Université de Montréal

Didactique des grandeurs en mesure et élèves en difficulté d'apprentissage du 2^e cycle du primaire

par

Thérèse Djégnononde Tieidé

Département de didactique
Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures et postdoctorales
en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.)
en sciences de l'éducation
option didactique

Mai 2009

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
Faculté des études supérieures et postdoctorales

Cette thèse intitulée :

Didactique des grandeurs en mesure et élèves en difficulté d'apprentissage du 2e cycle du primaire

présentée par

Thérèse Djégnononde Tieidé

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Louise Poirier, présidente rapporteure

Jean Portugais, directeur de recherche

Gisèle Lemoyne, membre du jury

Cathy Arsenault, examinatrice externe

représentant du doyen de la FES

RÉSUMÉ

Le programme *Une école adaptée à tous ses élèves*, qui s'inscrit dans la réforme actuelle de l'éducation au Québec, nous a amenée à nous intéresser aux représentations dans les grandeurs en mesure en mathématiques des élèves en difficulté d'apprentissage. Nous nous sommes proposés de reconduire plusieurs paramètres de la recherche de Brousseau (1987, 1992) auprès de cette clientèle et la théorie des champs conceptuels (TCC) de Vergnaud (1991), appliquée aux structures additives, a été particulièrement utile dans l'analyse et l'interprétation de leurs représentations.

Comme méthode de recherche, nous avons utilisé la théorie des situations didactiques en mathématiques (TSDM), réseau de concepts et de méthode de recherche appuyé sur l'ingénierie didactique qui permet une meilleure compréhension de l'articulation des contenus à enseigner. Grâce à la TSDM, nous avons observé les approches didactiques des enseignants avec leurs élèves. Notre recherche est de type exploratoire et qualitatif et les données recueillies auprès de 26 élèves de deux classes spéciales du deuxième cycle du primaire ont été traitées selon une méthode d'analyse de contenu.

Deux conduites ont été adoptées par les élèves. La première, de type procédural, a été utilisée par presque tous les élèves. Elle consiste à utiliser des systèmes de comptage plus ou moins sophistiqués, de la planification aux suites d'actions. La deuxième consiste à récupérer directement en mémoire à long terme le résultat associé à un couple donné et au contrôle de son exécution. L'observation des conduites révèle que les erreurs sont dues à une rupture de sens. Ainsi, les difficultés d'ordre conceptuel et de symbolisation nous sont apparues plus importantes lorsque l'activité d'échange demandait la compétence « utilisation » et renvoyait à la compréhension de la tâche, soit les tâches dans lesquelles ils doivent eux-mêmes découvrir les rapports entre les variables à travailler et à simuler les actions décrites dans les énoncés. En conséquence, les problèmes d'échanges se sont révélés difficiles à modéliser en actes et significativement plus ardus que les autres. L'étude des interactions enseignant et élèves a démontré que la parole a été presque uniquement le fait des enseignants qui ont utilisé l'approche du contrôle des actes ou du sens ou les deux stratégies pour aider des élèves en difficulté.

Selon le type de situation à résoudre dans ces activités de mesurage de longueur et de masse, des mobilisations plurielles ont été mises en œuvre par les élèves, telles que la manipulation d'un ou des étalon(s) par superposition, par reports successifs, par pliage ou par coupure lorsque l'étalon dépassait, par retrait ou ajout, d'un peu de sable afin de stabiliser les plateaux. Nous avons également observé que bien que certains élèves aient utilisé leurs doigts pour se donner une perception globale extériorisée des quantités, plusieurs ont employé des procédures très diverses au cours de ces mêmes séances.

Les résultats présentés étayent l'hypothèse selon laquelle les concepts de grandeur et de mesure prennent du sens à travers des situations-problèmes liées à des situations vécues par les élèves, comme les comparaisons directes. Elles renforcent et relient les grandeurs, leurs propriétés et les connaissances numériques.

Mots-clés Didactique des mathématiques, théorie des champs conceptuels, structures additives, théorie des situations didactiques en mathématiques, ingénierie didactique, grandeurs en mesure, difficulté d'apprentissage, représentations des élèves, conduites des élèves, procédures.

SUMMARY

An education system adjusted to all its pupils, in line with the present reform of the education system of Quebec has led us in this project, to examine how students with learning problems deal with numbers and measurements in mathematics. In the present study, our purpose is to double-check many of the parameters defined in the work of Brousseau (1987, 1992). *La théorie des champs conceptuels* (TCC) of Vergnaud (1991), The Theory of the Conceptual Fields (TCF) of Vergnaud (1991), applied to the additives structures, was particularly useful in our analysis of the facts and the interpretation of their representations. In this work, the methodology we adopted is the Didactic Engineering, which allows a better understanding in articulating the contents to each. Using Theory of Didactic Situations in Mathematics (TSDM) (*La théorie des situations didactiques en mathématiques*), we examined the didactic approaches the teachers have in their relationship with their students. The data for our study, which is of the exploratory and qualitative type, was collected with twenty six students of the second cycle of the primary school. That data was analysed in conformity with a methodology of content analysis.

The examination of the student's behaviour revealed two attitudes. Almost all the students used the first attitude, which is of the procedural type. It consisted in using counting systems more or less sophisticated from the planning to the following actions involved. The second attitude implied memorizing for the long term, the result associated with a specific couple of actions and the control of their execution. The observation of the students' attitudes reveals that the errors they made are related to a semantic disruption in their interpretation of the varied tips and strategies the teachers tried to help them with to solve the different problems. Thus, it appeared to us that the difficulties at the conceptual and symbolization levels were more important when the exchange activity involved their competence to evaluate an activity related to the understanding of the task to achieve. In other terms, they had more difficulty with the tasks where they had to establish by themselves to links between the variables, and simulate the actions involved by those

tasks. Consequently, the tasks involving exchange operations happened to be more difficult to translate into actions, and were clearly more problematic than the other tasks.

The study of the interactions between teachers and students revealed that only teachers used words in the process, where they used the approach of the control of the actions (approche du contrôle des actes), or the approach of control of the meaning (*approche du contrôle du sens*), or both strategies to help students with problems.

Depending on the type of problem encountered during these activities of measurements of length and masses, the students had recourse to numerous experiments such as manipulation of the standard measure(s). They proceeded by superimposing, by successive deferments, by folding, by cutting when the standard was exceeding in size, or by reduction or addition of some amount of sand to bring into balance the scale. We noticed also that despite the fact that certain students used their fingers to have a global idea of the external measures of the quantities, many of those same students had recourse to a diversity of other procedures during the same test.

The result presented here support the hypothesis that says that the concepts of size and measurement get more meaning in a specific context, where they relate to real situations lived by the students, as well as by direct comparisons. They reinforce and establish links between the so-called sizes, their properties and the numeric knowledge.

Key words : Didactic of Mathematics, Theory of Conceptual Fields, Additive Structures, Theory of Didactic Situations in mathematics, Didactic Engineering, Importance in Size, Learning Problems, Students Representation, Students behavior, Procedures.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

DÉDICACE

Je dédie cette thèse :

À ma mère, feue Yvonne-Zantë Tieidé
qui aurait tant aimé voir l'aboutissement de ce travail…
M'man, ton décès a été mon plus gros chagrin.
Tu me manques énormément...

À mon petit-fils, Yohann-Axel Sam.
Champion, rappelle-toi, devant toute nouvelle situation, ne dis jamais, je ne suis pas capable... On est toujours capable de quelque chose... Et tu es capable!

Enfin à tous les élèves en difficulté d'apprentissage du Québec

Et spécialement à ceux qui ont été mes élèves, car ils m'ont permis de me réaliser...

REMERCIEMENTS

De nombreuses personnes ont contribué de manière importante à ma démarche de recherche depuis la première intention jusqu'au dépôt de cette thèse. Cependant, cette aventure n'aurait pu se concrétiser sans le soutien professionnel et l'amitié de mon directeur de recherche, Jean Portugais. Je tiens à le remercier chaleureusement et sincèrement d'avoir assuré la direction de cette thèse. Merci Jean, pour ta patience et tes conseils.

Ma reconnaissance va également à plusieurs professeurs du Département de didactique, en l'occurrence :

- Madame Gisèle Lemoyne pour sa disponibilité, ses lectures attentives, ses encouragements et ses conseils;
- à Monsieur Philippe Richard qui, par ses questionnements, m'a permis de développer davantage l'approche des grandeurs en mesure.

Vous m'avez été d'un soutien essentiel dans mes corrections. Merci.

Je tiens à souligner l'importante contribution de certaines personnes tout en leur adressant mes sincères remerciements, car elles m'ont aidée, encouragée et soutenue dans mon parcours doctoral par leur support inestimable :

- mes enfants, Ndèye-Khady, Serge-Éric, Laetitia-Nadège, Alain-Toussaint et Micheline;
- mes petits-enfants Yohann-Axel et Anna-Myriam-Zantë pour leurs sourires et câlins lorsque je me sentais à bout de souffle;
- mes neveux et nièces, Fulbert et Éléonore Soungalo, Marie-Yolande et Michel Yao et Nicole Bancouly et Marc Kouamé;
- à Moussa Bamba et sa famille à Philadelphie, et à toute ma parenté en Côte d'Ivoire;
- mes amis, Renée et Molière Estinvil, Dafrassi Sanou, Sandra Michel, Marie Leguerrier, Évis Leudjeu, Danielle et Jean-Paul Tuho. Merci pour tout.

Je remercie particulièrement mes collègues de travail, Medgine Bras et Pascal Dionne, sans lesquels rien n'aurait été possible. Merci collègues d'avoir accepté de dégager du temps pour mes expérimentations. J'apprécie.

Pour terminer, un grand merci à ma direction d'école, Madame Maryse Maheux-Dion, pour son soutien constant et à Monsieur Michel Perron, directeur-adjoint de l'école Saint-Noël-Chabanel.

Ne pouvant nommer toutes les personnes qui m'ont encouragée au Québec, au Canada et en Côte d'Ivoire, ce dont je m'excuse, je leur dis MERCI à tous.

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

CSDM	Commission scolaire de Montréal
DDM	Didactique des mathématiques
EHDAA	Élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage
MELS	Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (anciennement MÉQ)
MÉQ	Ministère de l'Éducation du Québec
TCC	Théorie des champs conceptuels
TSDM	Théorie des situations didactiques en mathématique
TTD	Théorie des transpositions didactiques

INTRODUCTION

> *« Les **mathématiques** ont des inventions très subtiles et qui peuvent beaucoup servir, tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et à diminuer le travail des hommes. »*
>
> René Descartes (Gérard Villemin)

Le chapitre des grandeurs en mesure, objet de notre recherche, est un domaine important en mathématiques élémentaires. Toutefois, il s'avère être l'un des moins travaillés par les recherches sur l'enseignement des mathématiques auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage. Pourtant, ces grandeurs sont essentiellement présentes dans les mathématiques à l'école primaire. Elles sont également enseignées au secondaire, en technologie et en sciences expérimentales. De plus, elles possèdent une richesse conceptuelle et une diversité technique selon que l'on s'intéresse aux nombres, aux grandeurs ou aux formes (Brousseau et Brousseau, 1987, 1992).

La grandeur en mesure intervient dans toutes les activités humaines. Elle se définit tout d'abord comme un phénomène d'apparence bien définie et justifiable d'un quantitatif de manière répétitive et suffisamment précise. On peut définir son état par un nombre ou valeur, par une mathématisation. Par la suite, la notion de grandeur est une définition plus large de la mesure, car elle existe indépendamment de cette dernière. Elle est construite à l'occasion des comparaisons, de l'estimation, de la conversion d'une unité à une autre ou lorsqu'il s'agit de calculer ou de donner du sens à la mesure.

DIFFÉRENTES RECHERCHES SUR LE POTENTIEL EN MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ D'APPRENTISSAGE

Notre recherche fait suite aux études sur les mathématiques de Lemoyne et Tremblay (1983) et de Lemoyne et Brisson-Trépanier (1985) qui portent sur certaines caractéristiques du fonctionnement cognitif et social des élèves en difficulté d'apprentissage. En Europe, Brousseau (1981) et Rouche (1998) ont exploré, par leurs travaux, les parcours possibles de la mesure des grandeurs comme outil signifiant pour rejoindre les enfants en difficulté et leur rendre les mathématiques intéressantes.

Au Québec, les recherches ont été plutôt orientées vers une évaluation systématique des connaissances et des habiletés de ces élèves en nombres ou en fractions.

La présente recherche, qui porte sur le potentiel didactique des grandeurs en mesure auprès d'élèves éprouvant des difficultés d'apprentissage, nous amène à examiner de près les conduites des élèves et les interventions de l'enseignant afin d'en rendre compte à partir de situations d'apprentissage et de leurs interactions; puis, à travers elles, les problèmes spécifiques posés.

Pour ce faire, nous prenons comme supports les travaux de Perrin-Glorian (1993) et de Portugais (1995) qui nous permettent d'observer et d'analyser ce que l'enseignant et ses élèves génèrent dans leurs interventions. Et ce, dans la tâche et les négociations qui peuvent en découler. Ces problèmes sont également analysés en tant que phénomènes d'émergence, de dysfonctionnement du sens dans les situations didactiques et de contraintes d'enseignement dans le cadre du contrat didactique (Brousseau, 1988). Par ailleurs, dans le cadre de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991), nous analysons les tâches et les conduites des élèves. Nous en parlons avec précision plus loin.

CONCEPTUALISATION ET APPLICATION DES SITUATIONS DIDACTIQUES

L'enseignant puise dans une variété de situations pour construire les situations d'enseignement susceptibles de favoriser une évolution des connaissances des élèves, mais il ne peut conduire et contrôler à lui seul leur processus de conceptualisation et d'appropriation. La théorie des situations didactiques de Brousseau (1986), qui prend en compte les interactions entre le système didactique, le système enseigné et le milieu comme lieu d'inscription de l'interaction et des productions, nous permet, par sa modélisation, de décrire ces sous-systèmes au moyen des relations qu'ils entretiennent.

Toutefois, même si cette théorie n'est pas attachée à un domaine disciplinaire et à un niveau scolaire particulier, il s'avère que son actualisation ne va pas de soi dans d'autres domaines disciplinaires, spécifiquement dans le contexte d'une classe spéciale.

Pour saisir les méandres des processus de conceptualisation des élèves selon des critères acceptables pour tous les chercheurs, Vergnaud (1991) a modélisé des situations et des concepts relevant d'une même structure en champs conceptuels. Cette théorie est un outil d'analyse adapté à la complexité du réseau de relations liant les différents savoirs mathématiques. Elle permet, par exemple, l'exploration des structures additives mais montre aussi l'utilité de la notion de schème pour voir les erreurs autrement.

D'après l'auteur (*ibid.*, p. 9), la nécessité d'analyser ces schèmes est encore plus évidente, car cette analyse permet de savoir à quelles difficultés s'est heurté l'enfant et de déterminer les moyens de remédier à cette situation.

Par le concept de schèmes, l'auteur a voulu fournir un cadre qui permette de comprendre les filiations et aussi les ruptures entre les connaissances, comme par exemple, les savoir-faire et les savoir exprimés d'un apprenant pendant une activité d'apprentissage.

ORGANISATION DE LA THÈSE

> *Notre travail est orienté sur les quatre phases de la méthodologie d'ingénierie didactique qui repose sur des réalisations in situ. Nous intégrons ces phases au fur et à mesure du développement dudit travail.*

Aussi, le chapitre premier de notre travail énonce la problématique qui porte sur les grandeurs en mesure auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage. Il nous amène à formuler notre hypothèse de recherche et à poser des questions en lien avec les grandeurs en mesure et l'analyse du pôle enseignant.

Le deuxième chapitre est consacré à la phase 1, *Analyses préalables*, qui, selon Arsenault (1996, p. 63-64) :

> *…. est une analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement usuel et de ses effets, une analyse de conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui caractérisent leur évolution et une analyse du champ de dans lequel va se situer la réalisation didactique effective.*

À cet égard, la conception de l'ingénierie didactique s'appuie en amont sur ces dernières. Ces études préliminaires, concernant la transmission des connaissances mathématiques, intéressent la didactique. Nous cherchons à comprendre ce système didactique qui tient compte des organisations de savoirs. Ce qui nous a permis de décrire théoriquement le fonctionnement des deux théories choisies tout en dégageant les contraintes actualisées dans une relation de triade enseignant/élève/savoir.

De ce fait, la première des théories que nous utilisons est la théorie des situations didactiques en mathématiques (TSDM) de Brousseau (1998). Dans son aspect théorique, elle permet de comprendre la production de situations d'enseignement et elle modélise le système éducatif en reliant les systèmes (didactique, élève et milieu).

La seconde théorie, celle des champs conceptuels (TCC) de Vergnaud (1991), délimite également notre champ d'action et nous permet d'expliquer l'espace de la situation problème, ce qui élargit le cadre d'analyse des composantes élève/savoir.

Les grandeurs étant étroitement imbriquées dans d'autres champs d'activités, l'articulation des connaissances qui en sont issues est nécessaire pour analyser les conceptions des élèves, puisqu'elles proviennent de plusieurs sources d'erreurs. Dans ce chapitre, notre travail s'intéresse aux interactions maître/élèves qui ne peuvent se faire sans examiner « la culture de la classe » liée, entre autres, aux convictions de l'enseignant. Cependant, nous relativisons la place de l'enseignant par rapport aux conduites des élèves, objet de notre recherche.

Le troisième chapitre, la phase 2**,** *L'analyse a priori***,** prend appui sur une littérature axée sur les grandeurs en mesure et les difficultés qu'éprouvent les élèves dans leur apprentissage en particulier. Ainsi donc, cette analyse permet de sélectionner un certain nombre de variables du système didactique qui ne sont pas fixées par des contraintes particulières et de retenir des hypothèses qui seront vérifiées par la suite.

Nous y présentons un aperçu de l'historique de la mesure des grandeurs, son analyse épistémologique et l'approche que nous adoptons dans ce travail. Pour ce faire, nous abordons les caractéristiques des grandeurs en mesure et l'interdépendance qui existe entre elles et les nombres, afin d'établir le bénéfice que pourraient retirer les élèves en difficulté par une meilleure connaissance des mécanismes d'apprentissage, par exemple, en recensant les difficultés que rencontrent les élèves sur les problèmes de grandeurs en mesure à partir de leurs représentations.

Nous parlons également du contexte expérimental des recherches en didactique des mathématiques qui se sont penchées sur les classes réputées particulièrement difficiles :

soit celles de Brousseau (1987), de Balacheff (1988) et de Douady et Perrin-Glorian (1989) qui ont permis de recenser les difficultés que rencontrent les élèves sur les problèmes des grandeurs en mesure à partir de leurs représentations.

La définition de la situation étant l'un des problèmes centraux de la didactique, nous définissons l'aspect retenu, car le sens n'est pas le même chez Brousseau (1986) que chez Vergnaud (1991). En effet, pour Brousseau, comme l'indique Rouchier, la reconnaissance du rôle et de la place de l'activité mathématique propre de l'élève comme moteur de l'apprentissage, la prise en compte des obstacles épistémologiques et didactiques, l'appui organisé sur des situations fondamentales et l'attention portée aux formulations sont des critères qu'il faut prendre en compte dans le contrat didactique.

En revanche pour Vergnaud, selon Conne, l'adéquation de la théorie est ce qui est requis pour toute action efficace sur le réel; l'action et l'organisation étant au cœur de la conceptualisation, puisqu'un concept ne concerne jamais un seul type de situations, mais plusieurs et que, réciproquement, une situation présente toujours diverses facettes conceptuelles interreliées.

Compte tenu de ce qui précède, notre intérêt dans ce travail se porte toutefois plus sur le déroulement des séquences guidées en situation d'apprentissage que sur l'élève en tant que sujet cognitif.

Le quatrième chapitre expose les aspects de la phase 3, la *Phase de l'expérimentation***.** Arsenault (1996, p. 63-64) la définit comme une phase classique de cueillette de données suivie d'une interprétation. En conséquence, ce chapitre contient les éléments de notre cadre expérimental, présentant la population de notre recherche, l'éthique, le choix des objectifs, de la conception et de la planification de nos situations problèmes, qui permettent la compréhension de l'articulation des contenus à enseigner (contenus mathématiques, approches didactiques elles-mêmes et stratégies des enseignants) et enfin, justifient la validation de notre hypothèse et de nos questions.

Au chapitre cinq, nous abordons la phase 4**,** *L'analyse a posteriori***,** qui, toujours selon Arsenault (*ibid.*), s'appuie sur les données d'expérimentation (observations réalisées lors des séances d'enseignement et de productions des élèves en classe ou hors de classe. À cette fin, le traitement des données recueillies et leur interprétation sont supportés par l'analyse de contenu et, à partir de verbatim obtenus, par les observations issues des situations expérimentales.

Finalement, au chapitre six se retrouvent la discussion et la conclusion. Nous y discutons, d'une part, des résultats par rapport à notre hypothèse et à nos questions et, d'autre part, des retombées pédagogiques que notre recherche peut susciter ainsi que de pistes pour la conduite de recherches futures.

CHAPITRE 1

PROBLÉMATIQUE

> *« … Apprendre des mathématiques ce n'est pas seulement apprendre un texte du savoir qu'on peut restituer, c'est savoir s'en servir pour résoudre des problèmes. Il est donc très important d'aider les élèves à articuler les savoirs du cours avec les connaissances nécessaires pour résoudre les problèmes, pour pouvoir les réinvestir dans des situations différentes de situations d'introduction et des exemples traités dans le cours. »*
>
> Perrin-Glorian (1998, p. 3-5)

Une école adaptée à tous ses élèves est la perspective que met de l'avant le programme actuel de formation de l'école québécoise, aussi bien dans le programme d'études des mathématiques que dans le plan d'action pour les classes d'adaptation scolaire (Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport, MELS, anciennement MEQ, 1999, 2001).

1.1 LA POLITIQUE DU MELS FACE À L'ÉCHEC SCOLAIRE

La politique du MELS s'inscrit dans la réforme actuelle de l'éducation et réaffirme sa volonté de favoriser et de soutenir l'intégration scolaire des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage. Elle nous amène à nous intéresser aux apprentissages des grandeurs en mesure des élèves en classes spéciales, car il nous semble que parmi les missions sociales qui incombent à l'enseignement des mathématiques, celles de donner à tout citoyen le moyen d'avoir une perception efficace de l'espace qui l'entoure, de comprendre et de s'approprier certains objets qui l'environnent, soient prioritaires.

Aussi, il apparaît important d'initier et de coordonner les recherches en didactique sur les grandeurs et leur mesure afin de développer les connaissances théoriques et scientifiques dans ce domaine, plus spécifiquement auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage. Il s'avère également crucial d'examiner de près les interventions et les dispositifs à mettre en place pour faciliter les apprentissages des élèves en difficulté d'apprentissage par le biais des grandeurs en mesure.

Nous pensons que l'analyse des difficultés d'apprentissage des grandeurs en mesure est un point qu'il ne faut pas occulter auprès des élèves en difficulté d'apprentissage, même si son apprentissage nécessite de leur part un investissement intellectuel important et un effort qu'ils ne sont pas tous prêts à consentir. Le système éducatif se doit de faire travailler ces grandeurs en mesure, car dans le futur, il aura à diriger ces élèves et à les accompagner dans leur orientation en cheminement professionnel. Partant de ce fait, le système éducatif se doit de soutenir ces élèves dans leur motivation, à la mesure de leur projet de vie correspondant à leurs talents, leurs intérêts et leurs ambitions.

1.2 LA PROBLÉMATIQUE DES APPRENTISSAGES EN MATHÉMATIQUE

L'importance des apprentissages en mathématique est fondamentale pour tous les élèves, mais elle comporte des obstacles particuliers lorsqu'il s'agit d'élèves présentant des difficultés d'apprentissage. Ces derniers constituent d'ailleurs l'effectif le plus important de la population en adaptation scolaire au Québec (Lemoyne et Lessard, 2003).

Plusieurs recherches ont été menées auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage ainsi que sur les dispositifs à mettre en place pour faciliter leurs processus d'acquisition. Citons les travaux de Brown et Burton (1978), Schubauer-Leoni (1986), Brun, Conne, Cordey, Floris, Lemoyne, Leutenegger et Portugais (1994a et b), Cange et Favre (2003) et Mary et Schmidt (2003). Cependant, des questions sur ces difficultés d'apprentissage en mathématique de ces élèves, de même que les problèmes auxquels font face les enseignants en adaptation scolaire demeurent sans réponse. Ce qui est frustrant quand on sait qu'intervenir efficacement auprès d'élèves présentant des difficultés est le souhait de tout enseignant.

Par ailleurs, de nombreuses recherches ont porté sur les difficultés en numération, sur les fractions et sur les décimaux chez les élèves au primaire (entre autres, Brousseau, 1987). D'un autre côté, selon Lemoyne et Lessard (2003), diverses ingénieries didactiques ont également été construites pour l'enseignement régulier, mais aucune pour l'enseignement en classe d'adaptation n'a été réalisée.

D'autres recherches ont exploré les parcours possibles de la mesure comme outil signifiant (Brousseau, 1981, Rouche, 1998). Dans le cadre général des recherches en didactique des mathématiques, plus spécifiquement en géométrie, celles de Balacheff (1988) et de Douady et Perrin-Glorian (1989), en Europe, ont relevé les difficultés que rencontraient les élèves sur les problèmes de la mesure. Cependant, ces études n'ont pas été menées sur les grandeurs en mesure et auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage de classe spéciale au primaire.

Comme angle de recherche, nous avons choisi les grandeurs en mesure (grandeurs discrètes) car plusieurs recherches indiquent que la mesure est un mode d'expression nécessaire de la pensée, un moyen de compréhension et d'approche des autres concepts en mathématique. Ces études indiquent également que les grandeurs en mesure dans les mathématiques font appel à plusieurs notions des apprentissages, puisque les activités de mesure préconisées dans les instructions pédagogiques visent à développer deux axes :

- faire dégager les notions de grandeur et de mesure d'une grandeur;
- et faire utiliser des instruments de mesure.

1.3 LE RÔLE FONDAMENTAL DES GRANDEURS EN MESURE DANS LES APPRENTISSAGES EN MATHÉMATIQUE

Les grandeurs en mesure sont un domaine important en mathématique à l'élémentaire, mais il est sans doute l'un des moins ciblés par les recherches sur l'enseignement des mathématiques auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage. Ces grandeurs comportent de nombreux aspects directement reliés aux mathématiques et aux autres sciences. Elles possèdent, en outre, comme nous l'avons dit précédemment, une grande richesse conceptuelle, d'après certains auteurs.

Selon Brousseau et Brousseau (1987, 1992), le travail sur les grandeurs et leur mesure donne du sens aux nombres par les différentes fonctions qu'ils jouent dans la résolution des problèmes d'arithmétique classique : rapport, mesure, opérateur, comparaison.

Au reste, la mesure des grandeurs, d'après Vergnaud (1981, p. 13-15), ne peut être indissociable du nombre, car le concept des grandeurs met en présence au moins deux domaines qui semblent, à première vue, similaires mais qui entraînent des difficultés différentes dans l'apprentissage du nombre :

- celui des objets concrets et des grandeurs avec leur environnement de propriété et de manipulations;
- et des nombres et son environnement de calcul pour exprimer quantitativement les grandeurs et anticiper le résultat de certaines actions.

Par rapport à d'autres notions et à d'autres domaines des mathématiques et des sciences, ces grandeurs en mesure ont un caractère concret lié à leur aspect visuel, riche, varié, esthétique, voire ludique. Les grandeurs en mesure offrent alors premièrement dans un autre ordre d'idée aux enseignants, une possibilité de provoquer chez leurs élèves une activité reconnue authentiquement mathématique par la plupart des mathématiciens. Et en second lieu, une réalité du raisonnement qui s'appuie d'abord sur l'observation de l'objet soumis à un examen critique avant même de donner lieu à un véritable travail de recherche, de conjectures. Cette modélisation permet une validation convaincante par la démonstration, le tout en maintenant un dialogue permanent entre l'intuition et la rigueur.

Cela dit, les grandeurs en mesure peuvent être utiles à chacun, dans son métier comme dans sa vie de tous les jours. Comme par exemple, le maniement des instruments de tous genres qui servent à apporter la précision dans les travaux et à en mesurer les différents degrés en ce qui concerne les ouvriers spécialisés, les techniciens, les artistes, les personnes œuvrant dans les mesures agraires ou en architecture.

Pour tout dire, il n'est pas de notre intention de dresser un catalogue exhaustif des applications des grandeurs en mesure, mais de donner seulement quelques exemples significatifs du rôle qu'elles jouent en mathématiques. Retenons seulement que les grandeurs et leurs mesures assument un double rôle fondamental d'outil de mathématisation et de pierre de touche expérimentale dans les sciences et ce, de manière complémentaire puisqu'elles occupent une place qualitativement importante et irremplaçable dans l'enseignement des mathématiques. Par exemple, le renforcement de la géométrie, que les grandeurs permettent dans l'espace, et l'utilisation pour leur mesure des invariants élémentaires comme les longueurs, les angles et les aires.

Mais les grandeurs, et plus particulièrement leur mesure, se révèlent être pour les élèves en difficulté d'apprentissage des concepts difficiles puisqu'il y apparaît comme dit précédemment, une diversité d'autres concepts tels le nombre, la nature de la grandeur, le découpage opéré sur une même grandeur ou les dimensions de l'unité.

D'après Brousseau (2007, p. 2-3), ces difficultés sont dues en grande partie à deux causes : le changement de rattachement épistémologique consécutif à l'évolution des sciences, d'une part, et à l'évolution technologique des pratiques quotidiennes qui épargnent toute action d'identification, de comparaison, de report d'unités et même de contact avec la matière objet de la mesure, d'autre part.

L'auteur explique ces difficultés par les progrès de la théorie de la mesure qui ont conduit les mathématiciens à privilégier l'étude des structures des espaces images au détriment de celle des grandeurs. De même, la disparition des grandeurs et des rapports comme objets d'enseignement qui s'en est suivie rend difficiles les explications qui permettent de construire ces objets mathématiques ainsi que la distinction de la nature et de la fonction des nombres dans différentes situations.

Néanmoins, dit Vergnaud (1977), si l'apprentissage des mathématiques apparaît si difficile, ce n'est pas parce que les mathématiques sont abstraites mais plutôt parce que cet apprentissage ne repose pas sur une activité intellectuelle de l'élève et sur la mémorisation ou sur l'application de savoirs dont l'élève n'a pas vraiment compris le sens.

Dans ce travail, nous ne proposons pas de renoncer aux habituelles techniques opératoires, ce qui ne serait ni pédagogiquement souhaitable ni culturellement acceptable, mais il nous apparaît indispensable de restituer les enjeux des grandeurs dans les apprentissages par les enseignants et plus spécifiquement par les enseignants en classe spéciale auprès des élèves en difficulté d'apprentissage.

1.4 L'OBJET DE NOS PRÉOCCUPATIONS

Le contrat didactique dont nous parlons au chapitre suivant définit le métier de l'élève autant que celui de l'enseignant, car aucun des deux ne peut se substituer à l'autre sans faire s'effondrer la tâche d'apprentissage.

On le sait, les mathématiques sont une discipline où les savoirs s'organisent selon une structure cumulative. Comme le point de départ de l'activité mathématique est la situation problème, peu importe de savoir par qui la situation problème est posée, mais il faut qu'elle ait un sens pour l'élève, qu'elle lui permette d'enclencher une activité intellectuelle et de se construire des savoirs mathématiques.

Ainsi par cette recherche exploratoire, nous cherchons, dans un premier temps, à comprendre les élaborations des élèves découlant des constructions sur les grandeurs en mesure et, dans un deuxième temps, à leur assurer des moyens de progresser significativement dans l'apprentissage et la compréhension de ces concepts, qui ne soient pas seulement une reproduction des règles d'écriture scolaire. Lorsqu'on prend les grandeurs, non plus comme des connaissances utiles par elles-mêmes mais comme un moyen pour l'enseignement, on peut amener l'élève au raisonnement déductif ou comme initiation à l'usage de théories mathématiques, comme en géométrie par exemple.

À cet effet, en tant qu'orthopédagogue travaillant dans le milieu de l'adaptation scolaire depuis plusieurs années, notre recherche répond à trois préoccupations :

- de voir réussir nos élèves en mathématique par le biais des grandeurs en mesure, réussite qui améliorerait leur estime de soi et leur motivation dans d'autres apprentissages;
- que l'enseignement des grandeurs en mesure et des autres notions connexes, telles la géométrie ou les nombres, permette de former adéquatement ces élèves en difficulté d'apprentissage puisqu'ils seront, pour la majorité, orientés en formation professionnelle;
- de sensibiliser les enseignants sur l'importance des grandeurs en mesure afin qu'ils interviennent efficacement auprès de leurs élèves dans ce domaine.

Nous pensons également que la solution aux difficultés actuelles des élèves et des enseignants en classe spéciale n'est pas à rechercher du côté du couple abstrait/ concret, mais du côté d'un apprentissage des mathématiques fondé sur l'activité intellectuelle, plus précisément du sens qu'ont les objets mathématiques tels les grandeurs en mesure.

Aussi, seul un enseignement permettant aux élèves de construire des savoirs mathématiques et, corrélativement, d'acquérir le sens même de la démarche mathématique pourrait réduire l'échec scolaire. Réussir ou échouer en mathématique, c'est d'abord être situé dans un certain rapport aux mathématiques. Ce sont sous ces angles que nous élaborons nos questions de recherche.

1.5 LE CONTEXTE PRATIQUE DE LA RECHERCHE

En ce qui concerne toute la complexité de la classe, comme nous l'avons dit, nous nous appuyons sur l'un des principaux éléments de la théorie des situations didactiques en mathématique, l'ingénierie didactique, élaborée par Brousseau (1988a). Notre dispositif expérimental vise à observer la dynamique des régulations et des modifications (conduites des élèves, stratégies de l'enseignant) et, par la même occasion, les effets et phénomènes propres à l'enseignement qui s'avèrent plus accentués dans les classes spéciales.

De ce fait, nous portons une attention particulière aux décisions didactiques de l'enseignant. Cette voie nous a paru la plus utile dans une perspective d'une production effective d'ingénierie et de méthodes d'observation. Cependant dans ce travail, la place de l'enseignant sera minorée, non pas parce qu'elle n'est pas importante, mais parce qu'il faut donner à chaque partie des variables étudiées la place et l'espace qui lui revient. Nous rappelons que notre recherche porte sur les représentations des élèves en difficulté d'apprentissage.

Par ailleurs, la théorie des champs conceptuels (TCC) de Vergnaud (1994), que nous utilisons, nous permet d'analyser les tâches cognitives des élèves. Nous voulons rattacher explicitement la problématique à cette recherche qualitative qui se veut exploratoire. Nous nous proposons donc de reconduire auprès des élèves plusieurs paramètres de la recherche de Nadine Brousseau (1987, 1992). Pour chaque grandeur, les situations problèmes évoquent les concepts importants visant à mettre en évidence les caractères communs ou spécifiques de ces grandeurs.

1.6 LES OBJECTIFS GÉNÉRAUX

Nous rappelons que l'étude du problème des grandeurs en mesure met simultanément en jeu plusieurs domaines dont le numérique, le géométrique et l'algèbre. Dans le cadre de notre recherche, seul nous intéresse le numérique dont nous nous servons pour exprimer lesdites grandeurs. Nous expliquons les rapports qu'ont les nombres avec les grandeurs en mesure plus loin dans notre travail.

Le traitement de situations problèmes sur les grandeurs et l'articulation de connaissances issues des domaines précités est une démarche difficile pour les élèves en difficulté d'apprentissage qui rend l'analyse de leurs erreurs assez complexe, car leurs sources sont diverses. Comme pour tous les autres concepts mathématiques, les grandeurs en mesure comme la géométrie ou les nombres sont en relation avec deux grands champs conceptuels, les structures additives et les structures multiplicatives.

