide est préservée selon le théorème de Kelvin.

(2). Nous considérons maintenant le cas unidimensionnel pour lequel les deux ondes magnétoacoustique F se propagent dans une même direction fixe (mais en sens contraire) que nous choisissons suivant $\vec{e}_2$, avec des vitesses de phases $\lambda_o^\varepsilon = \delta_F + \varepsilon u$, $\varepsilon = \pm 1$. Ainsi, le champ magnétique peut avoir deux composantes : $\vec{H} = (0, H_2, H_3)$.

Néanmoins, les vecteurs d'onde correspondants sont linéairement indépendants :

$$\lambda^1 = (\delta_F - u, 1, 0, 0), \quad \lambda^2 = (-(\delta_F + u), 1, 0, 0). \tag{2.4.67}$$

où

$$\delta_F = \left[\frac{\kappa p}{\rho} + \frac{|\vec{H}|^2}{8\pi}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans ce cas, les champs vectoriels (2.3.7) sont simplement

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.4.68}$$

Les solutions invariantes sous l'action $\{X_1, X_2\}$ sont

$$\rho = \rho(s,r)\,, \quad p = A_o\rho^\kappa\,, \quad \vec{v} = \frac{1}{2}[f(r) + g(s)]\,\vec{e}_1 + v(s+r)\,\vec{e}_2 + w(s+r)\,\vec{e}_3\,, \\ \vec{H} = \rho H_o[\cos\varphi(s+r)\,\vec{e}_2 + \sin\varphi(s+r)\,\vec{e}_3]\,, \tag{2.4.69}$$

où A_o et H_o sont des constantes arbitraires, v, w et φ sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. Les invariants de Riemann sont

$$s = x + \left(\delta_F - \frac{1}{2}[f(r) + g(s)]\right)t\,, \qquad r = x - \left(\delta_F + \frac{1}{2}[f(r) + g(s)]\right)t\,, \tag{2.4.70}$$

de même que les fonctions f et g qui sont reliées à la densité ρ par l'expression (2.4.65). L'onde double FF agit sur la composante de la vitesse longitudinale à sa direction de propagation alors que les composantes transversales de la vitesse : v et w, sont des fonctions arbitraires qui ne sont pas reliées à la densité ρ et leurs présences contribuent à la vorticité du fluide. Notons que la circulation du fluide est conservée d'après la solution (2.4.69) puisque les forces de tension $(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H} = 0$.

La valeur $\kappa = 2$ représente un cas intéressant pour lequel nous considérons un flot unidimensionnel qui s'écoule transversalement au champ magnétique $\vec{H}$. Nous obtenons alors comme solutions du système MHD (2.2.1)

$$\rho = \frac{[f(r) - g(s)]^2}{16[2A_o + H_o^2]}\,, \quad p = A_o\rho^2\,, \quad \vec{v} = \frac{1}{2}[f(r) + g(s)]\,\vec{e}_1\,, \quad \vec{H} = \rho H_o\vec{e}_3\,, \tag{2.4.71}$$

où A_o et H_o sont des constantes arbitraires, f et g sont des fonctions arbitraires des invariants de Riemann r et s, respectivement. Ceux-ci sont donnés par les relations

$$s = x - \frac{1}{4}(3g + f)t, \qquad r = x - \frac{1}{4}(3f + g)t\,. \tag{2.4.72}$$

Dans ce cas, la force de Lorentz prend la forme

$$\vec{F}_m = -\frac{1}{8\pi}\nabla[|\vec{H}|^2] = -\frac{{H_o}^2}{4\pi}\rho\left[\frac{\partial\rho}{\partial s} + \frac{\partial\rho}{\partial r}\right]\vec{e}_1\,.$$

Ainsi l'onde double FF se propage dans le fluide par la combinaison d'une *onde de compression* associée à la fonction arbitraire $f[x - (\delta_F + u)t]$ et d'une *onde d'expansion* associée à la fonction arbitraire $g[x + (\delta_F - u)t]$. Ici, le flot est irrotationnel car $\nabla\times\vec{v} = 0$.

Ce cas particulier illustre le principe de base du *générateur MHD* [10]: le fluide s'écoule suivant la direction $\vec{e}_1$ à l'intérieur d'une cloison où règne un fort champ magnétique orienté dans la direction $\vec{e}_3$. Par la loi d'Ampère (*cf.* (1.1.10)), il en résulte un courant électrique qui s'exprime par

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \vec{H} = \frac{c\,H_o}{32\pi}\frac{[f(r)-g(s)]}{\left[2A_o + \frac{H_o^2}{4\pi}\right]}\left[\frac{dg}{ds} - \frac{df}{dr}\right]\vec{e}_2\,. \tag{2.4.73}$$

Conséquemment, ce même courant électrique $\vec{J}$ avec le champ magnétique $\vec{H}$ contribuent à leur tour à l'entretient de la force de Lorentz. Ce processus permet ainsi de convertir l'énergie cinétique du fluide en énergie électrique.

3) Finalement, considérons le cas unidimensionnel où l'onde double FF se propage dans la direction du champ magnétique $\vec{H}$. Les solutions invariantes sous les champs vectoriels (2.4.68) sont alors données par:

$$\rho = \rho(s,r), \quad p = A_o\rho^{\kappa}, \quad \vec{v} = \frac{1}{2}[f(r)+g(s)]\,\vec{e}_1, \quad \vec{H} = H_o\,\vec{e}_1\,, \tag{2.4.74}$$

où A_o et H_o sont des constantes arbitraires, f et g sont des fonctions arbitraires de leur argument respectif : elles sont reliées à la densité ρ par

$$f(r) - g(s) = \begin{cases} \dfrac{4}{\kappa-1}\sqrt{\kappa A_o\rho^{(\kappa-1)}} & \text{pour} \quad \kappa \neq 1, \\ \\ ln\,\rho \quad \text{pour} \quad \kappa = 1. \end{cases} \tag{2.4.75}$$

Les invariants de Riemann s'expriment sous la forme

$$s = x - \left(\frac{1}{2}[f(r)+g(s)] + \sqrt{\kappa A_o\rho^{(\kappa-1)}}\right)t, \quad r = x - \left(\frac{1}{2}[f(r)+g(s)] + \sqrt{\kappa A_o\rho^{(\kappa-1)}}\right)t. \tag{2.4.76}$$

Dans ce cas, l'onde double FF devient simplement une onde double acoustique (comme décrite en hydrodynamique [35]) qui se propage le long des lignes de force d'un champ magnétique constant $\vec{H}_o$ et celui-ci n'a aucune influence sur l'écoulement du fluide.

2.4.5 Les ondes doubles magnétoacoustique et entropique (FE_1).

Nous imposons que le vecteur $\vec{\lambda}^F$ de l'onde magnétoacoustique F et le vecteur $\vec{\lambda}^{E_1}$ de l'onde entropique E_1 soient tous deux orthogonaux au champ magnétique $\vec{H}$. Sous cette hypothèse de base, nous étudions les deux cas suivants.

1.a). Nous considérons le cas unidimensionnel pour lequel l'onde magnétoacoustique F et l'onde entropique E_1 se propagent suivant la direction $\vec{e}_3$, et le champ magnétique est disposé selon $\vec{H} = (H_1, H_2, 0)$. Leur vitesse de phase sont données respectivement par $\lambda_o^F = \delta_F - w$ et $\lambda_o^E = -w$.

Les vecteurs d'onde correspondants s'écrivent

$$\lambda^F = (\delta_F - w, 0, 0, 1)\,, \qquad \lambda^{E_1} = (-w, 0, 0, 1)\,, \tag{2.4.77}$$

où

$$\delta_F = \varepsilon \left[\frac{\kappa p}{\rho} + \frac{|\vec{H}|^2}{4\pi\rho}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \varepsilon = \pm 1\,. \tag{2.4.78}$$

Dans ce cas, les champs vectoriels (2.3.7) sont simplement

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}\,. \tag{2.4.79}$$

Nous posons que les inconnues $\mathrm{u} = (\rho, p, \vec{\mathrm{v}}, \vec{H})$ sont des fonctions des invariants de Riemann $s = z + (\delta_F - w)t$ et $r = z - wt$. Après les avoir subsituées dans le système MHD (2.2.1), nous trouvons comme solutions invariantes sous $\{X_1, X_2\}$

$$\rho = \rho(s),\ \ p = A_o\rho^\kappa,\ \ \vec{\mathrm{v}} = \vec{\alpha}(r) \times \vec{e}_3 + w(\rho)\,\vec{e}_3,\ \ \vec{H} = H_o\,\rho(s)\,[cos\,\varphi(r)\,\vec{e}_1 + sin\,\varphi(r)\,\vec{e}_2]\,, \tag{2.4.80}$$

où A_o et H_o sont des constantes arbitraires, ρ, φ et $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$ sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. Les invariants de Riemann invariants s et r sont donnés par

$$s = z - \left(w(\rho) - \varepsilon\left[\kappa A_o \rho^{(\kappa-1)} + H_o^2\rho\right]^{\frac{1}{2}}\right)t\,, \quad r = z - w(\rho)t\,, \qquad \varepsilon = \pm 1\,. \tag{2.4.81}$$

La fonction w s'exprime sous la forme

$$w(\rho) = 2\begin{cases} \sqrt{A_o}\left[\sqrt{\beta_o\rho+1} - arc\,tanh[\sqrt{\beta_o\rho+1}]\right] & \text{pour} \quad \kappa = 1\,, \\ \frac{\sqrt{\kappa A_o}}{(\kappa-1)}\sqrt{\rho^{\kappa-1}+\beta_o\rho}\left[1+\frac{(\kappa-2)\sqrt{\beta_o}}{\sqrt{\rho^{\kappa-2}+\beta_o}}\right]{}_2F_1\left(a_1, b_1, c_1; \frac{-\rho^{\kappa-2}}{\beta_o}\right) & \text{pour } \kappa \neq 1, 2 \end{cases} \tag{2.4.82}$$

où ${}_2F_1\,(a_1, b_1, c_1; z)$ est une fonction hypergéométrique de seconde espèce dépendant de la variable $z = -\rho^{\kappa-2}/\beta_o$, avec $\beta_o = H_o^2/4\pi\kappa A_o$, et des paramètres : $a_1 = 1/2(\kappa-2)$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 1 + 1/2(\kappa-2)$.

La force de Lorentz associée à l'onde double FE_1 dérive du gradient de pression magnétique :

$$\vec{F}_m = -\frac{1}{8\pi}\nabla[|\vec{H}|^2] = -\frac{H_o^2}{4\pi}\rho\frac{d\rho}{ds}\,\vec{e}_3 \tag{2.4.83}$$

qui résulte de l'onde magnétoacoustique F: les forces de tension sur les lignes de force sont nulles. Notons que les effets hydrodynamiques et magnétiques sont couplés étant donné que $\vec{F}_m \cdot \vec{v} \neq 0$.

Le gradient de pression hydrodynamique provient lui aussi de l'onde F :

$$\nabla p = \kappa A_o \rho^{(\kappa-1)}\,\frac{d\rho}{ds}\vec{e}_3\,, \tag{2.4.84}$$

il s'ensuit que les lignes de force subissent des compressions et des extensions suivant la direction de propagation de l'onde magnétoacoustique F (*i.e.* $\vec{\lambda}^F$). D'autre part, l'onde entropique E_1 contribue à la vorticité du fluide:

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{e}_3 \times \left(\frac{d\vec{\alpha}}{dr} \times \vec{e}_3\right)\,. \tag{2.4.85}$$

Puisque $\vec{F}_m$ est une force conservatrice, la circulation du fluide est préservée selon le théorème de Kelvin.

1.b). Pour le cas particulier où $\kappa = 2$, les solutions (2.4.80) se récrivent comme suit:

$$\rho = \rho(s),\ p = A(r)\rho^2,\ \vec{v} = \vec{\alpha}(r) \times \vec{e}_3 + 2\varepsilon\sqrt{C_2\rho}\,\vec{e}_3,\ \vec{H} = \rho(s)\mathcal{H}(r)[\cos\varphi(r)\vec{e}_1 + \sin\varphi(r)\vec{e}_2],\ \varepsilon = \pm 1 \tag{2.4.86}$$

où C_2 est une constante arbitraire, les fonctions $A(r)$ et $\mathcal{H}(r)$ doivent satisfaire

$$2A(r) + \frac{1}{4\pi}\mathcal{H}^2(r) = C_2\,. \tag{2.4.87}$$

L'onde entropique E_1 agit sur $|\vec{H}|$ et sur p toutefois, comme l'indique la relation (2.4.87), sans perturber l'équilibre entre les gradients de pression hydrodynamique et magnétique. Cela se traduit également dans le bilan des énergies hydrodynamique et magnétique $\Big($*cf.*(1.2.5) et (1.2.7)$\Big)$:

$$E = E_c + E_m = \frac{1}{2}\rho\,|\vec{\alpha}|^2 + \frac{1}{2}\rho\,w^2 + \frac{1}{\kappa-1}p + \frac{|\vec{H}|^2}{8\pi}\,; \tag{2.4.88}$$

pour $\kappa = 2$: l'onde entropique E_1 agit sur tous les termes alors que pour $\kappa \neq 2$ son action se limite à l'énergie cinétique E_c. La contribution de l'onde magnétoacoustique F est indépendante de κ : elle modifie l'énergie totale E via la densité.

2). Nous considérons le cas où les ondes simples magnétoacoustique F et entropique E_1 se propagent dans des directions transversales que nous choisissons comme étant $\vec{\lambda}^F = (1,0,0)$ et $\vec{\lambda}^{E_1} = (0,1,0)$, avec pour orientation du champ magnétique $\vec{H} = (0,0,H)$. Les vecteurs d'onde sont alors données par :

$$\lambda^F = (\delta_F - u, 1, 0, 0)\,, \qquad \lambda^{E_1} = (\,-v, 0, 1, 0\,)\,. \tag{2.4.89}$$

où

$$\delta_F = \varepsilon\left[\frac{\kappa p}{\rho} + \frac{H^2}{4\pi\rho}\right]^{\frac{1}{2}}\,, \qquad \varepsilon = \pm 1\,.$$

Les champs vectoriels (2.3.7) s'expriment sous la forme

$$X_1 = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{(u-\delta_F)}{v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\,, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{2.4.90}$$

Pour $\kappa \neq 2$, les solutions invariantes sous l'action de $\{X_1, X_2\}$ sont données par

$$\rho = \rho(s),\ \ p = A_o\rho^\kappa,\ \ \vec{v} = [b(r) - f(\rho)]\vec{e}_1 + v_o\vec{e}_2 + w(r)\vec{e}_3,\ \ \vec{H} = H_o\rho(s)\vec{e}_3\,, \tag{2.4.91}$$

où A_o, v_o et H_o sont des constantes arbitraires, ρ, b et w sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs; *i.e.* en termes des invariants de Riemann $s = x + (\delta_F - u)t$ et $r = y - v_o t$. La fonction f est reliée à la densité par la relation (2.4.82).

L'analyse physique est identique à celle faite pour le cas **1.b)**, soulignons que les compressions et les extensions des lignes de force se font dans la direction $\vec{e}_1$ ($i.e.$ $\vec{\lambda}^F$) et le fluide demeure incompressible suivant les directions $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.

Le cas $\kappa = 2$ met davantage en évidence la synergie entre les ondes magnétoacoustique F et entropique E_1. Les solutions du système (2.2.1) sont alors données par

$$\rho = \rho(s), \quad p = A(r)\rho^2, \quad \vec{v} = [b(r) - 2\varepsilon\sqrt{C_2\rho(s)}]\vec{e}_1 + v_o\vec{e}_2 + w(r)\vec{e}_3, \quad \vec{H} = \rho(s)\mathcal{H}(r)\vec{e}_3\,, \qquad (2.4.92)$$

où $\varepsilon = \pm 1$, C_2 et v_o sont des constantes arbitraires, ρ, b et w sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. Les invariants de Riemann sont

$$s = x + \left(3\varepsilon\sqrt{C_2\rho(s)} - b(r)\right)t\,, \qquad r = y - v_o t\,, \qquad \varepsilon = \pm 1\,.$$

Les fonctions $A(r)$ et $\mathcal{H}(r)$ doivent satisfaire la relation

$$2A(r) + \frac{1}{4\pi}\mathcal{H}^2(r) = C_2\,. \qquad (2.4.93)$$

Le caractère spatial de la synergie ressort dans l'expression de la force de Lorentz qui comporte alors deux composantes :

$$\vec{F}_m = -\frac{1}{8\pi}\nabla[|\vec{H}|^2] = -\frac{\rho\mathcal{H}}{4\pi}\left[\mathcal{H}\frac{d\rho}{ds}\vec{e}_1 + \rho\frac{d\mathcal{H}}{dr}\vec{e}_2\right], \qquad (2.4.94)$$

de même que pour le gradient de pression hydrodynamique qui s'écrit

$$\nabla p = 2A\rho\frac{d\rho}{ds}\vec{e}_1 + \rho^2\frac{dA}{dr}\vec{e}_2. \qquad (2.4.95)$$

Dans l'équation d'Euler (1.1.15), en tenant compte de la contrainte (2.4.93), la somme des forces agissant sur le fluide est nulle suivant $\vec{e}_2$ ($i.e.$ $\vec{\lambda}^{E_1}$). Par conséquent, les lignes de forces subissent des compressions et des extensions que dans la direction de propagation l'onde magnétoacoustique F.

La vorticité du fluide est associée à l'onde entropique E_1

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{dw}{dr}\vec{e}_1 - \frac{db}{dr}\vec{e}_3\,,$$

et la force de Lorentz $\vec{F}_m$ étant conservatrice, la circulation du fluide est préservée par le théorème de Kelvin.

2.5 Résolution du système MHD par imposition de contraintes différentielles.

Par la méthode des symétries conditionnelles, nous avons pu exprimer les solutions des équations MHD en termes des invariants de Riemann. Le but de cette section est d'obtenir des solutions en imposant directement certaines contraintes différentielles aux équations de la MHD. Nous serons alors en mesure d'établir des comparaisons avec les résultats de la dernière section.

I) Nous débutons en considérant que le fluide soit *incompressible* :

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{v} = 0\,.} \tag{2.5.1}$$

Dans ce cas, les équations de la MHD sont données par

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= 0\,, && (i) \\ \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{1}{2}\nabla|\vec{H}|^2 - (\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\right] &= 0\,, && (ii) \\ \frac{d\vec{H}}{dt} &= (\vec{H}\cdot\nabla)\vec{v}\,, && (iii) \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0\,. && (iv) \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

I.1) Dans le référentiel se déplaçant avec le fluide, les équations MHD se trouvent être les contraintes obtenues pour les ondes doubles E_1E_1 : *i.e.* les quantités ρ, p, $\vec{v}$ et $\vec{H}$ sont conservées le long du flot et les équations (2.5.2) – (ii) et (iii) se résument à

$$\nabla p = -\frac{1}{8\pi}\nabla|\vec{H}|^2 + \frac{1}{4\pi}(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}\,, \tag{2.5.3}$$

$$(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{v} = 0\,, \tag{2.5.4}$$

où l'équation (2.5.3) représente l'équilibre statique entre les gradients de pression hydrodynamique et magnétique et les forces de tension agissant sur les lignes de force. L'équation (2.5.4) exprime le fait que le champ des vitesses demeure constant suivant $\vec{H}$ et cela nous permet de poser comme hypothèse que la vitesse s'écrit,

$$\vec{v} = f(\rho)\vec{H}\,, \tag{2.5.5}$$

où f est une fonction arbitraire de la densité ρ que l'on fixe pour certains cas.

I.2) En premier lieu, imposons la contrainte suivante

$$\vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \varepsilon = \pm 1 .$$

En tenant compte des équations (2.5.2), nous avons les contraintes

$$\vec{H} \cdot \nabla\rho = 0 , \quad \vec{H} \cdot \nabla p = 0 , \quad \vec{H} \cdot \nabla[|\vec{H}|^2] = 0 . \tag{2.5.6}$$

Pour des densités ; $\rho = \rho_o$, pressions ; $p = p_o$ et $|\vec{H}| = \mathcal{H}_o$ constantes, nous obtenons les ondes doubles d'Alfvén (AA).

I.3) Prenons encore

$$\vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho(x,y)}}, \quad \varepsilon = \pm 1 ,$$

mais avec ρ comme fonction arbitraire de x et y, le champ magnétique circule dans le plan généré par les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$:

$$\vec{H} = \mathcal{H}(x,y)[sin\,\theta\vec{e}_1 + cos\,\theta\vec{e}_2] ,$$

où θ est une fonction arbitraire de x et y, la fonction $\mathcal{H}$ est reliée à la pression par

$$p^2 + \frac{1}{8\pi}\mathcal{H}^2 = p_o$$

où p_o est une constante arbitraire. Les fonctions ρ, p et $\mathcal{H}$ obéissent aux contraintes (2.5.6). Ce cas correspond à une onde double stationnaire de type AE_1 que l'on a obtenue pour la configuration planaire.

I.4) Considérons le cas pour lequel nous posons que

$$\vec{v} = \frac{\varepsilon \vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} + w(x,y)\vec{e}_3 , \quad \varepsilon = \pm 1 ,$$

où $\rho = \rho(z)$ et w sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs, le champ magnétique circule dans le plan généré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$:

$$\vec{H} = \mathcal{H}(z)[sin\,\theta\vec{e}_1 + cos\,\theta\vec{e}_2] ,$$

où θ est une fonction arbitraire de x et y, $\mathcal{H}$ est reliée à la pression par

$$p^2 + \frac{1}{8\pi}\mathcal{H}^2 = p_o\,,$$

où p_o est une constante arbitraire. Ceci correspond à l'onde double stationnaire de type AE_1 obtenu pour la configuration axiale.

II) Nous considérons que le fluide soit *compressible* :

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}} \neq 0\,.} \tag{2.5.7}$$

II.1) Supposons que le flot s'écoule au travers des lignes de force :

$$\vec{H}\cdot\vec{\mathrm{v}} = 0\,, \tag{2.5.8}$$

avec comme choix d'orientation : $\vec{H} = (0,0,H_3)$ et $\vec{\mathrm{v}} = (u,v,0)$.

La compressibilité du fluide implique la relation d'adiabacité

$$\boxed{p = A_o\rho^{\kappa}} \tag{2.5.9}$$

où A_o est une constante arbitraire.

Sous les hypothèses (2.5.7) et (2.5.9), le système MHD se résume aux équations :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)\rho + (\nabla\cdot\vec{\mathrm{v}})\rho = 0\,, \tag{2.5.10}$$

$$\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + (\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)\vec{\mathrm{v}} + \nabla\left[A_o\rho^{\kappa} + \frac{{H_o}^2}{8\pi}\rho^2\right] = 0\,, \tag{2.5.11}$$

qui déterminent la densité du fluide $\rho = \rho(t,x,y)$ et la vitesse de son écoulement : $\vec{\mathrm{v}} = u(t,x,y)\vec{e}_1 + v(t,x,y)\vec{e}_2$. Précisons que le champ magnétique obéit à une équation ayant la même forme que celle pour ρ : $\vec{H}$ s'exprime donc en terme de ρ ;

$$\vec{H} = H_o\,\rho(t,x,y)\,\vec{e}_3 \quad \text{où } H_o \text{ est une constante arbitraire.}$$

Ce cas correspond aux ondes doubles magnétoacoustiques de type FF.

II.2) Nous supposons encore que le flot s'écoule au travers des lignes de force :

$$\vec{H} \cdot \vec{v} = 0\,, \tag{2.5.12}$$

avec comme orientation : $\vec{H} = (0, 0, H_3)$ et $\vec{v} = (u, v_o, 0)$ où v_o est une constante arbitraire.

Prenons le cas particulier $\kappa = 2$ pour lequel la relation d'adiabacité s'écrit

$$\boxed{p = A(t, y)\rho^2(t, x)} \tag{2.5.13}$$

Sous les hypothèses (2.5.12) et (2.5.13), le système MHD se résume aux équations :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\rho + (\nabla \cdot \vec{v})\rho = 0\,, \tag{2.5.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)u + \frac{p_o}{2\pi}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0\,, \tag{2.5.15}$$

qui déterminent ρ et la vitesse du flot : $\vec{v} = u(t, x, y)\vec{e}_1 + v_o\vec{e}_2$.

Puisque $\vec{H}$ obéit à une équation de la même forme que (2.5.14), nous l'exprimons comme suit

$$\vec{H} = \mathcal{H}(t, y)\, \rho(t, x)\, \vec{e}_3\,,$$

dont sa norme $\mathcal{H}$ est reliée à la fonction $A(t, y)$ par l'expression

$$A\,(t, y) + \frac{\mathcal{H}^2}{8\pi} = p_o\,,$$

p_o étant une constante arbitraire.

Dans ce cas, nous retrouvons les ondes doubles de type magnétoacoustique F et entropique E_1.

II.3) Finalement, en imposant les contraintes

$$\boxed{p = A_o\rho^\kappa} \qquad \boxed{\vec{v} = C_o\vec{H}/\rho} \tag{2.5.16}$$

où C_o et A_o sont des constantes arbitraires, et la force de Lorentz est nulle

$$\vec{F}_m = -\vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}) = \vec{0}, \tag{2.5.17}$$

et avec

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0\,. \tag{2.5.18}$$

Sous les contraintes (2.5.16), le système MHD se réduit à une seule équation

$$\begin{aligned} \frac{C_o^2}{2}\frac{|\vec{H}|^2}{\rho^2} + A_o \frac{\kappa}{\kappa - 1}\rho^{\kappa-1} = D_o \quad \text{pour } \kappa \neq 1\,, \\ \frac{C_o^2}{2}\frac{|\vec{H}|^2}{\rho^2} + A_o\, ln\, \rho = D_o \quad \text{pour } \kappa = 1\,, \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

où D_o est une constante arbitraire.

Le fait que

$$\vec{F}_m = -\vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}) = \vec{0} \quad \text{avec} \qquad \nabla \cdot \vec{H} = 0 \tag{2.5.20}$$

amème à deux possibilités.

(1) Si on impose que $\nabla \times \vec{H} = 0$ alors on peut écrire :

$$\vec{H} = \nabla \phi\,,$$

et la condition (2.5.18) implique que

$$\triangle \phi = 0. \tag{2.5.21}$$

Par conséquent, ϕ est une fonction harmonique, il en va de même pour $\vec{H}$, et ρ via l'équation (2.5.19). Les fonctions p et $\vec{v}$ telles que données par (2.5.16) sont stationnaires.

(2) En considérant

$$\nabla \times \vec{H} = \alpha(\vec{x})\vec{H} \tag{2.5.22}$$

duquel on prend la divergence et compte tenu de (2.5.18), nous obtenons que

$$(\vec{H} \cdot \nabla)\alpha = 0\,,$$

où $\alpha(\vec{x})$ est une fonction scalaire arbitraire pour laquelle la valeur $\alpha = constante$ définie une *surface magnétique* [11].

3. Réduction par symétrie des équations de la MHD.

3.1 Notions fondamentales sur la théorie des groupes.

Dans cette section, nous débutons par des notions élémentaires concernant la théorie des groupes et de son application à la résolution d'équations différentielles. Notre synthèse se base principalement sur un résumé de Winternitz [39] et les livres d'Olver [27] et d'Ibragimov [22]. Nous terminons cette section en introduisant la méthode de réduction par symétrie (MRS) afin de résoudre les équations de la MHD.

Définition 3.1.1. *Un groupe est un ensemble G muni par une loi de composition interne, qui à deux éléments quelconques x, y, en fait correspondre un troisième noté par $x \cdot y$. Celle-ci satisfait les trois axiomes suivants.*

(*i*) *Elle est associative :* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,, \quad \forall x, y, z \in G.$

(*ii*) *Il existe dans G un seul et unique élément neutre noté* e *tel que :*

$$x \cdot e = e \cdot x = x\,, \quad \forall x \in G.$$

(*iii*) *Tout élément x de G possède un seul et unique inverse noté x^{-1} tel que*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e\,.$$

L'ordre d'un groupe est le nombre d'éléments le constituant. Si la loi de composition interne est *commutative* : $x \cdot y = y \cdot x$, alors le groupe est *commutatif* ou *abélien.* Un sous-groupe H d'un groupe G est une partie de G qui est un groupe pour la loi de composition interne définie dans G.

Définition 3.1.2. *Soient g_1, g_2 et x les trois éléments d'un groupe G tels que $x^{-1} \cdot (g_1 \cdot x) = g_2$: où g_2 résulte de la transformation de similarité de g_1 par x ; les éléments g_1 et g_2 sont des conjugués l'un de l'autre qui ont les propriétés suivantes :*

(1) Tout élément de G est le conjugué de lui-même.

(2) Si g_1 est le conjugué de g_2 et réciproquement : $g_1 = x^{-1} \cdot g_2 \cdot x$, alors il existe $y \in G$ tel que $g_2 = y^{-1} \cdot g_1 \cdot y$.

(3) Si g_1 est le conjugué de g_2 et g_3 alors g_2 et g_3 sont conjugués l'un de l'autre.
Voici en vrac la nomenclature suivante. *Une classe de conjugaison* est un ensemble complet d'éléments d'un groupe qui sont les conjugués les uns des autres. Tout élément d'un groupe possède sa *période* n telle que $g^n = e$, $n \in I\!N$. Si pour un groupe fini donné il existe des éléments s'exprimant comme le produit fini de leur puissance alors ceux-ci forment *l'ensemble générateur*. Un groupe ne possédant qu'un seul générateur est dit *cyclique*. *La définition abstraite* d'un groupe représente un ensemble de règles auxquelles satisfont les générateurs.

Définition 3.1.3. *Un groupe de Lie G est un ensemble muni d'une structure de variété analytique séparée réelle, de dimension finie et d'une structure de groupe telles que les applications de multiplication et d'inversion :*

$$(x,y) \to xy \quad \text{de } G \times G \text{ dans } G, \quad \forall x, y \in G,$$

$$x \to x^{-1} \quad \text{de } G \text{ dans } G$$

soient analytiques. Un groupe de Lie à r paramètres est un groupe de Lie dont la variété analytique est de dimension r. Deux groupes de Lie sont isomorphes s'il existe entre eux un difféomorphisme tel qu'il préserve la structure de groupe.

Un groupe de Lie est dit *local* lorsque les applications de multiplication et d'inversion sont définies au voisinage de l'élément neutre e.

3.1.1 Groupe local de transformations.

Nous définissons *la transformation* d'un ensemble comme une application bijective de cet ensemble sur lui-même. Une *famille de transformations* forment un groupe si elle contient toute transformation et son inverse ainsi que tout produit de deux transformations de celle-ci. Cette définition s'étend aux ensembles munis de structures algébrique (celle de groupe) et géometrique (celle de variété).

Définition 3.1.4. *Un groupe local de transformations agissant sur une variété analytique M est constitué d'un groupe local de Lie G, d'un ouvert U défini tel que $\{e\} \times M \subset U \subset G \times M$, et d'une application différentiable Φ: $U \to M$ satisfaisant les conditions suivantes :*

$$(i) \quad \Phi(e,x) = x\,, \quad \forall x \in M,$$

$$(ii) \quad \Phi\left(g, \Phi(h,x)\right) = \Phi\left(g \cdot h, \Phi(h,x)\right)\,,$$

pour $g, h \in G\,;\; x \in M\,;$ *et* $(h,x),\ (g, \Phi(h,x)),\ (g \cdot h, x) \in U.$

Définition 3.1.5. *Soit M une variété et $x \in M$, le sous-ensemble de M résultant de l'action du groupe de Lie local de transformations Φ sur x :*

$$G_x = \left\{ \Phi(g,x) | g \in G \right\} \quad \text{s'appelle l'orbite du point } x.$$

Dorénavant **nous utiliserons la notation** $\Phi(g,x) \equiv g \cdot x$ qui sous-entend l'action de l'application Φ telle qu'établit dans la définition (3.1.4).

3.1.2 Générateur infinitésimal.

Prenons un groupe de Lie local de transformations à un seul paramètre réel identifié par a. Soit la transformation $T_a : I\!R^n \to I\!R^n \quad (n \in I\!N)$ telle que

$$\overline{x} = f(x, a)\,, \quad \overline{x}, x \in I\!R^n, \tag{3.1.1}$$

où f est la loi de composition établie dans la définition (3.1.4).

Faisons ensuite l'expansion de T_a en série de Taylor au voisinage de $a = 0$:

$$\overline{x}^i \simeq x^i + a\,\xi(x^i)\,, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\text{où} \qquad \xi\,(x) = \frac{\partial}{\partial a}\left[f^i(x, a)\right]_{a=0}\,;$$

on obtient alors une *transformation infinitésimale* où $\xi = (\xi^1(x), \dots, \xi^n(x))$ représente le vecteur tangent à l'orbite G_x au point x et s'appelle le *générateur infinitésimal* du groupe de Lie local de transformations. De celui-ci nous définissons *le champ de vecteurs*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i\,(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.1.2}$$

qui correspond à un *opérateur différentiel* agissant sur des fonctions analytiques F: $I\!R^n \to I\!R$.

Théorème 3.1.1. *Soient G un groupe de Lie local à un paramètre réel a et T_a une transformation infinitésimale telle que définie par l'expression* (3.1.1) *alors $\overline{x}^i = f^i(x, a)$ satisfait le système d'équations différentielles ordinaires appelées équations de Lie :*

$$\frac{d\overline{x}^i}{da} = \xi\,(\overline{x})\,, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\textit{ayant comme conditions initiales :} \qquad \overline{x}^i\Big|_{a=0} = x^i\,.$$

Géométriquement, la solution de ce système est la courbe intégrale passant par le point $x \in I\!R^n$ et le champ de vecteurs tangent à celle-ci est donné par l'expression (3.1.2).

Définition 3.1.6. *Une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est un espace vectoriel réel de dimension finie qui est muni d'une application bilinéaire $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, notée $(X,Y) \to [X,Y]$, et vérifiant les deux identités suivantes :*

(*i*) $[X,Y] = -[Y,X]\,, \quad \forall\, X,Y \in \mathcal{L},$ (antisymétrie).

(*ii*) $\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Z,X],Y\big] + \big[[Y,Z],X\big] = 0\,, \quad \forall\, X,Y,Z \in \mathcal{L},$ (identité de Jacobi).

En général le produit $[X,Y]$, appelé *commutateur* ou crochet de X et Y, n'est pas associatif, cependant pour une algèbre dont le produit l'est : $[X,Y] \to XY$, dans ce cas on peut la munir d'une *structure algébrique de Lie* en posant $[X,Y] = XY - YX$.

Ceci s'applique à l'algébre formée par les champ de vecteurs définis par l'expression (3.1.2). Cette algèbre de Lie est identifiée par $\mathcal{L}_r$ où l'indice r spécifie sa dimension.

Soient $X_\alpha = \xi^\alpha(x)\partial/\partial x^i\,,\quad \alpha = 1, \ldots, n$, les générateurs formant une base dans $\mathcal{L}_r$. Ainsi tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{L}_r$ s'exprime dans cette base comme une combinaison linéaire $X = C^\alpha X_\alpha$ où C^α est une constante, en particulier pour :

$$X_i,\, X_j \in \mathcal{L}_r \Longrightarrow [X_i, X_j] \in \mathcal{L}_r\,.$$

Conséquemment $[X_i, X_j] = C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma\,;\quad \alpha,\beta = 1, \ldots, r$ où les coefficients $C^\gamma_{\alpha\beta}$ sont appelés les *constantes de structure* et elles dépendent de la base choisie. Celles-ci satisfont les deux identités (*i*) et (*ii*) de la définition (3.1.6) et donnent un système d'équations algébriques qui détermine complètement l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_r$.

