

2m 11.3010.10

Université de Montréal

**MODÉLISATION DES STENTS EN  
CHIRURGIE CARDIAQUE**

par

**Vito Longo**

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Mathématiques

mars 2003



QA

3

U54

2003

n.005

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**MODÉLISATION DES STENTS EN  
CHIRURGIE CARDIAQUE**

présenté par

**Vito Longo**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Jacques Bélair*

---

(président-rapporteur)

*Michel Delfour*

---

(directeur de recherche)

*André Garon*

---

(co-directeur)

*Anne Bourlioux*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

*28 février 2003*

---

## SOMMAIRE

---

Ce mémoire présente une étude sur le design des stents afin qu'un produit mis sur le stent soit uniformément diffusé dans une section d'artère. Cette étude a été principalement consacrée à la question du nombre optimal de struts que le stent possèdera afin de distribuer le produit.

Un modèle simple de la section d'artère, qui ne comprend que la lumière et la paroi, est représenté par deux cylindres concentriques de rayons différents. La concentration du produit est donnée par les équations de diffusion-transport dans la lumière et de diffusion dans la paroi. Des conditions aux frontières et aux interfaces sont imposées ainsi que des conditions initiales.

On intègre la concentration par rapport au temps afin de pouvoir travailler avec la dose et on réécrit les équations sous forme variationnelle. Ensuite, on fait les hypothèses que la mince couche de produit qui recouvre le stent peut être réduite à zéro et on étudie le cas lorsque le nombre de struts qui compose le stent tend à l'infini tout en gardant la surface de contact constante, ce que l'on désigne par le stent asymptotique.

Avant d'effectuer des simulations numériques, on normalise le tout pour travailler avec des équations dont les variables sont sans dimension.

Pour résoudre numériquement ce problème, on exploite la symétrie cylindrique en réduisant le problème de la dimension 3 à la dimension 2 et on maille la surface génératrice 2- $D$  qui représente la section d'artère sous étude. On résout le problème pour les cas  $N = 4, 16, 64$  struts ainsi que pour le cas asymptotique grâce à un logiciel fourni par André Garon qui résout l'équation convection-diffusion par une méthode SUPG. On conclut que lorsque le nombre de struts augmente, la diffusion du produit est plus uniforme dans la paroi mais que le

produit demeure dans la région cible. Dans le cas asymptotique, le transport du sang dans la lumière a pour effet d'acheminer le produit au delà de la région cible. Ceci est un phénomène qui est favorable dans la convalescence du patient puisque ceci peut réduire la possibilité de resténose si le produit possède un agent qui empêche la prolifération des cellules lisses qui provoquent la resténose.

Les résultats de ces simulations doivent être utilisés en relation avec les études sur l'effet de différents produits sur les phénomènes biochimiques se produisant dans la paroi. Il est clair qu'une dose minimale est nécessaire pour retarder la prolifération des cellules musculaires lisses, mais une dose excessive peut aussi être nocive. Ce sont les expériences en laboratoire ou les modélisations plus fines des différentes couches de la paroi qui pourront orienter les travaux subséquents sur le design de stents en vue d'une application plus immédiate en cardiologie interventionnelle.

**Mots clefs :** Modélisation, design géométrique, homogénéisation, sténose, stent, dose, diffusion, transport, cardiologie, passoire de Neumann.

## ABSTRACT

---

This thesis investigates the design of stents to uniformly distribute a product deposited on its surface along a segment of artery. This study has primarily focused on the question of the optimal number of struts that the stent will have in order to distribute the product.

A simple model of the artery section, that is composed of only the lumen and the arterial wall, is represented by two concentric cylinders of different radii. The concentration of the product is given by the diffusion-transport equation in the lumen and the diffusion equation in the wall. Boundary and interface conditions are specified as well as initial conditions.

We integrate the concentration with respect to the time variable in order to work with the dose and we rewrite the equations in variational form. We then make the assumption that the thin layer of product that covers the stent can be reduced to zero and we study the case when the number of struts that make up the stent goes to infinity while keeping the contact surface constant, which we refer to as the asymptotic stent.

Before performing numerical simulations, we normalize everything in order to work with equations where the variables are without dimensions.

To numerically solve this problem, we exploit the cylindrical symmetry by reducing the problem from 3- $D$  to 2- $D$  and we mesh the 2- $D$  surface that generates the cylinder that represents the artery section under analysis. We solve the problem for the cases of  $N = 4, 16, 64$  struts and the case of the asymptotic stent thanks to a software provided by André Garon that solves the convection-diffusion equation using a SUPG method. We conclude that when the number of struts increases, the diffusion of the product is more uniformly distributed in the

arterial wall but that the product remains in the targeted area. In the asymptotic case, the blood flow in the lumen causes the product to be transported beyond the targeted area. This phenomenon is favorable in the patients convalescence because it might reduce the possibility of restenosis if the product carries an agent that prevents the proliferation of smooth muscle cells responsible for the restenosis.

The results of the simulations must be interpreted in relation to the investigation of the effect of various products on the biochemical phenomena occurring in the wall. It is clear that a minimal dose is required to slow down the proliferation of smooth muscle cells, but an excessive dose might be toxic. Laboratory experiments or finer modeling of the different layers making up the wall will orient subsequent work on the design of stents in view of more direct applications in interventional cardiology.

**Key words :** Modeling, geometrical design, homogenization, stenosis, stent, dose, diffusion, transport, cardiology, Neumann sieve.

## REMERCIEMENTS

---

J'aimerais remercier sincèrement mon directeur de recherche, Monsieur Michel C. Delfour, pour m'avoir confié ce projet. Je lui témoigne toute ma gratitude pour sa confiance envers moi ainsi que pour sa patience pour me donner des explications lorsque j'étais mal pris. Son approche pédagogique a grandement contribué à alimenter ma motivation pour ce projet et pour la recherche scientifique.

Je remercie aussi mon co-directeur de recherche, Monsieur André Garon de l'École Polytechnique, sans qui ce projet n'aurait pas été possible. En tant qu'ingénieur, il m'a appris à regarder les problèmes d'un autre point de vue. De plus, sans son aide et les ressources à sa disposition (ses logiciels et ses ordinateurs), la partie numérique n'aurait pas pu être réalisée.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance pour leur support financier au  $RCM_2$  pour la bourse dans le cadre du projet sur le *Design et contrôle des dispositifs médicaux* et aux fonds de recherche de M. Delfour provenant du *CRSNG*.

Je tiens à remercier Julie Grant, étudiante de M. Garon à la maîtrise, qui a collaboré à la programmation du code pour la création du maillage.

J'adresse mes remerciements au personnel du département de mathématiques et de statistique ainsi qu'au centre de recherches mathématiques pour avoir fait de mon passage à l'Université de Montréal une période agréable et plaisante.

Finalement, je tiens à remercier les gens les plus importants dans ma vie sans qui tout ceci n'aurait pas été possible : ma famille. Mes parents, Angiolino et Mariannina Longo, mon frère Steve et mes grand-parents, Nello et Franceschina Bonacci, qui m'ont encouragé tout le long de mes études.

# Table des matières

---

<b>Sommaire</b> .....	iii
<b>Abstract</b> .....	v
<b>Remerciements</b> .....	vii
<b>Table des figures</b> .....	x
<b>Liste des tableaux</b> .....	xii
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1. Équations de la concentration et de la dose</b> .....	4
1. Géométrie.....	4
2. Équations de la concentration.....	8
3. Équations de la dose.....	10
4. Formulation variationnelle de la dose.....	11
<b>Chapitre 2. Équations de la dose lorsque l'épaisseur du produit tend vers zéro</b> .....	16
1. Équation variationnelle à épaisseur variable.....	16
2. Équation variationnelle de la dose limite.....	18
3. Équations au sens fort pour $q^0$ .....	22
<b>Chapitre 3. Stent asymptotique</b> .....	24
1. Spécification de la géométrie du stent limite.....	24

2.	Passage à la limite pour la dose.....	25
3.	Équations au sens fort de la dose pour le stent asymptotique.....	29
<b>Chapitre 4. Équations non-dimensionalisées.....</b>		<b>31</b>
1.	Mise à l'échelle des équations de Navier-Stokes.....	31
2.	Mise à l'échelle des équations de diffusion-convection.....	33
3.	Choix du profil de vitesse $u$ et de $U_0$ à partir du débit d'entrée.....	37
4.	Résumé des choix des paramètres des équations.....	39
<b>Chapitre 5. Résultats numériques.....</b>		<b>40</b>
1.	Maillage du domaine.....	40
2.	Méthodes utilisées pour résoudre le problème.....	46
3.	Résultats des simulations numériques.....	46
3.1.	Cas $N = 4, 16, 64$ .....	47
3.2.	Cas du stent asymptotique.....	53
3.3.	Qualité des résultats numériques.....	57
<b>Annexe A. Inégalité de Poincaré.....</b>		<b>60</b>
1.	Un lemme.....	60
<b>Annexe B. Théorème de la trace.....</b>		<b>67</b>
1.	Le théorème.....	67
<b>Annexe C. Convergence faible.....</b>		<b>76</b>
1.	La convergence.....	76
<b>Bibliographie.....</b>		<b>79</b>

## Table des figures

---

	<b>Introduction</b> .....	1
0.1	Stent de Wiktor tel qu'illustré dans le brevet U.S. No. 4,886,062.....	2
0.2	Quelques configurations de stents. ....	3
	<b>Chapitre 1</b> .....	4
1.1	Schéma représentant la lumière $\tilde{\Omega}_l$ , le produit $\tilde{\Omega}_s$ et la paroi $\tilde{\Omega}_p$ dans $\mathbf{R}^3$ et les surfaces 2- $D$ $\Omega_l$ pour la lumière, $\Omega_s$ pour le produit, et $\Omega_p$ pour la paroi qui les génèrent.....	6
1.2	Représentation schématique en dimension 2 des frontières et des interfaces. ....	6
4.1	Représentation schématique de la lumière, du produit et de la paroi. .	12
	<b>Chapitre 3</b> .....	24
1.1	Représentation schématique du stent lorsque le nombre de struts $N$ tend vers l'infini.....	24
	<b>Chapitre 5</b> .....	40
1.1	Maillage de la section d'entrée entre $z = 0$ et $z = z_0$ et des premières sections de struts.....	44
1.2	Maillage de deux sections de struts.....	45
3.1	Graphe 1 : dose en fonction de $r$ et $z$ pour $N = 64$ . ....	48
3.2	Graphe 2 : dose dans la région aval et au début du stent.....	49
3.3	Graphe 3 : dose dans la région au centre du stent.....	50
3.4	Graphe 4 : dose vue du côté paroi.....	51

3.5	Coupe de la dose en $r = R + E$ en fonction de $z$ pour $N = 4, 16, 64 \dots$	52
3.6	Coupe de la dose en $r = R + E$ en fonction de $z$ pour $N = 4, 16, 64$ (zoom).....	53
3.7	Graphe 5 : graphe du stent asymptotique.....	54
3.8	Comparaison de la dose en $r = R + E$ pour le stent asymptotique pour différents maillages.....	55
3.9	Comparaison entre $N = 4, 16, 64$ et le stent asymptotique.....	56
3.10	Comparaison entre $N = 4, 16, 64$ et le stent asymptotique (zoom)....	57
3.11	Comparaison entre $N = 64$ et le stent asymptotique pris avec divers maillages.....	58
3.12	Comparaison entre $N = 4, 16, 64$ et le stent asymptotique pris avec divers maillages (zoom).....	59
	<b>Annexe A</b> .....	60
1.1	Partition de $\tilde{\Omega}$ .....	61

## Liste des tableaux

---

<b>Chapitre 5</b> .....	40
0.1 Paramètres du sang et du stent de Wiktor (longueur normalisée par rapport à $L_0 = 3\text{mm}$ ). .....	41
0.2 Paramètres utilisés pour la simulation numérique.....	42

# INTRODUCTION

---

Dans le passé, lorsqu'une personne souffrait d'une maladie cardiaque telle que la sténose d'une artère ou d'une dissection aortique<sup>1</sup> qui peut entraîner l'athérosclérose<sup>2</sup>, le seul recours que cette personne était de subir une intervention chirurgicale majeure (i.e. une opération à cœur ouvert). En 1984, *Dominik M. Wiktor* (un ingénieur électrique) subissait une telle opération afin de rectifier une dissection aortique. Après l'opération, il s'est demandé si une telle réparation vasculaire ne pouvait pas être accomplie par une intervention chirurgicale moins traumatique pour le patient et il a commencé à se renseigner sur l'angioplastie<sup>3</sup>.

Ainsi, il a développé le *premier stent dit stent de Wiktor*. En gros, il ressemble à un ressort comprimé (le stent) que l'on attache au bout d'un cathéter<sup>4</sup> qui est muni d'un ballon à son extrémité. En effet, le ballon (dégonflé) est recouvert par le stent. Lorsqu'on introduit le cathéter dans l'artère qui est bloquée, le ballon est gonflé et le stent est déployé jusqu'à ce que son nouveau diamètre coïncide avec celui de la lumière de l'artère et le stent se retrouve collé sur la paroi interne de l'artère. Ensuite, le ballon est dégonflé et le cathéter est retiré de l'artère.

---

<sup>1</sup>Une condition où il y a saignement dans et le long de la paroi de l'aorte (l'artère majeure du cœur). Cette condition peut aussi causer un gonflement de l'aorte (anévrisme).

<sup>2</sup>Épaississement et perte d'élasticité des parois internes des artères, accompagnés de formation d'athéromes qui sont des lésions circonscrites de la surface interne d'une artère, sous forme d'une plaque jaunâtre, formée par le dépôt de petits nodules gras, et provoquant la dégénérescence des régions affectées.

<sup>3</sup>Opération visant à réparer ou remodeler un vaisseau.

<sup>4</sup>Tige pleine ou creuse servant à explorer, à dilater un canal, un orifice ou à introduire ou prélever des liquides.

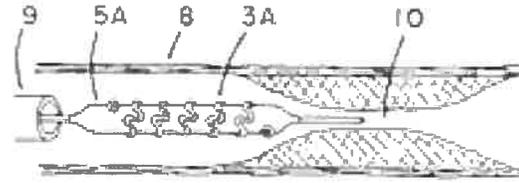


FIG. 0.1. Stent de Wiktor tel qu'illustré dans le brevet U.S. No. 4,886,062.

Quoique moins traumatique pour le patient, cette méthode peut avec le temps provoquer une thrombose<sup>5</sup> dûe au fait que lors du déploiement du stent, la paroi de l'artère subit des déchirures. Ces blessures vont provoquer la prolifération de cellules lisses. Il en résulte dans plusieurs cas une resténose de l'artère. Afin de prévenir ceci, les stents sont maintenant recouverts d'un produit qui réduit la prolifération des cellules lisses et retarde ou élimine la resténose.

Dans ce qui va suivre, on va se concentrer sur la recherche de la forme du stent afin de pouvoir soigner la région cible avec le moins de produit possible.

Tout d'abord, quelques remarques préliminaires. On utilise un modèle assez simple de la lumière et de la paroi de l'artère : la région entre deux cylindres concentriques assez longs afin de ne pas influencer le design dans la petite région occupée par le stent. On suppose que le stent est composé d'un nombre fini de struts qui sont des anneaux de rayon  $R$  sans épaisseur et de largeur uniforme. Dans son état non-déployé, toutes les struts<sup>6</sup> sont alignées les unes à côté des autres sans aucun espace entre elles et elles forment un cylindre d'épaisseur nulle et aire totale égale à  $2\pi R\rho L_s$ , où  $R$  est le rayon du cylindre et  $\rho L_s$  est sa longueur totale. La densité du produit par unité de surface  $c_s$  est constante et la masse totale de produit est  $m = c_s 2\pi R\rho L_s$ , donc fixée. Lorsque le stent est déployé, de

<sup>5</sup>Formation d'un caillot dans un vaisseau sanguin ou dans une des cavités du cœur.

<sup>6</sup>Dans notre contexte, le terme *strut* est utilisé pour désigner les parties du stent qui sont appuyées contre l'intérieure de la paroi de l'artère afin de garder la lumière ouverte pour que le sang puisse circuler. La strut peut être comparée à un *étai* (grosse pièce de bois, de métal destinée à soutenir provisoirement) ou à un *étrésillon* (pièce de bois qui soutient les parois d'une tranchée ou d'une galerie de mine, un mur qui se déverse ou qu'on reprend en sous-œuvre). Dans le cas où le stent est de la forme d'un ressort hélicoïdale, les struts sont les anneaux du ressort. Il y a cependant d'autres configurations comme des treillis.

l'espace est créé entre les struts et la longueur de la nouvelle région occupée par le stent est  $L_s$ . Le nombre  $0 < \rho < 1$  est le rapport entre la surface occupée par les struts et la surface totale,  $2\pi RL_s$ , occupée par le stent déployé. On peut se référer à  $\rho$  comme le *rapport de déploiement*.

On étudie la distribution de la dose totale du produit diffusé dans la paroi juste au-dessus du stent en fonction du nombre de struts tout en gardant l'aire totale du stent, la densité par unité de surface du produit et le rapport  $\rho$  fixés. Ceci veut dire que le nombre de struts augmente tandis que leur largeur et l'espace entre deux struts diminuent. On peut obtenir les équations pour la dose associée au *stent asymptotique* et étudier la dose totale absorbée par la paroi. Lorsque le produit est appliqué à l'intérieur et à l'extérieur du stent, le modèle asymptotique prédit que les deux côtés contribuent à augmenter la dose totale absorbée par la paroi.

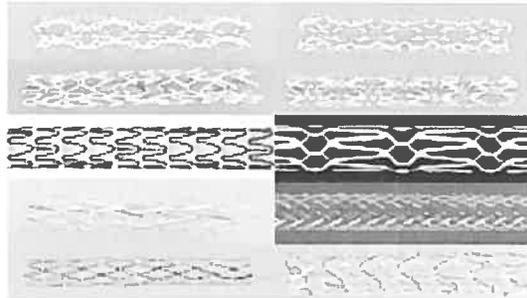


FIG. 0.2. Quelques configurations de stents.

# Chapitre 1

---

## ÉQUATIONS DE LA CONCENTRATION ET DE LA DOSE

### 1. GÉOMÉTRIE

Considérons une section cylindrique d'une artère de longueur  $H$  où un stent va être inséré. Pour simplifier, on suppose que l'artère est constituée de deux régions homogènes : la *lumière* et la *paroi*. Des modèles plus réalistes de la paroi avec plusieurs couches peuvent être considérés, mais dans notre cas le modèle simplifié va suffire. Avant l'insertion du stent, on fait l'hypothèse que la lumière est l'intérieur d'un cylindre ouvert

$$C_R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, z) : x_1^2 + x_2^2 < R^2, \quad 0 < z < H\} \quad (1.1)$$

de rayon  $R$  et de longueur (de la portion de l'artère sous étude)  $H$ . La paroi est le domaine ouvert

$$C_{R+E} \setminus \overline{C}_R \quad (1.2)$$

entre le cylindre fermé  $\overline{C}_R$  et le cylindre ouvert

$$C_{R+E} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, z) : x_1^2 + x_2^2 < (R + E)^2, \quad 0 < z < H\} \quad (1.3)$$

de rayon  $R + E$  et de longueur  $H$ , et  $E$  est l'épaisseur de la paroi.

Un stent d'épaisseur nulle et de longueur  $L_s < H$  va être déployé dans la *région ciblée*

$$\tilde{\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x_1, x_2, z) : x_1^2 + x_2^2 = R^2, \quad \frac{H - L_s}{2} \leq z \leq \frac{H + L_s}{2} \right\} \quad (1.4)$$

de l'interface entre la lumière et la paroi. Le *stent actuel* va être caractérisé par un sous-ensemble ouvert  $\tilde{\Sigma}_s$  de la surface  $\tilde{\Sigma}$  (cf. par exemple un des motifs périodiques dans la Figure 0.2). Par construction, la région  $\tilde{\Sigma}$  est centrée en  $H/2$  à une distance

$$z_0 \stackrel{\text{def}}{=} (H - L_s)/2 > 0 \quad (1.5)$$

des frontières de  $C_{R+E}$  en  $z = 0$  et  $z = H$  qui sont des *frontières artificielles* introduites pour l'analyse du problème. La longueur de la section de l'artère  $H$  est par hypothèse beaucoup plus grande que  $L_s$  afin que l'effet d'introduire une frontière artificielle en  $z = 0$  et  $z = H$  soit négligeable. La région  $\tilde{\Sigma}$  ne touche donc pas les frontières du cylindre  $C_{R+E}$  à  $z = 0$  et à  $z = H$ .

Le stent d'épaisseur nulle est recouvert avec un produit dont l'effet est de guérir les blessures subies par la paroi après l'introduction du stent. Ce recouvrement peut exister de chaque côté du stent. Les régions occupées par le produit sont notées

$$\tilde{\Omega}_s^+ \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x_1, x_2, z) : \left( R \frac{(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, z \right) \in \tilde{\Sigma}_s \text{ et } R < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R + e^+ \right\}, \quad (1.6)$$

$$\tilde{\Omega}_s^- \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x_1, x_2, z) : \left( R \frac{(x_1, x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, z \right) \in \tilde{\Sigma}_s \text{ et } R - e^- < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R \right\}, \quad (1.7)$$

$$\tilde{\Omega}_s \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Omega}_s^+ \cup \tilde{\Omega}_s^- \quad (1.8)$$

où  $e^+$  et  $e^-$  sont les épaisseurs respectives des *recouvrements* extérieur et intérieur de  $\tilde{\Sigma}_s$ . Pour simplifier on appellera *produit* la région  $\tilde{\Omega}_s^+ \cup \tilde{\Omega}_s^-$  occupée par le produit. Une fois le stent introduit, les régions  $\tilde{\Omega}_l$  et  $\tilde{\Omega}_p$  occupées par la lumière et la paroi sont définies comme suit

$$\tilde{\Omega}_l \stackrel{\text{def}}{=} C_R \setminus \overline{\tilde{\Omega}_s^-} \quad (1.9)$$

$$\tilde{\Omega}_p \stackrel{\text{def}}{=} C_{R+E} \setminus \overline{\tilde{\Omega}_s^+ \cup C_R}. \quad (1.10)$$

Mathématiquement  $\tilde{\Omega}_l$ ,  $\tilde{\Omega}_p$  et  $\tilde{\Omega}_s^\pm$  sont des domaines ouverts dans  $\mathbf{R}^3$ .

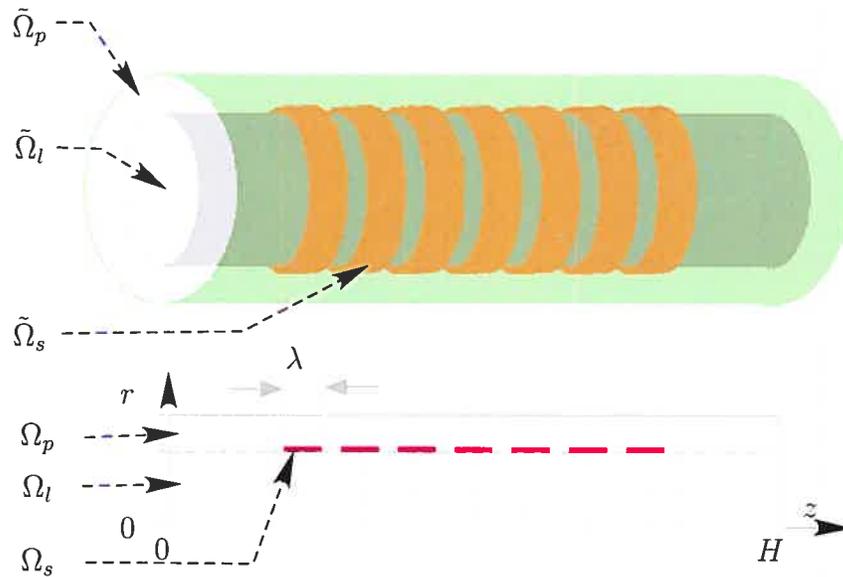


FIG. 1.1. Schéma représentant la lumière  $\tilde{\Omega}_l$ , le produit  $\tilde{\Omega}_s$  et la paroi  $\tilde{\Omega}_p$  dans  $\mathbf{R}^3$  et les surfaces 2-D  $\Omega_l$  pour la lumière,  $\Omega_s$  pour le produit, et  $\Omega_p$  pour la paroi qui les génèrent.

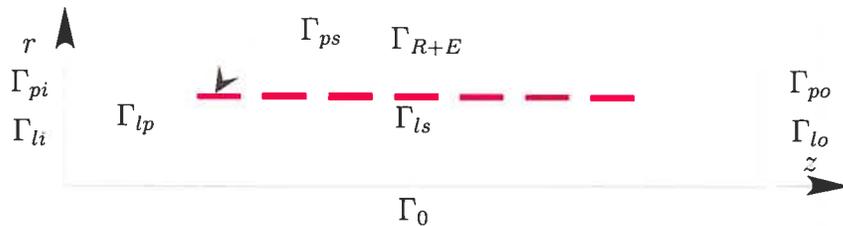


FIG. 1.2. Représentation schématique en dimension 2 des frontières et des interfaces.