Si pour les élèves ce sont les problèmes que ces opérations permettent de résoudre qui déterminent le sens, il nous semble important et même nécessaire, pour permettre un travail plus approfondi et une meilleure continuité des apprentissages en mathématique :

a) de leur présenter dans le domaine des grandeurs en mesure des situations problèmes leur donnant l'occasion de réutiliser les méthodes appréhendées dans d'autres situations;
b) d'observer leurs interactions avec l'enseignant afin de mieux comprendre leurs représentations.

Pour nous, il s'agit de considérer l'apprentissage, non comme un processus psychique individuel, mais bien comme un processus d'apprentissage, c'est-à-dire une situation d'interaction impliquant l'enseignant, l'élève et le savoir.

1.7 LES OBJECTIFS SPÉCIFIQUES

Comme nous l'avons souligné, Brousseau (2003, p. 5) note plusieurs processus qui menacent l'enseignement et l'apprentissage des grandeurs au cours de la scolarité au primaire : le changement de rattachement épistémologique consécutif à l'évolution des sciences et l'évolution des technologies métrologiques et de calcul. Aussi, notre recherche se propose :

- de cerner les difficultés rencontrées par les élèves en difficulté d'apprentissage, de même que les erreurs commises à travers leurs représentations sur les grandeurs en mesure;
- d'analyser spécifiquement le sens qu'ils apportent dans différents types de situations problèmes présentées;
- d'analyser, enfin, les stratégies utilisées par les enseignants lors des situations problèmes.

Cette recherche s'inscrit dans les études portant sur les représentations d'élèves en difficulté d'apprentissage découlant des apprentissages sur les grandeurs en mesure, mais dans un champ plus restreint des ingénieries didactiques, outil de méthodologie que nous privilégions et que nous décrivons au fur et à mesure que nous avançons dans la description de notre recherche.

Après avoir identifié la problématique, il y a lieu d'exprimer notre hypothèse de recherche et les questions qui en découlent.

1.8 L'HYPOTHÈSE DE RECHERCHE

Nous posons comme hypothèse de recherche que : **Les représentations sur les grandeurs en mesure des élèves du 2^{e} cycle du primaire en adaptation scolaire sont identiques à celles des élèves de classes dites régulières.**

Cette hypothèse nous amène à poser les questions suivantes. En cas d'utilisation des mesures non conventionnelles :

a) Dans quels types de situations, les savoirs sur les grandeurs en mesure prennent-ils du sens chez les élèves en difficulté d'apprentissage ?

b) Quels sont les procédures et les schèmes élaborés par ces élèves dans la résolution des situations problèmes portant sur la mesure des longueurs et des masses ?
c) Dans un processus d'enseignement des grandeurs en mesure, quelles sont les conduites devant lesquelles l'enseignant est à court de moyens d'action ?

L'analyse de notre problématique fait ressortir à la fois l'intérêt et la complexité du problème des grandeurs en mesure et du rôle non négligeable de l'enseignant dans l'appropriation et la communication de ce savoir. Elle fait également ressortir l'actualité de notre projet par rapport à différentes initiatives prises dans le milieu. Elle démontre l'opportunité d'accorder une attention particulière aux grandeurs en mesure afin de rejoindre ces élèves en difficulté d'apprentissage.

Après vous avoir situé les grandeurs et leur mesure, nous présentons, au chapitre suivant, les analyses préalables de notre recherche.

CHAPITRE II

ANALYSES PRÉALABLES

> *« C'est comme demander pourquoi la 9^e^ Symphonie de Beethoven est belle. Si vous ne savez pas pourquoi, personne ne pourra vous le dire. Je sais que les* ***nombres*** *sont beaux. S'ils ne le sont pas, rien ne l'est ».*
>
> Paul Erdös (Gérard Villemin)

Dans une perspective d'égalité des chances, l'école a la nécessité de rendre les sciences et, plus spécifiquement les mathématiques, accessibles à tous les jeunes, leur procurer les moyens de faire face aux réalités du monde industrialisé et technique d'aujourd'hui, qu'ils poursuivent ou non leurs études après le secondaire, qu'ils soient en cheminement particulier ou au régulier, en difficulté d'apprentissage ou d'adaptation. L'école a pour mandat de les aider à réussir leur projet de vie personnelle, scolaire et professionnelle.

Bien que cela puisse se traduire différemment selon leurs capacités et leurs besoins, l'acquisition des savoirs et des compétences pour les élèves en difficulté d'apprentissage peut se faire en développant leurs habiletés manuelles et intellectuelles dans le domaine des mathématiques et ce, par le biais des grandeurs en mesure, d'autant plus que la majorité d'entre eux est orientée dans des classes dites de cheminement particulier qui donnent accès à des écoles de métiers (voir en annexe, *Document sur le système scolaire du Québec*).

Notre recherche s'inscrit dans deux cadres : celui des recherches sur les grandeurs en mesure au primaire, plus précisément sur les grandeurs discrètes, et celui des recherches en ingénierie didactique. Les instruments retenus, la TSDM de Brousseau (1998) et la TCC de Vergnaud (1994), sont en cohérence avec les savoirs à enseigner. Ils permettent non seulement de comprendre le fonctionnement du système élève/maître/savoir, mais également l'analyse des représentations des élèves à partir des situations problèmes proposées.

Ainsi cette première phase de notre dispositif, les analyses préalables, présente les contenus, les activités présentées aux élèves et les choix didactiques qui lui sont relatifs. Il est nécessaire d'expliquer avant tout ce que sont ces analyses préalables. Nous empruntons à Arsenault (1996, p. 63-64) la description des aspects de cette phase.

Les analyses préalables sont :

> *… une analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement usuel et de ses effets, une analyse de conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui caractérisent leur évolution et une analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective.*

Ce cadre oriente le développement et la conduite de notre recherche aux résultats des connaissances de notre sujet, les grandeurs en mesure. Il se structure autour de deux pôles :

- le premier définit les liens qu'ont les grandeurs en mesure avec les nombres et l'espace;
- le deuxième traite de la prise en compte des intentions didactiques, du rôle de l'enseignant de classe spéciale et de ses interactions avec les élèves en difficulté d'apprentissage[1].

Nous nous sommes appuyés sur ces variables pour un certain nombre d'analyses préliminaires telles celles de l'enseignement en classe spéciale et de ses effets, des représentations des élèves des classes spéciales aux connaissances didactiques sur les grandeurs en mesure connues dans ce domaine, mais aussi aux contraintes auxquelles la réalisation en classe sera soumise.

Mais avant tout, il nous faut relever la terminologie conceptuelle des termes clés de notre recherche à savoir : « didactique des mathématiques », « théorie des situations didactiques en mathématiques », « système », « situation », « modélisation », « contrat didactique », « dévolution », « obstacle », « théorie des champs conceptuels », « grandeurs en mesure », « transposition didactique », « difficulté d'apprentissage », « orthopédagogie » et « ingénierie didactique », mots que nous définissons au fur et à mesure de la progression de notre travail. D'abord la didactique des mathématiques.

[1] Le rôle de l'enseignant devient de plus en plus important en didactique des mathématiques. Nous pensons qu'il doit être pris en compte avec l'identification d'un certain nombre de phénomènes du contrat didactique. Nous expliquons son rôle dans la recension, sans y mettre l'accent.

2.1 LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES (DDM)

La didactique des mathématiques (DDM), selon la TSDM de Brousseau (1991), désigne l'étude scientifique des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques entre les hommes ou les institutions humaines. Pour Touré (2003, p. 53), c'est « une science qui s'intéresse à la production et la communication des connaissances mathématiques ».

La DDM étudie la façon dont les connaissances sont créées, communiquées et employées pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société. En cela, Portugais (1995, p. 29) indique « qu'elle permet de théoriser les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage de la mathématique ». Trois théories fondatrices découlent de la DDM :

- *la théorie des situations didactiques en mathématiques* (TSDM) de Guy Brousseau, qui permet de mieux comprendre le fonctionnement de la triade enseignant/élève/ savoir. C'est avant tout un réseau de concepts, de méthodes de recherche et de protocole d'expérimentation appuyé, notamment, sur l'ingénierie didactique autour de laquelle s'axe notre recherche;
- *la théorie des champs conceptuels* (TCC) de Gérard Vergnaud, qui permet de saisir l'articulation entre ce qui est observable et l'analyse des différentes tâches contenues dans une situation d'apprentissage;
- *la théorie de la transposition didactique* (TTD) d'Yves Chevallard, qui traite les contraintes et phénomènes de l'enseignement. Ce terme désigne l'ensemble des transformations que subit un savoir dit savant avant d'être enseigné.

Ces théories sont décrites de façon plus détaillée un peu plus loin. D'abord, la théorie des situations didactiques des mathématiques.

2.2 LA THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES EN MATHÉMATIQUE (TSDM)

Les mathématiques sont principalement une activité qui consiste à poser et à résoudre des problèmes. Elles constituent un outil extraordinaire pour décrire, comprendre et prévoir le comportement de la matière.

D'après Brousseau (1998), la TSDM se veut essentiellement un instrument de conversion des connaissances en situations sur lesquelles peuvent s'appuyer des raisonnements économiques et écologiques. La notion de situation constituant le noyau dur de la didactique des mathématiques, elle se propose de fonder un cadre explicatif, interprétatif et même prédictif concernant l'emploi des situations organisées pour provoquer l'apprentissage.

Dans ces conditions, faire de la didactique une science rigoureuse a incité les chercheurs, notamment Guy Brousseau depuis les années 1970, à élaborer des méthodologies de recherche et d'observation de plus en plus fines. Ce qui a permis d'explorer la dualité émanant de cette théorie, soit celle de l'intervention et de l'observation.

En conséquence, toute situation didactique présentée, loin de s'installer spontanément, requiert un apprentissage, autant de la part de l'enseignant que des élèves. Elle permet d'observer les interactions de connaissances, de décrire l'évolution de conceptions initiales en conceptions plus fonctionnelles et également de donner du sens aux objets d'étude. Ainsi, peut-on dire que la TSDM concerne l'environnement tout entier de l'élève, de l'enseignant et du système éducatif. Étant donné que ces théories mettent en présence un savoir, des sujets et des moyens didactiques, nous élaborons au fur et à mesure le rôle que joue chacune d'elles dans notre travail. À cet égard, ce qui fait l'originalité de la TSDM, c'est qu'elle s'intéresse non seulement à l'intention d'enseigner mais également à l'apprentissage des savoirs particuliers. Dans notre travail, c'est son caractère local, bien spécifique, l'ingénierie didactique, qui nous a fait opter pour la TSDM, méthodologie qui prend la classe dans toute sa complexité.

Nous expliquons maintenant ce que nous entendons par système et modélisation.

2.3 SYSTÈME, MODÈLE, MODÉLISATION ET PROCESSUS DE MODÉLISATION

On ne peut parler de modélisation sans parler de système. Système et modèle étant généralement définis comme étant un programme, un plan, un dispositif, un moyen ou même un mécanisme. Cela ne nous a pas permis de dégager un sens propre à ces deux termes mais de les comprendre de façon complémentaire.

L'étude des systèmes, selon Touré (2003, p. 55-57), est une approche cognitive qualitative qui procède de la mathématisation proprement dite. L'auteur indique qu'un système est un ensemble d'éléments en relation dans l'environnement, en fonction d'un principe organisateur dont l'articulation crée des propriétés nouvelles.

En ce qui concerne le terme de modèle, face à la multiplicité de ses définitions, nous retenons que, généralement, un modèle est intéressant quand il permet de produire des connaissances qu'une autre voie ne donnerait pas aussi facilement. Un modèle peut avoir été construit pour une fonction et se révéler utile pour une autre. En plus, il n'est jamais parfait et totalement représentatif de la réalité. Il n'existe jamais de modèle unique. C'est la raison pour laquelle on ne saurait en donner une définition exacte.

De même, un travail mathématique sur un modèle fournit une connaissance nouvelle : la modélisation. Le *Dictionnaire Larousse* (2006, p. 697) la définit comme « l'établissement des modèles, notamment des modèles utilisés en automatique, en informatique, en recherche opérationnelle et en économie ». Dans toute modélisation, il y a un choix de modèle. Le choix du modèle peut aller vers le réel (modèle prédictif dans lequel on peut utiliser une projection) ou du réel vers le modèle (modèle descriptif). Dans la vie courante, nous modélisons tous et en tout temps. Nous associons une image mentale à un être, à un objet afin de faire des simulations pour le décrire ou décrire les relations fonctionnelles qu'il entretient.

En mathématique, cependant, le processus de modélisation suppose essentiellement, selon Chevallard (1989, p. 53), deux registres d'entités : « un système, mathématique ou non mathématique, et un modèle (mathématique) de ce système et dont le processus comporte schématiquement trois étapes ». L'auteur indique par contre que s'interroger sur les modèles ne peut se faire sans que se profile, derrière les mots, l'idée de la modélisation elle-même. Pour lui, « *la modélisation est la démarche de construction d'un modèle ou d'appropriation d'un modèle déjà construit* ».

Ainsi, l'enjeu de la modélisation est avant tout de décrire les différents sous-systèmes du système didactique par le seul recours aux relations qu'ils entretiennent. Par exemple, les jeux de l'élève avec le milieu adidactique[2] et les jeux de l'enseignant organisateur de ces jeux avec l'élève. D'après Balacheff et Margolinas (2005, p. 2), ces jeux constituent, sur le plan méthodologique, des observables qui peuvent consister en des productions langagières, symboliques, matérielles, voire comportementales.

D'autant plus, indique Schubauer-Leoni (2002), que la modélisation du jeu et l'évolution du système de relations que les instances humaines entretiennent avec le savoir, des liens particulièrement utiles (et utilisées) pour construire des prototypes de situations didactiques (projets d'ingénierie didactique) devant permettre aux élèves d'accéder à certains savoirs mathématiques bien ciblés.

Nous abordons maintenant les situations.

2.4 LES SITUATIONS

L'enseignement, nous l'avons dit, comprend l'ensemble des actions qui cherchent à réaliser un projet didactique. Les conditions d'une des utilisations particulières d'une connaissance mathématique sont considérées comme formant un système appelé « situation didactique ». Elle se caractérise principalement par l'intention d'enseignement qui la sous-tend et qui est composée, généralement, d'au moins une situation problème et d'un contrat didactique, contrat qui définit et organise les rapports qu'élèves et enseignant entretiennent avec le savoir.

Brun et Conne (1990, p. 264) expliquent autrement cette notion. Inversement, pour ces auteurs, la situation est souvent comprise en pédagogie comme désignant une catégorie de matériel didactique. Ainsi, « ... *dans la technique des situations, les élèves à partir d'un énoncé simple et d'une organisation préalable (matérielle et sociale) de la classe,*

---

[2] Brousseau (1987) définit la situation adidactique comme une situation où l'élève peut et doit mettre en œuvre une connaissance qu'il rencontre en dehors de tout contexte d'enseignement.

doivent construire les questionnements auxquels ils consacrent leur travail mathématique ».

Quoi qu'il en soit, la TSDM, Vincent (1997, p. 4), « ... distingue trois types de situations ou d'états sur le plan des rapports que l'élève établit avec l'objet de savoir et le système :

- *l'élève peut être placé en situation d'action par rapport au problème ou à la tâche, sans pour autant qu'il ait à s'expliquer ou à se questionner sur le sens de ses actions*;
- *il peut aussi être placé en situation de formulation et être amené à échanger avec ses pairs ou avec l'adulte pour produire ses actions, et donc à utiliser le langage, sans qu'il lui soit pour autant nécessaire de les justifier;*
- *finalement, il peut être placé en situation de validation, ce qui l'amène à produire des énoncés déclaratoires par rapport à son activité, énoncés dépassant le simple échange d'informations pour prendre la forme de jugements, de justifications ou d'autovalidation de son point de vue... »*

On comprendra poursuit l'auteur, « *...que les tâches proposées aux élèves en classe revêtent une importance stratégique sur le plan didactique étant donné qu'elles sont susceptibles de teinter les différents types de rapports au savoir* ».

Cette théorie poursuit Arsenault (1996, p. 59), « *s'appuie sur un postulat constructiviste de la connaissance... Elle est au centre des préoccupations des chercheurs qui créent et analysent diverses situations didactiques et qui, quelquefois, tentent de faire pénétrer ces situations dans le milieu scolaire* ». L'élève apprend avec l'aide d'autrui, principalement son enseignant. Cette aide peut être analysée à travers des actes de médiation (des situations proposées aux élèves) qu'il effectue de manière quasi permanente au cours de son activité, à travers le contrat didactique qui lui ne peut être réalisable sans la dévolution.

Ainsi donc la TSDM, en plus de ses aspects théoriques, s'occupe non seulement de l'élève qui apprend, mais surtout de l'élève à qui l'on enseigne et pour lequel on crée des conditions d'apprentissage. Il convient toutefois de comprendre que la notion de situation, pour Brousseau, a une dimension affective et cognitive, alors que chez Vergnaud, elle désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve une notion mathématique. L'auteur fait référence à l'extraordinaire diversité pour une même notion mathématique et le rôle de chacune d'elles dans la construction des connaissances des élèves à propos de cette notion.

Nous abondons quant à nous, dans le sens de Vergnaud car il aborde la question des savoirs sans écarter ni la question des connaissances de l'élève, ni la question des savoirs constitués, et ce, dans leur complexité. Pour nous, dans l'examen des situations proposées pour l'apprentissage des grandeurs, nous soumettons aux élèves des problèmes qu'ils n'ont pas rencontrés auparavant et qu'ils sachent réinvestir les conduites appropriées et institutionnalisées par l'enseignant.

En définitive, la réalisation de ces situations expérimentales rapporte le fonctionnement observé aux conditions prévues, aux fins de transcription de ces observations en un protocole restituant les conduites, propos et actions des élèves et de l'enseignant.

Nous y reviendrons plus loin lorsque nous aborderons le concept de schème. Nous traitons maintenant du contrat didactique.

2.5 LE CONTRAT DIDACTIQUE

L'étude des situations et des rapports entre partenaires du processus d'enseignement de classe est énorme et dépend de nombreux paramètres. Cela a conduit les chercheurs à repérer des moments où l'enseignant structure et organise un processus d'enseignement afin de faire apparaître certaines conduites chez les élèves telles que l'utilisation des situations adidactiques nécessaires pour que les élèves puissent gérer, par la modélisation, des situations qui demandent des connaissances pour être résolues ou en les modifiant selon le milieu.

C'est Brousseau (1987) qui a introduit le concept de contrat didactique en didactique des mathématiques. Il représente l'ensemble de règles qui déterminent explicitement, pour une petite part, et implicitement le partage des responsabilités de chaque partenaire dans la relation didactique.

Mais depuis sa première définition du contrat didactique en 1980, Brousseau a apporté des modifications substantielles au concept en l'articulant à la notion de milieu qu'il définit comme le système antagoniste de l'élève. Il s'agit, comme le précisent Balacheff et Margolinas (2005, p .2), « ...de construire un milieu, système antagoniste du système enseigné, tel que les stratégies des élèves soient motivées par les nécessités de leurs relations avec le milieu ».

Le travail de Brousseau (1986) s'est intéressé aux équilibres et aux régulations dans la relation didactique pour identifier et analyser, en termes de milieu, des phénomènes liés au décalage entre la situation prévue par l'enseignant et celle qu'il a réellement à gérer. On peut citer le collectif dirigé par Vergnaud (1994, p. 79), qui indique que plusieurs ingénieries didactiques portant sur des notions précises ont été développées. Par exemple, la notion d'aire par Douady et Perrin-Glorian (1989) ou la symétrie orthogonale par Grenier (1988).

Ainsi le contrat didactique, c'est ce qui va conditionner la prise en charge de la situation par l'élève, la signification pour l'élève du problème et du concept visé et qui va permettre la négociation du sens des activités en jeu. Les modalités de recherche d'un contrat didactique sont mises à jour via les régulations que mène le professeur au cours d'une activité grâce à l'identification des contraintes de fonctionnement des systèmes didactiques. Mais c'est le contrat didactique et l'institutionnalisation qui permettent d'abord de prendre en compte le rôle du maître dans la TSDM que nous expliquons plus loin.

Nous explicitons maintenant le concept de dévolution, élément essentiel au contrat didactique.

2.6 LA DÉVOLUTION

Nous avons vu que la recherche de contrat est nécessaire pour rendre compte de comportements d'élèves et d'enseignants. D'après Brousseau (1998), cette recherche définit un jeu impliquant l'enseignant et son élève dont l'objet est le système des interactions de l'élève avec les problèmes posés par l'enseignant.

Toutefois, les règles du contrat étant plus implicites qu'explicites et évoluant au fur et à mesure des interventions, elles mettent l'enseignant devant un paradoxe : tenter de faire savoir à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse, mais sans le dire d'une manière telle que l'élève n'ait qu'à exécuter une série d'ordres. Pour Dubois *et al*. (2001, p. 9), « il y a dévolution lorsque l'enseignant fait en sorte que l'élève se sente responsable (du point de vue de l'acquisition de ses connaissances) du résultat qu'il doit chercher ».

La dévolution est, de ce fait, un des processus de transmission et d'acquisition du savoir mathématique d'une situation adidactique[3]. Elle comporte généralement plusieurs aspects et plusieurs étapes de l'approche ludique. Brousseau (1988) affirme que la dévolution fait pendant à l'institutionnalisation et qui se trouvent être les deux interventions didactiques de l'enseignant sur la situation « élève/milieu/savoir ».

Donc, cet acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation ou d'un problème est un des aspects qui nous intéresse le plus dans notre recherche. Sauf que parler de dévolution en classe spéciale n'est pas chose aisée, puisque faire entrer les élèves dans une situation d'apprentissage sans leur indiquer la solution et par la suite institutionnaliser les connaissances est bien difficile. Les élèves ne peuvent pas dégager seuls ce que la démarche qu'ils ont utilisée dans une autre situation a de général et de réutilisable.

De plus, il est parfois difficile pour l'enseignant d'évaluer le véritable niveau d'activité mathématique de ses élèves, car il arrive qu'il reconnaisse les indices d'une connaissance qui n'est pas réellement présente. En outre, le risque de dérapage est également grand pour l'enseignant lorsqu'il s'agit de décontextualisation.

C'est pour ces raisons que Perrin-Glorian (1991) souligne la difficulté des élèves « dits faibles » à s'engager dans la tâche mathématique et celle de l'enseignant à réaliser la dévolution. Charnay (1997), quant à lui, mentionne aussi que les élèves en difficulté ont souvent perdu ce rapport à l'activité mathématique et à ce qui leur revient dans ce type

[3] Nous rappelons qu'une situation ***adidactique*** est un processus ne faisant pas partie d'une notion d'apprentissage, mais d'un moyen pour atteindre ou pour éveiller l'attention et l'intérêt de l'élève. Elle consiste, selon Brousseau (2003), non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel on veut qu'il s'adonne (consignes, règles, but, état final...), mais à faire en sorte qu'il se sente responsable, au sens de la connaissance dans l'apprentissage et non pas de la culpabilité, du résultat qu'il doit rechercher.

d'activité. De plus, trop souvent, ces élèves confondent les deux activités suivantes : résoudre le problème et effectuer le bon calcul.

Or, le type d'activité est à la charge de l'élève qui doit élaborer une solution personnelle adaptée et non essayer de deviner quel est le bon calcul. Lemoyne et Lessard (2003) corroborent ces assertions. Les auteures affirment que traiter l'enseignement des mathématiques en classe spéciale n'est vraiment pas aisé, car « qui dit classe spéciale, dit à la fois volonté d'adapter l'école aux besoins de clientèle particulière d'élèves et volonté d'adapter ces clientèles aux exigences de l'école ».

Il s'agit alors pour nous de porter un regard attentif sur les acteurs de ce contrat didactique; sa réalisation effective dépendant de la capacité de l'enseignant et des élèves à établir explicitement cette validité. D'après Brousseau (2003, p. 4), ce contrat ne peut être également effectif sans l'apparition de difficultés appelées **obstacles** qui peuvent apparaître, disparaître et réapparaître de façon inattendue et causant des erreurs par des relations insoupçonnées.

2.7 LES NOTIONS D'OBSTACLE DANS LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

La notion d'obstacle épistémologique est également inhérente à la TSDM, de même que le contrat didactique. C'est Chevallard (1989) qui a introduit la notion de transposition didactique. Nous l'explicitons brièvement.

Pour l'auteur, aucun savoir n'est enseignable en tant que tel. Pour l'être, il doit subir une transposition et en analysant cette transposition, on prend conscience des obstacles didactiques qu'elle produit.

Un obstacle est un ensemble de manque de connaissances d'un sujet lié à sa représentation d'une notion, qui est également liée par des raisonnements causant des erreurs qui ne sont ni à ignorer, ni à éviter. Dubois *et al*. (2001, p. 13), quant à eux, indiquent que : « *... ce que cause la connaissance obstacle dans l'histoire... c'est plus souvent l'erreur, l'incapacité à appréhender certains problèmes ou à les résoudre efficacement* » d'autant plus que cet obstacle peut avoir plusieurs origines possibles :

- une origine ontogénique qui survient du fait des limitations d'un sujet à un moment de son développement;
- didactique, c'est-à-dire lié au choix du système d'enseignement;
- épistémologique, lié aux limitations des capacités cognitives.

Cette notion d'obstacle s'avère importante, car elle prend en compte l'évolution des connaissances. Elle l'est également pour l'ingénierie didactique[4], méthode que nous explicitons plus loin, dans la méthodologie, et qui nécessite l'identification de variables pertinentes (didactiques, saut informationnel, dépendances). Entre autres, selon Brousseau (1986), c'est un moyen de porter un autre regard sur les erreurs ou les connaissances erronées.

L'action de l'enseignant ne peut donc être saisie et analysée qu'en fonction des contraintes et des espaces que lui confèrent les sous-systèmes du système didactique. Il était nécessaire de mettre en évidence les variables que le concept de contrat didactique met à jour. Ces variables, ordinairement observées en classe ordinaire, s'avèrent très accentuées dans les classes spéciales. Par exemple, l'effet Topaze, qui est une négociation à la baisse des conditions de l'acte d'enseignement, ou encore l'effet Jourdain, dans lequel pour éviter le débat de connaissance ou le constat d'échec, l'enseignant admet reconnaître l'indice d'une connaissance savante.

Ces phénomènes sont dus, en partie, à un sentiment d'impuissance de l'enseignant et de sa difficulté à faire passer son enseignement, expliquent Mary et Schmidt (2003). Ce désir de faire comprendre ses intentions didactiques à ses élèves l'amène, pour ces motifs, à modifier son enseignement en s'arrangeant pour obtenir les procédures attendues et un pourcentage de réussite raisonnable.

Il faut donc retenir que le contrat didactique permet de dresser un inventaire de responsabilités entre l'enseignant et l'élève. Ce qui nous amène à parler de la relation didactique existant dans une situation d'apprentissage.

---

4 Le concept « ingénierie didactique » est expliqué abondamment au chapitre de la méthodologie. Nous y reviendrons, une fois de plus, sur les raisons qui nous ont fait opter pour cette méthode.

2.8 LA PERSPECTIVE TRIPOLAIRE DE LA RELATION DIDACTIQUE

Le postulat de la didactique des mathématiques (DDM) est que le système didactique est un objet préexistant à notre visée. Cet objet, que l'on définit comme le jeu, se mène entre un enseignant, des élèves et un savoir mathématique, indique Portugais (1995).

Ainsi, dans toute situation d'apprentissage existe un triangle fondamental que chaque enseignant doit avoir à l'esprit lorsqu'il dispense son enseignement (Figure 1). Ce triangle, appelé triade, composée du maître/élève/savoir, se situe dans le plan du milieu didactique qui associe les savoirs et établit également une relation pédagogique. Pour rendre possible l'ensemble des relations décrites et pour favoriser en même temps l'atteinte de l'objectif d'apprentissage, les trois pôles sont privilégiés.

Nous rappelons que nous voulons observer ce qui se passe dans les trois pôles de cette triade, c'est-à-dire les stratégies de l'enseignant avec ses élèves lors d'une situation d'apprentissage.

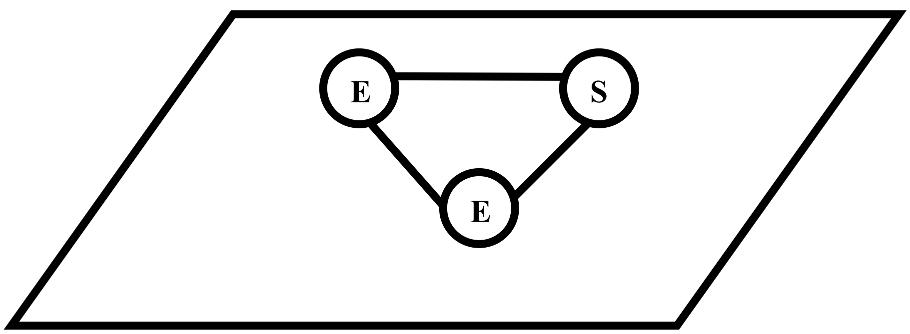


Figure 1 - La modélisation de la triade didactique (Portugais, 1995, p. 282)

Dans notre recherche, nous avons à l'esprit, qu'à certains moments de cette relation pédagogique, l'un des processus peut potentiellement dominer. Les conduites des élèves s'avèrent le pôle le plus important, il conviendrait donc de les prendre en compte, car elles ne peuvent être étudiées sans les stratégies de l'enseignant qui sont fonction du contrôle des actes (Portugais, 1995).

Il faut toutefois être conscient, indique Portugais (*ibid*., p. 175-179), qu'un même comportement observé peut prendre différents sens selon la situation, les objectifs de l'enseignant ou suivant l'approche sous-tendue[5] et que :

> *... demander à l'élève de refaire le calcul peut procéder d'une stratégie de l'approche d'institutionnalisation primitive, mais peut aussi signifier toute autre chose et se relier plutôt à une approche qui est fonction du contrôle du sens... Il faut donc éviter d'identifier un comportement à une stratégie.*

L'auteur précise que les éléments de cette typologie des stratégies de travail sur l'erreur ne peuvent se réduire à des comportements, mais que ceux-ci renvoient à des stratégies et donc à des organisations de conduites qui ne sont pas directement accessibles par la simple observation. Elles exigent que l'on ait recours à des triangulations par la mise en relation des protocoles avec les entretiens et le cahier de bord.

Cette typologie s'avère utile à notre travail pour la reconnaissance des stratégies employées par les enseignants de notre expérimentation. Nous n'en utilisons d'ailleurs que quelques-unes que nous détaillons plus loin.

2.9 ANALYSES DE LA PRISE EN COMPTE DES INTENTIONS DIDACTIQUES DE L'ENSEIGNANT

Différentes approches ont mis en relation des comportements observables d'enseignants à des résultats d'élèves. Depuis peu, d'autres approches s'intéressent aux interactions enseignant/élèves et visent davantage à prendre en compte le contexte et les situations d'interaction (Margolinas, 1992; Portugais, 1995). Précisons que le terme « interaction », dans le champ de recherche en classe, désigne l'activité de l'enseignant dans sa classe en présence de ses élèves.

Cette conception des situations d'interactions prend en compte généralement trois éléments : un problème d'enseignement explicité par une analyse cognitive, épistémologique et didactique, la spécification d'un contexte d'usage et l'organisation d'activités permettant de définir des situations d'interactions. Ces interactions dans une

---

[5] Nous avons conscience que la typologie des stratégies de l'enseignant issues de la recherche de Portugais (1995) porte sur l'arithmétique. Mais comme nous l'avons signifié plus haut, nous les utilisons pour faire des parallèles avec les stratégies des enseignants de notre étude.

classe de mathématique, d'après Lemoyne, Coulange et René de Cotret (2002), sont des interactions contrôlées par des interprétations des conceptions que l'enseignant et l'élève choisissent de rendre visibles et, éventuellement, de traiter. Elles marquent bien les positions respectives de l'enseignant et de l'élève.

En revanche, nombreuses sont les interactions enseignant/élèves, la nature de ces interactions et les phénomènes qui en résultent. Au cœur du processus d'apprentissage, ces phénomènes permettent à l'enseignant de s'ajuster, par le biais des représentations de ses élèves, et à l'élève d'éprouver et d'envisager des ajustements afin d'engager des réorganisations cognitives. Les produits de l'observation de ces interactions servent de matériel pour des analyses, puisque les conceptualisations implicites et les modifications de l'organisation de la conduite de l'enseignant pour maintenir et faire évoluer la situation didactique entrent en jeu dans l'accomplissement de la tâche.

De même, le contrôle des variables, dans une situation expérimentale sur les intentions didactiques de l'enseignant, impose des contraintes très fortes qui ne sont pas toujours réalisables quand on travaille dans une classe ordinaire, *a fortiori* dans le cas des classes spéciales. La conduite des interlocuteurs révèle alors une organisation de leur activité à deux niveaux : celui qui leur permet d'articuler la gestion de la relation dans leurs échanges et celui qui leur permet la gestion de l'action à accomplir pour la résolution de la tâche.

Selon Portugais (1995), ces variables, dues aux contraintes, ont une grande importance sur le fonctionnement cognitif de l'élève et il est important d'accorder une attention particulière aux mécanismes qui permettent le transfert de responsabilité de l'enseignant à l'élève producteur de connaissance. Nous nous permettons de reprendre la description de quelques stratégies relevées par l'auteur, puisque nous nous y appuyons dans l'analyse et les interprétations des stratégies des enseignants de notre recherche.

Cela dit, toujours selon Portugais (1995, p. 176-179), les stratégies de l'enseignant sont orientées en fonction de deux formes de contrôle sur l'activité de l'élève (catégories de travail de l'erreur). Il cite d'abord les stratégies qui sont fonction du contrôle des actes par une approche d'institutionnalisation primitive et qui se présentent sous de deux formes :

- ***l'institutionnalisation primitive*** *qui désigne explicitement le lieu de l'erreur en tant que tel à l'élève et lui montrer la procédure correcte;*
- ***l'institutionnalisation primitive par élève interposé*** *qui est le fait de choisir un autre élève qui a fait juste pour qu'il désigne explicitement l'erreur à l'élève qui l'a produite et lui montrer la procédure correcte.*

Ces stratégies, fonction du contrôle des actes avec une approche par remédiation, sont au nombre de huit. Mais nous ne retranscrivons que celles utilisées, soit :

- retravailler et/ou intervenir sur la numération de position (valeur des retenues et des *emprunts);*
- *faire manipuler des objets (regroupements, échanges);*
- *présenter une autre tâche avec des nombres plus petits pour que cela permette ou encourage la réussite;*
- *faire une séquence corrective de travail sur les échanges entre colonnes (changement de statut lors du passage à la colonne voisine);*
- *désigner explicitement le lieu ou la cause de l'erreur à l'élève et lui donner la règle transgressée;*
- *faire refaire le calcul à l'élève (ou un calcul partiel) pour qu'il se corrige (en donnant une consigne à l'effet que ceci lui permette de ne plus refaire cette erreur à l'avenir);*
- *séquence corrective de travail sur les tables en insistant sur des valeurs spéciales puis* mises en garde adressées aux élèves sur ce type d'erreur.