Les concepts d'algèbre et de groupe de Lie sont reliés par le théorème suivant.

Théorème 3.1.2. *Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie ; il existe un groupe local de Lie G dont $\mathcal{L}$ en est l'algèbre. De plus il existe l'application exponentielle ; $exp : \mathcal{L} \to G$ qui est un difféomorphisme d'un voisinage de l'origine dans $\mathcal{L}$ vers un voisinage de l'élément neutre dans G tel que* $\exp[t\alpha]$ *soit un sous-groupe à un paramètre α de G. Donc tout élément de G suffisament proche de l'élément neutre, reste uniquement sur un sous-groupe à un paramètre.*

Connaissant le sous-groupe à un paramètre : $\phi\,(exp[t\alpha], x) \equiv (\phi^1(t,x), \ldots, \phi^n(t,x))$, nous pouvons calculer le *générateur infinitésimal* correspondant :

$$\xi_\alpha = \frac{d}{dt}[\phi^i\,(t,x)]\Big|_{t=0}$$

duquel nous obtenons le champ de vecteurs

$$X = \xi_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

On généralise le concept de groupe de Lie à plusieurs paramètres réels à l'aide du théorème suivant.

Théorème 3.1.3. *Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel à r dimensions qui est engendré par les champs de vecteurs suivants :*

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\,, \quad \alpha = 1, \ldots, r,$$

et la transformation infinitésimale $T_a = T_{a^r}\,(\ldots)\,T_{a^1}$ résultant de la composition des r transformations infinitésimales qui sont associées chacune à un groupe de Lie local à un seul paramètre. Pour chaque X_α, le groupe de Lie local à r paramètres correspondant est obtenu en résolvant les équations de Lie données par

$$\frac{d\overline{x}^i}{da^\alpha} = \xi_\alpha^i\,(\overline{x})\ ; \quad \overline{x^i}\Big|_{a^\alpha=0} = x^i, \quad a^\alpha = a^1, \ldots, a^r\ ; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Tous ces sous-groupes de Lie locaux à un seul paramètre engendrent un groupe de Lie local à r paramètres si et seulement si $\mathcal{E}$ est une algèbre de Lie.

3.1.3 Groupes et équations différentielles.

Soit $\mathcal{S}$ le système composé de m équations aux dérivées partielles (EDP) d'ordre k :

$$\Delta^l(\mathrm{x}, \mathrm{u}^{(k)}) = 0, \quad l = 1, 2, ..., m,$$

ayant p variables indépendantes et q variables dépendantes que l'on note par

$$\mathrm{x} = (x^1, x^2, ..., x^p) \in E \subset I\!R^p,$$

$$\mathrm{u} = (u^1, u^2, ..., u^q) \in U \subset I\!R^q.$$

où E et U sont respectivement les espaces des variables indépendantes et dépendantes, $\mathrm{u}^{(k)}$ désigne un vecteur contenu dans *l'espace des dérivées* $U^{(k)} \equiv U \times \ldots \times U_k$ où U_k est un espace dont la dimension est égale au nombre de dérivées de u d'ordre k.

L'objectif est d'obtenir des solutions du système $\mathcal{S}$ en déterminant un groupe local de transformations : appelé le *groupe de symétrie* qui agit dans l'espace $E \times U$ de manière à transformer l'une des solutions de $\mathcal{S}$ en une autre.

Définition 3.1.7. *Pour un système $\mathcal{S}$ d'EDP donné, on définit comme groupe de symétrie : le groupe de Lie local de transformations G agissant sur l'espace $M \subset E \times U$ tel que si $u = f(x)$ est une solution de $\mathcal{S}$ alors*

$$\widetilde{f} = g \cdot f \quad \textit{est aussi une solution de } \mathcal{S} \ (g \in G).$$

Nous considérons des transformations infinitésimales et ponctuelles qui ne dépendent pas des dérivées de u, celles-ci s'expriment en terme d'un paramètre $\varepsilon \ll 1$:

$$\widetilde{x}^i = x^i + \varepsilon\, \xi^i(\mathrm{x}, \mathrm{u}), \quad i = 1, \ldots, p,$$

$$\widetilde{u}^\alpha = u^\alpha + \varepsilon\, \phi_\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{u}), \quad \alpha = 1, \ldots, q,$$

où $\xi^i(\mathrm{x}, \mathrm{u})$ et $\phi_\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{u})$ sont des fonctions à être déterminées. Ces transformations infinitésimales permettent de linéariser le système $\mathcal{S}$ d'équations différentielles puisque tous les termes en série de puissance suivant ε^n ; $n \geq 2$, seront négligés dans le calcul de toutes les dérivées.

L'expression des champs de vecteurs correspondants s'écrit

$$X = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(\mathrm{x},\mathrm{u}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha(\mathrm{x},\mathrm{u}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \,. \tag{3.1.3}$$

Une fois que $\xi^i(\mathrm{x},\mathrm{u})$ et $\phi_\alpha(\mathrm{x},\mathrm{u})$ sont connus (nous verrons comment les obtenir plus loin), nous déterminons ensuite chaque sous-groupe à un seul paramètre en résolvant le système des équations de Lie :

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{x}^i}{d\lambda} &= \xi^i\left(\widetilde{\mathrm{x}},\widetilde{\mathrm{u}}\right); \quad \widetilde{x}^i\,|_{\lambda=0} = x^i, \quad i = 1, \ldots, p, \\ \frac{d\widetilde{u}^\alpha}{d\lambda} &= \phi_\alpha\left(\widetilde{\mathrm{x}},\widetilde{\mathrm{u}}\right); \quad \widetilde{u}^\alpha\,|_{\lambda=0} = u^\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, q. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Par le théorème (3.1.3), le *groupe de symétrie* G est alors engendré par tous les sous-groupes à un paramètre

$$g = g(\lambda_1)g(\lambda_2)\ldots g(\lambda_r)$$

où r est la dimension de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ associée à G.

Précisons que l'action du groupe de symétrie G se fait sur le graphe Γ_f de la fonction $\mathrm{u} = f(\mathrm{x})$:

$$\Gamma_f = \left\{ (\mathrm{x}, f(\mathrm{x})) \middle| \mathrm{x} \in \Omega \right\} \subset E \times U \,,$$

où Ω est le domaine de définition de f. En prenant une partie suffisament petite de Ω et $g \in G$ proche de l'élément neutre, l'action de g sur Γ_f s'exprime comme le graphe $g{\cdot}\Gamma_f \equiv \Gamma_{\widetilde{f}}$ d'une certaine fonction $\widetilde{\mathrm{u}} = \widetilde{f}\,(\widetilde{\mathrm{x}})$ que nous définissons comme la transformée de f par g.

Maintenant il reste à déterminer les fonctions $\xi^i(\mathrm{x},\mathrm{u})$ et $\phi_\alpha(\mathrm{x},\mathrm{u})$. Mais nous devons au préalable introduire le concept de *prolongation* d'une fonction et celle d'un champ de vecteurs.

3.1.4 Prolongation.

Soit la fonction f: $E \to U$ que l'on exprime sous la forme $u^\alpha = f^\alpha(\mathrm{x})$, $\alpha = 1, \ldots, q$. En la dérivant jusqu'à l'ordre k par rapport à toutes les variables indépendantes, nous obtenons $p_k \equiv \binom{p+k-1}{k}$ dérivées partielles de f. Pour abréger les expressions de celles-ci, il est convenu d'utiliser la notation à *indice multiple* pour les dérivées partielles de f :

$$u_J^\alpha \equiv \frac{\partial^{|J|} u^\alpha}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \ldots \partial x^{j_p}} \qquad \text{où } J = (j_1, j_2, \ldots, j_p) \in I\!N^p \text{ et } |J| = j_1 + j_2 + \ldots + j_p$$

qui nous donne les $q \cdot p_k$ dérivées partielles d'ordre $k = j_1 + j_2 + \ldots + j_k$.

Définition 3.1.8. *Soit la fonction analytique f: $E \to U$, on définit la fonction $pr^{(k)}[f]$: $E \to U^{(k)}$ comme la $k^{\text{ième}}$ prolongation de f et son graphe est donné par les équations :* $u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$; *où* $\alpha = 1, \ldots, q$ *et* $J = (j_1, j_2, \ldots, j_p) \in I\!N^p$.

La prolongation $pr^{(k)}[f]$ s'interprète comme l'expansion de f en polynômes de Taylor d'ordre k qui est évaluée à un certain point x_o :

$$f^\alpha(\mathrm{x}_o) = \sum_J \frac{u_J^\alpha}{J!}(\mathrm{x}_o - \mathrm{x})^J, \quad \mathrm{x}, \mathrm{x}_o \in E.$$

Définition 3.1.9. *Soit $J^{(k)} = E \times U^{(k)}$ l'espace qu'on appelle fibré de jet ou k-jet.*

Nous pouvons maintenant reformuler le système d'EDP $\mathcal{S}$ comme une application Δ: $J^{(k)} \to I\!R^m$ agissant dans la sous-variété (qui représente le système d'EDP) :

$$\mathcal{S}_\Delta = \left\{(\mathrm{x}, \mathrm{u}^{(k)}) \in J^{(k)} \,|\, \Delta(\mathrm{x}, \mathrm{u}^{(k)}) = 0\right\} \subset J^{(k)}$$

qui est régulière de codimension m si la matrice de Jacobie

$$\frac{\partial(\Delta^1, \ldots, \Delta^m)}{\partial(\mathrm{x}, \mathrm{u}^{(k)})} \quad \text{est toujours de rang } m \text{ dans un domaine ouvert de } J^{(k)}.$$

En associant $\mathcal{S}$ à une sous-variété de $J^{(k)}$, nous avons transformé un système d'EDP en un système d'équations algébriques. Ainsi nous pouvons redéfinir une solution du système $\mathcal{S}_\Delta$ comme suit.

Définition 3.1.10. *Soient Ω une sous-variété de E et l'application différentiable $f\colon\ \Omega \to U$, f est une solution du système S_Δ si*

$$\Delta\,(\mathrm{x},\, pr^{(k)}[f(\mathrm{x})]\,) = 0\,, \quad \forall x \in \Omega\,,$$

et le graphe correspondant est donné par : $\quad \Gamma_f^{(k)} = \{\,(\mathrm{x},\, pr^{(k)}[f(\mathrm{x})]\,)\,\} \subset S_\Delta$.

Nous étendons le concept de prolongation à un groupe local de transformations qui agit maintenant dans l'espace $J^{(k)}$. Prenons $g \in G$ et proche de l'élément neutre e, la fonction $g \cdot f$ définie au voisinage de $(\tilde{\mathrm{x}}, \tilde{\mathrm{u}}) = g\,(\mathrm{x}, \mathrm{u})$ a pour $k^{ième}$ prolongation :

$$pr^{(k)}[g \cdot (\mathrm{x}, \mathrm{u}^{(k)}\,)] = (\tilde{\mathrm{x}}, \tilde{\mathrm{u}}^{(k)})$$

où $\tilde{\mathrm{u}}^k$ a pour composantes $\tilde{\mathrm{u}}_J^\alpha = \partial_J\,[\,(g \cdot f)^\alpha\,(\tilde{\mathrm{x}})]$. Notons que l'action de G sur la prolongation de f est indépendante de la fonction elle-même. Conséquemment la $n^{ième}$ prolongation : $pr^{(n)}[G]$ est identique à $pr^{(m)}[G]$ pour toutes les dérivées dont l'ordre est $m \leq n$.

Finalement pour des groupes de Lie locaux, nous arrivons au *théorème du critère infinitésimal* qui conlue notre synthèse.

Théorème 3.1.4. *Soit S_Δ le système composé de m équations aux dérivées partielles d'ordre k :*

$$\Delta^l(\mathrm{x}, \mathrm{u}^{(k)}) = 0\,, \quad l = 1, 2, \ldots, m,$$

qui sont définies dans $M \subset E \times U$ et dont la matrice de Jacobie

$$\frac{\partial\,(\Delta^1, \ldots, \Delta^m)}{\partial(\mathrm{x},\, \mathrm{u}^{(k)})} \quad \text{est toujours de rang } m \text{ pour } (x, u^{(k)}) \in S_\Delta\,.$$

Si G est un groupe de Lie local de transformations agissant sur M, et

$$pr^{(k)}\Big[\,\xi\Big|_{(\mathrm{X}, \mathrm{U}^{(k)})=0}\,\Delta^l\Big] = 0, \quad i = l, \ldots, m, \quad \text{chaque fois que} \quad \Delta^l(\mathrm{x}, \mathrm{u}^{(k)}) = 0\,,$$

pour tout générateur infinitésimal $\xi \in G$, alors G est le groupe de symétrie de S..

Suite à la définition (3.1.10) au théorème (3.1.4), nous pouvons calculer $\xi^i(\mathrm{x},\mathrm{u})$ et $\phi^\alpha(\mathrm{x},\mathrm{u})$ à l'aide d'un algorithme [21] qui se compose des étapes suivantes.

(1) Construire la $k^{ième}$ prolongation du champ de vecteurs X à l'aide de

$$pr^{(k)}[X] = X + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J}\psi_\alpha^J(\mathrm{x},\mathrm{u}^{(k)})\frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \quad 1 \leq |J| \leq k,$$

où les coefficients ψ_α^J sont déterminés de manière récurrente comme suit. D'abord les coefficients de la première prolongation sont donnés par

$$\psi_\alpha^{J_i} = D_i\phi_\alpha(\mathrm{x},\mathrm{u}) - \sum_{j=1}^{p} u_{J_j}^\alpha D_i\xi^j(\mathrm{x},\mathrm{u}),$$

où J_i est un *p-uplet* composé de 1 à la $i^{ième}$ position et de zéros partout ailleurs, et on introduit la *dérivée totale* :

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} u_{J+J_i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \quad 0 \leq |J| \leq k.$$

Les prolongations d'ordres supérieurs sont calculées avec la relation de récurrence :

$$\psi_l^{J+J_i} = D_i\psi_l^J - \sum_{j=1}^{p} u_{J+J_j}^l D_i\xi^j(\mathrm{x},\mathrm{u}), \quad |J| \geq 1.$$

Notons que les prolongations des champs de vecteurs sont linéaires et satisfont les crochets de Lie :

$$pr^{(k)}[\alpha X + \beta Y] = \alpha\, pr^{(k)}[X] + \beta\, pr^{(k)}[Y], \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes,}$$

$$pr^{(k)}[X,Y] = [pr^{(k)}[X],\, pr^{(k)}[Y]]\,.$$

Si l'ensemble $\{X\}$ forme une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ alors les prolongations de ces champs de vecteurs engendrent aussi une algèbre de Lie qui est *isomorphe* à $\mathcal{L}$.

Selon cet algorithme, les variables x^i,u^α et u_J^α sont traitées comme des variables indépendantes tandis que les variables dépendantes sont $\xi^i(\mathrm{x},\mathrm{u})$ et $\phi_\alpha(\mathrm{x},\mathrm{u})$.

(2) Le système $\mathcal{S}$. est équivalent à un système algébrique où les m composantes du vecteur $\mathrm{u}^{(k)}$ sont renomées $v^1, \ldots, v^m$. Celles-ci sont choisies, si c'est possible, telles que chaque v^i soit au moins la dérivée partielle de u^α $(\alpha = 1, \ldots, q)$ par rapport à une seule des variables x^i $(i = 1, \ldots, p)$. Le système $\mathcal{S}$ peut alors se résoudre algébriquement où v^i s'exprime en termes des composantes restantes de $\mathrm{u}^{(k)}$ que l'on note par w. Ainsi, on obtient des relations $v^i = \mathcal{S}^i(\mathrm{x}, w)$.

(3) On applique $pr^{(k)}[X]$ à chaque équation $\Delta^i(\mathrm{x}, \mathrm{u}^{(k)})$ en imposant que

$$pr^{(k)}[X\,\Delta^i]\Big|_{\Delta^j=0} = 0\,, \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

Cette condition nous garantie que le champ de vecteurs X est un élément de l'algébre de symétrie $\mathcal{L}$, autrement dit : $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ est une solution de $\mathcal{S}_\Delta$ chaque fois que $\tilde{\mathrm{u}}(\tilde{\mathrm{x}})$ est une solution de $\mathcal{S}_\Delta$. Ensuite on utilise les relations $v^i = \mathcal{S}^i(\mathrm{x}, w)$ calculées à l'étape (2) pour éliminer v^i et toutes ses dérivées de sorte que les variables restantes soient indépendantes les unes des autres. Le résultat final doit s'exprimer sous la forme d'un polynôme en u^α_J.

(4) Chaque coefficient des monômes en u^α_J doit être posé comme nul, on obtient alors pour les coefficients $\xi^i(\mathrm{x}, \mathrm{u})$ et $\phi_\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{u})$ un système habituellement surdéterminé d'équations différentielles linéaires appelées *les équations déterminantes.*

(5) La résolution du système formé des *équations déterminantes* mène aux trois types de solutions distinctes pour les symétries du système différentiel considéré :

(i) Le système *déterminant* admet seulement la solution triviale : $\xi^i(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \equiv 0$ et $\phi_\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \equiv 0$. On a alors $X \equiv 0$ et $g \equiv \alpha$: *i.e.* la transformation identité.

(ii) La solution générale des équations déterminantes dépend de r constantes d'intégration $(r < \infty)$. La dimension de l'algèbre $\mathcal{L}$ et du groupe G de symétrie est $dim\,\mathcal{L} = dim\,G = r$.

(iii) La solution générale dépend de fonctions arbitraires. L'algèbre et le groupe de symétrie sont alors de dimension infinie.

3.2 La méthode de réduction par symétrie des équations différentielles.

Dans cette section, nous introduisons *la méthode de réduction par symétrie* (MRS) pour résoudre des équations différentielles à l'aide d'une définition et de deux théorèmes qui en sont le fondement. Ensuite, nous la résumons par un algorithme.

Définition 3.2.1. *Soit G un groupe de symétrie d'un système d'EDP $\mathcal{S}$. Une solution $\mathrm{u} = f(\mathrm{x})$ de $\mathcal{S}$ est dite G-invariante si $g \cdot \Gamma_f = \Gamma_f$, $\forall \gamma \in G$. Le graphe Γ_f est alors un ensemble G-invariant.*

Théorème 3.2.1. *Considérons un groupe de symétrie G d'un système $\mathcal{S}$ dont l'action est régulière et qui donne des orbites de dimension r dans l'espace des variables indépendantes. Il existe trois possibilités pour les solutions de $\mathcal{S}$:*

(i). Toutes les solutions G-invariantes du système $\mathcal{S}$ sont obtenues en résolvant le système réduit d'équations différentielles, noté $\Delta/G = 0$, en termes de $p - r$ variables indépendantes $(r < p)$.

(ii). Si $r = p$, les solutions G-invariantes sont obtenues en résolvant un système d'équations algébriques.

(iii). Si $r > p$, il n'y a pas de solution G-invariante.

Théorème 3.2.2. *Supposons que G soit un groupe de Lie local de transformations ayant comme champs de vecteurs :*

$$X_k = \sum_{i=1}^{p} \xi^k(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_\alpha^k(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad k = 1, \dots, r,$$

et $Q_1, \dots, Q_r$ sont les caractéristiques des champs de vecteurs $X_1, \dots, X_r$.

Alors u *est une solution G-invariante si et seulement si elle est une solution du système d'EDP du premier ordre :*

$$Q_k^\alpha(\mathrm{x}, u^{(1)}) \equiv \phi_\alpha^k(\mathrm{x}, \mathrm{u}) - \sum_{i=1}^{p} \xi^k(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = 0, \quad k = 1, \dots, r; \quad \alpha = 1, \dots, q.$$

Le principe de base est de considérer un certain sous-groupe $G_o \subset G$ telle que la solution du système d'équations différentielles soit invariante sous l'action de G_o (au lieu de la transformer en une autre solution). Cependant ce principe d'invariance impose des contraintes sur la solution qui débouchent sur des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre. En résolvant ces contraintes, nous obtenons des solutions qui après les avoir substituées dans le système de départ, le simplifient.

La méthode de réduction par symétrie MRS consiste principalement à réduire le nombre de variables indépendantes de manière à obtenir un système d'équations différentielles ordinaires (EDO), voire même un système d'équations algébriques. Différents sous-groupes G_o mènent à des solutions différentes, mais deux sous-groupes conjugués à un même groupe G mènent à des réductions équivalentes. Il est donc important d'en faire une classification.

Généralement, il n'est pas nécéssaire de prendre tous les sous-groupes de G, on tient seulement compte de ceux qui agissent de façon appropriée dans l'espace $M \sim E \times U$. En fait, n'importe lequel des sous groupes $G_o \subset G$ va agir sur l'espace M et conséquemment associer certaines orbites dans cet espace. Ceci implique qu'il existe des invariants $I_i\,(\mathrm{x},\mathrm{u})$ *fonctionnellement indépendants* dont leur nombre $N = p + q - r$ est égal à la *codimension* des orbites génériques (de dimension r) résultant de l'action de G_o sur l'espace M. Ces invariants forment une base $\{I_1\,(\mathrm{x},\mathrm{u}), \ldots, I_N\,(\mathrm{x},\mathrm{u})\}$. Puisque les coefficients $\xi_k(\mathrm{x},\mathrm{u})$ des champs vectoriels X_k sont indépendants des dérivées de u^α; l'action du groupe de symétrie est dite *projective*, la base des invariants comporte deux parties :

$$\left\{I_1\,(\mathrm{x}), \ldots, I_{p-r}\,(\mathrm{x}) \,\middle|\, I_{p-r+1}\,(\mathrm{x},\mathrm{u}), \ldots, I_{p-r}\,(\mathrm{x},\mathrm{u})\right\}.$$

Le sous-groupe $G_o \subset G$ nous donne des solutions explicites du groupe invariant si les invariants satisfont aux deux conditions suivantes :

(i) Les N invariants existent et dépendent seulement des variables indépendantes x_j, on les appelle les *variables de symétrie* dénotées par $\eta_1, \ldots, \eta_{p-r}$

(ii) Il existe q autres invariants tel que le Jacobien correspondant ne soit pas nul :

$$det\left[\frac{\partial I_i}{\partial u^\alpha}\right] \neq 0\,, \quad i = p - r + 1, \dots, p + q\,; \quad \alpha = 1, \dots, q\,. \tag{3.2.1}$$

Si ces deux conditions sont satisfaites, les q invariants s'expriment sous la forme

$$\eta_{p-r+j}\,(\mathrm{x}, \mathrm{u}) = F_j\,(\,\eta_1\,(\mathrm{x}), \dots, \eta_{p-r}\,(\mathrm{x}))\,, \quad j = 1, \dots, q\,, \tag{3.2.2}$$

où F_j sont des fonctions arbitraires dépendantes des variables de symétrie $\eta_1, \dots, \eta_{p-r}$.

En vertu de (3.2.1) et du *théorème des fonctions implicites*, il est possible de résoudre le système (3.2.2) en termes des variables dépendantes ;

$$u^l = \mathcal{U}^l\,(F_1\,(\overline{\eta})\,, \dots, F_q\,(\overline{\eta}), x_1, \dots, x_p)\,, \quad l = 1, \dots, q\,, \tag{3.2.3}$$

où $\overline{\eta} \equiv (\eta_1, \dots, \eta_{p-r})$ et $\mathcal{U}^l$ sont des fonctions arbitraires.

En substituant u^l dans le système de départ, nous obtenons un système d'équations pour F_μ; $\mu = 1, \dots, q$, ne comprenant que les variables de symétries. Les variables indépendantes x qui ne peuvent être exprimées en terme des variables de symétries seront éliminées des *équations réduites*. L'explication réside dans le fait que $\{\eta_j, F_\mu\}$ forme un ensemble complet d'invariants pour la transformation du groupe G et conséquemment

$$\left\{\eta_j, F_\mu, \frac{\partial F_\mu}{\partial \eta_j}, \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial \eta_j \partial \eta_i}, \dots\right\} \quad \text{forme un ensemble complet d'invariants pour } pr^{(k)}G\,.$$

Les *équations réduites* sont alors de la forme

$$\widetilde{\Delta}_j\left(\eta_j, F_\mu, \frac{\partial F_\mu}{\partial \eta_j}, \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial \eta_j \partial \eta_i}, \dots\right) = 0\,.$$

Voici les étapes à suivre pour effectuer la MRS pour le système $\mathcal{S}_\Delta$.

(1) Déterminer le groupe de symétrie du système d'EDP $\mathcal{S}$ à l'aide de l'algorithme décrit dans la dernière section. Cette tâche peut être en grande partie accomplie par des programmes informatiques ; [5], [21].

(2) Classifier tous les sous-groupes $G_o \subset G$ par classes de conjugaison. Ensuite les ordonner suivant leur dimension égale ou inférieure à r. Choisir un représentant G_o de chacune des classes de conjugaison.

(3) Pour chaque représentant des sous-groupes G_o, déterminer les invariants de chaque sous-groupe G_o agissant dans l'espace $M \sim E \times U$. Ceux-ci sont calculer en résolvant le système d'EDP du premier ordre

$$X_k\Big[H(\mathrm{x},\mathrm{u})\Big] = 0\,, \quad k = 1, \ldots, r\,,$$

où X_k est un champ de vecteurs de l'algèbre de Lie associée à G_o qui agit sur une certaine fonction arbitraire $H(\mathrm{x},\mathrm{u})$.

(4) Substituer u^l dans le système de départ $\mathcal{S}$, on obtient alors le *système réduit* d'équations différentielles, noté par $\Delta_\mu/G = 0$, pour $F_1, \ldots, F_q$.

(5) Résoudre le système réduit dont les solutions substituer dans l'expression (3.2.3) donne les *solutions G-invariantes* du système de départ $\mathcal{S}$. Appliquer une transformation générale de groupe de symétrie au résultat. Cela donnera une famille de solutions particulières.

3.2.1 Conditions frontières.

Nous terminons cette section en faisant certaines remarques sur les conditions frontières qui peuvent être imposées aux solutions obtenues par la MRS, notamment concernant les solutions stationnaires [40].

Une solution stationnaire (pour $t = t_o$) d'un système d'EDP $\mathcal{S}$ est spécifiée en imposant de manière appropriée les conditions frontières pour le cas étudier sur une frontière donnée $\mathcal{F}$ dans l'espace euclidien à trois dimensions. La surface $\mathcal{F}$ et les conditions frontières imposées sur celle-ci ne sont pas nécéssairement invariantes sous l'action du groupe de symétrie G. Les conditions frontières vont alors briser la symétrie et les solutions obtenues sont invariantes sous l'action de certains sous-groupes de G. En règle générale, les conditions frontières génériques brisent entièrement la symétrie du problème et les solutions correspondantes sont invariantes sous l'action de l'élément identité d'un certain sous-groupe de G.

La méthode de réduction par symétrie nous fournit des solutions particulières qui sont invariantes sous l'action de certains sous-groupes (non triviaux) $G_o \subset G$. Cependant, cela entraîne de sévères restrictions sur les conditions frontières. Conséquemment, la surface $\mathcal{F}$ doit être une orbite du sous-groupe G_o dans l'espace euclidien et les conditions frontières sur $\mathcal{F}$ doivent être compatibles avec le groupe de symétrie G_o. En particulier, si la réduction conduit à une EDO du premier ordre, la condition ayant la forme $\mathrm{u} = \phi(\xi)\mathcal{Y}(\mathrm{x})$ implique que la surface $\mathcal{F}$ soit déterminée par l'équation

$$\xi\,(x, y, z) = \xi_o \qquad \text{pour } t = t_o. \tag{3.2.4}$$

Dans le cas d'une EDO du second ordre, la solution correspondante est déterminée en imposant deux conditions initiales que l'on peut spécifier par

$$P\,(\xi_o) = P_o\,, \quad \frac{dP}{d\xi}(\xi_o) = Q_o\,. \tag{3.2.5}$$

Selon l'expression $\mathrm{u} = \phi(\xi)\mathcal{Y}(\mathrm{x})$, les conditions frontières pour $\mathrm{u}\,(t_o, x, y, z)$, qui sont compatibles avec le groupe de symétrie G_o, s'expriment sous la forme

$$\mathrm{u}\big|_{\xi=\xi_o} = \phi\,(x, y, z)\big|_{\xi=\xi_o} P_o\,. \tag{3.2.6}$$

Les conditions frontières permises sont soit des plans, des cylindres, des sphères, des hyperboloïdes, des cônes, des demi-plans et des surfaces hélicoïdales.

En résumé : pour une solution G-invariante $\mathrm{u}\,(\mathrm{x})$, le groupes d'invariance G_o détermine la variable $\xi\,(\mathrm{x})$ et le multiplicateur $\phi\,(\mathrm{x})$. Les conditions frontières ne peuvent être imposées que sur les surfaces de niveaux de l'invariant ξ comme (3.2.4). La fonction $P\,(\xi)$ satisfait l'ODE obtenue par réduction et la solution spécifique va dépendre de deux constantes P_o et Q_o figurant dans les conditions frontières (3.2.6). Le choix de ces constantes va nous indiquer si les fonctions sont finies ou possèdent des singularités, réelles ou complexes, périodiques ou non périodiques, *etc.*

3.3 La M.R.S appliquée aux équations de la MHD.

L'objectif de cette section est de trouver des solutions G-invariantes du système MHD (1.1.17) à l'aide de la MRS qui se résume à l'algorithme donné dans la section précédente. En premier lieu, faisons un bref bilan du travail jusqu'à maintenant accompli. Les deux premières étapes de la MRS ont déjà été complétées par A.M. Grundland *et al.* [16], [17]: ceux-ci ont d'abord déterminé l'algèbre de symétrie du système MHD qui est engendrée par les 13 générateurs tels que donnés dans l'introduction, puis ils ont classifié les sous-algèbres du type similitude galiléenne par classes de conjugaison dont les dimensions varient entre 1 et 4 inclusivement.

Notre tâche est de compléter les étapes 3,4 et 5 de la MRS. En particulier, les étapes intermédiaires 3 et 4 qui consistent successivement à calculer les $N = p+q-r$ invariants de chaque représentant des sous-algèbres de dimension $r = 3$ qui proviennent des classifications ci-haut mentionnnées et d'en extraire les orbites de groupe correspondantes qui s'expriment en fonction d'une seule variable de symétrie. Dans le tableau (3.1), nous avons dressé la liste des sous-algèbres suivant les différents types de variables de symétrie obtenues.

Ensuite, pour chacune de ces 104 sous-algèbres de dimension trois, on substitue dans le système MHD les orbites de groupe pour finalement obtenir un système réduit (on en a calculé 92) composé d'EDO. En dernier lieu, il nous reste à résoudre chaque système réduit surdéterminé qui se compose dans notre cas de neuf EDO pour huit inconnues et qui mène finalement aux solutions G-invariantes. Nous avons regroupé ensemble certains systèmes réduits qui ont en commun la même équation reliée à la contrainte différentielle $\nabla \cdot \vec{H} = 0$. Il s'avère que la résolution de ces systèmes réduits ainsi regroupés est très similaire. Nous en donnons la liste dans les tableaux (3.2)-(3.5).

Tableau 3.1. Liste des variables de symétrie (variables indépendantes) des sous-algèbres de la MHD dont la dimension est trois et la codimension dans l'espace des variables indépendantes est un ; α et $\nu \in I\!R$.