C'est le design du domaine  $\tilde{\Sigma}_s$  qui serait l'objectif final de notre analyse. Il y a plusieurs aspects qu'il faut prendre en considération lors du design. Par exemple, le stent doit être mécaniquement assez solide afin de pouvoir garder la lumière ouverte. Ici, on néglige cet aspect et on se concentre sur la diffusion du produit dans la paroi. Pour simplifier, on considère un stent périodique (dans la direction  $z$ ) avec une symétrie cylindrique. De plus, on fait l'hypothèse que le stent est recouvert seulement sur sa surface extérieure, i.e.  $e^- = 0$ ,  $\tilde{\Omega}_s^- = \emptyset$ , et  $\tilde{\Omega}_s = \tilde{\Omega}_s^+$  (cf. Figure 1.1). Ainsi, l'hypothèse est que le produit est un domaine composé de  $N$  anneaux plats équidistants les uns des autres dont la largeur est  $\lambda$  et l'épaisseur

est  $e = e^+$  et qui est situé dans la région entre le rayon  $R$  et le rayon  $R + e$ . Les points milieux de chaque anneaux sont situés aux coordonnées

$$\{z_i : 1 \leq i \leq N\}, \quad z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_N < z_0 + L_s, \quad (1.11)$$

le long de l'axe  $z$  comme illustré dans la deuxième partie de la Figure 1.1. Ainsi, tous les anneaux sont contenus dans la région  $\tilde{\Sigma}$ . Les domaines  $\tilde{\Omega}_l$ ,  $\tilde{\Omega}_p$  et  $\tilde{\Omega}_s$  et les interfaces  $\tilde{\Sigma}$  et  $\tilde{\Sigma}_s$  sont générés par la rotation des domaines ouverts 2- $D$   $\Omega_l$ ,  $\Omega_p$  et  $\Omega_s$  et des interfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma_s$  (cf. Figure 1.1) autour de l'axe  $\Gamma_0$ . Dans ce qui va suivre, les objets qui possèdent un tilde vont représenter les objets en 3- $D$  générés par la rotation autour de l'axe  $\Gamma_0$ .

La frontière  $\tilde{\Gamma}_l = \partial\tilde{\Omega}_l$  de la lumière  $\tilde{\Omega}_l$  est composée de quatre parties :

- $\tilde{\Sigma}_s$ , l'interface entre  $\tilde{\Omega}_l$  et la région  $\tilde{\Omega}_s$  occupée par le produit ;
- $\tilde{\Gamma}_{lp}$ , l'interface entre  $\tilde{\Omega}_l$  et la région  $\tilde{\Omega}_p$  occupée par la paroi ;
- $\tilde{\Gamma}_{li}$ , la partie de la frontière de  $\tilde{\Omega}_l$  où le sang entre ;
- $\tilde{\Gamma}_{lo}$ , la partie de la frontière de  $\tilde{\Omega}_l$  où le sang sort.

Les surfaces génératrices correspondantes sont  $\Sigma_s$ ,  $\Gamma_{lp}$ ,  $\Gamma_{li}$ ,  $\Gamma_{lo}$ , autour de l'axe de symétrie des cylindres  $\Gamma_0$  (cf. Figure 1.2).

La frontière  $\tilde{\Gamma}_p = \partial\tilde{\Omega}_p$  de la paroi  $\tilde{\Omega}_p$  est composée de cinq parties :

- $\tilde{\Gamma}_{lp}$ , l'interface entre  $\tilde{\Omega}_p$  et la région  $\tilde{\Omega}_l$  occupée par la lumière ;
- $\tilde{\Gamma}_{ps}$ , l'interface entre  $\tilde{\Omega}_p$  et la région  $\tilde{\Omega}_s$  occupée par le produit ;
- $\tilde{\Gamma}_{pi}$ , la partie de la frontière de  $\tilde{\Omega}_p$  où  $z = 0$  ;
- $\tilde{\Gamma}_{po}$ , la partie de la frontière de  $\tilde{\Omega}_p$  où  $z = H$  ;
- $\tilde{\Gamma}_{R+E}$ , la frontière latérale extérieure du cylindre de rayon  $R + E$ .

Les surfaces génératrices correspondantes sont  $\Gamma_{lp}$ ,  $\Gamma_{ps}$ ,  $\Gamma_{pi}$ ,  $\Gamma_{po}$ , et la frontière supérieure  $\Gamma_{R+E}$  à  $r = R + E$  (cf. Figure 1.2).

La frontière  $\tilde{\Gamma}_s = \partial\tilde{\Omega}_s$  du produit  $\tilde{\Omega}_s$  est composée de deux parties :

- $\tilde{\Sigma}_s$ , l'interface entre  $\tilde{\Omega}_s$  et la région  $\tilde{\Omega}_l$  occupée par la lumière ;
- $\tilde{\Gamma}_{ps}$ , l'interface entre  $\tilde{\Omega}_s$  et la région  $\tilde{\Omega}_p$  occupée par la paroi.

Les surfaces génératrices correspondantes sont  $\Sigma_s$  et  $\Gamma_{ps}$  (cf. Figure 1.2).

## 2. ÉQUATIONS DE LA CONCENTRATION

Tout d'abord, on fait l'hypothèse que le fluide (ici le sang) dans la lumière est incompressible, c'est-à-dire que

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_l, \quad (2.1)$$

où  $u$  est la *vitesse du fluide*. De plus, on suppose que

$$u \cdot n_l \leq 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{li} \text{ et } u \cdot n_l \geq 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{lo} \quad (2.2)$$

$$u \cdot n_l = 0 \text{ sur } \tilde{\Sigma}_s \cup \tilde{\Gamma}_{lp}. \quad (2.3)$$

Le *produit scalaire* de deux vecteurs  $u = (u_1, u_2, u_3)$  et  $v = (v_1, v_2, v_3)$  dans  $\mathbf{R}^3$  est noté

$$u \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^3 u_i v_i.$$

La première condition signifie que le sang *entre* par la surface  $\tilde{\Gamma}_{li}$  et *sort* par la surface  $\tilde{\Gamma}_{lo}$ .

On suppose que la concentration  $c(x, t)$  du produit dans le fluide est donnée par l'équation de diffusion-transport dans la lumière et par les équations de diffusions dans la paroi et dans le produit :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_p \nabla c) \text{ dans } \tilde{\Omega}_p \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_s \nabla c) \text{ dans } \tilde{\Omega}_s \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c = \operatorname{div}(D_l \nabla c) \text{ dans } \tilde{\Omega}_l, \quad (2.6)$$

où  $D_p$ ,  $D_s$  et  $D_l$  sont les constantes de diffusion respectives dans la paroi, le produit et la lumière. Grâce à la condition d'incompressibilité (2.1), la dernière équation peut être réécrite

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_l \nabla c - cu) \text{ dans } \tilde{\Omega}_l, \quad (2.7)$$

puisque

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(cu) = \nabla c \cdot u + c \operatorname{div} u = \nabla c \cdot u.$$

Les conditions frontières sur  $c$  sont

$$\begin{array}{l}
 \text{paroi} \\
 \text{lumière}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 c = 0 \text{ ou } \frac{\partial c}{\partial n_p} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{R+E} \\
 \frac{\partial c}{\partial n_p} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{pi} \cup \tilde{\Gamma}_{po} \\
 D_l \frac{\partial c}{\partial n_l} - u \cdot n_l c = 0 \text{ ou } c = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{li} \\
 \frac{\partial c}{\partial n_l} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{lo},
 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où  $n_p$ ,  $n_l$  et  $n_s$  sont respectivement les normales unitaires extérieures à  $\tilde{\Omega}_p$ ,  $\tilde{\Omega}_l$  et  $\tilde{\Omega}_s$ .

La première combinaison de conditions frontières

$$c = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{R+E} \quad \text{et} \quad D_l \frac{\partial c}{\partial n_l} - u \cdot n_l c = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{li}$$

s'expliquerait de la façon suivante. La concentration est nulle sur la surface externe de la paroi s'expliquerait par la présence des vasa vasorum<sup>1</sup> qui absorberaient le produit instantanément. Quant aux conditions frontières à l'entrée  $\tilde{\Gamma}_{li}$  et à la sortie  $\tilde{\Gamma}_{lo}$  de la lumière, ce sont des conditions de transparences semblables à celles utilisées dans [1]. Ceci permet un peut la diffusion arrière à l'interface  $\tilde{\Gamma}_{li}$ .

La seconde combinaison de conditions frontières

$$\frac{\partial c}{\partial n_p} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{R+E} \quad \text{et} \quad c = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{li}$$

correspond à un autre modèle où il n'y a pas de diffusion à travers la surface externe de la paroi d'une part et où l'on suppose que la surface d'entrée  $\tilde{\Gamma}_{li}$  est suffisamment loin de la région du stent pour que la concentration soit nulle sur  $\tilde{\Gamma}_{li}$ .

---

<sup>1</sup>Réseau de petits vaisseaux dans l'*avantice* qui fournissent de l'oxygène et des nutriments aux plus grosses veines et artères. L'*avantice* est la dernière couche qui forme la paroi du vaisseau sanguin.

Les conditions sur  $c$  aux interfaces sont

$$\begin{aligned}
 \text{paroi/produit} \quad D_p \frac{\partial c}{\partial n_p} + D_s \frac{\partial c}{\partial n_s} &= 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{ps} \\
 \text{paroi/lumière} \quad D_p \frac{\partial c}{\partial n_p} + D_l \frac{\partial c}{\partial n_l} &= 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{lp} \\
 \text{produit/lumière} \quad \frac{\partial c^+}{\partial n_s} = 0 \text{ et } \frac{\partial c^-}{\partial n_l} &= 0 \text{ sur } \tilde{\Sigma}_s.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Rappelons que le stent crée une fissure le long de l'interface entre  $\tilde{\Omega}_s^+$  et  $\tilde{\Omega}_s^-$  si  $e^+ > 0$  et  $e^- > 0$ , ou encore entre  $\tilde{\Omega}_s^+$  et la lumière  $\tilde{\Omega}_l$  si  $e^+ > 0$  et  $e^- = 0$ . Il y a donc dans les deux cas une trace supérieure  $c^+$  et une trace inférieure  $c^-$  de la concentration le long de l'interface  $\tilde{\Sigma}_s$ .  $\tilde{\Sigma}_s$  est composé de  $N$  fissures en forme d'anneaux dans le domaine de dimension 3 et différentes conditions frontières peuvent être spécifiées de chaque côté de ces fissures.

La condition initiale est

$$c(0, x) = \begin{cases} c_0(x), & \text{dans } \tilde{\Omega}_s \\ 0, & \text{dans } \tilde{\Omega}_p \cup \tilde{\Omega}_l, \end{cases} \tag{2.10}$$

pour une fonction positive  $c_0(x) \geq 0$  représentant la concentration initiale du produit au temps 0 dans la région  $\tilde{\Omega}_s$  occupée par le produit.

### 3. ÉQUATIONS DE LA DOSE

La *dose* est la concentration cumulative en une position donnée  $x$  par rapport à tous les temps variant de 0 à l'infini, c'est-à-dire

$$q(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty c(t, x) dt. \tag{3.1}$$

Puisque toutes nos équations sont linéaires, il est facile d'obtenir les équations, les conditions frontières et les conditions d'interfaces pour  $q$  à partir de celles pour  $c$ . En supposant que  $c(t, x)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , les équations pour la dose  $q(x)$  sont

$$\text{div}(D_p \nabla q) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_p \tag{3.2}$$

$$\text{div}(D_s \nabla q) = -c_0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_s \tag{3.3}$$

$$\text{div}(D_l \nabla q - qu) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_l. \tag{3.4}$$

Les conditions frontières sont

$$\begin{aligned}
 \text{paroi} & \begin{cases} q = 0 \text{ ou } \frac{\partial q}{\partial n_p} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{R+E} \\ \frac{\partial q}{\partial n_p} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{pi} \cup \tilde{\Gamma}_{po} \end{cases} \\
 \text{lumière} & \begin{cases} D_l \frac{\partial q}{\partial n_l} - u \cdot n_l q = 0 \text{ ou } q = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{li} \\ \frac{\partial q}{\partial n_l} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{lo}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Les conditions aux interfaces sont

$$\begin{aligned}
 \text{paroi/produit} & \quad D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} + D_s \frac{\partial q}{\partial n_s} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{ps} \\
 \text{paroi/lumière} & \quad D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} + D_l \frac{\partial q}{\partial n_l} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{lp} \\
 \text{produit/lumière} & \quad \frac{\partial q^+}{\partial n_s} = 0 \text{ et } \frac{\partial q^-}{\partial n_l} = 0 \text{ sur } \tilde{\Sigma}_s.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

#### 4. FORMULATION VARIATIONNELLE DE LA DOSE

Dans cette section on construit une formulation variationnelle pour les équations de la dose sur le domaine

$$\tilde{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, z) : |x_1|^2 + |x_2|^2 < (R + E)^2, 0 < z < H\} \setminus \tilde{\Sigma}_s. \tag{4.1}$$

C'est un domaine ouvert borné connexe avec des *fissures de dimension 2* le long de l'interface  $\tilde{\Sigma}_s$ . Ceci n'est pas un domaine Lipschitzien. L'espace de solutions associé est le sous-espace

$$V(\tilde{\Omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{premier cas : } \{v \in H^1(\tilde{\Omega}) : v|_{\tilde{\Gamma}_{R+E}} = 0\} \\ \text{deuxième cas : } \{v \in H^1(\tilde{\Omega}) : v|_{\tilde{\Gamma}_{li}} = 0\} \end{cases} \tag{4.2}$$

de  $H^1(\tilde{\Omega})$ .

Pour obtenir les équations variationnelles, on multiplie premièrement les équations de  $q$  par une fonction test  $v \in V(\tilde{\Omega})$ . Par la suite on les intègre en utilisant le théorème de Green et on somme le tout pour obtenir des annulations en utilisant

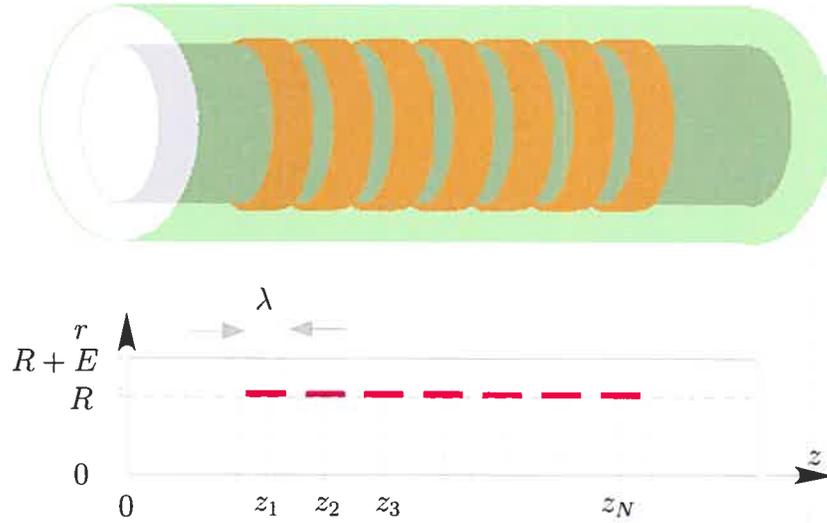


FIG. 4.1. Représentation schématique de la lumière, du produit et de la paroi.

les conditions frontières et d'interfaces :

$$0 = - \int_{\tilde{\Omega}_p} \operatorname{div}(D_p \nabla q) v \, dx = \int_{\tilde{\Omega}_p} D_p \nabla q \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial \tilde{\Omega}_p} D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} v \, d\Gamma \quad (4.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\tilde{\Omega}_s} c_0 v \, dx \\ = - \int_{\tilde{\Omega}_s} \operatorname{div}(D_s \nabla q) v \, dx = \int_{\tilde{\Omega}_s} D_s \nabla q \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial \tilde{\Omega}_s} D_s \frac{\partial q}{\partial n_s} v \, d\Gamma \end{array} \right. \quad (4.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = - \int_{\tilde{\Omega}_l} \operatorname{div}(D_l \nabla q - qu) v \, dx \\ = \int_{\tilde{\Omega}_l} (D_l \nabla q - qu) \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial \tilde{\Omega}_l} \left( D_l \frac{\partial q}{\partial n_l} - u \cdot n_l q \right) v \, d\Gamma. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Calculons les termes frontières. Pour la paroi

$$\begin{aligned} \int_{\partial \tilde{\Omega}_p} D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} v \, d\Gamma &= \int_{\tilde{\Gamma}_{ps}} D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} v \, d\Gamma + \int_{\tilde{\Gamma}_{lp}} D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} v \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\tilde{\Gamma}_{pi}} D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} v \, d\Gamma + \int_{\tilde{\Gamma}_{po}} D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} v \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\tilde{\Gamma}_{R+E}} D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} v \, d\Gamma \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}_{ps}} D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} v \, d\Gamma + \int_{\tilde{\Gamma}_{lp}} D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} v \, d\Gamma; \end{aligned}$$

pour le produit

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}_s} D_s \frac{\partial q}{\partial n_s} v d\Gamma = \int_{\tilde{\Gamma}_{ps}} D_s \frac{\partial q}{\partial n_s} v d\Gamma + \int_{\tilde{\Sigma}_s} D_s \frac{\partial q^+}{\partial n_s} v d\Gamma;$$

pour la lumière

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\tilde{\Omega}_l} \left( D_l \frac{\partial q}{\partial n_l} - u \cdot n_l q \right) v d\Gamma \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}_{lp}} \left( D_l \frac{\partial q}{\partial n_l} - u \cdot n_l q \right) v d\Gamma + \int_{\tilde{\Sigma}_s} \left( D_l \frac{\partial q^-}{\partial n_l} - u \cdot n_l q^- \right) v d\Gamma \\ & \quad + \int_{\tilde{\Gamma}_{li}} \left( D_l \frac{\partial q}{\partial n_l} - u \cdot n_l q \right) v d\Gamma + \int_{\tilde{\Gamma}_{lo}} \left( D_l \frac{\partial q}{\partial n_l} - u \cdot n_l q \right) v d\Gamma \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}_{lp}} D_l \frac{\partial q}{\partial n_l} v d\Gamma + \int_{\tilde{\Sigma}_s} D_l \frac{\partial q^-}{\partial n_l} v d\Gamma - \int_{\tilde{\Gamma}_{lo}} u \cdot n_l q v d\Gamma. \end{aligned}$$

On somme les identités précédentes et on utilise les conditions aux interfaces

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Omega}_p} D_p \nabla q \cdot \nabla v dx + \int_{\tilde{\Omega}_s} D_s \nabla q \cdot \nabla v dx + \int_{\tilde{\Omega}_l} (D_l \nabla q - qu) \cdot \nabla v dx \\ &= \int_{\tilde{\Omega}_s} c_0 v dx \\ & \quad + \int_{\tilde{\Gamma}_{ps}} D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} v d\Gamma + \int_{\tilde{\Gamma}_{lp}} D_p \frac{\partial q}{\partial n_p} v d\Gamma \\ & \quad + \int_{\tilde{\Gamma}_{ps}} D_s \frac{\partial q}{\partial n_s} v d\Gamma + \int_{\tilde{\Sigma}_s} D_s \frac{\partial q^+}{\partial n_s} v d\Gamma \\ & \quad + \int_{\tilde{\Gamma}_{lp}} D_l \frac{\partial q}{\partial n_l} v d\Gamma + \int_{\tilde{\Sigma}_s} D_l \frac{\partial q^-}{\partial n_l} v d\Gamma - \int_{\tilde{\Gamma}_{lo}} u \cdot n_l q v d\Gamma \\ &= \int_{\tilde{\Omega}_s} c_0 v dx - \int_{\tilde{\Gamma}_{lo}} u \cdot n_l q v d\Gamma. \end{aligned}$$

On introduit la forme bilinéaire suivante

$$\begin{aligned} a(q, v) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\Omega}_p} D_p \nabla q \cdot \nabla v dx + \int_{\tilde{\Omega}_s} D_s \nabla q \cdot \nabla v dx \\ & \quad + \int_{\tilde{\Omega}_l} (D_l \nabla q - qu) \cdot \nabla v dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{lo}} u \cdot n_l q v d\Gamma. \end{aligned}$$

Ainsi,  $q \in V(\tilde{\Omega})$  doit vérifier l'équation variationnelle

$$\boxed{\forall v \in V(\tilde{\Omega}), \quad a(q, v) = \int_{\tilde{\Omega}_s} c_0 v dx.} \quad (4.6)$$

La forme bilinéaire peut être réécrite comme

$$a(q, v) = \int_{\tilde{\Omega}} D \nabla q \cdot \nabla v \, dx - \int_{\tilde{\Omega}_i} q u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{i_0}} u \cdot n_i q v \, d\Gamma,$$

en introduisant le coefficient de diffusion variable défini sur  $\tilde{\Omega}$

$$D(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} D_p & \text{si } x \in \tilde{\Omega}_p \\ D_s & \text{si } x \in \tilde{\Omega}_s \\ D_l & \text{si } x \in \tilde{\Omega}_l. \end{cases}$$

La forme bilinéaire  $a$  n'est pas symétrique, mais elle est coercive sur  $V(\tilde{\Omega})$  par les deux conditions frontières (2.2) et (2.3) sur le champ de vitesse  $u$ . En effet, soit  $\alpha > 0$  le minimum de  $D_p$ ,  $D_s$  et  $D_l$ . Alors, en utilisant le fait que  $\text{div } u = 0$

$$\begin{aligned} a(q, q) &= \int_{\tilde{\Omega}} D \nabla q \cdot \nabla q \, dx - \int_{\tilde{\Omega}_i} q u \cdot \nabla q \, dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{i_0}} u \cdot n_i |q|^2 \, d\Gamma \\ &\geq \alpha \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla q|^2 \, dx - \int_{\tilde{\Omega}_i} q u \cdot \nabla q \, dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{i_0}} u \cdot n_i |q|^2 \, d\Gamma \\ &= \alpha \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla q|^2 \, dx - \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{1}{2} u \cdot \nabla |q|^2 \, dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{i_0}} u \cdot n_i |q|^2 \, d\Gamma \\ &= \alpha \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla q|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}_i} \text{div}(u |q|^2) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}_i} \text{div } u |q|^2 \, dx \\ &\quad + \int_{\tilde{\Gamma}_{i_0}} u \cdot n_i |q|^2 \, d\Gamma \\ &= \alpha \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla q|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_i} u \cdot n_i |q|^2 \, d\Gamma + \int_{\tilde{\Gamma}_{i_0}} u \cdot n_i |q|^2 \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Puisque  $u \cdot n_l = 0$  sur  $\tilde{\Sigma}_s \cup \tilde{\Gamma}_{l_p}$  par la condition (2.3) et

$$u \cdot n_l \leq 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{li} \text{ et } u \cdot n_l \geq 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{l_0}$$

par la condition (2.2), alors

$$\begin{aligned} a(q, q) &\geq \alpha \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla q|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_{li}} u \cdot n_l |q|^2 \, d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_{l_0}} u \cdot n_l |q|^2 \, d\Gamma \\ &\geq \alpha \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla q|^2 \, dx = \alpha \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2. \end{aligned}$$

Le domaine  $\tilde{\Omega}$  a des fissures et n'est pas Lipschitz. Cependant,  $\tilde{\Omega}$  est un domaine spécial qui est connexe et la trace de la fonction  $v \in V(\tilde{\Omega})$  est zéro sur

la partie fixe  $\tilde{\Gamma}_{R+E}$  de la frontière de  $\tilde{\Omega}$  dans le premier cas et zéro sur la partie fixe  $\tilde{\Gamma}_{li}$ . Les fissures se retrouvent à l'intérieur sur le cylindre de rayon  $R$  à une distance fixe de l'extérieur de la frontière de  $\tilde{\Omega}$ . Dans cette configuration spéciale, on peut démontrer que l'inégalité de Poincaré est vérifiée (voir annexe pour démonstration) :

$$\exists c > 0, \forall q \in V(\tilde{\Omega}), \quad \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq c \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Or, il suffit de montrer que  $\|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$  est une norme équivalente à  $\|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}$  i.e.

$$\exists \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \text{ t.q. } \forall q \in V(\tilde{\Omega}), \alpha \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \leq \beta \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

En effet,

$$\|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2 = \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 \geq \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2.$$

Par ailleurs,

$$\|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2 = \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 \leq (c^2 + 1) \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2$$

par l'inégalité de Poincaré. Ainsi,

$$\|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \leq (c^2 + 1) \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Ceci implique que

$$a(q, q) \geq \alpha \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 \geq \frac{\alpha}{(c^2 + 1)} \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2.$$

Ceci démontre que  $a$  est coercive. Donc, par le théorème de Lax-Milgram (cf. [7]), il existe un unique  $q \in V(\tilde{\Omega})$  solution de l'équation variationnelle (4.6).

## Chapitre 2

---

# ÉQUATIONS DE LA DOSE LORSQUE L'ÉPAISSEUR DU PRODUIT TEND VERS ZÉRO

Dans le modèle précédent, nous avons fait l'hypothèse que le stent était composé de  $N$  anneaux plats identiques équidistants les uns des autres de largeur  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < L$  ( $L > 0$ , la distance entre les centres de deux struts consécutifs), et d'épaisseur  $e > 0$ . Dans ce chapitre, on va faire tendre l'épaisseur vers zéro tout en gardant la quantité totale de produit dans le stent constante.