L'auteur relève également neuf stratégies qui sont fonction du sens avec une approche didactique. Encore ici, nous n'en retranscrivons que celles utilisées :

- *déclarer à l'élève qu'il y a erreur et demander de la préciser. L'élève a alors le contrat;*
- *de rechercher l'erreur, non pour elle-même, mais pour l'expliquer. Avec pour variante, de demander à l'élève pour induire le doute sur la taille numérique du résultat, si la réponse obtenue ou la procédure exécutée semble(nt) correcte(s);*
- *déclarer aux élèves qu'il y a erreur quelque part et laisser ceux-ci débattre sur cette question;*
- *demander de comparer les résultats entre eux (un juste et un faux) pour faire prendre conscience de l'erreur (procédure, taille des nombres);*
- *variante de comparer le résultat avec celui de l'estimation faite avant pour centrer sur la différence des tailles.*

On retrouve également sept stratégies, fonction du contrôle du sens avec une approche adidactique que celles utilisées :

- *inciter à estimer et laisser le lien à établir aux élèves (validation dévoluée des aspects numériques);*
- *inciter à prouver et laisser le lien à établir aux élèves (validation dévoluée des aspects numériques);*
- *introduire une tâche impossible (en relation avec les tâches précédentes ayant suscité des erreurs) pour débattre du sens;*
- *remise en question de la tâche en proposant une tâche analogue (susceptible d'engendrer la même erreur, mais sous des contraintes différentes)*

Nous avons présenté quelques-unes des 26 stratégies de travail de l'erreur de la typologie qui, convenons-le, nous ont aidés à reconnaître celles utilisées par l'enseignant[6]. Dans le cadre de notre recherche, nous rappelons vouloir analyser les représentations des élèves. Mais cela ne peut se faire bien entendu, sans porter un regard sur les stratégies de l'enseignant en situation d'enseignement, donc en interaction avec ses élèves. Cependant, les analyses des conduites d'élèves constituent le cœur de notre travail donc sur lesquelles nous mettons l'accent.

Il existe deux éléments qui sont étroitement liés (l'activité de planification et l'activité d'enseignement en classe). Nous ne prenons en compte dans notre recherche, que l'activité d'enseignement en classe, car la planification est souvent définie d'un point de vue temporel et spatial. C'est l'activité que l'enseignant met en œuvre avant d'être avec ses élèves, et ce, dans une classe vide. Par conséquent, cette exclusion que nous réalisons se justifie par un souci de limiter l'ampleur de notre recherche. Ceci nous amène à parler de l'enseignant en général, spécifiquement de l'enseignant en classe spéciale et de la dynamique de ladite classe.

2.1.1 Le rôle et les fonctions de l'enseignant en classe spéciale

Dans la classe ordinaire, l'enseignant a la responsabilité de faire apprendre et les élèves ont celle de faire tout ce qu'ils peuvent pour apprendre, dit Mary (2003). Rappelons que

---

6 Le lecteur qui veut connaître l'entièreté de ces 26 stratégies peut se référer au livre de Portugais (1995) *Didactique des mathématiques et formations des enseignants*. Éditions P. Lang.

la triade enseignant (E)/élève (E)/savoir (S) forme un tout du système didactique inclus dans le milieu didactique.

Le travail de l'enseignant consiste à recontextualiser les connaissances visées pour les rendre accessibles à l'élève. Dans sa classe, il doit créer un environnement favorable à la prise de sens des situations qu'il propose et donner à ses élèves les moyens de résoudre les problèmes posés, autrement dit, comme le souligne Brousseau (1998, p. 299), à faire l'inverse du mathématicien, dans une certaine mesure.

Cette assertion est appuyée par Touré (2003, p. 42), qui indique que :

> *…l'enseignant représente une variable incontournable dans toute planification pédagogique et didactique en milieu scolaire. Il est lui-même le meilleur des moyens pédagogiques et didactiques dont il dispose.*

Le rôle de l'enseignant est de placer l'élève ou le groupe d'élèves face à une situation potentiellement riche en création d'instruments mathématiques. Une telle pédagogie modifie également de façon importante la relation pédagogique : l'enseignant n'est plus celui par qui passe inévitablement toute compréhension mathématique, l'intercesseur obligatoire entre l'élève et la réalité mathématique. Il est celui qui aide l'élève à acquérir un pouvoir en apprenant à forger, à comprendre et à utiliser des instruments mathématiques. De ce fait, il intervient de multiples manières. Il aide l'élève à se représenter le but et les sous-buts, dans son action, dans les informations à retenir et à conceptualiser, c'est-à-dire à identifier les concepts et les théorèmes en acte qui lui permettent d'avancer (concepts définis plus loin dans la notion de schème).

Ainsi, le rôle de l'enseignant est fondamental dans l'enseignement élémentaire, plus encore qu'aux autres niveaux d'enseignement. On retrouve là des évidences connues depuis longtemps et exprimées dans des aphorismes comme « *une école ne peut valoir plus que les enseignants qui y œuvrent* ».

Néanmoins, qu'en est-il de l'enseignant en classe spéciale, c'est-à-dire de l'orthopédagogue dont le mandat est celui d'un enseignant de classe régulière, mais qui doit également accorder une importance particulière aux activités métacognitives de l'élève, aux conditions requises par la TSDM ? Autrement dit, tout ce qui permettrait à ce dernier d'effectuer une dévolution dans un contrat didactique dans une situation d'apprentissage ou à revenir sur les leçons et les démarches intellectuelles alors que sa classe est d'une hétérogénéité de multiples intelligences.

L'ADOQ (2002) définit l'orthopédagogue (enseignant en classe spéciale fermée ou en dénombrement flottant) comme une personne-ressource qui travaille auprès d'enfants ayant besoin d'une aide particulière. Cette personne est spécialisée dans le domaine des difficultés d'apprentissage et d'adaptation de sujets aux prises avec des difficultés ou des troubles d'apprentissage ou de comportement.

Les tâches de l'orthopédagogue sont concrétisées par différents types d'actes professionnels tels que la prévention, l'évaluation, l'intervention, la collaboration et la consultation. Il intervient en classe, hors classe, individuellement, en sous-groupe, collectivement ou en tutorat.

Dans le cadre de ses fonctions, il est appelé à prévenir, à identifier et à corriger les difficultés d'apprentissage ou de comportement chez un apprenant. De plus, il cherche à éveiller, chez ce dernier, son propre style d'apprentissage afin qu'il actualise ses stratégies cognitives et affectives et sa confiance en lui. Cela implique également qu'il doive réajuster fréquemment ses interventions pédagogiques.

Ses objectifs sont aussi de prévenir le redoublement, en favorisant l'intégration et le maintien de l'enfant dans son milieu scolaire, dans ses actions de concertation avec le personnel enseignant, les élèves qui lui sont confiés, les parents, la direction et les autres professionnels. L'orthopédagogue étant formé à l'observation des élèves, au diagnostic des difficultés et en ce qui favorise l'estime de soi et la motivation scolaire, il est bien placé pour détecter les formes que pourraient prendre les difficultés par rapport aux apprentissages effectués.

La profession d'orthopédagogue se révèle être un métier de « décideur, de bricoleur ». Ce qui rejoint l'assertion de Perrenoud (1994, p. 115) qui, parlant de l'enseignant en général, indique « *…qu'enseigner, c'est notamment bricoler les savoirs pour les rendre* *enseignables, exerçables et évaluables dans le cadre d'une classe, d'une année, d'un horaire, d'un système de communication et de travail* ».

Ceci est d'autant plus vrai puisqu'avec des élèves en difficulté d'apprentissage, l'orthopédagogue est tout le temps en train de « bricoler » des contenus à enseigner. Ce travail de bricolage peut être plus ou moins important selon les degrés de difficulté de la notion, d'abstraction ou d'incompréhension des élèves. En classe spéciale, l'orthopédagogue « adapte » les contenus à enseigner, car les manuels d'enseignement mis à sa disposition ne sont pas adaptés, la plupart du temps, au niveau de compréhension de ses élèves.

Comprenons que la profession d'orthopédagogue relève des sciences de l'action, où il y a et il y aura toujours à improviser, quels que soient les modèles de principes cohérents construits. Il est indéniable que l'expertise d'un orthopédagogue profite d'abord aux élèves en difficulté ou à risque. Cependant, l'intervention de l'enseignant en classe spéciale est spécifique au domaine de l'adaptation scolaire, d'autant plus que l'on connaît la difficulté des élèves en difficulté d'apprentissage à s'engager dans la tâche mathématique et celle de l'enseignant à réaliser la dévolution, comme l'indique Perrin-Glorian (1993). Il est alors essentiel de parler de la dynamique de la classe, car nombre de problèmes et de contraintes y ont été observés dans plusieurs recherches antérieures.

2.1.2 La dynamique des interactions en classe spéciale

En principe, l'enseignant et ses élèves doivent entretenir une véritable collaboration qui ne peut se faire sans le contrat didactique. Cependant, lorsqu'on s'intéresse aux élèves en difficulté d'apprentissage, on est amené à faire intervenir ce qui se passe, ou ne se passe pas, hors de la classe et en classe. Ainsi, si l'enseignant et l'élève ont chacun leur responsabilité dans le contrat didactique qui les lie et si le contrat didactique est la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique, comment faire alors pour intéresser ces élèves à entrer dans le contrat didactique ?

Lemoyne et Haguel (1999) soulignent que réaliser des situations d'enseignement à caractère didactique est fort difficile à atteindre et à maintenir dans la réalité d'une classe incluant des élèves et un enseignant « rebelles », à se comporter en élèves et en enseignant « idéaux ou normés » par les théories didactiques, ou, comme le rapporte Mercier (1995a, p. 163), ne partageant pas l'intention didactique ou encore ne rencontrant pas certaines des intentions didactiques de l'enseignant.

Mary et Schmidt (2003), citant Lemoyne, relèvent qu'avec les élèves en classe spéciale, les rencontres didactiques sont difficiles et souvent ratées, alors qu'elles devraient susciter le désir d'apprendre. Également, que les rencontres des élèves s'avèrent difficiles avec l'enseignant qui veut engager un dialogue didactique. Les auteurs mentionnent aussi les rencontres où l'enseignant est en difficulté d'enseignement parce que les moyens qu'il utilise et qu'il pensait pertinents s'avèrent inefficaces à produire des savoirs institutionnels reconnus.

Ces difficultés à s'engager dans la tâche mathématique et celle de l'enseignant à réaliser la dévolution avaient d'ailleurs été relevées par Perrin-Glorian (1997) qui rapporte que :

> *...les enseignants, pour maintenir la relation didactique notamment dans les classes spéciales sont pris dans un ensemble de contradictions et de contraintes : la nécessité d'avancer dans le programme et d'éviter la lassitude des élèves, la nécessité d'homogénéiser la classe, la nécessité d'évaluer, la nécessité d'assurer à tous un minimum de réussite à court terme. Ils sont alors amenés à simplifier les situations, à éviter les problèmes complexes, à se focaliser sur ce qui leur paraît essentiel...*

Certains travaux, également consacrés aux élèves en difficulté d'apprentissage, ont montré les difficultés pouvant être rencontrées dans un enseignement en mathématique en classe spéciale.

À l'exemple de Conne, cité par Mary et Schmidt (2003), qui se demande si on peut parler d'une didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé, car il note la difficulté de garder le contrôle sur les variables didactiques prises lors de la conception des situations dans les classes spécialisées. En effet, Conne (1999, p. 41) dans une étude précédente, affirmait que :

> *... la simple interaction de l'enseignant avec le milieu d'une situation d'enseignement représente une activité mathématique sous-jacente à ses pratiques... le travail du maître englobe un véritable suivi de l'interaction*

> *de l'élève avec le milieu, donc un suivi de l'élève et tout autant un suivi du milieu.*

Il faut comprendre que les attentes et les pratiques en classe spéciale sont souvent différentes de celles prônées par les didacticiens et les chercheurs en didactique des mathématiques. Mercier (1995a) et Portugais (1995) soulignent les difficultés qu'ont plusieurs enseignants qui prolongent les préalables ou effectuent un dressage des gestes afin de les rendre visibles et producteurs de réponses attendues.

Ces difficultés peuvent conduire à un nombre important d'ostensifs (gestes, discours…), soulignent Ratsimba-Rajohn (1977), Fregona (1995) et Lemoyne et Haguel (1999), qui ont repéré la persistance de ces pratiques utilisées par les enseignants. Comportements peut-être non conscients, quand ils ont à traiter des erreurs ou à prendre des décisions quand un conflit éclate à propos du savoir.

Ces phénomènes d'enseignement peuvent s'expliquer par un désir d'aider et de faire comprendre. Ils peuvent être des comportements non conscients des enseignants, mais aussi dénoter un certain sentiment d'impuissance chez ces derniers, note Mary (2003). L'auteur parle même du contrôle des variables dans une situation expérimentale sur le rôle de l'enseignant qui imposent des contraintes très fortes et qui ne sont pas toujours réalisables quand on travaille dans une classe spéciale.

Ces constats nous ramènent au problème de la centration des enseignants sur les réponses de leurs élèves ou aux erreurs dans leurs productions. Nous pensons tout de même que dans la mesure où ils leur donnent des situations ayant du sens et qu'ils s'arrêtent à leurs réponses pour comprendre leurs représentations à partir de leurs tâches, qu'ils pourront les aider efficacement. Il était essentiel d'expliciter le rôle de l'enseignant, car rappelons qu'il est aussi important que l'élève et le savoir dans le système didactique, même si notre intention d'analyse est essentiellement axée sur les représentations des élèves.

Nous arrivons maintenant au cadre qui nous permet de comprendre à la fois les situations qui donnent du sens aux concepts et aux invariants sur les grandeurs en mesure qui permettent d'analyser les productions des élèves du point de vue mathématique.

2.1.3 Le champ conceptuel, outil d'analyse de différents savoirs

Plusieurs champs conceptuels en didactique des mathématiques ont été étudiés. Par exemple, ceux des relations nombre-espace, de la mesure, de l'algèbre et de la géométrie ou d'autres champs conceptuels comme les structures additives et multiplicatives. Ces derniers ne sont pas spécifiques aux mathématiques, mais d'après Brun (1996, p. 14) :

> *…du fait qu'elle offre un cadre pour l'apprentissage, elle intéresse alors la didactique, car elle comble un vide en proposant une véritable théorie de la conceptualisation et des apprentissages complexes. De plus, la référence aux contenus de savoirs mathématiques y est une exigence permanente.*

Dans le cadre de cette recherche, nous portons une attention particulière aux représentations des élèves à partir de situations problèmes sur des grandeurs en mesure grâce à ces champs conceptuels. Pour les analyser, nous nous servons de l'arithmétique et de ses structures additives pour distinguer les catégories de problèmes du champ conceptuel des structures additives de Vergnaud (1994, p. 71).

Il faut savoir qu'avec la théorie des champs conceptuels, on aborde le versant cognitiviste de la didactique des mathématiques et l'on s'intéresse plus particulièrement au sous-système élève/savoir du système didactique (Vergnaud, 1991). Pour l'auteur, la théorie des champs conceptuels s'intéresse à la conceptualisation du réel chez le sujet. Cette conceptualisation désigne le passage de l'action à sa représentation cognitive sur un plan supérieur (schèmes, concepts et théorèmes, représentations langagières et symboliques) et ce, par une classification des problèmes. En fait, la notion de champ conceptuel a été élaborée pour fournir un outil d'analyse adapté à la complexité du réseau de relations du nombre liant les différents savoirs mathématiques.

2.1.4 Les relations dans la théorie du champ conceptuel

La notion de relation est sans doute, selon Vergnaud (1991, p. 10), la plus générale et la plus primitive, car elle recouvre à la fois les activités les plus simples des petits et les plus élaborées de toutes les autres notions mathématiques. L'auteur fait référence aux assimilations reproductrices comme les répétitions de mêmes activités ou récognitives dans la reconnaissance des objets, en leur attribuant une signification chez des enfants ou adolescents ou sous la contrainte des habitudes chez les adultes.

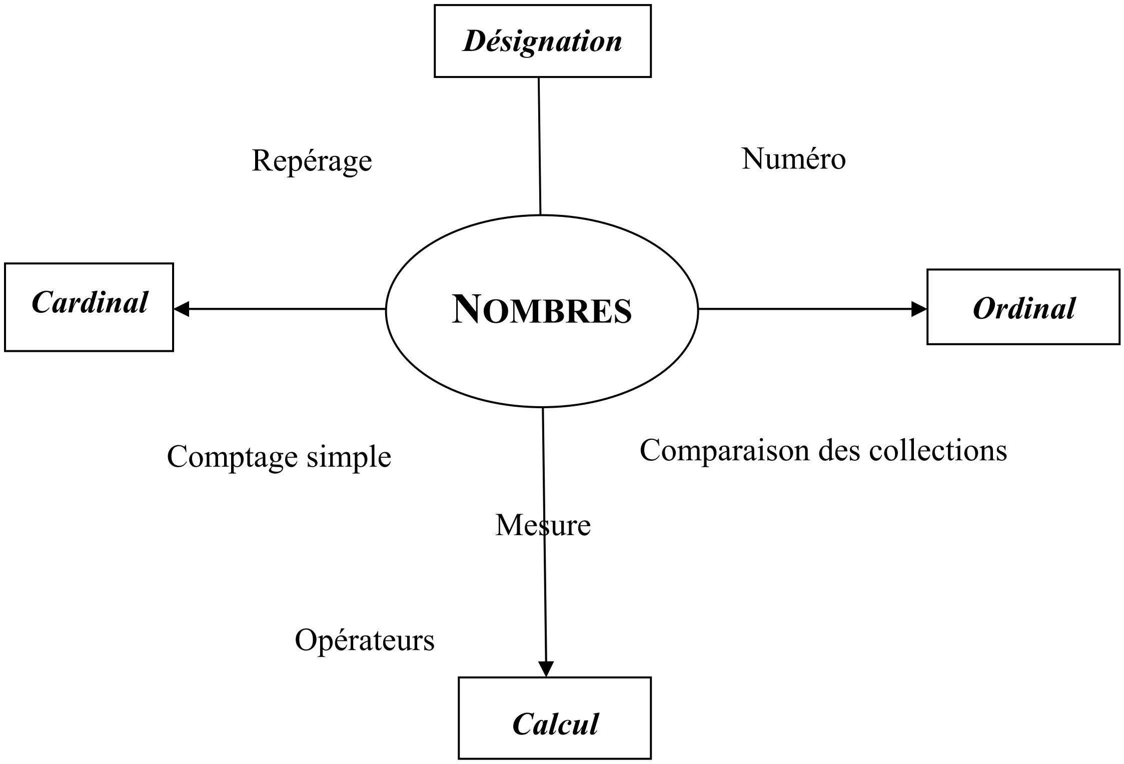
La relation entre situation et notion n'est pas simple, car diverses situations peuvent avoir une même notion et différentes notions une même situation. Autrement dit, deux situations sont dans la même classe si elles appellent le même traitement. Par exemple, une petite collection d'objets à dénombrer appelle à compter les objets un à un. Pour mieux l'expliquer, Vergnaud (1991, p. 19) indique que :

> *... les relations sont parfois comme de simples constatations qu'on ne peut faire sur la réalité. Elles ne sont souvent pas directement constatables et doivent être inférées ou acceptées.*

Les relations sont fondamentales, car elles jouent un grand rôle dans le développement des activités intellectuelles de l'enfant, non seulement dans l'activité classificatoire, mais aussi dans le développement des notions de quantité, de mesure et de nombre. L'auteur indique que l'enfant, comme tout autre sujet, règle sa conduite sur les relations qu'il appréhende et sur **le calcul relationnel** qu'il fait, ce qui l'aide à clarifier et à expliciter la notion trop vague de raisonnement. On ne peut donc pas minimiser le fait que les enfants puissent interpréter les termes relationnels de manière inconstante dans leurs verbalisations ou dans une épreuve.

2.1.5 Qu'entend-on par relation dans le calcul relationnel ?

Dans la genèse du nombre, dont nous parlons plus loin, plusieurs auteurs soutiennent qu'elle est la synthèse de la classe et de la relation asymétrique, c'est-à-dire des structures de classification et d'ordre; les aspects cardinal et ordinal qui sont en relation l'un avec l'autre. Par exemple, on peut considérer le nombre entier (grandeur discrète) comme une grandeur physique, puisque sa conception relève de la même démarche. Il est généré par la comparaison des ensembles et des collections à cause, d'une part, pour la partition et l'ordre réalisé sur les objets, d'autre part pour l'addition et l'itération. Le schéma suivant, emprunté à Boule (1989, p. 5), illustre notre explication :



Le *dénombrement* est le concept par excellence pour illustrer le calcul relationnel, parce qu'il montre que non seulement le corps et le geste sont impliqués dans la formation de l'activité rationnelle (au niveau du comptage), mais que l'organisation de l'activité repose sur des concepts mathématiques importants : le principe de bijection et de cardinalité.

Par *cardinalité,* on entend l'information donnée sur une collection d'objets ou un nombre qui indique la quantité, comme 1, 2 ou 5. Vergnaud (1991, p. 68) précise que le descripteur quantitatif est celui qui permet d'associer aux objets des nombres qui sont leur mesure.

Quant au nombre *ordinal*, il exprime le rang. Il est pris comme un adjectif numéral ou comme nombre lorsqu'il exprime le rang ou la place occupée par un ou des objets d'un ensemble quand ces derniers sont rangés dans un certain ordre. Cependant, d'après Vergnaud (*ibid*, p. 66), les principes de cardinalité et d'ordinalité ne sont pas les seuls principes associés au dénombrement, ils n'en sont que la base la plus essentielle.

Ainsi, les relations entre nombres s'appuient sur les relations entre les objets et l'activité de comparaison. Comme les notions *d'équivalence* et *d'ordre* sont nécessaires au développement de la notion des grandeurs en mesure, elles ne peuvent être comprises facilement par les enfants si elles ne s'appuient pas fondamentalement sur l'analyse des relations entre ensembles en ce qui concerne les structures additives.

Le calcul relationnel est alors fondé aussi bien sur les propriétés des relations que sur les liens qu'ont les relations entre elles, c'est-à-dire sur les relations entre relations. De ce fait, par exemple, le nombre, loin d'être une notion élémentaire, s'appuie sur d'autres notions, celles d'application, de correspondance biunivoque, de relation d'équivalence, de relation d'ordre, comme le mentionne Vergnaud (1991, p. 81). Par conséquent, bien qu'il appert que l'enfant comprend la signification des mots (*plus*, *moins*, *même*, *pareil*), qui sont essentiellement des termes relationnels, il se trouve que les significations attachées à ces expressions sont interchangeables ou locales, ils peuvent varier selon les situations, selon Vilette (1996, p. 51). Par exemple, le terme *plus* peut très bien référer au nombre d'objets (plus de jetons que...) ou à la longueur d'un objet (plus long que...) et chez l'enfant, elle est indissociable de la notion des grandeurs et de leur mesure.

Dans un autre ordre d'idées, selon Hervé (2005, p. 53), Vergnaud distingue plusieurs classes de problèmes :

> *le* ***calcul numérique,*** *qui renvoie aux opérations arithmétiques et* ***le calcul relationnel,*** *qui fait référence aux opérations de pensée nécessaire pour les relations qu'entretiennent les éléments de la situation problème.*

D'où la nécessité de l'utilisation de la classification des problèmes élaborée par Vergnaud, qui avait le souci de rendre compte du processus de conceptualisation progressive des structures, qu'elles soient additives ou multiplicatives, mais également de faire en sorte que les difficultés rencontrées par les élèves au cours d'un apprentissage soient classées selon des critères acceptés aussi bien par le mathématicien que par le psychologue.

Dans le cadre de notre recherche, nous utilisons le nombre pour l'aspect de son écriture comme support à l'analyse des situations problèmes pour exprimer nos résultats.

2.1.6 Le champ conceptuel des structures additives

Les situations d'un même champ conceptuel sont nombreuses. La classification que Vergnaud (1991, p. 133-139) propose est à la fois fonction du développement des conduites pour traiter ces situations et des structures mathématiques sous-jacentes à celles-ci. Ce point de vue permet de voir la forte imbrication entre concepts et situations. Toutes les situations observées dans les classes ne sont pas semblables. Les structures additives et soustractives appartiennent à la même famille et leurs difficultés sont davantage liées aux relations à établir entre les données qu'à l'opération impliquée dans leur résolution.

Le champ conceptuel des structures additives comprend l'ensemble des situations qui demande une addition, une soustraction ou une combinaison des deux, car la soustraction et l'addition sont considérées comme des opérations mathématiques parentes l'une de l'autre. Y sont également rattachés l'ensemble des concepts, tels que ceux de cardinalité, de mesures, de nombres naturels et relatifs, de transformation temporelle, de comparaison de quantités et aussi les propriétés associées à ces concepts.

Ces distinctions, allègue l'auteur (*ibid.*) ne sont pas faites habituellement dans l'enseignement élémentaire, ni même dans le second degré. Elles sont pourtant importantes, car la difficulté des cas est très différente. On peut formuler trois questions, selon que l'on recherche X, Y ou Z. Dans un cas, la transformation sera additive, recherche de l'état final Z, dans les autres, elle sera soustractive.

Pour pouvoir comprendre ces relations de base et leurs structures, l'auteur (*ibid.*) indique que les relations additives sont des relations ternaires qui peuvent s'enchaîner de diverses manières et donner une grande variété de structures additives. Nous retiendrons cependant les six fondamentales :

1) deux mesures se composent pour donner une mesure.
2) une transformation opère sur une mesure pour donner une mesure.
3) une relation relie deux mesures.
4) deux transformations se composent pour donner une transformation.
5) une transformation opère sur un état relatif (une relation) pour donner un état relatif;

6) deux états relatifs (relations) se composent pour donner un état relatif.

Comme il y a des relations entre objets dans l'espace, entre quantités physiques et que l'enfant n'est pas toujours capable de faire ces constatations, celles-ci supposent une activité matérielle et intellectuelle qui peut être au-dessus de ses possibilités (Vergnaud, 1991, p. 13-19). Ainsi en mathématiques, comparer, classer et transformer sont des activités exercées très tôt par les enfants. Ces derniers règlent leurs conduites sur les relations qu'ils appréhendent et sur le calcul relationnel qu'ils font (*ibid*., p. 22). Ce sont essentiellement ces relations que nous nous attendons observer dans les conduites des élèves de notre expérimentation.

Ces conduites constituent les fondements de la quantification et de la conservation. Elles mettent en jeu des processus qui se développent progressivement au cours de l'enfance. Le processus de comparaison (appariement, évaluation globale, *subitizing* ou aperception immédiate, comptage…) émane des processus de transformation (ajouts et retraits). Cette démarche de comparaison est la base même du processus de construction mentale dans l'apprentissage de la mesure des grandeurs qui aboutit à la formation d'une grandeur considérée. La structuration des connaissances impliquées dans les activités comparatives dépend de leur connexion avec les structures additives et soustractives.

Il faut toutefois souligner que chez l'enfant, la construction du nombre ne se développe pas de façon linéaire. Elle se fait en îlots qui, en s'élargissant peu à peu, se raccordent et permettent des parcours nouveaux et de plus en plus longs. Mais ils ne s'élargissent pas non plus au hasard ou en désordre. Le nombre n'existe pas sans ses propriétés d'addition et sans son schème du dénombrement. La structure additive du nombre, identique à celle de la longueur dans les grandeurs en mesure, se retrouve également dans d'autres grandeurs. Cette analogie de structure est à la base de la mesure.

C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'on peut observer des conduites réussies ou échouées et le concept de **schème** est intéressant pour l'une ou l'autre.

L'objet de notre recherche, les grandeurs en mesure constituant un trait d'union entre les autres disciplines en mathématique, accroît l'efficacité de la conceptualisation grâce à cet apport mathématique, car elles sont liées au développement de la plupart des domaines mathématiques comme l'analyse, l'algèbre et la géométrie. Ces grandeurs en mesure ne peuvent être analysées sans les schèmes ou les conduites et ce, à partir de situations d'apprentissage.

2.1.7 Définition du concept de schème

D'après Hervé (2005, p. 81), le fonctionnement de l'intelligence est motivé par la recherche d'un équilibre visant à satisfaire le sujet dans ses rapports à l'environnement. Le schème d'une action n'est pas perceptible et on ne prend conscience de ses implications qu'en répétant l'action et en comparant ses résultats successifs. Un schème permet l'adaptation d'une activité, donc d'une conduite. Il existe plusieurs sortes de schèmes :

- ceux qu'on appelle schèmes réflexes innés et opérationnels comme le réflexe du nourrisson d'agripper le doigt qu'on lui donne;
- et ceux qu'on appelle schèmes sensorimoteurs, qui ont trait aux organisations sensorimotrices comme prendre, tirer, pousser chez le jeune enfant qui, lorsque ce dernier atteint le stade des opérations concrètes, devient schèmes opératoires (tels que classer, dénombrer, sérier ou mesurer).

Ce sont les schèmes réflexes qui, en se perfectionnant, donnent naissance aux schèmes sensorimoteurs. Nous nous permettons de les expliquer abondamment, car ils sont le noyau de notre recherche.

Le schème est non seulement une structure, mais aussi un organe réalisant des transformations matérielles et logico-mathématiques finalisées sur des objets. Pour l'illustrer et pour être plus précis, Vergnaud (1996, p. 199) explique :

> *… qu'il est une organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données. C'est un concept général, qui concerne à la fois l'organisation des gestes de la vie quotidienne et des gestes professionnels, l'organisation des formes langagières et énonciatives du dialogue (lexique, syntaxe, ton, intention, présupposée…) ou celle des*

> *opérations de pensée permettant de traiter des problèmes scientifiques ou techniques d'une certaine classe. L'interaction sociale est aussi concernée par des schèmes.*

Ce sont les schèmes qui, évoqués chez le sujet par une situation ou par un signifiant, construisent le sens de cette situation pour cet individu.

2.1.8 La constitution du schème

Le concept de schème est, toujours selon Vergnaud (1996, p. 66), constitué de quatre éléments :

> 1) ***le but et les anticipations*** *qu'on appelle aussi le besoin, le désir, la motivation…;*
> 2) ***les règles d'action et d'enchaînement conditionnel des opérations****, dont la fonction propre est de générer une conduite observable et qui engendre au fur et à mesure le décours temporel de l'activité;*
> 3) ***les invariants opératoires*** *qui permettent au sujet de sélectionner l'information pertinente et de la traiter comme les concepts en acte (collection, cardinal, union, somme…) et les théorèmes en acte (propositions tenues pour vraies sur le réel);*
> 4) ***les inférences****, dont l'effectuation est fonction des caractéristiques particulières de situation rencontrée.*

Il mentionne par ailleurs que :

> *… sans l'identification de ces quatre composantes du schème, on ne peut pas comprendre pleinement la structure de l'activité et la double caractéristique d'être à la fois systématique et contingente. Systématique, parce que dans beaucoup de situations, l'activité est assujettie à des règles univoques; contingente parce que les règles engendrent des activités et des conduites différentes selon les cas qui se présentent.*

Les schèmes reposent sur différents principes qui n'ont pas besoin d'être formulés pour être utilisés :

- les concepts de bijection et de cardinalité par exemple, sont des concepts en acte. Le concept de bijection est lié à la mise en correspondance terme à terme qui est un outil de comparaison;
- ou des concepts d'abstraction et d'ordre indifférent qu'on appelle des théorèmes en acte. Ce dernier est une règle d'action utilisée par les élèves.

Ils sont présents dans toutes les activités et indispensables pour la modélisation et l'intégration des connaissances. Par exemple, les ajustements progressifs, le contrôle des sens… Toutefois, chez l'enfant, tous les théorèmes en acte ne sont pas implicites, mais beaucoup le sont, poursuit l'auteur qui fait remarquer:

> *... qu'une bonne partie des connaissances mathématiques des enfants est faite de concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte, découvert ou développé par eux dans l'action en situation, sans l'aide ou avec l'aide d'autrui, et restant pour une part peu explicites et peu explicitables.*

Pour Touré (2003, p. 64), la première entrée d'un champ conceptuel est celle des situations; la deuxième étant celle des concepts et théorèmes. À ce stade, il note que :

> *…une situation doit être pris au sens large de situation problème et non de situation didactique qui dans laquelle se manifeste une volonté d'enseigner et qui peut avoir au moins une situation problème et un contrat didactique.*

Il poursuit en rappelant le concept de schème est central pour tous les registres d'une activité :

> *... l'idée de base de la question du sens chez Vergnaud (1991) est que les concepts mathématiques sont d'une grande diversité et que leur développement fait corps avec celui de concepts non strictement mathématiques. De plus, ces ensembles évolutifs de concepts forment des systèmes à tout moment de la construction des objets mathématiques et de leur sens par l'élève.*

Rappelons, une fois de plus, que la notion de situation dans ce cadre se veut plus étroite que ce qu'elle signifie chez Brousseau (1998), car elle ne désigne que les situations problèmes ou les tâches présentés aux élèves. Selon Portugais (1995, p. 48) :

> *... les classes de situations ne vont pas mobiliser les mêmes organisations de conduites chez les élèves. Pour le premier type de situations, on va observer pour une même classe de situations, des conduites largement automatisées, organisées par un schème unique; tandis que pour le deuxième type, on va observer l'amorçage successif de plusieurs schèmes, qui peuvent entrer en compétition et qui, pour aboutir à la solution recherchée, doivent être accommodés, décombinés et recombinés; ce processus s'accompagne de découvertes.*

Une situation comprend donc des questions, des méthodes, des heuristiques et des informations qui sont des éléments d'une organisation didactique plus large et qui amènent à la construction du sens et de la justification ontologique des objets mathématiques. Ainsi, pour pouvoir s'engager dans une résolution de problème, l'élève doit se construire une représentation de la situation et du but à atteindre. La représentation joue un rôle fondamental dans les processus de pensée et dans l'organisation des conduites supérieures (Portugais, 1995, p. 47). En conséquence, la notion de schème permet de rendre compte de l'erreur au niveau des organisations cognitives (ibid., 1995, p. 51).

Retenons que les schèmes ne sont pas seulement un « produit » ou une « production », ils correspondent d'abord à un « processus » qui découle d'une activité d'élaboration. La conception ou la représentation, parfois employée de façon synonyme, qui est un regroupement de connaissances liées par les situations où ils interviennent et où ils vont induire certaines conduites pour une classe de situations données. La clarification terminologique et conceptuelle à laquelle nous consacrons cette section est utile; d'autant plus qu'elle explique et précise le mot-clé dont nous nous servons tout au long de travail, c'est-à-dire *les* ***représentations***.

2.1.9 Les connaissances, les conceptions et les représentations

L'idée de se pencher sur les mécanismes permettant à l'homme d'approcher une certaine réalité et de se la représenter semble ancienne. Locke, Leibnitz, Kant, Condillac et Durkheim, pour ne citer que ceux-là, ont disserté contradictoirement sur les origines de « l'entendement humain ». De même, de nombreux pédagogues, à différentes périodes, ont pris en considération l'élève en qualifiant son processus cognitif comme une connaissance, une représentation ou une conception.

Giordan et De Vecchi (1987) notent que leurs préoccupations ne correspondaient pas à celles des sciences expérimentales. Ces dernières se préoccupaient des erreurs des élèves et montraient leur importance dans le « tâtonnement expérimental », mais demeuraient franchement hostiles à toute étude un peu systématique puisqu'elles ne se donnaient pas les moyens de pouvoir les dépasser. Ainsi, reconnaître l'activité mathématique des élèves est demeuré une préoccupation pour les didacticiens.

2.1.9.1 La connaissance

La connaissance est encore largement subjective et elle n'est pleinement opératoire et transférable, diront certains que si, devenue consciente, elle est mobilisable dans des situations différentes de celles qui ont servi à lui donner naissance. Mais pour devenir transférables à de nouvelles situations d'utilisation, les connaissances doivent être, à un certain moment qui n'est pas toujours facile à identifier, reconnues, nommées, décontextualisées, institutionnalisées et finalement acquérir le statut de savoir social.