Variables de symétrie	No. des sous-algèbres
$s = t$	$M_{3,7}$,$M_{3,8}$,$M_{3,9}$,$M_{3,10}$,$M_{3,14}$,$M_{3,15}$,$M_{3,52}$,$M_{3,53}$,$M_{3,54}$,$M_{3,56}$,$M_{3,89}$,$M_{3,92}$
$s = y$	$M_{3,24}$
$s = z$	$M_{3,4}$,$M_{3,12}$,$M_{3,23}$,$M_{3,42}$,$M_{3,43}$,$M_{3,85}$
$s = z^\nu/t,$	$M_{3,18}$,$M_{3,28}$,$M_{3,33}$,$M_{3,37}$,$M_{3,38}$,$M_{3,48}$,$M_{3,49}$,$M_{3,83}$,$M_{3,88}$,$M_{3,90}$
$s = x/y$	$M_{3,17}$,$M_{3,19}$,$M_{3,26}$,$M_{3,27}$,$M_{3,63}$,$M_{3,94}$
$s = z\exp[\alpha t]$	$M_{3,29}$,$M_{3,34}$,$M_{3,51}$
$s = \alpha\, ln[t] + z$	$M_{3,25}$,$M_{3,44}$,$M_{3,45}$,$M_{3,46}$,$M_{3,47}$,$M_{3,86}M_{3,87}$,$M_{3,91}$
$s = ln[t] - \frac{x^2}{t}$	$M_{3,20}$,$M_{3,21}$,$M_{3,36}$,$M_{3,39}$,$M_{3,40}$,$M_{3,41}M_{3,84}$,$M_{3,93}$
$s = \beta(z - \frac{1}{2}t^2) - \alpha y$	$M_{3,2}$,$M_{3,11}$
$s = \frac{\frac{1}{2}\beta t^2 - \beta x + y}{z}$	$M_{3,50}$,$M_{3,55}$
$s = \sqrt{x^2+y^2}$	$M_{3,1}$,$M_{3,5}$,$M_{3,31}$,$M_{3,69}$,$M_{3,70}$,$M_{3,71}$,$M_{3,96}$,$M_{3,97}$,$M_{3,98}$
$s = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t^\nu}$	$M_{3,64}$,$M_{3,66}$,$M_{3,67}$,$M_{3,74}$,$M_{3,95}$,$M_{3,99}$
$s = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	$M_{3,65}$,$M_{3,72}$,$M_{3,73}$,$M_{3,77}$,$M_{3,81}$,$M_{3,104}$
$s = \sqrt{x^2+y^2}\exp[\alpha\varphi]$	$M_{3,30}$,$M_{3,32}$,$M_{3,35}$,$M_{3,61}$,$M_{3,80}$,$M_{3,102}$
$s = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t^\nu}\exp[\alpha\varphi]$	$M_{3,78}$,$M_{3,82}$,$M_{3,101}$,$M_{3,103}$
$s = \sqrt{x^2+y^2}\exp[\alpha\varphi + \beta t]$	$M_{3.75}$,$M_{3.76}$
$s = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z - t/2}$	$M_{3,100}$

Tableau 3.2. Solutions des systèmes réduits ayant en commun comme contrainte sur les composantes de $\vec{H}$

$$\boxed{H_3 = 0} \qquad \text{où } Z_o \in I\!R.$$

Variables de symétrie	No. des sous-algèbres
$s = t$	$M_{3,7}$,$M_{3,8}$,$M_{3,9}$,$M_{3,10}$,$M_{3,14}$,$M_{3,15}$,$M_{3,52}$,$M_{3,92}$
$s = z$	$M_{3,12}$,$M_{3,85}$
$\sigma = z - \frac{1}{2}t^2$	$M_{3,11}$
$s = z\, e^{-t}$	$M_{3,29}$,$M_{3,34}$,$M_{3,51}$
$s = \alpha\, ln[t] + z$	$M_{3,86}$,$M_{3,87}$,$M_{3,91}$
$s = \alpha\, ln[t] - \frac{z}{t}$	$M_{3,21}$,$M_{3,36}$,$M_{3,93}$
$s = \frac{z^\alpha}{t}$	$M_{3,18}$,$M_{3,28}$,$M_{3,33}$,$M_{3,48}$,$M_{3,49}$,$M_{3,88}$,$M_{3,90}$

Dans le tableau (3.2), nous avons regroupé tous les systèmes réduits ayant en commun la relation $Z_o = 0$; cela implique que le champ magnétique n'a que deux composantes $\vec{H} = (H_1, H_2, 0)$. Pour les sous-algèbres ayant pour variable de symétrie $s = t$, nous avons pu résoudre complètement les systèmes réduits à l'exception des sous-algèbres $M_{3,52}$ et $M_{3,92}$ pour lesquelles nous aboutissons à des EDO du second ordre non-linéaires qui ne possèdent pas les propriétés de Painlevé. Pour le reste des sous-algèbres, nous sommes arrivé par éliminations et substitutions à une seule équation de type intégro-différentielle qu'il est possible de résoudre dans certains cas. Nous en donnons l'exemple pour les sous-algèbres $M_{3,85}$ et $M_{3,91}$ qui mènent à des solutions non-triviales.

$$M_{3,7};\ \{J_3+\alpha_1K_3+\alpha_2P_3+\alpha_3H, K_1+P_2, K_2-P_1\}$$

variable de symétrie: $s=t$

Soient les fonctions suivantes

$$I = \int dt \frac{(t^2+1)^{(1-\kappa)}}{(\alpha_1 t+\alpha_2)^{\kappa}}\,,$$
$$A = A_o[(t^2+1)(\alpha_1 t+\alpha_2)]^{(1-\kappa)}\,,$$

$$R = \frac{R_o}{(t^2+1)(\alpha_1 t+\alpha_2)} exp\left[\frac{-1}{(\alpha_1 t+\alpha_2)}\left[\alpha_2+\frac{\eta_o}{\alpha_1}+\frac{\alpha_3^2X_o^2}{2\alpha_1^2\pi}\right]-\frac{\alpha_3^2X_o^2}{2\alpha_1^2\pi}\frac{ln[\alpha_1 t+\alpha_2]}{(\alpha_1 t+\alpha_2)}+4\alpha_3^2A_o\int\frac{I(t)\,dt}{(\alpha_1 t+\alpha_2)^2}\right],$$

$$V = V_o - \frac{1}{2\alpha_3} ln[(\alpha_1 t+\alpha_2)(t^2+1)R]\,, \qquad \theta = V - \frac{z}{(\alpha_1 t+\alpha_2)}\,,$$
$$W = \frac{1}{2\alpha_3(\alpha_1 t+\alpha_2)}\left[\eta_o - \alpha_1^2 t + 4\alpha_3^2\int dt A(t) + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^2}\frac{X_o^2}{2\pi} ln[\alpha_1 t+\alpha_2]\right] + \frac{\alpha_1}{2\alpha_3}\,,$$
$$X = X_o\sqrt{\frac{R}{(\alpha_1 t+\alpha_2)}}\,,$$
$$Y = Y_o + arctan(t) + V\,.$$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont :

$$\rho = \exp\left[\frac{2\alpha_3 z}{(\alpha_1 t+\alpha_2)}\right] R\,,$$
$$p = \exp\left[\frac{2\alpha_3 z}{(\alpha_1 t+\alpha_2)}\right] AR\,,$$

$$u = \frac{t(x-U_o\sin\theta)+(y-U_o\cos\theta)}{t^2+1}\,,$$
$$v = \frac{t(y-U_o\cos\theta)-(x-U_o\sin\theta)}{t^2+1}\,,$$
$$w = \frac{\alpha_1 z}{(\alpha_1 t+\alpha_2)} - W\,,$$

$$H_1 = \exp\left[\frac{\alpha_3 z}{(\alpha_1 t+\alpha_2)}\right] X\, sin\left(Y - \frac{z}{(\alpha_1 t+\alpha_2)}\right)\,,$$
$$H_2 = \exp\left[\frac{\alpha_3 z}{(\alpha_1 t+\alpha_2)}\right] X\, cos\left(Y - \frac{z}{(\alpha_1 t+\alpha_2)}\right)\,,$$
$$H_3 = 0\,,$$

où A_o, R_o, U_o, et $X_o > 0$; V_o, $\eta_o \in I\!R$; $\alpha_1 > 0$; $\alpha_2, \alpha_3 \in I\!R$.

$$M_{3,8};\ \{J_3+\alpha_1 P_3+\alpha_2 H, K_1+P_2, K_2-P_1\}$$

variable de symétrie: $s=t$

Soient les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
A =& A_o(t^2+1)^{(1-\kappa)},\\
R =& \frac{R_o}{(t^2+1)}\exp\left[-\frac{2\alpha_2}{\alpha_1}W_o t+\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\frac{X_o^2}{4\pi}t^2+4\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\int dt\int d\xi A(\xi)\right],\\
V =& V_o+\frac{W_o}{\alpha_1}t-\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\left[2\int dt\int d\xi A(\xi)+\frac{X_o^2}{8\pi}t\right],\\
\theta =& V_o+\frac{W_o}{\alpha_1}t-\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\left[2\int dt\int d\xi A(\xi)+\frac{X_o^2}{8\pi}t\right]-\frac{z}{\alpha_1},\\
W =& W_o-\frac{2\alpha_2}{\alpha_1}\int dt A(t)-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{X_o^2}{8\pi}t,\\
Y =& Y_o+V_o+arctan(t)+\frac{W_o}{\alpha_1}t-\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\left[2\int dt\int d\xi A(\xi)+\frac{X_o^2}{8\pi}t\right].
\end{aligned}$$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont :

$$\begin{aligned}
\rho =& \exp\left[\frac{2\alpha_2 z}{\alpha_1}\right]R,\\
p =& A\rho,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u =& \frac{t(x-U_o\sin\theta)+(y-U_o\cos\theta)}{t^2+1},\\
v =& \frac{t(y-U_o\cos\theta)-(x-U_o\sin\theta)}{t^2+1},\\
w =& W,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 =& \exp\left[\frac{\alpha_2 z}{\alpha_1}\right]\sqrt{R}\sin\left(Y-\frac{z}{\alpha_1}\right),\\
H_2 =& \exp\left[\frac{\alpha_2 z}{\alpha_1}\right]\sqrt{R}\cos\left(Y-\frac{z}{\alpha_1}\right),\\
H_3 =& 0,
\end{aligned}$$

où A_o, R_o, U_o, et $X_o>0$; V_o, $Y_o\in I\!R$; $\alpha_1>0$, $\alpha_2\in I\!R$.

$$M_{3,9};\ \{J_3 + K_3 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 H, K_1, K_2\}$$

variable de symétrie: $s = t$

Soient les fonctions suivantes

$$A = A_o[t^2(t+\alpha_1)]^{(1-\kappa)}, \qquad I(t) = \int dt A(t),$$

$$R = \frac{R_o}{t^2(t+\alpha_1)} exp\left[\frac{-1}{(t+\alpha_1)}\left[5\alpha_1 + \eta_o + \frac{X_o^2}{2\pi}\right] - \frac{X_o^2}{2\pi}\frac{ln[t+\alpha_1]}{(t+\alpha_1)} + 4\alpha_2^2 \int dt \frac{I(t)}{(t+\alpha_1)^2}\right],$$

$$\begin{aligned} V =& -\frac{1}{2\alpha_2} ln\left[\frac{V_o}{t^2(t+\alpha_1)R}\right], \\ W =& \frac{1}{2\alpha_2(t+\alpha_1)}\left[5\alpha_1 + \eta_o + 4\alpha_2^2 \int dt A(t) + \alpha_2^2 \frac{X_o^2}{2\pi} ln[t+\alpha_1]\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X =& X_o\sqrt{\frac{R}{(t+\alpha_1)}}, \\ Y =& -\frac{1}{2\alpha_2} ln\left[\frac{Y_o}{t^2(t+\alpha_1)R}\right]. \end{aligned}$$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont :

$$\begin{aligned} \rho =& \exp\left[\frac{2\alpha_2 z}{(t+\alpha_1)}\right], \\ p =& A\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u =& \frac{1}{t}\left[x - U_o\, sin\left(V - \frac{z}{\alpha_1 + t}\right)\right], \\ v =& \frac{1}{t}\left[y - U_o\, cos\left(V - \frac{z}{\alpha_1 + t}\right)\right], \\ w =& W + \frac{z}{\alpha_1 + t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1 =& \exp\left[\frac{\alpha_2 z}{(t+\alpha_1)}\right] X\, sin\left(Y - \frac{z}{\alpha_1 + t}\right), \\ H_2 =& \exp\left[\frac{\alpha_2 z}{(t+\alpha_1)}\right] X\, cos\left(Y - \frac{z}{\alpha_1 + t}\right), \\ H_3 =& 0, \end{aligned}$$

où A_o, R_o, U_o, et $X_o > 0$; V_o, η_o, X_o et $Y_o \in I\!R$; α_1, $\alpha_2 \in I\!R$.

$M_{3,10}$; $\{J_3 + P_3 + \alpha H, K_1, K_2\}$

variable de symétrie: $s = t$

Soient les fonctions suivantes

$$R = \begin{cases} \frac{R_o}{t^2}\exp\left[\alpha^2\left[\frac{2A_o}{(3-2\kappa)(2-\kappa)}t^{2(1-\kappa)} + \frac{X_o^2}{4\pi}\right]t^2 + C_o t\right] & \text{pour} \quad \kappa \neq 3/2, 2\,, \\ \frac{R_o}{t^2}\exp\left[\alpha^2\left[4A_o\int dt\, ln[t] + \frac{X_o^2}{4\pi}t^2\right] + C_o t\right] & \text{pour} \quad \kappa = 3/2\,, \\ R_o t^{-(1+4\alpha^2 A_o)}\exp\left[\alpha^2\frac{X_o^2}{4\pi}t^2 + C_o t\right] & \text{pour} \quad \kappa = 2\,, \end{cases}$$

$$W = \begin{cases} -\alpha\left[\frac{2A_o}{(3-2\kappa)}t^{2(1-\kappa)} + \frac{X_o^2}{4\pi}\right]t - \frac{C_o}{2\alpha} & \text{pour} \quad \kappa \neq 2\,, \\ -\alpha\left[2A_o\, ln[t] + \frac{X_o^2}{4\pi}t\right] - \frac{C_o}{2\alpha} & \text{pour} \quad \kappa = 2\,. \end{cases}$$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont :

$$\begin{aligned} \rho =& e^{2\alpha z}\, R\,, \\ p =& A_o t^{2(1-\kappa)}\rho\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u =& \frac{x}{t} - \frac{U_o}{t}\sin\left(V_o - \frac{1}{\alpha}ln\left[t\sqrt{R}\right] - z\right), \\ v =& \frac{y}{t} - \frac{U_o}{t}\cos\left(V_o - \frac{1}{\alpha}ln\left[t\sqrt{R}\right] - z\right), \\ w =& W\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1 =& X_o e^{\alpha z}\sqrt{R}\sin\left(Y_o - \frac{1}{\alpha}ln\left[t\sqrt{R}\right] - z\right), \\ H_2 =& X_o e^{\alpha z}\sqrt{R}\cos\left(Y_o - \frac{1}{\alpha}ln\left[t\sqrt{R}\right] - z\right), \\ H_3 =& 0\,, \end{aligned}$$

où A_o, R_o, U_o, et $X_o > 0$; V_o, C_o, $Y_o \in I\!R$; $\alpha \in I\!R^*$.

$M_{3,14}$; $\{J_3 + P_3 + \alpha H, P_1, P_2\}$

variable de symétrie: $s = t$

Soient les fonctions suivantes

$$R = R_o \exp\left[\alpha^2\left[2A_o + \frac{X_o^2}{4\pi}\right]t^2 + \frac{C_o}{2\alpha}t\right], \quad V = V_o - \alpha\left[2A_o + \frac{X_o^2}{4\pi}\right]t^2 + \frac{C_o}{2\alpha}t, \quad Y = Y_o + V.$$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont :

$$\rho = e^{2\alpha z} R, \qquad u = U_o \sin(V - z), \qquad H_1 = X_o e^{\alpha z}\sqrt{R}\sin(Y - z),$$

$$p = A_o\rho, \qquad v = U_o \cos(V - z), \qquad H_2 = X_o e^{\alpha z}\sqrt{R}\cos(Y - z),$$

$$w = -\frac{1}{2\alpha}\left[C_o + \alpha^2\left[4A_o + \frac{X_o^2}{2\pi}\right]t\right], \quad H_3 = 0,$$

où A_o, R_o, U_o, et $X_o > 0$; V_o, C_o, $Y_o \in I\!R^*$; $\alpha \in I\!R^*$.

$M_{3,15}$; $\{J_3 + K_3 + \alpha H, P_1, P_2\}$

variable de symétrie: $s = t$

Soient les fonctions suivantes

$$A = A_o t^{2(1-\kappa)},$$

$$R = \begin{cases} \frac{R_o}{t}\exp\left[\frac{4\alpha^2 A_o}{(2-\kappa)(1-\kappa)}t^{-\kappa} - \alpha^2\frac{X_o^2}{2\pi}\frac{ln[t]}{t} - \frac{2\alpha}{t}[W_o + \frac{\alpha X_o^2}{4\pi}]\right] & \text{pour} \quad \kappa \neq 1, 2, \\ \frac{R_o}{t}\exp\left[\frac{-2\alpha}{t}[W_o + \alpha(2A_o + \frac{X_o^2}{4\pi})] - \alpha^2[4A_o + \frac{X_o^2}{2\pi}]\frac{ln[t]}{t}\right] & \text{pour} \quad \kappa = 2, \\ \frac{R_o}{t^{(1-4\alpha^2 A_o)}}\exp\left[\frac{-2\alpha}{t}[W_o + \alpha\frac{X_o^2}{4\pi}] - \alpha^2\frac{X_o^2}{2\pi}\frac{ln[t]}{t}\right] & \text{pour} \quad \kappa = 1, \end{cases}$$

$$V = V_o - \frac{1}{2\alpha}ln\left[tR\right], \quad Y = Y_o + V.$$

$$W = \begin{cases} W_o + \frac{2A_o}{(2-\kappa)}t^{(2-\kappa)} + \frac{X_o^2}{4\pi}ln[t] & \text{pour} \quad \kappa \neq 2, \\ W_o + \alpha\left[2A_o + \frac{X_o^2}{2\pi}\right]ln[t] & \text{pour} \quad \kappa = 2, \end{cases}$$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont :

$$\rho = e^{2\alpha\frac{z}{t}} R, \qquad u = U_o \sin\left(V - \tfrac{z}{t}\right), \qquad H_1 = X_o e^{\alpha\frac{z}{t}}\sqrt{\tfrac{R}{t}}\sin\left(Y - \tfrac{z}{t}\right),$$

$$p = A\rho, \qquad v = U_o \cos\left(V - \tfrac{z}{t}\right), \qquad H_2 = X_o e^{\alpha\frac{z}{t}}\sqrt{\tfrac{R}{t}}\sin\left(Y - \tfrac{z}{t}\right),$$

$$w = \frac{z - W}{t}, \qquad H_3 = 0,$$

A_o, R_o, U_o, $X_o > 0$; V_o, W_o, $Y_o \in I\!R$; $\alpha \in I\!R$.

$M_{3,52}$; $\{F+G+\alpha H, K_1+P_2, P_1\}$

variable de symétrie: $s=t$

Il existe trois types de solutions MHD qui sont liés aux valeurs de $\alpha \in I\!R$.

(I) Si $\alpha \neq \{\frac{1}{2}\}$. Soit $\nu = 1/(2\alpha-1)$,

$$\rho = z^{2(\alpha-1)}\,R\,, \qquad u = y - z\,V_o\,(U_o+t)\,R^{\nu}\,, \qquad H_1 = z^{\alpha}\,Y_o(X_o+t)\,R^{\nu(1+\alpha)}\,,$$

$$p = z^{2\alpha}A_o\,R^{-(\kappa+2\alpha)\nu}\,, \qquad v = V_o z\,R^{\nu}\,, \qquad H_2 = z^{\alpha}\,Y_o\,R^{\nu(1+\alpha)}\,,$$

$$w = \frac{z}{2\alpha-1}\frac{R'}{R}\,, \qquad H_3 = 0\,.$$

La fonction R est déterminée par l'EDO

$$R\,R'' + 2\alpha\,(R')^2 + 2\alpha(1-2\alpha)A_o\,R^{\nu(\kappa+4\alpha)} + \alpha(2\alpha-1)\,\frac{Y_o^2}{4\pi}\,[(t+X_o)^2+1]\,R^{\nu(4\alpha+3)} = 0\,,$$

avec la contrainte que $R(s)>0$, A_o, U_o, $X_o>0$; V_o, $Y_o \in I\!R$.

(II) Si $\alpha = \frac{1}{2}$, . Soit $\mu = 1/(\kappa+1)$

$$\rho = \frac{R_o}{z}\,, \qquad u = y - z\,V_o\,(U_o+t)\,A^{\mu}\,, \qquad H_1 = z^{\frac{1}{2}}\,Y_o(X_o+t)\,A^{\frac{3}{2}\mu}\,,$$

$$p = z\,A\,, \qquad v = V_o z\,A^{\mu}\,, \qquad H_2 = z^{\frac{1}{2}}\,Y_o\,A^{\frac{3}{2}\mu}\,,$$

$$w = \frac{z}{\kappa+1}\frac{A'}{A}\,. \qquad H_3 = 0$$

La fonction A est déterminée par l'EDO

$$A\,A'' - \kappa\,(A')^2 + \frac{(\kappa+1)}{R_o}\,A^3 - \frac{(\kappa+1)Y_o^2}{8\pi\,R_o}\,[(t+X_o)^2+1]\,A^{\mu(5+2\kappa)} = 0\,,$$

avec la contrainte que $A(s)>0$, A_o, U_o, $X_o>0$; V_o, $Y_o \in I\!R$.

(III) Si $\alpha = 0$,

$$\rho = R_o\frac{(W_o+t)}{z^2}\,, \qquad u = y - z\,\frac{(U_o+V_o t)}{W_o+t}\,, \qquad H_1 = \frac{X_o+(Y_o-Z_oU_o)t}{W_o+t}\,,$$

$$p = \frac{A_o}{(W_o+t)^{\kappa}}\,, \qquad v = \frac{V_o\,z}{W_o+t}\,, \qquad H_2 = \frac{Y_o+Z_oV_ot}{W_o+t}\,,$$

$$w = \frac{z}{W_o+t}\,, \qquad H_3 = Z_o\,,$$

avec A_o, R_o, U_o, et $X_o>0$; V_o, W_o, Y_o, $Z_o \in I\!R$.

$$M_{3,92};\ \{J_1+\alpha_1(F+G)+\alpha_2 H, K_1+P_2, K_2-P_1\}$$

variable de symétrie: $s=t$

Il existe deux types de solutions liés aux valeurs des coefficients α_2 et α_1.

I) Soit $\beta\equiv 2\alpha_2-\alpha_1\neq 0$. On introduit d'abord les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
U &= U_o[(t^2+1)R]^{\alpha_1/\beta}\,,\\
V &= V_o-\frac{1}{\beta}\,ln\Big[(t^2+1)R\Big]\,, \qquad \theta=V-\frac{1}{\alpha_1}\,ln[z]\,,\\
X &= X_o(t^2+1)^{2\alpha_1/\beta}\,R^{(\alpha_1+\alpha_2)/\beta}\,,\\
Y &= arctan(t)+V\,.
\end{aligned}$$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont :

$$\begin{aligned}
\rho &= z^{2\alpha_1/(\alpha_2-\alpha_1)}\,R\,,\\
p &= A_o\,(t^2+1)^a\,R^{(2\alpha_2+\kappa\alpha_1)/\beta} \quad \text{où} \qquad a\equiv\frac{2[(\alpha_1-\alpha_2)\kappa-\alpha_2]}{\beta}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= \frac{t(x-zU\,sin\,\theta)+(y-zU\,cos\,\theta)}{t^2+1}\,,\\
v &= \frac{t(y-zU\,cos\,\theta)-(x-zU\,sin\,\theta)}{t^2+1}\,,\\
w &= \frac{\alpha_1}{\beta}\,z\left[\frac{R'}{R}+\frac{2t}{(t^2+1)}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= z^{\alpha_2/\alpha_1}\,X\,sin\left(Y-\frac{1}{\alpha_1}\,ln[z]\right)\,,\\
H_2 &= z^{\alpha_2/\alpha_1}\,X\,cos\left(Y-\frac{1}{\alpha_1}\,ln[z]\right)\,,\\
H_3 &= 0\,.
\end{aligned}$$

La fonction R est déterminée par l'EDO :

$$\begin{aligned}
RR''-\frac{2\alpha_2}{\beta}(R')^2-\frac{2\beta}{\alpha_1}\frac{t}{(t^2+1)}RR'-2\beta\alpha_2 A_o(t^2+1)^a\,R^b-\beta\alpha_2\frac{X_o^2}{4\pi}(t^2+1)^{\frac{4\alpha_1}{\beta}}\,R^{\frac{(4\alpha_2+\alpha_1)}{\beta}}\\
-\frac{2}{\beta}[2\alpha_1 t^4+(2\alpha_2+\alpha_1)t^2+\alpha_1-2\alpha_2]\frac{R^2}{(t^2+1)^2}=0\,,
\end{aligned}$$

où $b=\frac{\alpha_1(\kappa-1)+4\alpha_2}{\beta}$, avec $R(s)>0$; A_o, R_o, U_o, et $X_o>0$; V_o, W_o, $Y_o\in I\!R$; $\alpha_1\neq 0$; $\alpha_2\in I\!R$.

II) Pour le cas particulier où $\alpha_1 = 2\alpha_2$. Introduisons les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} U =& U_o[(t^2+1)A]^{-1/(\kappa+1)}\,, \\ V =& V_o - \frac{1}{\alpha_1(\kappa+1)}\, ln\Big[(t^2+1)A\Big]\,, \\ \theta =& V - \frac{1}{\alpha_1}\, ln[z]\,, \\ X =& X_o(t^2+1)^{(1-2\kappa)/(\kappa+1)}\, R^{3/(\kappa+1)}\,, \\ Y =& arctan(t) + V. \end{aligned}$$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont :

$$\begin{aligned} \rho =& \frac{R_o}{z(t^2+1)}\,, \\ p =& zA\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u =& \frac{t(x - zU\, sin\,\theta) + (y - zU\, cos\,\theta)}{t^2+1}\,, \\ v =& \frac{t(y - zU\, cos\,\theta) - (x - zU\, sin\,\theta)}{t^2+1}\,, \\ w =& -\frac{z}{(\kappa+1)}\left[\frac{A'}{A} + \frac{2t}{(t^2+1)}\right]\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1 =& \sqrt{z}\, X\, sin\left(Y - \frac{1}{\alpha_1}\, ln[z]\right)\,, \\ H_2 =& \sqrt{z}\, X\, cos\left(Y - \frac{1}{\alpha_1}\, ln[z]\right)\,, \\ H_3 =& 0\,. \end{aligned}$$

La fonction A est déterminée par l'EDO :

$$\begin{aligned} AA'' - \frac{(\kappa+2)}{(\kappa+1)}(A')^2 - \frac{1}{(\kappa+1)}\frac{2t}{(t^2+1)}AA' - \frac{X_o^2}{4\pi R_o}(t^2+1)^{\frac{(2-\kappa)}{(\kappa+1)}}A^{\frac{(5+2\kappa)}{(\kappa+1)}} - \frac{(\kappa+1)}{R_o^2}(t^2+1)A^3 \\ - \frac{1}{(\kappa+1)}[4t^4 + 2(\kappa+3)t^2 - 2(\kappa+1)]\frac{A^2}{(t^2+1)^2} = 0\,, \end{aligned}$$

où $A(s) > 0$; R_o, U_o, et $X_o > 0$; V_o, W_o, $Y_o \in I\!R$; $\alpha_1 = 2\alpha_2 \neq 0$; $\alpha_1 \in I\!R$.

$$M_{3,12};\ \{J_3 + P_o + H, P_1, P_2\}$$

variable de symétrie: $s = z$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{R_o}{W} \exp\left[2\alpha t - 2\alpha \int \frac{ds}{W}\right], \\
p =& \frac{A_o}{W^\kappa} \exp\left[2\alpha t - 2\alpha \int \frac{ds}{W}\right], \\
u =& U_o\, sin\left(\int \frac{ds}{W} - t + V_o\right), \\
v =& U_o\, cos\left(\int \frac{ds}{W} - t + V_o\right), \\
w =& W, \\
H_1 =& \frac{X_o}{W} \exp\left[\alpha t - \alpha \int \frac{ds}{W}\right] sin\left(\int \frac{ds}{W} + Y_o - t\right), \\
H_2 =& \frac{X_o}{W} \exp\left[\alpha t - \alpha \int \frac{ds}{W}\right] cos\left(\int \frac{ds}{W} + Y_o - t\right), \\
H_3 =& 0.
\end{aligned}$$

La fonction W est donnée implicitement par

$$s + s_o = \begin{cases} \alpha W \dfrac{X_o^2}{R_o} - \left(\dfrac{X_o^2}{\pi A_o} + \dfrac{4}{R_o}\right) {}_2F_1\left(\dfrac{1}{(2-\kappa)}, 1, 1 + \dfrac{1}{(2-\kappa)}, -\dfrac{8\pi A_o}{X_o^2} W^{(2-\kappa)}\right) \\ \qquad - \dfrac{2\alpha}{\kappa} W^4\, {}_2F_1\left(\dfrac{4}{(2-\kappa)}, 1, 1 + \dfrac{4}{(2-\kappa)}, -\dfrac{8\pi A_o}{X_o^2} W^{(2-\kappa)}\right) \quad \text{pour } \kappa \neq 2, \\ \\ \left[\alpha\left(2A_o + \dfrac{X_o^2}{4\pi}\right)\right]^{-1} W\left(\dfrac{R_o}{4} W^2 + \dfrac{X_o^2}{4\pi} - 2A_o\right) \quad \text{pour } \kappa = 2, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

où $A_o > 0$, $R_o > 0$, s_o, U_o, V_o, X_o et $Y_o \in I\!R$; $\alpha_1 > 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \in I\!R$.

$$M_{3,85};\ \{G + \alpha H, K_1, K_2\}$$

variable de symétrie: $s = z$

Pour cette sous-algèbre, nous obtenons deux types de solution MHD.

I) $\alpha \in I\!R$.

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{R_o}{W} t^{-2\alpha} \exp\left[2(\alpha - 2) \int \frac{ds}{W}\right], \\
p =& \frac{A_o}{W^\kappa} t^{-2\alpha} \exp\left[2(\alpha - \kappa) \int \frac{ds}{W}\right],
\end{aligned}$$

$$u = \tfrac{x-U_o}{t}, \qquad H_1 = \tfrac{X_o}{W}\, t^{-\alpha} \exp\left[(\alpha-1)\textstyle\int \tfrac{ds}{W}\right],$$

$$v = \tfrac{y-V_o}{t}, \qquad H_2 = \tfrac{Y_o}{W}\, t^{-\alpha} \exp\left[(\alpha-1)\textstyle\int \tfrac{ds}{W}\right],$$

$$w = \tfrac{W}{t}, \qquad H_3 = 0.$$

La fonction W est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$W^3 W' - W^3 + \frac{A_o}{R_o}[2(\alpha-\kappa)-\kappa W']\, W^{(2-\kappa)} \exp\left[2(2-\kappa)\int \frac{ds}{W}\right] + \frac{X_o^2}{4\pi R_o}[W'+\alpha-1] \exp\left[3\int \frac{ds}{W}\right] = 0$$

où $A_o > 0$, $R_o > 0$, U_o, V_o et $X_o \in I\!R$.

Nous pouvons résoudre cette équation en posant que

$$W = s + C_2, \qquad \text{où} \qquad C_2 \in I\!R.$$

Ce qui fixe $\kappa = 2$ et la constante $A_o = \alpha X_o^2/8\pi(3-\alpha)$ avec $0 < \alpha < 3$.

$$\rho = R_o t^{-2\alpha}(s+C_2)^{(2\alpha-5)}, \qquad u = \tfrac{x-U_o}{t}, \qquad H_1 = \tfrac{X_o}{t^\alpha}(s+C_2)^{\alpha-1}$$

$$p = A_o t^{-2\alpha}(s+C_2)^{-2(\alpha-3)}, \qquad v = \tfrac{y-V_o}{t}, \qquad H_2 = \tfrac{X_o}{t^\alpha}(s+C_2)^{\alpha-1},$$

$$w = \tfrac{s+C_2}{t}, \qquad H_3 = 0,$$

II) Pour $\alpha = 2$, nous considérerons $Z_o \neq 0$ et ainsi obtenir les solution suivantes

$$\rho = R, \qquad u = \frac{x}{t} - \frac{1}{t}[U_o - \frac{Z_o}{4\pi R_o} X], \qquad H_1 = \frac{X}{t^2},$$

$$p = \tfrac{A_o}{t^4}\left(\tfrac{R}{R_o}\right)^\kappa \exp\left[2(2-\kappa)\textstyle\int \tfrac{ds}{R}\right], \qquad v = \frac{y}{t} - \frac{1}{t}[V_o - \frac{Z_o}{4\pi R_o} Y], \qquad H_2 = \frac{Y}{t^2},$$

$$w = \frac{R_o}{Rt}, \qquad H_3 = \frac{Z_o}{t^2}$$

où nous avons introduit les fonctions

$$X = \frac{X_o}{R_o}\frac{R}{[1-\eta_o R]} \exp\left[\frac{1}{R_o}\int \frac{R\, ds}{[1-\eta_o R]}\right], \qquad Y = \frac{Y_o}{R_o}\frac{R}{[1-\eta_o R]} \exp\left[\frac{1}{R_o}\int \frac{R\, ds}{[1-\eta_o R]}\right],$$

où $A_o > 0$, R_o, U_o, V_o X_o, Y_o, $Z_o \in I\!R$; $\eta_o = Z_o^2/4\pi R_o^2$. La fonction R satisfait la relation

$$(1-\eta_o R)\left[R_o^2 + (C_o - R_o s)R\right] + \frac{A_o}{R_o^\kappa}(1-\eta_o R)\, R^{(\kappa+1)} \exp\left[\frac{2(2-\kappa)}{R_o}\int R\, ds\right] + \frac{(X_o^2+Y_o^2)}{8\pi R_o^2} R^3 \exp\left[\frac{2}{R_o}\int \frac{R\, ds}{[1-\eta_o R]}\right] = 0,$$

avec la condition que $R(s) > 0$, $C_o \in I\!R$

$$M_{3,11};\ \{K_3+\beta P_o+\alpha_1 J_3+\alpha_2 H, P_1, P_2\}$$

variable de symétrie: $s = z - \dfrac{t^2}{2\beta}$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{R_o}{W}\exp\left[\frac{2\alpha_2}{\beta}t - \frac{2\alpha_2}{\beta}\int\frac{ds}{W}\right],\\
p =& \frac{A_o}{W^\kappa}\exp\left[\frac{2\alpha_2}{\beta}t - \frac{2\alpha_2}{\beta}\int\frac{ds}{W}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u =& U_o\, sin\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\int\frac{ds}{W} + V_o - \frac{\alpha_1}{\beta}t\right),\\
v =& U_o\, cos\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\int\frac{ds}{W} + V_o - \frac{\alpha_1}{\beta}t\right),\\
w =& W + \frac{t}{\beta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 =& \frac{X_o}{W}\exp\left[\frac{\alpha_2}{\beta}t - \frac{\alpha_2}{\beta}\int\frac{ds}{W}\right] sin\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\int\frac{ds}{W} + Y_o - \frac{\alpha_1}{\beta}t\right),\\
H_2 =& \frac{X_o}{W}\exp\left[\frac{\alpha_2}{\beta}t - \frac{\alpha_2}{\beta}\int\frac{ds}{W}\right] cos\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\int\frac{ds}{W} + Y_o - \frac{\alpha_1}{\beta}t\right),\\
H_3 =& 0.
\end{aligned}$$

La fonction W est donnée implicitement par

$$s + s_o = \begin{cases} \alpha W\dfrac{X_o^2}{R_o} - \left(\dfrac{X_o^2}{\pi A_o} + \dfrac{4}{R_o}\right)\,{}_2F_1\left(\dfrac{1}{(2-\kappa)}, 1, 1 + \dfrac{1}{(2-\kappa)}, -\dfrac{8\pi A_o}{X_o^2}W^{(2-\kappa)}\right) \\ \qquad -\dfrac{2\alpha}{\kappa}W^4\,{}_2F_1\left(\dfrac{4}{(2-\kappa)}, 1, 1 + \dfrac{4}{(2-\kappa)}, -\dfrac{8\pi A_o}{X_o^2}W^{(2-\kappa)}\right) \quad \text{pour } \kappa \neq 2, \\ \\ \left[\alpha\left(2A_o + \dfrac{X_o^2}{4\pi}\right)\right]^{-1} W\left(\dfrac{R_o}{4}W^2 + \dfrac{X_o^2}{4\pi} - 2A_o\right) \quad \text{pour } \kappa = 2, \end{cases} \tag{3.3.2}$$

où $A_o > 0$, $R_o > 0$, s_o, U_o, V_o, X_o et $Y_o \in I\!R$; $\alpha_1 > 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha_2 \in I\!R$.

$$M_{3,29};\ \{F+G+\beta P_o+\alpha H, P_1, P_2\}$$

variable de symétrie: $s = z\,e^{-\frac{t}{\beta}}$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{R_o}{G}\exp\left[\frac{2(\alpha-1)}{\beta}t + (1-2\alpha)\int\frac{ds}{G}\right],\\
p =& \frac{A_o}{G^{\kappa}}\exp\left[\frac{2\alpha t}{\beta} - (2\alpha+\kappa)\int\frac{ds}{G}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u =& U_o\ \exp\left[\frac{t}{\beta} - \int\frac{ds}{G}\right],\\
v =& V_o\ \exp\left[\frac{t}{\beta} - \int\frac{ds}{G}\right],\\
w =& \frac{1}{\beta}\,e^{\frac{t}{\beta}}[G+s],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 =& \frac{X_o}{G}\exp\left[\frac{\alpha}{\beta}t - (1+\alpha)\int\frac{ds}{G}\right],\\
H_2 =& \frac{Y_o}{G}\exp\left[\frac{\alpha}{\beta}t - (1+\alpha)\int\frac{ds}{G}\right],\\
H_3 =& 0.
\end{aligned}$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle :

$$G^3G' + 2G^3 + sG^2 - \frac{\beta A_o}{R_o}[\kappa G' + \kappa + 2\alpha]G^{(2-\kappa)}\exp\left[-(1+\kappa)\int\frac{ds}{G}\right] + \\ - \frac{\beta(X_o^2+Y_o^2)}{4\pi R_o}[G'+1+\alpha]\exp\left[-3\int\frac{ds}{G}\right] = 0.$$

$R_o > 0$, $A_o > 0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o \in I\!R$; $\beta \neq 0$; $\alpha \in I\!R$.

$$M_{3,34};\ \{J_3 + \alpha_1(F+G) + P_o + \alpha_2 H, P_1, P_2\}$$

variable de symétrie: $s = ze^{-\alpha_1 t}$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{R_o}{G}\exp\left[2(\alpha_2-\alpha_1)t + (\alpha_1 - 2\alpha_2)\int\frac{ds}{G}\right],\\
p =& \frac{A_o}{G^{\kappa}}\exp\left[2\alpha_2 t + (\kappa\alpha_1 + 2\alpha_2)\int\frac{ds}{G}\right],
\end{aligned}$$

$$u = U_o \exp\left[\alpha_1 t - \alpha_1 \int \frac{ds}{G}\right] sin\left(\int \frac{ds}{G} + V_o - t\right),$$
$$v = U_o \exp\left[\alpha_1 t - \alpha_1 \int \frac{ds}{G}\right] cos\left(\int \frac{ds}{G} + V_o - t\right),$$
$$w = e^{\alpha_1 t}\left[G + \alpha_1 s\right],$$

$$H_1 = \frac{X_o}{G} \exp\left[\alpha_2 t - (\alpha_1 + \alpha_2) \int \frac{ds}{G}\right] sin\left(\int \frac{ds}{G} + Y_o - t\right),$$
$$H_2 = \frac{X_o}{G} \exp\left[\alpha_2 t - (\alpha_1 + \alpha_2) \int \frac{ds}{G}\right] cos\left(\int \frac{ds}{G} + Y_o - t\right),$$
$$H_3 = 0.$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$G^3 G' + 2\alpha_1 G^3 + \alpha_1^2 s G^2 - \frac{A_o}{R_o}\left[\kappa G' + 2\alpha_2 + \kappa\alpha_1\right] G^{(2-\kappa)} \exp\left[-\alpha_1(\kappa+1) \int \frac{ds}{G}\right] - \frac{X_o^2}{4\pi R_o}\left[G' + \alpha_1 + \alpha_2\right] \exp\left[-3\alpha_1 \int \frac{ds}{G}\right] = 0$$

où $A_o > 0$, $R_o > 0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o \in I\!R$, $\alpha_1 \neq 0$; $\alpha_2 \in I\!R$.