### 1. ÉQUATION VARIATIONNELLE À ÉPAISSEUR VARIABLE

Soit  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq e$ , la variable qui représente l'épaisseur de la région occupée par le produit. On définit le nouveau domaine d'épaisseur  $\varepsilon$  occupé par le produit

$$\tilde{\Omega}_s^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^N \left\{ (x_1, x_2, z) : \begin{array}{l} R^2 < |x_1|^2 + |x_2|^2 < (R + \varepsilon)^2 \\ 0 < z < H \text{ and } |z - z_i| < \lambda/2 \end{array} \right\},$$

où  $z_i$  est la position du centre de la  $i^{\text{ème}}$  strut le long de l'axe des  $z$ . Ceci induit un nouveau domaine pour la paroi

$$\tilde{\Omega}_p^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x_1, x_2, z) : \begin{array}{l} R^2 < |x_1|^2 + |x_2|^2 < (R + E)^2 \\ 0 < z < H \end{array} \right\} \setminus \bigcup_{i=1}^N \left\{ (x_1, x_2, z) : \begin{array}{l} R^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq (R + \varepsilon)^2 \\ 0 < z < H \text{ et } |z - z_i| \leq \lambda/2 \end{array} \right\}.$$

Pour  $\varepsilon = 0$ ,  $\tilde{\Omega}_s^0 = \emptyset$  et

$$\tilde{\Omega}_p^0 = \left\{ (x_1, x_2, z) : \begin{array}{l} R^2 < |x_1|^2 + |x_2|^2 < (R + E)^2 \\ 0 < z < H \end{array} \right\}.$$

À un ensemble de mesure nulle près  $\tilde{\Omega}_p^\varepsilon \cup \tilde{\Omega}_s^\varepsilon = \tilde{\Omega}_p^0$  et  $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_p^\varepsilon \cup \tilde{\Omega}_s^\varepsilon \cup \tilde{\Omega}_l = \tilde{\Omega}_p^0 \cup \tilde{\Omega}_l$ . Il est avantageux à ce moment d'introduire un coefficient de diffusion variable définie presque partout dans  $\tilde{\Omega}$

$$D^\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} D_p & \text{si } x \in \tilde{\Omega}_p^\varepsilon \\ D_s & \text{si } x \in \tilde{\Omega}_s^\varepsilon \\ D_l & \text{si } x \in \tilde{\Omega}_l \end{cases}$$

et la nouvelle forme bilinéaire

$$a^\varepsilon(q, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\Omega}} D^\varepsilon \nabla q \cdot \nabla v \, dx - \int_{\tilde{\Omega}_l} q u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\tilde{\Gamma}_l} u \cdot n_l q v \, d\Gamma$$

qui est coercive avec la même constante  $\alpha > 0$  (indépendante de  $\varepsilon$ ) que pour la forme bilinéaire  $a(q, v)$ . Notons que  $a(q, v)$  correspond à  $\varepsilon = e$  et que  $a(q, v) = a^e(q, v)$ . Notons aussi que le paramètre  $\varepsilon$  apparaît seulement dans la définition du coefficient de diffusion  $D^\varepsilon$  et pas dans le domaine sur lequel on effectue l'intégration.

Le membre de droite initial

$$\ell(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\Omega}_s} c_0 v \, dx \tag{1.1}$$

(pour l'épaisseur  $e$ ) doit être ajusté afin d'acheminer la même quantité de produit pour une épaisseur  $\varepsilon$ . Supposons que la concentration initiale est constante et qu'elle est égale à  $c_0$  dans  $\tilde{\Omega}_s$ , c'est-à-dire que la masse totale de produit dans la région  $\tilde{\Omega}_s$  est

$$\begin{aligned} m &\stackrel{\text{def}}{=}} c_0 \int_{\tilde{\Omega}_s} dx = c_0 \sum_{i=1}^N \int_{z_i - \lambda/2}^{z_i + \lambda/2} dz \int_R^{R+e} 2\pi r \, dr \\ &= c_0 N \lambda \pi [(R + e)^2 - R^2] = \boxed{c_0 N \lambda \pi e (2R + e)}. \end{aligned}$$

Définissons la nouvelle concentration  $c_0^\varepsilon$  tel que la masse totale demeure  $m$  dans le nouveau domaine  $\tilde{\Omega}_s^\varepsilon$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} m &= \int_{\tilde{\Omega}_s^\varepsilon} c_0^\varepsilon dx = \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \int_R^{R+\varepsilon} c_0^\varepsilon 2\pi r dr \\ &= c_0^\varepsilon N \lambda \pi [(R+\varepsilon)^2 - R^2] = \boxed{c_0^\varepsilon N \lambda \pi \varepsilon (2R + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Choisissons dans le domaine  $\tilde{\Omega}_s^\varepsilon$  occupé par le produit la nouvelle concentration

$$\boxed{c_0^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\lambda (2R + \varepsilon)} \frac{m}{\pi N}}$$

et le nouveau membre de droite

$$\boxed{\ell^\varepsilon(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\Omega}_s^\varepsilon} c_0^\varepsilon v dx.} \quad (1.2)$$

Les nouveaux problèmes variationnels indexés par  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq e$ , sont

$$\boxed{\exists q^\varepsilon \in V, \forall v \in V, \quad a^\varepsilon(q^\varepsilon, v) = \ell^\varepsilon(v).} \quad (1.3)$$

## 2. ÉQUATION VARIATIONNELLE DE LA DOSE LIMITE

L'étape suivante consiste à déterminer s'il existe une limite  $q$  des solutions  $q^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro et de caractériser cette limite comme solution d'une nouvelle équation variationnelle.

**Théorème 2.1.** *Lorsque  $\varepsilon > 0$  tend vers 0, la solution  $q^\varepsilon$  de (1.3) converge faiblement vers la solution  $q^0 \in V(\tilde{\Omega})$  de l'équation variationnelle*

$$\boxed{\forall v \in V(\tilde{\Omega}), \quad a^0(q^0, v) = \ell^0(v),} \quad (2.1)$$

où

$$\boxed{\ell^0(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\Sigma}_s} c_s v^+ dx, \quad c_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda 2R \pi N}} \quad (2.2)$$

$c_s$  est la densité surfacique du produit en  $kg/m^2$ ,  $v^+$  est la trace de  $v$  sur le bord supérieur de  $\tilde{\Sigma}_s$ , et

$$\boxed{a^0(q^0, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\Omega}} \nabla q^0 \cdot D^0 \nabla v dx - \int_{\tilde{\Omega}_l} q^0 u \cdot \nabla v dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{l_0}} u \cdot n_l q^0 v d\Gamma.} \quad (2.3)$$

DÉMONSTRATION. (i) (Convergence de  $\ell^\varepsilon$  vers  $\ell^0$ ). La première étape de cette analyse est de trouver la limite de la forme linéaire  $\ell^\varepsilon$ . La candidate est la forme linéaire (2.2). On démontre premièrement que la forme linéaire  $\ell^\varepsilon$  est uniformément bornée par rapport à  $\varepsilon$ . Considérons l'intégrale de volume qui peut être réécrite en coordonnées cylindriques

$$\int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} v dx = \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \int_R^{R+\varepsilon} r dr \int_0^{2\pi} d\theta v(r, \theta, z).$$

Ensuite, en utilisant l'identité

$$v(r, \theta, z) = v(R, \theta, z) + \int_R^r \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) d\rho,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}_\varepsilon} v dx &= \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \int_R^{R+\varepsilon} r dr \int_0^{2\pi} d\theta v(R^+, \theta, z) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \int_R^{R+\varepsilon} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^r \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) d\rho \\ &= \frac{(R+\varepsilon)^2 - R^2}{2} \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \int_0^{2\pi} d\theta v(R^+, \theta, z) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \int_R^{R+\varepsilon} d\rho \int_\rho^{R+\varepsilon} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} \int_0^{2\pi} d\theta \varepsilon \frac{2R+\varepsilon}{2} v(R^+, \theta, z) dz \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+\varepsilon} \frac{(R+\varepsilon)^2 - \rho^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) d\rho \\ &= \frac{\varepsilon(2R+\varepsilon)}{2R} R \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \int_0^{2\pi} d\theta v(R^+, \theta, z) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \int_R^{R+\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(R+\varepsilon)^2 - \rho^2}{2\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) \\ &= \varepsilon \frac{2R+\varepsilon}{2R} \int_{\tilde{\Sigma}_\varepsilon} v^+ d\Gamma \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \int_R^{R+\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(R+\varepsilon)^2 - \rho^2}{2\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
& \left| \int_R^{R+\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(R+\varepsilon)^2 - \rho^2}{2\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) \right| \\
& \leq \int_R^{R+\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(R+\varepsilon)^2 - \rho^2}{2\rho} \left| \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) \right| \\
& \leq \frac{(R+\varepsilon)^2 - R^2}{2R} \int_R^{R+\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left| \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) \right| \\
& \leq \varepsilon \frac{2R+\varepsilon}{2R} \int_R^{R+\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left| \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) \right|
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \int_R^{R+\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(R+\varepsilon)^2 - \rho^2}{2\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) \right| \\
& \leq \sum_{i=1}^N \int_{z_i-\lambda/2}^{z_i+\lambda/2} dz \varepsilon \frac{2R+\varepsilon}{2R} \int_R^{R+\varepsilon} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left| \frac{\partial v}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) \right| \\
& \leq \varepsilon \frac{2R+\varepsilon}{2R} \int_{\tilde{\Omega}_s^\varepsilon} |\nabla v| dx \leq \varepsilon \frac{2R+\varepsilon}{2R} m(\tilde{\Omega}_s^\varepsilon)^{1/2} \left\{ \int_{\tilde{\Omega}_s^\varepsilon} |\nabla v|^2 dx \right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'estimation suivante

$$\left| \int_{\tilde{\Omega}_s^\varepsilon} v dx \right| \leq \varepsilon \frac{2R+\varepsilon}{2R} \left\{ \left| \int_{\tilde{\Sigma}_s} v^+ d\Gamma \right| + m(\tilde{\Omega}_s^\varepsilon)^{1/2} \left[ \int_{\tilde{\Omega}_s^\varepsilon} |\nabla v|^2 dx \right]^{1/2} \right\}.$$

Maintenant, utilisant l'estimation précédente et la définition de  $c_0^\varepsilon$ ,

$$c_0^\varepsilon \varepsilon \frac{2R+\varepsilon}{2R} = \frac{1}{\lambda} \frac{m}{2\pi R N},$$

on obtient finalement l'estimation suivante pour  $\ell^\varepsilon(v)$

$$\begin{aligned}
|\ell^\varepsilon(v)| &= \left| \int_{\tilde{\Omega}_s^\varepsilon} c_0^\varepsilon v dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \frac{m}{2\pi R N} \left\{ \left| \int_{\tilde{\Sigma}_s} v^+ d\Gamma \right| + m(\tilde{\Omega})^{1/2} \left[ \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla v|^2 dx \right]^{1/2} \right\} \\
&\leq c \left[ \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla v|^2 dx + \int_{\tilde{\Omega}} |v|^2 dx \right]^{1/2} = c \|v\|_{H^1(\tilde{\Omega})}
\end{aligned}$$

pour une constante  $c$  puisque les traces supérieure et inférieure d'une fonction  $v$  dans  $V(\tilde{\Omega})$  sur le cylindre de rayon  $R$  (et donc la trace supérieure sur  $\tilde{\Sigma}_s$ ) sont continues (voir annexe). Ainsi, les formes linéaires  $\ell^\varepsilon$  sont uniformément bornées.

Pour ce qui est de la convergence, à partir des estimations qu'on a trouvées auparavant, il est facile de voir que pour chaque  $v \in V(\tilde{\Omega})$ ,  $\ell^\varepsilon(v)$  converge vers  $\ell^0(v)$  puisque

$$|\ell^\varepsilon(v) - \ell^0(v)| \leq \frac{1}{\lambda} \frac{m}{2\pi R N} m(\tilde{\Omega}_s^\varepsilon)^{1/2} \left[ \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla v|^2 dx \right]^{1/2}$$

tend vers zéro car le volume  $m(\tilde{\Omega}_s^\varepsilon)$  tend vers zéro lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro :

$$\forall v \in V(\tilde{\Omega}), \quad \ell^\varepsilon(v) \rightarrow \ell^0(v) \text{ lorsque } \varepsilon \searrow 0.$$

Revenant au problème indexé par  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq e$ , l'équation variationnelle (1.3)

$$\boxed{\exists q^\varepsilon \in V(\tilde{\Omega}), \forall v \in V(\tilde{\Omega}), \quad a^\varepsilon(q^\varepsilon, v) = \ell^\varepsilon(v),}$$

possède une solution unique.

(ii) (Convergence des  $q^\varepsilon$ ). Pour trouver la limite de  $\{q^\varepsilon\}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, on considère une suite arbitraire  $\varepsilon_k$  tendant vers 0 lorsque  $k$  tend vers  $\infty$ .

Par coercivité uniforme de  $a^\varepsilon$  et continuité de  $\ell^\varepsilon$

$$\alpha \|q^\varepsilon\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2 \leq a^\varepsilon(q^\varepsilon, q^\varepsilon) = \ell^\varepsilon(q^\varepsilon) \leq c \|q^\varepsilon\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \text{ et } \|q^\varepsilon\|_{H^1(\tilde{\Omega})} \leq c/\alpha.$$

Comme les  $q^\varepsilon$  sont uniformément bornés dans  $H^1(\tilde{\Omega})$ , il existe  $q^0 \in H^1(\tilde{\Omega})$  et une sous-suite de  $\{\varepsilon_n\}$ , encore écrite  $\{\varepsilon_n\}$ , tel que

$$q_n \stackrel{\text{def}}{=} q^{\varepsilon_n} \rightharpoonup q^0 \text{ dans } H^1(\tilde{\Omega})\text{-faible.}$$

Pour la forme quadratique

$$a^{\varepsilon_n}(q_n, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\Omega}} \nabla q_n \cdot D^{\varepsilon_n} \nabla v dx - \int_{\tilde{\Omega}_l} q_n u \cdot \nabla v dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{l_0}} u \cdot n_l q_n v d\Gamma,$$

les deux derniers termes convergent

$$\int_{\tilde{\Omega}_l} q_n u \cdot \nabla v dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{l_0}} u \cdot n_l q_n v d\Gamma \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}_l} q^0 u \cdot \nabla v dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{l_0}} u \cdot n_l q^0 v d\Gamma.$$

Pour le premier terme, on montre d'abord que

$$D^{\varepsilon_n} \nabla v \rightarrow D^0 \nabla v \text{ dans } H^1(\tilde{\Omega})\text{-fort,}$$

où

$$D^0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} D_p & \text{si } x \in \tilde{\Omega}_p^0 \\ D_l & \text{si } x \in \tilde{\Omega}_l \end{cases}.$$

En effet

$$(D^{\varepsilon_n} - D^0) \nabla v = \begin{cases} 0, & \text{dans } \tilde{\Omega}_p^\varepsilon \\ (D_s - D_p) \nabla v, & \text{dans } \tilde{\Omega}_s^\varepsilon \\ 0, & \text{dans } \tilde{\Omega}_l^\varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|(D^{\varepsilon_n} - D^0) \nabla v\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq |D_s - D_p| \|\nabla v\|_{L^2(\tilde{\Omega}_s^\varepsilon)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Puisque  $D^{\varepsilon_n} \nabla v$  converge fortement vers  $D^0 \nabla v$  et  $q_n$  convergent faiblement vers  $q^0$ , leur produit scalaire converge et

$$\begin{aligned} a^{\varepsilon_n}(q_n, v) &= \int_{\tilde{\Omega}} \nabla q_n \cdot D^{\varepsilon_n} \nabla v \, dx - \int_{\tilde{\Omega}_l} q_n u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{l_0}} u \cdot n_l q_n v \, d\Gamma \\ &\rightarrow a^0(q^0, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\Omega}} \nabla q^0 \cdot D^0 \nabla v \, dx - \int_{\tilde{\Omega}_l} q^0 u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{l_0}} u \cdot n_l q^0 v \, d\Gamma. \end{aligned}$$

En combinant ce résultat avec la convergence de la forme linéaire  $\ell^{\varepsilon_n}(v)$  vers  $\ell^0(v)$ , la fonction  $q^0 \in V(\tilde{\Omega})$  est une solution de l'équation variationnelle

$$\forall v \in V(\tilde{\Omega}), \quad a^0(q^0, v) = \ell^0(v).$$

La forme bilinéaire  $a^0$  est coercive pour la même constante  $\alpha > 0$  et la forme linéaire  $\ell^0$  est continue pour la même constante  $c$ . Ainsi, la solution est unique et toute sous-suite de  $\{q^\varepsilon\}$  qui converge faiblement va converger vers l'élément unique  $q^0$  dans  $V(\tilde{\Omega})$ . Or,  $q^\varepsilon$  converge faiblement vers  $q^0 \in V(\tilde{\Omega})$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.  $\square$

### 3. ÉQUATIONS AU SENS FORT POUR $q^0$

Par définition

$$\begin{aligned} a^0(q^0, v) &= \int_{\tilde{\Omega}_p^0} D_p \nabla q^0 \cdot \nabla v \, dx + \int_{\tilde{\Omega}_l} (D_l \nabla q^0 - q^0 u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{l_0}} u \cdot n_l q^0 v \, d\Gamma, \\ \ell^0(v) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\Sigma}_s} c_s v^+ \, dx, \quad c_s = \frac{1}{\lambda} \frac{m}{2R\pi N}, \end{aligned}$$

où  $c_s$  est la *densité surfacique du produit* en  $kg/m^2$ . À partir de l'équation variationnelle (2.1) pour  $q^0$  on obtient les équations suivantes pour la dose  $q^0(x, t)$

$$\operatorname{div}(D_p \nabla q^0) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_p^0 \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div}(D_l \nabla q^0 - q^0 u) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_l. \quad (3.2)$$

Les conditions frontières sont

$$\begin{array}{l} \text{paroi} \\ \text{lumière} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} q^0 = 0 \text{ ou } \frac{\partial q^0}{\partial n_p} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{R+E} \\ \frac{\partial q^0}{\partial n_p} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{pi} \cup \tilde{\Gamma}_{po} \\ D_p \frac{\partial q^{0+}}{\partial n_p} = c_s \quad \text{sur } \tilde{\Sigma}_s \\ D_l \frac{\partial q^0}{\partial n_l} - u \cdot n_l q^0 = 0 \text{ ou } q^0 = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{li} \\ \frac{\partial q^0}{\partial n_l} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{lo} \\ \frac{\partial q^{0-}}{\partial n_l} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Sigma}_s. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Les conditions aux interfaces sont

$$\text{paroi/lumière} \quad D_p \frac{\partial q^0}{\partial n_p} + D_l \frac{\partial q^0}{\partial n_l} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{lp}. \quad (3.4)$$

# Chapitre 3

## STENT ASYMPTOTIQUE

### 1. SPÉCIFICATION DE LA GÉOMÉTRIE DU STENT LIMITE

Dans le design du stent, il nous reste plusieurs paramètres à notre disposition : la densité surfacique du produit  $c_s = m/(2\pi RN\lambda)$ , la longueur totale de l'espace occupé par le stent  $L_s = NL$ , le rapport  $\rho = \lambda N/(LN) = \lambda/L$  entre la largeur d'une strut  $\lambda$  et la distance  $L$  entre le centre de deux struts successives, et finalement le nombre total de struts  $N$ .

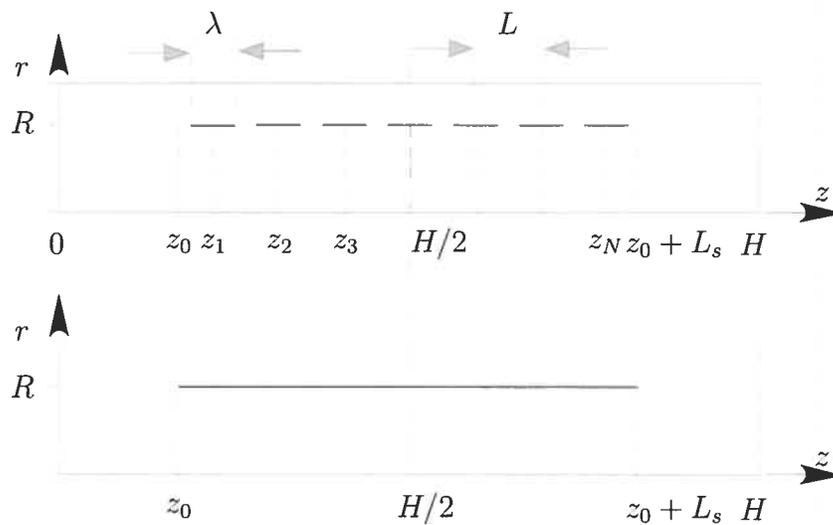


FIG. 1.1. Représentation schématique du stent lorsque le nombre de struts  $N$  tend vers l'infini.

Il y a plusieurs façons de spécifier le stent. Pour simplifier, posons

$$\tilde{\Sigma}_s^N \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^N \left\{ (x_1, x_2, z) : \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = R^2 \\ z_i - \lambda/2 \leq z \leq z_i + \lambda/2 \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

$$z_i = z_0 + L \left( i - \frac{1}{2} \right), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (1.2)$$

où l'indice  $N$  met en évidence la dépendance par rapport à  $N$ . Rappelons que

$$z_0 = \frac{H - L_s}{2} > 0.$$

Ainsi, le stent à  $N$  struts et le stent asymptotique vont être tous deux centrés dans la région  $[0, H]$

$$[z_0, z_0 + L_s] = [z_0, z_0 + NL] \subset ]0, H[ \text{ et } z_0 + \frac{NL}{2} = \frac{H}{2}.$$

## 2. PASSAGE À LA LIMITE POUR LA DOSE

Dans cette section on construit un modèle asymptotique pour la dose  $q_N^0 = q^0$  lorsque le nombre de struts tend vers l'infini tout en conservant la longueur  $L_s$ , le rapport  $\rho$ , et la densité surfacique du produit  $c_s$ . Encore une fois, l'indice  $N$  de  $q_N^0$  indique la dépendance de  $q^0$  par rapport à  $N$ . Ce problème asymptotique ressemble beaucoup à la *passoire de Neumann* étudiée dans [4], [6] [12] et [13] où la surface plane est remplacée par le cylindre de rayon  $R$ . La motivation de ces gens à étudier ce problème a débuté dans les années 70 lors du développement des premières plateformes de pétrole en haute mer. On voulait réduire la pression exercée par les vagues et les courants de mer sur la structure de support. Pour y parvenir, on a construit des structures perforées afin de permettre à l'eau de les traverser et ainsi diminuer la pression exercée sur leurs surfaces. Une autre application de ce design est utilisé dans les digues artificielles que l'on retrouve dans les ports. Ces digues servent, comme dans le cas des plateformes de pétrole, à réduire la force des vagues et des courants lors d'une tempête ou d'un tremblement de terre (tsunami<sup>1</sup>) par exemple. Dans notre cas, la surface totale des *trous* est constante et différente de zéro d'après nos hypothèses et il n'y a pas de discontinuité de la trace de la solution asymptotique le long de l'interface  $\tilde{\Sigma}$ .

<sup>1</sup>Onde océanique engendrée par un séisme ou une éruption volcanique.