2.1.9.2 La conception

Le terme de « conception » apparaît comme un outil qui aide à « ... différencier le savoir que l'enseignant veut transmettre et les connaissances effectivement construites par l'élève » comme l'indique Artigue (1991, p. 265), plus exactement comme un outil pour la construction d'un concept permettant la modélisation de l'élève en tant qu'agent apprenant.

Le concept « conception » met surtout en évidence l'idée que cet ensemble traduit une structure mentale sous-jacente responsable de ces manifestations. Cette élaboration s'effectue, bien sûr, à partir des informations que l'apprenant reçoit par l'intermédiaire de ses sens, mais aussi des relations qu'il entretient avec autrui, les individus ou les groupes et, dans le cas précis de notre recherche, les pairs et l'enseignant.

Giordan et Martinand (1988) suggèrent aux didacticiens des sciences expérimentales d'utiliser désormais le terme « conception ». Toutefois, nous comprenons que ce terme est utilisé en didactique des mathématiques selon au moins deux acceptions. Dans sa thèse, Perrin-Glorian (1992) rappelle les deux aspects de la conception :

- un aspect lié au contenu et aux situations, aux problèmes qui le mettent en scène;
- et l'autre aspect qui se situe plutôt au niveau des élèves et s'intéresse aux conceptions justes ou fausses qu'un élève est susceptible de mettre en œuvre dans une situation donnée pour résoudre un problème.

La conception, telle que nous l'avons définie, n'est donc pas le produit, mais d'abord le processus d'une activité de construction mentale du réel. Pourtant, les sciences cognitives, dont l'essor est très récent, indique Clément (1994), se réfèrent beaucoup au concept de « représentations ». Il cite Migne (1970), Astolfi (1984), De Vecchi et Giordan (1988) qui ont également travaillé sur les **représentations** des élèves.

2.1.9.3 La représentation

Aux dires de Giordan et de Vecchi (1987), la notion de représentation a débouché sur des pédagogies de la « réfutation », dépassant ainsi la pensée de Bachelard qui ne prônait qu'un enseignement de la « rectification ». Aussi ils traitent d'« ambigu » le terme de « représentation », connoté différemment selon les écoles qui l'utilisent, tant en psychologie, en philologie qu'en linguistique.

À ce sujet, ils affirment avoir relevé 28 qualificatifs allant de « prereprésentations rémanentes » à « pré requis » et 27 synonymes passant de « déjà-là » à « pupilles paradigmes », sans que ceux-ci apportent une précision supplémentaire. Par ailleurs, les psychologues cogniticiens, tout en reconnaissant que la notion de « représentations » est centrale pour eux, avouent qu'elle n'a pas le même sens pour tous. Pour Piaget et Bachelard, par exemple, si les représentations sont généralement ignorées, en réalité elles ne sont pas évacuées, mais seulement refoulées.

Pourtant, les représentations, au sens strict, sont soit propositionnelles (langagières), soit imagées (code imagé), soit liées à l'action. Elles constituent ce que certains psychologues appellent à présent « mémoire de travail » ou parfois « mémoire opérationnelle ».

Face à toutes ces définitions et malgré les assertions de Giordan et de Vecchi (1987) sur la polysémie que le terme « représentation » véhicule, nous l'utilisons dans notre recherche pour plusieurs raisons :

- d'abord de clarté, parce qu'il met l'accent sur le fait qu'il s'agit d'un ensemble d'idées coordonnées et d'images cohérentes;
- deuxièmement, parce que les représentations peuvent être plurielles, car s'établissent entre elles des correspondances linguistiques ou iconiques;
- troisièmement, comme l'indique Vergnaud (1991, p. 9), « *...les moyens utilisés par l'enfant, les chemins qu'il suit pour résoudre un problème ou atteindre l'objectif*

demandé dans une tâche scolaire donnée, sont profondément enracinés dans la représentation qu'il se fait de la situation. Selon qu'il perçoit ou non les relations, les transformations et les notions en jeu, avec toutes leurs propriétés ou seulement avec une partie d'entre elles, ou avec une vision fausse de ces propriétés le cas échéant, l'enfant utilise telle procédure ou telle autre, et éventuellement se désintéresse de la tâche à laquelle il est confronté ».

Nous sommes en accord avec ce point de vue qui nous conforte dans le choix de ce concept;

- et pour finir, toujours d'après Vergnaud, parce que la notion de procédure comme la notion de représentation ne se réduit pas à la notion de symbole ou de signe, car elle couvre aussi la notion du concept de l'étude du nombre.

Dans notre cas, une **représentation** sera une modélisation cognitive rendant compte des régularités des conduites d'un élève relativement à un cadre. Ainsi se trouvent explicités les concepts dont nous faisons usage tout au long de notre recherche.

2.1.9.4 Limites des théories choisies

Nous rappelons que notre travail veut mettre en lumière l'étude des grandeurs en mesure auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage par le biais de la TCC et à la TSDM constituante du système didactique. Nous parlons des limites des théories sur lesquelles repose notre travail.

Tout d'abord, il était clairement apparu qu'il fallait limiter la portée de cette recherche qui se veut avant tout exploratoire et descriptive. Il importe de souligner que nous ne prétendons pas, au terme de cette recherche, être en mesure d'expliquer en totalité les difficultés qu'ont les élèves de classe spéciale dans les grandeurs en mesure, de dresser un portrait exhaustif et complet de ces difficultés et d'avoir expliqué toutes les stratégies des enseignants. Néanmoins, nous croyons être en mesure de décrire rigoureusement une réalité qui n'est pas beaucoup travaillée à ce jour et, partant de là, nourrir la réflexion sur cette problématique importante.

Tous les chercheurs ayant utilisé la TCC sont d'accord sur le fait qu'elle offre une catégorisation des situations fondée sur le développement des conceptualisations. Elle est une ressource considérable pour la construction d'ingénieries didactiques. Toutefois, lors de nos analyses, nous avons réalisé, à l'utilisation de cette théorie, qu'un concept ne doit pas être dissocié des caractéristiques des situations dans lesquelles il a été étudié. D'ailleurs, Vergnaud (1991) avait abondamment démontré que la difficulté des problèmes additifs qu'on observe dans les conduites des enfants ne réside pas principalement dans la nature de l'opération requise pour les résoudre et qu'il fallait chercher ailleurs les explications.

Par ailleurs, nous avions expérimenté ce que Cange et Favre (2003) ont exprimé comme constat dans leurs travaux, à savoir :

- la difficulté à appliquer l'analyse d'erreurs telles que préconisées par la classification des problèmes sur des productions d'élèves de classe spéciale par exemple;
- et que ces erreurs créent des spirales dont il est difficile de s'extirper générant elles-mêmes leurs propres erreurs.

Pourtant, nous avions estimé que s'écarter des propriétés et des relations qu'entretiennent les structures additives était tout à fait impossible lorsqu'on veut étudier des grandeurs en mesure.

En ce qui concerne les limites de la TSDM, cette théorie nous a amenée à travailler dans des directions relativement peu explorées jusqu'à ce jour en classe spéciale, notamment les grandeurs en mesure. La théorie, n'étant pas rattachée à un domaine disciplinaire et à un niveau scolaire particulier, a cependant démontré que son actualisation dans d'autres domaines disciplinaires ne va pas de soi, plus spécifiquement pour les classes spéciales, car, elle n'avait pas été originellement créée pour ces classes.

Nous présentons au chapitre suivant l'analyse *a priori* qui expose le thème à l'étude et qui fait un lien avec notre hypothèse de recherche.

CHAPITRE III

ANALYSE *A PRIORI*

« Si vous pouvez mesurer ce dont vous parlez, et l'exprimer par un nombre, alors vous connaissez quelque chose de votre sujet. Si vous ne le pouvez, votre connaissance est d'une bien pauvre espèce et bien incertaine ».

Kelvin (Silvanus P. Thompson)

À cause de la richesse conceptuelle que possèdent les grandeurs en mesure, elles génèrent des difficultés pour certains élèves, plus spécifiquement ceux des classes spéciales, objet de notre recherche. Nous recensons de façon non exhaustive l'évolution des grandeurs en mesure et les difficultés que rencontrent généralement les élèves dans l'apprentissage des grandeurs en mesure en mathématique.

Le premier objectif en mathématique et en géométrie/mesure à l'école primaire est que les élèves apprennent à saisir les situations spatiales par le biais des grandeurs physiques en mesure. Cette capacité est importante par elle-même puisque, d'une part, elle est source d'intuition dans toutes les autres notions en mathématiques et, d'autre part, parce que le travail sur les grandeurs en mesure donnent du sens aux nombres par les différentes fonctions qu'ils jouent dans la résolution des problèmes d'arithmétique : rapport, mesure, opérateur.

Les grandeurs en mesure sont partout, dans les sciences comme dans la vie. C'est un fait évident mais essentiel qui devrait toujours inciter mathématiciens et enseignants de mathématiques à plus de disponibilité envers cette discipline. À ce sujet, Dubois *et al*. (2001, p. 95) allèguent que :

> *... la mesure des grandeurs est, après le dénombrement, une des premières préoccupations des mathématiciens et de ce fait elle est liée au développement de la plupart des domaines des mathématiques et plus particulièrement : l'analyse, l'algèbre et la géométrie.*

Ce chapitre poursuit un double objectif : décrire les recherches sur les grandeurs physiques en mesure et faire voir leur enrichissement par la possibilité d'en exprimer leur mesure à l'aide des nombres.

3.1 L'ÉVOLUTION DES GRANDEURS EN MESURE DANS L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Selon Rouche (1992), cité par Ermel (2001, p. 294) : « ... *c'est d'abord du projet et de la difficulté de mesurer les grandeurs, les nombres (autres que naturels) sont nés à travers une longue histoire* ».

L'histoire des grandeurs en mesure semble avoir commencé par le comptage. D'anciens documents laissent supposer que leur origine serait essentiellement liée à des problèmes pratiques : ils se rapportent avant tout à la mesure de champs, de monuments. Chez la majeure partie des civilisations, l'activité mathématique se caractérise essentiellement par la comparaison des grandeurs, telles les aires, les longueurs, les volumes, les poids. Les plus anciens textes mathématiques parlant des grandeurs en mesure qui ont été retrouvés sont des tablettes babyloniennes entre 1800 et 1500 av. J.-C. et un papyrus vers 1650 av. J.-C. Par exemple, en Inde, le VEDA (recueils de prières en Sanscrit, 1500 ans avant notre ère) contient des éléments permettant la construction de monuments religieux.

Mesurer aussi était au cœur de toute activité commerciale. Le Grec Hérodote (486-420 avant J.C.) fait remonter l'origine de la mesure égyptienne à la nécessité, après chaque crue du Nil, de mesurer les terres arables. Comme la mesure babylonienne, la mesure égyptienne est pratique. Il s'agissait de redistribuer équitablement les champs à leurs propriétaires. Le pesage est d'ailleurs évoqué dans le Livre de Salomon (Proverbes, 11,1) : « *La balance fausse est en horreur à l'Éternel*, *mais le poids juste lui est agréable* ».

Les raisons provenant de la comparaison des surfaces ou des volumes peuvent s'obtenir comme déduites de la comparaison des seules longueurs. Les grandeurs qui ont même raison sont dites proportionnelles. Cette égalité des raisons, dont la transitivité est explicitement démontrée, permet aussi de parler de longueurs proportionnelles (Encyclopédie Universalis, 1998). Autrement dit, le modèle construit à partir des longueurs est universel et peut servir pour la comparaison (par raisons) des poids, des capacités, du temps, etc.

Le premier texte mathématique majeur qui nous soit parvenu est le traité *Éléments* (420-380 av. J.C.) composé de rapports, de raisons et qui contient en particulier les rapports d'entiers, les nombres rationnels. Cependant, cet ensemble n'était pas muni de structures sur les entiers (Encyclopédie Universalis, 1998).

En Asie, les sources des mathématiques sont peu nombreuses. Cependant, quelques mathématiciens se démarquent comme Liu Hui (3^{e} siècle de notre ère), qui trouve une approximation égale à 3,146 (circonférence du cercle). Il détermine exactement le volume de la pyramide et le théorème de Pythagore.

Dès le début du 4^{e} siècle, les Arabes traduisent les principaux documents scientifiques grecs et c'est avec enthousiasme qu'ils assimilent les connaissances du passé, les critiquent et y ajoutent leurs propres contributions dans de nombreux domaines. On peut citer, par exemple, les calculs d'aires et de volumes avec les frères Banu Musa ou la trigonométrie avec Al Battani.

En Europe, la civilisation grecque va jouer un rôle important dans le développement des sciences occidentales. Vers le 6^{e} siècle av. J.C., en Grèce, on assiste à la naissance d'une science déductive qui n'est plus simplement une liste d'observations et de résultats comme dans les civilisations passées. Par exemple, les notions de démonstrations, de théorèmes, de définitions ou d'axiomes, qui n'ont malheureusement pas fait l'objet de traité théorique. Tout repose sur quelques témoignages d'auteurs tardifs.

La longue histoire des mathématiques grecques s'arrête au 6^{e} siècle, avec l'expansion de l'Empire romain, et il faudra attendre aux environs du 17^{e} siècle pour voir les mathématiques redevenir un sujet d'étude important et créateur.

Le développement des échanges commerciaux avec les villes du Moyen-Orient accélère l'introduction des sciences en Occident dès le début du 15^{e} siècle. Partant de l'Italie, ce renouveau intellectuel atteint l'Europe : Luca Pacioli avec la Suma, Léonard de Vinci qui entreprend de représenter l'espace et René Descartes avec la géométrie des coordonnées comme application de l'algèbre à la géométrie.

Jusqu'au 15e siècle, il n'y aura pas d'instruments de mesure précis. Bombeli (Encyclopédie Universalis, 1988) établit une correspondance biunivoque entre les longueurs et des raisons rapports de longueurs, après avoir choisi une unité de longueur. Il définit alors géométriquement, à partir des longueurs, les opérations arithmétiques fondamentales, l'addition et la multiplication.

Toujours en Europe, Galilée, vers 1623, à Pise, affirme que « la nature est écrite en langage mathématique » et fait surgir un ensemble coordonné de phénomènes quantitatifs régis par des lois mathématiques précises. Mais c'est à Oresme que l'on doit une représentation des variations en latitude (ordonnée) et en longitude (abscisse). Une étape essentielle dans la compréhension numérique (Encyclopédie Universalis), car elle assimile un point sur une droite à une raison et ce, bien avant Bombelli ou Descartes.

3.2 ASPECTS RÉCENTS DES GRANDEURS EN MESURE

Suite à la construction du modèle des raisons d'Eudoxe à partir seulement des grandeurs et des entiers, Dedekind, vers la fin du 19e siècle, construit les nombres réels (rapports d'entiers les nombres rationnels) en utilisant l'ordre comme règle à compléter. Il donne ainsi, dans l'histoire des mathématiques, la première définition rigoureuse d'un nombre réel avec les coupures. Cette démarche se résume à construire de nouvelles grandeurs en les intercalant entre les nombres rationnels, sans perdre l'ordre et en gagnant la propriété de la borne inférieure.

Une autre construction des réels est due à Cantor et Murray, en 1872, qui montre que l'ensemble **R** des nombres réels est beaucoup plus grand que l'ensemble **Q** des nombres rationnels. Ils expliquent également la relation entre les nombres réels nouvellement construits et la droite de la géométrie usuelle.

Jusqu'à la fin du 18e siècle, les mesures étaient d'une extrême diversité. Des mesures de valeurs voisines et de même nature avaient des appellations différentes selon les pays, les provinces, les villages et les villes d'une même région. À l'inverse, le contenu physique des mesures de même nom différait selon les lieux et la corporation intéressée ou l'objet mesuré. Il faut cependant attendre la Révolution française (Ermel, 2001, p. 298) pour commencer à mettre de l'ordre dans tout ce qui prévaut dans les mesures de tous ordres. Avant, on utilisait un système organisé constitué de la ligne, du pouce, du pied et de la toise. Ces étalons entretenaient des rapports simples entre eux, de type duodécimal indiquent Le Boursicot et Ripoche (1988, p. 22).

Durant la Révolution française un nouveau système universel de mesures basé sur le système décimal est fondé : **le mètre**. Toutes les autres mesures (aire, volume, capacité et masse) vont découler de cette nouvelle unité. Les multiples et les sous-multiples suivront également des progressions décimales. Les rapports qu'entretiennent les unités sont des puissances de 10, la base de numération selon Le Boursicot et Ripoche (1988). Cette réforme fut adoptée pour presque toutes les grandeurs, à l'exception de la durée et de l'angle, pour lesquels on a conservé un système en partie sexagésimal. Pour les angles, une tentative tardive fut faite avec le grade et le centigrade; cependant, ces étalons n'ont pas été retenus internationalement. En effet, le système décimal ne s'est pas imposé partout. Certains domaines résistent (mesure du temps, des angles, de la masse…); certains pays aussi, comme les États-Unis et certaines provinces du Canada.

Par ailleurs, l'enseignement des grandeurs en mesure a souvent été marqué par la mise au point de traités pédagogiques dont certains furent l'œuvre de mathématiciens renommés pour leur contribution à l'évolution des savoirs. Dans un passé relativement proche, en France, on pourrait citer Clairaut, Lagrange, Monge, Cauchy ou Lebesgue et, également, les travaux du groupe Bourbaki, dont la mission originelle était de rédiger un traité moderne d'analyse mathématique qui, selon ses propres termes, serait utile à tous les chercheurs (patentés ou non). Ce travail étendu à d'autres domaines des mathématiques a alors dégagé une vision unifiée de cette discipline.

Les travaux en rapport avec le thème des grandeurs en mesure sont nombreux et nous ne les avons pas nécessairement répertoriés de manière exhaustive, du simple fait que nous ne pouvons prétendre les avoir effectivement tous recensés et lus. Il faut retenir tout simplement qu'historiquement, c'est à partir de travaux sur les grandeurs qu'ont été construits la plupart des concepts et des théories mathématique et que c'est cette filiation qui permet d'assurer les liens avec les autres disciplines.

Le cadre de l'ingénierie didactique suppose que la description des savoirs mathématiques en jeu, de même que leur analyse épistémologique, précèdent la construction de la séquence des situations didactiques particulières. Nous avons fait le choix de travailler avec des situations déjà largement élaborées (Brousseau et Brousseau, 1987, 1992) aux fins de l'introduction des grandeurs en mesure, mais nous avons également choisi de travailler avec des élèves en difficulté d'apprentissage. Il est impératif de proposer dans ce chapitre, une analyse détaillée de ces concepts en tenant compte de nos objectifs de recherche et des particularités du cheminement de ces élèves.

L'acquisition des connaissances techniques renvoyant à des modèles de représentations et les mécanismes pouvant résulter d'un apprentissage par l'action ou d'un apprentissage par l'instruction, pour l'enfant, comment se font l'acquisition de mécanisme et de techniques opératoires dans les grandeurs en mesure ?

3.3 LA CONCEPTION DU NOMBRE PAR L'ENFANT

On sait aujourd'hui que le trouble de certains élèves face aux mathématiques, et spécifiquement aux nombres, vient principalement du fait que le concept de nombre tire son origine des concepts de cardinal et de mesure, comme expliqué précédemment. Le cardinal n'étant d'ailleurs rien d'autre que la mesure des quantités discrètes. Dans ce contexte, la conception initiale du nombre ainsi que les premiers apprentissages numériques des enfants, les nombres, ne peuvent être que positifs puisque ce sont des mesures.

Nous ne pouvons parler des grandeurs en mesure, des représentations que s'en font les élèves et des difficultés qu'ils rencontrent, sans parler des nombres et de la représentation de l'espace. Le but de ce travail se rattachant aux grandeurs en mesure, il importe donc de situer la psychogenèse des nombres, de l'espace et des grandeurs en mesure par rapport à l'enfant.

3.4 LA STRUCTURE OPÉRATOIRE DE L'ENFANT SELON PIAGET

Selon Piaget (1948), toute connaissance, qu'elle soit d'ordre scientifique ou relève du simple sens commun, suppose un système explicite ou implicite de principes de conservation, qui constitue une des conditions nécessaires de toute activité rationnelle pour rendre compte de cette activité ou pour exprimer la nature de la réalité.

Les structures, d'après l'auteur, correspondent, de la naissance à 2 ans, aux coordinations des actions d'abord pratiques et matérielles; de 2 ans à 11 ou 12 ans à leur intériorisation en opérations pratiques, puis formelles de 11-12 ans à 15-16 ans. Il a examiné la genèse « spontanée » des concepts chez les enfants.

En sériant les réponses fournies aux diverses questions posées à l'enfant, Piaget (1948) a distingué trois stades successifs à l'acquisition de la conservation des liquides. Selon lui, au premier stade, il y a absence de conservation, car l'enfant n'est pas enclin à admettre qu'une même quantité de liquide puisse demeurer invariante au travers des changements de formes liées à ses transvasements. À ce stade, la quantification ne dépasse pas davantage la qualité directement perçue.

En effet, d'après l'auteur, le très jeune enfant ne peut guère considérer simultanément deux comparaisons. En général, avant 5 ans, il pourra difficilement utiliser la transitivité (relation binaire dans un ensemble tel que la proposition *a* est en relation avec *b* et *b* est en relation avec *c*, implique que *a* est en relation avec *c*) et donc faire les raisonnements utilisant les propriétés de la double structure. Il est donc limité aux seules comparaisons directes, car tout changement perçu est considéré comme entraînant une modification quantitative. On dit alors que l'enfant est du premier niveau (non conservant).

Au deuxième stade, appert des réponses intermédiaires. Entre les réactions des enfants qui ne parviennent pas à la notion de la conservation des quantités et ceux qui la postulent comme une nécessité à la fois physique et logique, se situe un certain nombre de comportements intermédiaires (Piaget, 1948). Ainsi, ces enfants du deuxième niveau cherchent à coordonner les rapports perceptifs en jeu et à les transformer en relations véritables, c'est-à-dire opératoires. D'autres oscillent sans fin entre la coordination et la soumission aux illusions perceptives. Ils peuvent tantôt maintenir la conservation et tantôt la nier, comme au stade précédent. Dans ce cas, on dit que l'enfant est au deuxième niveau (conservant intermédiaire).

Ces oscillations, d'après Piaget, sont nécessaires, voire indispensables. La validité d'un modèle mental, d'un concept dépend de l'éventail de ses expérimentations. Il faut donc fournir à l'enfant des situations où il peut mettre en œuvre ses conceptions, les confronter aux réalités afin qu'il puisse prendre conscience des éventuelles contradictions.

Au troisième stade ou troisième niveau (niveau conservant), reprend l'auteur, la conservation devient nécessaire. L'enfant affirme d'emblée comme une chose simple et évidente la conservation, lorsqu'il découvre cette invariance dans l'exemple précité, indépendamment des déformations provoquées.

Le résultat principal auquel a été conduit Piaget est que la structure opératoire s'élabore par la synthèse en un seul système, de deux structures plus simples, qui est le « groupement » de l'inclusion des classes. Il constate que le nombre cardinal et le nombre ordinal se constituent de façon indissociable (dans le fini) à partir de la réunion des classes et des relations d'ordre. Des propriétés nouvelles, comme la substitution de l'itération et la tautologie, apparaissent également à la suite de cette synthèse. De plus (p. 575), il indique que :

> *...le nombre est plus précoce que la mesure spatiale, parce que la discontinuité des collections discrètes suggère davantage l'itération de l'unité qu'un continu linéaire ou à deux dimensions mais ... que les qualités extensives et métriques se construisent en même temps et non pas l'une avant l'autre… ».*

Selon Vilette (1996, p. 24), on retrouve pour les autres notions de conservation telles que la longueur, la masse et le volume, les trois étapes observées dans le cas de la substance liquide. Cependant il allègue (p. 22) que ces notions de conservation affectent différemment un enfant par leur mode d'appréhension perceptive. Derrière cette affirmation, il y a l'idée qu'un nombre appartient au domaine des connaissances logicomathématiques. Ces dernières se construisent au départ de relations que l'enfant établit entre les différents objets. Maintenant, qu’en est-il de la représentation de l’espace pour l’enfant ?

3.5 LA REPRÉSENTATION DE L’ESPACE PAR L’ENFANT

En ce qui concerne la représentation de l’espace, Piaget (1948) indique qu’à chacun des trois stades envisagés, le sujet ne parvient pas à reconnaître et surtout à se représenter les formes qu’il est capable de reconstruire grâce à ses propres actions.

D’après lui, l’abstraction de la forme s’effectue à partir de la coordination des actions et non pas, ou non pas seulement, de l’objet. C’est de la coordination croissante des actions consistant à suivre, à déplacer et à replacer de proche en proche que l’ordre est abstrait. Mais ce dernier n’est reconstitué que grâce à une accommodation de ces actions qui sont à la source de l’ordre géométrique. C’est donc vers 6 ou 7 ans que l’enfant atteint ce que l’on appelle l’état d’équilibre des intuitions, c’est-à-dire qu’il conçoit l’ordre et parvient à reconstruire la série aussi facilement dans un sens que dans l’autre.

Les travaux de Piaget ont certes été extrêmement importants dans la compréhension du caractère opératoire de la connaissance. Ils étaient beaucoup plus épistémologiques que pédagogiques. Pour l’auteur, il s’agissait d’examiner les étapes conceptuelles par lesquelles passe le développement d’un sujet et non pas celui d’un sujet réel dans une situation d’apprentissage dans la classe. D’ailleurs, dans sa conception, c’est en agissant que l’on apprend. Lesdits travaux ont généré plusieurs recherches et courants pédagogiques qui ont conclu qu’il importait d’établir dans les petites classes, les notions d’ensembles, de relation et de correspondance terme à terme.

La psychologie piagétienne a cependant mis en lumière un grand nombre de schèmes accomplissant des fonctions variées, comme l’organisation de l’univers en action ou de la pensée. Piaget a montré comment, lors de son fonctionnement, un schème tend à assimiler les éléments de son milieu en leur fournissant en même temps leur signification fonctionnelle en s’adaptant à leurs particularités. Toutefois, Astolfi (1997) mentionne l’idée de zone proximale et le fait qu’il ne faut pas attendre que le développement soit suffisant pour commencer l’apprentissage correspondant. L’auteur cite Vigotski pour qui, quand on fait un pas dans l'apprentissage, on fait deux pas dans le développement. La zone proximale dont il parle est la différence entre ce que le sujet est capable de réussir seul et ce qu'il peut réussir dans une situation sociale, avec une aide, même si personne ne dispose de la réponse toute prête. Astolfi (1997) explique que cela veut dire qu'il y aurait davantage d'efficacité didactique si l'on plaçait les élèves dans des situations d'enjeu ou de défi, ce qui est notre intention.

Vergnaud (1986, p.27 et 1991, p. 13), quant à lui, affirme que même si l'enfant est peu capable d'expliciter ou de donner une forme symbolique communicable à ses connaissances sur l'espace, il développe néanmoins très tôt des compétences sur les figures, les positions et les transformations. La connaissance consiste, pour une part importante, à établir des relations et à les organiser en systèmes et c'est ce qui fait de la notion de relation, une notion absolument générale. L'auteur mentionne que l'approche piagétienne présente quelques limites pour le développement des connaissances mathématiques et affirme :

> *...qu'il faut des modèles beaucoup plus fins, directement associés au contenu mathématique des problèmes. La priorité est de reconnaître la variété des classes de problèmes possibles, d'analyser avec soin leur structure et les opérations de pensée nécessaires pour les traiter...*

Il donne comme exemple que ce n'est pas la même opération de pensée que d'inverser une transformation directe, de trouver un complément ou de rechercher une différence. Toutefois, il admet qu'il faut reconnaître que la conceptualisation des compétences spatiales chez les enfants a été peu analysée jusqu'à maintenant.

Bien que contestés, parce qu'ils s'attachent essentiellement aux structures logiques au détriment des contenus et surtout parce qu'ils considèrent le sujet isolément et non dans son environnement, les travaux de Piaget restent toujours une référence, notamment en ce qui concerne la théorie constructiviste des apprentissages.

Il revient tout de même à Vergnaud, d'après Fayol (1990, p. 151), d'avoir introduit un certain ordre relatif dans la classification des problèmes, laquelle ne considère ni l'action ni l'opération à effectuer (nous l'avons expliqué précédemment à propos des relations et des schèmes).

3.6 LE NOMBRE, COMPOSANTE ESSENTIELLE DES STRUCTURES ADDITIVES

De manière générale, il est admis que le nombre est constitué à la fois d'une dimension ordinale et d'une dimension cardinale qui s'articulent étroitement entre elles. D'un point de vue strictement mathématique, un nombre est un élément d'un ensemble de nombres. Nous rappelons que selon Piaget (1948), le nombre est plus précoce chez l'enfant que la mesure spatiale, car la discontinuité des collections discrètes suggère davantage l'itération de l'unité qu'un continu linéaire ou à deux dimensions.

La compréhension de certaines propriétés des nombres et des opérations est généralement renforcée par l'apprentissage des techniques opératoires, les nombres et le calcul intervenant comme outils pour traiter une situation, c'est-à-dire pour organiser, prévoir, choisir, décider. Une bonne maîtrise des relations entre des nombres d'usage permet de structurer le domaine numérique. Le nombre se révèle donc être une composante essentielle des problèmes arithmétiques de type additif.

3.7 LE NOMBRE ET LA MESURE

Exprimés à travers l'histoire universelle des grandeurs en mesure, les nombres tissent des relations multiples qui, au-delà des anciennes unités, sont au cœur des méthodes scientifiques d'hier et d'aujourd'hui. Cependant, si le nombre est le fondement même de la mesure, il n'a pas le même sens lorsqu'il dénombre que lorsqu'il mesure. Par exemple, un compte ou un dénombrement est un entier naturel et peut être exact, comme compter des œufs dans un carton, toutefois, certains groupes ne peuvent être facilement dénombrés, par exemple, estimer des victimes d'une catastrophe.

Les nombres et leurs propriétés (dont nous parlons plus loin) fournissent des indicateurs sur l'opération à effectuer et donnent un sens aux procédures que l'élève doit mettre en œuvre pour réaliser une opération arithmétique. À ce sujet, Dubois *et al*. (2001, p. 110) affirment que :

> *…les problèmes posés par la pratique des grandeurs ont permis l'élaboration des concepts des nombres rationnels et des nombres réels. Concepts de nombres et mesure des grandeurs sont étroitement liés.*

> *L'évolution des mathématiques a permis aux nombres d'exister de manière autonome, indépendamment des concepts de grandeur et de mesure.*

Sans le quantitatif, sans la mesure et sans le nombre, la découverte du monde réel s'avère impossible. L'activité de la mesure pose des questions théoriques du genre, le problème de l'intermédiaire et du mesurant, l'approximation. La mesure est un nombre utilisé pour exprimer la valeur du rapport d'une grandeur à celle d'une grandeur de même espèce prise pour étalon (ou unité de mesure). Ainsi, une mesure se distingue habituellement d'un compte et possède un degré d'imprécision associé exprimé comme erreur standard de mesure. Pour ainsi dire, une mesure est un nombre réel et n'est jamais exacte. Par exemple, la mesure d'une planche ou d'une ficelle peut donner 8 cm avec plus ou moins 0,01 mm.

Pour mieux l'expliquer, Portugais (2000, p. 1) indique que :

> *... Les mesures mathématiques sont conceptuelles alors que les mesures physiques tiennent en compte des procédés expérimentaux qui servent à déterminer des valeurs numériques.*

D'ailleurs, il ne faut pas confondre le processus de mesure (comparaison de grandeurs) avec le produit de l'action de mesure (la quantité trouvée). Outre ces aspects, nous parlons maintenant des différents sens donnés au concept de la mesure.

3.8 DIFFÉRENTS SENS DONNÉS AU CONCEPT DE LA « MESURE»

Le mot mesure, quant à lui, a, en mathématiques, un sens beaucoup plus restreint qu'en physique. Le concept de mesure s'exprime par une grandeur, qui se traduit par des procédés communs à plusieurs objets. Par exemple, les objets qui nous entourent ont tous une aire, une masse. De plus, un même objet est caractérisé par plusieurs grandeurs distinctes : une longueur, un volume exprimé par un nombre.

D'après le Dictionnaire Larousse (2006, p. 684), une *mesure* est « une action d'évaluer une grandeur d'après son rapport avec une grandeur de même espèce prise comme unité et comme référence; grandeur, dimension ainsi évaluée ». Toutefois, il existe différents sens et différents types d'activités évoqués au mot « mesure » en français. Nous les empruntons à Portugais (2000, p. 3) qui rapporte qu'une *mesure* est :

1. *une quantité, une grandeur déterminée par la mesure (dimension, volume);*
2. *une quantité, une grandeur servant d'unité (mètre, litre);*
3. un *récipient de capacité déterminé servant à évaluer les volumes; exemple : passez-moi la mesure, comme dirait Pinard;*
4. *une quantité contenue dans un récipient (mesure de grain);*
5. *une division du temps musical (barres de mesure, durée de 5 valeurs de noires, par exemple);*
6. *une valeur, capacité d'une personne (prendre la mesure du talent de quelqu'un);*
7. *une modération, pondération (dans les expressions comme avoir le sens de la mesure);*
8. *une disposition prise pour atteindre un objectif (on dit d'ailleurs se mesurer à quelqu'un d'autre*).

Il mentionne qu'en particulier, concernant le premier sens donné, on remarquera que le terme *mesure* désigne un produit, c'est-à-dire un résultat (de mesure). Ainsi, faire une mesure, c'est d'abord trouver combien de fois l'unité est contenue dans la grandeur à mesurer. Une métrique est donc une échelle de mesure définie en termes d'étalon ou standard, c'est-à-dire en termes d'unité clairement définie et son principal avantage est qu'elle possède une seule et unique unité de base pour chaque quantité physique. De plus, toutes les autres unités sont des puissances de 10 de l'unité de base. La mesure la plus simple est celle d'un ensemble fini, c'est-à-dire qu'à chacune de ses parties, la mesure ou dénombrement fait correspondre un nombre naturel, celui de ses éléments.

3.9 LA MESURE, OPÉRATION DE PENSÉE

La métrologie, ensemble de techniques et de savoir-faire, permet d'effectuer des mesures et d'avoir une confiance suffisante dans leurs résultats. Elle permet de tirer le meilleur parti de l'observation. La mesure est donc une opération de pensée qui consiste à évaluer une grandeur en la comparant à une autre choisie comme référence, l'unité ou « l'étalon mesure ». Par exemple, une « tige » correspond, abstraitement dans le plan géométrique, à un segment AB. Dans ce cas, on définit la longueur du segment : long (AB) = AB. Ici, ce concept est indépendant du nombre, la longueur n'est pas un nombre, ni une tige, ni un segment, mais elle est dans le **rapport** que l'on établit entre les deux.

On ne peut envisager d'enseigner des mathématiques et en particulier les grandeurs en mesure sans cette comparaison de rapports, car c'est un concept qui traverse tout l'apprentissage des mathématiques et pas uniquement celui des nombres et de la géométrie. La mesure est indispensable pour la recherche, car elle vise à modéliser les phénomènes et à quantifier, non seulement des grandeurs dans des unités connues et définies, mais également leurs relations et leurs interactions, en ce sens qu'elle permet de connaître une grandeur, qui permettra, à son tour, de mettre en équation un phénomène qui peut être toute manifestation dans le domaine des sciences, mais aussi dans la vie quotidienne. Mais avant tout, nous définissons le concept de grandeur en mesure.

3.9.1 Les grandeurs en mesure, moyen de quantification

On peut, certes, étudier des grandeurs sans faire intervenir ni unités ni nombres. Mais les manipulations s'avèrent peu commodes et ne permettent pas de résoudre tous les problèmes que l'on peut se poser à propos des grandeurs, en particulier, celui du rapport entre des grandeurs de même espèce. Manipuler d'après le Dictionnaire Larousse (2006 p. 660), c'est tenir (un objet), manœuvrer, transformer, faire fonctionner un objet et par là même, l'explorer.