$M_{3,51}$; $\{F + G + \gamma P_o + \alpha H, K_1 + \beta P_2, P_1\}$

variable de symétrie: $s = z\, e^{-\frac{t}{\gamma}}$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont données par :

$$\rho = \frac{R_o}{G} \exp\left[\frac{2(\alpha - 1)}{\gamma} t + (1 - 2\alpha) \int \frac{ds}{G}\right],$$
$$p = \frac{A_o}{G^\kappa} \exp\left[\frac{2\alpha t}{\gamma} - (2\alpha + \kappa) \int \frac{ds}{G}\right],$$

$$u = \frac{1}{\beta}\left[y - e^{\frac{t}{\gamma}} U_o \exp\left[-\int \frac{ds}{G}\right]\right],$$
$$v = e^{\frac{t}{\gamma}} V_o \exp\left[-\int \frac{ds}{G}\right],$$
$$w = \frac{t}{\gamma} e^{\frac{t}{\gamma}} \left[G + s\right],$$

$$H_1 = \left[\frac{1}{\beta} \int \frac{ds}{G} + X_o\right] \exp\left[\frac{\alpha}{\gamma} t - (1 + \alpha) \int \frac{ds}{G}\right],$$
$$H_2 = \frac{Y_o}{G} \exp\left[\frac{\alpha}{\gamma} t - (1 + \alpha) \int \frac{ds}{G}\right],$$
$$H_3 = 0.$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle :

$$G^3G'+2G^3+sG^2-\frac{\beta A_o}{R_o}[\kappa G'+\kappa+2\alpha]G^{(2-\kappa)}\exp\left[-(1+\kappa)\int\frac{ds}{G}\right]+$$
$$-\frac{\gamma Y_o^2}{4\pi\beta^2 R_o}\left[\int\frac{ds}{G}+\beta X_o-[G'+1+\alpha]\left[\left(\int\frac{ds}{G}+\beta X_o\right)^2+\beta^2\right]\right]\exp\left[-3\int\frac{ds}{G}\right]=0.$$

$R_o>0$, $A_o>0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o\in I\!R$, $\gamma\neq 0$; $\alpha\in I\!R$.

$$M_{3,86};\ \{G+P_1+\alpha_1 P_3+\alpha_2 H, K_1, K_2\}$$

variable de symétrie: $s=\alpha_1\, ln[t]+z$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont données par

$$\rho=\frac{R_o}{G}t^{2(1-2\alpha_2)}\exp\left[2(\alpha_2-2)\int\frac{ds}{G}\right],$$
$$p=\frac{A_o}{G^\kappa}t^{-2\alpha_2}\exp\left[2(\alpha_2-\kappa)\int\frac{ds}{G}\right],$$

$$u=\frac{1}{t}\left[ln[t]+x-U_o+\int\frac{ds}{G}\right],$$
$$v=\frac{y-V_o}{t},$$
$$w=\frac{G-\alpha_1}{t},$$

$$H_1=\frac{X_o}{G}t^{-\alpha_2}\exp\left[(\alpha_2-1)\int\frac{ds}{G}\right],$$
$$H_2=\frac{Y_o}{G}t^{-\alpha_2}\exp\left[(\alpha_2-1)\int\frac{ds}{G}\right],$$
$$H_3=0.$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle :

$$G^3G'-G^3+\alpha_1 G^2-\frac{A_o}{R_o}[\kappa G'+2(\alpha_2-2)]\,G^{(2-\kappa)}\exp\left[2(2-\kappa)\int\frac{ds}{G}\right]+$$
$$-\frac{(X_o^2+Y_o^2)}{4\pi R_o}[G'+1-\alpha_2]\exp\left[2\int\frac{ds}{G}\right]=0.$$

$R_o>0$, $A_o>0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o\in I\!R$, $\alpha_1\geq 0$; $\alpha_2\in I\!R$.

$M_{3,87}$; $\{G+\beta P_3+\alpha H, K_1, K_2\}$

variable de symétrie: $s=\beta\, ln[t]+z$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont données par

$$\begin{aligned}
\rho =&\frac{R_o}{G} t^{2(1-2\alpha)} \exp\left[2(\alpha-2)\int\frac{ds}{G}\right],\\
p =&\frac{A_o}{G^\kappa} t^{-2\alpha} \exp\left[-2(\alpha-\kappa)\int\frac{ds}{G}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u =&\frac{x-U_o}{t},\\
v =&\frac{y-V_o}{t},\\
w =&\frac{G-\beta}{t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 =&\frac{X_o}{G} t^{-\alpha} \exp\left[(\alpha-1)\int\frac{ds}{G}\right],\\
H_2 =&\frac{Y_o}{G} t^{-\alpha} \exp\left[(\alpha-1)\int\frac{ds}{G}\right],\\
H_3 =&0\,.
\end{aligned}$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle :

$$\begin{aligned}
G^3G'-G^3{+}\beta G^2-\frac{A_o}{R_o}\left[\kappa G'+2(\alpha-2)\right]G^{(2-\kappa)}\exp\left[2(2-\kappa)\int\frac{ds}{G}\right]+\\
-\frac{(X_o^2+Y_o^2)}{4\pi R_o}[G'+1-\alpha]\exp\left[2\int\frac{ds}{G}\right]=0.
\end{aligned}$$

$R_o>0$, $A_o>0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o\in I\!R$, $\beta\geq 0$; $\alpha\in I\!R$.

$M_{3,91}$; $\{J_3+\alpha_1(F+G)+P_o+\alpha_2 H, K_1, K_2\}$

variable de symétrie:$s=\ \nu\, ln[t]+z$ où $\nu\equiv\frac{\beta}{\alpha_1}$

Les solutions MHD sont

$$\begin{aligned}
\rho =&\frac{R_o}{G} t^{2(1-\nu\alpha_2)} \exp\left[2(\nu\alpha_2-2)\int\frac{ds}{G}\right],\\
p =&\frac{A_o}{G^\kappa} t^{-2\nu\alpha_2} \exp\left[2(\nu\alpha_2-\kappa)\int\frac{ds}{G}\right],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u =& \frac{x}{t} - \frac{U_o}{t} \sin\left(V_o - \nu \int \frac{ds}{G} + \nu \ln[t]\right) , \\
v =& \frac{y}{t} - \frac{U_o}{t} \cos\left(V_o - \nu \int \frac{ds}{G} + \nu \ln[t]\right) , \\
w =& \frac{1}{t}\Big[G - \nu\Big] ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_1 =& \frac{X_o}{G} t^{-\nu\alpha_2} \exp\left[-\nu(\alpha_2+1)\int \frac{ds}{G}\right] \sin\left(Y_o - \nu \int \frac{ds}{G} + \nu \ln[t]\right) , \\
H_2 =& \frac{X_o}{G} t^{-\nu\alpha_2} \exp\left[-\nu(\alpha_2+1)\int \frac{ds}{G}\right] \cos\left(Y_o - \nu \int \frac{ds}{G} + \nu \ln[t]\right) , \\
H_3 =& 0 .
\end{aligned}
$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$
\begin{aligned}
G^3G' - G^3 + \nu G^2 - \frac{A_o}{R_o}\Big[\kappa G' + 2(\kappa - \nu\alpha_2)\Big] G^{(2-\kappa)} \exp\left[2(2-\kappa)\int \frac{ds}{G}\right] \\
- \frac{X_o^2}{4\pi R_o}\Big[G' + \nu(\alpha_2+1)\Big] \exp\left[4 + 2(2-\nu)\int \frac{ds}{G}\right] = 0,
\end{aligned}
$$

où A_o, R_o, U_o, $X_o > 0$, V_o et $Y_o \in I\!R$; α_1, $\alpha_2 \in I\!R$, $\beta \neq 0$.

Pour résoudre cette équation intégro-différentielle, nous posons que

$$G = C_1 s + C_2 \quad \text{où} \quad C_1, C_2 \in I\!R.$$

Il en résulte les solutions MHD particulières suivantes

$$
\begin{aligned}
\rho =& R_o t^{2(1-\nu\alpha_2)} (C_1 s + C_2)^{(2\nu\alpha_2 - 5)} , \\
p =& A_o t^{-2\nu\alpha_2} (C_1 s + C_2)^{(2\nu\alpha_2 - 3\kappa)} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u =& \frac{x}{t} - \frac{U_o}{t} \sin\left(V_o + \nu \ln\left[\frac{t}{s}\right]\right) , \\
v =& \frac{y}{t} - \frac{U_o}{t} \cos\left(V_o + \nu \ln\left[\frac{t}{s}\right]\right) , \\
w =& \frac{1}{t}\Big[C_1 s + C_2 - \nu\Big] ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_1 =& \frac{X_o}{t^{\nu\alpha_2}} (C_1 s + C_2)^{-\nu(\alpha_2+1)-1} \sin\left(Y_o + \nu \ln\left[\frac{t}{s}\right]\right) , \\
H_2 =& \frac{X_o}{t^{\nu\alpha_2}} (C_1 s + C_2)^{-\nu(\alpha_2+1)-1} \cos\left(Y_o + \nu \ln\left[\frac{t}{s}\right]\right) , \\
H_3 =& 0 .
\end{aligned}
$$

On distingue quatre types de solutions MHD qui correspondent aux valeurs de C_1.

1.a) $C_1 = 1,\ \kappa = 4/3,\ \nu = 1/(1+2\alpha_2)$.

La constante R_o est reliée à A_o et X_o par la relation

$$R_o = (3\alpha_2 + 2)\left[2A_o + \frac{X_o^2}{4\pi}\right] ;$$

indiquant un couplage entre la densité et la pression du fluide, et le champ magnétique. La valeur particulière $\alpha_2 = -1/2$ implique que $X_o \equiv 0$: ce qui correspond au cas hydrodynamique. $\alpha_2 \in \,]-2/3, -1/2[\, \cup \,]-1/2, +\infty[$

1.b) $C_1 = 1,\ \kappa = 4/3,\ \nu = -1/(1+\alpha_2)$.

La constante R_o est donnée par

$$R_o = -2(3\alpha_2 + 2)A_o ,$$

où $\alpha_2 < -2/3$, $A_o > 0$. Le champ magnétique $\vec{H}$ produit une force de Lorentz nulle.

2.a). $C_1 = \dfrac{2(2-\kappa)}{\kappa}, \qquad \kappa = \dfrac{6}{[3 - \nu(1+2\alpha_2)]}.$

Les constantes A_o et X_o sont données par

$$A_o = \frac{\nu C_1^{\kappa}}{[\kappa + 2(\kappa - \nu\alpha_2)]}, \qquad X_o^2 = \frac{4\pi C_1^3 (C_1 - 1) R_o}{[1 + \nu(\alpha_2 + 1)]} :$$

ici il y a couplage entre la densité du fluide et le champ magnétique.

2 b). $C_1 = 2 - \nu(1+\alpha_2), \qquad \kappa = \dfrac{(4 - C_1)}{(C_1 + 2)}.$

Les constantes R_o et X_o sont données par

$$R_o = \frac{[\kappa + 2(\kappa - \nu\alpha_2)]}{(C_1 - 1)} C_1^{-(1+\kappa)} A_o , \qquad X_o^2 = \frac{4\pi\nu C_1^2}{[1 + \nu(\alpha_2 + 1)]}.$$

$$M_{3,21};\ \{F + \beta K_3 + \alpha H, P_1, P_2\}$$

variable de symétrie: $s = \beta\, ln[t] - \frac{z}{t}$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont données par

$$\rho = \frac{R_o}{G} t^{2\alpha} \exp\left[-(2\alpha + 1) \int \frac{ds}{G}\right],$$
$$p = \frac{A_o}{G^{\kappa}} t^{2\alpha} \exp\left[-(2\alpha + \kappa) \int \frac{ds}{G}\right],$$

$$u = U_o\,, \qquad H_1 = \tfrac{X_o}{G} t^{\alpha} \exp\left[-(\alpha+1)\int \tfrac{ds}{G}\right],$$

$$v = V_o\,, \qquad H_2 = \tfrac{Y_o}{G} t^{\alpha} \exp\left[-(\alpha+1)\int \tfrac{ds}{G}\right],$$

$$w = \beta\, ln[t] + \beta - (G+s)\,, \qquad H_3 = 0\,.$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$G^3[G'+1] - \beta G^2 + (1-\kappa)\frac{A_o}{R_o} G^{(2-\kappa)}[1+G'] \exp\left[(1-\kappa)\int \frac{ds}{G}\right] - \frac{(X_o^2+Y_o^2)}{4\pi R_o}[1+\alpha+G'] \exp\left[-\int \frac{ds}{G}\right] = 0.$$

$R_o > 0$, $A_o > 0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o \in I\!R$, $\beta \neq 0$; $\alpha \in I\!R$.

$$M_{3,36};\ \{J_3 + \alpha_1 F + K_3 + \alpha_2 H, P_1, P_2\}$$

variable de symétrie: $s = \frac{1}{\alpha_1}\, ln[t] - \frac{z}{t}$

Les solutions MHD sont

$$\rho = \frac{R_o}{G} t^{2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \exp\left[-\frac{2}{\alpha_1}(\alpha_2+\alpha_1)\int \frac{ds}{G}\right],$$

$$p = \frac{A_o}{G^{\kappa}} t^{2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \exp\left[-\frac{2}{\alpha_1}(\alpha_2+\kappa\alpha_1)\int \frac{ds}{G}\right],$$

$$u = U_o \exp\left[-\int \frac{ds}{G}\right] sin\left(V_o + \frac{1}{\alpha_1}\int \frac{ds}{G} - \frac{1}{\alpha_1}\, ln[t]\right),$$

$$v = U_o \exp\left[-\int \frac{ds}{G}\right] cos\left(V_o + \frac{1}{\alpha_1}\int \frac{ds}{G} - \frac{1}{\alpha_1}\, ln[t]\right),$$

$$w = \frac{1}{\alpha_1}\, ln[t] + \frac{1}{\alpha_1} - [G+s],$$

$$H_1 = \frac{X_o}{G} t^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \exp\left[-\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2+\alpha_1)\int \frac{ds}{G}\right] sin\left(Y_o + \frac{1}{\alpha_1}\int \frac{ds}{G} - \frac{1}{\alpha_1}\, ln[t]\right),$$

$$H_2 = \frac{X_o}{G} t^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \exp\left[-\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2+\alpha_1)\int \frac{ds}{G}\right] cos\left(Y_o + \frac{1}{\alpha_1}\int \frac{ds}{G} - \frac{1}{\alpha_1}\, ln[t]\right),$$

$$H_3 = 0\,.$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$G^3G' + G^3 - \frac{G^2}{\alpha_1} - \frac{A_o}{R_o}\left[\kappa G' + \frac{2\alpha_2}{\alpha_1} + \kappa\right] G^{(2-\kappa)} \exp\left[(1-\kappa)\int \frac{ds}{G}\right] - \frac{X_o^2}{4\pi R_o}\left[G' + \frac{2\alpha_2}{\alpha_1} + 1\right] \exp\left[-\int \frac{ds}{G}\right] = 0$$

où $A_o > 0$, $R_o > 0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o \in I\!R$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \in I\!R$.

$$M_{3,93};\quad \{J_3+\alpha_1 F+K_3+\alpha_2 H, K_1, K_2\}$$

variable de symétrie: $s=\frac{1}{\alpha_1}ln[t]-\frac{z}{t}$

Les solutions MHD sont

$$\begin{aligned}
\rho =&\frac{R_o}{G}t^{2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\exp\left[-\frac{1}{\alpha_1}(2\alpha_2+\alpha_1)\int\frac{ds}{G}\right],\\
p =&\frac{A_o}{G^\kappa}t^{2\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\exp\left[-\frac{1}{\alpha_1}(2\alpha_2+3\kappa\alpha_1)\int\frac{ds}{G}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u =&\frac{x}{t}-U_o\exp\left[-\int\frac{ds}{G}\right]sin\left(V_o+\frac{1}{\alpha_1}\int\frac{ds}{G}-\frac{1}{\alpha_1}ln[t]\right),\\
v =&\frac{y}{t}-U_o\exp\left[-\int\frac{ds}{G}\right]cos\left(V_o+\frac{1}{\alpha_1}\int\frac{ds}{G}-\frac{1}{\alpha_1}ln[t]\right),\\
w =&\frac{1}{\alpha_1}ln[t]+\frac{1}{\alpha_1}-[G+s],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 =&\frac{X_o}{G}t^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\exp\left[-\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2+2\alpha_1)\int\frac{ds}{G}\right]sin\left(Y_o+\frac{1}{\alpha_1}\int\frac{ds}{G}-\frac{1}{\alpha_1}ln[t]\right),\\
H_2 =&\frac{X_o}{G}t^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\exp\left[-\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2+2\alpha_1)\int\frac{ds}{G}\right]cos\left(Y_o+\frac{1}{\alpha_1}\int\frac{ds}{G}-\frac{1}{\alpha_1}ln[t]\right),\\
H_3 =&0.
\end{aligned}$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$\begin{aligned}
G^3G'+G^3-\frac{G^2}{\alpha_1}-\frac{A_o}{R_o}\left[\kappa G'+\frac{2\alpha_2}{\alpha_1}+3\kappa\right]G^{(2-\kappa)}\exp\left[3(1-\kappa)\int\frac{ds}{G}\right]\\
-\frac{X_o^2}{4\pi R_o}\left[G'+\frac{2\alpha_2}{\alpha_1}\right]\exp\left[-\int\frac{ds}{G}\right]=0
\end{aligned}$$

où $A_o>0$, $R_o>0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o\in I\!R$, $\alpha_1\neq 0$; $\alpha_2\in I\!R$.

$$M_{3,18};\ \{F+\alpha H, P_1, P_2\}$$

variable de symétrie: $s=\frac{z}{t}$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont données par

$$\begin{aligned}
&\rho=\frac{R_o}{G}t^{2\alpha}\exp\left[-(2\alpha+1)\int\frac{ds}{G}\right], && u=U_o, && H_1=\frac{X_o}{G}t^{\alpha}\exp\left[-(\alpha+1)\int\frac{ds}{G}\right],\\
&p=\frac{A_o}{G^\kappa}t^{2\alpha}\exp\left[-(2\alpha+\kappa)\int\frac{ds}{G}\right], && v=V_o, && H_2=\frac{X_o}{G}t^{\alpha}\exp\left[-(\alpha+1)\int\frac{ds}{G}\right],\\
& && w=G+s, && H_3=0.
\end{aligned}$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$G^3[G'+1]+(1-\kappa)A_oG^{(2-\kappa)}[1+G']\exp\left[(1-\kappa)\int\frac{ds}{G}\right]-\frac{(X_o^2+Y_o^2)}{4\pi R_o}[1+\alpha+G']\exp\left[-\int\frac{ds}{G}\right]=0.$$

$R_o > 0,\ A_o > 0,\ U_o,\ V_o,\ X_o$ et $Y_o \in I\!R,\ \alpha \in I\!R.$

$$M_{3,28};\ \{F + \alpha G + \beta H, P_1, P_2\}$$

variable de symétrie: $s = \frac{z^\sigma}{t}$ où $\sigma \equiv 1 - \alpha \neq 0$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont données par

$$\begin{aligned}
\rho =& t^{\frac{2(\beta-\alpha)}{\sigma}} \frac{R_o}{G} \exp\left[\frac{1}{\sigma}[2(\alpha-\beta)-1] \int \frac{s^{\frac{\alpha}{\sigma}}}{G}\, ds\right],\\
p =& t^{2\frac{\beta}{\sigma}} \frac{A_o}{G^\kappa} \exp\left[-\frac{1}{\sigma}(2\beta+\kappa) \int \frac{s^{\frac{\alpha}{\sigma}}}{G}\, ds\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u =& t^{\frac{\alpha}{\sigma}} U_o \exp\left[-\frac{\alpha}{\sigma} \int \frac{s^{\frac{\alpha}{\sigma}}}{G}\, ds\right],\\
v =& t^{\frac{\alpha}{\sigma}} V_o \exp\left[-\frac{\alpha}{\sigma} \int \frac{s^{\frac{\alpha}{\sigma}}}{G}\, ds\right],\\
w =& \frac{1}{\sigma} t^{\frac{\alpha}{\sigma}} [G + s^{\frac{1}{\sigma}}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 =& t^{\frac{\beta}{\sigma}} \frac{X_o}{G} \exp\left[-\frac{(1+\beta)}{\sigma} \int \frac{s^{\frac{\alpha}{\sigma}}}{G}\, ds\right],\\
H_2 =& t^{\frac{\beta}{\sigma}} \frac{Y_o}{G} \exp\left[-\frac{(1+\beta)}{\sigma} \int \frac{s^{\frac{\alpha}{\sigma}}}{G}\, ds\right],\\
H_3 =& 0\,.
\end{aligned}$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$\begin{aligned}
G[(\alpha+1)s^{\frac{\alpha}{\sigma}} + \sigma G'] + \alpha s^{\frac{\alpha+1}{\sigma}} - \sigma^3 \frac{A_o}{G^\kappa}\left[\frac{(\kappa+2\beta)}{\sigma} s^{\frac{\alpha}{\sigma}} + \kappa G'\right] \exp\left[\frac{(1-2\alpha-\kappa)}{\sigma} \int \frac{s^{\frac{\alpha}{\sigma}}}{G}\, ds\right] +\\
- \frac{\sigma^3}{4\pi R_o} \frac{(X_o^2+Y_o^2)}{G^2}\left[\frac{(1+\beta)}{\sigma} s^{\frac{\alpha}{\sigma}} + G'\right] \exp\left[-\frac{(1+2\alpha)}{\sigma} \int \frac{s^{\frac{\alpha}{\sigma}}}{G}\, ds\right] = 0.
\end{aligned}$$

$R_o > 0,\ A_o > 0,\ U_o,\ V_o,\ X_o$ et $Y_o \in I\!R,\ \alpha \neq 0,\ \beta \in I\!R.$

$$M_{3,33};\ \{J_3 + \alpha_1 F + \alpha_2 G + \alpha_3 H, P_1, P_2\}$$

variable de symétrie: $s = z/t^{\beta\alpha_1}$ où $\beta = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)}$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont données par

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{R_o}{G} t^{2\beta(\alpha_3-\alpha_2)} \exp\left[\beta[2(\alpha_2-\alpha_3)-\alpha_1] \int \frac{ds}{G}\right],\\
p =& \frac{A_o}{G^\kappa} t^{2\beta\alpha_3} \exp\left[-[\beta(2\alpha_3+\kappa\alpha_1)] \int \frac{ds}{G}\right],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u =&U_o t^{\beta\alpha_2} \exp\left[-\beta\alpha_1 \int \frac{ds}{G}\right] sin\left(V_o + \beta \int \frac{ds}{G} - \beta\, ln[t]\right),\\
v =&U_o t^{\beta\alpha_2} \exp\left[-\beta\alpha_1 \int \frac{ds}{G}\right] cos\left(V_o + \beta \int \frac{ds}{G} - \beta\, ln[t]\right),\\
w =&t^{\beta\alpha_2}[\beta\alpha_1 s + G],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_1 =&\frac{X_o}{G}\, t^{\beta\alpha_3} \exp\left[-\beta(\alpha_1+\alpha_3) \int \frac{ds}{G}\right] sin\left(Y_o + \beta \int \frac{ds}{G} - \beta\, ln[t]\right),\\
H_2 =&\frac{X_o}{G}\, t^{\beta\alpha_3} \exp\left[-\beta(\alpha_1+\alpha_3) \int \frac{ds}{G}\right] cos\left(Y_o + \beta \int \frac{ds}{G} - \beta\, ln[t]\right),\\
H_3 =&0\,.
\end{aligned}
$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$
\begin{aligned}
G^3[G' + &\beta(\alpha_1+\alpha_2)] + \beta\alpha_1\alpha_2 s G^2 - \frac{X_o^2}{4\pi R_o}\left[G' + \beta(2\alpha_1+\alpha_3-\alpha_1)\right]\exp\left[\beta(2-3\alpha_1)\int\frac{ds}{G}\right]\\
&- \kappa\frac{A_o}{R_o}\left[G' + \beta(\alpha_1+2\alpha_3)+2\right]G^{(2-\kappa)}\exp\left[\beta[(1-\kappa)(\alpha_1+2)-2\alpha_2]\int\frac{ds}{G}\right] = 0\,,
\end{aligned}
$$

où $A_o > 0$, $R_o > 0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o \in I\!R$, α_1 ou $\alpha_2 \neq 0$; $\quad \alpha_1 \neq \alpha_2$; $\quad \alpha_3 \in I\!R$.

$$M_{3,48};\ \{F + \alpha_1 G + \alpha_2 H, K_1, P_1 + \beta P_2\}$$

variable de symétrie: $s = \frac{z^\sigma}{t}$ où $\sigma \equiv 1 - \alpha_1 \neq 0$

Soient les fonctions suivantes :

$$
\begin{aligned}
V =&V_o \exp\left[-\frac{\alpha_1}{\sigma}\int\frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\,ds\right], \quad U = U_o \exp\left[-\frac{1}{\sigma}\int\frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\,ds\right] - V\,,\\
Y =&\frac{Y_o}{G}\exp\left[\frac{1}{\sigma}(\alpha_1-\alpha_2-2)\int\frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\,ds\right], \quad X = \frac{1}{\beta}Y + \frac{X_o}{G}\exp\left[\frac{-1}{\sigma}(\alpha_2+1)\int\frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\,ds\right].
\end{aligned}
$$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont données par

$$
\begin{aligned}
&\rho = \frac{R_o}{G}t^{2(\alpha_2-\alpha_1)/\sigma}\exp\left[\frac{1}{\sigma}[3\alpha_1 - 2(\alpha_2+1)]\int\frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\,ds\right], && u = \frac{x}{t} - \frac{t^{\alpha_1/\sigma}}{\beta}U\,, && H_1 = t^{\alpha_2/\sigma}X\,,\\
&p = \frac{A_o}{G^\kappa}t^{2\alpha}\exp\left[-(2\alpha+\kappa)\int\frac{ds}{G}\right], && v = t^{\alpha_1/\sigma}V\,, && H_2 = t^{\alpha_2/\sigma}Y\,,\\
& && w = G + s\,, && H_3 = 0\,.
\end{aligned}
$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$
G[(\alpha_1+1)s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}} + \sigma G'] + \frac{\sigma^3 A_o}{R_o G^\kappa}\left[\kappa G' + \frac{s^{\frac{1}{\sigma}}}{\sigma} + a s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}\right]\exp\left[b\int\frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}ds\right] + \alpha_1 s^{\frac{\alpha_1+1}{\sigma}} + \frac{1}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[X^2+Y^2\right] = 0,
$$

où $a = 2\alpha_2/\sigma + \kappa$, $b = [3(1-\kappa) - 2\alpha_1(\kappa-2)]/\sigma$, $R_o > 0$, $A_o > 0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o \in I\!R$, $\alpha_1 \neq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha_2 \in I\!R$.

$$M_{3,49};\ \{F + \alpha_1 G + \alpha_2 H, K_1, P_2\}$$

variable de symétrie: $s = \frac{z^\sigma}{t}$ où $\sigma \equiv 1 - \alpha_1 \neq 0$

Soient les fonctions suivantes :

$$X = \frac{X_o}{G} \exp\left[\frac{1}{\sigma}(\alpha_2 + 1) \int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right], \qquad Y = \frac{Y_o}{G} \exp\left[\frac{-1}{\sigma}(\alpha_1 - \alpha_2 - 2) \int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right].$$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont données par

$$\rho = \frac{R_o}{G} t^{\frac{2}{\sigma}(\alpha_2 - \alpha_1)} \exp\left[\frac{1}{\sigma}[3\alpha_1 - 2(\alpha_2+1)] \int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right],$$
$$p = \frac{A_o}{G^\kappa} t^{\frac{2\alpha_2}{\sigma}} \exp\left[\frac{1}{\sigma}[\kappa(\alpha_1 - 2) - 2\alpha_2] \int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right],$$

$$u = \frac{x}{t} - \frac{t^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{\beta} U_o \exp\left[-\frac{1}{\sigma} \int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right], \qquad H_1 = t^{\frac{\alpha_2}{\sigma}} X,$$
$$v = t^{\frac{\alpha_1}{\sigma}} V_o \exp\left[-\frac{\alpha_1}{\sigma} \int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right], \qquad H_2 = t^{\frac{\alpha_2}{\sigma}} Y,$$
$$w = t^{\frac{\alpha_1}{\sigma}} [G + s^{\frac{1}{\sigma}}], \qquad H_3 = 0.$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$G[(\alpha_1+1)s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}} + \sigma G'] + \frac{\sigma^3 A_o}{R_o G^\kappa}\left[\kappa G' + \frac{s^{\frac{1}{\sigma}}}{\sigma} + a s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}\right] \exp\left[b \int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G} ds\right] + \alpha_1 s^{\frac{\alpha_1+1}{\sigma}} + \frac{1}{8\pi}\frac{d}{ds}[X^2 + Y^2] = 0,$$

où $a = 2\alpha_2/(\sigma + \kappa)$, $b = [3(1-\kappa) - 2\alpha_1(\kappa - 2)]/\sigma$; $R_o > 0$, $A_o > 0$; U_o, V_o, X_o et $Y_o \in I\!R$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \in I\!R$.

$$M_{3,88};\ \{F + \alpha_1 G + \alpha_2 H, K_1, K_2\}$$

variable de symétrie: $s = \frac{z^\sigma}{t}$ où $\sigma \equiv 1 - \alpha_1 \neq 0$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont données par

$$\rho = \frac{R_o}{G} t^{\frac{2}{\sigma}(\alpha_2 - \alpha_1)} \exp\left[\frac{1}{\sigma}[4\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3] \int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right],$$
$$p = \frac{A_o}{G^\kappa} t^{2\frac{\alpha_2}{\sigma}} \exp\left[\frac{1}{\sigma}[\kappa(2\alpha_1 - 3) - 2\alpha_2] \int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right],$$

$$u = \frac{x}{t} - U_o t^{\frac{\alpha_1}{\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{\sigma}\int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right], \qquad H_1 = \frac{X_o}{G} t^{\frac{\alpha_2}{\sigma}} \exp\left[\frac{1}{\sigma}(\alpha_1 - \alpha_2 - 2)\int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right],$$

$$v = \frac{y}{t} - V_o t^{\frac{\alpha_1}{\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{\sigma}\int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right], \qquad H_2 = \frac{Y_o}{G} t^{\frac{\alpha_2}{\sigma}} \exp\left[\frac{1}{\sigma}(\alpha_1 - \alpha_2 - 2)\int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right],$$

$$w = \frac{1}{\sigma} t^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}[G + s^{\frac{1}{\sigma}}], \qquad H_3 = 0.$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$G[(\alpha_1+1)s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}} + \sigma G'] - \frac{\sigma^3}{4\pi R_o}\frac{(X_o^2+Y_o^2)}{G^2}\left[\frac{1}{\sigma}(\alpha_2 - \alpha_1 + 2)s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}} + G'\right]\exp\left[-\frac{(1+2\alpha_1)}{\sigma}\int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right]$$
$$+\alpha_1 s^{\frac{\alpha_1+1}{\sigma}} - \sigma^3 \frac{A_o}{R_o G^\kappa}\left[\frac{[3\kappa + 2(\alpha_2-\alpha_2)]}{\sigma} s^{\frac{\alpha}{\sigma}} + \kappa G'\right]\exp\left[\frac{[3(1-\kappa) - 2\alpha_1(\kappa-2)]}{\sigma}\int \frac{s^{\frac{\alpha_1}{\sigma}}}{G}\, ds\right] = 0,$$

où $R_o > 0$, $A_o > 0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o \in I\!R$, $\alpha_1 \neq 0$; $\alpha_2 \in I\!R$

$$M_{3,90};\ \{J_3 + \alpha_1 F + \alpha_2 G + \alpha_3 H, K_1, K_2\}$$

variable de symétrie: $s = z/t^{\beta\alpha_1}$ où $\beta = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)}$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont données par

$$\rho = \frac{R_o}{G} t^{2\beta(\alpha_3-\alpha_2)} \exp\left[-\beta[2(\alpha_3-\alpha_2) + 2 + \alpha_1]\int \frac{ds}{G}\right],$$
$$p = \frac{A_o}{G^\kappa} t^{2\beta\alpha_3} \exp\left[-[\kappa(\beta\alpha_1 + 2) + 2\beta\alpha_3]\int \frac{ds}{G}\right],$$

$$u = \frac{x}{t} - U_o t^{\beta\alpha_2} \exp\left[-\beta\alpha_1 \int \frac{ds}{G}\right] sin\left(V_o + \beta\int\frac{ds}{G} - \beta\, ln[t]\right),$$
$$v = \frac{y}{t} - U_o t^{\beta\alpha_2} \exp\left[-\beta\alpha_1 \int \frac{ds}{G}\right] cos\left(V_o + \beta\int\frac{ds}{G} - \beta\, ln[t]\right),$$
$$w = t^{\beta\alpha_2}[\beta\alpha_1 s + G],$$

$$H_1 = \frac{X_o}{G} t^{\beta\alpha_3} \exp\left[-\beta(2\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2)\int\frac{ds}{G}\right] sin\left(Y_o + \beta\int\frac{ds}{G} - \beta\, ln[t]\right),$$
$$H_2 = \frac{X_o}{G} t^{\beta\alpha_3} \exp\left[-\beta(2\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2)\int\frac{ds}{G}\right] cos\left(Y_o + \beta\int\frac{ds}{G} - \beta\, ln[t]\right),$$
$$H_3 = 0.$$

La fonction G est déterminée par l'équation intégro-différentielle

$$G^3[G' + \beta(\alpha_1+\alpha_2)] + \beta\alpha_1\alpha_2 s G^2 - \frac{X_o^2}{4\pi R_o}\left[G' + \beta(2\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_1)\right]\exp\left[\beta(2-3\alpha_1)\int\frac{ds}{G}\right]$$
$$-\kappa\frac{A_o}{R_o}\left[G' + \beta(\alpha_1 + 2\alpha_3) + 2\right]G^{(2-\kappa)}\exp\left[\beta[(1-\kappa)(\alpha_1+2) - 2\alpha_2]\int\frac{ds}{G}\right] = 0,$$

où $A_o > 0$, $R_o > 0$, U_o, V_o, X_o et $Y_o \in I\!R$, α_1 ou $\alpha_2 \neq 0$; $\alpha_1 \neq \alpha_2$; $\alpha_3 \in I\!R$.

L'analyse physique de toutes ces solutions permet de dégager certaines propriétés du fluide et du champ magnétique $\vec{H}$ qui sont communes à l'ensemble des solutions obtenues.