Rappelons que, pour  $N$  fixé, la dose  $q_N^0$  est la solution dans l'espace

$$V_N = V(\tilde{\Omega}^N) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{premier cas : } \left\{ v \in H^1(\tilde{\Omega}^N) : v|_{\tilde{\Gamma}_{R+E}} = 0 \right\} \\ \text{deuxième cas : } \left\{ v \in H^1(\tilde{\Omega}^N) : v|_{\tilde{\Gamma}_h} = 0 \right\} \end{cases}, \quad (2.1)$$

$$\tilde{\Omega}^N \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, z) : |x_1|^2 + |x_2|^2 < (R+E)^2, 0 < z < H\} \setminus \tilde{\Sigma}_s^N, \quad (2.2)$$

de l'équation variationnelle

$$\exists q_N^0 \in V_N \text{ tel que } \forall v \in V_N, \quad a^0(q_N^0, v) = \ell_N^0(v). \quad (2.3)$$

La forme linéaire peut maintenant être réécrite en utilisant les fonctions caractéristiques suivantes sur  $[0, H]$

$$\chi_N(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{si } z \in \cup_{i=1}^N [z_i - \lambda/2, z_i + \lambda/2], \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \ell_N^0(v) &= \int_{\tilde{\Sigma}_s^N} c_s v^+ dx = \sum_{i=1}^N \int_{z_i - \frac{\lambda}{2}}^{z_i + \frac{\lambda}{2}} dz R \int_0^{2\pi} d\theta c_s v(R^+, \theta, z) \\ &= c_s \int_0^H \chi_N(z) R dz \int_0^{2\pi} d\theta v(R^+, \theta, z). \end{aligned} \quad (2.5)$$

La forme bilinéaire

$$a^0(w, v) = \int_{\tilde{\Omega}_p^0} D_p \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_{\tilde{\Omega}_i} (D_l \nabla w - w u) \cdot \nabla v dx + \int_{\tilde{\Gamma}_{l_0}} u \cdot n_l w v d\Gamma$$

est indépendante de  $N$ . En supposant qu'il existe des constantes  $0 < L_s < H$  et  $0 < \rho < 1$  tel que, lorsque  $N$  tend vers l'infini,  $LN = L_s$  et  $\lambda N = \rho L_s$ , il est clair que la suite  $\{\chi_N\}$  est uniformément bornée dans  $L^2(0, H)$  et converge faiblement

$$\int_0^H (\chi_N)^2 dz = \int_0^H \chi_N dz = N\lambda = \rho L_s = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \chi_N \rightharpoonup \rho \chi_{[z_0, z_0+L_s]} \text{ dans } L^2(0, H)\text{-faible,}$$

$$\forall \varphi \in L^2(0, H), \quad \int_0^H \chi_N \varphi dz \rightarrow \rho \int_{z_0}^{z_0+L_s} \varphi dz,$$

où

$$\chi_{[z_0, z_0+L_s]}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & z \in [z_0, z_0 + L_s] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.6)$$

(la démonstration de la convergence est faite en annexe.). Puisque  $L_s = NL$ ,  $\lambda N = \rho L_s$  et  $\rho = \lambda/L$  sont des constantes lorsqu'on passe à la limite, on a que pour tout  $v$

$$\begin{aligned} \ell_N^0(v) &= c_s \int_0^H dz \chi_N(z) R \int_0^{2\pi} d\theta v(R^+, \theta, z) \\ &\rightarrow \ell_\infty^0(v) \stackrel{\text{def}}{=} c_s \rho \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz R \int_0^{2\pi} d\theta v(R^+, \theta, z) = c_s \rho \int_{\tilde{\Sigma}} v^+ d\Gamma, \end{aligned}$$

où  $\tilde{\Sigma}$  est défini en (1.4). Ceci nécessite qu'on introduise le nouveau domaine  $\tilde{\Omega}^\infty$

$$\tilde{\Omega}^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Omega}^0 \setminus \tilde{\Sigma} \quad (2.7)$$

dans le cylindre ouvert

$$\tilde{\Omega}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, z) : |x_1|^2 + |x_2|^2 < (R+E)^2, 0 < z < H\} \quad (2.8)$$

avec un nouvel espace de solutions plus gros

$$V_\infty = V(\tilde{\Omega}^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{premier cas : } \{v \in H^1(\tilde{\Omega}^\infty) : v|_{\tilde{\Gamma}_{R+E}} = 0\} \\ \text{deuxième cas : } \{v \in H^1(\tilde{\Omega}^\infty) : v|_{\tilde{\Gamma}_{l_i}} = 0\} \end{cases} \quad (2.9)$$

et un espace plus petit

$$V_0 = V(\tilde{\Omega}^0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{premier cas : } \{v \in H^1(\tilde{\Omega}^0) : v|_{\tilde{\Gamma}_{R+E}} = 0\} \\ \text{deuxième cas : } \{v \in H^1(\tilde{\Omega}^0) : v|_{\tilde{\Gamma}_{l_i}} = 0\} \end{cases}. \quad (2.10)$$

Observons que

$$\forall N \geq 1, \quad V_0 \subset V_N \subset V_\infty$$

et rappelons que le terme linéaire agit seulement sur la partie supérieure de la nouvelle fissure  $\tilde{\Sigma}$ , c'est-à-dire que

$$\ell_\infty^0(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tilde{\Sigma}} \rho c_s v^+ d\Gamma. \quad (2.11)$$

Il est facile de démontrer que les solutions  $q_N^0$  sont uniformément bornées dans la norme de  $V_\infty$  puisque les formes bilinéaires  $a^0(q_N^0, v)$  sont uniformément coercives et ne dépendent pas de  $N$ . En effet, on a pour chaque  $q_N^0$

$$a^0(q_N^0, v) = \ell_N^0(v) = \int_{\tilde{\Sigma}_s^N} c_s v^+ d\Gamma$$

et

$$\begin{aligned}
|\ell_N^0(v)| &\leq c_s \int_{\tilde{\Sigma}_s^N} |v^+| dx \leq c_s \int_{\tilde{\Sigma}} |v^+| dx \\
&\leq c_s |\tilde{\Sigma}|^{1/2} \|v^+\|_{L^2(\tilde{\Sigma})} \leq c_s |\tilde{\Sigma}|^{1/2} \|v^+\|_{L^2(\partial\tilde{\Omega}^\infty)} \\
&\leq c_s K |\tilde{\Sigma}|^{1/2} \|v^+\|_{H^1(\tilde{\Omega}^\infty)}
\end{aligned}$$

par le théorème de la trace (voir annexe pour démonstration). Or, en prenant  $v = q_N^0$ ,

$$a^0(q_N^0, q_N^0) = \ell_N^0(q_N^0) \leq c_s |\tilde{\Sigma}|^{1/2} K \|q_N^0\|_{H^1(\tilde{\Omega}^\infty)}$$

où

$$\begin{aligned}
\|q_N^0\|_{H^1(\tilde{\Omega}^\infty)} &= \left\{ \|\nabla q_N^0\|_{L^2(\tilde{\Omega}^\infty)}^2 + \|q_N^0\|_{L^2(\tilde{\Omega}^\infty)}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leq \left\{ \|\nabla q_N^0\|_{L^2(\tilde{\Omega}^\infty)}^2 + c^2 \|\nabla q_N^0\|_{L^2(\tilde{\Omega}^\infty)}^2 \right\}^{1/2} \quad \text{par Poincaré} \\
&\leq (1 + c^2)^{1/2} \|\nabla q_N^0\|_{L^2(\tilde{\Omega}^\infty)}.
\end{aligned}$$

Par coercivité de  $a^0(q_N^0, q_N^0)$

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{(1 + c^2)} \|q_N^0\|_{H^1(\tilde{\Omega}^\infty)}^2 &\leq \alpha \|\nabla q_N^0\|_{L^2(\tilde{\Omega}^\infty)}^2 \leq a^0(q_N^0, q_N^0) \leq K \|q_N^0\|_{H^1(\tilde{\Omega}^\infty)} \\
\Rightarrow \|q_N^0\|_{H^1(\tilde{\Omega}^\infty)} &\leq \frac{K}{\alpha} (1 + c^2).
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque les  $q_N^0$  sont uniformément bornés, il existe une sous-suite qui converge faiblement vers un  $q_\infty^0 \in V_\infty$ , et  $q_\infty^0$  est une solution de l'équation variationnelle

$$\boxed{\forall v \in V_0, \quad a^0(q_\infty^0, v) = \ell_\infty^0(v).} \quad (2.12)$$

Toutefois, cette équation est incomplète puisque la fonction test appartient à l'espace plus petit  $H^1(\tilde{\Omega}^0)$  qui ne voit pas la fente  $\tilde{\Sigma}$ . Par la convergence faible de  $\{q_N^0\}$  dans  $V_\infty$  le *saut*

$$[q_N^0] \stackrel{\text{def}}{=} (q_N^{0+} - q_N^{0-})|_{\tilde{\Sigma}}$$

de  $q_N^0$  le long de  $\tilde{\Sigma}$  converge fortement :

$$[q_N^0] \rightarrow [q_\infty^0] \quad \text{dans } L^2(\tilde{\Sigma})\text{-fort.}$$

Par continuité de  $q_N^0$  le long de la région trouée  $\tilde{\Sigma} \setminus \tilde{\Sigma}_s^N$ , on a

$$\forall \varphi \in L^2(\tilde{\Sigma}), \quad \int_{\tilde{\Sigma} \setminus \tilde{\Sigma}_s^N} [q_N^0] \varphi d\Gamma = 0.$$

Puisqu'on a déjà que

$$\chi_N \rightharpoonup \rho \chi_{[z_0, z_0+L_s]} \text{ dans } L^2(0, H)\text{-faible,}$$

alors

$$\chi_{\tilde{\Sigma}_s^N} \rightharpoonup \rho \chi_{\tilde{\Sigma}} \text{ dans } L^2(\tilde{\Sigma})\text{-faible}$$

et pour tout  $\varphi \in L^2(\tilde{\Sigma})$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tilde{\Sigma} \setminus \tilde{\Sigma}_s^N} [q_N^0] \varphi d\Gamma = \int_{\tilde{\Sigma}} (1 - \chi_{\tilde{\Sigma}_s^N}) [q_N^0] \varphi d\Gamma \\ &\rightarrow \int_{\tilde{\Sigma}} (1 - \rho \chi_{\tilde{\Sigma}}) [q_\infty^0] \varphi d\Gamma = (1 - \rho) \int_{\tilde{\Sigma}} [q_\infty^0] \varphi d\Gamma \\ &\Rightarrow \forall \varphi \in L^2(\tilde{\Sigma}), \quad (1 - \rho) \int_{\tilde{\Sigma}} [q_\infty^0] \varphi d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $0 \leq \rho < 1$ ,

$$[q_\infty^0] = 0 \text{ le long de } \tilde{\Sigma} \quad \Rightarrow \quad q_\infty^0 \in H^1(\tilde{\Omega}^0) \quad \Rightarrow \quad q_\infty^0 \in V_0.$$

Désormais, l'équation (2.12) peut être raffinée : la solution limite  $q_\infty^0$  est la solution unique de l'équation variationnelle

$$\boxed{\exists q_\infty^0 \in V_0, \forall v \in V_0, \quad a^0(q_\infty^0, v) = \ell_\infty^0(v).} \quad (2.13)$$

### 3. ÉQUATIONS AU SENS FORT DE LA DOSE POUR LE STENT ASYMPTOTIQUE

À partir de l'équation variationnelle (2.13) pour  $q_\infty^0$  on obtient les équations suivantes pour la dose  $q_\infty^0(x, t)$

$$\operatorname{div}(D_p \nabla q_\infty^0) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_p^0 \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div}(D_l \nabla q_\infty^0 - q_\infty^0 u) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_l. \quad (3.2)$$

Les conditions frontières sont

$$\begin{array}{l}
 \text{paroi} \\
 \text{lumière}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 q_{\infty}^0 = 0 \text{ ou } \frac{\partial q_{\infty}^0}{\partial n_p} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{R+E} \\
 \frac{\partial q_{\infty}^0}{\partial n_p} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{pi} \cup \tilde{\Gamma}_{po} \\
 D_l \frac{\partial q_{\infty}^0}{\partial n_l} - u \cdot n_l q_{\infty}^0 = 0 \text{ ou } q_{\infty}^0 = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{li} \\
 \frac{\partial q_{\infty}^0}{\partial n_l} = 0 \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_{lo}.
 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

La condition à l'interface est

$$\text{paroi/lumière} \quad D_p \frac{\partial q_{\infty}^0}{\partial n_p} + D_l \frac{\partial q_{\infty}^0}{\partial n_l} = \begin{cases} 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{lp}^{\infty} \\ \rho c_s & \text{sur } \tilde{\Sigma}, \end{cases} \quad (3.4)$$

où

$$\tilde{\Gamma}_{lp}^{\infty} = \left\{ (x_1, x_2, z) : \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + z^2 = R^2 \\ z \in ]0, H[ \setminus [z_0, z_0 + L_s] \end{array} \right\}. \quad (3.5)$$

## Chapitre 4

---

# ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ET DE DIFFUSION-CONVECTION PAR RAPPORT AUX VARIABLES NORMALISÉES SANS DIMENSION

Dans cette annexe les équations de Navier-Stokes incompressibles et les équations de diffusion-convection de la dose seront réécrites par rapport à des variables normalisées en redéfinissant des variables d'espace, de vitesse, de pression, de concentration et de dose sans dimension. Elles permettront d'exprimer tout en fonction des nombres de Reynold et de Peclet. Ces changements de variables vont aussi jouer un rôle important dans la résolution numérique des équations au Chapitre 5 suivant.

### 1. MISE À L'ÉCHELLE DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

On commence par l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + Du u \right\} + \nabla p - \mu \vec{\Delta} u = 0 \quad \text{dans } \Omega$$
$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

où  $\rho$  représente la densité,  $u$  la vitesse,  $p$  la pression et  $\nu$  la viscosité du sang. La vitesse  $u$  est un vecteur de  $\mathbf{R}^3$  de composantes  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$ .  $\vec{\Delta} u$  est le laplacien vectoriel

$$(\vec{\Delta} u)_i = \Delta u_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Si l'on introduit le *tenseur de déformation*  $\varepsilon(u)$  du vecteur  $u$  et la *divergence vectorielle*  $\vec{\text{div}}(\sigma)$  du tenseur  $\sigma$

$$\varepsilon(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Du + {}^*Du}{2}, \quad [\vec{\text{div}}(\sigma)]_i \stackrel{\text{def}}{=} \text{div}(\sigma_{i\cdot}) = \sum_{j=1}^N \partial_j \sigma_{ij},$$

il est facile de voir que

$$\vec{\text{div}}(2\varepsilon(u)) = \nabla(\text{div } u) + \vec{\Delta}u = \vec{\Delta}u$$

par la condition d'incompressibilité. On peut donc réécrire la première équation sous la forme

$$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + Du u \right\} + \nabla p - \vec{\text{div}}(\mu 2\varepsilon(u)) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On passe maintenant à la question de la mise à l'échelle de la première équation. Pour une application à l'écoulement dans un tube, on introduit le *diamètre hydraulique*

$$L_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4A}{P},$$

où  $A$  est l'aire et  $P$  le périmètre de la section du tube. Ici le tube sera la lumière que l'on a supposée être un cylindre de rayon  $R$  pour lequel il est facile de vérifier que le diamètre hydraulique est

$$L_0 = \frac{4\pi R^2}{2\pi R} = 2R.$$

Par convention on indique à l'aide d'un trait supérieur les variables sans dimension :

$$x = L_0 \bar{x}, \quad y = L_0 \bar{y}, \quad z = L_0 \bar{z}, \quad t = T_0 \bar{t}$$

$$u = U_0 \bar{u}, \quad p = P_0 \bar{p}.$$

Il reste à déterminer les paramètres caractéristiques  $T_0$ ,  $U_0$ , et  $P_0$  afin d'obtenir l'équation sans dimension. On substitue et on dénote avec une barre supérieure

les opérateurs différentiels par rapport aux variables non-dimensionnalisées

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{U_0}{T_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{U_0^2}{L_0} \bar{D} \bar{u} \bar{u} \right\} + \frac{P_0}{L_0} \bar{\nabla} \bar{p} - \mu \frac{U_0}{L_0^2} \bar{\Delta} \bar{u} &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{T_0 U_0^2}{U_0 L_0} \bar{D} \bar{u} \bar{u} \right\} + \frac{T_0 P_0}{\rho U_0 L_0} \bar{\nabla} \bar{p} - \mu \frac{T_0 U_0}{\rho U_0 L_0^2} \bar{\Delta} \bar{u} &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{T_0 U_0}{L_0} \bar{D} \bar{u} \bar{u} \right\} + \frac{T_0 P_0}{\rho U_0 L_0} \bar{\nabla} \bar{p} - \mu \frac{T_0}{\rho L_0^2} \bar{\Delta} \bar{u} &= 0. \end{aligned}$$

On choisit

$$T_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L_0}{U_0}, \quad P_0 \stackrel{\text{def}}{=} \rho U_0^2 = \frac{\rho U_0 L_0}{T_0}$$

et l'on introduit le *nombre de Reynold*

$$\text{Re} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho U_0 L_0}{\mu} = \frac{\rho L_0^2}{\mu T_0}.$$

Il vient alors

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{D} \bar{u} \bar{u} + \bar{\nabla} \bar{p} - \frac{1}{\text{Re}} \bar{\Delta} \bar{u} = 0.$$

## 2. MISE À L'ÉCHELLE DES ÉQUATIONS DE DIFFUSION-CONVECTION

Pour les équations de la concentration  $c$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \text{div}(D_p \nabla c) \text{ dans } \tilde{\Omega}_p \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \text{div}(D_s \nabla c) \text{ dans } \tilde{\Omega}_s \\ \frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c &= \text{div}(D_l \nabla c) \text{ dans } \tilde{\Omega}_l \end{aligned}$$

avec la condition initiale

$$c(0) = \begin{cases} 0, & \text{dans } \tilde{\Omega}_l \cup \tilde{\Omega}_p \\ c_0, & \text{dans } \tilde{\Omega}_s. \end{cases}$$

On applique la même mise à l'échelle avec

$$C_0 \bar{c}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = c(T_0 \bar{t}, L_0 \bar{x}, L_0 \bar{y}, L_0 \bar{z}).$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\frac{C_0}{T_0} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \operatorname{div} \left( \frac{D_p C_0}{L_0^2} \bar{\nabla} \bar{c} \right) \\ \frac{C_0}{T_0} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \operatorname{div} \left( \frac{D_s C_0}{L_0^2} \bar{\nabla} \bar{c} \right) \\ \frac{C_0}{T_0} \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} + \frac{U_0 C_0}{L_0} \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \bar{c} &= \operatorname{div} \left( \frac{D_l C_0}{L_0^2} \bar{\nabla} \bar{c} \right)\end{aligned}$$

ou, après simplification,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \operatorname{div} \left( \frac{D_p}{U_0 L_0} \bar{\nabla} \bar{c} \right) \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \operatorname{div} \left( \frac{D_s}{U_0 L_0} \bar{\nabla} \bar{c} \right) \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} + \frac{U_0 T_0}{L_0} \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \bar{c} &= \operatorname{div} \left( \frac{D_l}{U_0 L_0} \bar{\nabla} \bar{c} \right).\end{aligned}$$

En utilisant la définition de  $U_0$  et en introduisant les nombres de Peclet

$$\operatorname{Pe}_l \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_0 L_0}{D_l}, \quad \operatorname{Pe}_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_0 L_0}{D_p}, \quad \operatorname{Pe}_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U_0 L_0}{D_s},$$

il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \operatorname{div} \left( \frac{1}{\operatorname{Pe}_p} \bar{\nabla} \bar{c} \right) \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} &= \operatorname{div} \left( \frac{1}{\operatorname{Pe}_s} \bar{\nabla} \bar{c} \right) \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \cdot \bar{\nabla} \bar{c} &= \operatorname{div} \left( \frac{1}{\operatorname{Pe}_l} \bar{\nabla} \bar{c} \right)\end{aligned}$$

avec la condition initiale

$$\bar{c}(0) = \begin{cases} 0, & \text{dans } \bar{\Omega}_l \cup \bar{\Omega}_p \\ \frac{c_0}{C_0}, & \text{dans } \bar{\Omega}_s. \end{cases}$$

Pour les équations de la dose, on pose

$$\bar{q}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \bar{c}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) d\bar{t}.$$

Par définition de  $q$

$$\begin{aligned}
 q(x, y, z) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty c(t, x, y, z) dt \\
 &= \int_0^\infty c(T_0 \bar{t}, L_0 \bar{x}, L_0 \bar{y}, L_0 \bar{z}) T_0 d\bar{t} \\
 &= \int_0^\infty C_0 \bar{c}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) T_0 d\bar{t} \\
 &= C_0 T_0 \int_0^\infty \bar{c}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) d\bar{t} = C_0 T_0 \bar{q}(L_0 \bar{x}, L_0 \bar{y}, L_0 \bar{z}).
 \end{aligned}$$

Le facteur de normalisation  $C_0$  qu'il reste à fixer sera déterminé à partir de la nouvelle variable

$$Q_0 \stackrel{\text{def}}{=} C_0 T_0$$

de façon que

$$q(T_0 \bar{t}, L_0 \bar{x}, L_0 \bar{y}, L_0 \bar{z}) = Q_0 \bar{q}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Les équations de la dose  $q^0$  lorsque l'épaisseur du produit tend vers 0 tout en conservant la masse totale de produit reste constante

$$m = c_0 N \lambda \pi e (2R + e), \quad c_s = \frac{m}{2\pi R \lambda N}$$

sont

$$\operatorname{div}(D_p \nabla q^0) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_p^0 \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div}(D_l \nabla q^0 - q^0 u) = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_l. \quad (2.2)$$

Les conditions frontières sont

$$\begin{aligned}
 \text{paroi} & \begin{cases} q^0 = 0 \text{ ou } \frac{\partial q^0}{\partial n_p} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{R+E} \\ \frac{\partial q^0}{\partial n_p} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{pi} \cup \tilde{\Gamma}_{po} \\ D_p \frac{\partial q^{0+}}{\partial n_p} = c_s & \text{sur } \tilde{\Sigma}_s \end{cases} \\
 \text{lumière} & \begin{cases} D_l \frac{\partial q^0}{\partial n_l} - u \cdot n_l q^0 = 0 \text{ ou } q^0 = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{li} \\ \frac{\partial q^0}{\partial n_l} = 0 & \text{sur } \tilde{\Gamma}_{lo} \\ \frac{\partial q^{0-}}{\partial n_l} = 0 & \text{sur } \tilde{\Sigma}_s. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Les conditions aux interfaces sont

$$\text{paroi/lumière} \quad D_p \frac{\partial q^0}{\partial n_p} + D_l \frac{\partial q^0}{\partial n_l} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{lp}. \tag{2.4}$$

Les équations de la dose  $\bar{q}^0$  lorsque l'épaisseur du produit tend vers 0 tout en conservant la masse totale de produit reste constante

$$\begin{aligned}
 \bar{m} &= \frac{c_0}{C_0} N \bar{\lambda} \pi \bar{e} (2\bar{R} + \bar{e}) = \frac{c_0}{C_0} N \frac{\lambda}{L_0} \pi \frac{e}{L_0} \left( 2\frac{R}{L_0} + \frac{e}{L_0} \right) = \frac{m}{C_0 L_0^3} = \frac{m}{Q_0 U_0 L_0^2} \\
 \bar{c}_s &= \frac{\bar{m}}{2\pi \bar{R} \bar{\lambda} N} = \frac{\frac{m}{C_0 L_0^3}}{2\pi \frac{R}{L_0} \frac{\lambda}{L_0} N} = \frac{c_s}{C_0 L_0} = \frac{c_s}{Q_0 U_0}
 \end{aligned}$$

sont

$$\bar{\text{div}} \left( \frac{1}{\text{Pe}_p} \bar{\nabla} \bar{q}^0 \right) = 0 \text{ dans } \bar{\Omega}_p^0 \tag{2.5}$$

$$\bar{\text{div}} \left( \frac{1}{\text{Pe}_l} \bar{\nabla} \bar{q}^0 - \bar{q}^0 \bar{u} \right) = 0 \text{ dans } \bar{\Omega}_l, \tag{2.6}$$

où les domaines et frontières coiffés d'une barre sont les domaines et frontières non-dimensionalisés. Les conditions frontières sont

$$\begin{array}{l}
 \text{paroi} \\
 \text{lumière}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \bar{q}^0 = 0 \text{ ou } \frac{\partial \bar{q}^0}{\partial n_p} = 0 \quad \text{sur } \overline{\Gamma_{R+E}} \\
 \frac{\partial \bar{q}^0}{\partial n_p} = 0 \quad \text{sur } \overline{\Gamma_{pi}} \cup \overline{\Gamma_{po}} \\
 \frac{1}{\text{Pe}_p} \frac{\partial \bar{q}^{0+}}{\partial n_p} = \bar{c}_s \quad \text{sur } \overline{\Sigma_s} \\
 \\
 \frac{1}{\text{Pe}_l} \frac{\partial \bar{q}^0}{\partial n_l} - \bar{u} \cdot n_l \bar{q}^0 = 0 \text{ ou } \bar{q}^0 = 0 \quad \text{sur } \overline{\Gamma_{li}} \\
 \frac{\partial \bar{q}^0}{\partial n_l} = 0 \quad \text{sur } \overline{\Gamma_{lo}} \\
 \frac{\partial \bar{q}^{0-}}{\partial n_l} = 0 \quad \text{sur } \overline{\Sigma_s}.
 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Les conditions aux interfaces sont

$$\text{paroi/lumière} \quad \frac{1}{\text{Pe}_p} \frac{\partial \bar{q}^0}{\partial n_p} + \frac{1}{\text{Pe}_l} \frac{\partial \bar{q}^0}{\partial n_l} = 0 \quad \text{sur } \overline{\Gamma_{lp}}. \quad (2.8)$$

On remarque que la dose  $\bar{q}^0$  est proportionnelle à  $\bar{c}_s$ . Il suffit donc de résoudre le système pour un  $\bar{c}_s$  particulier et de multiplier le  $\bar{q}^0$  par un facteur adéquat. Pour des considérations purement numériques il peut être avantageux de choisir  $\bar{c}_s$  du même ordre que  $1/\text{Pe}_p$ . Ce choix déterminera alors le facteur de normalisation  $Q_0$  (ou  $C_0$ )

$$\bar{c}_s = \frac{c_s}{Q_0 U_0} \quad \Rightarrow \quad Q_0 = \frac{c_s}{\bar{c}_s U_0}.$$

On pourrait prendre par exemple

$$\bar{c}_s = \frac{1}{\text{Pe}_p} \quad \Rightarrow \quad Q_0 = c_s \frac{\text{Pe}_p}{U_0}.$$

### 3. CHOIX DU PROFIL DE VITESSE $u$ ET DE $U_0$ À PARTIR DU DÉBIT D'ENTRÉE

Dans le paragraphe précédent on a introduit une vitesse scalaire caractéristique du sang  $U_0$ . On va choisir pour  $U_0$

$$U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\text{débit entrant par } \Gamma_{li}}{\text{surface de la section d'entrée } \Gamma_{li}}.$$

Pour les besoins de la simulation numérique on va choisir un profil de vitesse correspondant à un *écoulement pleinement développé*, où le gradient de pression sera aligné avec l'axe  $z$  de l'écoulement et constant. La pression variera donc de façon linéaire en fonction de  $z$  (voir [11] pp.207-208). La vitesse  $u$  sera donc de la forme

$$u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

où  $u_x = u_y = 0$  et  $u_z$  est donné par

$$u_z(r) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad 0 \leq r \leq R.$$

Il reste à déterminer la constante  $\alpha$  en fonction de  $U_0$ .