L'aspect utilitaire des grandeurs en mesure s'avère donc fondamental puisqu'elle fait garder aux mathématiques leur fonction fondamentale d'outil. En outre, ce moyen de quantification, qu'offrent les grandeurs en mesure, est indispensable pour faire du calcul un outil opérationnel, comme le mentionnent Le Boursicot et Ripoche (1988, p. 17), car la quantification constitue une démarche intellectuelle et technique. Pour eux :

> *... mesurer, c'est associer des nombres aux objets, de telle sorte que les comparaisons et les manipulations sur les objets, relativement à la grandeur, puissent s'identifier aux comparaisons et aux opérations arithmétiques sur les nombres associés.*

Dans cette optique, Portugais (2000, p. 1) ajoute que :

> *La mesure est une quantification lorsque le résultat de cette comparaison est exprimé par un nombre. Elle permet d'associer à un objet un nombre qui sera sa mesure. Au plan sémantique, le quantifiant résulte de l'abstraction de l'élément concret constituant de l'ensemble.*

La métrologie est définie comme étant l'étude de la mesure physique, plus spécifiquement des grandeurs. Il faut comprendre que toute mesure d'une grandeur n'est qu'une représentation de la grandeur réelle et qu'elle implique une notion de nombres. Un dénombrement a pour résultat un naturel, alors qu'une mesure compare à une grandeur de même nature prise comme référence (unité) et dont le résultat est un réel. Nous définissons maintenant ce que l'on entend par grandeur et grandeur mesurée.

3.9.2 Grandeur et grandeur mesurée

Le terme *grandeur* n'existe pas en mathématique et il peut paraître vague. Mais selon les dictionnaires, « une grandeur » peut signifier :

- caractère de ce qui est grand par ses dimensions (hauteur, longueur, largeur);
- de ce qui se prête aux mesures;
- un aspect mesurable de quelque chose;
- qui est caractérisée par l'un des attributs suivants;
- de ce qui est repérable : l'addition des mesures n'est pas possible (comme dans le cas de la température).

Les grandeurs considérées dans ce travail sont des grandeurs physiques. Les propriétés mesurables sont nommées grandeurs physiques. La plupart des grandeurs physiques découlent les unes des autres et de quelques grandeurs de base choisies parmi celles qui se prêtent aux mesures les plus précises.

Les unités de mesure servent alors à déterminer la valeur des grandeurs physiques. Un système d'unités est un ensemble de règles qui définit de manière cohérente l'unité de mesure de chaque grandeur utilisée dans les sciences et les techniques. On distingue deux classes d'unités dans le Système international (SI) :

- sept unités de base dont : la longueur (mètre), la masse (kilogramme) qui intéressent notre recherche. Elles sont indépendantes les unes des autres et permettent de reconstituer toutes les autres grandeurs à l'aide des formules de la physique;
- et beaucoup d'unités dérivées ou secondaires (la fréquence par exemple).

Dans la pratique, mesurer une grandeur, dit Portugais (2000, p. 1), « … *c'est la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité* ». Cette grandeur est appelée grandeur « unité ». Toutefois, poursuit l'auteur : « *...si une grandeur considérée n'est pas mesurable, il s'agit là d'un simple repérage; à chaque grandeur de l'espèce mesurée, on associe un nombre, est une fonction croissante de cette grandeur, et que l'on appelle encore, improprement, mesure* ».

Ainsi, la grandeur physique étudiée deviendra grandeur mesurée pour se traduire concrètement par un nombre, fruit ultime du rapport entre la théorie et le réel. Selon Vergnaud (1991, p. 68) :

> *... se situent dans la catégorie des descripteurs quantitatifs, ceux dont les différentes valeurs peuvent être mises sur une échelle de mesure numérique, tels que :*

Descripteurs	*Valeurs possibles*
la longueur	
le volume	
le poids	*valeurs numériques*
le prix...	

Le descripteur quantitatif est alors celui qui permet d'associer aux objets des nombres qui sont leur mesure. Dans le cas du calcul de la masse par exemple, le meilleur moyen de la mesurer est la balance. Dans sa forme conventionnelle, cette classe d'instruments de mesure compare l'échantillon placé dans un plateau (de mesure) et suspendu à une extrémité d'un fléau, l'autre soutenant un plateau (de référence) suspendu dans lequel est placée une masse étalon des masses. Dans le cadre de notre travail, celles qui nous intéressent sont deux des grandeurs physiques de base, la longueur et la masse.

En opposition aux mesures quantitatives, Therrien (1994) indique qu'il existe des grandeurs qu'on ne peut mesurer que de manière qualitative ou descriptive, telle que la masse et la longueur alors que d'autres ne sont que probables (mesures statistiques et probabilistes.

3.9.3 Les propriétés des grandeurs en mesure

Une grandeur permet donc de mesurer l'étendue d'un corps (longueur, largeur, hauteur…). C'est l'attribut d'un corps ou d'un phénomène qui permet une appréciation qualitative. Cependant, dès qu'on introduit des nombres, on est en présence de trois catégories d'êtres :

- des objets (identifiés ou hiérarchisés);
- la double structure mathématique qui met en place *la comparaison* (l'un est plus... que l'autre) et *l'équivalence* (comme « ... aussi long que... » pour les longueurs par exemple);
- des mesures, c'est-à-dire des nombres faisant intervenir une opération interne (sommation) et/ou une opération externe (multiplication par un nombre).

Comprenons que le concept des grandeurs en mesure met en présence deux domaines, même si ce qui les distingue semble relativement flou à cause de leur grande ressemblance :

- celui des objets concrets et des grandeurs avec leur environnement de propriétés et de manipulations;
- et celui des nombres et son environnement de calcul pour exprimer quantitativement les grandeurs et anticiper le résultat de certaines actions.

De plus, la mesure d'une grandeur demande qu'on sache définir la somme de deux grandeurs de même espèce ou de deux valeurs d'une même grandeur. Cette espèce de grandeur est dite additive. On choisit une certaine valeur comme unité et on mesure la grandeur par le rapport entre la valeur observée et la valeur unitaire.

Toutefois, la mesure d'une grandeur doit satisfaire la propriété d'addition, car la mesure d'un tout est égale à la somme des mesures des parties. Elle fait intervenir une grandeur de référence ou de base, l'unité de longueur, le SI qui est définie par une équation formelle aux dimensions qui relient les grandeurs entre elles. Par exemple, le recours à des grandeurs en mesure, telles que les longueurs, fait apparaître la nécessité de découper l'unité. Leurs mesures s'expriment par un simple nombre et sont représentées par une lettre (souvent écrite en italique).

Les grandeurs conditionnent le sens des opérations. Par exemple, on peut additionner ou soustraire des grandeurs de même nature, car l'addition est une opération interne à une grandeur, mais le produit de deux grandeurs est une autre grandeur. Il convient alors de repérer les propriétés de la mesure et de définir le rôle des différentes structures mathématiques qui interviennent lorsqu'on veut la concevoir. Selon Brousseau (2003, p. 2), il faut au moins trois notions :

- *l'une pour décrire la structure numérique de la chose à mesurer;*
- une *autre pour décrire la structure numérique qui mesure la chose;*
- *une dernière qui décrit le moyen de faire correspondre un objet à mesurer et le nombre qui la mesure*.

Il démontre ainsi que ces trois notions de base ne sont pas indépendantes : elles sont les composantes nécessaires aux situations d'action spécifiques de la mesure. Par contre, leur étude constitue des secteurs de savoir différents et relève de problématiques distinctes. Il ajoute que chacune de ces notions a son univers propre, c'est-à-dire ses structures, son champ de problèmes théoriques ou d'application. Par exemple, l'univers des objets mesurables dont la longueur et la largeur d'un rectangle sont des segments... et dont la mesure de la longueur s'appelle aussi longueur ou bien une échelle de masse (et non de poids), qui est une référence pour la mesure de masse d'un corps. Notons par ailleurs que la notion de masse peut aussi référer à l'inertie d'un objet.

Rouchier (1980) indique également la pluridimentionnalité des grandeurs en mesure et la comparaison des rapports de grandeurs qui conduit à l'étude de proportionnalité. D'après lui, cette dernière possède également une dimension conceptuelle à travers ses aspects numériques, les dimensions de ses grandeurs et ses aspects fonctionnels. Retenons tout simplement que les grandeurs donnent du sens aux nombres par les différentes fonctions qu'ils jouent dans la résolution des problèmes d'arithmétique classique, comme le rapport, la mesure, l'opérateur, etc.

3.9.4 Les grandeurs, classes d'équivalences

Dans tout problème physique, les grandeurs considérées ne sont que rarement des nombres, mais plutôt des produits de nombres par des unités physiques. Toutefois, la grandeur est une classe d'équivalence moins abstraite que le nombre, car elle est une descriptrice de quelque chose. Dubois *et al*. (2001, p. 105) la définissent en ces termes : « ... *toute expérience permettant de déterminer une relation d'équivalence dans un* *ensemble d'objets physiques définit des classes d'équivalence sur cet ensemble. Chaque classe d'équivalence définit une grandeur ».*

Ils affirment qu'en ce qui concerne la comparaison de masses par exemple, les objets d'une même classe ont la même masse et que chaque classe d'équivalence détermine une grandeur appelée masse. Il en va de même pour les longueurs, un des objets de notre étude.

De surcroît, il existe plusieurs résultats de mesure équivalents pour une même grandeur, c'est-à-dire que l'on peut disposer de nombreuses manifestations d'une même grandeur, affirme Portugais (2000, p. 3). Par exemple, 1 kg peut correspondre au poids d'une infinité d'objets distincts que l'on appelle « classe d'équivalence ». Il explique :

> *... qu'il est possible de transposer des constructions à d'autres grandeurs dans d'autres contextes, telles la géométrie ou la comparaison en numération :*
>
> - *la mesure de longueur par un entier. Par exemple, un mur mesure 8 mètres de longueur;*
> - *la mesure exprimée par un rationnel. C'est le cas des mesures rationnelles exprimées par des fractions, c'est-à-dire des rapports entre deux entiers. Par exemple, un mur mesure 854 cm soit 854/100 mètres ou 8,54 m.*

Toutefois, si des égalités ne sont pas écrites entre nombres, elles peuvent se faire entre grandeurs physiques. Par exemple, pour les grandeurs concrètes et les grandeurs physiques, l'égalité a un sens si l'on sait définir un protocole de comparaison et de mesure. Par conséquent, il est parfaitement correct d'écrire que 13 cm = 130 mm = 0,13 m. Cependant, on ne peut dire qu'une longueur L = 1,5 cm et L = 1,50 cm, car la première écriture signifie que la mesure de longueur a été effectuée avec un instrument permettant d'apprécier le millimètre et la deuxième que la mesure a été effectuée avec un instrument permettant d'apprécier le dixième de millimètres. Tous ces chiffres ont alors une signification et nous informent sur la valeur de la grandeur mesurée et sur la précision de cette mesure.

3.9.5 Les grandeurs, entités comparables et extensives

Différents objets de l'espace, proche ou lointain, peuvent également être identifiés à différentes grandeurs. Certaines grandeurs sont identifiables (par exemple, hauteur, largeur, longueur, masse). Mais, selon Le Boursicot et Ripoche (1988, p.8) :

> *... à force de porter des objets, les efforts différents qu'ils nous demandent, la résistance plus ou moins grande qu'ils opposent à notre volonté nous amènent à les comparer implicitement et/ou explicitement. Certains ne présentent aucune difficulté, d'autres résistent à notre force, et dans cette multitude, certains d'entre eux sont comparables, équivalents.*

Ainsi, la comparaison pour certaines grandeurs (comme la largeur, la hauteur, la profondeur ou la longueur) est relativement facile, car elles peuvent correspondre. Elles sont donc mesurables, hiérarchisées ou identifiées, puisqu'elles comportent une double structure sous-jacente : la relation d'équivalence (de même grandeur) ou la relation d'ordre (plus petit, plus grand). En conséquence, la mesure attachée à cette grandeur peut être un nombre positif ou négatif. Cette démarche de comparaison est la base du processus de construction mentale qui aboutira à la formation de la grandeur considérée, affirment ces auteurs. Van Hout (1994, p. 184) rapporte également que les grandeurs sont des entités, car elles sont :

> - *comparables, puisque de même nature; on peut introduire entre elles une relation d'ordre; par exemple, la relation -...est égal à..., ...a la même... que-, permet de former des classes d'expressions numériques égales entre elles;*
> - *extensives, car on peut en définir l'addition et la mesure.*

Les grandeurs sont qualifiées selon leur nature physique appelée dimension, qui résulte de multiples abstractions isolant, dans un objet réel, une des qualifications nécessaires à notre perception, comme la longueur, la masse. De plus, chaque espèce de grandeur extensive possède ses règles propres pour les opérations physiques :

- pour additionner des longueurs, il faut porter les segments bout à bout selon une même direction;
- pour additionner des masses, il faut les mettre « dans un même sac », les peser sur un même plateau.

Par exemple, on parle de la longueur de tel objet ou de la masse de tel autre. Cette grandeur est mesurable ou commensurable. Trois types d'objets sont principalement utilisés pour décrire cette réalité physique :

- les nombres (exemples : 3 - 100 - 5,01 - 0,3333)
- les grandeurs (exemples : 2 m - 5 kg - 7,99 $ - 23 cl)
- les formes (exemples : ligne, segment, carré, sphère, cube…)

Et c'est là qu'interviennent les relations qui servent à traduire mathématiquement des comparaisons entre éléments d'un même ensemble. La comparaison, quant à elle, ouvre deux voies :

1) les relations d'ordre qui permettent d'ordonner les éléments de telle sorte qu'il n'y ait pas deux éléments à la même place (par exemple, si x est plus petit, ou plus grand que y, c'est une relation d'ordre);
2) et les relations d'équivalence pour lesquelles il faut regrouper les éléments d'un ensemble par familles (si x a la même valeur que y, c'est une relation d'équivalence).

Ces relations d'équivalence sont par conséquent :

- symétriques (si x relié à y entraîne que y est relié à x);
- transitives (si quand x est relié à y et y à z, alors x est relié à z);
- réflexives (si tout élément est relié à lui-même);
- et, finalement, antisymétrique (si x relié à y et y relié à z entraînent x=z)

Suite à ce qui précède, il convient de retenir que la mesure ne porte pas sur les objets eux-mêmes, mais sur certains aspects de ces objets. L'utilisation d'unités dans les calculs sur les grandeurs est de nature à en faciliter le contrôle et à en soutenir le sens. Par contre, toute méthode a, en pratique, une limite de précision, car en deçà d'un certain seuil, elle ne permet plus de différencier certains objets (Le Boursicot et Ripoche, 1988, p. 11). Il est alors nécessaire d'utiliser l'approximation, c'est-à-dire des grandeurs intermédiaires pour parvenir à une grandeur visible ou, dans certains cas, s'assurer de la fidélité de cette grandeur par le biais de l'écart-type qui permet de la caractériser.

3.10 L’APPRENTISSAGE DES GRANDEURS EN MESURE À L’ÉCOLE PRIMAIRE

Le *Programme de formation de l’école québécoise* (MÉQ, 2001) stipule, qu’au primaire, les mathématiques sont structurées autour de trois compétences se développant et étant en relation étroite avec l’acquisition de savoirs relatifs à l’arithmétique, la géométrie, la mesure, la probabilité et la statistique (voir schéma en annexe).

Les apprentissages sur les grandeurs en mesure et l’appropriation de l’espace se font de la maternelle jusqu’à la deuxième année du troisième cycle. Dès l’école primaire, les élèves manipulent les grandeurs concrètes, donc les grandeurs physiques, et dans cet apprentissage des grandeurs en mesure, les nombres, la comparaison, l’estimation, la précision et la communication entrent en jeu simultanément.

L’étude des grandeurs et de leurs mesures (MÉQ, 2001) contribue, comme pour le reste des savoirs essentiels, au développement de compétences en science et technologie, et plus spécifiquement à aborder et à découvrir le sens de l’itération dans la notion de la mesure aux moyens des unités et de ses relations, et par la compréhension du caractère additif et multiplicatif du nombre et ses dimensions ordinales ou cardinales.

Le MÉQ veut souligner l’importance de leur prise en compte pour donner sens au calcul mathématique dans ses rapports avec le réel et les autres disciplines scientifiques. À cet effet, il spécifie (p. 128) :

> *... qu’en matière d’appropriation des instruments, le but est d’en arriver à ce que les élèves, tout en construisant le sens de la mesure, parviennent à utiliser à bon escient, en comprenant ce qu’ils font, de ces moyens conventionnels.*

Ces grandeurs en mesure peuvent s’effectuer avec des objets quelconques tenant lieu d’unité de mesure. Toutefois, la mathématique fait appel à des processus et à des instruments qui lui sont propres. L’utilisation des instruments de base, tels la règle, le double décimètre, les masses en fonte, peut s’avérer un outil précieux pour supporter la démarche de résolution de situation-problème, accroître l’aptitude à la modélisation et à l’application des stratégies variées, mais également favoriser la compréhension de certains concepts.

L'étude des grandeurs en mesure constitue effectivement un des points importants de la scolarité au primaire. Les grandeurs abordées sont les nombres rationnels (sous-ensembles des nombres réels), les longueurs, les masses, les aires, les volumes, les capacités, le temps, la température et les angles. Selon Portugais (2000, p. 4), ces apprentissages portent essentiellement sur l'estimation ou l'évaluation des mesures et le mesurage. Du moins, seules la longueur et la masse comme grandeur nous intéressent dans ce travail.

3.10.1 L'estimation et le mesurage dans les apprentissages des grandeurs

Au primaire, la notion de grandeur prend naissance à partir d'activités de rangement et de classement d'objets physiques. On effectue généralement des comparaisons. L'enseignement de la mesure a, de toute évidence, pour fonction de développer chez l'enfant trois qualités par l'estimation et le mesurage, soit l'imagination spatiale, la compréhension concrète et la pensée logique.

D'après Ermel (1999, p. 370), dans le programme du primaire, l'*estimation* est une opération qui consiste à fournir une prévision sur la mesure d'un objet à partir d'informations (incomplètes sur cet objet) :

- *la vision seule de l'objet (sans les mesures effectives nécessaires) pour la longueur et l'aire;*
- *soupeser un ou des objets pour les masses;*
- *l'appréciation de l'espace occupé pour les capacités, par exemple.*

Quant au *mesurage,* Portugais (2000, p. 4) mentionne qu'il : « *est une activité matérielle qui consiste à effectuer la comparaison entre un et une grandeur. C'est une fonction mathématique qui associe chaque élément mesurable un nombre réel ».*

Elle est concrète lorsqu'elle est formée d'un couple : nombre et unité; par exemple, 5 mm. Ce mesurage peut être effectué avec une unité non conventionnelle (unités arbitraires de mesure) mais aussi par des unités conventionnelles (m, dm, kg, g,…).

Retenons qu'au primaire, l'objectif principal pour les deux grandeurs, objets de notre étude, est de permettre aux élèves d'améliorer leur vision de l'espace (estimation et mesurage), de se familiariser avec les unités conventionnelles et de passer progressivement à d'autres grandeurs dont les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception puis à une manipulation.

3.10.2 Le plan mathématique et le plan didactique des grandeurs

Il est maintenant nécessaire de distinguer le plan mathématique et le plan didactique de ces grandeurs en mesure. En mathématique, on ne travaille pas sur les grandeurs (c'est l'objet d'autres disciplines comme la physique, la technologie, les sciences de la terre ou la géographie, pour ne nommer que celles-là), mais avec les grandeurs ou à partir d'elles. On peut dire que les longueurs, le calcul des aires ou des volumes sont des grandeurs appartenant au champ mathématique. En revanche, l'aspect multidimensionnel des deux dernières correspond à un travail sur des grandeurs.

Cependant, sur le plan didactique, les choses se présentent différemment. Par conséquent, il faut commencer par acquérir et assimiler des concepts et subordonner à cette phase la projection du mesurage sur les objets de l'environnement ou, du moins, laisser libre cours à la représentation mentale et à la perception visuelle. Dans le processus de l'appropriation des grandeurs discrètes chez l'enfant, la perception joue un rôle important dans l'appréhension de ces représentations par les aspects figuratifs mis en jeu. Les rapports avec les données issues de la perception sont un des éléments-clés dans la construction des savoirs théoriques.

Dans ce processus, la relation entre des grandeurs est parfois privilégiée. Un problème peut concerner des grandeurs de même nature, voire une seule grandeur, ou des grandeurs de natures différentes. Ces caractéristiques, ainsi que la nature des relations entre les grandeurs en cause, induisent une difficulté plus ou moins grande lors de la résolution et déterminent souvent le choix de telle ou telle procédure par l'élève. C'est pourquoi Vergnaud (1991, p. 56) souligne que pour certaines relations, on peut en définir le domaine en compréhension ou en extension. De là, deux sortes de déductions productives sont possibles pour l'élève : déduire une règle de conduite ou une relation nouvelle.

Dans notre travail, nous distinguons enseignement et apprentissage. La didactique des mathématiques étudie l'enseignement et les conditions nécessaires à l'apprentissage des mathématiques. C'est ce qui nous intéresse. Toutefois, nous ne pouvons faire abstraction des difficultés d'apprentissage des élèves, car notre recherche a comme objet de déterminer les représentations des élèves en difficulté d'apprentissage à partir des situations portant sur les grandeurs en mesure.

3.10.3 Études analytiques des difficultés d'apprentissage en mathématique

Il convient ici de distinguer la difficulté d'apprentissage de la difficulté comportementale. S'il est courant de rencontrer des élèves « difficiles à gérer » qui cumulent des difficultés à apprendre, il en existe aussi ne posant aucun problème de comportement, mais en réelle difficulté d'apprentissage. Ce sont ces derniers qui nous intéressent.

En ce qui concerne les études sur les difficultés d'apprentissage en mathématique St-Laurent (2002, p. 263) affirme « *...qu'elles sont moins nombreuses que celles qui portent sur les difficultés en lecture et qu'on connaît peu les facteurs qui contribuent au faible rendement en mathématique...* ». Dans des recherches précédentes, les difficultés des élèves en général ont été identifiées à partir de leurs représentations. Sous ce rapport, Auger (1990, p. 22) relie la difficulté d'apprentissage des mathématiques à la qualité de la langue maternelle au contact de l'enfant avec les choses et les personnes. Ces difficultés proviennent, selon lui, du retard de maturation, de la codification excessive des éléments proposés et de la privation prématurée de support naturel direct sur l'apprentissage de la langue maternelle. L'auteur avance que les insuccès de ces élèves en difficulté sont de deux ordres :

- les troubles fonctionnels provoquant le manque d'assimilation des connaissances;
- un défaut des éléments de base entraînant à la longue un trouble fonctionnel et le découragement.

Dans un autre ordre d'idées, Auger (1990, p. 15-17) relève quatre formes de difficultés isolées sur les déterminants du succès et de l'échec en mathématiques :

> - *la première se manifeste sur le langage mathématique;*
> - *la seconde apparaît comme une fixation à un niveau de raisonnement trop bas afin de permettre de satisfaire aux exigences scolaires;*
> - *la troisième forme de difficulté se présente comme une incapacité de coordonner les opérations en système et par le fait même de généraliser;*

- *la dernière forme de difficulté, qui s'avérerait rare, se manifeste par un déséquilibre affectivo-moteur.*

Pourtant, toujours d'après l'auteur, des élèves forts intelligents dans d'autres domaines peuvent échouer plus ou moins systématiquement en mathématiques. Cela serait dû affirme-t-il, aux structures de langage particulier utilisé par le mathématicien, par le langage abstrait et par d'autres performances scolaires, soit en dissociant les facteurs, soit en les associant. Il classe ces difficultés d'apprentissage en quatre grandes catégories :

- *les difficultés de nature analogique, telles que les difficultés à percevoir le sens;*
- *des problèmes, à associer les mathématiques avec des situations concrètes de la vie courante ou à effectuer des transferts;*
- *les difficultés de nature logique, telles que les difficultés à structurer, à analyser chaque élément d'un problème par exemple;*
- *les difficultés de mémoire, qui sont généralement des difficultés à se souvenir des termes mathématiques et à confondre les différents termes ou symboles;*
- *et enfin, les difficultés d'exécution efficace qu'on observe dans un manque de précision en mesure et dans des difficultés à calculer juste et rapidement.*

Quoi qu'il en soit, il semble que les difficultés de ces élèves peuvent avoir comme origine, des problèmes de confrontation avec leurs sens, des problèmes liés à la connaissance du processus de mesure, des problèmes de nature mathématique auxquels viennent s'ajouter ceux liés à l'évolution technologique des instruments de mesure ainsi qu'à leur utilisation.

De Vecchi et Giordan (1988) soulignent que pour les élèves qui ont des difficultés d'apprentissage, la compréhension des concepts fondamentaux devrait être préalable à toute démarche scientifique et ne devrait pas être masquée par des protocoles expérimentaux. Ils parlent également des formulations des élèves qui ne sont pas indépendantes des opérations mentales qu'ils sont capables de faire et que les difficultés d'utilisation de certaines expressions traduisent des difficultés de conceptualisation.

La classification et la sériation, comme nous l'avons précédemment souligné, sont les activités intellectuelles les plus fondamentales dans l'appropriation des grandeurs en mesure, puisqu'elles permettent de déterminer ce que l'on compte ou quantifie et de comprendre la mise en ordre des comparaisons successives d'objets, de sorte que chacun occupe une place unique dans une série. Si bien qu'un déficit dans une ou dans ces connaissances constituerait un indice prédictif de difficultés en mathématique, selon St-Laurent (2002, p. 273).

3.11 OBSTACLES EN MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ D'APPRENTISSAGE : APERÇU DES SITUATIONS POSSIBLES

Plusieurs études réalisées ont permis de recenser les difficultés auprès d'enfants n'éprouvant pas de difficultés d'apprentissage majeures. Cependant, ces difficultés se retrouvent également au niveau des élèves du régulier, mais se révèlent plus accentuées chez ceux en difficulté d'apprentissage. Ceci rend l'analyse des erreurs en mathématiques commises par ces élèves assez complexe parce que les sources de difficultés peuvent être diverses. Ces constats sont corroborés par Lemoyne et Bisson-Trépanier (1985) et Lemoyne et Lessard (2003), qui indiquent que « *ces élèves ne peuvent effectuer des inférences élémentaires et relier cause et effet. Ils sont pour la plupart du temps incapable de planification, d'anticipation* ». Lemoyne et Lessard (2003) poursuivent en ajoutant que :

> *... ces élèves montrent des incapacités d'exécution, de généralisation ou de transfert de connaissances qui seraient associées aux représentations ou conceptions des informations en mémoire. À part la faiblesse de la construction mentale, ils ne maîtrisent pas non plus la tâche de lecture de l'énoncé d'un problème et ne peuvent même dégager les informations pertinentes à sa résolution.*

D'après Lyons (2002), les élèves en difficulté en mathématiques sont d'abord des enfants isolés du point de vue cognitif. Ils n'ont à leur disposition aucun moyen de représentation et d'anticipation leur permettant de pratiquer l'évolution d'un énoncé et d'anticiper un résultat et c'est parce qu'ils sont privés de moyens, tels que les objets mathématiques (objets mentaux), le langage mathématique (signes, symboles, algorithmes…) et la représentation concrète des objets mathématiques (dessins, schémas) leur permettant de comprendre, que les mathématiques leur apparaissent incompréhensibles.

3.11.1 La position du problème de notre recherche

Il n'est pas de notre intention de dresser un catalogue exhaustif des difficultés d'apprentissage des élèves en mathématiques, mais plutôt de donner seulement quelques exemples significatifs de difficultés récurrentes.

Il a été établi que les grandeurs conditionnent le sens des opérations. Les élèves en difficulté d'apprentissage ne pouvant transférer eux-mêmes leurs connaissances en raison de leur difficulté d'abstraction, leurs représentations localisées aux situations ne peuvent évoluer que si les savoirs qu'elles véhiculent sont décontextualisés puis institutionnalisés. En ce qui concerne l'examen des conduites des élèves et de l'enseignant, nous nous appuyons sur un ensemble de recherches portant sur le diagnostic et l'interprétation des difficultés et erreurs dans les grandeurs en mesure. C'est pourquoi nous portons une certaine attention sur l'enseignement de ces notions didactiques et les interactions des trois pôles qui en découlent.

Au vu de toutes les recherches précitées, nous ne pouvons que les appuyer, car elles encouragent l'apprentissage de la construction du sens, spécifiquement en classe d'adaptation scolaire et ce, par la pertinence de faire découvrir par l'élève les différents concepts des grandeurs en mesure qui s'acquièrent progressivement en résolvant des situations problèmes posées à partir de situations vécues.

En effet, l'auteure de cette recherche n'est pas étrangère au sujet dont elle veut aborder certains aspects, car son expérience en orthopédagogie lui a permise de développer une sensibilité à la réalité des difficultés en mathématiques qu'éprouvent les élèves en difficulté d'apprentissage. Nous demeurons convaincus que les grandeurs en mesure peuvent amener les élèves en difficulté d'apprentissage à découvrir les rapports, les relations et les propriétés et améliorer leur compréhension des mathématiques. Ce qui rejoint les visions de Skemp (1976) et de Brousseau et Brousseau (1987, 1992).

Pour terminer cette section, cette recherche exploratoire d'ingénierie sur les grandeurs en mesure pourrait, nous le souhaitons, mettre en évidence l'importance qu'ont les grandeurs en mesure en mathématique. Elle devrait, d'une part, être poursuivie tout ou au moins étendue à d'autres secteurs des grandeurs en mesure et, d'autre part, rendre sans doute quelques services, en premier, aux enseignants du primaire et plus spécifiquement aux enseignants en adaptation scolaire afin qu'ils sachent mettre en valeur le potentiel et les talents des élèves dont ils sont responsables et, en second, aux chercheurs en didactique et aux mathématiciens intéressés par les grandeurs en mesure.

3.11.2 Pertinence de la recherche

Nous interroger sur la construction du sens des grandeurs en mesure nous apparaît utile. Les élèves en difficulté d'apprentissage se révèlent moins habiles que ceux des classes dites régulières dans la prédiction des conséquences de certains événements représentés. Aussi, en mettant en place des situations didactiques appropriées pour redonner un sens mathématique et physique aux opérations liées aux grandeurs en mesure, nos orientations nous amènent à considérer non seulement l'apprenant face à son objet de savoir. Mais aussi l'apprenant et un autre individu (pair, enseignant), rejoignant ainsi la perspective tripolaire de la relation didactique. Nous voulons faire de notre recherche un travail interactif qui ne se dissocie pas de la construction de l'objet de savoir et de l'apprentissage lui-même. Nous pensons que les grandeurs en mesure, avec leurs pluridimentionnalités conceptuelles, peuvent amener les élèves à construire leur propre rapport à ce domaine de la connaissance. Le problème des grandeurs en mesure qui se pose depuis longtemps trouve encore sa place à l'heure actuelle, aussi bien sur le plan pratique que sur le plan théorique. Aussi, la présente recherche peut permettre aux enseignants d'appréhender la nature et la cohérence de l'instrument de pensée qu'est la mesure, voire les grandeurs en mesure. Nous croyons également que notre recherche sur les grandeurs en mesure avec des élèves en adaptation scolaire représente une contribution originale en elle-même, puisqu'elle exige l'analyse et la synthèse d'apports théoriques et empiriques provenant d'autres recherches. Ainsi, ayant circonscrit le problème de notre recherche, il est important de décrire notre cadre expérimental.

CHAPITRE IV

EXPÉRIMENTATION

> *« Tout notre monde repose sur des fondations* ***mathématiques,*** *celles-ci sont indissociablement imbriquées dans notre culture, au sens large. Si nous ne nous rendons pas toujours compte à quel point elles affectent nos vies, c'est que et pour de bonnes raisons, on les tient à l'écart autant qu'il est possible ».*
>
> Ian Stewart (Gérard Villemin)

Rappelons que dans chacun des chapitres de notre travail, nous situons une phase différente de l'ingénierie. Nous élaborons la phase 3 celle de l'expérimentation, telle que préconisée par cette dernière.

Depuis plusieurs années, les travaux de recherches et les réflexions en didactique des mathématiques prennent des orientations diverses. Un de ces courants porte sur le développement, la complexification et l'appropriation des savoirs mathématiques liés à la fois aux interactions entre les différents acteurs de la situation (apprenants et enseignant) et aux échanges que chaque individu établit lui-même, tant avec les différentes dimensions de cette situation qu'avec le savoir mathématique en jeu.

Historiquement, indique Vergnaud (1994), l'ingénierie didactique se concentrait dans son analyse *a priori* sur les élèves et négligeait les décisions et interventions possibles de l'enseignant. Mais la validation apportée par la réalisation effective a montré que le rôle de l'enseignant est à considérer dans l'analyse *a priori* (abordée plus loin), car il intervient de manière décisive dans le déroulement du processus et conduites des élèves. À l'époque, le moyen d'aborder ces deux questions cruciales, vu l'état du développement de la didactique des mathématiques était alors perçu comme un « *étiquetage* » dû aux rapports entre la recherche et l'action sur le système d'enseignement et au rôle qu'il convient de faire jouer aux « réalisations didactiques » en classe, au sein des méthodologies de la recherche didactique.

Pourtant, selon Artigue (1996, p. 243), il s'agissait :

> *... d'étiqueter par ce terme une forme du travail didactique : celle comparable au travail de l'ingénieur qui, pour réaliser un projet précis, sur les connaissances scientifiques de son domaine, accepte de se soumettre à un contrôle de type scientifique, mais dans le même temps, se*

> *obligé de travailler sur des objets épurés de la science et donc de s'attaquer pratiquement avec tous les moyens dont il dispose, à des problèmes que la science ne veut ou ne peut encore prendre en charge.*

Cela est d'autant plus intéressant que cette faiblesse de l'analyse théorique a, depuis, conduit les chercheurs à prendre pour objet d'études les représentations que se font les élèves dans leur apprentissage en mathématiques ainsi que les phases de bilan et d'institutionnalisation.

Cette préoccupation se répercute autant sur la méthodologie de recherche que sur les orientations didactiques à promouvoir et sur le type de connaissances mathématiques à privilégier.

Nous avons dit vouloir savoir quels sont les procédures et les schèmes, soit les représentations que mobilisent les élèves en difficulté d'apprentissage pour traiter des situations problèmes sur des grandeurs en mesure afin de pouvoir répondre à notre hypothèse et à nos questions de recherche. Nous voulons également étudier comment se passent les négociations des intentions didactiques entre les élèves et leurs enseignants et quelles sont les conduites devant lesquelles les enseignants se montrent à court de moyens d'action.

Cette recherche, de type exploratoire, fondée sur une méthodologie qualitative, veut montrer la nécessité de placer les apprentissages sur les grandeurs en mesure dans des situations signifiantes pour les élèves et à l'intérieur desquelles ils peuvent réellement établir un lien entre les grandeurs en mesure et les nombres. À cet égard, elle est fondée sur une méthode qualitative qui nous a permis, d'une part, de collecter sur le terrain les données liées au dispositif expérimental tout en nous référant à l'ingénierie didactique et, d'autre part, de traiter ces données par une analyse de contenu. Nous présentons notre cadre expérimental de recherche.

4.1 CADRE EXPÉRIMENTAL

On ne saurait appréhender un cadre expérimental sans prendre en compte les fondements théoriques qui ont permis sa conception, son organisation et son montage. Un des enjeux de notre dispositif expérimental est de mettre en évidence les mécanismes qui permettent un processus d'enseignement et des interactions de l'enseignant avec ses élèves. Il nous semble donc essentiel de décrire ses composantes afin de faire ressortir l'intérêt et l'utilité de l'ingénierie didactique, méthodologie utilisée.