- L'écoulement du fluide est compressible (sauf pour $M_{3,14}$) et est non stationnaire.
- Le champ magnétique $\vec{H}$ circule dans le plan (xOy) et dépend seulement de t et z. Conséquemment la force de Lorentz dérive du gradient de pression magnétique et est dirigée suivant $\vec{e}_3$; les forces de tension $(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H}$ sont nulles. La circulation du fluide est donc préservée par le théorème de Kelvin.
- Le courant de conduction $\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \vec{H}$ circule dans le plan (xOy) et est perpendiculaire au champ magnétique $\vec{H}$.
- $\vec{F}_m \cdot \vec{v} \neq 0$ indique la présence d'un couplage entre les effets magnétiques et hydrodynamiques.

Tableau 3.3. Solutions des systèmes réduits ayant en commun comme contrainte sur les composantes de $\vec{H}$

$$\boxed{\beta\gamma X - \beta Y + (1-\gamma t)Z = 0}$$

où β et γ sont des coefficients qui dépendent de la sous-algèbre considérée.

Variables de symétrie	No. des sous-algèbres
$s = t$	$M_{3,53}, M_{3,54}, M_{3,56}, M_{3,89}$

$$M_{3,53};\ \{F+G+\alpha H,\ K_1+P_2+\beta P_3,\ P_1+\gamma P_2\}$$

variable de symétrie: $s=t$

Il existe deux types de solution MHD liés à la valeur de $\alpha \in I\!R$.

I) Pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$, on introduit le coefficient $\nu = 1/(\frac{1}{2}\alpha - 1)$ et les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
U =& R^\nu\left[\beta\alpha\gamma\int\left\{2A_oR^{\kappa\nu}+\frac{R^{2\nu}}{4\pi}\left[\left(X_o+\frac{Z_o}{\beta}t\right)^2+Y_o^2+Z_o^2\right]\right\}dt+\int R^{-\nu}W\,dt+U_o\right],\\
V =& R^\nu\left[\alpha\int\left\{2A_oR^{\kappa\nu}+\beta\frac{R^{2\nu}}{4\pi}\left[\left(X_o+\frac{Z_o}{\beta}t\right)^2+Y_o^2+Z_o^2\right]\right\}dt+V_o\right],\\
W =& R^\nu\left[\alpha\int(1-\gamma t)\left\{2A_oR^{\kappa\nu}+\frac{R^{2\nu}}{4\pi}\left[\left(X_o+\frac{Z_o}{\beta}t\right)^2+Y_o^2+Z_o^2\right]\right\}dt+W_o\right],
\end{aligned}$$

où

$$R = R_o\exp\left[\frac{1}{\nu}\int[\gamma U+\beta V-(1-\gamma t)W]\,dt\right]$$

$\gamma \geq 0$; $\beta \in I\!R$, R_o, A_o, U_o, V_o et W_o sont des constantes arbitraires réelles; X_o,Y_o et Z_o sont des constantes réelles qui satisfont la relation

$$\beta\gamma X_o - \beta Y_o + Z_o = 0\,.$$

Les solutions MHD sont données par

$$\begin{aligned}
\rho =& R\left[\beta(\gamma x-y)+(1-\gamma t)z\right]^{2(\alpha-1)},\\
p =& A_oR^{\nu(\kappa-\gamma)}\left[\beta(\gamma x-y)+(1-\gamma t)z\right]^{2\alpha},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u =& \frac{1}{\beta}\left[z-[\beta(\gamma x-y)+(1-\gamma t)z]U\right],\\
v =& [\beta(\gamma x-y)+(1-\gamma t)z]\,V\,,\\
w =& [\beta(\gamma x-y)+(1-\gamma t)z]\,W\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 =& [X_o+\frac{Z_o}{\beta}t]\,R^{\nu(1+\alpha)}\left[\beta(\gamma x-y)+(1-\gamma t)z\right]^\alpha,\\
H_2 =& \beta Y_o\,R^{\nu(1+\alpha)}\left[\beta(\gamma x-y)+(1-\gamma t)z\right]^\alpha,\\
H_3 =& Z_o\,R^{\nu(1+\alpha)}\left[\beta(\gamma x-y)+(1-\gamma t)z\right]^\alpha.
\end{aligned}$$

II) Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on redéfinit les fonctions U, V et W en introduisant $\mu = 1/(\kappa+1)$

$$
\begin{aligned}
U =& A^{\mu}\left[\beta\gamma \int \left\{ \frac{A^{\kappa\mu}}{R_o^2} + \frac{1}{8\pi} A^{[(1-\kappa)\mu]} \left[\left(X_o + \frac{Z_o}{\beta} t \right)^2 + Y_o^2 + Z_o^2 \right] \right\} dt + \int A^{-\mu} W \, dt + U_o \right], \\
V =& A^{\mu}\left[\beta \int \left\{ \frac{A^{\kappa\mu}}{R_o^2} + \frac{1}{8\pi} A^{[(1-\kappa)\mu]} \left[\left(X_o + \frac{Z_o}{\beta} t \right)^2 + Y_o^2 + Z_o^2 \right] \right\} dt + V_o \right], \\
W =& A^{\mu}\left[\int (1-\gamma t) \left\{ \frac{A^{\kappa\mu}}{R_o^2} + \frac{1}{8\pi} \left[\left(X_o + \frac{Z_o}{\beta} t \right)^2 + Y_o^2 + Z_o^2 \right] \right\} dt + W_o \right],
\end{aligned}
$$

où

$$
A = A_o \exp\left[\frac{1}{\mu} \int [\gamma U + \beta V - (1-\gamma t) W] \, dt\right],
$$

$\gamma \geq 0$; $\beta \in I\!R$, R_o, A_o, U_o, V_o et $W_o \in I\!R$; X_o, Y_o et Z_o sont des constantes réelles qui satisfont la relation

$$
\beta\gamma X_o - \beta Y_o + Z_o = 0\,.
$$

Les solutions du système MHD sont données par :

$$
\begin{aligned}
\rho =& \frac{R_o}{[\beta(\gamma x - y) + (1-\gamma t) z]}, \\
p =& [\beta(\gamma x - y) + (1-\gamma t) z]\, A\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u =& \frac{1}{\beta}\Big[z - [\beta(\gamma x - y) + (1-\gamma t) z] U \Big], \\
v =& [\beta(\gamma x - y) + (1-\gamma t) z]\, V\,, \\
w =& [\beta(\gamma x - y) + (1-\gamma t) z]\, W\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_1 =& [X_o + \frac{Z_o}{\beta} t]\, A^{\frac{3}{2}\mu} \Big[\beta(\gamma x - y) + (1-\gamma t) z\Big]^{\frac{1}{2}}, \\
H_2 =& \beta Y_o\, A^{\frac{3}{2}\mu} \Big[\beta(\gamma x - y) + (1-\gamma t) z\Big]^{\frac{1}{2}}, \\
H_3 =& Z_o\, A^{\frac{3}{2}\mu} \Big[\beta(\gamma x - y) + (1-\gamma t) z\Big]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

$M_{3,54}$; $\{F+G+\alpha H, K_1+P_3, P_1+\beta P_2\}$

variable de symétrie: $s=t$

Il existe deux types de solution MHD liés à la valeur de $\alpha \in I\!R$.

I) Pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$, introduisons le coefficient $\nu = 1/(\frac{1}{2}\alpha - 1)$ et les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
U =& R^\nu\left[\beta\alpha\int\left\{2A_oR^{\kappa\nu}+\frac{R^{2\nu}}{4\pi}[(X_o+Z_ot)^2+\beta^2X_o^2+Z_o^2]\right\}\,dt+\int R^{-\nu}W\,dt+U_o\right],\\
V =& R^\nu\left[\alpha\int\left\{2A_oR^{\kappa\nu}+\frac{R^{2\nu}}{4\pi}[(X_o+Z_ot)^2+\beta^2X_o^2+Z_o^2]\right\}\,dt+V_o\right],\\
W =& R^\nu\left[\beta\alpha\int t\left\{2A_oR^{\kappa\nu}+\frac{R^{2\nu}}{4\pi}[(X_o+Z_ot)^2+\beta^2X_o^2+Z_o^2]\right\}\,dt+W_o\right],
\end{aligned}$$

où

$$R = R_o\exp\left[\frac{1}{\nu}\int[\beta U+V+\beta tW]dt\right],$$

$\beta \geq 0$; R_o, A_o, U_o, V_o, W_o; X_o, Y_o et Z_o sont des constantes arbitraires réelles.

Les solutions MHD sont données par

$$\begin{aligned}
&\rho = [\beta(x-tz)-y]^{2(\alpha-1)}\,R, && u = z-[\beta(x-tz)-y]U, && H_1 = [X_o+tZ_o][\beta(x-tz)-y]^\alpha R^{\nu(1+\alpha)},\\
&p = A_oR^{\nu(\kappa+2\alpha)}[\beta(x-tz)-y]^{2\alpha}, && v = [\beta(x-tz)-y]V, && H_2 = \beta X_o[\beta(x-tz)-y]^\alpha R^{\nu(1+\alpha)},\\
& && w = [\beta(x-tz)-y]W, && H_3 = Z_o[\beta(x-tz)-y]^\alpha R^{\nu(1+\alpha)}.
\end{aligned}$$

II) Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, introduisons le coefficient $\mu = 1/(\kappa+1)$ et les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
U =& A^\mu\left[\beta\int\left\{\frac{A^{\kappa\mu}}{R_o^2}+\frac{1}{8\pi}A^{[(1-\kappa)\mu]}\,[(X_o+Z_ot)^2+\beta^2X_o^2+Z_o^2]\right\}\,dt+\int A^{-\mu}W\,dt+U_o\right],\\
V =& A^\mu\left[\beta\int\left\{\frac{A^{\kappa\mu}}{R_o^2}+\frac{1}{8\pi}A^{[(1-\kappa)\mu]}\,[(X_o+Z_ot)^2+\beta^2X_o^2+Z_o^2]\right\}\,dt+V_o\right],\\
W =& A^\mu\left[\beta\int t\left\{\frac{A^{\kappa\mu}}{R_o^2}+\frac{1}{8\pi}A^{[(1-\kappa)\mu]}\,[(X_o+Z_ot)^2+\beta^2X_o^2+Z_o^2]\right\}\,dt+W_o\right],
\end{aligned}$$

où

$$A = \exp\left[\frac{1}{\mu}\int[\beta U+V+\beta tW]dt\right],$$

$\beta \geq 0$; R_o, A_o, U_o, V_o, W_o; X_o, Y_o et Z_o sont des constantes arbitraires réelles.

Les solutions du système MHD sont données par

$$\rho = \frac{R_o}{[\beta(x-tz)-y]}, \quad u = z - [\beta(x-tz)-y]U, \quad H_1 = \Big[X_o[\beta(x-tz)-y]^{\alpha} + tZ_o\Big] A^{\frac{3}{2}\mu},$$
$$p = [\beta(x-tz)-y]\,A, \quad v = [\beta(x-tz)-y]V, \quad H_2 = \beta X_o[\beta(x-tz)-y]^{\frac{1}{2}} A^{\frac{3}{2}\mu},$$
$$w = [\beta(x-tz)-y]W, \quad H_3 = Z_o[\beta(x-tz)-y]^{\frac{1}{2}} A^{\frac{3}{2}\mu}.$$

$M_{3,56}$; $\{F+G+\alpha H,\, K_1+P_3,\, P_2\}$

variable de symétrie: $s = t$

Il existe trois types de solution MHD liés à la valeur de $\alpha \in I\!R$.

I) Si $\alpha = 0$, introduisons les fonctions

$$R(t) = R_o \exp\Big[-U_o t\Big], \quad M(t) = \eta_o \exp\Big[\frac{W_o}{R} + W_o U_o t\Big], \quad Z(t) = Z_o + \int dt M,$$

où $R_o > 0$ et U_o, V_o, η_o et Z_o sont des constantes arbitraires réelles.

Les solutions MHD sont données par

$$\rho = \frac{R_o}{(x-tz)^2}, \quad u = z - \frac{(U_o - W_o t)}{R}(x-tz), \quad H_1 = \frac{1}{W_o}\Big[RM - [U_o - tW_o]Z\Big],$$
$$p = A_o[x-tz]R^{-(\kappa+2)}, \quad v = \frac{V_o(x-tz)}{R}, \quad H_2 = \Big[Z\exp\Big[\frac{1}{R}\Big] + Y_o\Big]\exp\Big[\frac{U_o}{R}\Big],$$
$$w = \frac{W_o(x-tz)}{R}, \quad H_3 = Z,$$

II) Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, introduisons le coefficient $\nu = 1/(\frac{1}{2}\alpha - 1)$ et les fonctions suivantes :

$$U = R^{\nu}\Big[\alpha\int\Big\{2A_oR^{\kappa\nu} + \frac{R^{2\nu}}{4\pi}[Y_o^2 + Z_o^2(t^2+1)]\Big\}\,dt + \int R^{-\nu}W\,dt + U_o\Big], \quad V = V_oR^{\nu},$$
$$W = R^{\nu}\Big[\alpha\int t\Big\{2A_oR^{\kappa\nu} + \frac{R^{2\nu}}{4\pi}[Y_o^2 + Z_o^2(t^2+1)]\Big\}\,dt + W_o\Big],$$

où

$$R = R_o\exp\Big[\frac{1}{\nu}\int[U + tW]\,dt\Big],$$

R_o, A_o, U_o, V_o, W_o; X_o, Y_o et Z_o sont des constantes arbitraires réelles.

Dans ce cas, les solutions MHD sont données par

$$\rho = (x-tz)^{2(\alpha-1)}R, \quad u = z - (x-tz)U, \quad H_1 = X_o(x-tz)^{\alpha}tR^{\nu(1+\alpha)},$$
$$p = A_o(x-tz)^{2\alpha}R^{\nu(\kappa+2\alpha)}, \quad v = (x-tz)V, \quad H_2 = Y_o(x-tz)^{\alpha}R^{\nu(1+\alpha)},$$
$$w = (x-tz)W, \quad H_3 = Z_o(x-tz)^{\alpha}R^{\nu(1+\alpha)},$$

III) Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, introduisons le coefficient $\mu = 1/(\kappa+1)$ et les fonctions suivantes :

$$U = A^{\mu}\left[\int \left\{\frac{A^{\kappa\mu}}{R_o^2} + \frac{1}{8\pi} A^{[(1-\kappa)\mu]}\,[Y_o^2 + Z_o^2(t^2+1)]\right\} dt + \int A^{-\mu} W\, dt + U_o\right], \quad V = V_o A^{\mu},$$
$$W = A^{\mu}\left[\int t\left\{\frac{A^{\kappa\mu}}{R_o^2} + \frac{1}{8\pi} A^{[(1-\kappa)\mu]}\,[Y_o^2 + Z_o^2(t^2+1)]\right\} dt + W_o\right],$$

où

$$A = \exp\left[\frac{1}{\mu}\int dt[U + tW]\right],$$

R_o, A_o, U_o, V_o, W_o; X_o, Y_o et Z_o sont des constantes arbitraires réelles.

Les solutions MHD sont données par

$$\rho = \frac{R_o}{(x-tz)}, \qquad u = z - (x-tz)\,U, \qquad H_1 = X_o(x-tz)^{\frac{1}{2}} t\, A^{\frac{3}{2}\mu},$$
$$p = (x-tz)A, \qquad v = (x-tz)\,V, \qquad H_2 = Y_o\,(x-tz)^{\frac{1}{2}}\, A^{\frac{3}{2}\mu},$$
$$w = (x-tz)\,W, \qquad H_3 = Z_o(x-tz)^2\, A^{\frac{3}{2}\mu}.$$

$$M_{3,89};\ \{F + G + \alpha H, K_1 + \alpha_1 P_2 + \alpha_2 P_3, K_2 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \beta_3 P_3\}$$

variable de symétrie: $s = t$

On définit les fonctions suivantes :

$$C(t) = \beta_1\alpha_2 - \beta_3 t, \quad B(t) = \alpha_2 t + \alpha_2\beta_2 - \beta_3\alpha_1, \quad \xi = C(t)(\alpha_2 y - \alpha_1 z) - B(t)(\alpha_2 x - tz),$$

où $\alpha_i, \beta_i \in I\!R$; α_i et β_i ne sont jamais nuls simultanément. Il existe quatre types de solution qui dépendent des valeurs respectives de α et β_3.

I) Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$ et $\beta_3 \neq 0$, soient $\nu \equiv 1/(\ 2\alpha - 1)$ et $\sigma = \alpha_2\beta_1/\beta_3$ et

$$U = \frac{R^{\nu}}{C^{\sigma}}\left[\beta_1 \int R^{-\nu} C^{\sigma-1}\, W\, dt - \alpha\alpha_2 \int C^{\sigma}\, B\, t\left\{2A_o R^{\kappa\nu} + R^{2\nu}\frac{\mathcal{H}^2}{4\pi}\right\} dt + U_o\right],$$
$$V = R^{\nu}\left[\alpha_2 \int \frac{U}{Ct} R^{-\nu}\, dt + \int \frac{Wt}{C} R^{-\nu}\, dt - \alpha\alpha_2 \int C\left\{2A_o R^{\kappa\nu} + R^{2\nu}\frac{\mathcal{H}^2}{4\pi}\right\} dt + V_o\right],$$
$$W = R^{\nu}\left[\int [\alpha_1 C - Bt]\left\{2(\alpha-1)\, A_o R^{\kappa\nu} + \alpha R^{2\nu}\frac{\mathcal{H}^2}{4\pi}\right\} dt + W_o\right],$$

avec

$$R = R_o \exp\left[\frac{1}{\nu}\int \left[\alpha_2 \frac{B}{t} U + \alpha_2\, CV + [B\,t - \alpha_1 C]W - \frac{\beta_3}{C}\right] dt\right],$$

où

$$\mathcal{H}^2 \equiv \left[\frac{\beta_1}{\beta_3} Z_o + X_o C(t)\right]^2 + \left[\left(\frac{Z_o}{\beta_3} + \alpha_2 X_o\right) t + Y_o\right]^2 + Z_o^2\,;$$

R_o, A_o, U_o, V_o, et $W_o \in I\!R$; X_o,Y_o et $Z_o \in I\!R$ et satisfont la relation :

$$[\alpha_2\beta_2 - \beta_3\alpha_1]\, X_o - Y_o + \frac{\beta_2}{\beta_3} Z_o = 0\,.$$

Les solutions MHD sont données par

$$\begin{aligned}
\rho =& \xi^{2(\alpha-1)}\, R\,,\\
p =& A_o \xi^{2\alpha}\, R^{\nu(\kappa+2\alpha)}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u =& \frac{x}{t} - \frac{1}{t}\left[\xi U + \frac{\beta_1}{C}(\alpha_2 x - tz)\right],\\
v =& \xi V + \frac{1}{C}(\alpha_2 x - tz)\,,\\
w =& \xi W\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 =& \xi^\alpha \left[\frac{\beta_1}{\beta_3} Z + X_o C\, R^{\nu(1+\alpha)}\right],\\
H_2 =& \xi^\alpha \left[\left(\frac{Z_o}{\beta_3} + \alpha_2 X_o\right) t + Y_o\, R^{\nu(1+\alpha)}\right],\\
H_3 =& Z_o\, \xi^\alpha\, R^{\nu(1+\alpha)}\,,
\end{aligned}$$

II) Si $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta_3 \neq 0$, soient $\mu = 1/(\kappa+1)$, $\sigma = \alpha_2\beta_1/\beta_3$ et les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
U =& \frac{A^\mu}{C^\sigma}\left[\beta_1 \int A^{-\mu} C^{\sigma-1}\, W\, dt - \frac{\alpha_2}{2}\int C^\sigma B(t)\, t\left\{\frac{2A^{\kappa\mu}}{R_o^2} + A^{[(1-\kappa)\mu]}\frac{\mathcal{H}^2}{4\pi}\right\} dt + U_o\right],\\
V =& A^\mu\left[\alpha_2 \int \frac{U}{Ct} A^{-\mu}\, dt + \int \frac{Wt}{C} A^{-\mu}\, dt - \frac{\alpha_2}{2}\int C\left\{\frac{2A^{\kappa\mu}}{R_o^2} + A^{[(1-\kappa)\mu]}\frac{\mathcal{H}^2}{4\pi}\right\} dt + V_o\right],\\
W =& A^\mu\left[\int [\alpha_1 C - Bt]\left\{A^{[(1-\kappa)\mu]}\frac{\mathcal{H}^2}{8\pi} - \frac{A^{\kappa\mu}}{R_o^2}\right\} dt + W_o\right],
\end{aligned}$$

avec

$$A = \exp\left[-\frac{1}{\mu}\int dt\left[\alpha_2 \frac{B}{t} U + \alpha_2\, CV + [B\, t - \alpha_1\, C] W - \frac{\beta_3}{C}\right]\right],$$

où

$$\mathcal{H}^2 \equiv \left[\frac{\beta_1}{\beta_3} Z_o + X_o C(t)\right]^2 + \left[\left(\frac{Z_o}{\beta_3} + \alpha_2 X_o\right) t + Y_o\right]^2 + Z_o^2\,,$$

R_o, A_o, U_o, V_o, et $W_o \in I\!R$; X_o, Y_o et $Z_o \in I\!R$ et satisfont la relation

$$[\alpha_2\beta_2 - \beta_3\alpha_1]\,X_o - Y_o + \frac{\beta_2}{\beta_3}Z_o = 0\,.$$

Les solutions MHD sont données par

$$\rho = \frac{R_o}{\xi}\,, \qquad u = \frac{x}{t} - \frac{1}{t}\left[\xi U + \frac{\beta_1}{C}(\alpha_2 x - tz)\right], \qquad H_1 = \sqrt{\xi}\left[\frac{\beta_1}{\beta_3}Z + X_o C\, A^{\frac{3}{2}\mu}\right],$$
$$p = \xi\, A\,, \qquad v = \xi V + \frac{1}{C}(\alpha_2 x - tz)\,, \qquad H_2 = \sqrt{\xi}\,[\frac{Z}{\beta_3} + \alpha_2 X]t + Y_o\, A^{\frac{3}{2}\mu}\,,$$
$$w = \xi W\,, \qquad H_3 = Z_o\sqrt{\xi}\, A^{\frac{3}{2}\mu}\,,$$

III) Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$ et $\beta_3 \equiv 0$, soit $\nu = 1/(\,2\alpha - 1)$ et les fonctions suivantes :

$$U = R^{\nu}e^{t}\left[\frac{1}{\alpha_2}\int e^{-t}R^{-\nu}W\,dt - \alpha\alpha_2\int e^{-t}B\,t[2A_oR^{\kappa\nu} + R^{2\nu}\frac{\mathcal{H}^2}{4\pi}\,]\,dt + U_o\right],$$
$$V = R^{\nu}\left[\frac{1}{\beta_1}\int\frac{U}{t}R^{-\nu}\,dt + \frac{1}{\beta_1\alpha_2}\int W\,t R^{-\nu}\,dt - \alpha\beta_1(\alpha_2)^2\int[2A_oR^{\kappa\nu} + R^{2\nu}\frac{\mathcal{H}^2}{4\pi}\,]\,dt + V_o\right],$$
$$W = R^{\nu}\left[\int[\alpha_1\,C - Bt]\left\{2(\alpha - 1)\,A_oR^{\kappa\nu} + \alpha R^{2\nu}\frac{\mathcal{H}^2}{4\pi}\right\}\,dt + W_o\right],$$

avec

$$R = R_o\exp\left[\frac{1}{\nu}\int\left[\alpha_2\frac{B}{t}U + \alpha_2\,CV + [B\,t - \alpha_1 C]W\right]\,dt\right],$$

où

$$\mathcal{H}^2 \equiv \left[\frac{t}{\alpha_2}Z_o + X_o\right]^2 + \left[\frac{t}{\beta_1}X_o + Y_o\right]^2 + Z_o^2\,,$$

R_o, A_o, U_o, V_o, et $W_o \in I\!R$; X_o,Y_o et $Z_o \in I\!R$ et satisfont la relation

$$\alpha_2[\beta_2\,X_o - \beta_1 Y_o] + \alpha_1\beta_1 Z_o = 0.$$

Les solutions MHD sont données par

$$\rho = \xi^{2(\alpha-1)}\,R\,, \qquad u = \frac{x}{t} - \frac{1}{t}\left[\xi U + \frac{1}{\alpha_2}(\alpha_2 x - tz)\right], \qquad H_1 = \xi^{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha_2}tZ + X_o\,R^{\nu(1+\alpha)}\right],$$
$$p = A_o\xi^{2\alpha}\,R^{\nu(\kappa+2\alpha)}\,, \qquad v = \xi V + \frac{1}{\beta_1\alpha_2}(\alpha_2 x - tz)\,, \qquad H_2 = \xi^{\alpha}\left[\frac{1}{\beta_1}X_o\,t + Y_o\right]R^{\nu(1+\alpha)}\,,$$
$$w = \xi W\,, \qquad H_3 = Z_o\,\xi^{\alpha}\,R^{\nu(1+\alpha)}\,.$$

IV) Si $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta_3 \equiv 0$, soit $\mu = 1/(\kappa+1)$ et les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
U =& A^{\mu}e^{t}\left[\frac{1}{\alpha_2}\int e^{-t}A^{-\mu}W\,dt - \alpha\alpha_2\int e^{-t}B\,t\left[\frac{2A^{\kappa\mu}}{R_o^2} + A^{[\mu(1-\kappa)]}\frac{\mathcal{H}^2}{4\pi}\right]dt + U_o\right],\\
V =& A^{\mu}\left[\frac{1}{\beta_1}\int\frac{A^{-\mu}}{t}U\,dt + \frac{1}{\beta_1\alpha_2}\int W t A^{-\mu}\,dt - \alpha\beta_1(\alpha_2)^2\int[\frac{2A^{\kappa\mu}}{R_o} + A^{[\mu(1-\kappa)]}\frac{\mathcal{H}^2}{4\pi}]\,dt + V_o\right],\\
W =& A^{\mu}\left[\int[\alpha_2\alpha_1\beta_1 C - Bt]\left\{A^{[(1-\kappa)\mu]}\frac{\mathcal{H}^2}{8\pi} - \frac{A^{\kappa\mu}}{R_o^2}\right\}dt + W_o\right],
\end{aligned}$$

avec

$$A = \exp\left[-\frac{1}{\mu}\int dt\left[\alpha_2\frac{B}{t}U + \alpha_1\alpha_2\beta_1 V + [B\,t - \alpha_1\alpha_2\beta_1]W\right]\right]$$

où

$$\mathcal{H}^2 \equiv \left[\frac{t}{\alpha_2}Z_o + X_o\right]^2 + \left[\frac{t}{\beta_1}X_o + Y_o\right]^2 + Z_o^2,$$

R_o, A_o, U_o, V_o, et $W_o \in I\!R$; X_o,Y_o et $Z_o \in I\!R$ et satisfont la relation :

$$\alpha_2[\beta_2\,X_o - \beta_1 Y_o] + \alpha_1\beta_1 Z_o = 0\,.$$

Les solutions MHD sont données par

$$\begin{aligned}
&\rho = \tfrac{R_o}{\xi}\,, && u = \tfrac{x}{t} - \tfrac{1}{t}\left[\xi U + \tfrac{1}{\alpha_2}(\alpha_2 x - tz)\right], && H_1 = \xi^{\frac{1}{2}}\left[\tfrac{1}{\alpha_2}tZ + X_o A^{\frac{3}{2}\mu}\right],\\
&p = \xi A\,, && v = \xi V + \tfrac{1}{\beta_1\alpha_2}(\alpha_2 x - tz)\,, && H_2 = \xi^{\frac{1}{2}}\left[\tfrac{1}{\beta_1}X_o t + Y_o\right]A^{\frac{3}{2}\mu}\,,\\
& && w = \xi W\,, && H_3 = Z_o\,\xi^{\frac{1}{2}}\,A^{\frac{3}{2}\mu}.
\end{aligned}$$

L'analyse physique de ces solutions nous permet de déduire les faits suivants.

• L'écoulement du fluide est compressible, non stationnaire et tridimensionnel.

• La force de Lorentz $\vec{F}_m$ ne dépend que de t (à l'exception du cas (I) de la sous-algèbre $M_{3,56}$ où elle nulle). La circulation du fluide est donc conservée par le théorème de Kelvin.

• Il existe deux types de solutions qui dépendent des coefficients de la sous-algèbre étudiés. Pour le premier type : la densité, les composantes de la vitesse $\vec{v}$ et l'intensité magnétique $|\vec{H}|$ sont couplées l'une à l'autre, la pression est reliée à la densité via la fonction R. Dans l'autre type, la pression remplace la densité pour le couplage entre $\vec{v}$ et $|\vec{H}|$, la densité n'est reliée à aucune de ces quantités (*i.e.* $R = R_o$).

• $\vec{F}_m \cdot \vec{v} \neq 0$ indique la présence d'un couplage entre les effets magnétiques et hydrodynamiques.

Tableau 3.4. Solutions des systèmes réduits ayant en commun comme contrainte sur les composantes de $\vec{H}$

$$\boxed{\beta X + \gamma Y + \frac{dZ}{ds} = 0}$$

où β et γ sont des coefficients qui dépendent de la sous-algèbre considérée.

Variables de symétrie	No. des sous-algèbres
$s = z$	$M_{3,23}$
$s = ln[t] + z$	$M_{3,25}$
$s = ln[t] - \frac{z}{t}$	$M_{3,84}$
$s = \frac{z}{t}$	$M_{3,37}, M_{3,83}$

La résolution des systèmes réduits associés à type de sous-algèbre s'avère être difficile. On peut le constater en prenant comme exemple la sous-algèbre $\{P_o + \alpha H, P_1 + \beta H, P_2 + \beta H\}$ (qui ne figure pas dans le tableau (3.1)) où $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$; il s'agit tout simplement des trois générateurs de translation auxquels s'ajoutent le centre H de l'algèbre de symétrie des équations MHD. Le calculs des invariants de cette sous-algèbre nous donne la variable de symétrie $s = z$ et les orbites de groupe :

$$\begin{array}{lll}
\rho = R(s)\exp\left[2(\alpha t + \beta x + \gamma y)\right], & u = U(s), & H_1 = X(s)\exp\left[\alpha t + \beta x + \gamma y\right], \\
p = A(s)\rho, & v = V(s), & H_2 = Y(s)\exp\left[\alpha t + \beta x + \gamma y\right], \\
 & w = W(s), & H_2 = Z(s)\exp\left[\alpha t + \beta x + \gamma y\right].
\end{array}$$

En remplaçant ces orbites de groupe dans le système MHD (1.1.17), nous obtenons un système réduit qui est similaire aux systèmes réduits associés aux sous-algèbres du tableau 3.4.

Système réduit

pour la sous-algèbre

$M_3\,\{P_o+\alpha H,\ P_1+\beta H,\ P_2+\gamma\, H\}$

variable de symétrie: $s=z$

$\frac{W}{R}\frac{dR}{ds}+\frac{dW}{ds}+2\beta U+2\gamma V+2\alpha=0$
$RW\frac{dU}{ds}+2\beta\, A+\frac{1}{4\pi}\left[\beta[Y^2+Z^2]-\left[\gamma YX+\frac{dX}{ds}Z\right]\right]=0$
$RW\frac{dV}{ds}+2\gamma\, A+\frac{1}{4\pi}\left[\gamma[X^2+Z^2]-\left[\beta XY+\frac{dY}{ds}Z\right]\right]=0$
$RW\frac{dW}{ds}+\frac{dA}{ds}+\frac{1}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[X^2+Y^2\right]-\frac{1}{8\pi}[\beta X+\gamma Y]Z=0$
$\frac{W}{A}\frac{dA}{ds}+\kappa\frac{dW}{ds}+2\beta U+2\gamma V+2\alpha=0$
$[\beta U+\gamma V+\alpha]X+\frac{d}{ds}\left[WX\right]-Z\frac{d}{ds}\left[U\right]=0$
$[\beta U+\gamma V+\alpha]Y+\frac{d}{ds}\left[WY\right]-Z\frac{d}{ds}\left[V\right]=0$
$[\beta U+\gamma V+\alpha]Z+W\frac{dZ}{ds}=0$
$\beta X+\gamma Y+\frac{dZ}{ds}=0$

Par substitutions et éliminations succesives, nous parvenons aux solutions MHD :

$$\rho=\frac{Z^2}{Z_o^2}\frac{1}{W}\exp\left[2(\alpha t+\beta x+\gamma y)\right],\quad u=\left[W\frac{X}{Z}+U_o\right],\qquad H_1=X(s)\exp\left[2(\alpha t+\beta x+\gamma y)\right],$$
$$p=\frac{A_o}{Z_o^2}\frac{Z^2}{W^\kappa}\exp\left[2(\alpha t+\beta x+\gamma y)\right],\quad v=\left[W\frac{Y}{Z}-\frac{1}{\gamma}(\alpha+\beta U_o)\right],\ H_2=Y(s)\exp\left[2(\alpha t+\beta x+\gamma y)\right],$$
$$w=W(s),\qquad H_3=Z(s)\exp\left[2(\alpha t+\beta x+\gamma y)\right],$$

où A_o et $Z_o\in I\!R$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in I\!R$, les fonctions X et Y s'expriment en termes

$$X=-\frac{1}{(\beta^2+\gamma^2)}\left[\beta\frac{dZ}{ds}+\varepsilon\gamma\sqrt{\Delta}\right],\quad Y=-\frac{1}{\gamma}\left[\beta X+\frac{dZ}{ds}\right],\qquad \varepsilon=\pm1,$$

pour lesquelles on a introduit la fonction

$$\Delta=\left(\frac{4\pi}{Z_o^2}\left[\frac{d}{ds}\left[\frac{W}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]-\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]-(\beta^2+\gamma^2)\left[\frac{8\pi A_o}{Z_o^2W^\kappa}+1\right]-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]\right)Z^2-\left(\frac{dZ}{ds}\right)^2>0\,.$$

Les fonctions inconnues W et Z sont déterminées par les deux EDO :

$$\begin{aligned}&\frac{d^2G}{ds^2}+2\left[\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{ds}+\eta+\frac{(\beta^2+\gamma^2)}{\eta}\right]\frac{dG}{ds}+\left[\frac{1}{\eta}\frac{d^2\eta}{ds^2}+2\frac{d\eta}{ds}\right]G=0\,,\\&\eta^3-\frac{1}{G}\frac{dG}{ds}\eta^2+\frac{(G+G_o)}{2G_o}\Lambda\,\eta+\frac{(\beta^2+\gamma^2)}{2G_o}+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{ds}\left[\Lambda G\right]=0\,,\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

où pour abrèger les expressions nous avons adopté les notations suivantes :

$$G = W - G_o, \quad \eta = \frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}, \quad \Lambda = (\beta^2+\gamma^2)\left[\frac{2A_o}{G(G+G_o)^\kappa} + \frac{G_o}{G}\right] + \frac{G_o}{C_o^2}\frac{1}{G^3}\,;\ G_o = Z_o^2/4\pi, \ C_o \in I\!R.$$

Étant donnée la complexité du système d'EDO (3.3.3), nous avons dû poser certaines hypothèses pour pouvoir le résoudre. Ainsi en considérant $W=0$, nous obtenons

$$\rho = R(z)\exp\left[2(\alpha t + \beta x + \gamma y)\right],$$
$$p = \frac{1}{8\pi}\frac{C_o^2}{\eta_o^2(\beta^2+\gamma^2)}[\eta_o^2 - (\zeta_o^2+\beta^2+\gamma^2)]\, sin^2\,(\eta_o z + \theta_o)\,\exp\left[2(\alpha t + \beta x + \gamma y)\right],$$

$$u = U_o\,, \quad v = -\frac{1}{\gamma}(\alpha + \beta U_o)\,, \quad w = 0\,,$$

$$H_1 = -\frac{C_o}{\eta_o(\beta^2+\gamma^2)}\Big[\beta\eta_o\, cos\,(\eta_o z+\theta_o) + \varepsilon\gamma\zeta_o\, sin\,(\eta_o z + \theta_o)\Big]\exp\left[\alpha t + \beta x + \gamma y\right],$$
$$H_2 = \frac{C_o}{\eta_o(\beta^2+\gamma^2)}\Big[\varepsilon\beta\zeta_o\, sin\,(\eta_o z+\theta_o) - \gamma\eta_o\, cos\,(\eta_o z + \theta_o)\Big]\exp\left[\alpha t + \beta x + \gamma y\right],$$
$$H_3 = \frac{C_o}{\eta_o}\, sin\,(\eta_o z + \theta_o)\,\exp\left[\alpha t + \beta x + \gamma y\right],$$

où $\varepsilon = \pm 1$, R est une fonction arbitraire définie positivement; U_o, $\theta_o \in I\!R$; η_o et ζ_o sont des constantes réelles qui doivent satisfaire la contrainte $\eta_o^2 > (\zeta_o^2 + \beta^2 + \gamma^2)$. Dans ce cas particulier, la vitesse du flot est constante : il y a équilibre des forces entre le gradient de pression hydrodynamique et la force de Lorentz.