Par définition du débit à l'entrée  $\tilde{\Gamma}_{li}$

$$Q = - \int_{\tilde{\Gamma}_{li}} u \cdot n_l d\Gamma = \int_{\tilde{\Gamma}_{li}} u_z d\Gamma = \int_0^R u_z(r) 2\pi r dr.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \pi R^2 U_0 = Q &= \int_0^R \alpha \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] 2\pi r dr \\ &= \alpha 2\pi R^2 \int_0^R \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \frac{r}{R} d\frac{r}{R} \\ &= \alpha 2\pi R^2 \int_0^1 [1 - \rho^2] \rho d\rho = \alpha 2\pi R^2 \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha = 2U_0}. \end{aligned}$$

Le profil de vitesse est donc de la forme

$$\boxed{u_z(r) \stackrel{\text{def}}{=} 2U_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad 0 \leq r \leq R}$$

ou sous sa forme non-dimensionalisée avec  $L_0 = 2R$

$$\boxed{\bar{u}_z(\bar{r}) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \left[ 1 - (2\bar{r})^2 \right], \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1/2.}$$

On vérifiera facilement que pour ce profil

$$\text{div } u = 0, \quad Du u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_l.$$

Il reste donc

$$\nabla p - \mu \vec{\Delta} u = 0 \text{ dans } \tilde{\Omega}_l.$$

Comme

$$\begin{aligned} \Delta u_x = \Delta u_y = 0, \quad u_z = 2U_0 \left[ 1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right] \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = -\frac{4U_0}{R^2}, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0, \quad \Rightarrow \Delta u_z = -\frac{8U_0}{R^2} \\ \nabla p - \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{8U_0}{R^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{8U_0}{R^2} = 0 \end{aligned}$$

ou encore en terme du débit

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\mu \frac{8U_0}{R^2} = -\mu \frac{8\mu Q}{\pi R^4}$$

ce qui indique une chute de pression linéaire le long de l'axe des  $z$  entre l'entrée et la sortie de la lumière.

#### 4. RÉSUMÉ DES CHOIX DES PARAMÈTRES DES ÉQUATIONS

Dans le paragraphe précédent, on a donc choisit les quantités suivantes

$$\begin{aligned} L_0 = 2R, \quad U_0 = \frac{Q}{\pi R^2}, \quad T_0 = \frac{L_0}{U_0} \\ \text{Re} = \frac{\rho U_0 L_0}{\mu}, \quad P_0 = \rho U_0^2, \quad \text{Pe}_l = \frac{U_0 L_0}{D_l}, \quad \text{Pe}_p = \frac{U_0 L_0}{D_p}, \quad Q_0 = c_s \frac{\text{Pe}_p}{U_0}. \end{aligned}$$

# Chapitre 5

---

## RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre on réduit le problème de la dimension 3 à la dimension 2 en utilisant la symétrie cylindrique. On passe des variables réelles  $(r, z)$  aux variables  $(\bar{r}, \bar{z})$  sans dimension et on résout les équations du Chapitre 4 également pour les variables sans dimension.

Pour simplifier, on fait l'hypothèse d'un écoulement stationnaire dans un tube cylindrique (pp. 207-208 [11]). Les paramètres utilisés sont précisés plus loin aux tableaux 0.1 et 0.2.

On résout les équations de la dose par la méthode des éléments finis pour les cas  $N = 4, 16, 64$  et pour le cas du stent asymptotique.

### 1. MAILLAGE DU DOMAINE

La première étape dans le calcul de la dose est le maillage de la section d'artère à étude. La surface génératrice 2- $D$  de la section d'artère est un long rectangle. En amont et en aval de la région cible où est inséré le stent il faut utiliser des sections assez longues pour minimiser l'effet des frontières artificielles  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_o$  sur le calcul de la dose. Il y a donc trois régions à mailler : l'entrée, la cible et la sortie. La région cible a une structure périodique. On créera donc un maillage pour chaque section élémentaire strut/inter-strut composée de la strut de largeur  $\lambda$  et des deux régions avant et après la strut de largeur  $(L - \lambda)/2$ . Par périodicité on répètera  $N$  fois (le nombre de struts) ce maillage.

l'artère et le sang			
notation	description	mm	sans dimension
$R$	rayon de la lumière	1.5	0.5
$E$	épaisseur de la paroi de l'artère	0.4	0.133
Re	nombre de Reynold		140.80
$Pe_t$	nombre de Peclet		$10^8$
le stent de Wiktor			
notation	description	mm	sans dimension
$N$	nombre de struts		24
$\lambda = 2r$	diamètre de la strut	0.15	0.05
$L$	distance entre deux struts	0.7	0.233
$\rho$	aire du stent/ $2\pi R L_s$		0.214
$L_s$	longueur de la région cible	16.8	5.6

TAB. 0.1. Paramètres du sang et du stent de Wiktor (longueur normalisée par rapport à  $L_0 = 3\text{mm}$ ).

La théorie permet d'anticiper de fortes variations de la dose dans certaines régions. Plutôt que de mailler uniformément et de raffiner après, on va donc anticiper et en tenir compte lors de la création du maillage.

Dans la direction de l'axe des  $r$ , lors du passage de la lumière à la paroi, la dose sera discontinue le long des struts. De même dans la direction  $z$  le long de la surface  $r = R$  on passera d'une condition de discontinuité le long des struts à une condition de continuité entre les struts. Il faut donc prévoir de forts gradients le long de la surface  $r = R$  dans la région cible et concentrer le maillage. Il faudra aussi concentrer le maillage aux interfaces de la région cible avec les régions d'entrée et de sortie.

Lorsque le nombre de struts augmente, la largeur de chaque strut va diminuer et on s'attend à une quasi-périodicité de la solution dans la région cible. Pour tenir compte des grandes variations du gradient de la solution près des struts, on va concentrer les nœuds dans la direction des axes des  $r$  et des  $z$  près des struts dans

la géométrie			
notation	description	mm	sans dimension
$R$	rayon de la lumière	1.5	0.5
$E$	épaisseur de la paroi de l'artère	0.4	0.133
$R + E$	rayon de l'artère	1.9	0.63333
$L_s$	longueur de la région cible	16.8	5.6
$z_0$	longueur de la section d'entrée	5	1.666
$z_0$	longueur de la section de sortie	5	1.666
$H$	longueur de l'artère	50.4	8.9333
$\rho$	aire du stent/ $2\pi R L_s$		0.1 to 0.9
paramètres de diffusion			
notation	description		sans dimension
$Pe_p$	diffusion dans la paroi (nombre de Peclet)		$10^8$
$Pe_l$	diffusion dans la lumière (nombre de Peclet)		$10^8$
$c_s$	densité de surface du produit		$10^{-8}$

TAB. 0.2. Paramètres utilisés pour la simulation numérique.

le but d'obtenir une résolution plus précise dans ces régions. La région occupée par la strut quant à elle est maillée uniformément le long de l'axe des  $z$ . Ceci maille la région de l'artère autour de  $\tilde{\Sigma}$  (cf. Figure 1.2). Pour la région avant et après celle occupée par le stent, la compression ne se fait que dans la direction de l'axe des  $r$  tandis qu'une discrétisation uniforme est effectuée le long de l'axe des  $z$  (cf. Figure 1.1).

Lorsque le nombre de struts devient très grand, la largeur de chaque strut devient très petite ce qui force un maillage (taille des triangles) de plus en plus fin de la cellule contenant la strut. Le nombre de variables à calculer devient alors très grand et on atteint les limites de la capacité de l'ordinateur et de la précision des méthodes.

Ceci donne une motivation supplémentaire pour l'introduction du modèle asymptotique, non seulement du point de vue théorique mais aussi du point de

vue numérique. Dans le cas asymptotique, il n'y a plus de variations périodiques ou brutales dans la région cible. On peut la mailler de façon uniforme. Il ne reste donc plus que trois régions relativement uniformes : la région cible et les deux régions amont et aval. Il suffira de mailler plus finement aux interfaces. La région cible sera considérée comme une seule strut de largeur  $L_s$ . Dans ce cas c'est beaucoup plus simple à résoudre car la solution est continue le long de l'interface  $\tilde{\Sigma}$  paroi/lumière.

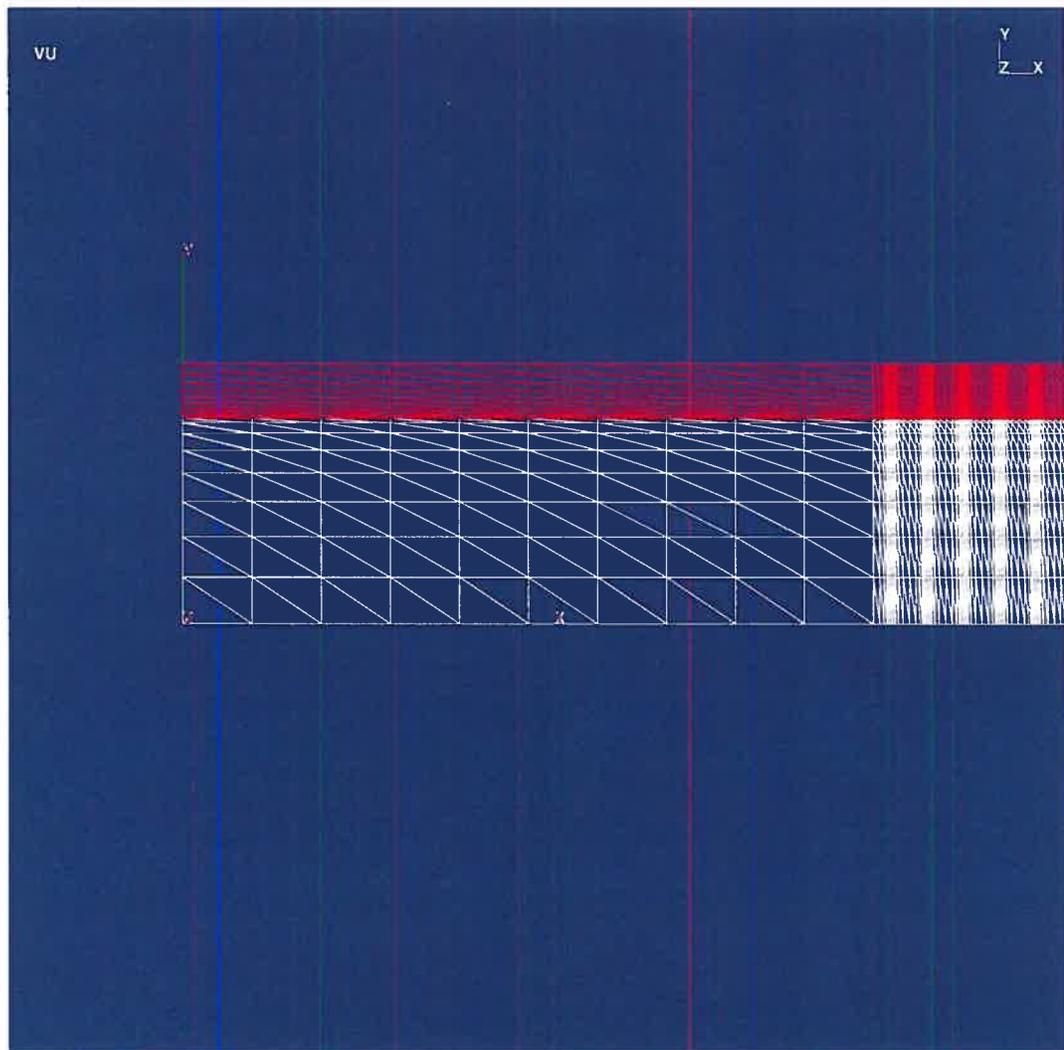


FIG. 1.1. Maillage de la section d'entrée entre  $z = 0$  et  $z = z_0$  et des premières sections de struts.

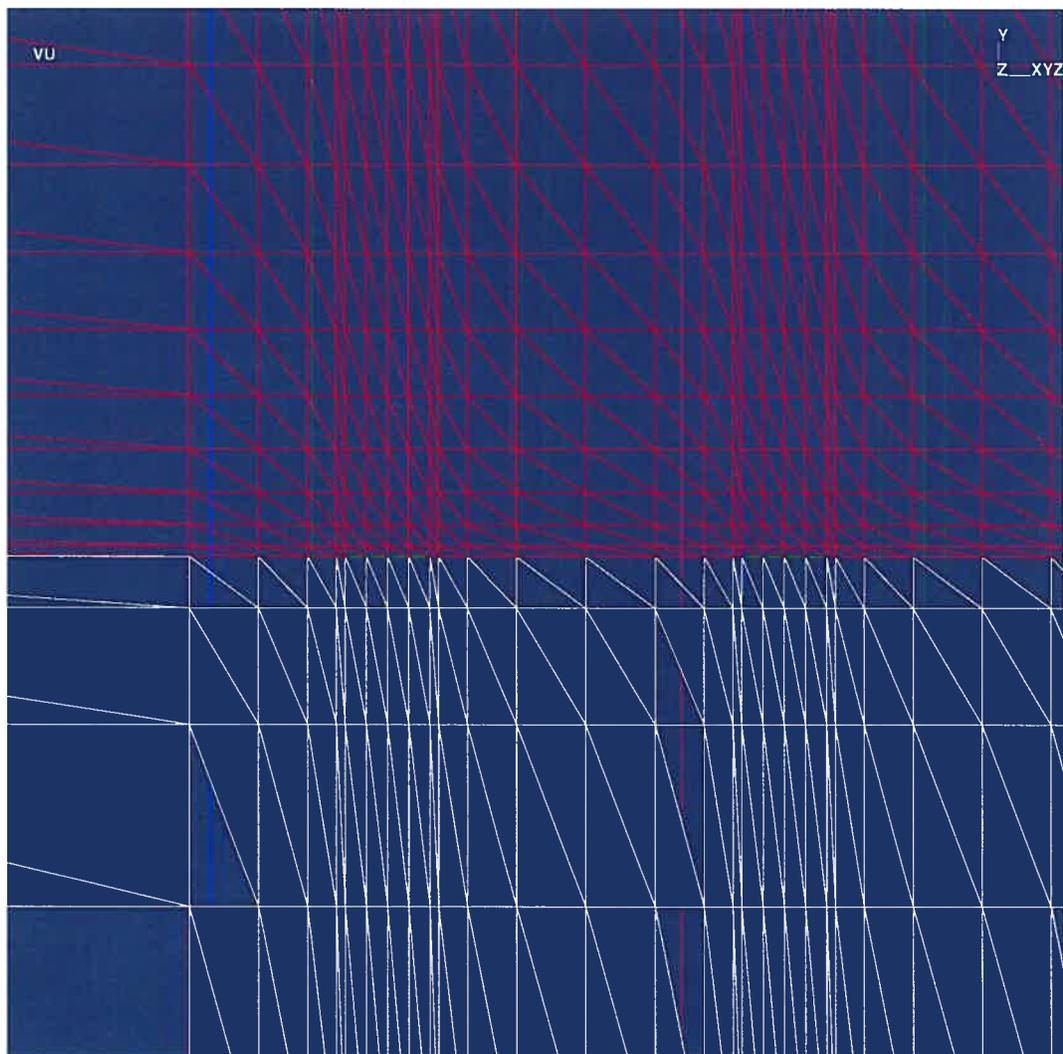


FIG. 1.2. Maillage de deux sections de struts.

## 2. MÉTHODES UTILISÉES POUR RÉSOUDRE LE PROBLÈME

Le logiciel<sup>1</sup> de résolution de l'équation de *convection-diffusion* utilise une méthode *SUPG* (Streamline Upwind Petrov Galerkin). Cette méthode, qui fait appel à des éléments linéaires à trois nœuds sur chaque triangle afin d'obtenir une approximation continue et linéaire par triangle, stabilise la convection pour des nombres de Peclet grand et réduit les oscillations en créant de la viscosité numérique. La méthode marche bien lorsque l'écoulement est perpendiculaire au front de la dose. Mais, dans notre cas le front est parallèle à l'écoulement. Pour éviter que des oscillations se produisent à l'interface, le logiciel utilise une méthode de capture de fronts parallèles.

## 3. RÉSULTATS DES SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Dans cette section on s'intéresse à la distribution de la dose dans la paroi juste au dessus de la région cible. Idéalement on voudrait que tout point de cette région soit affecté par une dose minimale pour effectivement soigner celle-ci. D'autre part il est probable qu'une dose trop forte soit toxique ou nuise au bon fonctionnement de la paroi. Dans tous les cas il y a intérêt à utiliser le moins de produit possible. Les études numériques peuvent fournir des renseignements utiles mais ce sont bien évidemment les expériences en laboratoire et des modélisations beaucoup plus fine de la paroi qui détermineront les bornes supérieure et inférieure qu'il faudra imposer sur la dose.

Dans nos calculs, le paramètre que l'on a fait varier est le nombre de struts  $N$ . Les valeurs de  $N$  que l'on a prises étaient  $N = 4, 16$  et  $64$ . On pourrait par exemple chercher le nombre de struts nécessaire afin que toute la région cible soit atteinte avec une dose minimale de produit tout en utilisant le moins de produit possible ou encore maximiser l'intégrale de la dose dans la paroi au dessus de la région cible.

Afin de garder le nombre de nœud dans le maillage sensiblement le même, chaque fois que le nombre de struts étaient quadruplé, on a divisé par 4 le nombre

---

<sup>1</sup>L'auteur remercie André Garon de l'École Polytechnique pour lui avoir donné accès à ce logiciel dans le cadre du projet RCM<sub>2</sub> sur le *Design et contrôle des dispositifs médicaux*.

d'éléments qui composait chaque région strut/inter-strut. On a utilisé environ 87 000 nœuds pour mailler le domaine.

Les autres essais ont porté sur le stent asymptotique où il y a continuité de la dose tout le long de l'interface  $\tilde{\Sigma}$ .

### 3.1. Cas $N = 4, 16, 64$

Tout d'abord, on note que la dose est presque nulle dans la lumière car le sang dans l'artère est hautement convectif (cf. Figure 3.1). Sur la frontière paroi/lumière, on voit que là où sont situés les struts, il y a une discontinuité de la dose sur la surface  $r = R$ . Puisqu'on avait supposé que la strut était isolée de la lumière à l'interface paroi/lumière, il y a une injection massive de produit dans la paroi. On remarque que la dose diffuse tranquillement dans la paroi dans la direction de l'axe des  $r$  mais que dans la direction des axes des  $z$ , la dose chute assez rapidement lorsque la diffusion latérale se retrouve au-dessus de la région entre deux struts. Ceci est dû au transport du sang qui aspire la dose qui se trouve dans la paroi via l'interface paroi/lumière entre deux struts et l'achemine dans la lumière.

Dans la Figure 3.5, on note que le nombre de struts a une influence sur la dose maximale et minimale qui se retrouvent dans la paroi. On remarque que, lorsque  $N = 4$ , la dose atteint des valeurs maximales non-dimensionnalisées d'environ  $q \approx 0.11$  aux struts et qu'elle est presque nulle entre les struts. Cependant, lorsqu'on augmente  $N$ , l'écart entre les maximums et les minimums diminue de plus en plus jusqu'à ce que le graphique ressemble à un plateau dans la région cible (voir les coupes en  $r = R + E$  représentant la dose en fonction de  $z$  et de  $N$ ). L'explication de ce phénomène est que comme la masse de produit largué dans la paroi est constante lorsqu'on augmente le nombre de struts, la quantité de produit sur chaque strut, ainsi que la distance séparant deux struts, va diminuer. Comme la région de largage du produit est de plus en plus proche de l'interface paroi/lumière où il y a continuité de la dose, la diffusion sur une petite distance aura moins d'effet et la convection le long de l'axe des  $z$  sera de plus en plus importante.

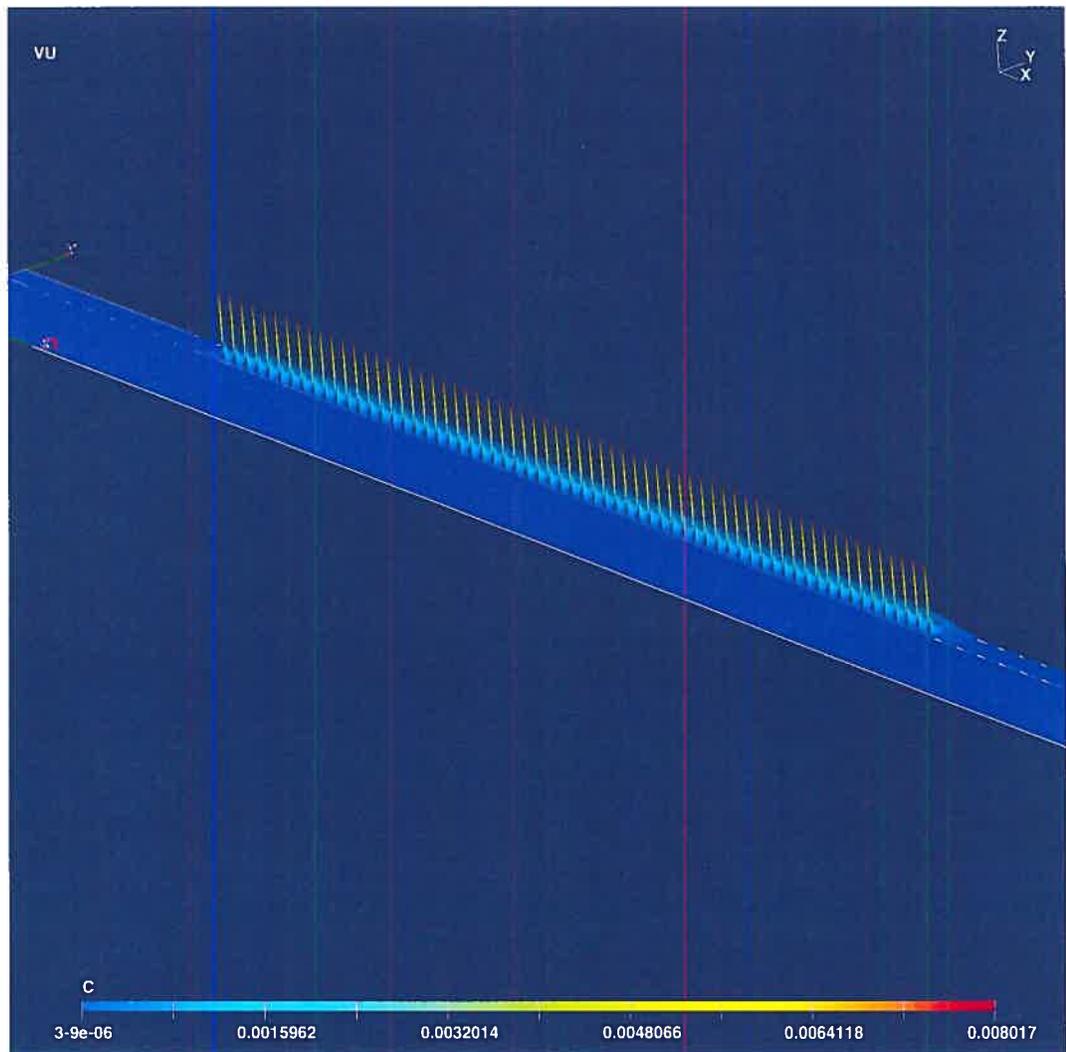


FIG. 3.1. Graphe 1 : dose en fonction de  $r$  et  $z$  pour  $N = 64$ .

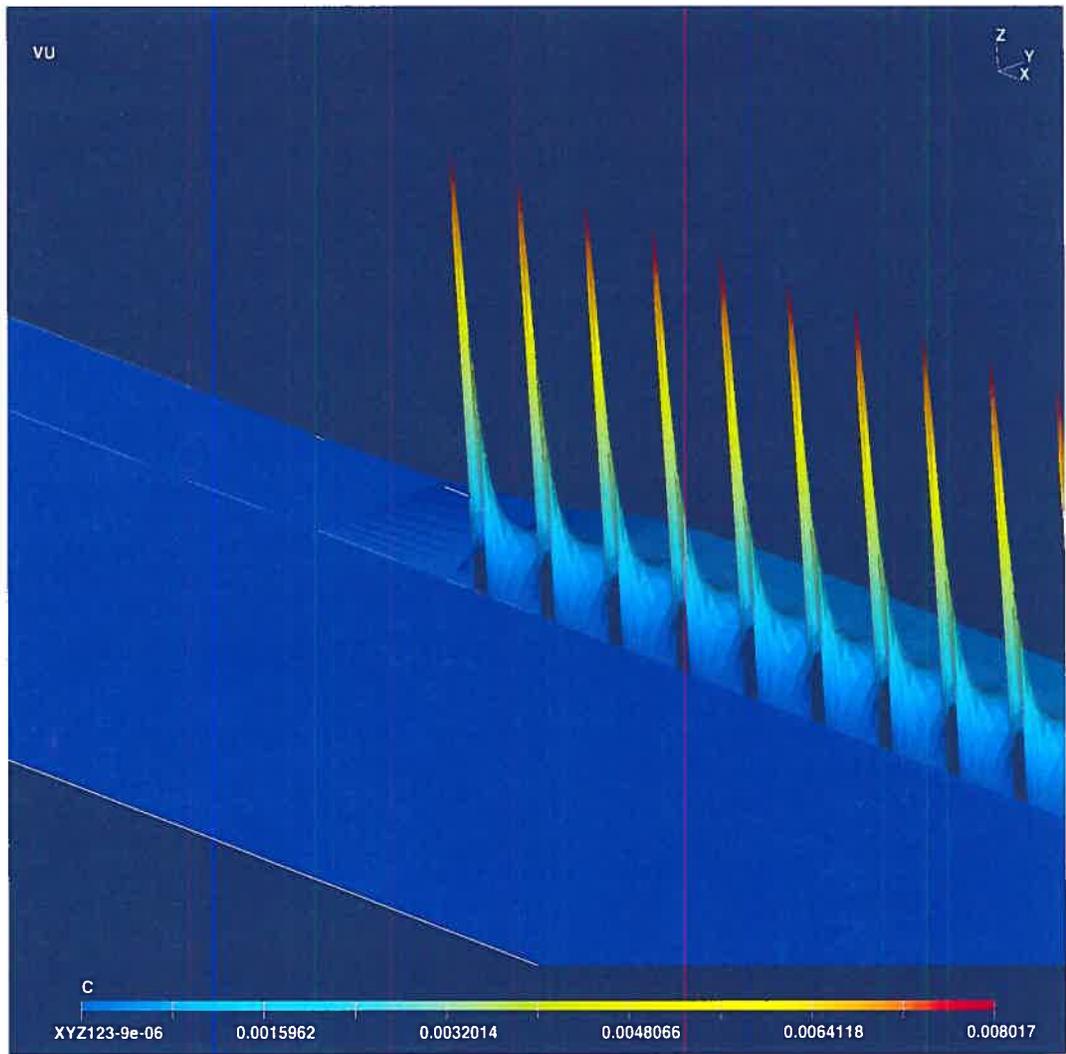


FIG. 3.2. Graphe 2 : dose dans la région aval et au début du stent.