Nous avons choisi de mettre en exergue la méthode de l'ingénierie didactique afin de pouvoir revenir sur les raisons qui ont motivé notre choix. Tout d'abord, elle s'est montrée utile à cause de l'analyse épistémologique qui, nous pensons, permet d'apprécier le choix effectué. Rappelons encore que notre projet était d'observer le plus finement possible les activités des élèves au cours de l'appropriation du savoir portant sur les grandeurs en mesure afin de détecter à partir de leurs représentations, l'existence d'obstacles, de les décrire, voire de les expliquer.

De plus, l'ingénierie didactique a été un cadre approprié pour répondre à nos questions et hypothèse de par son aspect de l'analyse *a priori*. Cela nous a permis de déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens. Dans les paragraphes suivants, nous décrivons le découpage temporel de notre processus expérimental en commençant par notre échantillon.

4.2 CARACTÉRISTIQUES DE LA POPULATION

Dans les études exploratoires de nature qualitative ou quantitative, dont le but est la découverte de nouvelles connaissances dans un domaine, de petits échantillons sont généralement suffisants pour obtenir l'information sur le phénomène étudié. De ce point de vue, notre échantillon est composé d'environ 26 élèves du 2^{e} cycle du primaire en adaptation scolaire (EHDAA) et répond aux critères de l'étude. Ces élèves proviennent de deux classes spéciales fermées des écoles Ahuntsic et St-Noël-Chabanel du Regroupement Nord de la Commission scolaire de Montréal (CSDM), dont le territoire est situé au cœur de la métropole du Québec. Ces deux classes comprennent 14 et 12 élèves d'âge varié (9 à 12 ans), d'origines diverses et ayant une expérience mathématique antérieure également variée. Soulignons que la moyenne autorisée par la CSDM dans les classes pour élèves en difficulté d'apprentissage est de 16.

En 2005-2006, la CSDM compte 74 392 élèves au préscolaire, au primaire et au secondaire. Elle est de loin la plus importante commission scolaire du Québec, suivie de celle de Laval. Cette population jeune est desservie par un réseau d'établissements répartis en 131 écoles primaires, 8 écoles offrant à la fois l'enseignement primaire et secondaire, et 33 écoles secondaires (*Rapport annuel d'évaluation de la CSDM*, 2004-2005).

Les élèves de notre échantillon ont été sélectionnés en fonction de leur identification à la cote 10 du MELS qui correspond à la caractéristique -difficultés graves d'apprentissage-, « DGA ». Ils présentent deux ans de retard académique selon la définition du MELS et selon leur évaluation éducationnelle. Toutefois, ils n'ont pas de handicap physique, quelques-uns présentent des troubles de comportement (fiche de classification des difficultés en annexe).

Le terme « difficulté d'apprentissage » réfère toutefois à une ou à plusieurs difficultés que peut éprouver un élève lorsqu'il doit se soumettre aux exigences du système scolaire. Ces élèves pourraient avoir en commun une difficulté relative au traitement de l'information, de même qu'à l'emmagasinage et à la reproduction de l'information reçue. Les définitions du MELS mettent surtout l'accent sur un rendement inférieur, par rapport au potentiel de l'élève en langue maternelle et en mathématiques (voir document 4 en annexe).

Par ailleurs, pour l'année académique 2006-2007, ces élèves pratiquent le décloisonnement pour l'enseignement de certaines matières, telles l'éducation physique ou la religion/morale et ce, depuis l'implantation de la réforme en éducation au primaire. Il semble également qu'ils n'ont pas reçu un enseignement approfondi sur les grandeurs en mesure. Ils possèdent néanmoins quelques connaissances sur les grandeurs qui ne peuvent cependant pas les amener à des méthodes plus élaborées, telles les conversions ou les calculs des nombres à virgule ou également se référer d'emblée à l'unité de mesure conventionnelle. Pour des raisons de confidentialité, il nous a été impossible d'avoir accès à leurs dossiers. Nous parlons maintenant de l'éthique et du choix des contenus de notre recherche.

4.3 ÉTHIQUE

Cette expérimentation s'adressait à tous les élèves des deux classes. Les parents ont tous accepté de participer à l'étude. Un consentement des élèves a aussi été conditionnel à l'obtention de l'acceptation des parents, des directions et des enseignants des écoles ciblées. Toute information pouvant conduire à l'identification des élèves a été supprimée à la demande des parents.

Une lettre de consentement les a informés des objectifs et des modalités de la recherche. Par après, un formulaire de consentement de participation et d'autorisation pour enregistrement sur bande magnétique, rédigé en accord avec les normes déontologiques de l'Université de Montréal, a été adressé aux parents après l'aval des directions des écoles. Nous avons également indiqué dans le formulaire que l'ensemble du dispositif a été réalisé en fonction d'objectifs de recherche et de développement des interventions auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage. Des copies de ces formulaires sont jointes en annexe de notre travail.

4.4 CHOIX DES CONTENUS : LES SITUATIONS PROBLÈMES

Plusieurs écrits affirment que la situation problème est fondée sur un principe de pédagogie active. Cette approche, dit-on, favorise le développement des compétences transversales liées aux savoir-faire, aux savoir-être et aux savoir-devenir. D'où la place importante qu'elle occupe dans la pédagogie de l'intégration des apprentissages car la situation problème exerce le jugement critique des élèves par rapport à leur propre point de vue et à celui de leurs pairs. La situation problème améliore la confiance en soi, la motivation et la communication en équipe, en ce sens que l'élève doit justifier son propos ou demander à son camarade de le faire. Toutefois, elle ne permet pas toujours la situation de validation, car il doit élaborer des preuves pour convaincre ses pairs. Elle est aussi généralement choisie de façon à ce que l'élève, dans la réalisation d'une tâche donnée et face à une difficulté, soit amené à rechercher des moyens de résoudre cette dernière en s'appuyant sur ses connaissances, ses compétences et avec l'aide de l'enseignant. Ce qui rejoint notre recension des écrits puisqu'elle donne un statut à l'erreur et prend en compte les représentations des élèves. La situation problème met l'élève en situation de recherche et est reliée à des situations de son vécu. Elle se doit cependant d'être stimulante et sécurisante sous peine d'abandon de l'apprentissage ou de dépendance de l'élève à l'égard de l'enseignant.

Sans nier l'hétérogénéité des élèves en difficulté d'apprentissage, il s'est agi de ne pas focaliser exclusivement sur leurs difficultés, mais de mettre plutôt en œuvre des activités et de provoquer des savoirs accessibles. Nous sommes partis de la question : « Comment un enseignant peut-il faire pour que ses élèves se posent des questions lors d'un apprentissage, au lieu de s'épuiser à leur donner des réponses à des questions qu'ils ne se posent pas ?

Les difficultés des élèves sur les grandeurs en mesure ont été globalement identifiées lors de la recension des écrits ainsi que par des observations lors de l'expérimentation dans la classe de la chercheure. Nous avions besoin de savoir sur quelles variables nous pouvions jouer et quelle serait l'incidence de nos choix sur les représentations des élèves. Nous voulions également connaître quelles situations problèmes étaient les plus intéressantes et en lien avec notre hypothèse et nos questions de recherche.

Ce sont ces raisons qui ont guidé notre choix. Nous attendions de ces épreuves, des raisonnements et démonstrations, des apparitions de toutes sortes de schèmes (erronées, en voie d'élaboration ou expertes), qui permettraient la réalisation de ces phases et ce, même si des contraintes apparaissent comme les limites de la prise en compte de l'affectif (la phase de déstabilisation) qui n'est pas effectif.

Les aspects positifs des situations problèmes et le fait que les épreuves de Brousseau (1992)[7] aient déjà été éprouvées dans des classes régulières, ont motivé notre choix. Finalement, les situations problèmes portant sur les grandeurs en mesure étant rares et également peu appropriées pour les élèves en difficulté d'apprentissage, il nous a semblé que ces épreuves étaient propices pour notre recherche. Elles se sont, en effet, révélées judicieuses pour l'analyse des conduites des élèves tout en permettant de prendre en compte les objectifs spécifiques de notre recherche. À cela, l'approche par situations était

[7] Brousseau, N. et Brousseau. G. (1992). *Étude de mesurage au CM*. Grand N, nº 50, p. 65-87. Grenoble : Éd. IREM.

un meilleur moyen d'apprendre pour les élèves et de les maintenir dans les activités et également pour nous permettre d'effectuer ultérieurement les phases de notre méthodologie.

Il est primordial de comprendre qu'une ingénierie didactique peut s'étaler sur une longue période de temps. Aussi, afin de pouvoir analyser le champ conceptuel de contraintes dans lequel allait se situer la réalisation didactique effective le temps venu et de nous permettre l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et des obstacles qui marquent leur évolution, nous avons expérimenté les situations problèmes retenues dans notre propre classe auprès de nos élèves et ce, l'année précédent notre expérimentation sur le terrain. Il était donc essentiel de confronter nos questions théoriques avec une mise en œuvre réelle.

La mise à l'épreuve des situations s'est faite dans la classe de la chercheure pendant la deuxième et la troisième période de l'année scolaire, à raison de deux situations par semaine, dû aux exigences du curriculum.

Le processus d'analyse s'est fait durant les vacances d'été. Une synthèse des représentations des élèves a été élaborée aux fins de vérification des variables et afin de définir les comportements attendus des élèves. Le choix des contenus n'a cependant pas été discuté avec les enseignants-hôtes.

Nous avons débuté par l'organisation des séquences d'enseignement des situations problèmes retenues, soit les variables microdidactiques ou locales définies par Artigue (1988, p. 291). De ces situations portant sur plusieurs aspects (longueur, masse, temps, poids d'un récipient vide, mesures décimales), seulement 10 sur la longueur et la masse ont été retenues. Par la suite, ces séquences ont été discutées et aménagées avec les enseignants avant l'expérimentation pour en préserver la cohérence interne.

Dans notre recherche, l'analyse *a priori* est surtout centrée sur les particularités des interactions provenant des situations adidactiques sur les grandeurs en mesure que les enseignants présentent aux élèves à cause de leurs particularités. Nous pensions que c'était par les situations adidactiques que les enseignants allaient débloquer ou tenter de débloquer une situation en se référant à une situation analogue, mais non perçue comme telle par les élèves. Nous décrivons les objectifs, la planification et la mise en épreuve de ces situations problèmes.

4.5 OBJECTIFS DES SITUATIONS PROBLÈMES

L'apprentissage des mathématiques repose en grande partie sur la construction individuelle et sociale des relations entre les objets et leurs représentations. Notre choix de situations problèmes ne veut être exclusif pour aucune des dimensions du savoir. Ce choix est plutôt une recherche de perspective constructiviste afin de proposer aux élèves des situations signifiantes aux élèves.

Ainsi, les situations problèmes présentées ont été définies préalablement aux deux enseignants. Chaque sous-groupe d'élèves ou chaque élève avait à effectuer deux types de tâches :

- construire une représentation d'une situation problème dans un contexte nouveau par des situations problèmes portant sur les grandeurs en mesure qui leur sont présentées, en utilisant les outils et objets mis à leur disposition;
- le faire en revisitant les nombres qu'ils ont à leur répertoire.

Une fois que les enseignants ont pris connaissance des situations problèmes, leur classe a été divisée en trois équipes de quatre. Chaque équipe comprend 2 É. (émetteurs) et 2 R. (récepteurs) séparés (mais qui travaillent ensemble), afin que les expérimentations se déroulent de façon optimale. Cependant, il a été décidé que certaines passations doivent nécessiter des changements d'équipe ou un travail individuel lorsque le climat de la classe le demande. Nous préférons parler un peu plus loin des conduites attendues des élèves dans cette expérimentation, c'est-à-dire avant la phase de l'analyse *a posteriori* pour ne pas obliger le lecteur à revenir sur sa lecture.

4.6 MISE À L'ÉPREUVE DES SITUATIONS PROBLÈMES

Chacune des 10 situations problèmes en vue d'apprentissage est conduite sur deux aspects des grandeurs en mesure (longueur et masse). Elles offrent la possibilité d'une approche plus pragmatique et sont liées à des pratiques sociales pouvant être connues des élèves et pouvant servir de point d'ancrage aux échanges.

La réalisation a été de type modélisation : la transcription des résultats papier/crayon, quand cela a été possible, et la mise en commun des résultats au tableau. Les consignes ont été énoncées oralement et par écrit au tableau aux élèves.

Après l'analyse des contraintes locales, nous avons travaillé sur les variables macrodidactiques ou globales concernant l'organisation globale de l'ingénierie. Nous rappelons que dans l'enseignement spécialisé, les pratiques ne sont pas tout à fait identiques à celles des classes dites régulières. Certains auteurs mentionnent que l'ingénierie didactique ne peut être utilisée sans certaines précautions dues aux difficultés qu'elle peut soulever pour les chercheurs et au fait qu'elle peut se révéler susceptible de poser un défi de taille. À ce qu'on sache, les études sur les grandeurs en mesure n'ont pas fait l'objet de recherches auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage au primaire, supposément en raison des problèmes complexes pressentis et évoqués précédemment. Nous avons pensé que, malgré tout, si les classes d'adaptation scolaire doivent être considérées comme des institutions différentes de celles des classes ordinaires, la TSDM, qui prend une ampleur importante, étant en constante évolution, peut nous permettre d'être plus attentifs dans les observations des variables didactiques qui favorisent ou qui bloquent chacune des procédures possibles.

4.6.1 Planification des situations problèmes

Les situations problèmes ont été structurées autour de trois niveaux :

- concret (matériel concret);
- semi-concret par l'exploration (représentations et résolutions des situations à l'aide de supports pour écrire ou dessiner);
- symbolique (utilisation de lettres et de chiffres).

Pour nous, toute activité d'exploration vue comme une activité de manipulation est construite autour de l'utilisation d'objets matériels ou semi-concrets et est soutenue par une caractérisation d'objets. Elle suppose une situation à explorer et un outil d'action.

L'exploration et la validation se trouvant intimement liées à cette caractérisation d'objets, elles sous-entendent une organisation des interventions chez l'enseignant pour orienter l'exploration de l'élève.

Nous avons indiqué les objectifs et le processus de planification des situations problèmes. Nous présentons maintenant le matériel avec lequel elles ont été bâties.

<u>Matériel pour les grandeurs en longueur</u>

- Des bandes de 1,5 cm environ de largeur, découpées dans du papier Canson (papier de construction) de couleurs différentes :
  - ✓ 2 bandes vertes de 64 cm de longueur;
  - ✓ 2 autres bandes vertes de 57 cm de longueur;
  - ✓ 2 bandes jaunes de 42 cm de longueur;
  - ✓ 2 autres bandes jaunes de 40 cm de longueur;
  - ✓ 2 bandes bleues de 32 cm de longueur;
  - ✓ 2 autres bandes bleues de 51 cm de longueur;
- Des bandes vertes, jaunes, bleues de 1,5 cm de largeur découpées dans le même papier que les précédentes d'environ 70 cm de longueur, en assez grand nombre.
- Des bandes *étalon* de 5 mm de largeur découpées dans du papier Canson gris ou marron, tout identiques, désignées par la lettre U, de 12 cm de longueur. Un assez grand nombre de ces bandes ont été prévues.
- Enfin, des feuilles blanches pour écrire des messages.

<u>Matériel pour les épreuves de masse dans le domaine des grandeurs</u>

- une balance à plateaux pour chaque équipe;
- plusieurs objets à peser (bas de sable, boîtes de trombones, craie pour les trottoirs, carnets de notes, paires de ciseaux, stylos-feutres, livres de bibliothèque, doubles décimètres…)
- quatre catégories de clous achetés dans un magasin qui tiennent lieu de poids, en assez grand nombre pour tous les groupes;
  - ✓ des gros clous de charpentier à tête plate de 103 mm de longueur et qui pèsent chacun environ 4,20 grammes;

- ✓ des moyens clous à tête plate de 70 mm de longueur et qui pèsent chacun environ 1,40 grammes;
- ✓ des petits clous à tête plate de 33 mm de longueur qui pèsent chacun environ 0,69 grammes;
- ✓ des minis clous à tête plate de 20 mm de longueur qui pèsent chacun environ 0,35 grammes.

Ces clous sont en assez grand nombre pour les deux classes afin que certains élèves n'aient à attendre après leurs pairs pour utiliser ceux qu'ils désirent. La dénomination gros clous, moyens clous, petits clous et minis clous a été choisie pour les différencier. Par ailleurs, nous avons dû adapter les mesures des clous, car ceux utilisés par Brousseau (1992) étaient de fabrication française. Ceux qui ont servi à l'expérimentation ont une mesure impériale, étant fabriqués aux États-Unis. Nous avons adapté les mesures de objets des situations sur la masse par rapport aux variables que représentent les clous.

- des feuilles blanches pour l'écriture des messages.

Nous avons aussi malheureusement utilisé trois sortes de marque de balances. Il a fallu en chercher en nombre suffisant dans deux autres écoles que la nôtre pour satisfaire aux besoins de toutes les équipes. Une école secondaire et une école primaire nous ont prêté une partie de ce matériel. Nous parlons maintenant de la mise à l'épreuve de ces situations problèmes.

4.6.2 Organisation de l'expérimentation

L'expérimentation s'est étendue sur une période d'environ six mois au cours de l'année scolaire et ce, après la déclaration officielle en octobre de la clientèle 2006-2007, c'est-à-dire de décembre 2006 à mai 2007. En ce qui concerne l'encadrement de cette expérimentation, la chercheure s'est occupée de l'observation et de la codification des données et un étudiant du filmage.

Nous avons travaillé sur le facteur temps pour la gestion de l'appropriation des élèves à cause des différents niveaux de compréhension et de niveaux en classe. Les enseignants titulaires qui nous ont reçus se sont chargés de l'expérimentation des situations didactiques soumises à leurs élèves. Nous avons déterminé avec eux le temps maximum de passation au-delà duquel les élèves risquaient d'être trop fatigués ou n'avoir plus en mémoire l'activité précédente ou par faute d'inattention de fournir un rendement inférieur à leurs capacités réelles.

Ce décalage entre les passations a été décidé en accord avec les enseignants et la chercheure. Ceux-ci l'ont demandé à cause de la dynamique de leur classe, mais aussi afin « d'aérer l'esprit de leurs élèves ». La passation de l'épreuve a été effectuée à l'intérieur de la grille horaire allouée aux mathématiques, c'est-à-dire sur quatre avant-midis du lundi au jeudi et en alternance sur 12 périodes d'enseignement de 45 minutes au plus chacune (deux avant-midis pour chaque enseignant, c'est-à-dire lundi et mercredi matin pour un des enseignants et mardi et jeudi matin pour le deuxième).

En ce qui concerne la répartition des équipes, les enseignants ont disposé les élèves en équipe de quatre, de trois, de deux ou individuellement selon le cas, afin de leur permettre de participer pleinement aux activités et surtout d'éviter la désorganisation de la classe.

Malgré tout, des contraintes institutionnelles ont quelquefois perturbé le déroulement des passations (réunions convoquées par la direction qui n'étaient pas inscrites au calendrier, périodes de collation ou du lait-école qui duraient une dizaine de minutes, absences du titulaire certains jours et d'un ou de plusieurs élèves à cause de l'intempérie ou arrêt de l'activité à cause du climat de classe). Nous aurions souhaité que l'expérimentation se déroule au même moment dans les deux classes, malheureusement, un des enseignants a manifesté le désir de commencer l'expérimentation après les vacances de Noël pour finaliser un projet déjà prévu pour cette période de l'année. Il a commencé l'expérimentation à la mi-janvier (au retour des vacances de Noël). Toutefois, l'ordre de présentation des situations problèmes a été le même pour les élèves des deux écoles afin de nous permettre de faciliter le dépouillement des données et leurs analyses. Nous parlons maintenant du type de notre recherche et de la collecte des données.

4.7 CUEILLETTE ET ANALYSE DES DONNÉES

Les données d'une recherche peuvent être recueillies de diverses façons, généralement de façon quantitative ou qualitative. Notre recherche, quant à elle, se veut qualitative et exploratoire avec une approche interprétative.

La méthode qualitative considère les données difficilement quantifiables et recourt à une analyse davantage inductive exploratoire, à savoir répondre aux questions du comment et du pourquoi. Elle s'avère adéquate pour la compréhension de phénomènes sociaux et consiste à retranscrire les données qualitatives, à se donner une grille d'analyse, à coder les informations recueillies et à les traiter. Plusieurs auteurs indiquent qu'il ne faut pas voir les méthodes quantitative et qualitative comme opposées, mais plutôt comme des méthodes différentes qui peuvent s'enrichir et se compléter.

Des deux outils de la méthode qualitative mis à notre disposition, l'observation en situation et l'entretien, nous avons choisi l'observation en situation non participante qui consiste à observer, à étudier et non à prendre part aux activités des élèves. Nous nous sommes inscrits dans le rôle « d'observateurs complets ». Martineau (2005, p. 5) le décrit comme un rôle dans lequel le chercheur ne fait qu'observer et ne prend aucunement part à l'action. Bien que reconnu comme observateur, il réalise une intégration en retrait.

Pour nous, l'observation participante, de par l'implication personnelle du chercheur, entraîne la modification de l'objet et conduit à une certaine forme de subjectivité qui ne cadre pas avec notre recherche. Il n'était donc pas question d'interférer dans le processus d'enseignement et d'expliquer quoi faire et comment faire aux élèves qui, malgré tout, nous ont maintes fois sollicités, ce qui aurait pu nuire aux observations et biaisé nos analyses.

Par ailleurs, on insiste souvent sur la difficulté de ce procédé qui suppose une sorte de dédoublement et qui, à notre avis, est difficile à tenir. Cette limite est d'ailleurs mise en évidence par Diaz (2005, p. 6) qui mentionne que « ... *quand on joue on ne peut tout faire à la fois; on ne peut jouer et prendre le temps de voir ce que l'on fait* ». Alors, comment être à la fois celui qui agit et celui qui, en quelque sorte, se regarde agir ?

Adopter un outil méthodologique n'est pas neutre et sans incidence et, comme l'affirme Martineau (2005, p.7) : « *...si le chercheur se réfère à une position interprétative (inspirée de la phénoménologie), l'objectif consistera avant tout à comprendre la signification que les acteurs attribuent à leurs pratiques. Par conséquent, le regard se portera surtout sur la construction du sens* ».

Pour lui, le chercheur portera une attention particulière à l'articulation logique entre sa position épistémologique clairement définie et ses outils d'observation et d'analyses de données. Notre souci était d'arriver à une véritable connaissance objective de la réalité. Aussi, avons nous utilisé, outre l'observation non participante, l'enregistrement des séquences à l'aide d'un support matériel à partir de vidéo films. Ces dernières nous ont permis de reproduire plus d'une fois le comportement à l'étude et les verbalisations échangées. L'étude d'observation et la cueillette des données peuvent difficilement être obtenues autrement que par l'observation en situation, comme la recherche auprès de jeunes enfants et pour l'étude de petits groupes.

4.7.1 Type de recherche et collecte des données

Les représentations sont très souvent floues et imprécises, même pour les gens qui les véhiculent et la plupart des outils ne fournissent alors qu'un aperçu très partiel, d'où la nécessité d'avoir recours à plusieurs sources de renseignements complémentaires afin de brosser un portrait à partir des indications convergentes qu'elles peuvent éventuellement livrer.

Nous avons jugé qu'il était avantageux de recourir à trois instruments qui, grâce à leurs caractéristiques différentes, nous ont conduits à une meilleure compréhension de notre recherche.

Ainsi, un cahier de bord a été utilisé pour les notes descriptives qui ont rendu compte des situations observées. Ces notes servaient à amorcer l'analyse, dès la cueillette des données, afin que le processus d'interprétation et d'analyse se fasse tout au long de la recherche et non seulement à la fin du terrain. Nous y avons consigné ce qui s'est passé et les avons complétées avec les impressions consécutives au visionnement de la vidéo.

Lorsque cela a été possible, nous avons utilisé des écrits d'élèves avec des situations d'apprentissage portant sur les aspects précités des situations problèmes (les trois premières et la dernière). Mais après lecture, ces écrits se sont avérés peu compréhensibles. Par les traces écrites des élèves, nous voulions établir une mise à jour de l'évolution de leur pensée réflexive sur les apprentissages mais malheureusement, leurs productions se sont avérées illisibles. Les notes du cahier de bord, les rares productions d'élèves, les situations didactiques filmées et enregistrées sur bandes vidéo et leurs contenus constituent la base de nos données. Ce qui nous a fourni le corpus de données nécessaires pour la recherche, mais nous a empêchés de procéder à une triangulation. Afin d'appréhender les données recueillies, nous avons fait l'inventaire des informations recueillies et les avions transcrites pour faciliter la lecture et avoir une trace fidèle. Ce verbatim a représenté les données brutes de la recherche.

La transcription et la fidélité du corpus de données ont été assurées par la transcription mot à mot des paroles de tous les participants ainsi que de leurs gestes. Nous avons ensuite élaboré une grille de transcription des enregistrements en indiquant la date, le thème abordé et le code de l'école. La lecture des transcriptions, des notes prises et de quelques productions d'élèves a permis de réaliser un premier niveau de codification des propos recueillis, par thèmes et sous thèmes, ce qui nous a menés à une description des conduites rapportées révélant « une première formulation signifiante » comme le préconise Mucchielli (1996).

Les données étant retranscrites et les thèmes définis, avant de les coder, nous avons construit des grilles d'analyses composées de critères et d'indicateurs. Cela, grâce à la technique d'analyse thématique telle que présentée par Huberman et Miles (2001). Cette technique qui consiste en un repérage systématique et un examen des thèmes abordés dans un corpus soumis à l'analyse de contenu a deux fonctions principales :

- relever tous les thèmes pertinents en lien avec les objectifs de la recherche;
- relever les récurrences et procéder à des regroupements aux fins d'analyse et d'interprétation.

Cette technique permet de formuler des explications fécondes, d'évaluer la causalité locale et même de respecter la dimension temporelle. D'après Coffey et Atkinson (1996, p. 10), elle est également un processus flexible et réflexif qui recourt à l'astuce et à l'imagination. Elle s'avère aussi une ébauche de cadre d'analyse puisqu'elle est généralement bâtie en fonction de la recension des écrits.

Afin de réduire le laps de temps séparant la cueillette d'informations de la rédaction, tel que préconisé par Deslauriers (1991), nous avons procédé au codage. Afin de respecter la confidentialité des participants, nous avons donné un code à chacune des écoles, aux enseignants et aux groupes d'élèves. Nous avons identifié les élèves par un numéro de groupe attribué lors de l'activité (**É1** pour élève 1, **R** pour récepteur et **É** pour émetteur). Les activités se faisant en équipe, il a été impossible d'identifier les élèves par leur prénom. C'est pourquoi nous leur avons attribué un numéro par rapport au temps d'intervention. La composition des équipes a été faite par les enseignants et par rapport au climat de la classe, de façon à ne pas à perturber l'expérimentation.

La première école qui a commencé les expérimentations a eu le code **EC1** (EC pour école et 1 pour le numéro 1), la deuxième le code **EC2**. Nous avons aussi donné un code aux enseignants titulaires, **ET1** pour le premier (enseignant titulaire 1) et **ET2** pour le second. En ce qui concerne les situations problèmes, nous les avions codées SA1, SA2 et ainsi de suite (situation d'apprentissage 1 ou 2...) selon l'ordre de passation des situations.

Pour l'établissement des catégories d'analyse, nous avions découpé le texte en unités sémantiques (découpage des idées et des thèmes). Ces dernières se présentent comme une succession de tours de paroles, de passages qui ont une signification faisant état des diverses interactions mettant en relation une dépendance conditionnelle, comme le souligne Kerbat-Orecchioni (1990, p. 193); toute interaction créant sur la suite un certain nombre de contraintes et un système d'attente. Selon l'auteure (1990, p. 218), une interaction se découpe en séquences, « bloc d'échanges reliés par un fort degré de cohérence sémantique et/ou pragmatique ».

Dans la littérature, ces séquences portent différents noms : *épisode* pour Altet (1994), *en boucles*, ouverte et provisoire correspondant aux événements et conceptions pour Brun et

Conne (1990, p. 270). Ces derniers rapportent d'ailleurs que ce type d'analyse met en évidence des processus didactiques comme le découpage du protocole en unités.

Bien que très proches les uns des autres, nous avons opté pour le terme *épisode*, qui nous semblait le plus approprié pour notre recherche. Selon Perraudeau (2002, p. 145-146), cette technique est appropriée au découpage des entretiens, car il est marqué par plusieurs indicateurs : une ouverture, une phase intermédiaire de questions réponses et une fermeture.

La notion d'épisode utilisée pour analyser les échanges collectifs en classe est productive car, selon nous, elle permet de définir les interactions observables à l'intérieur d'une situation. Elle permet aussi de mettre en évidence l'amorce de la situation, les transitions qui font passer d'un état de représentation à un autre et ainsi saisir les mécanismes de ce passage et une fermeture de l'activité, même si elle est provisoire. La mise en épisodes, architecture pertinente de l'échange, a été retenue pour analyser les séquences didactiques par groupe thématique des entretiens de notre protocole.

Une dizaine de vidéocassettes des situations d'apprentissage ont été transférées sur DVD afin d'en faciliter la transcription.

4.7.2 Analyse de protocoles d'observation

Recueillir et transcrire les données ne suffit pas, font remarquer certains auteurs, il faut s'y retrouver. Afin d'éviter de nous retrouver devant une montagne de documents, nous avons repris, à la manière d'un entonnoir, chacune des situations observées que nous avons croisées avec nos notes afin d'identifier les conduites des élèves et les stratégies des enseignants qu'elle reflétait (Portugais, 1995, p. 113).

La catégorisation est l'opération centrale de toute analyse de contenu. Une deuxième catégorisation a donc été nécessaire pour permettre une classification à partir des thèmes généraux provenant de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991) appliquée aux structures additives et ce, pour les conduites d'élèves, afin d'analyser les occurrences sur les éléments des grilles d'analyse. Rappelons que ce cadre conceptuel a permis d'identifier une classe de problèmes lorsqu'elle se présente et d'associer à l'activité de l'élève un schème de conduite selon la classe de problèmes. Nous avons appliqué le même processus, mais cette fois pour les stratégies des enseignants à partir de la typologie de Portugais (1995).

4.7.3 Méthode de réduction des données

Pour analyser et interpréter des données en détail, il ne suffit pas de décrire et d'interpréter sommairement, il faut présenter les données dans une perspective qui dépasse la simple constatation (Poisson, 1991). Il souligne qu'il faut choisir et noter uniquement les faits et les événements qui ont vraiment de l'importance par rapport aux buts poursuivis.

Cette méthode sert également, indiquent Brun et Conne (1990, p. 265), à restituer les conduites, actions et propos des élèves et de l'enseignant, des interactions observées au fur et à mesure de l'avancement des questionnements et des tentatives de solutions. Aussi n'apparaissent dans ce travail, que les parties analysées et interprétées jugées les plus intéressantes : les conduites des élèves à l'aide de la (TCC) de Vergnaud (1991) (Vergnaud, 1981; Fayol, 1990), Vilette, 1996; de Bideaud *et al*. (2004).

Nous avons procédé de façon identique pour les stratégies utilisées par les enseignants afin de les mettre en parallèle avec celles décrites dans la typologie des stratégies des enseignants de Portugais (1995).

4.7.4 Validité et fidélité des données

Une des originalités de la méthode d'ingénierie didactique (Artigue, 1996, p. 257) réside dans son mode de validation, essentiellement interne. Ce processus s'engage dès la phase de conception via l'analyse *a priori* des situations didactiques de l'ingénierie étroitement liée à sa conception locale.

La validité d'un test est généralement définie comme sa capacité de mesurer ce qu'il est censé mesurer alors que la validité d'une analyse de contenu est la capacité de recourir à l'interprétation. Elle est adaptée pour une recherche qualitative. Elle ne mesure pas, comme la fidélité, l'instrument de mesure par rapport à lui-même mais l'exactitude objective, la pertinence.

La validité de cette recherche se caractérise par les interprétations faites de nos résultats en regard des observations analysées et des composantes de notre plan de recherche, puisqu'à la fin de l'analyse des données, nous avons vérifié la validité des propositions théoriques sur lesquelles s'appuyaient notre hypothèse et nos questions par la mise en branle d'un processus de va-et-vient constant entre observations et théorie.

Il est vrai que nous nous sommes vite rendu compte que la préanalyse était extrêmement laborieuse à cause de la masse de données. Toutefois, dans une approche statistique, ce sont les traitements de données qui guident l'interprétation. Des logiciels auraient seulement permis l'exportation à travers la construction de rapports. Ainsi, au lieu de nous enfermer dans une technique imposée par un logiciel, nous avons pensé que le choix de l'analyse de contenu avec des allers-retours entre codage et décodage pourrait enrichir notre analyse avec des éléments illustratifs. Cette démarche de restitution relève du jeu des acteurs, les difficultés rencontrées aussi bien que les pratiques d'ajustement. En conséquence, le fait de décrire des conduites en s'appuyant sur un outil informatique nous a semblé réducteur. Nous avons donc préféré exploiter manuellement nos données afin de les catégoriser, de les décrire, de les traduire ou du moins de saisir leur signification et non la fréquence d'un phénomène. Nos grilles étant là pour valider nos questions et hypothèse aux théories auxquelles notre expérimentation se réfère de façon *a priori*.

Il nous a semblé faire œuvre plus utile en décrivant en mots ces conduites manifestées par les élèves avec l'analyse de contenu retenue, qui nous a permis d'assurer nos analyses. Il s'agissait d'extraire des épisodes du verbatim pour répondre à des questions précises et de les confronter au cadre théorique.

Pour finir, comme il n'y a pas de chiffres à présenter, nos données qualitatives ont été présentées comme des faits clarifiant les principales conclusions. Notre but n'était pas de dénombrer le nombre d'élèves ayant réussi les activités, mais de décrire en termes qualitatifs les résultats.

La validité suppose la fidélité de l'instrument de mesure. Cette fidélité a été assurée, dans un premier temps, par les observations et la compréhension du phénomène observé. Puis, dans un deuxième temps, par l'interprétation et l'analyse en profondeur des données mises en relation dans notre cadre théorique.

Nous pouvons donc affirmer que nos résultats sont conformes à la réalité, car reposant sur la pertinence, la précision et l'exhaustivité de ses composantes méthodologiques.

CHAPITRE V

ANALYSE *A POSTERIORI*

> *« Dans l'enseignement, on peut observer des pratiques qui s'en tiennent à la bonne méthode sans aller chercher plus loin. Plus rares sont celles qui offrent un véritable choix aux élèves, et leur présentent un commentaire raisonné sur les avantages et les inconvénients de chaque méthode envisageable. Or, c'est justement en cela que consiste une connaissance opératoire : raisonner et agir en fonction de certaines conditions ».*
>
> (Vergnaud, 1996, p. 281)

Au chapitre précédent, nous avons présenté la méthode de recherche qui nous a permis de recueillir les données analysées et interprétées dans ce chapitre. L'enjeu expérimental de cette recherche a été d'amener des élèves du 2e cycle en adaptation scolaire du primaire à élaborer des représentations découlant des grandeurs en mesure (longueur et masse).

Nous effectuons l'analyse *a posteriori* de nos séquences didactiques et cette phase s'appuie sur l'ensemble des données recueillies lors de l'expérimentation; comme les observations réalisées lors des séances d'enseignement, mais a partir de conduites d'élèves en classe. C'est au cours de cette phase qu'a lieu la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori* permettant d'évaluer les situations didactiques sur le plan des savoirs et des connaissances mis en jeu et de valider les hypothèses formulées dans la recherche. Cette confrontation laisse ainsi apercevoir ou apparaître des distorsions et oblige les chercheurs à proposer des modifications afin de les réduire. Dans le cadre de notre recherche, l'examen de conduites des élèves et leurs interactions avec l'enseignant permettent l'étude des situations.