Pour $W \neq 0$ (sans qu'on aille pu résoudre le système (3.3.3)) nous constatons que le flot devient compressible et non stationnaire : la circulation du fluide n'est pas conservée puisque la force de Lorentz n'est pas conservatrice. Les composantes u et v de la vitesse sont alors couplées aux composantes H_1 et H_2 du champ magnétique.

Nous présentons maintenant les résultats obtenus pour les systèmes réduits associés aux sous-algèbres du tableau 3.4. Ceux-ci s'apparentent au système réduit donné en exemple. Cependant leurs résolutions mènent à des équations intégro-différentielles en raison des générateurs de dilatations F et G présents dans les sous-algèbres rencontrées.

$$M_{3,23};\ \{G+\alpha H,\ P_1+\beta H,\ P_2+\gamma H\}$$

variable de symétrie: $s = z$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{t^{2(1-\alpha)}}{W}\ \exp\left[2(\beta x+\gamma y)-2F\right]\frac{Z^2}{Z_o^2}\,,\\
p =& \frac{A_o}{Z_o^2}\frac{t^{2(1-\alpha)}}{W^\kappa}\ e^{2(\beta x+\gamma y)}\, Z^2\,,\\
u =& \frac{1}{t}\left[W\frac{X}{Z}-\frac{\beta\alpha}{(\beta^2+\gamma^2)}\right],\\
v =& \frac{1}{t}\left[W\frac{Y}{Z}+\frac{\alpha(2\beta^2+\alpha^2)}{\gamma(\beta^2+\gamma^2)}\right],\\
w =& \frac{W}{t}\,,\\
H_1 =& t^\alpha e^{(\beta x+\gamma y)} X\,,\\
H_2 =& t^\alpha e^{(\beta x+\gamma y)} Y\,,\\
H_3 =& t^\alpha e^{(\beta x+\gamma y)} Z\,,
\end{aligned}$$

où A_o et $Z_o \in I\!R$, $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$. Les fonctions F, X et Y s'expriment en termes des fonctions $W(s)$ et $Z(s)$

$$F = \int \frac{ds}{W}\,,$$

$$X = -\frac{1}{(\beta^2+\gamma^2)}\left[\beta\frac{dZ}{ds}+\varepsilon\gamma\sqrt{\Delta}\right],\quad Y = -\frac{1}{\gamma}\left[\beta X+\frac{dZ}{ds}\right],\qquad \varepsilon=\pm1\,,$$

où l'on définit la fonction

$$\Delta = \left(\frac{4\pi}{Z_o^2}e^{-2F}\left[\frac{d}{ds}\left[\frac{W}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]-\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}+\frac{\alpha}{W}\right]-(\beta^2+\gamma^2)\left[\frac{8\pi A_o}{Z_o^2W^\kappa}+1\right]-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]\right)Z^2-\left(\frac{dZ}{ds}\right)^2 > 0.$$

Les fonctions W et Z sont déterminées par les EDO suivantes:

$$\frac{dW}{ds}-1+\frac{Z_o^2}{8\pi Z^2}\frac{e^{2F}}{(\beta^2+\gamma^2)}\frac{d}{ds}\left[4\pi e^{-2F}\frac{Z^2}{Z_o^2}\left(\frac{d}{ds}\left[\frac{W}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]-\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}+\frac{\alpha}{W}\right)-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]Z^2\right]=0\,,$$

$$e^{2F}\left(W-\frac{Z_o^2}{4\pi}\right)\frac{d}{ds}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{Z}\right]+\left(\frac{dW}{ds}-1\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{Z}=0\,.$$

$$M_{3,25};\ \{G + P_3 + \alpha H,\ P_1 + \beta H,\ P_2 + \gamma H\}$$

variable de symétrie: $s = ln[t] + z$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{t^{2(1-\alpha)}}{f}\ \exp\left[2(\beta x + \gamma y) - 2F\right]\frac{Z^2}{Z_o^2},\\
p =& \frac{A_o}{Z_o^2}\frac{t^{2(1-\alpha)}}{f^\kappa}\, e^{2(\beta x + \gamma y)}\, Z^2,\\
u =& \frac{1}{t}\left[W\frac{X}{Z} - \frac{\beta\alpha}{(\beta^2+\gamma^2)}\right],\\
v =& \frac{1}{t}\left[W\frac{Y}{Z} + \frac{\alpha(2\beta^2+\alpha^2)}{\gamma(\beta^2+\gamma^2)}\right],\\
w =& \frac{f-1}{t},\\
H_1 =& t^\alpha e^{(\beta x+\gamma y)} X,\\
H_2 =& t^\alpha e^{(\beta x+\gamma y)} Y,\\
H_3 =& t^\alpha e^{(\beta x+\gamma y)} Z,
\end{aligned}$$

où A_o et $Z_o \in I\!R$, $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$. Les fonctions F, X et Y s'expriment en termes des fonctions $f(s)$ et $Z(s)$

$$F = \int \frac{ds}{f},$$

$$X = -\frac{1}{(\beta^2+\gamma^2)}\left[\beta\frac{dZ}{ds} + \varepsilon\gamma\sqrt{\Delta}\right], \quad Y = -\frac{1}{\gamma}\left[\beta X + \frac{dZ}{ds}\right], \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

où l'on définit la fonction

$$\Delta = \left(\frac{4\pi}{Z_o^2}e^{-2F}\left[\frac{d}{ds}\left[\frac{f}{Z}\frac{dZ}{ds}\right] - \frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds} + \frac{\alpha}{f}\right] - (\beta^2+\gamma^2)\left[\frac{8\pi A_o}{Z_o^2 f^\kappa} + 1\right] - \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]\right)Z^2 - \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2 > 0.$$

Les fonctions f et Z sont déterminées par les équations intégro-différentielles :

$$f\left(\frac{df}{ds} - 1\right) + \frac{1}{f} + \frac{Z_o^2}{8\pi Z^2}\frac{e^{2F}}{(\beta^2+\gamma^2)}\frac{d}{ds}\left[4\pi e^{-2F}\frac{Z^2}{Z_o^2}\left(\frac{d}{ds}\left[\frac{f}{Z}\frac{dZ}{ds}\right] - \frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds} + \frac{\alpha}{f}\right) - \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]Z^2\right] = 0,$$

$$e^{2F}\left(f - \frac{Z_o^2}{4\pi}\right)\frac{d}{ds}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{Z}\right] + \left(\frac{df}{ds} - 1\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{Z} = 0.$$

$M_{3,83}$; $\{F+\alpha H,\, K_1+\beta H,\, K_2+\gamma H\}$

variable de symétrie: $s=\frac{z}{t}$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\begin{aligned}
\rho &= = \frac{t^{2\alpha}}{f}\exp\left[F+\frac{2}{t}[\beta x+\gamma y]\right]\frac{Z^2}{Z_o^2},\\
p &= \frac{A_o}{Z_o^2}\frac{t^{2\alpha}}{f^\kappa}\exp\left[(4-3\kappa)F+\frac{2}{t}[\beta x+\gamma y]\right]Z^2,\\
u &= \frac{x-Ut}{t},\\
v &= \frac{y-Vt}{t},\\
w &= f+s,\\
H_1 &= t^\alpha\exp\left[\frac{1}{t}[\beta x+\gamma y]\right]X,\\
H_2 &= t^\alpha\exp\left[\frac{1}{t}[\beta x+\gamma y]\right]Y,\\
H_3 &= t^\alpha\exp\left[\frac{1}{t}[\beta x+\gamma y]\right]Z,
\end{aligned}$$

où A_o et $Z_o\in I\!R$, $\alpha,\beta,\gamma\in I\!R$. Les fonctions F, X et Y s'expriment en termes des fonctions $f(s)$ et $Z(s)$

$$F=\int\frac{ds}{f},$$

$$X=-\frac{1}{(\beta^2+\gamma^2)}\left[\beta\frac{dZ}{ds}+\varepsilon\gamma\sqrt{\Delta}\right],\quad Y=-\frac{1}{\gamma}\left[\beta X+\frac{dZ}{ds}\right],\qquad \varepsilon=\pm1,$$

où l'on définit la fonction

$$\Delta=\left(\frac{4\pi}{Z_o^2}e^F\left[\frac{d}{ds}\left[\frac{f}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]-\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}+\frac{\alpha+2}{f}\right]-(\beta^2+\gamma^2)\left[\frac{8\pi A_o}{Z_o^2f^\kappa}+1\right]-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]\right)Z^2-\left(\frac{dZ}{ds}\right)^2>0,$$

$$U=\frac{X}{Z}f+\frac{\beta(2+\alpha)}{(\beta^2+\gamma^2)},\quad V=\frac{Y}{Z}f+\frac{(2+\alpha)}{\gamma}-\frac{\beta^2(2+\alpha)}{\gamma(\beta^2+\gamma^2)}.$$

Les fonctions f et Z sont déterminées par les équations intégro-différentielles :

$$\frac{df}{ds}-1+\frac{Z_o^2}{8\pi Z^2}\frac{e^{-F}}{(\beta^2+\gamma^2)}\frac{d}{ds}\left[4\pi e^F\frac{Z^2}{Z_o^2}\left(\frac{d}{ds}\left[\frac{f}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]-\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}+\frac{(\alpha+2)}{f}\right)-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]Z^2\right]=0,$$

$$e^{-F}\left(f-\frac{Z_o^2}{4\pi}\right)\frac{d}{ds}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{Z}\right]+\left(\frac{df}{ds}-1\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{Z}=0.$$

$$M_{3,84};\ \{F+K_3+\alpha H,\ K_1+\beta H,\ K_2+\gamma H\}$$

variable de symétrie: $s = ln[t] - \frac{z}{t}$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\begin{aligned}
\rho = &= \frac{t^{2\alpha}}{f} \exp\left[F + \frac{2}{t}[\beta x + \gamma y]\right] \frac{Z^2}{Z_o^2},\\
p = &\frac{A_o}{Z_o^2} \frac{t^{2\alpha}}{f^\kappa} \exp\left[(4-3\kappa)F + \frac{2}{t}[\beta x + \gamma y]\right] Z^2,\\
u = &\frac{x - Ut}{t},\\
v = &\frac{y - Vt}{t},\\
w = &ln[t] - (f+s) + 1,\\
H_1 = &t^\alpha \exp\left[\frac{1}{t}[\beta x + \gamma y]\right] X,\\
H_2 = &t^\alpha \exp\left[\frac{1}{t}[\beta x + \gamma y]\right] Y,\\
H_3 = &t^\alpha \exp\left[\frac{1}{t}[\beta x + \gamma y]\right] Z,
\end{aligned}$$

où A_o et $Z_o \in I\!R$, $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$. Les fonctions F, X et Y s'expriment en termes des fonctions $f(s)$ et $Z(s)$

$$F = \int \frac{ds}{f},$$

$$X = \frac{1}{(\beta^2+\gamma^2)}\left[\beta\frac{dZ}{ds} + \varepsilon\gamma\sqrt{\Delta}\right], \quad Y = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{dZ}{ds} - \beta X\right], \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

où l'on définit la fonction

$$\Delta = \left(\frac{4\pi}{Z_o^2}e^F\left[\frac{d}{ds}\left[\frac{f}{Z}\frac{dZ}{ds}\right] - \frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds} + \frac{\alpha+2}{f}\right] - (\beta^2+\gamma^2)\left[\frac{8\pi A_o}{Z_o^2 f^\kappa} + 1\right] - \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]\right)Z^2 - \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2 > 0,$$

$$U = \frac{X}{Z}f + \frac{\beta(2+\alpha)}{(\beta^2+\gamma^2)}, \quad V = \frac{Y}{Z}f + \frac{(2+\alpha)}{\gamma} - \frac{\beta^2(2+\alpha)}{\gamma(\beta^2+\gamma^2)}.$$

Les fonctions f et Z sont déterminées par les équations intégro-différentielles :

$$f\frac{df}{ds} - f - \frac{1}{f} + \frac{Z_o^2}{8\pi Z^2}\frac{e^{-F}}{(\beta^2+\gamma^2)}\frac{d}{ds}\left[4\pi e^F \frac{Z^2}{Z_o^2}\left(\frac{d}{ds}\left[\frac{f}{Z}\frac{dZ}{ds}\right] - \frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds} + \frac{(\alpha+2)}{f}\right) - \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]Z^2\right] = 0,$$

$$e^{-F}\left(f - \frac{Z_o^2}{4\pi}\right)\frac{d}{ds}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{Z}\right] + \left(\frac{df}{ds} - 1\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{Z} = 0.$$

$$M_{3,37};\ \{F+\alpha H,\ K_1+\beta H,\ P_1+\gamma P_2\}$$

variable de symétrie: $s=\frac{z}{t}$

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\begin{aligned}
\rho = &= \frac{t^{2\alpha}}{f}\exp\left[\frac{2\beta}{\gamma t}(x-y)\right]\frac{Z^2}{Z_o^2},\\
p =& \frac{A_o}{Z_o^2}\frac{t^{2\alpha}}{f^{\kappa}}\exp\left[2(\kappa-1)F+\frac{2\beta}{\gamma t}(x-y)\right]Z^2,\\
u =& \frac{[\gamma x-y]}{\gamma t}+\frac{X}{Z}f+\frac{1}{\gamma}\int ds\frac{Y}{Z},\\
v =& \frac{Y}{Z}f+\int ds\frac{Y}{Z}+\frac{\gamma}{\beta}(\alpha+1),\\
w =& W,\\
H_1 =& t^{\alpha}\exp\left[\frac{\beta}{\gamma t}(x-y)\right]X,\\
H_2 =& t^{\alpha}\exp\left[\frac{\beta}{\gamma t}(x-y)\right]Y,\\
H_3 =& t^{\alpha}\exp\left[\frac{\beta}{\gamma t}(x-y)\right]Z,
\end{aligned}$$

où A_o et $Z_o \in I\!R$, $\alpha, \beta, \gamma \in I\!R$. Les fonctions F, X et Y s'expriment en termes des fonctions $f(s)$ et $Z(s)$

$$F=\int\frac{ds}{f},$$

$$Y=\frac{\gamma}{(\gamma^2+1)}\left[\frac{1}{\beta}Z'\varepsilon\gamma\sqrt{(\gamma^2+1)\xi^2-\gamma^2(Z')^2}\right],\quad X=\frac{1}{\gamma}Y-\frac{1}{\beta}Z',\qquad \varepsilon=\pm1,$$

où l'on définit la fonction

$$\begin{aligned}
\Delta = &\left(\frac{4\pi\gamma^2}{Z_o^2\beta^2}\left[\frac{d}{ds}\left[\frac{f}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]-\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}+\frac{(\alpha+1)}{f}\right]-(1+\gamma^2)\left[\frac{8\pi A_o}{Z_o^2 f^{\kappa}}\exp\left[2(1-\kappa)F\right]+1\right]\right)Z^2\\
&-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]Z^2-\left(\frac{dZ}{ds}\right)^2>0.
\end{aligned}$$

Les fonctions f et Z sont déterminées par les équations intégro-différentielles :

$$\frac{df}{ds}+1+\frac{\gamma^2 Z_o^2}{8\pi\beta^2(1+\gamma^2)Z^2}\frac{d}{ds}\left[\frac{4\pi\gamma^2}{Z_o^2\beta^2}\left(\left[\frac{d}{ds}\left[\frac{f}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]-\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}+\frac{(\alpha+1)}{f}\right]\right)Z^2-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{Z}\frac{dZ}{ds}\right]Z^2\right]=0,$$

$$\left(\frac{Z^2}{4\pi}+f\right)\frac{d}{ds}\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{Z}\right]+\left(\frac{df}{ds}+\frac{Z^2}{Z_o^2}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{Z}-\frac{(\alpha+1)}{\beta f}\frac{Z^2}{Z_o^2}=0.$$

Tableau 3.5. Solutions des systèmes réduits ayant en commun comme contrainte sur les composantes de $\vec{H}$

$$\boxed{\beta X_i + \frac{dX_j}{ds} = 0 \quad (i \neq j)}$$

où β est un coefficient qui dépend de la sous-algèbre.

Variables de symétrie	No. des sous-algèbres
$s = z$	$M_{3,4}$,$M_{3,42}$,$M_{3,43}$
$s = \alpha\, ln[t] + z$	$M_{3,44}$,$M_{3,45}$,$M_{3,46}$,$M_{3,47}$
$s = \frac{z}{t}$	$M_{3,38}$
$s = ln[t] - \frac{y}{t}$	$M_{3,41}$

$M_{3,4}$; $\{P_o + \alpha H, K_1 + P_2 + \beta H, P_1\}$

variable de symétrie: $s = z$

Introduisons les fonctions

$$A = A_o W^{(1-\kappa)},$$
$$V = \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{R}\frac{d}{ds}[RW] + 2\alpha\right\},$$
$$X = Y_o \frac{\sqrt{RW}}{W - Z_o^2}\left\{\frac{\alpha}{\beta} Z_o \int \frac{ds}{W} + X_o\right\}, \quad Y = -\frac{1}{2\beta}\frac{Z_o}{\sqrt{RW}}\frac{d}{ds}[RW], \quad Z = Z_o\sqrt{RW},$$

où $A_o > 0$, X_o, Y_o et Z_o sont des constantes arbitraires réelles, $\alpha, \beta \in I\!R$.

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\rho = e^{2(\alpha t + \beta y)} R, \qquad u = y + \int ds RW\left[Z\frac{d}{ds}[X] - \frac{d}{ds}[Z]\, X\right] - \int ds \frac{v}{W} + U_o, \qquad H_1 = e^{\alpha t + \beta y} X,$$
$$p = A\rho, \qquad v = V, \qquad H_2 = e^{\alpha t + \beta y} Y,$$
$$w = W, \qquad H_3 = e^{\alpha t + \beta y} Z.$$

Les fonctions W et R sont déterminées par

$$(RW)\frac{d}{ds}[V] + 2\beta A R + \frac{\beta}{4\pi}[X^2 + Z^2] - \frac{Z}{4\pi}\frac{d}{ds}[Y] = 0,$$
$$(RW)\frac{d}{ds}[W] + \frac{d}{ds}[AR] + \frac{1}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[X^2 + Y^2 + Z^2\right] = 0.$$

$M_{3,42}$; $\{G + \alpha H,\ K_1,\ P_1 + \gamma_1 P_2 + \gamma_2 H\}$

variable de symétrie: $s = z$

Introduisons $\quad F = \int \frac{ds}{W} \quad$ et les fonctions suivantes

$$A = A_o\, W^{(1-\kappa)}\, e^{(3-\kappa)\,F}\,,$$

$$U = \gamma_1 \int \frac{ds}{RW}[\frac{d}{ds}[Z]\,X - Z\frac{d}{ds}[X]] - \int ds\frac{V}{W} + U_o\,, \quad V = -\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{R}\frac{d}{ds}[RW] + 3 - 2\alpha\right\},$$

$$X = \frac{\sqrt{(RW)}}{(W - Z_o^2\, e^F)}\, e^{\frac{3}{2}F}\left\{\frac{(1-\alpha)}{\gamma_2} Z_o\, e^{-F} + X_o\right\},$$

$$Y = -\frac{Z_o}{2\beta\,(RW)}\left\{\frac{d}{ds}[RW] + R\right\}, \quad Z = Z_o\sqrt{(RW)}\, e^{\frac{1}{2}F},$$

où $A_o > 0$, U_o, X_o et $Z_o \in I\!R$; $\beta = \gamma_2/\gamma_1$, $\gamma_1 \geq 0$, α, $\gamma_2 \in R$.

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\rho = t^{2(1-\alpha)} e^{2\beta y}\, R\,, \qquad u = \frac{[\gamma_1 x - y - U]}{\gamma_1 t}\,, \qquad H_1 = t^{-\alpha} e^{\beta y}\, X\,,\,,$$

$$p = t^{-2}\, A\rho\,, \qquad v = \frac{V}{t}\,, \qquad H_2 = t^{-\alpha} e^{\beta y}\, Y\,,$$

$$w = \frac{W}{t}\,, \qquad H_3 = t^{-\alpha} e^{\beta y}\, Z\,.$$

Les fonctions W et R sont déterminées par

$$(RW)\frac{d}{ds}[V] - RV + 2\beta AR + \frac{\beta}{4\pi}[X^2 + Z^2] - \frac{Z}{4\pi}\frac{d}{ds}[Y] = 0\,,$$

$$(RW)[\frac{d}{ds}[W] - 1] + \frac{d}{ds}[AR] + \frac{1}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[X^2 + Y^2 + Z^2\right] = 0\,.$$

$M_{3,43}$; $\{G + \alpha H,\ K_1,\ P_2 + \beta H\}$

variable de symétrie: $s = z$

Soit $\quad F = \int \frac{ds}{W} \quad$ et les fonctions suivantes

$$A = A_o\, W^{(1-\kappa)}\, e^{(3-\kappa)\,F}\,,$$

$$U = \int \frac{ds}{RW}\left[\frac{d}{ds}[Z]\,X - Z\frac{d}{ds}[X]\right] + U_o\,, \quad V = -\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{R}\frac{d}{ds}[RW] + 3 - 2\alpha\right\},$$

$$X = X_o\frac{\sqrt{RW}}{(W - Z_o^2\, e^F)}\, e^{\frac{3}{2}F}, \quad Y = -\frac{1}{2\beta\, RW}\left\{\frac{d}{ds}[RW] + R\right\} Z, \quad Z = Z_o\sqrt{RW}\, e^{\frac{1}{2}F}\,,$$

où $A_o > 0$, U_o, X_o et Z_o sont des constantes arbitraires réelles, $\alpha\,,\beta \in I\!R$.

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\rho = t^{2(1-\alpha)}e^{2\beta y}R\,, \qquad u = \frac{x-U}{t}\,, \qquad H_1 = t^{-\alpha}e^{\beta y}X\,,$$

$$p = t^{-2}A\rho\,, \qquad v = \frac{V}{t}\,, \qquad H_2 = t^{-\alpha}e^{\beta y}Y\,,$$

$$w = \frac{W}{t}\,, \qquad H_3 = t^{-\alpha}e^{\beta y}Z\,.$$

Les fonctions W et R sont déterminées par

$$(RW)\frac{d}{ds}[V] - RV + 2\beta AR + \frac{\beta}{4\pi}[X^2+Z^2] - \frac{Z}{4\pi}\frac{d}{ds}[Y] = 0$$

$$(RW)\left[\frac{d}{ds}[W] - 1\right] + \frac{d}{ds}[AR] + \frac{1}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[X^2+Y^2+Z^2\right] = 0\,.$$

$$M_{3,44};\ \{G + P_2 + \alpha_1 P_3 + \alpha_2 H,\ K_1,\ P_1 + \beta_1 P_2 + \beta_2 H\}$$

variable de symétrie: $s = \alpha_1\, ln[t] + z$

Introduisons $f = f(s)$ et $F = \int \frac{ds}{f}$, ainsi que les fonctions suivantes

$$A = A_o\, f^{(1-\kappa)}\, e^{(3-\kappa)\,F}\,,$$

$$U = \beta_1 \int \frac{ds}{Rf}\left[\frac{d}{ds}[Z]\,X - Z\frac{d}{ds}[X]\right] - \beta_1 \int ds\frac{V}{f} - F + U_o, \qquad V = -\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{R}\frac{d}{ds}[Rf] + 3 - 2\alpha_2\right\},$$

$$X = \frac{\sqrt{Rf}}{f - Z_o^2\, e^F}\, e^{\frac{3}{2}F}\left\{\left[\frac{(1-\alpha)}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}\right] Z_o\, e^{-F} + X_o\right\},$$

$$Y = -\frac{Z}{2\beta\, Rf}\left\{\frac{d}{ds}[Rf] + R\right\}, \qquad Z = Z_o\sqrt{(Rf)}e^{\frac{1}{2}F}\,,$$

où $A_o > 0$, U_o et $Z_o \in I\!R$; $\beta = \beta_2/\beta_1$, $\alpha_1 \geq 0$, α_2, $\beta_1\,\beta_2 \in I\!R$.

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\rho = t^{2(1-\alpha_2)}e^{2\nu y}R\,, \qquad u = \frac{1}{t\beta_1}[\beta_1 x - U - (ln[t] + y)]\,, \qquad H_1 = t^{-\alpha_2}e^{\nu y}X\,,$$

$$p = t^{-2}A\rho\,, \qquad v = \frac{V}{t}\,, \qquad H_2 = t^{-\alpha_2}e^{\nu y}Y\,,$$

$$w = \frac{f-\alpha_1}{t}\,, \qquad H_3 = t^{-\alpha_2}e^{\nu y}Z\,.$$

Les fonctions f et R sont déterminées par les EDO suivantes :

$$(Rf)\frac{d}{ds}[V] - RV + 2\beta AR + \frac{\beta}{4\pi}[X^2+Z^2] - \frac{Z}{4\pi}\frac{d}{ds}[Y] = 0\,,$$

$$(Rf)[\frac{d}{ds}[f] - 1] + \alpha_1 R + \frac{d}{ds}[AR] + \frac{\beta}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[X^2+Y^2+Z^2\right] = 0\,.$$

$$M_{3,45};\ \{G + P_3 + \alpha H,\ K_1,\ P_1 + \beta_1 P_2 + \beta_2 H\}$$

variable de symétrie: $s = ln[t] + z$

Introduisons $f = f(s)$, $F = \displaystyle\int \frac{ds}{f}$ et les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
A =& A_o f^{(1-\kappa)} e^{(3-\kappa) F},\\
U =& \beta_1 \int \frac{ds}{Rf}\left[\frac{d}{ds}[Z]\, X - Z\frac{d}{ds}[X]\right] - \int ds\frac{V}{f} + U_o, \quad V = -\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{R}\frac{d}{ds}[Rf] + 3 - 2\alpha\right\},\\
X =& \frac{\sqrt{Rf}}{(f - Z_o^2 e^F)}\, e^{\frac{3}{2}F}\left\{\frac{(1-\alpha)}{\beta_2} Z_o e^{-F} + X_o\right\},\\
Y =& -\frac{1}{2\beta Rf}\left\{\frac{d}{ds}[Rf] + R\right\} Z, \quad Z = Z_o\sqrt{(Rf)}\, e^{\frac{1}{2}F},
\end{aligned}$$

où $A_o > 0$, U_o, X_o et $Z_o \in I\!R$; $\nu = \beta_2/\beta_1$, $\beta_1 \geq 0$, $\alpha, \beta_2 \in I\!R$.

Les solutions du système MHD correspondant à cette sous-algèbre sont:

$$\begin{aligned}
&\rho = t^{2(1-\alpha)} e^{2\nu y} R, && u = \frac{1}{t\beta_1}[\beta_1 x - U - y], && H_1 = t^{-\alpha} e^{\nu y} X,\\
&p = t^{-2} A\rho, && v = \frac{V}{t}, && H_2 = t^{-\alpha} e^{\nu y} Y,\\
& && w = \frac{f-1}{t}, && H_3 = t^{-\alpha} e^{\nu y} Z.
\end{aligned}$$

Les fonctions f et R sont déterminées par

$$(Rf)\frac{d}{ds}[V] - RV + 2\beta AR + \frac{\beta}{4\pi}[X^2 + Z^2] - \frac{Z}{4\pi}\frac{d}{ds}[Y] = 0,$$

$$(Rf)[\frac{d}{ds}[f] - 1] + R + \frac{d}{ds}[AR] + \frac{1}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[X^2 + Y^2 + Z^2\right] = 0.$$

$$M_{3,46};\ \{G + P_1 + \alpha_1 P_3 + \alpha_2 H,\ K_1,\ P_2 + \beta H\}$$

variable de symétrie: $s = \alpha_1\, ln[t] + z$

Introduisons $f = f(s)$, $F = \displaystyle\int \frac{ds}{f}$ et les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
A =& A_o f^{(1-\kappa)} e^{(3-\kappa) F},\\
U =& \int \frac{ds}{Rf}\left[\frac{d}{ds}[Z]\, X - Z\frac{d}{ds}[X]\right] + F + U_o, \quad V = -\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{R}\frac{d}{ds}[Rf] + 3 - 2\alpha_2\right\},\\
X =& \frac{1}{f - Z_o^2 e^F}\left\{Z + X_o\sqrt{Rf} e^{\frac{3}{2}F}\right\}, \quad Y = -\frac{Z}{2\beta(Rf)}\left\{\frac{d}{ds}[Rf] + R\right\}, \quad Z = Z_o\sqrt{(Rf)} e^{\frac{1}{2}F},
\end{aligned}$$

où $A_o > 0$, U_o, X_o et $Z_o \in I\!R$; $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2, \beta \in I\!R$.

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\rho = t^{2(1-\alpha_2)}e^{2\beta y}\,R\,, \qquad u = \frac{x - U + ln[t]}{t}\,, \qquad H_1 = t^{-\alpha_2}e^{\beta y}\,X\,,$$
$$p = t^{-2\alpha_2}A\rho\,, \qquad v = \frac{V}{t}\,, \qquad H_2 = t^{-\alpha_2}e^{\beta y}\,Y\,,$$
$$w = \frac{f-\alpha_1}{t}\,, \qquad H_3 = t^{-\alpha_2}e^{\beta y}\,Z\,.$$

Les fonctions f et R sont déterminées par

$$(Rf)\frac{d}{ds}[V] - RV + 2\beta AR + \frac{\beta}{4\pi}[X^2+Z^2] - \frac{Z}{4\pi}\frac{d}{ds}[Y] = 0\,,$$

$$(Rf)[\frac{d}{ds}[R]-1] + R + \frac{d}{ds}[AR] + \frac{1}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[X^2+Y^2+Z^2\right] = 0\,.$$

$$M_{3,47};\ \{G + P_3 + \alpha H,\ K_1,\ P_2 + \beta H\}$$

Introduisons $f = f(s)$, $F = \displaystyle\int \frac{ds}{f}$ et les fonctions suivantes

$$A = A_o\, f^{(1-\kappa)}\, e^{[(3-\kappa)\,F}\,,$$
$$U = \int \frac{ds}{Rf}\left[\frac{d}{ds}[Z]\,X - Z\frac{d}{ds}[X]\right] + U_o, \qquad V = -\frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{R}\frac{d}{ds}[Rf] + 3 - 2\alpha\right\}\,,$$
$$X = X_o\sqrt{(Rf)}\frac{e^{\frac{3}{2}F}}{(f - Z_o^2\,e^F)},\quad Y = -\frac{Z}{2\beta(Rf)}\left\{\frac{d}{ds}[Rf] + R\right\},\quad Z = Z_o\sqrt{(Rf)}e^{\frac{1}{2}F}\,,$$

où $A_o > 0$, U_o, X_o et $Z_o \in I\!R$; $\alpha, \beta \in I\!R$.

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\rho = t^{2(1-\alpha)}e^{2\beta y}\,R\,, \qquad u = \frac{x-U}{t}\,, \qquad H_1 = t^{-\alpha}e^{\beta y}\,X\,,$$
$$p = t^{-2\alpha}A\rho\,, \qquad v = \frac{V}{t}\,, \qquad H_2 = t^{-\alpha}e^{\beta y}\,Y\,,$$
$$w = \frac{f-1}{t}\,, \qquad H_3 = t^{-\alpha}e^{\beta y}\,Z\,.$$

Les fonctions f et R sont déterminées par

$$(Rf)\frac{d}{ds}[V] - RV + 2\beta AR + \frac{\beta}{4\pi}[X^2+Z^2] - \frac{Z}{4\pi}\frac{d}{ds}[Y] = 0\,,$$

$$(Rf)[\frac{d}{ds}[R]-1] + R + \frac{d}{ds}[AR] + \frac{1}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[X^2+Y^2+Z^2\right] = 0\,.$$

$$M_{3,38};\ \{F + \alpha H, K_1 + \beta H, P_2\}$$

variable de symétrie: $s = \frac{z}{t}$

Introduisons $f = f(s)$ et les fonctions suivantes

$$A = A_o\, f^{(1-\kappa)} \exp\left[2(1-\kappa)\int \frac{ds}{f}\right],$$

$$U = \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{R}\frac{d}{ds}[Rf] + 2(\alpha+1)\right\}, \quad V = \int \frac{ds}{Rf}\left[\frac{d}{ds}[Z]Y - Z\frac{d}{ds}[Y]\right] + V_o,$$

$$X = -\frac{1}{2\beta}\frac{Z}{Rf}\frac{d}{ds}[Rf], \quad Y = Y_o\frac{\sqrt{Rf}}{f - Z_o^2}\exp\left[-\int \frac{ds}{f - Z_o^2}\right], \quad Z = Z_o\sqrt{Rf},$$

où $A_o > 0$, U_o, V_o, X_o, Y_o et $Z_o \in I\!R$; $\alpha, \beta \in I\!R$.

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\rho = t^{2\alpha}e^{2\beta x/t}R, \qquad u = \frac{x-U}{t}, \qquad H_1 = t^{\alpha}e^{\beta x/t}X,$$

$$p = t^{2\alpha}A\rho, \qquad v = \frac{V}{t}, \qquad H_2 = t^{\alpha}e^{\beta x/t}Y,$$

$$w = \frac{f+s}{t}, \qquad H_3 = t^{\alpha}e^{\beta x/t}Z.$$

Les fonctions f et R sont déterminées par

$$(Rf)\frac{d}{ds}[U] + RU - 2\beta AR - \frac{\beta}{4\pi}[Y^2 + Z^2] + \frac{Z}{4\pi}\frac{d}{ds}[X] = 0$$

$$(Rf)[\frac{d}{ds}[f] + 1] + \frac{d}{ds}[AR] + \frac{1}{8\pi}\frac{d}{ds}[X^2 + Y^2 + Z^2] = 0,$$

$M_{3,41}$; $\{F + K_2 + \alpha H,\ K_1 + \beta H,\ P_3\}$

variable de symétrie: $s = ln[t] - \frac{y}{t}$

Introduisons $f = f(s)$ et les fonctions suivantes :

$$A = A_o\, f^{(1-\kappa)} \exp\left[2(1-\kappa)\int \frac{ds}{f}\right], \quad U = \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{R}\frac{d}{ds}[Rf] + 2(\alpha+1)\right\},$$

$$X = -\frac{1}{2\beta}\frac{Y}{Rf}\frac{d}{ds}[Rf], \quad Y = Y_o\sqrt{Rf}, \quad Z = Z_o\frac{\sqrt{Rf}}{f - Y_o^2}\exp\left[-\int \frac{ds}{f - Y_o^2}\right],$$

où $A_o > 0$, U_o, V_o, X_o, Y_o et $Z_o \in I\!R$; $\alpha, \beta \in I\!R$.