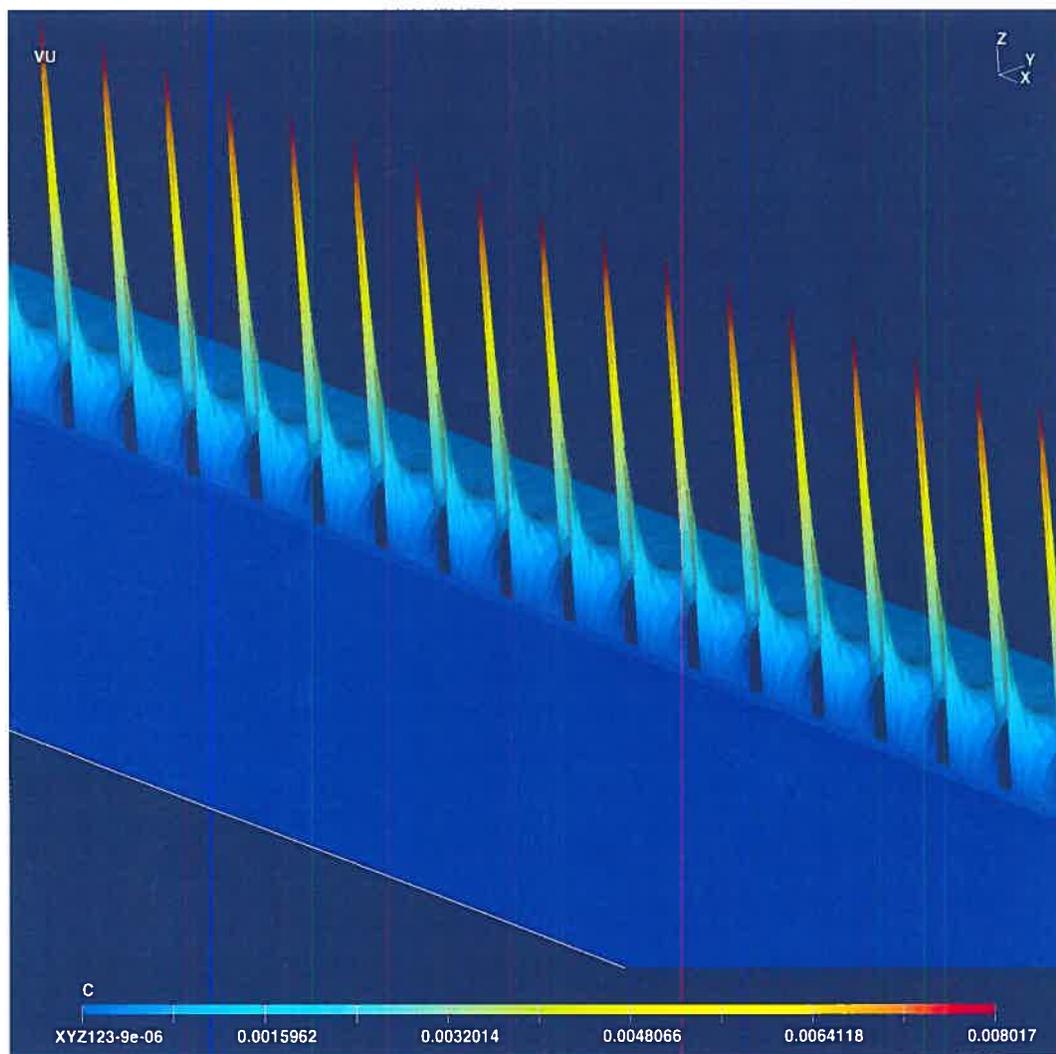


FIG. 3.3. Graphe 3 : dose dans la région au centre du stent.

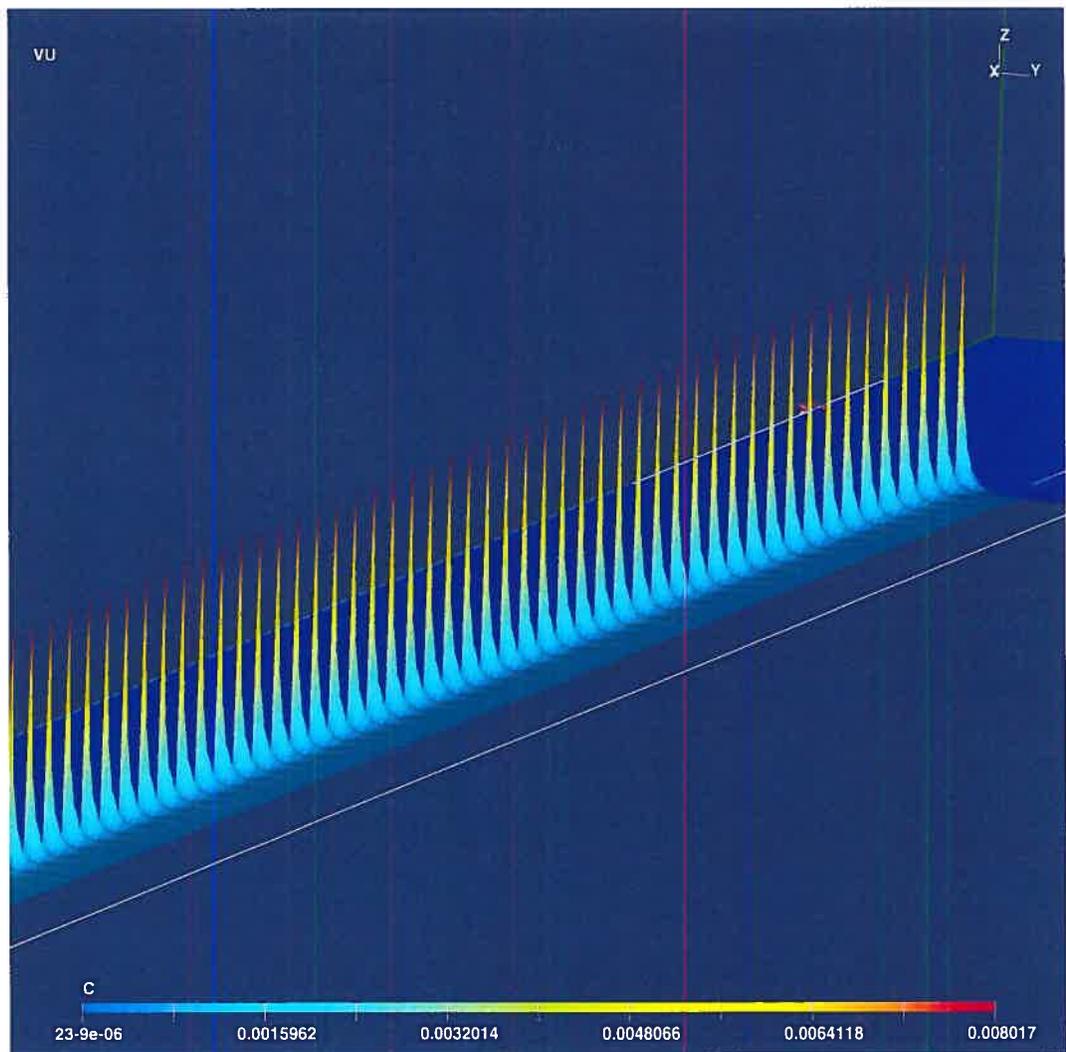


FIG. 3.4. Graphe 4 : dose vue du côté paroi.

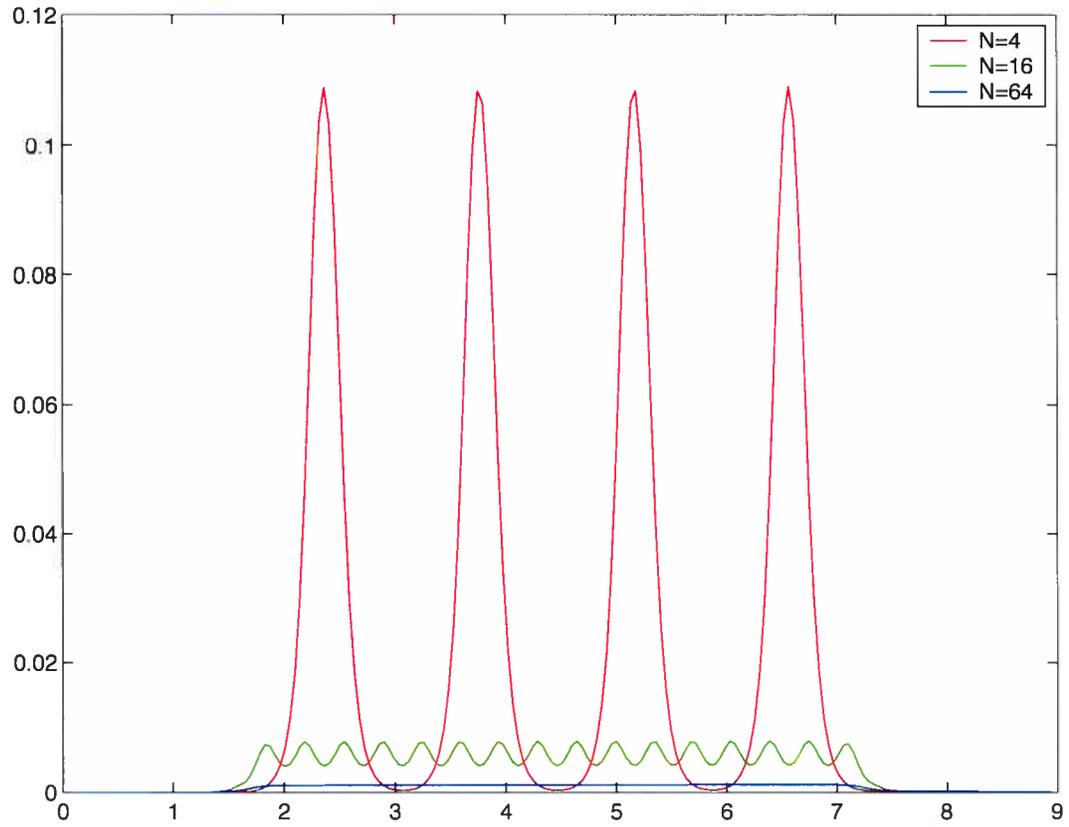


FIG. 3.5. Coupe de la dose en  $r = R + E$  en fonction de  $z$  pour  $N = 4, 16, 64$ .

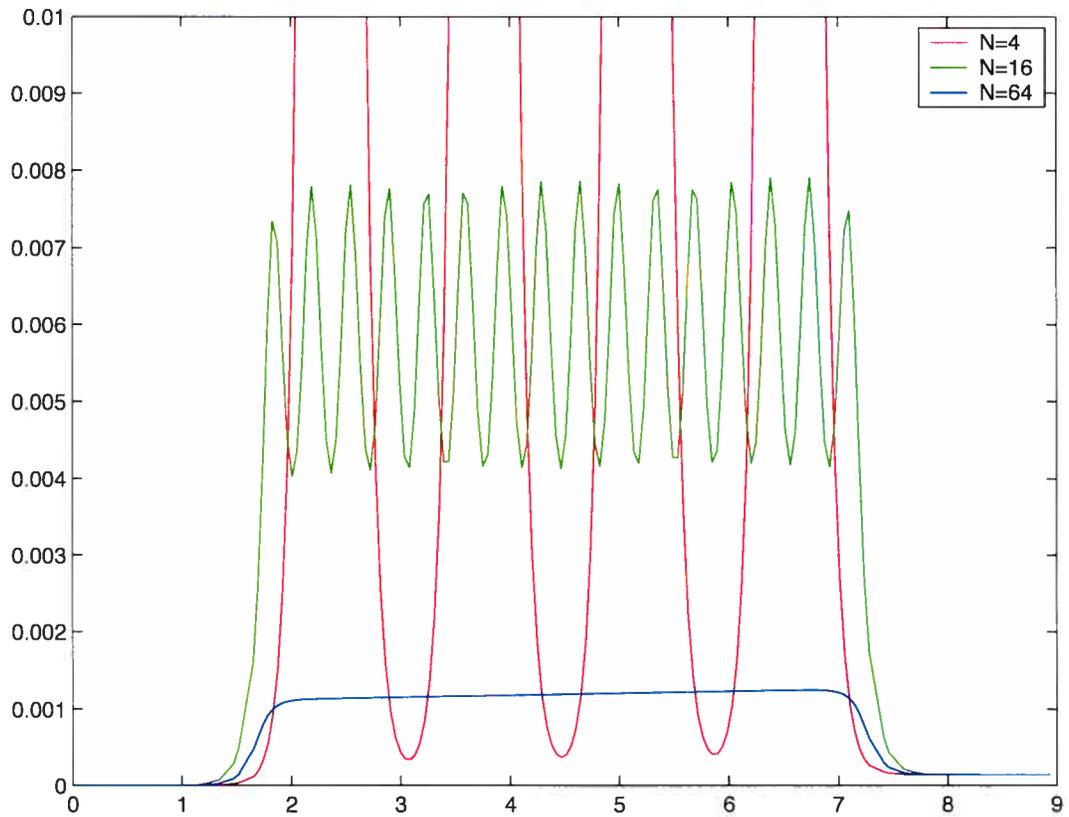


FIG. 3.6. Coupe de la dose en  $r = R + E$  en fonction de  $z$  pour  $N = 4, 16, 64$  (zoom).

### 3.2. Cas du stent asymptotique

Comme pour le cas non-asymptotique, la dose est nulle dans la lumière mais puisqu'on a supposé que le stent asymptotique était continu le long de  $\Sigma$ , il n'y a pas de discontinuité de la dose sur la frontière paroi/lumière. Ceci permet au facteur de transport d'avoir une plus grande influence sur la diffusion dans la paroi. Comme on peut l'observer dans la figure 3.7, lorsque le produit se diffuse, il n'est pas restreint à la région de la paroi qui se retrouve au-dessus de  $\Sigma$ . Le transport a pour effet d'acheminer le produit plus loin dans la paroi de l'artère. Ceci est en effet un phénomène bien voulu car lorsqu'il y a resténose, ceci se produit habituellement plus loin dans l'artère et non pas là où le stent fut déployé. Ainsi,

si le produit contient un médicament qui pourrait réduire la prolifération des cellules lisses qui provoquent la resténose, ceci sera bénéfique pour le patient.

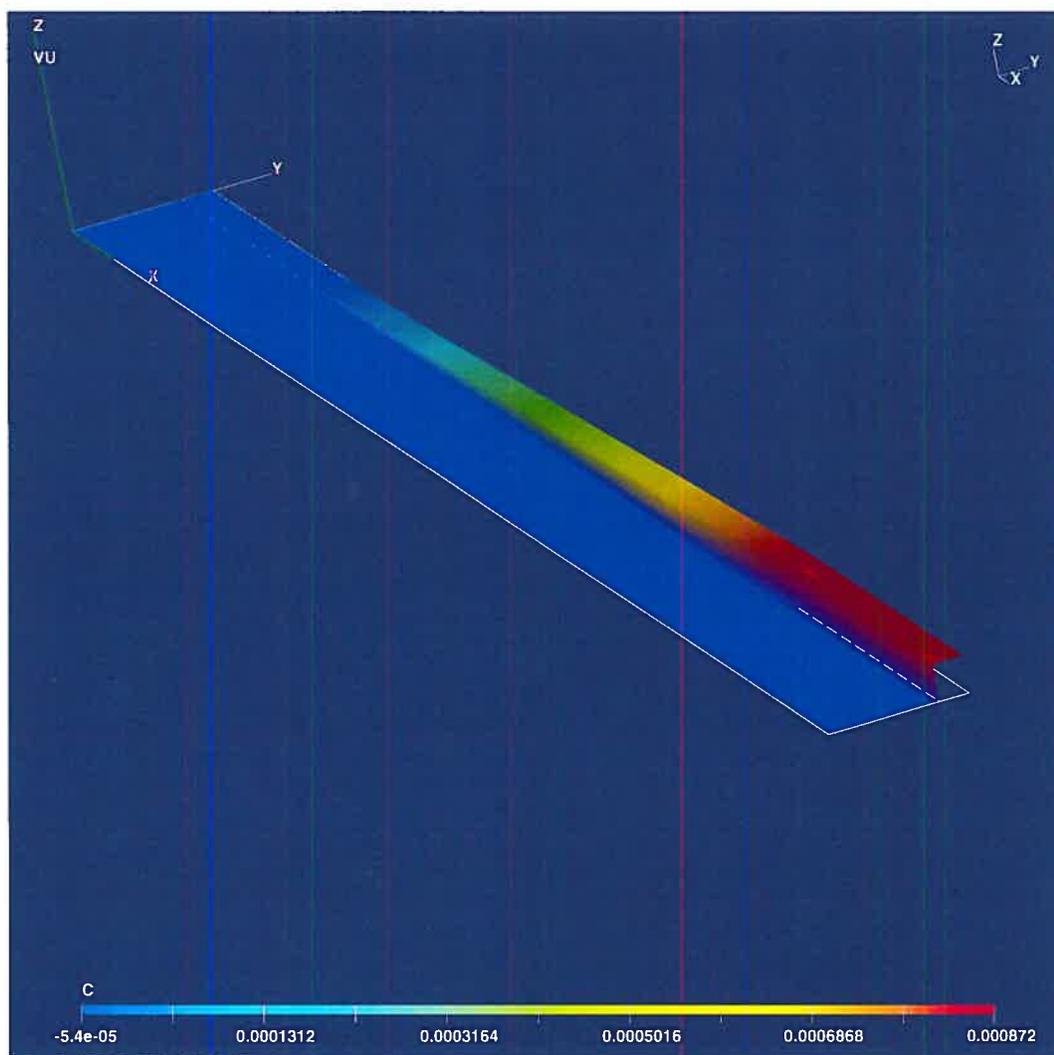


FIG. 3.7. Graphe 5 : graphe du stent asymptotique.

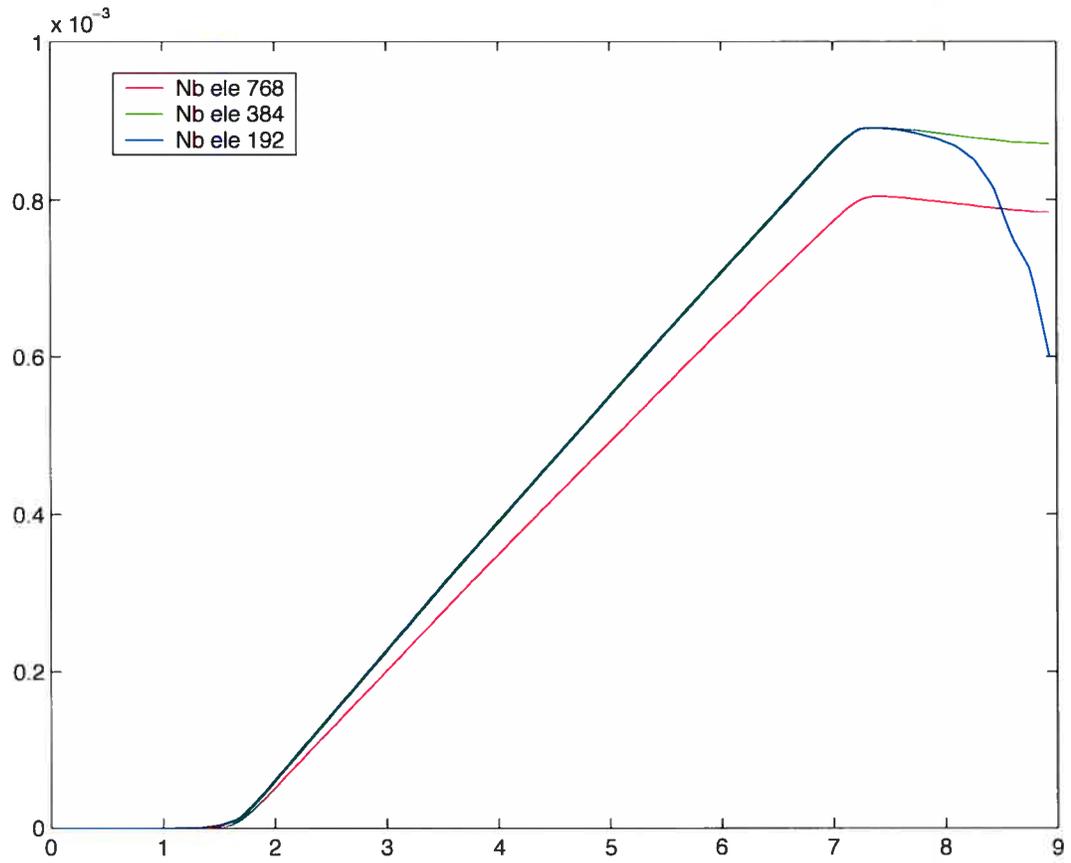


FIG. 3.8. Comparaison de la dose en  $r = R + E$  pour le stent asymptotique pour différents maillages.

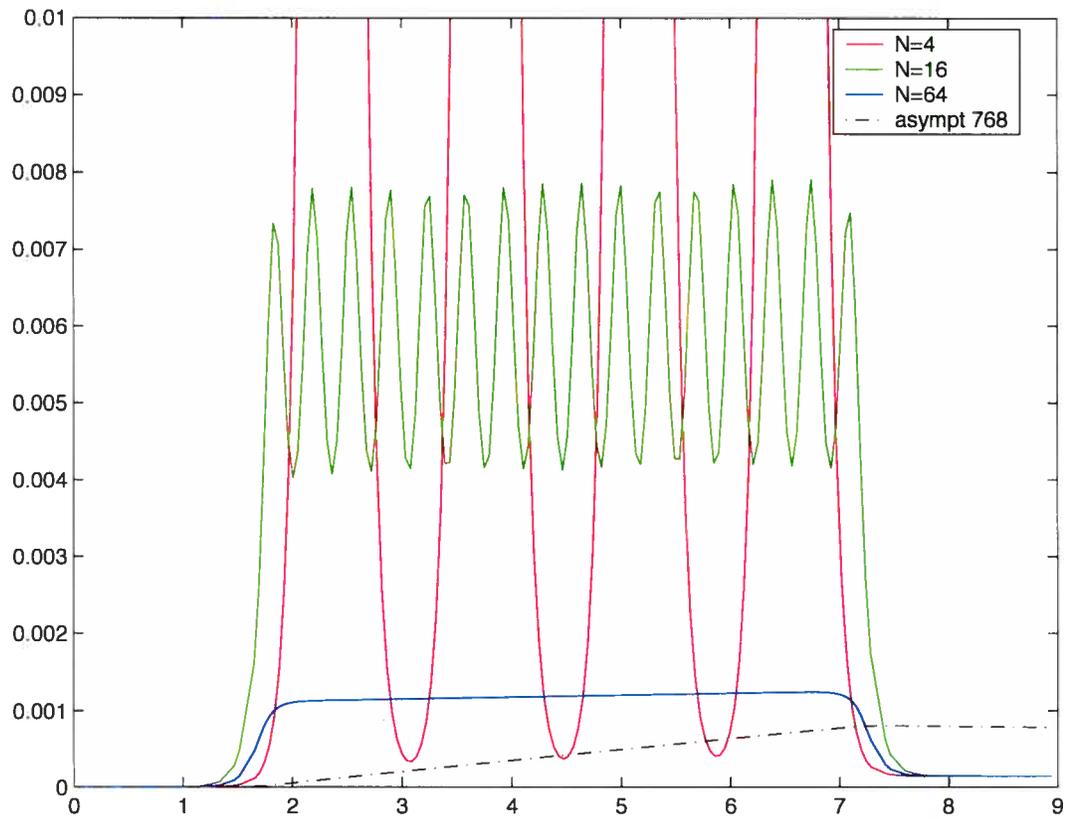


FIG. 3.9. Comparaison entre  $N = 4, 16, 64$  et le stent asymptotique.