Nous rappelons au lecteur que notre but n'est pas de comparer des performances d'élèves, mais d'analyser et de comprendre leurs représentations à partir de leurs conduites dans plusieurs situations d'apprentissage sur les grandeurs en mesure, selon la dynamique de l'ingénierie didactique. Par contre, l'analyse de contenu privilégiée peut se définir comme étant l'analyse systématique des idées exprimées dans un texte et réalisée à l'aide de mots assemblés, regroupés ou répartis dans des segments sémiotiques, permettant l'interprétation des données en tenant compte de l'ordre d'apparition des informations et de l'accent qu'a mis l'élève sur certaines informations. De ce fait, l'emphase n'a pas été mise sur la justesse des résultats, mais sur les hypothèses et conjectures choisies par les élèves. Le défi fondamental de ce travail était de détourner l'usage des situations didactiques pour la classe ordinaire, de manière à confronter sciemment les schèmes et les compétences mathématiques des élèves réputés en difficulté.

5.1 CONDUITES ATTENDUES DES ÉLÈVES

Les situations problèmes proposées aux élèves ont nécessité la coordination de plusieurs tâches. Les conduites attendues des élèves devaient être différentes selon le problème posé :

- dans le cas du mesurage des bandes et de la pesée de certains objets, *l'estimation perceptive et globale des quantités ainsi que les relations internes comme la relation d'ordre et l'équivalence*;
- dans le cas des exercices de conversion comme les études des messages, le travail sur les écritures, *les comparaisons d'écriture ou transformations d'écriture, la relation d'ordre et d'équivalence inhérente à la comparaison*, *par des calculs* :
  - ✓ *automatisés (réponses stockées et rappelables dans d'autres situations problèmes);*
  - ✓ *réfléchis (dans lesquels plusieurs procédures aboutissent au résultat);*
  - ✓ *oraux et écrits.*

Rappelons que les dix situations problèmes ont été menées de la même manière auprès de tous les élèves et ont pris la forme d'épreuves papier/crayon et tableau pour chacune des deux écoles différentes.

5.2 ANALYSE *A POSTERIORI* DES SITUATIONS À CHACUNE DES SÉQUENCES DIDACTIQUES

Au cours de cette phase, nous avons réalisé que notre travail ne pouvait être identique en tous points à d'autres recherches ayant utilisé la même méthodologie. Cela rejoint les assertions d'Artigue (1996, p. 63 et 253) qui mentionne que les analyses préalables de toutes les ingénieries ne peuvent être semblables, car les exigences et les objectifs ne sont pas identiques et n'interviennent pas tous de façon explicite; par rapport au problème posé, à savoir une étude de conditions de viabilité, la théorie didactique, constituent un appui que le chercheur utilise à la façon d'un ingénieur. Mais c'est sur la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori* que se fonde essentiellement la validation des hypothèses de la recherche.

Lors de cet examen, nous nous sommes intéressés aux représentations des élèves à partir de leurs conduites et à leurs interactions avec l'enseignant. Les situations problèmes présentées aux élèves ont visé une extension et une coordination des connaissances numérales et numériques qui interviennent dans la composition additive de nombres. Nous avons pris en considération la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991) appliquée aux structures additives quant aux erreurs dans les procédures des élèves et également les stratégies déployées par l'enseignant lors de ses interactions avec les élèves (Portugais, 1995)[8].

Nos analyses ne sont donc pas un simple résumé de contenu de protocole découpé. Les extraits découpés en épisodes ont pour but de reconstruire la logique du déroulement et de restituer les conduites, les actions, les propos des élèves et de l'enseignant. Ils ont permis d'interpréter les analyses issues de ces séquences didactiques; chacune étant marquée par un indicateur d'ouverture et de fermeture liée à une question particulière ou à un changement dans l'activité de l'élève. Nous le présentons en quatre plans :

- une micro-analyse d'épisodes significatifs retranscrits de manière à répondre à nos objectifs de recherche;
- un verbatim des extraits d'épisodes pertinents et de leurs analyses;
- un tableau reprenant tous les faits significatifs;
- une synthèse des situations problèmes qui tentent de redonner un plus grand niveau de généralité à ces conduites**.**

La partie des résultats d'une thèse est généralement la plus ardue à lire. Nous avons voulu, par cette présentation, satisfaire tous nos lecteurs en communiquant nos résultats de plusieurs façons efficaces : du textuel (analyses plus générales) au visuel (analyses

[8] Les stratégies de l'enseignant de Portugais (1995) nous permettent des mises en parallèle. Le lecteur doit comprendre que ces stratégies sont une importation directe et qu'elles ont une valeur heuristique dans cette recherche.

plus spécifiques comme l'extraction des idées et leurs présentations dans un tableau), pour ne pas qu'ils perdent le fil des idées par un trop long extrait de verbatim.

La conclusion fait le bilan des résultats de la recherche selon les tendances globales qui se dégagent de l'ensemble des synthèses. Nous les confrontons aux trois questions en lien avec notre hypothèse de recherche, à savoir :

1) Dans quels types de situations les savoirs dans les grandeurs en mesure prennent-ils du sens chez les élèves en difficulté d'apprentissage ?
2) Quels sont les procédures et les schèmes qu'élaborent ces élèves dans la résolution des situations problèmes sur la mesure des longueurs et des masses ?
3) Dans un processus d'enseignement des grandeurs en mesure, quelles sont les conduites devant lesquelles l'enseignant est à court de moyens d'action ?

Pour finir, nous esquissons quelques pistes pour de prochains travaux de recherche sur les grandeurs en mesure en adaptation scolaire.

5.3 ÉTAPE A – ÉPREUVES DES LONGUEURS DANS LE DOMAINE DES GRANDEURS

Avant chaque analyse et interprétation, nous décrivons chacune des situations de façon détaillée (énoncé du problème, consignes) et rappelons une fois de plus que ces situations problèmes proviennent d'une étude de Nadine Brousseau.

Matériel pour les grandeurs en longueur

- Des bandes de 1,5 cm environ de largeur, découpées dans du papier Canson (papier de construction) de couleurs différentes :
  - ✓ 2 bandes vertes de 64 cm de longueur;
  - ✓ 2 autres bandes vertes de 57 cm de longueur;
  - ✓ 2 bandes jaunes de 42 cm de longueur;
  - ✓ 2 autres bandes jaunes de 40 cm de longueur;
  - ✓ 2 bandes bleues de 32 cm de longueur;
  - ✓ 2 autres bandes bleues de 51 cm de longueur;
  - ✓ des feuilles blanches pour écrire des messages

- Des bandes vertes, jaunes, bleues de 1,5 cm de largeur découpées dans le même papier que les précédentes d'environ 70 cm de longueur, en assez grand nombre.
- Des bandes *étalon* de 5 mm de largeur découpées dans du papier Canson gris ou marron, toutes identiques, désignées par la lettre U, de 12 cm de longueur. Un assez grand nombre de ces bandes ont été prévues.

Nous avons aussi prévu un grand nombre de ces étalons pour que les élèves puissent les manipuler à leur guise.

Énoncés des situations problèmes 1 et 2 (Jeu de communication et études des messages)

Consigne

Je vais donner **une bande de couleur** aux **É.** Certains en auront une verte, d'autres une jaune, d'autres encore une bleue. Ils devront écrire un message dans lequel ils désigneront la mesure de la longueur de cette bande en utilisant cet « étalon ». L'enseignant montre la bande unité grise ou marron). Tous ces étalons ont la même longueur. (L'enseignant le montre par superposition). Les messages seront envoyés aux **R.** qui devront réaliser dans un deuxième temps une bande de mêmes longueurs que celle des émetteurs.

L'étude des messages se fait sous forme d'une discussion collective.

5.3.1 Analyse des situations problèmes 1 et 2

La première activité est centrée sur une phase de sensibilisation du bien-fondé de la tâche. Il faut déterminer la mesure des bandes. Une bande de papier est donnée. Une unité, l'étalon, est donnée et expliquée. La situation est additive avec recherche de l'état final. Les élèves doivent estimer la longueur d'une bande et en exprimer la longueur par un nombre étalon. La deuxième activité demandait en outre d'indiquer la mesure de longueur par excès ou par défaut. Leur démarche devait être suivie d'arguments justifiant leur décision.

Les procédures des élèves sur le problème portent sur le mesurage des bandes qui arrivent justes et de la bande à travailler avec un étalon qui dépasse. Plusieurs conduites ont été observées : certaines organisées, d'autres en voie de l'être, quelques-unes erronées.

Dans l'ensemble, les élèves ont généralement compris ce qu'il fallait faire dans ces activités de mesurage[9]. Dans plusieurs épisodes, nous voyons qu'une dizaine d'élèves ont adopté des conduites similaires:

- report de superposition d'un étalon bout à bout sur la bande;
- demande de plusieurs étalons afin de les étendre sur toute la bande;
- des raisonnements erronés quant à l'utilisation de l'étalon qui dépasse;
- des limitations à une seule réponse;
- des recherches de solution dans lesquelles on aperçoit des organisations expertes. Par exemple, les tours de parole 87 et 92 qui n'ont pas encore le statut d'écritures désignant des fractions...

De ces conduites apparaissent comme procédures et schèmes :

- faire la somme des étalons pouvant être étendus sur la bande;
- couper l'étalon pour qu'il recouvre le reste de la bande;
- le plier en quart;
- le placer à la verticale supérieure ou inférieure ou en oblique.
- quatre ou six élèves choisissent de ne pas travailler l'étalon qui dépasse.

Un élève intègre à sa réponse une relation, la couleur de la bande. Il semble néanmoins avoir compris l'énoncé du problème : rechercher la mesure de la bande. Cette relation, dite « unaire », n'est pas considérée comme une relation au sens strict puisqu'elle ne relie pas deux ou plusieurs éléments entre eux, mais seulement un, la bande (Vergnaud, 1991, p. 52). Par ailleurs il indique la couleur, la forme, la taille, l'existence ou l'absence de telle ou telle caractéristique qui sont des propriétés utilisées par les enfants pour reconnaître les objets, les classer, les désigner, les représenter, bref pour les penser.

---

[9] Nous rappelons avoir assigné des numéros aux enseignants par rapport à leur école. ET1 pour l'enseignant de l'école 1 et ET2 pour l'enseignant de la deuxième école. De même, nous n'étions pas autorisée à nommer les élèves par leur prénom. Nous leur avons donné un numéro par tour de parole. Él.1 pour le premier élève à prendre la parole, Él.2 pour le deuxième et ainsi de suite…

Dans les deux classes, nous remarquons que quatre ou cinq élèves posent une question à chaque étape du raisonnement et que d'autres veulent utiliser une mesure à peu près connue, les centimètres. Un autre épisode montre un élève qui demande s'il peut écrire le résultat dans une mesure non autorisée. Dans ces deux cas, nous voyons des difficultés qui peuvent relever d'une difficulté de conceptualisation à cause de la prégnance de connaissances, d'objets et de pratiques à propos de ces objets. On peut parler d'une conception obstacle (exprimer le résultat en **cm** au lieu du nombre d'étalons) attribuable aux habitudes scolaires (règle graduée en cm).

Par ailleurs, l'approche d'institutionnalisation primitive de l'enseignant (il désigne à l'élève explicitement et lui montre la procédure correcte à engager) confirme à certains qu'ils peuvent « plier » l'étalon, mais ils n'engagent toujours pas de procédure. Il ressort que dans les deux classes, une dizaine d'élèves manifestent leur difficulté de compréhension de la tâche en ce qui concerne l'étalon qui dépasse la bande. Ils disent ne pas comprendre la consigne ou ne pas savoir quoi faire de ce « reste d'étalon ». Il convient de noter que le message de certains émetteurs n'était pas très explicite pour leurs pairs. Toutefois, ces difficultés pourraient possiblement être dues au fait qu'ils n'ont pas donné de sens aux mesures effectuées.

« ...10 - ET1 : On n'utilise aucune règle, c'est l'étalon unité que je vous ai distribuée qu'il faut utiliser... C'est compris ? (Il attend 4 sec.)

Alors, allez-y.

(Les R. se mettent à manipuler les étalons. Il y en a qui dessinent des repères sur la bande de couleur donnée. L'enseignant, lui, passe pour observer le travail des équipes et pour répondre aux questions).

11 - ET1 : C'est celui ou celle qui a la bande qui doit manipuler... aucun ami ne le fait pour lui ou pour elle...

12 - Él.1 : Mais M., comment on fait pour l'affaire... le morceau là (il le montre) qui dépasse ?

13 - ET1 : Justement, vous devez trouver une stratégie pour mesurer cette partie-là... Vous voyez bien qu'il y a un morceau qui dépasse... que ça n'arrive pas juste... L'É. et le R. doivent échanger pour trouver une solution...

14 - ET1 : (Il passe à une équipe composée de filles) : Ici, les filles, c'est L'Émetteur qui doit...

(Les filles opinent de la tête. Chaque équipe discute et essaie de se mettre d'accord.- 23 sec.).

15 - El 3 : ... mais, est-ce qu'on a le droit de plier cette partie-là ?

16 - ET1 : oui, tu as le droit de plier ton étalon...

17 - ET1 : N'oubliez pas, c'est quoi le ... C'est qui l'É. Ici ?

18 - Él.3 : C'est moi...

19 - ET1 : C'est le R. qui est supposé avoir la bande. Vous n'êtes pas à avoir tous les deux une bande... Essayer de trouver la mesure ...

20 - Él.4: Est-ce que j'écris la réponse en cm ?

21 - ET1 : Des cm ? Pourquoi des cm ? Est-ce que j'ai parlé de cm ? J'ai dit que tu dois utiliser l'étalon. (Il le pointe du doigt). Et tu dois dire, écrire le nombre de fois ça recouvre la bande... Tu dois écrire la réponse la plus proche possible...

22 - Él.2 : Et quand on a fini, qu'est-ce qu'on fait ?

23 - ET1 : Lorsque vous avez terminé pour la 1ère bande, passez à une autre bande. Et changez de rôle... »

Cet épisode nous montre des élèves qui manifestent des réticences à entrer dans la tâche à cause de la non-compréhension de la situation problème. Leurs questions (12, 15, 20) le démontrent. Ils semblent n'avoir pas compris le rôle de l'étalon pourtant expliqué puisqu'ils ne veulent pas se détacher de la mesure possiblement connue : le cm. Cela pourrait être une conception obstacle liée à l'attachement exclusif d'un instrument connu. L'usage de l'étalon leur a été expliqué en remplacement de la règle graduée. Les réponses devaient être données en mesure étalon.

Nous observons que près d'un quart d'élèves, classes confondues, semblent ne pas savoir quoi faire de l'étalon qui dépasse et d'autres. Deux ou trois désirent que l'enseignant institutionnalise le pliage de l'étalon. Nous y voyons une des contraintes du fonctionnement d'une classe spéciale qui peut amener l'enseignant à utiliser, sans le vouloir, l'effet Topaze. Nous faisons l'hypothèse que la situation didactique ne deviendra situation d'apprentissage pour ces élèves que lorsqu'ils y reconnaîtront des invariants qui font sens pour eux.

« ... 83 - ET1 : Je vais écrire les messages au tableau. Chaque É. d'une équipe va expliquer ce qu'il a écrit... Je vais écrire comme vous avez écrit sur vos feuilles...

L'É. de l'équipe 1 a écrit ceci :

4 banbe (bandes) orange et 1 sur le côté[10]

Viens dessiner ce que tu voulais dire avec ça...

(L'élève en question exécute son dessin sur une table au vu de toute la classe) :

____ ____ ____ ____
I

84 – ET1 : (demande à un élève d'une autre équipe) : « si c'était toi, qu'est-ce que tu aurais fait ?

85 - Él.2: ... Il devait faire ceci... et il exécute le dessin: ___ ___ ___ ___/

(Il dispose 4 étalons et plie le dernier en 2).

86 - ET1 : ...autrement dit, tu dis que tu as trouvé 4 étalons et... comment je lis ce bout-là ? Montre-le-moi...

87 - Él.3 : ... moi, j'ai trouvé... quatre et quart (et il place 4 étalons et plie le dernier en 4)

88 - ET1 : Où est le R. de cette équipe (s'adressant au R. d'une autre équipe). C'est ce que tu aurais compris, toi ?

89 - Él.4 : Non, M. (et il se lève pour manipuler ce qu'il a compris. Il place 4 étalons et place ¾ à leur suite).

90 - ET1 : ...Ah bon! Comment trouvez-vous sa réponse ?

(Certains élèves disent ne pas comprendre la solution de leur camarade).

91 - ET1 : qu'aurait-il dû faire ?

92 - Un autre élève répond : il ne devrait pas le placer comme ça, mais le plier...

93 - ET1 : oui... L'erreur ici, c'est le côté de l'étalon... Il devait étendre l'étalon... Est-ce que ça donnait la bonne réponse ?

94 - La classe : Non...

95 - ET1 : C'était quoi notre mesure qu'on utilisait ? Notre ami a renversé l'étalon (et il le montre à la verticale). C'est de cette façon qu'on devait l'utiliser et non le côté... parce que, si tu mets le côté... ça change tout.

96 – Él.4 : Mais moi, j'avais utilisé comme ça et j'avais réussi.

97- ET1 : Est-ce que ça donnait la bonne réponse ?

98 – Él.4 : Oui, c'était bon..., c'était exact.

---

[10] Nous informons nos lecteurs que nous avons reproduit telles quelles les expressions des enseignants et de leurs élèves. Aussi la transcription du vocabulaire doit être acceptée.

99 - ET1 : Ah oui ? Bon. L'autre équipe, laquelle des activités vous avez eue des difficultés, lesquelles vous n'avez pas réussies ?

100 -Él.1 : Moi... nous... les deux derniers.

101 - ET1 : Parce que tu n'as pas compris le message de l'É. ?

102 - Él.1 : ben... oui. C'était difficile...

103 - ET1 : Donc, ici, c'était l'incompréhension au niveau du R. Le R. qui n'avait pas bien compris... La 2e équipe a écrit : 5 étalons et 2 bandes droites

Classe, êtes-vous capables d'exécuter ce message ?

(Plusieurs élèves disent non).

Puis l'enseignant demande au R. de venir dessiner son message. Ce dernier l'exécute.

___ ___ ___ ___ ___

!!

104 - ET1 : Ça, c'est ce que le R. a compris.

Maintenant l'E. va nous montrer ce qu'il voulait dire par son message...

___ ___ ___

!!

105 - El.4 ... pour moi, je voulais dire cinq bandes en tout...

106 -ET1 : Qui a compris ce que l'E voulait dire ? Y a-t-il une erreur ici ? Oui....

107 - Un élève d'une autre équipe : c'est le message qui est difficile à comprendre... il manquait des détails...

108 - ET1 : Oui, c'est vrai... et ce message pouvait également être interprété de plusieurs façons. Je vais revenir sur ces erreurs après... (Il reste 4 minutes pour la fin de l'activité).

Maintenant je vais écrire le message de l'équipe 3 et je demande au R. de venir exécuter ce qu'il a compris :

- la bande et 5 talons bleus

Le R exécute le message : __ __ __ __ __

109 - ET1 : est-ce bien ce que tu voulais dire... mettre cinq étalons dans une ligne ?

110 - Él.5 : ... oui... c'est bien ça (et il hoche de la tête).

111 - ET1 : Je vais demander à l'É. de venir exécuter son dessin. (Celui-ci s'approche de la table et fait ceci :

_ _ _ _

1

(4 étalons alignés et un autre à la verticale inférieure gauche)

112 - ET1 : Alors, tout le monde a bien vu ? Ça, c'était le message de l'É. : 1 bande et 5 talons. Ça va ?

113 - La classe : Oui...

114 - ET1 : D'après vous, quel était le problème ici ?

115 - La classe : le message...

116 - ET1 : Oui, le message n'était pas clair... Il était dur à comprendre. (S'adressant au R.) Tu n'as pas compris le message envoyé hein, par l'Émetteur ?

(Cette dernière approuve).

Cet épisode s'organise autour de procédures de mesurage en voie d'organisation, de conduites erronées d'élèves à partir des messages de leurs camarades et également de l'incompréhension des messages et des dispositions des étalons. Les difficultés semblent être de l'ordre du langage ou du vocabulaire et de la non-compréhension de l'utilisation de l'étalon dépassant la bande.

Toutefois, dans l'ensemble, pour les activités 1 et 2, une grande majorité d'élèves ont accompli adéquatement la sommation des étalons par le comptage, les reports ou les marquages de repères sur les diverses bandes lorsque les étalons les recouvraient parfaitement. Ces calculs numériques supposent qu'il y a une conservation, car ces élèves ont affirmé la conservation du nombre pour les étalons qui couvraient les bandes.

En ce qui concerne la bande pour laquelle l'étalon dépasse, notons que la moitié des élèves, classes confondues, ont pensé spontanément à optimiser la solution. Des camarades, suite aux questions posées et aux réponses de l'enseignant, ont compris ce qu'ils devaient faire. Ils ont plié l'étalon qui « dépasse » en quatre (tours de parole 87). Dans cette conduite, l'explicitation de cette procédure nous permet de dire que ces élèves dégagent la relation d'ordre avec des propriétés de calcul, de sous-unités de grandeur et, plus loin, de quart. Ces conduites s'avèrent intéressantes quoique partiellement réussies à la fin à cause de la disposition de ce quart (oblique, verticale supérieure ou inférieure). Il est probable que ces difficultés soient dues à des rapports topologiques déficients qui sont les rapports qualitatifs (d'ordre ou de succession) qu'un élève perçoit entre les objets.

En outre, on note, pour six ou sept élèves, des différences de conduite quant à l'utilisation de l'étalon qui dépasse ou qui est plus long que la bande donnée et pour lequel ils ne savent pas quoi faire ou ne terminent pas la tâche. Ils ont choisi d'ignorer son utilisation et ne semblent pas avoir accédé à ce que Piaget appelle la pensée intuitive, qui est la capacité d'évaluer des démarches et des objets en contexte signifiant. Elle se caractérise par la concentration de l'élève sur l'apparence des choses et par l'absence de raisonnement logique.

Nous supposons qu'ils ont sans doute entendu dire que cette bande prenait tant d'étalons ou qu'ils ont vu faire leurs pairs et les ont donc alignés sans justifier leur réponse. Ils utilisent un résultat vu ailleurs. Ici, l'erreur est d'origine ontogénique, car le spatial l'emporte sur le numérique. Nous les interprétons comme des difficultés d'ordre conceptuel, car il semble que ces élèves ne disposent pas ou peu de connaissance thématique élargie.

---

117 -ET1 : Comme je vous l'ai dit tantôt, je vais faire un retour sur tous ces messages. Maintenant, je vais écrire le message de l'équipe 3.

Pour la bande verte, le message était le suivant :

5 et quarre

verrete (verte)

118 - Un élève demande : C'est quoi ça ? Je ne comprends pas...

119 - ET1 : ...il voulait certainement dire 5 et quart et verte pour la couleur... N'est-ce pas ?

(L'élève qui a émis le message acquiesce).

Le R. manipule ce qu'il a compris :

__ __ __ __ __ et au bout du 5^e^, un étalon plié en quatre

120 -ET1 : c'est bien ce que tu voulais dire ?

121 - El.5 : ... euh... pas vraiment. Et il se lève pour dessiner son message :

*__ __ __ __ __ et un quart d'étalon au-dessus du 5^e^*

Et il explique : ... moi j'ai enlevé celui-là (le dernier étalon) et j'ai ajouté ce que j'ai plié...

122 - Un élève s'écrie : ... mais il ne fallait pas le plier...

123 - L'É. réplique : mais oui, M. a dit qu'on pouvait plier nos étalons...

124 - ET1 (pour mettre fin à la discussion, intervient) : Oui, j'ai dit qu'on pouvait plier. Cependant, en le pliant, est-ce qu'on pouvait avoir des erreurs de pliage ?

(La classe répond que oui).

125 - ET1 : Alors, voyez-vous, pour ces activités, on a utilisé des unités étalons. Mais est-ce que vous pensez que c'est facile de mesurer avec ces étalons là ?

126 - La classe : ...Non. »

Cette situation problème, organisée autour de la problématique d'un étalon qui dépasse, a nécessité une représentation visuelle et opérationnelle avec modélisation. Plusieurs conduites s'en sont dégagées. Au niveau des deux classes, en ce qui concerne l'étalon qui dépasse, le nombre de conduites observées quant à la recherche du « combien de fois » l'étalon entre dans la bande a été significatif. Le quatre-cinquième des élèves ont verbalisé et utilisé les relations « plus court » ou « plus long » et « n'entre pas » pour caractériser l'étalon qui dépasse en faisant ressortir les propriétés. Par exemple, deux élèves ont répondu à la consigne à partir de peu d'essais, un peu au hasard ou à une certaine vision de modifications en appliquant une procédure systématique : tracer des repères en utilisant un seul étalon ou recouvrir la bande de plusieurs et plier le dernier étalon en quart de sorte qu'il puisse recouvrir le reste de la bande. Nous voyons là des conduites organisées qui supposent une réussite opératoire, donc une conservation du nombre. Ils ont découvert, en se servant d'un ou de plusieurs étalons, qu'il n'était pas nécessaire de recompter les quantités. À la fin de leur démarche, ils ont assigné un nombre à la quantité d'étalons trouvés et donné du sens à la mesure en trouvant la transitivité de la relation : le dernier étalon est plus grand que le bout de la bande… Ces deux conduites mettent en lumière la capacité de ces élèves à raisonner sur la transformation qu'on leur demande et surtout la capacité de mettre en relation les quantités à partir de leurs conceptions numériques. La découverte de la conservation serait due au fait que l'enfant se met à raisonner sur les transformations et non sur les configurations d'ensemble. Nous percevons qu'il y a, de la part de ces élèves, un processus d'abstraction et d'équilibration indissociable qui conduit à la réversibilité (Piaget, 1948). Dans ces conduites, nous voyons non seulement une utilisation conventionnelle de l'opération arithmétique adéquate, mais aussi une amorce de la fraction qui n'est cependant pas encore apprise formellement, mais intuitive et la comparaison par multiplication ou division conduisant aux notions de rapports, de fractions et de proportions.

Nous abordons maintenant la disposition de trois ou quatre étalons sur la bande et le quatrième et cinquième étalon placés à la verticale au bout de la bande, afin de recouvrir le morceau de la bande. L'erreur de disposition du quart semble être d'origine institutionnelle ou didactique, car ces élèves n'ont pas encore reçu d'enseignement formel sur les fractions. Néanmoins, le caractère souvent subjectif de ces comparaisons ne leur enlève pas leur intérêt, à savoir qu'ils ont tout de même établi une relation d'ordre entre deux éléments (Vergnaud, 1991, p. 84), comme par exemple, placer deux étalons à la verticale pour qu'ils recouvrent le bout de la bande. Il est possible que les élèves aient compris que leurs connaissances anciennes sont inopérantes dans ce cas et que l'apprentissage d'une nouvelle technique est nécessaire. Mais les difficultés de la construction et la disponibilité des opérations spatiales n'ont pas permis l'appropriation de l'apprentissage.

Cette disposition de l'étalon supplémentaire non maîtrisé pourrait aussi être due à une certaine difficulté spatio-temporelle et s'expliquer par des troubles spatiaux ou par un défaut de coordination spatiale sur laquelle apparaissent des processus comme les directions, la distance et plus tard les angles ou tout ce qui a trait à des coordonnées cartésiennes. N'oublions pas qu'un problème fait toujours référence à un état initial, une transformation et un état final et que dénombrer, c'est organiser et suivre un trajet spatial afin de ne passer qu'une seule fois sur chaque objet sans en omettre un ou compter deux fois le même. Les troubles spatio-temporels peuvent se manifester par des difficultés d'élaboration, de représentation en résolution de problème ou pour les acquisitions de symboles numériques.

---

125 - ET1 : Alors, voyez-vous, pour ces activités, on a utilisé des unités étalons. Mais est-ce que vous pensez que c'est facile de mesurer avec ces étalons là ?

126 - La classe : ...Non.

127 - ET1 : Qu'est-ce que vous feriez ou qu'est-ce que vous utiliseriez pour que ce soit plus facile pour mieux mesurer l'autre bord ?

128 - Él.11 ben... ben... de mesurer très bien...

129 - ET1 : Mais comment faire pour mesurer très bien ?

130 - Él.4 : ...Avec une règle...

131 - ET1 : Oui... avec quelle sorte de règle ?

132 - Le même élève : une règle blanche. Une règle normale.

133 - ET1 : que veux-tu dire avec une règle normale ? On écoute S.V.P. (Discipline).

134 - Él.8: une règle blanche...

135 - Él.3 : Mais non... une règle foncée...

136 - ET1 : Excusez... J'ai quelqu'un qui émet un commentaire pertinent...

137 - Él.7 : une règle avec des m et des dm ...

138 - ET1 : Est-ce que tu veux dire une règle graduée ? Une règle avec des unités de mesure écrites là-dessus ? Et pour les plus petites mesures, que devrait-on faire ?

139 - Él.7 : oui...

140 - ET1 : Oui, ce serait plus facile de pouvoir mesurer si on avait un instrument avec une mesure précise dessus... C'est bien ça ?

Silence.

141 - ET1 : Oui ? Non ? Allo!! (Il interpelle un ou deux élèves qui s'adonnent à se bousculer...). Et pour les petites mesures, que devrait-on faire ?

142 - Un élève : on prend la règle ronde là... (Il montre un rapporteur d'angles.

143 - ET1 : Le rapporteur d'angles ? Mais non, on ne travaille pas les angles, mais les longueurs... Dans les différentes activités que nous venons de faire, nous avons utilisé des étalons qu'on nous a fabriqués; et on s'est aperçu que des fois, le dernier étalon utilisé dépassait un peu... Qu'est-ce qu'on pouvait faire à la place de le plier ?

Les élèves réfléchissent et il y a en un qui dit : on pouvait faire une ligne là-dessus au lieu de le plier.

144 - Un autre dit (Él.10): On coupe pour que ce soit plus petit...

145 - ET1 : Oui, ce n'était pas une mauvaise idée. On s'est aperçu que c'était plus facile lorsque l'étalon recouvrait exactement la bande de couleur. Mais c'était plus compliqué quand un bout manquait ou dépassait... Qu'est-ce qu'on devrait faire avec les unités de mesure pour être capable de mesurer efficacement les petits bouts qui manquaient ?

(Silence : 14 secondes)

146 - Puis enfin Él.9 : ... avec notre unité de mesure, à la place, je vais plier en 4 tous les étalons...

147 - ET1 : C'est la raison pour laquelle tu demandais des étalons supplémentaires ?

148 - Él.9 : oui, pour que ça fasse pareil partout...

149 - Él.6 : on peut aussi faire une ligne au lieu de plier...

150 - ET1 : Oui, c'est ce qu'on appelle mettre des repères... Mais pour des petites unités qu'est-ce qu'on fait ?

Silence – 8 secs. L'enseignant de son regard fait le tour de la classe et attend la réponse...

151 - ET1 : On pouvait créer une unité de mesure plus petite un peu comme des dm, des cm ou des mm. On pouvait s'en trouver et couper en plus petit l'étalon-ci afin de mesurer la partie qui dépassait... C'est ça ?

152- La classe : ouais, ouais, ouais... »

Nous avons observé différents niveaux d'anticipation dans certaines conduites. Les élèves interrogés ont donné des réponses différentes dans cette activité de mesurage et ont exprimé à quoi elle a servi. Plusieurs élèves interrogés semblent avoir identifié la relation d'ordre et d'équivalence entre les grandeurs données. En ce qui concerne l'étalon qui dépasse, ils énoncent : « on coupe pour que ce soit plus petit... on peut aussi faire une ligne au lieu de plier... oui, pour que ça fasse pareil partout... ». Conduites que nous interprétons comme une recherche de l'unité et des sous-unités des grandeurs (tours de parole 144, 148 et 149). Nous voyons là une amorce de compréhension des unités et des sous-unités dans les grandeurs en mesure.

Malgré cela, cet épisode révèle des difficultés pour environ le tiers des élèves de ce qu'on attend d'eux dans ces tâches. Ces derniers paraissent avoir effectué l'activité de façon mécanique, sans donner de signification à ce qu'ils ont fait. Ils n'ont pas compris ce qu'est l'étalon, ne se le sont pas approprié, car ils les ont alignés sans pouvoir donner le résultat en étalon-mesure même avec l'aide de l'enseignant qui voulait les faire verbaliser en ce sens. Ils revenaient toujours à demander l'utilisation de la règle graduée. Ce constat peut être attribué à un attachement aux instruments de mesure qu'ils connaissent. Il faut comprendre que l'étalon marque l'accès à la mesure et aux comparaisons, la longueur, propriété de nature perceptive. Ces élèves auraient pu dégager du sens dans ce mesurage avec les étalons donnés. Seulement, il semble qu'ils n'ont pas conceptualisé et créé de raisonnements logiques qui nécessitent un rapport direct au concret. D'ailleurs, plusieurs de leurs réponses en témoignent : pour bien mesurer, il faut une règle blanche; une règle foncée; une règle ronde (rapporteur d'angles).

Ces difficultés sont d'ordre structural et paraissent liées à l'abstraction. Nous observons que plusieurs élèves n'ont pas écrit leurs résultats, car ils ne savaient pas comment les exprimer.

---

231 - Él.5 : Quand est-ce qu'on change de rôle ?

232 - ET2 : Quand celui qui manipule a fini... Est-ce qu'il y a encore des questions ?

233 - Él.2 : Mais est-ce que j'écris 5 cm ?

234 - ET2 : Mais dites donc, quel est notre instrument de mesure ? L'étalon ou le cm ? Je donne aux nouveaux R., également 3 minutes de travail...

(Le coéquipier de l'élève 2 lui rappelle les consignes en chuchotant).

Bourdonnements...

235 - Él.1 : Oui, mais comment on va mesurer... Je ne comprends rien...

(Silence de 5 secondes appuyé des froncements de sourcils de l'enseignante).

236 - ET2 : On a besoin de se concentrer. Je vais passer te voir et t'aider. Continuez vous autres. Lorsque vous avez terminé, vous allez chercher une autre couleur de bande.

L'attitude naturelle d'un élève en classe de mathématique est de chercher à comprendre le plus possible le contrat qui régit les rapports entre l'enseignant, l'activité et lui-même. Nous observons que l'enseignant doit, à plusieurs reprises, repréciser la consigne pour que les élèves se centrent sur la tâche demandée et entrent dans la relation didactique afin qu'il y ait dévolution. Dans son intervention, l'enseignant incite plusieurs élèves à s'y prendre d'une autre manière afin de trouver une solution à cet aspect du problème. Il explicite la cause de l'erreur et leur donne la règle transgressée (Portugais, 1995, p. 177).

Nous constatons que quatre ou cinq élèves ont tendance à poser des questions sans auparavant situer le problème. Leur énoncé commence par une question. Nous savons que, la plupart du temps, les questions d'élèves très accentuées sont caractéristiques d'une classe spéciale, par exemple, l'élève qui demande quoi faire de l'étalon qui dépasse. Il semble ne s’être posé aucune question concernant l’étalon qui dépasse quant à son utilisation. Mais est-ce parce qu’il veut faire le point sur sa compréhension de la tâche et sa capacité de mesurage ou seulement faire un lien entre deux registres de conception, l’ordre des grandeurs émanant des étalons ou mettre en œuvre une technique ?