Les solutions du système MHD associées à cette sous-algèbre sont:

$$\rho = t^{2\alpha}e^{2\beta x/t}R, \qquad u = \frac{x-Ut}{t}, \qquad H_1 = t^{\alpha}e^{\beta x/t}X,$$

$$p = A\rho, \qquad v = ln[t] - [f+s] + 1, \qquad H_2 = t^{\alpha}e^{\beta x/t}Y,$$

$$w = \int \frac{ds}{Rf}\left[\frac{d}{ds}[Y]Z - Y\frac{d}{ds}[Z]\right], \qquad H_3 = t^{\alpha}e^{\beta x/t}Z.$$

Les fonctions f et R sont déterminées par

$$(Rf)\frac{d}{ds}[U] + RU - 2\beta AR - \frac{\beta}{4\pi}[Y^2 + Z^2] - \frac{Y}{4\pi}\frac{d}{ds}[X] = 0,$$

$$(Rf)\left[\frac{d}{ds}[f] + 1\right] - R + \frac{d}{ds}[AR] + \frac{1}{8\pi}\frac{d}{ds}[X^2 + Y^2 + Z^2] = 0.$$

Pour les sous-algèbres du tableau (3.5), nous avons réduit le système MHD à deux équations intégro-différentielles que nous n'avons pû résoudre. Cependant, nous pouvons souligner certaines caractéristiques physiques des solutions MHD obtenues:

- le flot est compressible, non stationnaire et tridimensionnel,
- la force de Lorentz est non conservatrice : les forces de tension sont présentes. Il s'ensuit que la circulation du fluide n'est pas conservée.

Tableau 3.6. Solutions des systèmes réduits ayant en commun comme contrainte sur les composantes de $\vec{H}$

$$\boxed{\alpha X + s\frac{dX}{ds} - s^2\frac{dY}{ds} = 0}$$

où α est un coefficient qui dépend de la sous-algèbre considérée.

Variables de symétrie	No. des sous-algèbres
$s = x/y$	$M_{3,17}$,$M_{3,19}$,$M_{3,26}$
$s = \alpha_2(z - \frac{1}{2}t^2) - \alpha_1 y$	$M_{3,2}$

En résolvant les systèmes réduits associés aux sous-algèbres du tableau (3.6), nous constatons que

$$\frac{U}{V} = \frac{X}{Y} = \eta$$

où η est une fonction de la variable de symétrie s à être déterminée. Ce qui nous indique par la nature même des orbites de groupe, que les composantes de la vitesse et du champ magnétique qui sont situées dans le plan xOy possèdent la même polarisation. En exploitant cette carctéristique, nous sommes parvenu à réduire le système MHD à deux équations intégro-différentielles. Voici les résultats que nous avons obtenus.

$M_{3,17}$; $\{F+\alpha H,\, P_o,\, P_3\}$

variable de symétrie: $s=\frac{x}{y}$

Introduisons

$$\eta=\eta(s)\,,\qquad F=\int\frac{ds}{(\eta-s)}\,,$$

et les fonctions suivantes:

$$R=\frac{R_o}{(\eta-s)V}\exp\left[-\int\frac{(2\alpha\eta+s)}{s(\eta-s)}\,ds\right],\qquad A=A_o[(\eta-s)V]^{(1-\kappa)}\exp\left[(1-\kappa)\int\frac{ds}{(\eta-s)}\right],$$
$$Y=\frac{Y_o}{(\eta-s)}\exp\left[-\int\frac{(\alpha\eta+s)}{s(\eta-s)}\,ds\right],\qquad Z=\frac{Z_o}{\left[(\eta-s)Ve^F-\frac{Y_o^2}{4\pi R_o}\right]}\exp\left[-\alpha\int\frac{\eta\,ds}{s(\eta-s)}\right],$$

où $A_o>0$, $R_o>0$, Y_o et $Z_o\in I\!R$; $\alpha\in I\!R$.

Les solutions du système MHD s'expriment en termes de η et V :

$$\rho=x^{2\alpha}R,\qquad u=\eta(s)V\,,\qquad H_1=x^\alpha\eta(s)Y\,,$$
$$p=A\rho\,,\qquad v=V(s)\,,\qquad H_2=x^\alpha Y\,,$$
$$w=\frac{Y_oZ_o}{[4\pi R_o(\eta-s)Ve^F-Y_o^2]}+W_o\,,\qquad H_3=x^\alpha Z\,.$$

Les fonction η et V sont déterminées par les équations intégro-différentielles :

$$s(\eta-s)RV\frac{d}{ds}[\eta V]+2\alpha AR+s\frac{d}{ds}[AR]+\frac{\alpha}{4\pi}[Y^2+Z^2]+\frac{s}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[Y^2+Z^2\right]+\frac{s^2}{4\pi}Y\frac{d}{ds}[\eta Y]=0\,,$$
$$(\eta-s)R\frac{dV}{ds}-s\frac{d}{ds}[AR]-\frac{s}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[(1+\eta^2)Y^2+Z^2\right]+\frac{Y^2}{4\pi}\frac{d\eta}{ds}=0\,.$$

$M_{3,19}$; $\{F+K_3+\alpha H,\, P_o,\, P_3\}$

variable de symétrie: $s=\frac{x}{y}$

Introduisons

$$\eta=\eta(s)\,,\qquad F=\int\frac{ds}{(\eta-s)}\,,$$

et les fonctions suivantes:

$$R=\frac{R_o}{(\eta-s)V}\exp\left[-\int\frac{(2\alpha\eta+s)}{s(\eta-s)}\,ds\right],\qquad A=A_o[(\eta-s)V]^{(1-\kappa)}\exp\left[(1-\kappa)\int\frac{ds}{(\eta-s)}\right],$$
$$Y=\frac{Y_o}{(\eta-s)}\exp\left[-\int\frac{(\alpha\eta+s)}{s(\eta-s)}\,ds\right],\qquad Z=\frac{Z_o}{[(\eta-s)Ve^F-\frac{Y_o^2}{4\pi R_o}]}\exp\left[-\alpha\int\frac{\eta\,ds}{s(\eta-s)}\right],$$

où $A_o>0$, $R_o>0$, Y_o et $Z_o\in I\!R$; $\alpha\in I\!R$.

Les solutions du système MHD s'expriment en termes de η et V:

$$\rho = x^{2\alpha} R, \qquad u = \eta(s)V, \qquad H_1 = x^{\alpha}\eta(s)Y,$$

$$p = A\rho, \qquad v = V(s), \qquad H_2 = x^{\alpha}Y,$$

$$w = ln[x] - \frac{Y_o Z_o}{\left[4\pi R_o(\eta - s)Ve^F - Y_o^2\right]} - \int \frac{\eta}{s(\eta - s)}\, ds, \qquad H_3 = x^{\alpha} Z.$$

Les fonction η et V sont déterminées par les équations intégro-différentielles :

$$s(\eta - s)RV\frac{d}{ds}[\eta V] + 2\alpha AR + s\frac{d}{ds}[AR] + \frac{\alpha}{4\pi}[Y^2 + Z^2] + \frac{s}{8\pi}\frac{d}{ds}[Y^2 + Z^2] + \frac{s^2}{4\pi}Y\frac{d}{ds}[\eta Y] = 0,$$

$$(\eta - s)R\frac{dV}{ds} - s\frac{d}{ds}[AR] - \frac{s}{8\pi}\frac{d}{ds}[(1+\eta^2)Y^2 + Z^2] + \frac{Y^2}{4\pi}\frac{d\eta}{ds} = 0.$$

$$M_{3,26};\ \{F + \alpha_1 G + \alpha_2 H, P_o, P_3\}$$

variable de symétrie: $s = \frac{x}{y}$

Introduisons

$$\eta = \eta(s), \qquad F = \int \frac{[s + \alpha_1\eta]\, ds}{s(\eta - s)},$$

et les fonctions suivantes:

$$R = \frac{R_o}{(\eta - s)V}\exp\left[-\int \frac{(2\alpha_2 - \alpha_1)\eta + s}{s(\eta - s)}\, ds\right], \quad A = \frac{A_o}{[(\eta - s)V]^{\kappa}}\exp\left[-\int \frac{[(2\alpha_2 + \alpha_1)\eta + \kappa s]ds}{s(\eta - s)}\right],$$

$$Y = \frac{Y_o}{(\eta - s)}\exp\left[-\int \frac{\alpha_2\eta + s}{s(\eta - s)}\, ds\right], \quad Z = \frac{Z_o}{[(\eta - s)Ve^F - \frac{Y_o^2}{4\pi R_o}]}\exp\left[-\alpha_2\int \frac{\eta ds}{s(\eta - s)}\right],$$

où $A_o > 0$, $R_o > 0$, Y_o et $Z_o \in I\!R$; $\alpha_1 \neq 0, 1$, $\alpha_2 \in I\!R$.

Les solutions du système MHD s'expriment en termes de η et V :

$$\rho = x^{2(\alpha_2 - \alpha_1)} R, \qquad u = x^{-\alpha_1}\eta(s)V, \qquad H_1 = x^{-\alpha_2}\eta(s)Y,$$

$$p = x^{2\alpha_2} A, \qquad v = x^{-\alpha_1}V(s), \qquad H_2 = x^{-\alpha_2}Y,$$

$$w = x^{-\alpha_1}\exp\left[-\alpha_1\int \frac{\eta\, ds}{s(\eta - s)}\right]\left\{\left[\frac{Y_o Z_o}{[4\pi R_o(\eta - s)Ve^F - Y_o^2]}\right] + W_o\right\}, \qquad H_3 = x^{-\alpha_2} Z.$$

Les fonctions η et V sont déterminées par les équations intégro-différentielles :

$$s(\eta - s)RV\frac{d}{ds}[\eta V] + \alpha_1 R(\eta V)^2 + 2\alpha_2 A + s\frac{d}{ds}[A] + \frac{\alpha_2}{4\pi}[Y^2 + Z^2] + \frac{s}{8\pi}\frac{d}{ds}[Y^2 + Z^2] + \frac{s^2}{4\pi}Y\frac{d}{ds}[\eta Y] = 0,$$

$$s(\eta - s)R\frac{dV}{ds} + \alpha_1 R\eta V^2 - s^2\frac{d}{ds}[A] - \frac{s^2}{8\pi}\frac{d}{ds}[(1+\eta^2)Y^2 + Z^2] + \frac{sY^2}{4\pi}\frac{d\eta}{ds} = 0.$$

$$M_{3,2};\ \{K_3 + P_o + \alpha H,\ K_1 + \alpha_1 P_3 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 H,\ P_1\}$$

variable de symétrie: $s = \alpha_2(z - \frac{1}{2}t^2) - \alpha_1 y$

Introduisons

$$\eta = \eta(s), \quad F = 2\alpha \int \frac{ds}{(\alpha_2 - \alpha_1\eta)W}, \quad \Lambda = (\alpha_2 - \alpha_1\eta)W\, e^{-F} - \frac{Z_o^2}{4\pi R_o}, \quad \Gamma = \alpha \int ds \frac{e^{-F}}{\Gamma},$$

et les fonctions suivantes:

$$R = \frac{R_o}{(\alpha_2 - \alpha_1\eta)W} \exp\left[-2\int \frac{(\beta\eta W + \alpha)}{(\alpha_2 - \alpha_1\eta)W} ds\right], \qquad A = A_o[(\alpha_2 - \eta\alpha_1)W]^{(1-\kappa)},$$

$$U = \alpha_2 \frac{Z_o X_o}{4\pi R_o}\left[\frac{1}{\Lambda}\exp[\Gamma + F] - 2\alpha \int \frac{\exp[\Gamma + F]}{\Lambda(\alpha_2 - \alpha_1\eta)W} ds\right] + U_o,$$

$$X = \frac{X_o}{\Lambda}\exp\left[-\int ds\left[2\alpha\frac{e^{-F}}{\Lambda} + \frac{\beta\eta}{(\alpha_2 - \eta\alpha_1)}\right]\right], \quad Z = \frac{Z_o}{(\alpha_2 - \alpha_1\eta)} \exp\left[-\beta \int \frac{\eta\, ds}{(\alpha_2 - \alpha_1\eta)}\right],$$

où $A_o > 0$, $R_o > 0$, U_o, X_o et $Z_o \in I\!R$; α, α_1, α_2, $\alpha_3 \in I\!R$, $\beta = \alpha_3/\alpha_2$.

Les solutions du système MHD s'expriment en termes de η et W :

$\rho = e^{2(\beta y + \alpha t)} R,$	$u = \frac{1}{\alpha_2}(U + y),$	$H_1 = e^{(\beta y + \alpha t)} X,$
$p = A\rho,$	$v = \eta(s) W,$	$H_2 = e^{(\beta y + \alpha t)} \eta(s) Z,$
	$w = W,$	$H_3 = e^{(\beta y + \alpha t)} Z.$

Les fonction η et W sont déterminées par les équations intégro-différentielles :

$$[(\alpha_2 - \alpha_1\eta)W - \alpha_2]R\frac{d}{ds}[\eta W] + 2\beta AR - \alpha_1\frac{d}{ds}[AR] + \frac{\beta}{4\pi}[X^2 + Z^2] - \frac{\alpha_1}{8\pi}\frac{d}{ds}[X^2 + Z^2] - \frac{\alpha_2 Z}{4\pi}\frac{d}{ds}[\eta Z] = 0,$$

$$[(\alpha_2 - \alpha_1\eta)W - \alpha_2]R\frac{dW}{ds} + R + \alpha_2\frac{d}{ds}[AR] + \frac{\alpha_2}{8\pi}\frac{d}{ds}[(1 + \eta^2)Z^2 + X^2] - \frac{\alpha_1 Z^2}{4\pi}\frac{d\eta}{ds} = 0.$$

De ces résultats, nous constatons que les solutions MHD sont stationnaires (sauf pour $M_{3,2}$). Le flot est compressible, tridimensionnel et soumis à une force de Lorentz non-conservatrice.

Maintenant, nous considérons les sous-algèbres dont la variable de symétrie est respectivement du type cylindrique, conique et spirale logarithmique. Les système réduits qui leurs sont associés sont d'une grande compléxité. Conséquemment, nous avons choisi les sous-algèbres possédant une symétrie axiale (à l'exception de $M_{3,65}$). Cela nous a permis de réduire le système MHD à deux équations intégro-différentielles qui déterminent variables angulaires des composantes de la vitesse et du champ magnétique (étant V et Y respectivement).

$$M_{3,1};\ \{J_3 + K_3 + \alpha H, P_o + \beta H, P_3\}$$

variable de symétrie: $s = \sqrt{x^2 + y^2}$

Pour cette sous-algèbre, nous avons exploité la symétrie axiale (*i.e.* suivant l'axe s), c'est-à-dire poser dans le système réduit correspondant que $W = 0$ et $Z = 0$. Nous obtenons alors que $\beta = 0$, $V = Y$ et il en découle les solutions particulières suivantes

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{R_o}{sU\,cos(V)} \exp\left[-2\alpha\varphi - 2\alpha \int \frac{ds}{s} tan(V)\right], \quad \text{où} \quad \varphi \equiv arctan\,[x/y]\,, \\
p =& \frac{A_o}{[sU\,cos(V)]^{\kappa}} \exp\left[-2\alpha\varphi - 2\alpha \int \frac{ds}{s} tan(V)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u =& U\,sin(\varphi - V) \\
v =& U\,cos(\varphi - V)\,, \\
w =& -\varphi - \int \frac{ds}{s} tan(V)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 =& \frac{X_o}{scos(V)} \exp\left[-\alpha\varphi - \alpha \int \frac{ds}{s} tan(V)\right] sin(\varphi - V)\,, \\
H_2 =& \frac{X_o}{scos(V)} \exp\left[-\alpha\varphi - \alpha \int \frac{ds}{s} tan(V)\right] cos(\varphi - V)\,, \\
H_3 =& 0\,.
\end{aligned}$$

Les fonctions U et V sont déterminées par les équations intégro-différentielles:

$$\frac{dU}{d\eta} = \frac{\kappa A_o U}{\eta^{\kappa}[U^{(\kappa+1)} - \kappa A_o \eta^{(1-\kappa)}]}\,; \quad \text{où} \quad \eta = s\,cos(V)\,,$$

$$\begin{aligned}
\Bigg(\Bigg[&\kappa A_o s^{(2-\kappa)} U^{-(\kappa+1)} [cos(V)]^{-\kappa} sin^2(V) - s\,cos(V) + \frac{X_o^2}{4\pi R_o^2}[cos(V)]^{-1}\Bigg]\frac{dV}{ds} \\
&- \kappa A_o s^{(2-\kappa)} U^{-(\kappa+1)} [cos(V)]^{(1-\kappa)} sin(V)\frac{dU}{ds} - 2\alpha A_o s^{(1-\kappa)} U^{-(\kappa+1)} [cos(V)]^{(2-\kappa)} \\
&- \frac{\alpha X_o^2}{4\pi R_o^2}[cos(V)]^{-1} - \kappa A_o s^{(2-\kappa)} U^{-(\kappa+1)} [cos(V)]^{(1-\kappa)} sin(V)[1 - 2\alpha\,tan(V)] - sin(V) = 0\,,\Bigg)
\end{aligned}$$

avec A_o, R_o, et $X_o > 0$, α, $\beta \in I\!R$.

$M_{3,64}$; $\{J_3 + \alpha H, F + \beta H, P_3\}$

variable de symétrie: $s = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t}$

Pour cette sous-algèbre, nous avons fixé $a = 0$ et $\beta = -1$. De plus, en exploitant la symétrie axiale nous avons supposé que l'écoulement soit plannaire ($w = 0$) et que $H_3 = 0$. Nous introduisons d'abord les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
\varphi &= arctan\,[x/y]\ ,\\
U &= \frac{s[Y_o\,cos(Y) + X_o\,sin(Y)]}{sin(Y-V)}\,,\\
R &= \frac{R_o}{s[U\,cos(V) - s]},\\
A &= A_o[sU\,cos(V) - s^2]^{-\kappa}\,,\\
X &= \frac{X_o}{s\,cos(Y)}\,,
\end{aligned}$$

où $A_o > 0$, $R_o > 0$, W_o et X_o sont des constantes arbitraires.

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{R}{t^2}\,, & u &= U\,sin(\varphi - V)\,, & H_1 &= \frac{X}{t}\,sin(\varphi - Y)\,,\\
p &= \frac{A}{t^2}\,, & v &= U\,cos(\varphi - V)\,, & H_1 &= \frac{X}{t}\,cos(\varphi - Y)\,,\\
& & w &= 0\,, & H_3 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Les inconnues V et Y sont déterminées par les équations intégro-différentielles:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[U^2 + (XU)^2\,sin^2(Y-V)\right] + sU\,cos(V)\frac{dA}{ds} = 0$$

$$U\frac{dV}{ds} + RU^2\,sin(V) - s\,sin(V)\frac{dA}{ds} - X\,cos(Y-V)\frac{d}{ds}\left[XU\,sin(Y-V)\right] = 0$$

$M_{3,65}$; $\{J_3 + \alpha H, F + \beta H, P_o\}$

variable de symétrie: $s = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

La résolution du système réduit correspondant s'avère très difficile. Néanmoins, nous sommes arrivé à reduire le système MHD à trois équations intégro-différentielles en posant $\alpha = 0$ et $\beta = -2$ et en utilisant la représentation polaire pour les composantes de la vitesse $\vec{v}$ et du champ magnétique $\vec{H}$:

$$f = U\,sin(V), \qquad g = U\,cos(V), \qquad h_1 = X\,sin(Y), \qquad h_2 = X\,cos(Y)\,.$$

Introduisons les fonctions suivantes

$$
\begin{aligned}
R =& \frac{R_o}{s[g-sW]} \exp\left[2\int \frac{W ds}{s[g-sW]}\right],\\
A =& \frac{A_o}{s^{\kappa}[g-sW]^{\kappa}} \exp\left[(4-3\kappa)\int \frac{W ds}{s[g-sW]}\right],\\
h_1 =& \frac{1}{s[g-sW]} \exp\left[\int \frac{g\, ds}{s[g-sW]}\right]\left(\int ds \exp\left[-\int \frac{g\, ds}{s[g-sW]}\right]\left(X_o\frac{df}{ds} - \frac{(X_o+s^2)}{s}f\right) + h_o\right)\\
h_2 =& \frac{X_o[sW+1]}{s[g-sW]},\\
Z =& \frac{X_o W}{s[g-sW]}\,.
\end{aligned}
$$

Les solutions MHD associées à cette sous-algèbre sont

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{R}{z^4}\,, & u &= \frac{[gy-fx]}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & H_1 &= \frac{[h_2 y - h_1 x]}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\\
p &= \frac{A}{z^4}\,, & v &= \frac{[gx+fy]}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & H_1 &= \frac{[h_2 x + h_1 y]}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\\
 & & w &= W\,, & H_3 &= \frac{Z}{z^2}\,.
\end{aligned}
$$

Les inconnues f, g et W sont déterminées sont déterminées par les équations intégro-différentielles:

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(s[g-sW]\frac{dg}{ds} - f^2 - \frac{A_o}{R_o s^{\kappa}[g-sW]^{\kappa}}\left[\kappa\frac{d}{ds}[s(g-sW)] + (3\kappa-4)\right]\exp\left[(2-3\kappa)\int\frac{W\,ds}{s[g-sW]}\right]\\
&+ \frac{1}{4\pi R_o}\exp\left[-2\int\frac{W\,ds}{s[g-sW]}\right]\left(\frac{1}{2}[g-sW]\frac{d}{ds}[s^2h_1^2] - sX_o^2W\frac{d}{ds}\left[\frac{(sW+1)}{g-sW}\right]\right)\Bigg) = 0\,,\\
&s[g-sW]\frac{df}{ds} + gf - \frac{X_o}{4\pi R_o}\exp\left[-2\int ds\frac{W}{s[g-sW]}\right]\left(s\frac{d}{ds}[s^2h_1] - [sW+1]\frac{d}{ds}[sh_1]\right) = 0\,,\\
&\Bigg(W^2 + [g-sW]W + \left[3\kappa sW + \kappa\frac{d}{ds}[s(g-sW)]\right]\exp\left[(2-3\kappa)\int\frac{W\,ds}{s[g-sW]}\right]\\
&+\frac{[g-sW]}{4\pi R_o}\exp\left[\int\frac{-2W ds}{s[g-sW]}\right]\left[2s[h_1^2+h_2^2] + s^2\frac{d}{ds}[h_1^2+h_2^2] + \frac{X_o^2[sW+1]}{(g-sW)}\frac{d}{ds}\left[\frac{W}{s(g-sW)}\right]\right]\Bigg) = 0\,,
\end{aligned}
$$

où R_o, A_o et h_o sont des constantes arbitraires réelles.

$$M_{3,30};\ \{J_3+\alpha_1 F+\alpha_2 G+\alpha_3 H, P_o, P_3\}$$

$$\text{variable de symétrie: } s=\sqrt{x^2+y^2}\,e^{\alpha_1\varphi}$$

$$\text{où } \varphi\equiv arctan\,[x/y],\ \alpha_1\neq\alpha_2,\ \alpha_1\neq 0;\ \ \alpha_3\in I\!R$$

Introduisons les fonctions suivantes

$$S(V;1,-\alpha_1)=cos(V)-\alpha_1\,sin(V)\,,$$
$$F=\int ds\frac{[sin(V)-s]}{sS(V;1,-\alpha_1)}\,.$$

Nous obtenons comme solutions MHD

$$\begin{aligned}
\rho =&\frac{R_o}{sUS(V;1,-\alpha_1)}\exp\left[2(\alpha_2-\alpha_3)\varphi-(2\alpha_3-\alpha_2+\alpha_1)F\right],\\
p =&\frac{A_o}{[sUS(V;1,-\alpha_1)]^{\kappa}}\exp\left[-2\alpha_3\varphi-(2\alpha_3+\kappa\alpha_2+\alpha_1)F\right],\\
u =&\exp\left[-\alpha_2\varphi\right]U\,sin(\varphi-V)\,,\\
v =&\exp\left[-\alpha_2\varphi\right]U\,sin(\varphi-V)\,,\\
w =&W_o\exp\left[-\alpha_2(\varphi+F)\right],\\
H_1 =&\frac{X_o}{sS(V;1,-\alpha_1)}\exp\left[-\alpha_3\varphi-(\alpha_1+\alpha_3)F\right]sin(\varphi-V)\,,\\
H_2 =&\frac{X_o}{sS(V;1,-\alpha_1)}\exp\left[-\alpha_3\varphi-(\alpha_1+\alpha_3)F\right]cos(\varphi-V)\,,\\
H_3 =&0\,,
\end{aligned}$$

où $A_o>0$, $R_o>0$, W_o et X_o sont des constantes arbitraires.

Les fonctions U et V sont déterminées par les équations intégro-différentielles:

$$\begin{aligned}
&\frac{A_o}{R_o}[sUS(V;1,-\alpha_1)]^{(1-\kappa)}\exp\left[-(\kappa+1)\alpha_2 F\right]\left[\frac{\kappa}{U}\frac{d}{ds}\left[US(V;1,-\alpha_1)\right]+(\kappa\alpha_2+\alpha_1)\,sin(V)\right]\\
&-sUS(V;1,-\alpha_1)\frac{dU}{ds}-\alpha_2 U^2\,sin(V)=0\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[sU^2S(V;1,-\alpha_1)]\frac{dV}{ds}+U^2\,sin(V)+\frac{X_o^2}{4\pi R_o}\frac{U\exp\left[-(\alpha_1+\alpha_2)F\right]}{s[S(V;1,-\alpha_1)]^2}\left[\alpha_1+\alpha_3+(1+\alpha_1)s\frac{dV}{ds}\right]\\
&-\frac{A_o[sU]^{(1-\kappa)}\exp\left[-(\kappa+1)\alpha_2 F\right]}{R_o[S(V;1,-\alpha_1)]^{\kappa}}\left[S(V;1,-\alpha_1)\left[\frac{\kappa}{U}\frac{d}{ds}\left[US(V;1,-\alpha_1)\right]+(\kappa\alpha_2+\alpha_1)\,sin(V)\right]+2\alpha_3\right]=0.
\end{aligned}$$

$$M_{3,82};\ \{J_3+\alpha_1 F+\alpha_2 H, F+\beta_1 G+\beta_2 H, P_3\}$$

variable de symétrie: $s=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{t^{\frac{1}{\sigma}}}\exp[\nu\varphi]$.

où $\varphi\equiv arctan[x/y]$, $\sigma\equiv 1-\beta_1$, $\nu=-\frac{\alpha_1\beta_1}{\sigma}$

En choisissant : $\alpha_1=-\alpha_2$, $\beta_2=-1$, $\beta_2=-1$, et en introduisant la notation suivante

$$S(V;\alpha,\beta)=\alpha\, cos(V)+\beta\, sin(V)\,,\quad S(Y;\alpha,\beta)=\alpha\, cos(Y)+\beta\, sin(Y)\,.$$

Soient les fonctions suivantes

$$U=\frac{s[C_o\, cos(Y)+\beta B_o\, sin(Y)]}{(B_o-\nu C_o)\, sin(Y-V)},\quad G=s\left[S(V;1,-\nu)U-\frac{s}{\sigma}\right],$$
$$R=\frac{R_o}{G}\exp\left[2\int\frac{ds}{G}\left[\nu U\, sin(V)-\frac{\beta_1 s}{\sigma}\right]\right],\quad A=\frac{A_o}{G^{\kappa}}\exp\left[2(1-\kappa)\int\frac{ds}{G}\left[\nu U\, sin(V)-\frac{s}{\sigma}\right]\right],$$
$$X=\frac{\sigma(B_o-\nu C_o)}{\sigma S(Y;1,-\nu)},$$

où $A_o>0$, $R_o>0$, B_o et C_o sont des constantes arbitraires.

Nous obtenons comme solutions MHD

$$\begin{aligned}
\rho &=t^{-\frac{2}{\sigma}(1+\beta_1)}\exp\left[2\nu(1-\alpha_1)\varphi\right],\\
p &=t^{-\frac{2}{\sigma}}\exp[2\nu\varphi],\\
u &=t^{\nu}\exp[\nu\alpha_1\varphi]U\, sin(\varphi-V),\\
v &=t^{\nu}\exp[\nu\alpha_1\varphi]U\, cos(\varphi-V),\\
w &=0,\\
H_1 &=t^{-\frac{1}{\sigma}}\exp[\nu\varphi]X\, sin(\varphi-V),\\
H_2 &=t^{-\frac{1}{\sigma}}\exp[\nu\varphi]X\, cos(\varphi-V),\\
H_3 &=0.
\end{aligned}$$

Les fonctions V et Y sont déterminées par les équations intégro-différentielles:

$$G\frac{dU}{ds}+U[\frac{\beta_1 s}{\sigma}+\nu U\, sin(V)]+\left[\frac{2}{\sigma}\frac{s^2}{G}cos(V)-\frac{s\kappa}{G}S(V;1,\beta)\left(\frac{dG}{ds}+2[\nu U\, sin(V)+\frac{s}{\sigma}]\right)\right]\frac{A}{R}$$
$$+\frac{(\nu^2+1)}{4\pi}\frac{sX^2}{RS(Y;1,-\nu)]}sin(Y-V)\frac{dY}{ds}=0,$$

$$sGU\frac{dV}{ds}+U^2\, sin(V)-\frac{s}{G}\left[\kappa S(V;-\beta,1)\left(\frac{dG}{ds}+2[\nu U\, sin(V)+\frac{s}{\sigma}]\right)+2[\nu U\, sin(V)+\frac{s}{\sigma}]\right]\frac{A}{R}$$
$$-\frac{(\nu^2+1)}{4\pi}\frac{sX^2}{RS(Y;1,-\nu)]}cos(Y-V)\frac{dY}{ds}=0.$$

$$M_{3,75};\ \{J_3 + P_o + \alpha H, F + G + \beta_1 P_o + \beta_2 H, P_3\}$$

variable de symétrie : $s = \sqrt{x^2+y^2}\exp\left[\frac{1}{\beta_1}(t+\varphi)\right]$ où $\varphi \equiv arctan\,[x/y]$

En choisissant : $\alpha = 0$, $\beta_1 \equiv \frac{1}{\beta} > 0$, $\beta_2 = -1$, et en introduisant la notation suivante

$$S(V;\alpha,\beta) = \alpha\, cos(V) + \beta\, sin(V)\,,$$

$$S(Y;\alpha,\beta) = \alpha\, cos(Y) + \beta\, sin(Y)\,.$$

Soient les fonctions suivantes

$$U = \frac{s[C_o\, cos(Y) + \beta B_o\, sin(Y)]}{(C_o + B_o)\, sin(Y - V)}\,,$$

$$G = s\left[S(V;1,\beta)U - \beta s\right], \qquad F = \int \frac{ds}{G}\left[U\, sin(V) - s\right],$$

où B_o et C_o sont des constantes arbitraires.

Nous obtenons comme solutions MHD

$$\rho = \frac{R_o}{G}\exp\left[-2\beta(\varphi + 2t) - 2\beta F\right],$$

$$p = \frac{A_o}{G^\kappa}\exp\left[-2\beta(\varphi + 2t) + 2(\kappa - 1)\beta F\right],$$

$$u = \exp\left[-2\beta(\varphi + 2t)\right]U\, sin(\varphi - V)\,,$$

$$v = \exp\left[-2\beta(\varphi + 2t)\right]U\, cos(\varphi - V)\,,$$

$$w = 0\,,$$

$$H_1 = \frac{(C_o + B_o)}{sS(Y;1,\beta)}\exp\left[-2\beta(\varphi + 2t)\right] sin(\varphi - V)\,,$$

$$H_2 = \frac{(C_o + B_o)}{sS(Y;1,\beta)}\exp\left[-2\beta(\varphi + 2t)\right] cos(\varphi - V)\,,$$

$$H_3 = 0\,,$$

où $A_o > 0$ et $R_o > 0$ sont des constantes arbitraires.

Les fonctions V et Y sont déterminées par les équations intégro-différentielles:

$$sG\frac{dU}{ds} + \beta U[s - U\, sin(V)] + \frac{sA_o}{R_o G^\kappa}\exp\left[2\kappa F\right]\left[2\beta s\, cos(V) - \kappa S(V;1,\beta)\left(\frac{dG}{ds} - 2\beta[U\, sin(V) - s]\right)\right]$$
$$+ (\beta^2 + 1)\frac{(B_o + C_o)^2}{4\pi R_o}\frac{G}{[S(Y;1,\beta)]^3}\exp\left[2\beta F\right] sin(Y - V)\frac{dY}{ds} = 0\,,$$

$$sGU\frac{dV}{ds} + U^2\, sin(V) + \frac{sA_o}{R_o G^\kappa}\exp\left[2\kappa F\right]\left[\kappa S(V;-\beta,1)\left[\frac{dG}{ds} - 2\beta[U\, sin(V) - s]\right] + 2\beta[U - s\, sin(V)]\right]$$
$$+ (\beta^2 + 1)\frac{(B_o + C_o)^2}{4\pi R_o}\frac{G}{[S(Y;1,\beta)]^3}\exp\left[2\beta F\right] cos(Y - V)\frac{dY}{ds} = 0\,.$$

$$M_{3,24};\ \{G+P_1+\alpha H, P_3+\beta H, P_o\}$$

variable de symétrie: $s=y$

Pour cette sous-algèbre, nous avons obtenu deux types de solutions MHD en considérant les deux cas suivants. (I) En imposant que $\vec{F}_m=0$. (II) En posant $U=V$ et $\beta X=\alpha Z$ dans le système réduit correspondant.

I) Introduisons d'abord les fonctions

$$F(s)=\alpha-\omega_o\, tan(\varphi), \qquad G(s)=\frac{\alpha}{\omega_o}\, tan(\varphi), \qquad \varphi=\omega_o\, s+\delta_o\,.$$

desquelles nous exprimons les solutions MHD comme suit

$$\begin{aligned}
\rho &= \left(\frac{1}{2\alpha A_o}\right)^{(2\alpha-1)/\nu}\exp\Big[2[(\alpha-1)x+\beta z]\Big]\Big[F(s)UV+G(s)V^2-U^2\Big]^{(2\alpha-1)/\nu},\\
p &= \frac{A_o^{(1-2\alpha)/\nu}}{(2\alpha)^{(2\alpha+\kappa)/\nu}}\exp\Big[2(\alpha x+\beta z)\Big]\,V^{a/\nu}\Big[F(s)UV+G(s)V^2-U^2\Big]^{(2\alpha+\kappa)/\nu},\\
u &= e^x U, \qquad v=e^x V, \qquad w=e^x\,\frac{\Big[\beta\omega_o U^2+\beta[\omega_o(1-\alpha)-\alpha\, tan(\varphi)]\,UV\Big]}{[\alpha\omega_o U-\alpha^2\, tan(\varphi)]},\\
H_1 &= \frac{\alpha Z_o}{\beta}e^{(\alpha x+\beta z)}\, sin(\varphi), \qquad H_2=\frac{\omega_o Z_o}{\beta}e^{(\alpha x+\beta z)}\, cos(\varphi), \qquad H_3=Z_o e^{(\alpha x+\beta z)}\, sin(\varphi)\,,
\end{aligned}$$

où $\omega_o=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, ; A_o, δ_o et $Z_o\in I\!R$; $\alpha,\beta\in I\!R$, $a=2[(\alpha-1)\kappa-\alpha]$, $\nu=\kappa+1$.