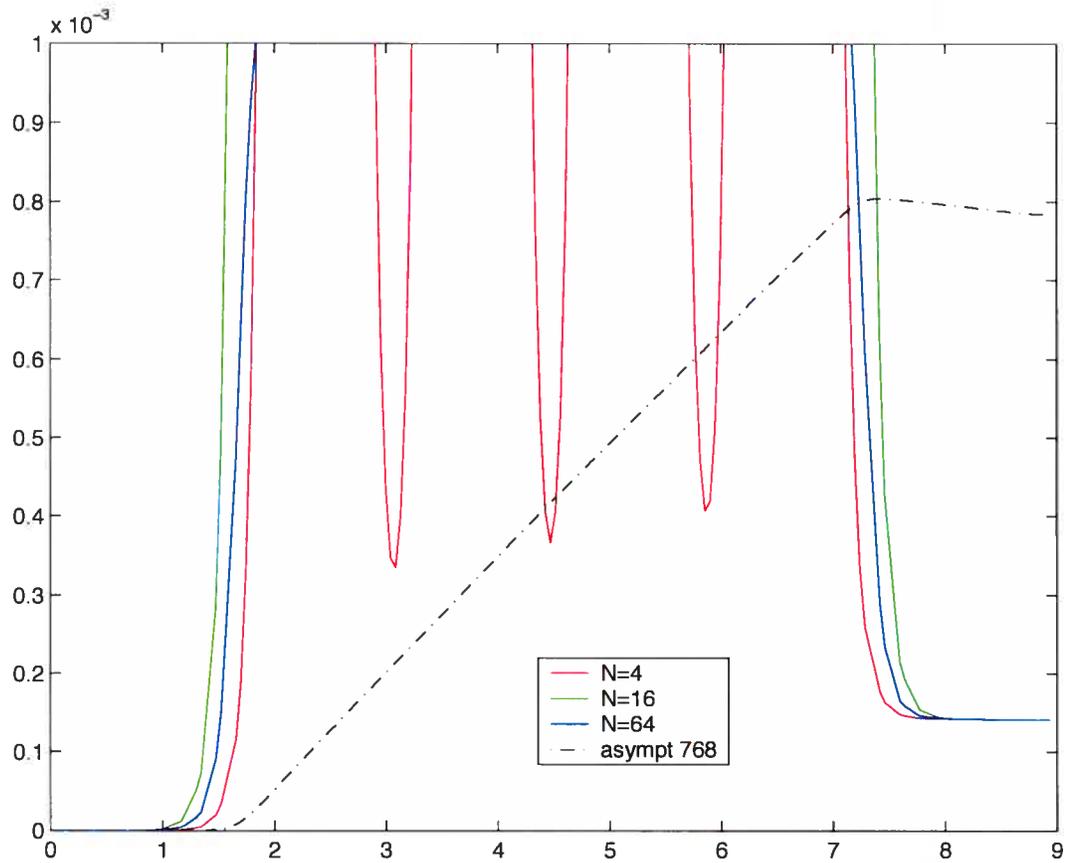


FIG. 3.10. Comparaison entre  $N = 4, 16, 64$  et le stent asymptotique (zoom).

### 3.3. Qualité des résultats numériques

Malheureusement une contrainte de temps ne nous a pas permis d'effectuer plus d'essais numériques. Ainsi, après l'analyse des résultats numériques, on arrive à la conclusion que le maillage n'était pas suffisamment raffiné et que la compression des nœuds n'était pas adéquate dans certaines régions. C'est surtout dans les régions avant et après la région cible que l'on remarque ceci. Puisqu'il y a tout d'un coup une injection soudaine de produit dans la paroi, le fait qu'il n'y a pas assez de nœuds fausse un peu les résultats. Pour le stent asymptotique, la montée de la dose devrait se produire plus tôt. Le manque de nœuds à l'interface

en amont de la région cible provoque un décalage et le phénomène ne commence pas au début de la région cible mais un peu plus tard.

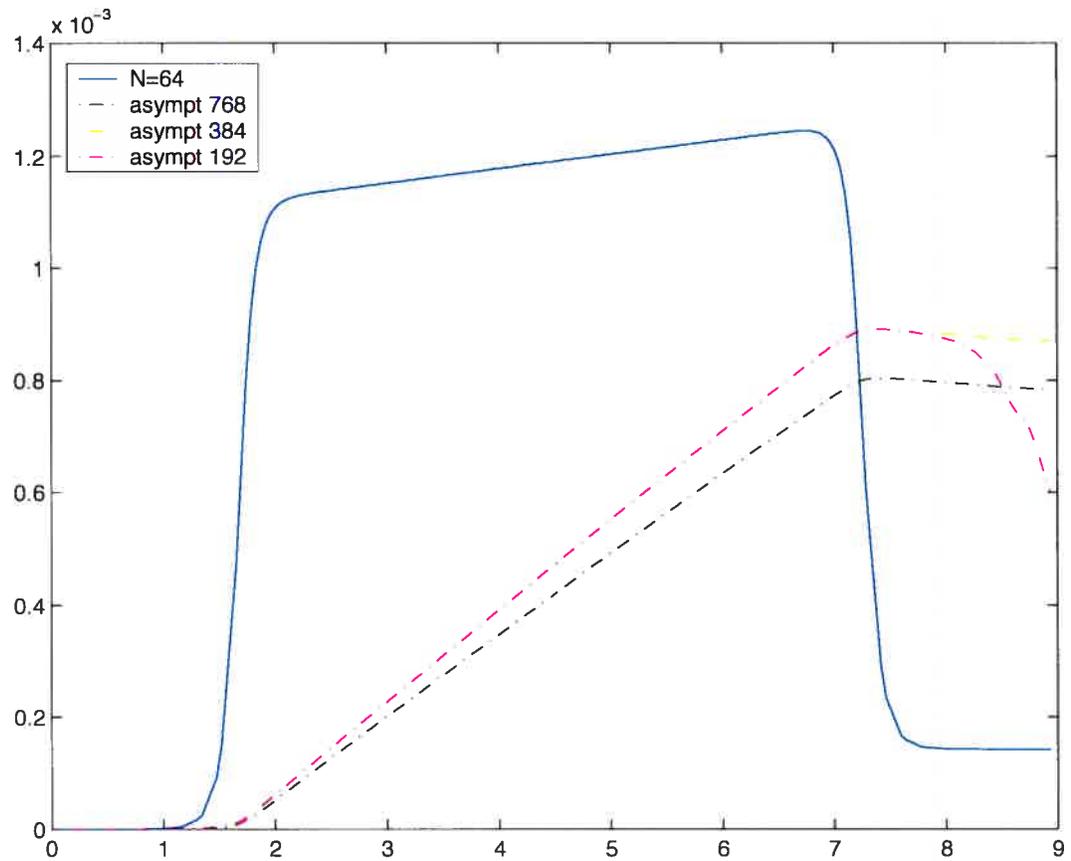


FIG. 3.11. Comparaison entre  $N = 64$  et le stent asymptotique pris avec divers maillages.

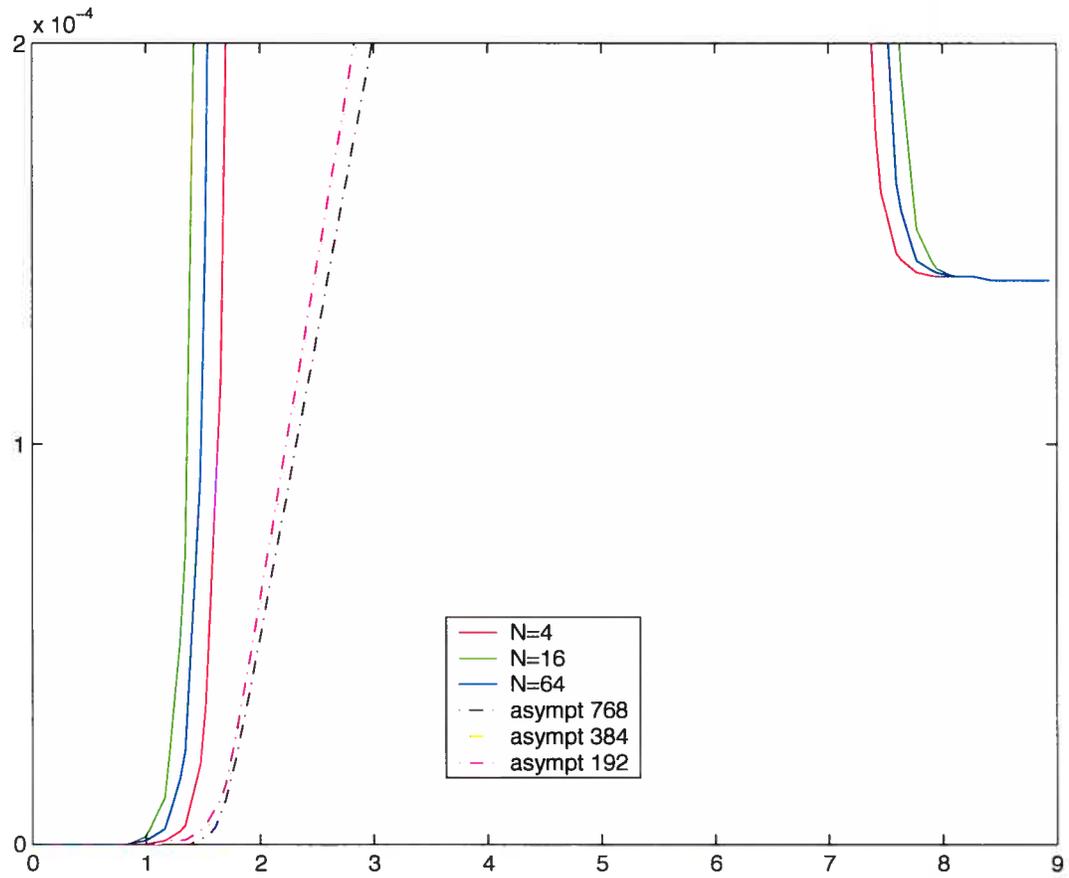


FIG. 3.12. Comparaison entre  $N = 4, 16, 64$  et le stent asymptotique pris avec divers maillages (zoom).

# Annexe A

---

## INÉGALITÉ DE POINCARÉ

Dans cette annexe on démontre l'inégalité de Poincaré pour le domaine

$$\tilde{\Omega}^\infty = \tilde{\Omega}^0 \setminus \tilde{\Sigma}, \quad \tilde{\Omega}^0 = \{(x_1, x_2, z) : |x_1|^2 + |x_2|^2 < (R + E)^2, \quad 0 < z < H\}$$

qui n'est pas Lipschitzien en raison de la fissure  $\tilde{\Sigma}$  dans la surface  $r = R$ . L'espace de Sobolev qui lui est associé est

$$V_\infty = V(\tilde{\Omega}^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{premier cas : } \{v \in H^1(\tilde{\Omega}^\infty) : v|_{\tilde{\Gamma}_{R+E}} = 0\} \\ \text{deuxième cas : } \{v \in H^1(\tilde{\Omega}^\infty) : v|_{\tilde{\Gamma}_{l_i}} = 0\} \end{cases}$$

Le résultat demeure évidemment vrai pour tous les domaines  $\tilde{\Omega}^N$  et les espaces  $V_N$  correspondants. On ne démontre le résultat que le premier cas de condition frontière. Le second est analogue.

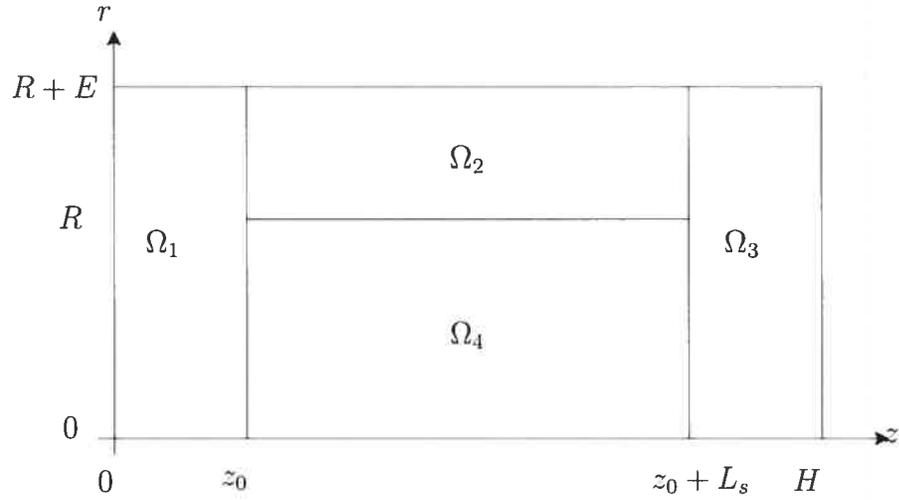
### 1. UN LEMME

**Lemme 1.1.** *Pour le domaine  $\tilde{\Omega}^\infty$  décrit en (4.1) on a l'inégalité de Poincaré*

$$\forall q \in V_\infty, \quad \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 \leq K^2 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2,$$

où  $K$  est une constante indépendante de  $q$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit le rectangle de longueur  $H$  et de hauteur  $R + E$  qui représente la section d'artère en 2- $D$ . On divise ce rectangle en 4 sous-rectangles  $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 = \Omega$  comme illustré à la Figure 1.1. Les domaines 3- $D$  correspondant  $\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3, \tilde{\Omega}_4$  et  $\tilde{\Omega}$  sont générés par rotation autour de l'axe  $\Gamma_0$ .

FIG. 1.1. Partition de  $\tilde{\Omega}$ .

*Remarque 1.1.* La démonstration qui suit est pour le cas 1 i.e. lorsque  $q = 0$  sur  $\tilde{\Gamma}_{R+E}$ . La démonstration sera semblable pour le cas 2 i.e. lorsque  $q = 0$  sur  $\tilde{\Gamma}_{li}$ .

On relie chaque point du domaine  $\tilde{\Omega}$  par un chemin qui part de la frontière  $\tilde{\Gamma}_{R+E}$  mais qui ne passe pas à travers  $\tilde{\Sigma}$ . L'idée de la démonstration est qu'il y a une borne uniforme sur la longueur de ces chemins.

(i) Soient les points qui se trouvent dans la région  $\tilde{\Omega}_1$  :

Soient  $z$ ,  $r$  et  $\theta$  fixés.

$$\begin{aligned}
 q(r, z, \theta) &= q(R + E, z, \theta) - \int_r^{R+E} \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) d\rho \\
 &= - \int_r^{R+E} \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) d\rho \\
 \Rightarrow |q(r, z, \theta)| &= \left| \int_r^{R+E} \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) d\rho \right| \leq \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \\
 \Rightarrow |q(r, z, \theta)|^2 &\leq \left[ \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \right]^2.
 \end{aligned}$$

On intègre sur le domaine  $\tilde{\Omega}_1$  :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_0^{z_0} dz |q(r, z, \theta)|^2 \\
& \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_0^{z_0} dz \left[ \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \right]^2 \\
& \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_0^{z_0} dz \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 d\rho \int_r^{R+E} 1^2 d\rho
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Alors

$$\begin{aligned}
\|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 & \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_r^{R+E} d\rho \int_0^{z_0} dz (R+E-r) \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 \\
& \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} d\rho \int_0^\rho r dr \int_0^{z_0} dz (R+E-r) \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 \\
& = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{z_0} dz \int_0^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 d\rho \int_0^\rho r (R+E-r) dr.
\end{aligned}$$

On a que

$$\begin{aligned}
\int_0^\rho r (R+E-r) dr & = \int_0^\rho r (R+E) - r^2 dr = \left[ \frac{(R+E)r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right] \Big|_0^\rho \\
& = \frac{(R+E)\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} = \frac{\rho^2}{6} [3(R+E) - 2\rho] \\
& \leq \frac{\rho^2}{6} 3(R+E) \leq \frac{\rho}{2} (R+E)^2
\end{aligned}$$

puisque  $\rho < R+E$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 & \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{z_0} dz \int_0^{R+E} \frac{\rho}{2} (R+E)^2 \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 d\rho \\
& \leq \frac{(R+E)^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{z_0} dz \int_0^{R+E} \rho |\nabla q(\rho, z, \theta)|^2 d\rho \\
& = \frac{(R+E)^2}{2} \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 = K_1 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2.
\end{aligned}$$

(ii) Soient les points qui se trouvent dans la région  $\tilde{\Omega}_2$  :

Comme pour la région  $\tilde{\Omega}_1$ , on a pour  $z$ ,  $r$  et  $\theta$  fixés :

$$|q(r, z, \theta)|^2 \leq \left[ \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \right]^2.$$

On intègre sur  $\tilde{\Omega}_2$  :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz |q(r, z, \theta)|^2 \\
& \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \left[ \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \right]^2 \\
& \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} r (R+E-r) dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 d\rho \\
\Rightarrow \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 & \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \int_r^{R+E} d\rho r (R+E-r) \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 \\
& \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} d\rho \int_R^\rho r (R+E-r) dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2.
\end{aligned}$$

On a que

$$\begin{aligned}
\int_R^\rho r (R+E-r) dr & = \int_0^\rho r (R+E) - r^2 dr = \left[ \frac{(R+E)r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right] \Big|_R^\rho \\
& = \frac{(R+E)\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} - \frac{(R+E)R^2}{2} + \frac{R^3}{3} \\
& \leq \frac{(R+E)\rho^2}{2} + \frac{R^3}{3} \\
& \leq \frac{(R+E)^3}{2} + \frac{R^3}{3} \leq \frac{1}{6} (3(R+E)^3 + 2R^3) \\
& \leq \frac{\rho}{6\rho} (3(R+E)^3 + 2R^3) \leq \frac{\rho}{6R} (3(R+E)^3 + 2R^3)
\end{aligned}$$

puisque  $R < \rho < R+E$  et  $0 < r < \rho$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 & \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \int_R^{R+E} \frac{\rho}{6R} (3(R+E)^3 + 2R^3) \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 d\rho \\
& \leq \frac{(3(R+E)^3 + 2R^3)}{6R} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \int_R^{R+E} \rho |\nabla q(\rho, z, \theta)|^2 d\rho \\
& = \frac{(3(R+E)^3 + 2R^3)}{6R} \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 = K_2 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2.
\end{aligned}$$

(iii) Soient les points qui se trouvent dans la région  $\tilde{\Omega}_3$  :

Cette région est idem à la région  $\tilde{\Omega}_1$  sauf que  $z \in [z_0 + L_s, H]$ . Or, ceci ne modifie pas les calculs effectués auparavant et donc on a que dans cette région

$$\|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3)}^2 \leq \frac{(R+E)^2}{2} \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3)}^2 = K_3 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3)}^2 = K_1 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3)}^2.$$

(iv) Soient les points qui se trouvent dans la région  $\tilde{\Omega}_4$  :

Soient  $z$ ,  $r$  et  $\theta$  fixés. Pour cette région, il faut faire le chemin en deux étapes si on veut relier les points qui se trouvent dans  $\tilde{\Omega}_4$  à  $\tilde{\Gamma}_{R+E}$ . Soit  $\bar{z} \in [0, z_0]$  fixé. On construit un chemin qui va du point  $(R+E, \bar{z}, \theta)$  à  $(r, \bar{z}, \theta)$  et ensuite on construit un chemin qui va de  $(r, \bar{z}, \theta)$  à  $(r, z, \theta)$ . Or,

$$\begin{aligned} q(r, z, \theta) &= q(r, \bar{z}, \theta) + \int_{\bar{z}}^z \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) d\eta \\ \Rightarrow |q(r, z, \theta)| &\leq |q(r, \bar{z}, \theta)| + \int_{\bar{z}}^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right| d\eta \\ \Rightarrow |q(r, z, \theta)|^2 &\leq \left[ |q(r, \bar{z}, \theta)| + \int_{\bar{z}}^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right| d\eta \right]^2 \\ &\leq 4 \left\{ |q(r, \bar{z}, \theta)|^2 + \left[ \int_{\bar{z}}^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right| d\eta \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

car  $(A+B) \leq 2(A^2+B^2)^{1/2}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} |q(r, z, \theta)|^2 &\leq 4 \left[ |q(r, \bar{z}, \theta)|^2 + \int_{\bar{z}}^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 d\eta \cdot \int_{\bar{z}}^z 1^2 d\eta \right] \\ &\leq 4 \left[ |q(r, \bar{z}, \theta)|^2 + (z - \bar{z}) \int_{\bar{z}}^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 d\eta \right]. \end{aligned}$$

On intègre sur  $\tilde{\Omega}_4$  :

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz |q(r, z, \theta)|^2 \\ &\leq 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz |q(r, \bar{z}, \theta)|^2 \\ &\quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz (z - \bar{z}) \int_{\bar{z}}^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 d\eta \\ \Rightarrow \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_4)}^2 &\leq 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz |q(r, \bar{z}, \theta)|^2 \\ &\quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz (z - \bar{z}) \int_{\bar{z}}^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 d\eta. \end{aligned}$$

On intègre maintenant par rapport à  $\bar{z}$  sur l'intervalle  $[0, z_0]$  et on étend  $r$  de 0 à  $R + E$  dans le premier terme à droite de l'inégalité précédente.

$$\begin{aligned}
& \int_0^{z_0} \|q\|_{L^2(\bar{\Omega}_4)}^2 d\bar{z} \\
& \leq 4L_s \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_0^{z_0} d\bar{z} |q(r, \bar{z}, \theta)|^2 \\
& \quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \int_0^{z_0} d\bar{z} (z - \bar{z}) \int_{\bar{z}}^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 d\eta \\
& \Rightarrow z_0 \|q\|_{L^2(\bar{\Omega}_4)}^2 \\
& \leq 4L_s \|q\|_{L^2(\bar{\Omega}_2)}^2 \\
& \quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \int_0^{z_0} d\bar{z} (z - \bar{z}) \left[ \int_{\bar{z}}^{z_0} \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 d\eta \right. \\
& \quad \left. + \int_{z_0}^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 d\eta \right] \\
& \leq 4L_s \|q\|_{L^2(\bar{\Omega}_2)}^2 \\
& \quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \int_0^{z_0} d\bar{z} \int_{\bar{z}}^{z_0} d\eta (z - \bar{z}) \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 \\
& \quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \int_0^{z_0} d\bar{z} \int_{z_0}^z d\eta (z - \bar{z}) \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 \\
& \leq 4L_s \|q\|_{L^2(\bar{\Omega}_2)}^2 \\
& \quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \int_0^{z_0} d\eta \int_0^\eta d\bar{z} (z - \bar{z}) \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 \\
& \quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \int_0^{z_0} d\bar{z} \int_{z_0}^{z_0+L_s} d\eta \int_\eta^{z_0+L_s} dz (z - \bar{z}) \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2.
\end{aligned}$$

On a que

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \int_0^\eta d\bar{z} (z - \bar{z}) &= \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz \left[ z\bar{z} - \frac{\bar{z}^2}{2} \right]_0^\eta = \int_{z_0}^{z_0+L_s} \left( z\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) dz \\
&= \left[ \frac{z^2 \eta}{2} - \frac{z \eta^2}{2} \right]_{z_0}^{z_0+L_s} \\
&= \frac{(z_0 + L_s)^2 \eta}{2} - \frac{(z_0 + L_s) \eta^2}{2} - \frac{z_0^2 \eta}{2} + \frac{z_0 \eta^2}{2} \\
&\leq \frac{(z_0 + L_s)^2 \eta}{2} + \frac{z_0 \eta^2}{2} \leq \frac{(z_0 + L_s)^2 z_0}{2} + \frac{z_0^3}{2} = K_4
\end{aligned}$$

et d'autre part, on a que

$$\begin{aligned}
\int_{\eta}^{z_0+L_s} dz \int_0^{z_0} d\bar{z} (z - \bar{z}) &= \int_{\eta}^{z_0+L_s} dz \left[ z\bar{z} - \frac{\bar{z}^2}{2} \right] \Big|_0^{z_0} = \int_{\eta}^{z_0+L_s} \left( z z_0 - \frac{z_0^2}{2} \right) dz \\
&= \left[ \frac{z^2 z_0}{2} - \frac{z z_0^2}{2} \right] \Big|_{\eta}^{z_0+L_s} \\
&= \frac{(z_0 + L_s)^2 z_0}{2} - \frac{(z_0 + L_s) z_0^2}{2} - \frac{z_0 \eta^2}{2} + \frac{z_0^2 \eta}{2} \\
&\leq \frac{(z_0 + L_s)^2 z_0}{2} + \frac{z_0^2 \eta}{2} \\
&\leq \frac{(z_0 + L_s)^2 z_0}{2} + \frac{z_0^2 (z_0 + L_s)}{2} = K_5.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_4)}^2 \leq \frac{4}{z_0} \left[ L_s \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 + K_4 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 + K_5 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_4)}^2 \right].$$

Finalement, on additionne les 4 inégalité suivantes :

$$\|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 \leq K_1 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 \leq K_1 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2$$

$$\|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 \leq K_2 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 \leq K_2 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2$$

$$\|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3)}^2 \leq K_3 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3)}^2 \leq K_3 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2$$

$$\begin{aligned}
\|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_4)}^2 &\leq \frac{4}{z_0} \left[ L_s \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 + K_4 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 + K_5 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_4)}^2 \right] \\
&\leq \frac{4}{z_0} \left[ L_s K_2 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + K_4 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + K_5 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 \right] \\
&\leq \bar{K}_4 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2.
\end{aligned}$$

On obtient que

$$\begin{aligned}
\|q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 &\leq \sum_{i=1}^4 \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_i)}^2 \\
&\leq (K_1 + K_2 + K_3 + \bar{K}_4) \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 \\
&\leq K^2 \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2.
\end{aligned}$$

Donc, l'inégalité de Poincaré est valable pour le domaine  $\tilde{\Omega}$ . □

# Annexe B

---

## THÉORÈME DE LA TRACE

Dans cette annexe on démontre le théorème de trace pour le domaine

$$\tilde{\Omega}^\infty = \tilde{\Omega}^0 \setminus \tilde{\Sigma}, \quad \tilde{\Omega}^0 = \{(x_1, x_2, z) : |x_1|^2 + |x_2|^2 < (R + E)^2, \quad 0 < z < H\}$$

qui n'est pas Lipschitzien en raison de la fissure  $\tilde{\Sigma}$  dans la surface  $r = R$ . L'espace de Sobolev qui lui est associé est

$$V_\infty = V(\tilde{\Omega}^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{premier cas : } \{v \in H^1(\tilde{\Omega}^\infty) : v|_{\tilde{\Gamma}_{R+E}} = 0\} \\ \text{deuxième cas : } \{v \in H^1(\tilde{\Omega}^\infty) : v|_{\tilde{\Gamma}_h} = 0\} \end{cases}$$

Le résultat demeure évidemment vrai pour tous les domaines  $\tilde{\Omega}^N$  et les espaces  $V_N$  correspondants. On ne démontre le résultat que le premier cas de condition frontière. Le second est analogue.