Les inconnues U et V sont déterminées par le système d'équations algébriques

$$\begin{aligned}
&\Bigg(\left[\frac{\beta^2}{\alpha}+(1-2\alpha)-\omega_o\, cot(\varphi)\right]U^3+[1-\omega_o\, cot(\varphi)]\,[2\alpha+G(s)]\,V^3+\\
&+\left[\left((2\alpha-1)+\frac{\beta^2}{\alpha}-\omega_o\, cot(\varphi)\right)G(s)+[\omega_o\, cot(\varphi)-1]F(s)+r(s)+2\alpha\right]UV^2+\\
&-\left[\left((2\alpha-1)+\frac{\beta^2}{\alpha}-\omega_o\, cot(\varphi)\right)F(s)+[\omega_o\, cot(\varphi)-1]-q(s)\right]U^2V\Bigg)=0\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Bigg(\left[(\kappa-1)\left(\omega_o\, cot(\varphi)-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)-(\kappa+1)\right]U^3+\Big[(\kappa-1)[\omega_o\, cot(\varphi)-1]G(s)+n(s)\Big]V^3+\\
&+\left[(\kappa-1)[1-\omega_o\, cot(\varphi)]\,F(s)+\left[(\kappa-1)\left(\omega_o\, cot(\varphi)-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)-(\kappa+1)\right]G(s)+r(s)\right]UV^2+\\
&+\left[(1-\kappa)[1-\omega_o\, cot(\varphi)]-\left[(\kappa-1)\left(\omega_o\, cot(\varphi)-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)+(\kappa+1)\right]F+q(s)\right]U^2V\Bigg)=0
\end{aligned}$$

où pour abréger les expressions nous avons définie les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} n(s) &= \alpha - 2\alpha \tan^2(\varphi) + \frac{\alpha(\alpha-2)}{\omega_o} \tan(\varphi) , \\ r(s) &= \alpha(\alpha+2) - \left(\omega_o(2\alpha+1+\beta^2) + \frac{2\alpha}{\omega_o}\right) \tan(\varphi) - \alpha\omega_o \cot(\varphi) , \\ q(s) &= \alpha(\alpha+2) + \frac{\beta^2}{\alpha}(2\alpha - \omega_o) - \alpha\omega_o \cot(\varphi) - 2\omega_o \tan(\varphi) . \end{aligned}$$

En définissant une nouvelle variable U/V (ou V/U) avec $V \neq 0$ (ou $U \neq 0$), on peut résoudre ce système d'équations algébriques par la méthode de Cardano, ce qui permet alors d'exprimer U et V en terme de s.

Dans ce cas particulier, la force de Lorentz est nulle : cela résulte du choix des composantes du champ magnétique. L'écoulement du fluide est stationnaire (comme d'ailleurs les solutions MHD) et compressible, évidemment la circulation du flot est conservée.

II) En posant que $U = V$ et $\beta X = \alpha Z$, nous obtenons comme solutions MHD :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{R_o}{V} \exp\left[2[(\alpha-1)x + \beta z] + (1-2\alpha)\int \frac{U}{V}\, ds\right] , \\ p &= \frac{A_o}{V^\kappa} \exp\left[2(\alpha x + \beta z) - (\kappa+2\alpha)\int \frac{U}{V}\, ds\right] , \\ u &= e^x U, \qquad v = e^x V, \qquad w = e^x U \\ H_1 &= -\frac{1}{\alpha}\frac{dY}{ds} e^{(\alpha x+\beta z)}, \qquad H_2 = Y\, e^{(\alpha x+\beta z)} \qquad H_3 = -\frac{1}{\alpha}\frac{dY}{ds} e^{(\alpha x+\beta z)} , \end{aligned}$$

où $R_o > 0$ et $A_o > 0$ sont des constantes arbitraires réelles ; $\alpha, \beta \in I\!R$.

Les inconnues U, V et Y sont déterminées par le système d'équations

$$U\frac{d^2Y}{ds^2} + \left[\frac{d^2U}{ds^2} + 2\frac{dU}{ds} - (\alpha+1/2)\right]\frac{dY}{ds} - (\alpha+1/2)Y = 0,$$

$$V\frac{dU}{ds} + U^2 + 2\alpha\frac{A_o}{R_o}\exp\left[-(1+\kappa)\int \frac{U}{V}\, ds\right]V^{(1-\kappa)} + \frac{VY}{4\pi R_o}\exp\left[(2\alpha-1)\int \frac{U}{V}\, ds\right]\left[\alpha Y + \frac{1}{2\alpha}\frac{d^2Y}{ds^2}\right] = 0,$$

$$\begin{aligned} V\frac{dV}{ds} + UV - \frac{A_o}{R_o V^\kappa}\exp\left[-(1+\kappa)\int \frac{U}{V}\, ds\right]\left[\kappa\frac{dV}{ds} + (\kappa+2\alpha)U\right] \\ - \frac{VY}{4\pi R_o}\exp\left[(\frac{1}{2}\alpha - 1)\int \frac{U}{V}\, ds\right]\left[\frac{1}{2\alpha^2}\frac{d^2Y}{ds^2} - \frac{dY}{ds}\right] = 0. \end{aligned}$$

Nos hypothèses de départ repose sur la symétrie suivant l'axe y. Le flot est stationnaire et compressible. La force de Lorentz présente est non conservatrice, donc la circulation du fluide n'est pas conservée par le théorème de Kelvin.

$$M_{3,20};\ \{F+K_3+\alpha H,\ P_2,\ P_3+\beta P_1\}$$

$$\text{variable de symétrie: } s=\beta\, ln[t]+\frac{x-\beta z}{t}$$

En considérant $\alpha=-1/2$ nous avons obtenu les solutions particulières suivantes :

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{R_o}{t(C_1-s)}\,,\\
p &= \frac{A_o}{t(C_1-s)}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\beta}{(1+\beta^2)}\, ln\Big[C_2(C_1-s)\Big]+\frac{(C_1-\beta)}{(1+\beta^2)}\,,\\
v &= V_o\,,\\
w &= ln[t]-\frac{1}{(1+\beta^2)}\, ln\Big[C_2(C_1-s)\Big]+\frac{\beta(C_1-\beta)}{(1+\beta^2)}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{\beta Z_o}{\sqrt{t(C_1-s)}}\,,\\
H_2 &= \frac{Y_o}{\sqrt{t}}\,,\\
H_3 &= \frac{Z_o}{\sqrt{t(C_1-s)}}\,,
\end{aligned}$$

où V_o, C_1 et $C_2 \in I\!R$; $\beta \geq 0$; R_o, A_o, Z_o et Y_o sont des constantes réelles qui doivent satisfaire la contrainte suivante:

$$A_o+\frac{1}{8\pi}[Y_o^2+(1+\beta^2)Z_o^2]=\mathcal{H}_o$$

où $\mathcal{H}_o > 0$ est une constante arbitraire. Cette contrainte traduit l'équilibre entre la pression hydrodynamique et la pression magnétique.

Ces solutions décrivent l'écoulement d'un fluide compressible et non stationnaire soumis à un champ magnétique produisant une force de Lorentz $\vec{F}_m$ qui est conservatrice ; elle dérive du gradient de pression magnétique et les forces de tension sont nulles. La circulation du fluide est donc conservée par le théorème de Kelvin. Il y a couplage entre les effets magnétiques et hydrodynamiques car $\vec{F}_m \cdot \vec{\mathrm{v}} \neq 0$.

Parmis les 104 algèbres de dimension trois, certaines d'entre elles mènent à des solutions partiellement invariantes (S.P.I.), cela provient du fait que le défaut de structure de la solution $\delta = rang\,[Q_k^\alpha] = 1$. Les systèmes réduits pour de telles sous-algèbres forment alors des systèmes d'EDP à deux variables indépendantes. En particulier, la sous-algèbre $M_{3,16}$ constitue un exemple intéressant, notamment à cause de sa symétrie sphérique, pour lequel nous avons appliqué directement l'algorithme développé par A.M. Grundland *et al.* [17] pour les SPI.

Sous-algèbre $M_{3,16}$; $\{J_1, J_2, J_3\}$

Les invariants de cette sous-algèbre sont

$$\begin{aligned} &t,\ s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \Phi^1 = \sqrt{u^2+v^2+w^2}, \quad \Phi^2 = xu+yv+zw, \\ &\Phi^3 = \sqrt{H_1^2+H_2^2+H_3^2}, \quad \Phi^4 = xH_1+yH_2+zH_3, \quad \Phi^5 = \rho, \quad \Phi^6 = p. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Nous avons que

$$rang\left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j}\right) = 7, \quad i = 1, \dots, 6, \ \ j = 1, \dots, 8.$$

Donc, nous ne pouvons obtenir à partir de ces invariants des solutions G-invariantes par la MRS [17]. Le calcul des orbites de groupe donne comme résultat

$$\begin{aligned} \rho &= R(t,s), \qquad p = A(t,s), \\ u &= u(t,\vec{x}), \quad v = \frac{(V-xu)-zw}{y}, \quad w = \frac{z(V-xu)+\varepsilon y\sqrt{[U^2-u^2](y^2+z^2)-(xu-V)^2}}{y^2+z^2}, \\ H_1 &= H_1(t,\vec{x}), \qquad H_2 = \frac{(X-xH_1)-zH_3}{y^2+z^2}, \\ H_3 &= \frac{z(Y-xH_1)+\varepsilon y\sqrt{[X^2-H_1^2](y^2+z^2)-(xH_1-Y)^2}}{y^2+z^2} \end{aligned}$$

où $\varepsilon = \pm 1$, $\Phi^1 = U(t,s)$, $\Phi^2 = V(t,s)$; $\Phi^3 = X(t,s)$, $\Phi^4 = Y(t,s)$; $\Phi^5 = R(t,s)$ et $\Phi^6 = A(t,s)$ sont des fonctions arbitraires. En substituant ces orbites de groupe dans le système MHD (1.1.17), nous obtenons un système réduit composé d'EDP qu'il est possible de résoudre sous les hypothèses suivantes :

$$u^j = x^j f(t,s), \qquad H_j = x^j g(t,s), \qquad j = 1,2,3, \tag{3.3.5}$$

où f et g sont des fonctions à être déterminées par le système MHD (1.1.17). Puisque

$$J_i\left(u^j - x^j f(t,s)\right) = 0, \qquad J_i\left(H_j - x^j g(t,s)\right) = 0\,, \quad i,j = 1,2,3,$$

les fonctions données par (3.3.5) sont donc invariantes sous l'action de $\{J_1, J_2, J_3\}$. En remplaçant les fonctions (3.3.5) dans le système MHD (1.1.17) et en prenant que $p = A_o\,\rho^\kappa$, nous arrivons au système réduit suivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial s} + sf\frac{\partial R}{\partial s} + (3f + s\frac{\partial f}{\partial s})R &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + (f + s\frac{\partial f}{\partial s})f + \kappa\frac{A_o}{s}R^{(\kappa-2)}\frac{\partial R}{\partial s} &= 0, \\ 3g + s\frac{\partial g}{\partial s} = 0, \quad A_o \in I\!R. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Par la méthode de séparation des variables, nous résolvons le système (3.3.6) pour obtenir les solutions MHD:

$$\rho = \rho_o\left[\frac{s^2}{2\alpha}\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{s^2}{\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + C_1\alpha^{3(\kappa-1)}\right]^{1/(\kappa-1)}, \; p = A_o\rho^\kappa, \; u^j = -\frac{x^j}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}, \; H_j = \frac{\alpha}{s^3}x^j, \tag{3.3.7}$$

où

$$\rho_o = \left(\frac{\kappa-1}{\kappa A_o}\right)^{1/(\kappa-1)}, \quad \alpha(t) = C_2 \exp\left[\int \eta(t')\,dt'\right], \; C_1, C_2 \in I\!R, \; j = 1,2,3.$$

La fonction η satisfait l'EDO suivante

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - (1+3\kappa)\eta\frac{d\eta}{dt} + (3\kappa - 1)\eta^3 = 0 \tag{3.3.8}$$

qui peut se résoudre comme suit. D'abord, on introduit le changement de variable

$$\zeta(\eta) = \frac{d\eta}{dt},$$

si bien que l'EDO (3.3.8) se récrit

$$\zeta\frac{d\zeta}{d\eta} - (1+3\kappa)\eta\zeta + (3\kappa-1)\eta^3 = 0\,. \tag{3.3.9}$$

En employant un second changement de variable

$$\zeta(\eta) = \eta^2\chi(\tau)\,, \quad \text{où} \quad \tau = ln\,\eta,$$

nous résolvons l'EDO (3.3.9) pour finalement obtenir

$$\tau = -\int \frac{\chi d\chi}{2\chi^2 - (1+3\kappa)\chi + (3\kappa-1)} + \tau_o\,, \quad \tau_o \in I\!R.$$

Dans ce cas, l'écoulement du fluide est compressible et irrotationnel. La force de Lorentz est nulle étant donnée que $\nabla \times \vec{H} = 0$. La circulation du fluide est donc conservée par le théorème de Kelvin.

4. Conclusion : Discussion et développements futurs.

Dans le **Chapitre 2**, nous avons développé la méthode des symétries conditionnelles comme moyen pour obtenir certaines classes de solution d'un système d'EDP hyperbolique et quasilinéaire qui ont été exprimées en termes d'invariants de Riemann et de leurs superpositions. Le principe même de cette approche a d'abord été énoncé dans l'article de A.M. Grundland et J. Tafel [14], où notamment, le critère de symétrie pour des solutions G-invariantes de rang k y a été démontré. Le progrès effectué dans cette thèse réside dans le fait d'avoir adapté la méthode des symétries conditionnelles afin d'exprimer des solutions sous la forme d'invariants de Riemann. L'élément fondamental de cette approche repose sur la condition que le graphe de la solution doit être invariant par rapport aux champs vectoriels (2.3.7) avec la propriété d'orthogonalité (2.3.5). Lorsque ces conditions sont satisfaites, on peut par un changement de variables approprié rectifier les champs vectoriels (2.3.7), et conséquemment, déterminer les conditions d'invariances qui sont imposées au système d'EDP de départ.

Les ondes de Riemann et leurs superpositions ont déjà été largement étudiées dans le cadre de la méthode générale des caractéristiques [34]. Cette approche repose sur l'imposition de certaines conditions sur les champs vectoriels γ_s et λ_s des ondes simples qui entrent en interaction. Pour comparer ces deux méthodes, il faut d'abord résumer les principes de bases qui sous-tendent la méthode générale des caractéristiques (MGC).

On postule que la forme de la solution, appelée k-onde simple, s'exprime à l'aide de l'application tangentielle du comme suit :

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu}(\mathrm{x})\mathrm{d}x^\mu = \sum_{s=1}^{k} \xi^s(\mathrm{x})\gamma_s^\alpha(\mathrm{u})\lambda_\mu^s(\mathrm{u})\mathrm{d}x^\mu, \tag{4.1.1}$$

où $\xi^s \neq 0$ sont traitées comme des fonctions arbitraires de x et les champs vectoriels $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ sont linéairement indépendants. On suppose que les commutateurs de tous les champs vectoriels $\gamma_l = \gamma_l^\alpha \partial/\partial u^\alpha$ et $\gamma_s = \gamma_s^\alpha \partial/\partial u^\alpha$ soient des combinaisons linéaires de ceux-ci :

$$[\gamma_l, \gamma_s] \in \; span\,\{\gamma_l, \gamma_s\}\,, \qquad \forall l \neq s = 1, \ldots, k\,. \tag{4.1.2}$$

Si ces conditions sont satisfaites alors, à cause du caractère homogène de la relation d'onde (2.1.4), on peut changer la norme des vecteurs γ_l et γ_s de sorte que les commutateurs de ces champs vectoriels deviennent nuls

$$[\gamma_l, \gamma_s] = 0\,, \qquad \forall l \neq s = 1, \ldots, k\,. \tag{4.1.3}$$

Par conséquent, les champs vectoriels $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ forment une distribution abélienne dans l'espace des variables dépendantes U. Il existe alors une paramétrisation de l'intégrale de surface $\mathcal{S}$ dans l'espace U qui est tangente à ces champs

$$\mathcal{S}\,: \quad \mathrm{u} = f(r^1, \ldots, r^k)\,, \tag{4.1.4}$$

de telle sorte que

$$\frac{\partial f}{\partial r^s} = \gamma_s\,, \qquad \forall\, s \neq l = 1, \ldots, k\,. \tag{4.1.5}$$

Les vecteurs d'onde $\lambda^s(\mathrm{u})$ deviennent alors des fonctions des paramètres $r^1, \ldots, r^k$. Conséquemment les différentiels de (4.1.4) sont donnés par

$$d\mathrm{u} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial r^s} dr^s\,, \quad dr^s = \sum_{\mu=1}^{p} \frac{\partial r^s}{\partial x^\mu} dx^\mu\,, \tag{4.1.6}$$

desquels, avec la forme postulée (4.1.1), mènent au système composé des formes extérieures

$$dr^s = \xi^s(\mathrm{x}) \lambda^s_\mu(r^1, \ldots, r^k)\, dx^\mu\,. \tag{4.1.7}$$

Tel qu'il est montré dans [4] et [33] le système (2.1.3) admet des solutions si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial r^l} \in \; span\,\{\lambda^s, \lambda^l\}\,, \qquad \forall\, s \neq l = 1, \ldots, k\,. \tag{4.1.8}$$

Les conditions (4.1.3) et (4.1.8) assurent que l'ensemble des solutions du système de départ (2.1.3), sujet à la forme préscrite par (4.1.1), dépend de k fonctions arbitraires à une seule variable. Il a été démontré dans [33] que toutes les solutions (*i.e.* les intégrales générales) du système (4.1.7), sous les conditions (4.1.8), peuvent être obtenues en résolvant (par rapport aux variables $r^1, \ldots, r^k$) le système exprimé sous la forme implicite

$$\lambda^s_\mu(r^1, \ldots, r^k)\, x^\mu = \psi^s(r^1, \ldots, r^k) \tag{4.1.9}$$

où ψ^s sont des fonctions arbitraires de k variables $r^1, \ldots, r^k$. Les solutions exprimées sous la forme (4.1.9) sont constantes sur les hyperplans à $(p-k)$ dimensions perpendiculaires aux vecteurs d'onde λ^s.

Comme on vient de le voir, les deux méthodes discutées exploitent les propriétés d'invariance du système d'équations de départ. Dans la MGC, on emploie l'aspect géométrique de la surface intégrale (4.1.4), alors que pour la MSC on considère les propriétés d'invariance comme des propriétés des groupes de symétrie du système de départ (2.1.3). Donc, ces deux approches décrivent deux facettes d'un même objet géométrique.

Il existe néanmoins deux différences essentielles entre la méthode générale des caractéristiques et notre approche. Les ondes multiples de Riemann définies par la formule (4.1.1) constituent une classe de solutions plus limitées que les solutions de rang k telles que postulées dans la méthode des symétries conditionnelles. Cette différence provient du fait que les fonctions scalaires $\xi^s(\mathrm{x})$ présentes dans l'expression (4.1.2) (décrivant les profils des ondes simples) sont remplaçées dans notre cas (*i.e.* dans l'expression (2.3.3)) par des matrices Φ de dimensions $k \times k$, cela permet en conséquence un plus large éventail de données initiales.

La seconde différence résulte des conditions (4.1.3) et (4.1.8) faites sur les champs vectoriels γ_s et λ^s, et qui assurent la solvabilité du problème par la méthode générale des caractéristiques, ne sont plus nécéssaires dans le contexte de la méthode des symétries conditionnelles. Cela nous permet de considérer des configurations plus complexes pour les ondes simples qui entrent en interactions.

Pour tester l'efficacité de notre approche, nous l'avons employée pour construire des solutions de rang deux admises par le système MHD. Les résultats trouvés sont très similaires à ceux déja obtenus par la méthode générale des caractéristiques. Toutes nos solutions de rang deux sont en faites des ondes doubles (dans le sens de la définition (4.1.1)). Cela est largement dû aux simplifications aditionnelles qui ont été faites pour simplifier les calculs : on a posé certaines configurations particulières pour les vecteurs d'ondes λ^s. La plupart des solutions trouvées sont déja traitées dans la littérature: *cf.* [3] [24]. En outre, certaines solutions comme (2.4.63)-(2.4.65), (2.4.69)-(2.4.70), (2.4.80)-(2.4.82) sont nouvelles. Mentionnons, qu'au moins dans le cas des équations MHD, notre méthode s'avère être plus commode à utiliser que la MGC. En particulier, les conditions d'invariance (2.3.14) nous fournissent un choix de coordonnées qui facilite grandement l'intégration du système réduit (2.3.17).

Il existe une extension de la méthode générale des caractéristiques, discutée dans [34] et [20]. Celle-ci permet de décrire d'autres types de superposition non-linéaire d'ondes simples qui ne peuvent s'exprimer en termes d'invariants de Riemann. La condition nécéssaire pour l'existence de telles classes de solutions du système (4.1.1) se pose comme suit

$$[\gamma_s, \gamma_p] = C^l_{sp}\,\gamma_l \qquad \forall\, s \neq p \in \{1, \dots, k\} \tag{4.1.10}$$

$$\mathcal{L}_{\gamma_s} \lambda^p \in \; span\, \{\lambda^s, \lambda^p\}\,, \tag{4.1.11}$$

où les coefficients C^l_{sp} ne sont plus nécéssairement des constantes (ils peuvent en générale dépendre de u), et $\mathcal{L}_{\gamma_s}\lambda^p$ représente la dérivée de Lie d'une forme λ^p le long du champ vectoriel γ_s. Il s'ensuit des équations (4.1.10) et (4.1.11) que l'ensemble des champs vectoriels $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ génère le module de Lie $\{\,|\gamma_1, \dots, \gamma_k|\,\}$ (*i.e.* ces champs sont fermés par rapport à leurs commutateurs). Il est prouvé que si la condition (4.1.10) est satisfaite alors il existe des sous-systèmes d'équations (appelés systèmes réduits) reliés à un module de Lie donné qui possèdent les propriétés suivantes.

(i) Les sous-systèmes obtenus sont fortement hyperboliques.

(ii) Les sous-systèmes contiennent k équations pour k variables. Cela signifie qu'il existe une certaine paramétrisation de la surface intégrale $\mathcal{S}$ du système de départ (2.1.3) donnée par

$$\mathrm{u} = f(\tau^1, \ldots, \tau^k), \tag{4.1.12}$$

telle que

$$\frac{\partial f}{\partial \tau^s} = \alpha_s^1 \gamma_1 + \ldots + \alpha_s^k \gamma_{(s)}, \qquad s = 1, \ldots, k. \tag{4.1.13}$$

(iii) Chaque solution d'un système réduit mène à une solution du système d'équations de départ.

L'interprétation physique de ces classes de solutions recouvre également les cas où de nouveaux types d'onde sont produits lors des superpositions d'ondes simples d'autres types. Par exemple, la génération d'ondes peut se manifester quand les commutateurs (4.1.10) des champs vectoriels γ_s et γ_p sont des combinaisons linéaires de ces deux champs mais aussi d'autres champs vectoriels $\gamma_l, \ldots, \gamma_t$. Cela implique que les ondes associées aux champs vectoriels $\gamma_l, \ldots, \gamma_t$ prennent part dans le processus de superposition.

Dans le cas d'une superposition de deux ondes simples, on obtient de nouvelles ondes de différents types qui ne sont pas initialement présentes à l'instant $t = 0$. Si ces nouvelles ondes ne disparaissent pas asymptotiquement lorsque $t \to \infty$, l'effet est permanent. Selon la terminologie employée, ce phénomène est interprété comme une "superposition non élastique".

Les résultats de l'analyse des équations MHD nous donnent que les commutateurs des champs vectoriels $\gamma_l, \ldots, \gamma_8$ génèrent des modules de Lie dans les deux cas suivants [34].

1. Quand $\vec{H} = (H_1, H_2, 0)$

$$\left\{ |F_-, A_-, S_-, S_+, A_+, F_+| \right\}, \ \left\{ |F_-, S_-, E, S_+, F_+| \right\}, \ \left\{ |F_-, S_-, S_+, F_+| \right\}. \qquad (4.1.14)$$

2. Quand $\vec{H} = (0, 0, H_3)$

$$\left\{ |F_-, A_-, E, A_+, F_+| \right\}, \quad \left\{ |E, A_-, A_+, F_+| \right\}, \quad \left\{ |F_-, E, F_+| \right\}. \qquad (4.1.15)$$

Ceci nous permet de déterminer quel type d'onde est associé à l'ensemble des champs générés durant le processus de superposition. Par exemple, quand $\vec{H} = (H_1, H_2, 0)$ le résultat de la superposition de deux ondes magnétoacoustiques rapides F_+ et F_- peut se représenter symboliquement par

$$F_+ + F_- \longrightarrow F'_+ + S'_+ + S'_- + F'_- \,. \qquad (4.1.16)$$

Dans ce cas particulier, le module de Lie contient les deux champs vectoriels γ_{F_+} et γ_{F_-} mais aussi les deux champs γ_{S_+} et γ_{S_-}. Cela signifie que les ondes magnétoacoustiques lentes S_+ et S_- associées aux champs γ_{S_+} et γ_{S_-} participent au processus de superposition. Donc, lorsque deux ondes magnétoacoustiques rapides F_+ et F_- se superposent; deux nouvelles magnétoacoustiques lentes S_+ et S_- en résultent (*i.e.* un autre type d'onde que celui présent à l'instant initial $t = 0$). Si cet effet est permanent, c'est-à-dire que les ondes produites ne sont pas évanescentes pour $t \to \infty$, alors ce phénomène correspond à une superposition non-élastique d'ondes magnétoacoustiques rapides F_+ et F_- et lentes S_+ et S_-. Cet exemple illustre pourquoi la superposition de deux ondes magnétoacoustiques lentes et rapides ne peut s'expliquer, de manière générale, à partir des invariants de Riemann tels que décrits dans le **Chapitre 2**: seules certaines solutions ont été y obtenues sous certaines conditions particulières.

La MRS nous a fournit plusieurs classes particulières de solutions qui sont données sous des formes explicites et dans certains cas sous une forme implicite. Selon la sous-algèbre $M_{3,i}$ à laquelle elles sont associées, nous résumons ces solutions de la manière suivante :

• Les solutions MHD dont le champ magnétique $\vec{H}$ n'a que deux composantes. Pour cela, on se réfère au tableau (3.2) dans lequel il faut distinguer deux types de solutions exprimées sous une forme explicite. À l'exception des solutions $M_{3,18}$, $M_{3,28}$, $M_{3,29}$, $M_{3,48-49}$, $M_{3,51}$, $M_{3,85-88}$, qui s'expriment en termes de fonctions élémentaires, toutes les autres solutions s'expriment à l'aide des fonctions trigonométriques. Notons que pour toutes ces solutions, la force de Lorentz est conservatrice et $\vec{F}_m \cdot \vec{v} \neq 0$: les effets magnétiques et hydrodynamiques sont couplés. La circulation du fluide est conservée selon le théorème de Kelvin.

• Les solutions MHD données dans le tableau (3.3) s'expriment sous des formes implicites. Notons qu'elles sont des fonctions de t et $\vec{x}$. Elles décrivent un flot non stationnaire et compressible qui est soumis à un champ magnétique $\vec{H}$ produisant une force de Lorentz qui ne dépend que du temps. La circulation du fluide est donc conservée. Aussi, nous avons que $\vec{F}_m \cdot \vec{v} \neq 0$ donc les effets magnétiques et hydrodynamiques sont couplés.

• Pour les solutions données dans les tableaux (3.4) et (3.5) nous avons réduit le système MHD de départ (1.1.17) à un système composé de deux équations intégro-différentielles qui dans certains cas particuliers nous avons pu les résoudre (voir l'exemple basé sur la sous-algèbre M_3 ; $\{P_o+\alpha H, P_1+\beta H, P_2+\beta H\}$). Certaines propriétés qualitatives communes à toutes ces solutions. Le flot est tridimensionnel compressible et stationnaire, la force de Lorentz $\vec{F}_m$ n'est pas conservatrice (les forces de tension sont présentes) et $\vec{F}_m \cdot \vec{v} \neq 0$. De manière explicite, nous constatons que les composantes de la vitesse $\vec{v}$ sont couplées aux composantes du champ magnétique $\vec{H}$.

• Pour les solutions données dans le tableau (3.6) se caractérisent par le fait qu'elles soient stationnaire (à part $M_{3,2}$) et que les composantes de la vitesse et celles du champ magnétique possèdent la même polarisation dans le plan xOy. Le système réduit se résume à deux équations intégro-différentielles. L'écoulement du fluide est compressible et tridimentionnel. La force de Lorentz n'est pas conservatrice et les effets magnétiques et hydrodynamiques sont couplés car $\vec{F}_m \cdot \vec{v} \neq 0$

Pour la plupart des sous-algèbres dont la variable de symétrie est du type cylindrique, conique et spirale logarithmique (voit tableau (3.1)), les systèmes réduits qui leurs sont associés n'ont pu être complètement résolus du fait de la grande complexité des équations réduites. Néanmoins pour chaque type de variable de symétrie, nous avons obtenu certaines solutions particulières : solutions cylindriques ; $M_{3,1}$; $\{J_3+K_3+\alpha H, P_o+\beta H, P_3\}$, solutions coniques ; $M_{3,64}$; $\{J_3+\alpha H, F+\beta H, P_3\}$ et $M_{3,65}$; $\{J_3+\alpha H, F+\beta H, P_3\}$, solutions du type spirale logarithmique ; $M_{3,30}$; $\{J_3+\alpha_1 F+\alpha_2 G+\alpha_3 H, P_o, P_3\}$, $M_{3,75}$; $\{J_3+P_o+\alpha H, F+G+\beta_1 P_o+\beta_2 H, P_3\}$ et $M_{3,82}$; $\{J_3+\alpha_1 F+\alpha_2 H, F+\beta_1 G+\beta_2 H, P_3\}$.

Pour le reste des sous-algèbres, nous nous sommes limités à certains cas particuliers auxquels nous avons pu résoudre le sytème réduit. Par exemple la sous-algèbre $M_{3,24}$ pour laquelle nous avons obtenu un système d'équations algébriques en imposant que la force de Lorentz soit nulle.

En ce qui concerne le cas des solutions partiellement invariantes, dans le cas de la sous-algèbre $M_{3,16}$, on a obtenu une solution invariante (à symétrie sphérique) à partir de la méthode de la transversalité faible [18]. Cette thèse démontre le potentiel d'application des différentes techniques basées sur l'approche de Lie aux équations de la MHD.

Références

[1] A. I. Akhiezer *et al*, *Plasma Electrodynamics*, Vol. 1, Pergamon Press, Oxford, 1975.

[2] H. Alfvén, *Cosmic Electrodynamics*, Oxford University Press, 1950.

[3] G. Boillat,*La Propagation des Ondes*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[4] M. Burnat, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn.*, **17, 11-12**, 37 (1969).

[5] B. Champagne, W. Hereman et P. Winternitz , *Comp. Phys. Commun.*, **66**, 319 (1991).

[6] P. A. Clarkson, P. Winternitz, Symmetry reduction and exact solutions of nonlinear partial differential Equations, edit.: R. Conte, Springer-Verlag, Berlin, 591-660, 1999.

[7] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol.2, Interscience, New York. 1962.

[8] S. V. Coggeshall, *J. Phys. Fluids A.*, **3(5)**, 757 (1991).

[9] G. W. Bluman, J. D. Cole, *J. Math. Mech.*, **18**, 1025 (1969).

[10] P.A. Davidson, *An Introduction to Magnetohydodynamics*, Cambridge press, Cambridge, 2001.

[11] W.D. D'haeseler, W.N.G Hitchon, J.D. Callen, J.L. Shohet, *Flux Coordinates and Magnetic Field Structure*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[12] J. C. Fuchs, *J. Math. Phys.*, **32**, 1703 (1991).

[13] W.I. Fushchych, *Ukr. Math. J.*, **43**, 1456 (1991).

[14] A. M. Grundland, J. Tafel, *J. Math. Anal. Appl.*, **198**, 879 (1996).

[15] A. M. Grundland, J. Tafel, *J. Math. Phys.*, **36,3**, 1426 (1995).

[16] A. M. Grundland, L. Lalague, *Can. J. Phys.*, **72**, 362 (1994).

[17] A. M. Grundland, L. Lalague, *Can. J. Phys.*, **73**, 463 (1995).

[18] A. M. Grundland, P. Tempesta, et P. Winternitz, *J. Math. Phys.* **44,6**, 2704, (2003).

[19] A. M. Grundland, R. Zelazny, *J. Math. Phys.*, **24,9**, 2305 (1983).

[20] A. M. Grundland, R. Zelazny, *Simple Waves and their Interactions in Quasilinear Hyperbolic Systems*, Publ. Inst. Geoph. **A-14**, 162, Polish Scientific Publ. Ed. R. Teisseyre, Warsaw, (1982).

[21] W. Hereman, *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, vol. 3, 367, CRC Press, Boca Raton, 1996.

[22] Nail H. Ibragimov, *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1999.

[23] E. Infeld, G. Rowlands, *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*, Cambridge press, Cambridge, 2000.

[24] A. Jeffrey, T. Tanuiti, *Non-Linear Wave Propagation.* Academic Press, New York, 1964.

[25] L. Landau, E. Lifshitz, *Electrodynamique des Milieux Continus*, MIR, Moscou, 1989.

[26] L. Gagnon, *Can. J. Phys.*, **67**, 1 (1989).

[27] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[28] P. J. Olver, P. Rosenau, *SIAM J. Appl. Math.*, **47,2**, 263 (1987).

[29] P. J. Olver, E.M. Vorobev, Nonclassical and Conditional Symmetries, CRC Handbook of Lie Group Analysis, Editeur: N H Ibragimov, CRC Press, Londre, 1995, Vol. 3, Chapt XI.

[30] P. J. Olver, *Applied Numerical Math.*, **10**, 307 (1992).

[31] J. Patera, P. Winternitz et H. Zassenhauss, *J. Math. Phys.*, **15**, 1318 (1974); *J. Math. Phys.*, **15**, 1932 (1974); *J. Math. Phys.*, **16**, 1615 (1975); *J. Math. Phys.*, **17**, 717 (1976).

[32] J. Patera, P. Winternitz , R. T. Sharp et H. Zassenhauss, *Can J. Phys.*, **54**, 950 (1976); *J. Math. Phys.*, **18**, 2259 (1977).

[33] Z. Peradzynski, *Bull. Acad. Pol. Sci, Ser. Sci. Tech.*, **19**, 59 (1969).

[34] Z. Peradzynski, Geometry of interactions of Riemann waves, Research Notes in Math. 111, Ed. L. Debnath. Advances in Nonlinear Waves, Vol. 2, Pitman Adv. Publ., Boston, 1985.

[35] B. Rozdestvenskii, N. Yanenko, *System of Quasilinear Equations and their Applications to Gaz Dynamics*, AMS, vol. 55, Providence, 1983.

[36] I. L. Ryhming, *Dynamique des Fluides*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne (1991).

[37] P.Shih-I,*Magnetogasdynamics and Plasma Dynamics*, Springer-Verlag, Wein, 1962.

[38] D.G Swanson, *Plasma Dynamics*, Academic Press, New York (1989).

[39] P. Winternitz, *Lie groups and solutions of nonlinear partial differential equations*, **CRM**, 1841 (1993).

[40] P. Winternitz, A. M. Grundland, J. A. Tuszynski, *J. Phys. C*, **21**, 4931 (1988).