### 1. LE THÉORÈME

**Théorème 1.1.** *Pour le domaine  $\tilde{\Omega}^\infty$ , il existe une constante  $K > 0$  tel que*

$$\forall v \in V(\tilde{\Omega}^\infty), \quad \|v\|_{L^2(\partial\tilde{\Omega}^\infty)} \leq K \|v\|_{H^1(\tilde{\Omega}^\infty)}.$$

**DÉMONSTRATION.** On a le domaine  $\tilde{\Omega}^\infty$ . On veut construire des chemins qui partent d'une frontière et qui se rendent à un point situé dans  $\tilde{\Omega}^\infty$ .

(i) On considère d'abord la trace sur la frontière  $\tilde{\Gamma}_{R+E}$  :

Soit  $z$ ,  $r$  et  $\theta$  fixés tel que  $R < r < R + E$ ,  $0 < z < H$  et  $0 < \theta < 2\pi$ .

$$q(R + E, z, \theta) = q(r, z, \theta) + \int_r^{R+E} \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) d\rho$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |q(R + E, z, \theta)| \leq |q(r, z, \theta)| + \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \\
\Rightarrow |q(R + E, z, \theta)|^2 &\leq \left[ |q(r, z, \theta)| + \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \right]^2 \\
&\leq 4 \left[ |q(r, z, \theta)|^2 + \left\{ \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \right\}^2 \right] \\
&\leq 4 \left[ |q(r, z, \theta)|^2 + (R + E - r) \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 d\rho \right].
\end{aligned}$$

On intègre sur le domaine  $\tilde{\Omega}_p^\infty$  i.e. de  $r \in ]R, R + E[$ ,  $z \in ]0, H[$  et  $\theta \in ]0, 2\pi[$ . On obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} r dr \int_0^H dz |q(R + E, z, \theta)|^2 \\
&\leq 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} r dr \int_0^H dz |q(r, z, \theta)|^2 \\
&\quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} r dr \int_0^H dz (R + E - r) \int_r^{R+E} \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 d\rho \\
\Rightarrow \frac{r^2}{2} \Big|_R^{R+E} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz |q(R + E, z, \theta)|^2 \\
&\leq 4 \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_p^\infty)}^2 + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} d\rho \int_R^\rho r dr \int_0^H dz (R + E - r) \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 \\
\Rightarrow \frac{(R + E)^2 - R^2}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_{R+E}} |q|^2 d\Gamma \\
&\leq 4 \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_p^\infty)}^2 + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \int_R^{R+E} d\rho \int_R^\rho r (R + E - r) dr \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\int_R^\rho r (R + E - r) dr &= \int_0^\rho r (R + E) - r^2 dr = \left[ \frac{(R + E) r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right] \Big|_R^\rho \\
&= \frac{(R + E) \rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} - \frac{(R + E) R^2}{2} + \frac{R^3}{3} \\
&\leq \frac{(R + E) \rho^2}{2} + \frac{R^3}{3} \\
&\leq \frac{(R + E)^3}{2} + \frac{R^3}{3} \leq \frac{\rho}{\rho} \left[ \frac{(R + E)^3}{2} + \frac{R^3}{3} \right] \\
&\leq \frac{\rho}{R} \left[ \frac{(R + E)^3}{2} + \frac{R^3}{3} \right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{\Gamma}_{R+E}} |q|^2 d\Gamma \\
& \leq \frac{8}{(R+E)^2 - R^2} \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_p^\infty)}^2 + \left( \frac{(R+E)^3}{2R} + \frac{R^3}{3R} \right) \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_p^\infty)}^2 \right] \\
& \leq \frac{8}{(R+E)^2 - R^2} \text{Max} \left\{ 1, \left( \frac{(R+E)^3}{2R} + \frac{R^3}{3R} \right) \right\} \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_p^\infty)}^2 + \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_p^\infty)}^2 \right] \\
& = K_1 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega}_p^\infty)}^2 = K_1 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2
\end{aligned}$$

puisque la norme  $L^2$  sur  $\tilde{\Omega}^\infty$  est la même que sur  $\tilde{\Omega}$ .

(ii) On considère la trace sur la frontière  $\tilde{\Gamma}_{li} \cup \tilde{\Gamma}_{pi}$  :

Soit  $z$ ,  $r$  et  $\theta$  fixés tel que  $0 < r < R + E$ ,  $0 < z < z_0$  et  $0 < \theta < 2\pi$ .

$$\begin{aligned}
q(r, 0, \theta) &= q(r, z, \theta) - \int_0^z \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) d\eta \\
\Rightarrow |q(r, 0, \theta)| &\leq |q(r, z, \theta)| + \int_0^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right| d\eta \\
\Rightarrow |q(r, 0, \theta)|^2 &\leq \left[ |q(r, z, \theta)| + \int_0^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right| d\eta \right]^2 \\
&\leq 4 \left[ |q(r, z, \theta)|^2 + \left\{ \int_0^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right| d\eta \right\}^2 \right] \\
&\leq 4 \left[ |q(r, z, \theta)|^2 + z \int_0^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 d\eta \right].
\end{aligned}$$

On intègre sur le domaine  $\tilde{\Omega}_1 \subset \tilde{\Omega}^\infty$  qui est défini de  $r \in ]0, R + E[$ ,  $z \in ]0, z_0[$  et  $\theta \in ]0, 2\pi[$ . On obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_0^{z_0} dz |q(r, 0, \theta)|^2 \\
& \leq 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_0^{z_0} dz |q(r, z, \theta)|^2 \\
& + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_0^{z_0} z dz \int_0^z \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow z_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr |q(r, 0, \theta)|^2 \\
&\leq 4 \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_0^{z_0} d\eta \int_\eta^{z_0} z dz \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 \right] \\
&\leq 4 \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_0^{z_0} d\eta \frac{z_0^2 - \eta^2}{2} \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 \right] \\
&\leq 4 \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_0^{z_0} d\eta \frac{z_0^2}{2} \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 \right] \\
&\leq 4 \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 + \frac{z_0^2}{2} \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 \right] \\
&\Rightarrow \int_{\tilde{\Gamma}_H \cup \tilde{\Gamma}_{pt}} |q|^2 d\Gamma \leq \frac{4}{z_0} \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 + \frac{z_0^2}{2} \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 \right] \\
&\leq \text{Max} \left\{ \frac{4}{z_0}, 2z_0 \right\} \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 + \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_1)}^2 \right] \\
&= K_2 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega}_1)} \leq K_2 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega}_\infty)}.
\end{aligned}$$

(iii) On considère la trace sur la frontière  $\tilde{\Gamma}_{lo} \cup \tilde{\Gamma}_{po}$  :

Soit  $z, r$  et  $\theta$  fixés tel que  $0 < r < R + E$ ,  $z_0 + L_s < z < H$  et  $0 < \theta < 2\pi$ .

$$\begin{aligned}
q(r, H, \theta) &= q(r, z, \theta) + \int_z^H \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) d\eta \\
\Rightarrow |q(r, H, \theta)| &\leq |q(r, z, \theta)| + \int_z^H \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right| d\eta \\
\Rightarrow |q(r, H, \theta)|^2 &\leq \left[ |q(r, z, \theta)| + \int_z^H \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right| d\eta \right]^2 \\
&\leq 4 \left[ |q(r, z, \theta)|^2 + \left\{ \int_z^H \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right| d\eta \right\}^2 \right] \\
&\leq 4 \left[ |q(r, z, \theta)|^2 + (H - z) \int_z^H \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 d\eta \right].
\end{aligned}$$

On intègre sur le domaine  $\tilde{\Omega}_2 \subset \tilde{\Omega}^\infty$  qui est défini pour  $r \in ]0, R+E[, z \in ]z_0+L_s, H[$  et  $\theta \in ]0, 2\pi[$ . On obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_{z_0+L_s}^H dz |q(r, H, \theta)|^2 \\
& \leq 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_{z_0+L_s}^H dz |q(r, z, \theta)|^2 \\
& \quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_{z_0+L_s}^H (H-z) dz \int_z^H \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 d\eta \\
\Rightarrow & [H - (z_0 + L_s)] \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr |q(r, H, \theta)|^2 \\
& \leq 4 \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R+E} r dr \int_{z_0+L_s}^H d\eta \int_{z_0+L_s}^\eta (H-z) dz \left| \frac{\partial q}{\partial \eta}(r, \eta, \theta) \right|^2 \right]
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\int_{z_0+L_s}^\eta (H-z) dz &= \left[ Hz - \frac{z^2}{2} \right]_{z_0+L_s}^\eta \\
&\leq H\eta - \frac{\eta^2}{2} - H(z_0 + L_s) + \frac{(z_0 + L_s)^2}{2} \\
&\leq H\eta + \frac{(z_0 + L_s)^2}{2} \leq H^2 + \frac{(z_0 + L_s)^2}{2} \\
&\leq H^2 + \frac{H^2}{2} \leq \frac{3H^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \int_{\tilde{\Gamma}_{l_0} \cup \tilde{\Gamma}_{p_0}} |q|^2 d\Gamma \\
& \leq \frac{4}{H - (z_0 + L_s)} \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 + \frac{3H^2}{2} \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 \right] \\
& \leq \text{Max} \left\{ \frac{4}{H - (z_0 + L_s)}, \frac{12H^2}{2[H - (z_0 + L_s)]} \right\} \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 + \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_2)}^2 \right] \\
& = K_3 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega}_2)} \leq K_3 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega}^\infty)}
\end{aligned}$$

puisque  $\tilde{\Omega}_2 \subset \tilde{\Omega}^\infty$ .

(iv) On considère la trace sur la frontière  $\tilde{\Sigma}^+$  :

Soit  $z, r$  et  $\theta$  fixés tel que  $R < r < R + E, z_0 < z < z_0 + L_s$  et  $0 < \theta < 2\pi$ .

$$q(R, z, \theta) = q(r, z, \theta) - \int_R^r \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) d\rho$$

$$\Rightarrow |q(R, z, \theta)| \leq |q(r, z, \theta)| + \int_R^r \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |q(R, z, \theta)|^2 &\leq \left[ |q(r, z, \theta)| + \int_R^r \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \right]^2 \\ &\leq 4 \left[ |q(r, z, \theta)|^2 + \left\{ \int_R^r \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \right\}^2 \right] \\ &\leq 4 \left[ |q(r, z, \theta)|^2 + (r - R) \int_R^r \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 d\rho \right]. \end{aligned}$$

On intègre sur le domaine  $\tilde{\Omega}_3^\infty$  i.e. de  $r \in ]R, R + E[$ ,  $z \in ]z_0, z_0 + L_s[$  et  $\theta \in ]0, 2\pi[$ .

On obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz |q(R, z, \theta)|^2 \\ &\leq 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz |q(r, z, \theta)|^2 \\ &\quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz (r - R) \int_R^r \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 d\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &\frac{r^2}{2} \Big|_R^{R+E} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz |q(R, z, \theta)|^2 \\ &\leq 4 \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3^\infty)}^2 + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} d\rho \int_\rho^{R+E} r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz (r - R) \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 \\ \Rightarrow &\frac{(R + E)^2 - R^2}{2} \int_{\tilde{\Sigma}_s^+} |q|^2 d\Gamma \\ &\leq 4 \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3^\infty)}^2 + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_R^{R+E} d\rho \int_\rho^{R+E} r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz (r - R) \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\int_{\rho}^{R+E} r(r-R) dr &= \int_{\rho}^{R+E} r^2 - rR dr = \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{r^2 R}{2} \right] \Big|_{\rho}^{R+E} \\
&= \frac{(R+E)^3}{3} - \frac{(R+E)^2 R}{2} - \frac{\rho^3}{3} + \frac{R\rho^2}{2} \\
&\leq \frac{(R+E)^3}{3} + \frac{R\rho^2}{2} \\
&\leq \frac{2(R+E)^3 + 3(R+E)^3}{6} \leq \frac{\rho}{\rho} \left[ \frac{5(R+E)^3}{6} \right] \\
&\leq \frac{\rho}{R} \left[ \frac{5(R+E)^3}{6} \right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{\Sigma}^+} |q|^2 d\Gamma \\
&\leq \frac{8}{(R+E)^2 - R^2} \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3^\infty)}^2 + \frac{1}{R} \left[ \frac{5(R+E)^3}{6} \right] \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3^\infty)}^2 \right] \\
&\leq \frac{8}{(R+E)^2 - R^2} \text{Max} \left\{ 1, \frac{1}{R} \left[ \frac{5(R+E)^3}{6} \right] \right\} \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3^\infty)}^2 + \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_3^\infty)}^2 \right] \\
&= K_4 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega}_3^\infty)}^2 \leq K_4 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega}^\infty)}^2
\end{aligned}$$

puisque  $\tilde{\Omega}_3^\infty \subset \tilde{\Omega}^\infty$ .

(v) On considère la tarce sur la frontière  $\tilde{\Sigma}^-$  :

Soit  $z$ ,  $r$  et  $\theta$  fixés tel que  $R/2 < r < R$ ,  $z_0 < z < z_0 + L_s$  et  $0 < \theta < 2\pi$ .

$$q(R, z, \theta) = q(r, z, \theta) + \int_r^R \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) d\rho$$

$$\Rightarrow |q(R, z, \theta)| \leq |q(r, z, \theta)| + \int_r^R \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |q(R, z, \theta)|^2 &\leq \left[ |q(r, z, \theta)| + \int_r^R \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \right]^2 \\
&\leq 4 \left[ |q(r, z, \theta)|^2 + \left\{ \int_r^R \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right| d\rho \right\}^2 \right] \\
&\leq 4 \left[ |q(r, z, \theta)|^2 + (R-r) \int_r^R \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 d\rho \right]
\end{aligned}$$

On intègre sur le domaine  $\tilde{\Omega}_4^\infty$  i.e. de  $r \in ]R/2, R[$ ,  $z \in ]z_0, z_0 + L_s[$  et  $\theta \in ]0, 2\pi[$ .

On obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R/2}^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz |q(R, z, \theta)|^2 \\
& \leq 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R/2}^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz |q(r, z, \theta)|^2 \\
& \quad + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R/2}^R r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz (R-r) \int_r^R \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 d\rho \\
\Rightarrow & \frac{r^2}{2} \Big|_{R/2}^R \int_0^{2\pi} d\theta \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz |q(R, z, \theta)|^2 \\
& \leq 4 \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_4^\infty)}^2 + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R/2}^R d\rho \int_{R/2}^\rho r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz (R-r) \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2 \\
\Rightarrow & \frac{3R^2}{8} \int_{\tilde{\Sigma}_s^-} |q|^2 d\Gamma \\
& \leq 4 \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_4^\infty)}^2 + 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R/2}^R d\rho \int_{R/2}^\rho r dr \int_{z_0}^{z_0+L_s} dz (R-r) \left| \frac{\partial q}{\partial \rho}(\rho, z, \theta) \right|^2
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\int_{R/2}^\rho r (R-r) dr &= \int_{R/2}^\rho r R - r^2 dr = \left[ \frac{r^2 R}{2} - \frac{r^3}{3} \right] \Big|_{R/2}^\rho \\
&= \frac{\rho^2 R}{2} - \frac{\rho^3}{3} - \frac{R^3}{8} + \frac{R^3}{24} \leq \frac{\rho^2 R}{2} + \frac{R^3}{24} \\
&\leq \frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{24} \leq \frac{\rho}{\rho} \left[ \frac{13 R^3}{24} \right] \\
&\leq \frac{\rho}{R} \left[ \frac{13 R^3}{24} \right] \leq \rho \left[ \frac{13 R^2}{24} \right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \int_{\tilde{\Sigma}_s^-} |q|^2 d\Gamma \\
& \leq \frac{32}{3R^2} \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_4^\infty)}^2 + \left[ \frac{13 R^2}{24} \right] \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_4^\infty)}^2 \right] \\
& \leq \text{Max} \left\{ \frac{32}{3R^2}, \frac{52}{9} \right\} \left[ \|q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_4^\infty)}^2 + \|\nabla q\|_{L^2(\tilde{\Omega}_4^\infty)}^2 \right] \\
& = K_5 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega}_4^\infty)}^2 \leq K_5 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega}^\infty)}^2
\end{aligned}$$

puisque  $\tilde{\Omega}_4^\infty \subset \tilde{\Omega}^\infty$ . Ainsi, si on somme les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Gamma}_{R+E}} |q|^2 d\Gamma &\leq K_1 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2 \\ \int_{\tilde{\Gamma}_{l_i} \cup \tilde{\Gamma}_{p_i}} |q|^2 d\Gamma &\leq K_2 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2 \\ \int_{\tilde{\Gamma}_{l_o} \cup \tilde{\Gamma}_{p_o}} |q|^2 d\Gamma &\leq K_3 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2 \\ \int_{\tilde{\Sigma}^+} |q|^2 d\Gamma &\leq K_4 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2 \\ \int_{\tilde{\Sigma}^-} |q|^2 d\Gamma &\leq K_5 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2 \end{aligned}$$

on obtient

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}^\infty} |q|^2 d\Gamma \leq K^2 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2 \Rightarrow \|q\|_{L^2(\partial\tilde{\Omega}^\infty)}^2 \leq K^2 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega})}^2 = K^2 \|q\|_{H^1(\tilde{\Omega}^\infty)}^2.$$

□

# Annexe C

---

## CONVERGENCE FAIBLE

On étudie la limite faible de la suite  $\chi_N$  définie en (2.4) du Chapitre 3.

### 1. LA CONVERGENCE

**Lemme 1.1.** *La suite  $\{\chi_N\}$  est uniformément bornée dans  $L^2(0, H)$  car*

$$\int_0^H (\chi_N)^2 dz = \int_0^H \chi_N dz = N\lambda = \rho L_s = \text{constante},$$

et

$$\chi_N \rightharpoonup \rho \chi_{[z_0, z_0+L_s]} \quad \text{dans } L^2(0, H)\text{-faible.}$$

DÉMONSTRATION. Puisque  $\|\chi_N\|_{L^2(0, H)}^2 = \rho L_s = \text{constante}$  indépendante de  $N$ , il existe une sous-suite qui converge faiblement vers un élément  $\chi$  de  $L^2(0, H)$ .

On fait l'hypothèse que  $\chi = \rho \chi_{[z_0, z_0+L_s]}$  et on cherche à vérifier que

$$\forall v \in L^2(0, H), \quad \int_0^H \chi_N v(z) dz \rightarrow \int_0^H \rho \chi_{[z_0, z_0+L_s]} v(z) dz$$

où de façon équivalente

$$\forall v \in L^2(0, H), \quad \int_0^H [\chi_N - \rho \chi_{[z_0, z_0+L_s]}] v(z) dz \rightarrow 0.$$

Comme  $C[0, H]$  est dense dans  $L^2(0, H)$ , il suffit de montrer la convergence pour  $v \in C[0, H]$ . En effet, pour chaque  $v \in L^2(0, H)$ , il existe une suite  $\{v_k\} \subset C[0, H]$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0, \forall k \geq K, \quad \|v_k - v\|_{L^2(0, H)} < \varepsilon.$$

Or, on a que

$$\begin{aligned}
& \int_0^H [\chi_N(z) - \rho \chi_{[z_0, z_0+L_s]}] v(z) dz = \int_{z_0}^{z_0+L_s} [\chi_N(z) - \rho] v(z) dz \\
&= \sum_{k=1}^N \int_{z_k - \frac{L_s}{2N}}^{z_k + \frac{L_s}{2N}} [\chi_N(z) - \rho] v(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} [\chi_N(z_k + y) - \rho] v(z_k + y) dy \\
&= \sum_{k=1}^N \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} [\chi_N(z_k + y) - \rho] [v(z_k + y) + v(z_k) - v(z_k)] dy \\
&= \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} [\chi_N(z_k + y) - \rho] [v(z_k + y) - v(z_k)] dy \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} [\chi_N(z_k + y) - \rho] v(z_k) dy \right\} \\
&= \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} [\chi_N(z_k + y) - \rho] [v(z_k + y) - v(z_k)] dy \right. \\
&\quad \left. + v(z_k) \left[ \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} dy - \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} \rho dy \right] \right\} \\
&= \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} [\chi_N(z_k + y) - \rho] [v(z_k + y) - v(z_k)] dy + v(z_k) \left( \frac{\rho L_s}{N} - \frac{\rho L_s}{N} \right) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^N \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} [\chi_N(z_k + y) - \rho] [v(z_k + y) - v(z_k)] dy.
\end{aligned}$$

Donc, puisque  $v$  est uniformément continue sur  $[z_0, z_0 + L_s]$ , on a que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbf{R} \text{ qui vérifie } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ici,

$$|z_k + y - z_k| = |y| \leq \frac{L_s}{2N},$$

donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{N}$  assez grand tel que  $\frac{L_s}{2N} \leq \varepsilon$  pour tout  $N \geq \bar{N}$ . Soit  $N > \bar{N}$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} [\chi_N(z_k + y) - \rho] [v(z_k + y) - v(z_k)] dy \\
 & \leq \sum_{k=1}^N \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} [\chi_N(z_k + y) - \rho] \varepsilon dy \\
 & \leq \varepsilon \sum_{k=1}^N \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} [\chi_N(z_k + y) - \rho] dy \\
 & \leq \varepsilon \sum_{k=1}^N \int_{-\frac{L_s}{2N}}^{\frac{L_s}{2N}} [1 - \rho] dy \\
 & \leq \varepsilon \sum_{k=1}^N (1 - \rho) \frac{L_s}{N} = \varepsilon N (1 - \rho) \frac{L_s}{N} = \varepsilon (1 - \rho) L_s \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Donc,  $\forall v \in C[z_0, z_0 + L_s]$ , on a que

$$\int_0^H \chi_N v dz \rightarrow \rho \int_0^H \chi_{[z_0, z_0 + L_s]} v dz.$$

□

# BIBLIOGRAPHIE

---

1. A. Chalifour and M. C. Delfour, *Optimal distribution of larvicide in running waters*, SIAM J. on Optimization 2, No. 2 (1992), 264–303.
2. D. Cioranescu and F. Murat, *Un terme étrange venu d'ailleurs*, (French. English summary) [A strange term brought from somewhere else]. Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. II (Paris, 1979/1980), pp. 98–138, 389–390, Res. Notes in Math., 60, Pitman, Boston, Mass.-London, 1982.
3. D. Cioranescu and F. Murat, *Un terme étrange venu d'ailleurs. II*, (French. English summary) [A strange term brought from somewhere else. II], Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. III (Paris, 1980/1981), pp. 154–178, 425–426, Res. Notes in Math., 70, Pitman, Boston, Mass., London, 1982.
4. A. Damlamian, *Le problème de la passoire de Neumann*, (French) [The Neumann sieve problem], Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 43 (1985), no. 3, 427–450 (1986).
5. M. C. Delfour and J.-P. Zolésio, *Shapes and Geometries : Analysis, Differential Calculus and Optimization*, SIAM series on Advances in Design and Control, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 2001.
6. T. Del Vecchio, *The thick Neumann's sieve*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 147 (1987), 363–402.
7. J. Horváth, *Topological vector spaces and distributions*, Vol I. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966.
8. S. Julien, A. Garon, O.F. Bertrand, R. Mongrain, *A numerical model for local delivery in stent design*, École Polytechnique, Montréal, 2001.

9. J. Manseau, *Étude numérique d'un modèle de transport de macromolécules à travers la paroi artérielle*, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique, Montréal, 2002.
10. V. A. Marchenko, V.A. Marčenko, and E.Ya. Khruslov, *Kraevye zadachi v oblastyakh s melkozernistoïgraniťsei*, (Russian) [Boundary value problems in domains with a fine-grained boundary] Izdat. "Naukova Dumka", Kiev, 1974. 279 pp. 1.98 r.
11. Inge L. Ryhming, *Dynamiques des fluides*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, Suisse, 1985.
12. E. Sánchez-Palencia, *Boundary value problems in domains containing perforated walls*, Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. III (Paris, 1980/1981), pp. 309–325, Res. Notes in Math., 70, Pitman, Boston, Mass.-London, 1982.
13. J. Sánchez-Palencia and E. Sánchez-Palencia, *Acoustic fluid flow through holes and permeability of perforated walls*, J. Math. Anal. and Appl. 87 (1982), no.2, 427-453.
14. Dominik M. Wiktor, *Intravascular radially expandable stent and method of implant*, www.uspto.gov, US patent 4,886,062, filed October 1987.