Dans un premier temps, nous supposons qu’après la lecture de l’énoncé, leurs questions leur permettent d’en construire le sens et qu’elles peuvent être nécessaires à l’enseignant qui se doit de s’assurer de la compréhension de la consigne et de leur faire débuter la tâche. Toutefois, nous avons une réserve à ces questions qui semblent également révéler une absence de sens donnée à cette activité de mesurage. Dans ces circonstances, une des difficultés observée liée à cette compétence est due à leur difficulté à comprendre que l’on peut associer plusieurs grandeurs à un même objet. De façon générale, ces élèves paraissent n’avoir pas perçu le rapport entre un objet, une grandeur et une mesure. Ils semblent ne pas avoir compris à quoi sert l’étalon puisqu’en guise de procédure, ils demandent à écrire leurs réponses dans des mesures instituées (tour 233). Ces difficultés peuvent être relatives à la représentation de l’énoncé ou à la compréhension de l’objet qu’est l’étalon dans cette activité et peut-être au fait de n’avoir jamais utilisé d’étalon comme mesure matérialisée de référence pour reproduire une unité.

Nous supposons également que ces élèves ont eu du mal à comprendre que les grandeurs rejoignent les nombres par l’intermédiaire de la notion de la mesure et qu’elles constituent un support concret pour effectuer des opérations sur les nombres, car nous relevons qu’ils ne se sont pas approprié le rôle et le sens de l’étalon. Ils n’ont pas été capables de mettre en place des procédures de mesurage à partir des mesures données dans la consigne. Enfin, ils n’ont pas compris que la notion de mesure intervient lorsque les procédures de comparaison précédentes deviennent insuffisantes pour comparer des grandeurs. Par contre, certains ont élaboré des conduites intéressantes comme plier l’étalon. Leur démarche est une bonne approximation de la conduite attendue. Ils semblent avoir compris que l’on s’attend à les voir travailler cet étalon, à y trouver du sens et à avoir une idée de la valeur à trouver.

243 - ET2 : Est-ce qu'il y a des choses qui te semblaient difficiles dans l'activité et dont tu n'étais pas sûr ? Et tu ne savais pas quoi faire... ?

244 - Él.3 : Moi, je ne savais pas quoi faire de l'étalon quand ça ne rentrait pas...

245 - ET2 : Oui... mais quand l'étalon ne couvrait pas exactement la bandelette, qu'est-ce que tu as pensé faire ?

246 - É.3 : ben, j'ai écrit juste ce qui rentrait... Je ne me suis pas occupé du reste...

247 - ET2 : Qui d'autre a trouvé autre chose ?

248 - Él.4 : ... j'ai plié l'étalon...

249 - ET2 : Levez la main, ceux qui ont plié l'étalon...

(Elle s'adresse à l'Él.4).

250 - ET2 : Pour quoi faire ?

251 - Él.4 : ... pour que ce soit la même chose que la fin de la bandelette...

252 - ET2 : As-tu pensé comment utiliser ce bout que tu as plié ?

253 - ET4 : ...ben..., c'était juste que je voulais qu'il mesure pareil que la bande...

254 - ET2 : Ah oui ? Pour ce pliage, qu'est-ce qu'on aurait pu faire ?

(Silence)

255 - ET2 : Est-ce que vous avez aimé préférer mesurer avec l'étalon ou pensez vous que c'est mieux avec la règle ?

256 - Él.2 : ... Avec la règle...

257 - ET2 : Pourquoi donc ?

258 - ET4 : ... Parce que c'est plus facile... et puis, on voit les chiffres...

259 - ET2 : Moi, c'est les étalons, car ils sont en couleur... Et puis les bandes aussi changeaient de couleur... »

Une grande proportion des élèves de cette classe se sont aperçus, après reports successifs, que l'étalon en trop est à travailler. Comme procédure, nous observons que :

- certains ont compté sur leurs doigts avant d'écrire leur résultat;
- d'autres ont inscrit des points de repère sur la bande qu'ils ont additionnés à la fin des reports;
- plusieurs élèves remuaient des lèvres tout en travaillant, leurs discours n'étant cependant pas audibles;
- plusieurs ont compté oralement lors des reports de leur étalon;

- quelques-uns ont produit un résultat sans procédure apparente. Ils ont juste travaillé la partie de la bande qu'ils ont pu recouvrir et ont communiqué leur message à l'aide de bâtonnets dessinés sur la feuille qui leur a été remise. Ils n'ont pas expliqué leur procédure, car ils travaillaient en silence ou n'ont pas été interrogés;
- plusieurs ont fait une sommation avec le nombre d'étalons comptés;
- quelques élèves ont jugé ne rien écrire sur leur feuille. Ils ont fait des dessins qui n'ont pas de rapport avec la tâche.

En fin de compte, nous avons observé qu'une infime partie des élèves, environ le cinquième, ont eu des procédures non achevées ou plus ou moins performantes, probablement dues à des difficultés de compréhension des consignes ou à des opérations spatiales telles que la justification de la réponse dans laquelle l'élève déclare ignorer l'utilisation dudit étalon et la conduite que l'élève ne justifie pas l'utilisation des étalons, mais décrit simplement les opérations effectuées.

Avec la mise en commun, il ressort que les messages ont été mal interprétés par certains récepteurs ou incompréhensibles pour d'autres. Par contre, le tiers des élèves, au début de l'activité, ont paru avoir identifié la structure du problème. Après avoir compté les étalons entiers, ils ont écrit leur résultat puis ont plié l'étalon qui dépasse en quatre ou en deux par intuition ou par observation, en prenant soin de l'ajouter ou de le compléter à leur précédent résultat écrit. Ils ont expliqué cette procédure de plier l'étalon pour que ça fasse juste sur la bande. Ils sont les seuls à avoir développé une telle compétence qu'ils justifient d'ailleurs très bien (tours de parole 248 et 251). Nous voyons la relation d'ordre et de propriété dans les expressions comme quart ou demi. Ils ont appliqué des critères de multiples et de diviseurs en recourant à l'écriture fractionnaire.

5.3.2 Synthèse des analyses des situations problèmes 1 et 2

L'analyse chronologique des résultats montre deux méthodes significatives mises en évidence par cette analyse : procédures de comptage et de calcul pour donner du sens aux situations problèmes travaillées. D'abord, les élèves ont effectué des procédures de comptage dans lesquelles ils ont mimé les transformations demandées dans l'énoncé :

- par superposition ou étalement des étalons sur la bande,

- par reports successifs en matérialisant l'étalon par des repères sur la bande ou des bâtonnets dessinés sur la feuille qui leur a été remise.

Ces procédures apparaissent comme les procédures de base permettant d'évaluer de manière précise des collections (Fayol, 1990, p. 58). Par la suite ils ont, par des procédures de calcul, dénombré les étalons en comptant sur leurs doigts ou en faisant la somme des bâtonnets représentant les étalons dessinés. Rappelons que dénombrer, c'est accomplir une action où le nombre joue un rôle stratégiquement utile. Cette procédure nécessite l'établissement d'une correspondance stricte entre objets (ici l'étalon ou les étalons) et les noms des nombres (Fayol, 1990).

De ces procédures, plusieurs se sont révélées expertes, certaines inachevées et seulement quelques-unes erronées, spécifiquement en ce qui concerne la bande à travailler avec l'étalon qui dépassait. Pour cet étalon, plusieurs élèves se sont assurés de demander à leur enseignant s'ils pouvaient le plier ou le découper. Ils ont déduit ces propriétés à partir de relations constatées. Pour faire cet enchaînement de déductions, ils ont dû faire appel aux invariants indispensables pour élaborer des démarches de pensée liées, très vraisemblablement, à un aspect invariant repéré dans la situation vécue.

Les enseignants, quant à eux, les ont aidés par la stratégie du contrôle du sens et par une approche adidactique[11] comprenant des répétitions de consignes et les ont engagés dans un processus de découverte en les incitant à l'utilisation de procédures expertes : représenter l'étalon qui dépasse en le travaillant.

Aussi de ces deux situations problèmes qui ont porté sur la longueur (bandes qui arrivaient justes avec l'étalon et bande avec l'étalon qui dépassait), deux facteurs ont surgi des conduites observées : dans le premier, le rôle joué par l'étalon et, dans le deuxième, celui joué par la configuration spatiale. Le travail en équipe et collectif pour la mise en commun, l'amorce de l'activité, le maintien de l'intérêt didactique, les nombreuses répétitions des consignes, les incitations à soutenir la production langagière et l'action sur les schèmes des élèves : le comment et le pourquoi de leurs actions, le fait

---

[11] C'est une situation où la connaissance de l'élève se manifeste seulement par des décisions, par des actions régulières et efficaces sur le milieu.

d'attirer leur attention sur leur réussite ou leur erreur, par les enseignants, ont entraîné et amélioré des conduites malgré l'absence d'un modèle.

Ainsi, les questions des enseignants sur les actions des élèves, le fait d'attirer leur attention sur l'erreur ou de les encourager lorsque la procédure commençait à être élaborée a relancé l'activité et stimulé d'autres élèves en difficulté (Portugais, 1995, p. 176-177). Ces stratégies ont permis à une grande majorité d'élèves de faire preuve de leurs connaissances et habiletés en situation authentique. Malheureusement, les actions diverses des enseignants dans ce processus de découverte n'ont pas semblé aidé six ou sept élèves, classes confondues, puisqu'ils ne s'en sont tenus qu'à une limitation de réponse, c'est-à-dire, à énoncer combien d'étalons sont entrés sur une bande sans tenir compte de la transformation de l'étalon qui dépassait.

Nous interprétons ces conduites comme un recours systématique au critère de longueur. Ces élèves répondaient toujours en la traitant comme traduisant la quantité (Fayol, 1990, p. 89). En effet, ils ont mis en acte la situation demandée mais n'ont pas engagé l'élaboration d'un modèle mental. Ils n'ont pas traduit leur pensée et n'ont pas su quoi faire de l'étalon qui dépassait. Ils ont, certes, réussi certains aspects des situations problèmes (la première situation), mais se sont révélés incapables de résoudre la deuxième situation, l'étalon qui dépassait leur causant problème. Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation de la négation peut éventuellement avoir été une difficulté pour certains élèves (tours 13 et 244) :

---

13 - ET1 : Justement, vous devez trouver une stratégie pour mesurer cette partie-là... Vous voyez bien qu'il y a un morceau qui dépasse... <u>que ça n'arrive pas juste</u>... L'É. et le R. doivent échanger pour trouver une solution...

244 - Él.3 : Moi, je ne savais pas quoi faire de l'étalon quand <u>ça ne rentrait pas</u>...

Selon Vergnaud (1991, p. 71), l'utilisation de la négation est corrélative du développement de la notion de complément logique. Les formulations des enfants ne sont pas indépendantes des opérations mentales qu'ils sont capables de faire et les difficultés d'utilisation de certaines expressions traduisent des difficultés de conceptualisation. Ce qui implique que d'un point de vue fonctionnel, la réussite aux tâches de conservation témoigne de la capacité à distinguer entre les transformations qui affectent le nombre comme l'ajout ou le retrait d'objets et celles qui le laissent inchangé. Cette capacité contribuerait à la compréhension du nombre, puisque cette possibilité de faire des compositions additives et de comparer les différences tient essentiellement à l'existence d'une unité de mesure (Vergnaud, 1991, p. 68).

En effet, la conservation du nombre résulterait aussi d'une coordination des diverses dimensions en jeu (la longueur d'un objet et sa densité) et relèverait d'une pensée opératoire et logique. Pour saisir la notion du nombre, il faut comprendre les nombreuses relations possibles entre les nombres. Par exemple, la relation de leurs éléments selon certaines dispositions, les principes d'ordre stable, de correspondance terme à terme, du cardinal, d'abstraction… C'est l'acquisition des structures de classification et de sériation qui permet à l'élève d'accéder à la conservation du nombre et à comprendre qu'un nombre n'existe pas seul, mais qu'il fait partie d'un système de nombres.

C'est pourquoi, il est nécessaire de développer systématiquement les exercices de classification avec de véritables relations transitives et classificatoires, c'est-à-dire utiliser des moyens d'entraîner les enfants à une analyse rigoureuse des propriétés des objets et à une distinction entre simple ressemblance et équivalence véritable (Vergnaud, 1991).

En étudiant les résultats des élèves, nous constatons que, pour bon nombre d'entre eux, le dénombrement a été une suite nominale au lieu d'être un procédé verbal de dénomination des quantités. Nous pensons que les étalons n'ont pas reçu leur statut opérationnel, puisqu'ils n'apparaissent pas comme des mesures et aussi que ces élèves se sont attachés tantôt à la longueur de la bande, tantôt au nombre d'étalons trouvés en fonction de la saillance relative par rapport à la situation (Fayol, 1990, p. 89). On peut donc dire que ces élèves, qui ont éprouvé de grandes difficultés à analyser les objets en propriété indépendante, n'ont pas perçu pour toutes les relations de ressemblance ou n'ont fait appel qu'à une analyse faible et peu différenciée des propriétés des objets (Vergnaud, 1991, p. 64).

De ce point de vue, ce n'est pas la manipulation d'un matériel qui constitue l'activité mathématique, mais les questions qu'elle suggère (Hervé, 2005, p. 74). Cette assertion nous amène à dire qu'il pourrait ne pas y avoir de conservation pour la majorité des élèves, faute de mobilité dans les centrations successives de la pensée intuitive. Ils ont été confrontés à des difficultés d'ordre conceptuel du fait qu'ils n'ont pas pris en compte dans leurs représentations les quantités après transformation, seules les apparences perceptives importaient. Les arguments des élèves qui n'ont pas la conservation s'appuient, en général, sur les apparences perceptives en négligeant de mettre les éléments en relation les uns avec les autres.

La deuxième activité demandait à indiquer la mesure de longueur par excès ou par défaut. La conduite attendue était de les voir mettre un sens dans cette activité, car la perception ne suffisait plus qu'à déduire une partie de l'étalon en trop qui devait être incluse dans leur réponse. Du fait de ne pas l'avoir travaillée, nous supposons que la notion d'inclusion n'est pas acquise également. L'inclusion est une relation d'ordre qui demande de penser la possibilité d'un nombre associé à la classe représentée (plus ou moins petit). Ils n'ont pas pu exprimer cette relation, du moins verbalement. Par ces conduites, nous faisons l'hypothèse qu'ils n'ont pas dégagé le sens de l'opération logique impliquée par la structure du problème donné.

Cela dit, peut-on être assuré que les activités de mesurage ont constitué, pour la majorité (nous parlons de ceux qui ont partiellement ou totalement montré des conduites élaborées), des situations privilégiées ? Ont-ils pris conscience du rôle fondamental qu'a joué le choix d'une unité (l'étalon) et ont-ils donné du sens à la mesure effectuée ? Ont-ils découvert et compris les relations sous-jacentes dans un mesurage ? Il est vrai que peu d'élèves ont mis en évidence de telles capacités basées sur l'activité de comptage. L'utilisation d'indices perceptifs est certes intéressante, mais elle ne reflète pas, en dépit de tout pour ces derniers, la capacité à conserver une relation d'égalité ou d'inégalité numérique, donc à savoir s'ils ont donné du sens aux situations (Vilette, 1996, p. 130).

Dans l'interprétation piagétienne, la coordination pour les notions de conservation, comme la longueur, demande des actions transformatrices qui procèdent d'un système d'opérations logiques. Ces conduites, qualifiées d'intermédiaires, font voir les solutions de conservation oscillant avec les solutions de non-conservation; conduites qui traduisent l'existence d'un conflit entre les rapports perceptifs des éléments. Tout indique que ces élèves sont confrontés à un conflit entre, d'une part, l'organisation des quantités contrôlée par l'alignement des étalons et la correspondance terme à terme et, d'autre part, l'apparence qui semble contredire les étalons du fait des différences (Fayol, 1990, p. 79). Nous estimons toutefois que dans l'ensemble, 98 % des élèves ont mis en place une relation d'ordre entre les longueurs (du moins pour la première activité) et 65 % pour la deuxième. Pour cette dernière, ils ont référé à l'inégalité en expliquant qu'il y avait un étalon qui dépasse et ont essayé par des procédures plus ou moins réussies (pliages et dispositions erronées) à le travailler. Nous voyons que ces derniers, en régulant d'eux-mêmes leurs stratégies, ont répondu par une différence numérique parce qu'ils ont raisonné sur l'effet de la transformation additive indépendamment de la transformation spatiale. Ils ont perçu la solution au traitement de cet étalon, parce qu'ils ont observé une logique.

La conclusion évidente qui se dégage des procédures de ces élèves est que ceux-ci se sont distanciés de la perception actuelle et concrète de l'étalon qui dépasse et qu'ils ont évoqué des actions potentielles sur le matériel et ce, même s'il y a eu des difficultés de manipulation. Quoi qu'il en soit, nous considérons qu'une grande majorité des élèves sont en voie d'être conservants puisqu'ils combinent en pensée une action directe. Ils admettent, en outre, la conservation des quantités quelles que soient les transformations effectuées, autrement dit, ils raisonnent sur les transformations. La conservation supposant la connaissance de ce qui change une quantité et de ce qui ne la change pas serait due à la capacité de la coordination des relations entre longueur et quantité (Fayol, 1990, p. 89). Ces élèves seraient à même de comprendre l'invariance de la quantité, en ce sens qu'ils ne se laissent plus leurrer par les apparences (Fayol, 1990). Le tableau I reprend les résultats les plus significatifs des situations problèmes 1 et 2.

Tableau I
Situations problèmes 1 et 2 : Mesurage de différentes bandes

Savoirs	▪ Mesurer une bande avec un étalon et lui donner du sens ▪ Relation d'ordre ▪ Relation d'équivalence ▪ Déterminer par calcul la mesure d'une grandeur
Procédures et schèmes	▪ Procédures erronées, inachevées ou expertes ▪ Comparaison perceptive ▪ Reports successifs de l'étalon ou étalement de plusieurs étalons ▪ Pliage ou découpage de l'étalon qui dépasse, l'étalon est non travaillé par certains élèves ▪ Comptage (mimes et recours aux doigts ou à des bâtonnets dessinés) ▪ Matérialisation de l'étalon par des repères sur la bande ▪ Dénombrement des étalons (algorithmes) ▪ Calculs sur l'étalon qui dépasse en 1/4, en ¾ ▪ Disposition de l'étalon à la verticale inférieure ou supérieure ▪ Limitation à une seule réponse
Ruptures	▪ Quelques élèves restent au niveau de la mise en œuvre des règles d'action (1er niveau) ▪ Rupture entre le sens donné au problème et la procédure utilisée pour sa résolution ▪ Attachement à une mesure à peu près connue (les centimètres) ▪ Difficultés d'ordre conceptuel et de calcul relationnel
Actions de l'enseignant	▪ Mise en équipe de trois ou quatre et mises en commun (travail collectif) ▪ Amorce de l'activité par un but et recherche de contrat didactique ▪ Actions sur les règles d'action donc sur les variables didactiques ▪ (Consignes, valeurs numériques de l'étalon, nature des objets) ▪ Incitations à soutenir les productions langagières des élèves ▪ Agit sur les schèmes des élèves (le comment, le pourquoi, attire l'attention sur la réussite ou l'erreur) ▪ Engage et maintient l'élève dans un processus de découverte et d'utilisation de procédures expertes

5.4 ÉTAPE B – ÉPREUVES DE MASSE DANS LE DOMAINE DES GRANDEURS

Nous continuons l'expérimentation en utilisant un matériel différent : les balances à plateaux. Nous introduisons la balance qui n'est pas un instrument familier aux enfants du fait qu'ils connaissent majoritairement les balances automatiques. Les activités suivantes portent sur les masses (pesées, comparaisons, conversions et calculs).

Activités 3

Matériel

- une balance à plateaux;
- plusieurs objets à peser l'un à la suite de l'autre (bas de sable, roman, encyclopédie, boîtes de trombones, craie pour les trottoirs, carnets de notes, paires de ciseaux, stylos feutres, livres de bibliothèque, doubles décimètres…) suivant le nombre d'enfants dans la classe et si le temps prescrit le permet;
- quatre catégories de clous achetés dans un magasin qui tiennent lieu de poids, en assez grand nombre pour tous les groupes;
  - ✓ des gros clous de charpentier à tête plate de 103 mm de longueur et qui pèsent chacun environ 4,20 grammes;
  - ✓ des moyens clous à tête plate de 70 mm de longueur et qui pèsent chacun environ 1,40 grammes;
  - ✓ des petits clous à tête plate de 33 mm de longueur qui pèsent chacun environ 0,69 grammes;
  - ✓ des minis clous à tête plate de 20 mm de longueur qui pèsent chacun environ 0,35 grammes.

Énoncé des situations problèmes

Jeu de communication – * Un bas de sable fin

1) Préliminaire de l'activité 3 (bas de sable) Questions posées :
   1 Comment la balance permet-elle de voir quand un objet est plus lourd que l'autre ?
   2. Ou bien, quand deux objets ont-ils le même poids ?

Consigne

Je donne un objet à chaque groupe d'émetteurs qui va devoir le peser d'abord à l'aide du sable et ensuite à l'aide des clous. (L'enseignant montre le matériel lentement à toute la classe). Le résultat de cette pesée sera inscrit sur un message qui sera envoyé aux récepteurs. À l'aide de ce message, les récepteurs devront peser une certaine quantité de sable. Pourra-t-on vérifier alors que le sable et l'objet ont le même poids ? Et l'objet et les clous ont la même masse. Les émetteurs et les récepteurs devront obligatoirement utiliser la même balance.

1) <u>Les objectifs</u>

Les élèves, avec l'utilisation de la balance à plateaux, du sable dans un premier temps et des clous dans un deuxième temps, doivent peser le bas de sable et les différents objets les uns après les autres, puis comparer avec leurs pairs le résultat de la pesée des objets, si le temps le permet. Parallèlement, les élèves entretiennent et font des liens avec les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction en travaillant sur leur sens.

5.4.2 Analyses de la situation problème 3

Ces extraits d'épisodes s'enroulent autour de la découverte de la balance à plateaux et de la notion d'équivalence par les pesées effectuées. Ils s'organisent également autour des interactions de l'enseignant et des élèves ainsi que des procédures engagées par ces derniers lors des pesées de divers objets par des essais plus ou moins organisés : valider ou remettre en cause un résultat, à l'aide de la balance, les actions dégagées. Ici, les variables sont nombreuses : consignes, balance, bas de sable, clous et un ou des objets à peser (selon le temps) et la relation en découlant est la comparaison et l'équivalence par l'observation des plateaux. La première consigne est d'abord de peser le bas de sable avec du sable puis avec un nombre donné de clous. Puis, de comparer deux messages. Cette situation s'ouvre sur la nécessité de comparer les plateaux de la balance et la construction du principe d'équilibre, du point d'équilibre (la ligne médiane de la balance) et de sa réalisation.

158 - ET1 : Alors, je disais que la prochaine pesée va être pour les R. aujourd'hui donc, on va travailler sur un autre concept de mesure... le poids (et il écrit le mot au tableau) *qu'on appelle aussi la masse. Il faut retenir ce mot, la masse. Ça veut dire la même chose que le poids. OK ? Alors, c'est quoi le poids, la masse ?*

159 - Él.1 : ... la balance...

160 - ET1 : Pas vraiment! C'est quoi le mot, poids, d'après vous ?

161 - Él.2 : ... deux objets avec différents côtés. (Et il mime la balance et ses plateaux).

162 - ET1 : Hum... ça, c'est le matériel qu'on peut utiliser pour définir le poids, la masse... Mais c'est quoi le mot poids d'après vous ?

163 - Él.2 : ... euh...il y a plusieurs sortes de pois... il y a le pois qu'on mange...

164 - ET1 : Oui... Et l'autre ? Ça veut dire quoi le mot poids ? Vous autres (s'adressant à un groupe d'élèves qui ne réagissent pas). Un poids, ça vous fait penser à quoi d'autre ?

165 - Él.2 : un pois dans la nourriture...

166 - ET1 : Ah! ... C'est pas de la nourriture là. Non. Ce n'est pas de ce pois dont je parle... (Il écrit le mot au tableau). Il y a des gourmands là... Quand je vous demande un poids écrit comme ça... poids avec un « ds » à la fin du mot... Il y a juste ces 3 amis-là qui savent ? (Montrant les trois mains levées).

167 - Él.3 : Ah! Moi je sais...

168 - ET1 : ... ah bon! Si je te demande, c'est quoi ton poids, à quoi tu penses ?

169 - Él.3: ... combien tu pèses ?

170 - ET1 : ... oui, combien tu pèses ? Alors, il faut faire attention. Ça se dit pareil, mais ça n'a pas la même signification. Ici, le mot poids veut dire la masse... quand on pèse quelque chose, quand on veut savoir combien un objet est lourd, est léger, on va chercher la masse...

171 - Él.5: ...ah... si c'est plus lourd... si c'est plus léger...

172 - ET1 : ... oui. Et l'instrument qu'on utilise, c'est la balance. Ici, c'est une balance à plateaux... (Et il montre une balance à plateaux qu'il nomme et décrit). On va utiliser des systèmes de mesures pour peser... (Et il montre encore la balance et les deux plateaux). Aujourd'hui, on va utiliser des balances pour déterminer la masse de différents objets... Alors, comment fait-on pour déterminer la masse de différents objets comme ? (Et il montre deux objets pris sur son bureau).

173 - Él.4: ... si par exemple, je mets quelque chose dans une « affaire » (un plateau qu'il montre), ça va baisser...

174 - ET1 : ... OK, si je mets quelque chose sur un plateau (et il touche au plateau), il va s'abaisser... et l'autre plateau qui monte est donc...

175 - ÉL.5: ... Léger...

176 - ET1 : ce qui veut dire que le plateau qui ne contient rien ... qui monte est...

177 - La classe : ...est plus léger...

178 - ET1 : Bien, bien, bien. Mais comment je fais pour savoir que 2 objets ont la même masse ? Comment deux objets pèsent pareil ?

179 - Él.3: ...tu mets la même chose de l'autre côté... si ces deux plateaux sont comme ça, s'il n'y a rien, ça va rester normal (et il montre les deux plateaux en équilibre) Mais si tu mets quelque chose là, ce n'est plus bon...

180 - ET1 : ...mais que veux-tu dire par normal ?

181 - ÉL.5 : ... euh... parce que les deux ont le même poids... si tu mets deux choses pareilles, alors ça va rester normalement...

182 - ET1 : Qui veut l'aider à clarifier sa pensée ?...

183 - Él.6: ...il faut qu'il y ait une ligne égale...

184 - ET1 : De quelle ligne parles-tu ?

(L'élève à qui nous attribuons le numéro 6 se lève et touche à la ligne médiane de la balance).

185 - ET1 : Mais s'il n'y avait pas de ligne ?

186 - Él.6 : ben... je ne sais pas, moi...

187 - ET1 : Qui veut l'aider à expliquer mieux sa pensée ?

Silence de la classe.- 8 sec. - au bout d'un moment, un autre élève lève le doigt.

188 - ET1 : Moi, j'aimerais savoir... Cette balance-là (et il la montre d'un geste d'ensemble)... c'est une balance à plateaux... et ce n'est pas une balance électronique comme vous connaissez qui va vous donner des chiffres... mais avec cette balance-là, comment on fait pour savoir la masse d'un objet ?

189 - Él.6: ...Moi je dis quand les deux plateaux ont la même hauteur...

190 - ET1 : Alors, quand les deux plateaux sont à la même hauteur... Oui, tu l'as. . On dit qu'ils sont en équilibre. Qui veut m'expliquer donc le fonctionnement de la balance en utilisant les objets qui sont là ?

Un élève se lève et dépose dans un plateau une efface, et dans l'autre un taille-crayon. Il explique : ... quand la balance est en bas...

191- ET1 : ...tu veux dire le plateau ?

192 - L'élève reprend :... oui, c'est ce que je veux dire. Quand le plateau est en bas, c'est plus lourd... et quand c'est en haut, c'est plus léger...

La compréhension d'un énoncé met en jeu des conceptions plurielles entre lesquelles s'établissent des correspondances linguistiques ou iconiques qui peuvent être vraies ou erronées. Nous remarquons que les élèves qui répondent semblent connaître, sans aucun doute, l'existence des balances et des pesées. Dans l'épisode 158, à la question : c'est quoi la masse ? Nous observons divers schèmes de verbalisation des élèves : un élève déclare que la masse, c'est deux objets qu'on place dans différents côtés. Il appuie sa déclaration du mime de la balance et de ses deux plateaux. Nous voyons là des schèmes inhérents à sa représentation du concept de la masse. Le premier épisode nous montre, en outre, la représentation que plusieurs élèves se font de la balance et de ses plateaux (le jeu de mime du plateau, les plateaux de chaque côté). De ces représentations, apparaissent plusieurs conduites et schèmes des élèves interrogés. Par exemple:

- « mimer les caractéristiques de la balance ». Cet élève nous semble connaitre la balance et un des attributs de cette dernière : la ligne médiane;
- un autre élève, regardant les messages, préfère procéder avec le sable : il propose de « remplacer pour faire égal ».

Procédures intéressantes, mais partielles, qui ne sont pas encore explicites et qui semblent acquérir la force d'une intuition. Ils ont su repérer une différence (ordre conceptuel) et engager un calcul relationnel (remplacer pour faire égal). Quoiqu'il y ait quelques confusions dans les expressions verbales, des embryons de sens et de démonstrations sont présents, bien qu'ils ne soient pas totalement développés.

Par ailleurs, pendant qu'on circulait dans la salle, nous avons observé des difficultés de manipulation des balances de cinq ou six élèves et également de compréhension de la consigne :

- un élève n'avait pas encore compris comment fonctionnait sa balance;
- un autre énonce une procédure erronée : mettre dans le deuxième plateau les clous des deux messages afin de stabiliser la balance alors qu'il n'avait pas encore traité la première question (le bas de sable);
- un de ses camarades communique une représentation erronée (165). Il parle d'un pois (plante annuelle cultivée dans les régions tempérées pour ses graines). Cette erreur est certainement due à un facteur culturel. La réponse est finalement trouvée après la reformulation de la question et l'écriture du mot au tableau par l'enseignant.

Nous comprenons que la formulation d'une question ou le vocabulaire utilisé en mathématique constitue aussi une des variables qui peut simplifier ou complexifier une situation. Il convient alors de prendre en compte l'énoncé de problème lors des résolutions de problèmes en lui donnant un sens mathématique à l'écrit ou dans un discours descriptif. Nous avons également observé une certaine difficulté pour certains élèves à s'investir dans la tâche demandée, malgré les explications et l'aide de l'enseignant à manipuler les objets.

Nous faisons l'hypothèse que ces élèves éprouvent des difficultés de compréhension de la consigne, du fonctionnement de la balance, peut-être de la propriété qu'est l'équilibre ou de la relation découlant de l'échange-équivalence. Ces difficultés pourraient être attribuées à l'ordre conceptuel et de calcul relationnel, malgré les questions inductives de l'enseignant (Portugais, 1995, p. 176).

Toutefois, par une approche didactique, l'enseignant, dans sa stratégie de contrôle de sens, a amené les élèves à expliciter leurs schèmes dans le contrat de recherche de l'erreur et à s'approprier le fonctionnement de la balance (Portugais, 1995, p. 177). Dans l'ensemble, il ressort la capacité pour environ 80 % d'élèves d'envisager d'enlever ou d'ajouter des quantités de sable à manipuler. Nous voyons apparaître dans leurs verbalisations des schèmes de comparaison et d'équivalence : « le plateau est haut, le plateau est léger, quand c'est en bas, quand le plateau est plus lourd, enlever un peu de sable, si les plateaux sont en équilibre... ». Nous remarquons aussi que plusieurs fois, des élèves ont eu à identifier et à nommer les opérations découlant de la relation d'ordre puisqu'ils s'entraidaient. Plusieurs procédures sont mentionnées :

- le recours à l'estimation perceptive comme le plateau qui monte ou va s'abaisser;
- de même que l'observation de la ligne médiane de la balance ou encore des plateaux qui ont la même hauteur.

La comparaison relative dans l'activité décrite a permis de faire prendre conscience aux élèves du concept de la masse et des relations d'équivalence ou d'ordre. Elle a néanmoins nécessité d'être suffisamment expliquée et utilisée pour que les élèves puissent lui donner du sens, établir et exprimer les relations lors de la manipulation des objets.

Le prochain extrait montre les interactions de l'enseignant ET1 avec ses élèves qui procèdent à des ajustements nécessaires à la réalisation de l'activité.

298 - ET1 : Alors, qu'est-ce que vous allez faire... vous allez prendre la feuille des É. et vous allez peser le bas de sable avec les clous qu'ils ont mentionnés et qui sont sur leur table...

299 - Él.8 : Est-ce qu'on peut avoir des feuilles ?...

300 - ET1 : Vous utilisez la feuille qu'il y a sur la table, la feuille qu'on vous a donnée et vous utilisez aussi le nombre de clous inscrits sur la feuille et qui sont sur la table... OK ? (Ils répondent oui en chœur). Et quand tu as terminé ta pesée, tu écris ton message dans la 2e colonne à côté du 1er résultat...

301 - Él.9 : Est-ce qu'on efface le 1er résultat ?

302 - ET1 : Mais non, tu ne dois pas. Tu dois écrire le tien à côté... Si ce n'est pas le même que celui de l'É. tu m'appelles... OK ?... Maintenant, qu'est-ce que vous allez faire pour équilibrer vos plateaux ?

303 - Él.10 : Est-ce qu'on peut défaire le bas de sable ?

(L'enseignant me regarde et murmure – mais est-ce que cela va faire juste ? Je lui dis cela va varier de quelques mini-clous..., mais qu'ils peuvent continuer l'activité).

304 - ET1 : Vous avez le droit de défaire le bas... mais vous n'avez pas le droit d'utiliser plus de clous qu'indiqué sur la feuille... Appelle-moi si tu as des problèmes...

305 - Él.11 : Est-ce qu'on peut remplacer les clous ?

306 - ET1 : Non, exactement ce qui est écrit... Allez-y. (17 min. 3 sec.).

Dans cet épisode, nous voyons deux ou trois élèves (tours de parole 299, 301 et 305) chercher à découvrir l'intention didactique de l'enseignant et non à comprendre le problème proposé. Certains lecteurs peuvent voir là quelques effets d'une contrainte ou d'un mauvais fonctionnement du contrat didactique. Cependant, dans une classe spéciale, les questions des élèves (299, 301, 305) peuvent aussi traduire un mode de fonctionnement de la classe où poser des questions répétitives est naturel avant de se lancer dans la recherche. Trois difficultés sont rencontrées dans cet épisode :

- l'écoute et la mémorisation de la consigne : l'élève au lieu d'écouter et de se faire une représentation du problème demande des feuilles. Dans ce cas, la tâche de l'élève, notamment le rapport à la mémoire, pourrait faire défaut;
- la représentation du problème : un élève demande à remplacer les clous proposés dans la consigne par d'autres sortes de clous. Nous y voyons une possibilité de difficulté à évaluer la transformation demandée et à exécuter la tâche.

- Finalement, à la demande de l'élève de défaire le bas de sable (tour de parole 303), il a fallu que l'enseignant prenne rapidement une décision afin de récupérer la situation qui aurait pu lui échapper. Delà à sécuriser cet élève en le maintenant dans la tâche didactique. Ici, l'enseignant a présenté deux procédures (garder le bas ou le défaire) aux élèves par son approche adidactique[12] pour les faire entrer dans le contrat didactique et les y maintenir.

---

308 - ET1 : Vous pouvez en ajouter, du sable, ou en enlever là... Il faut que ça fasse juste... Mais si tu as défait le bas, tu ne le laisses pas dans le plateau, il ne faut pas le peser avec le sable... Tu ne le laisses pas à l'intérieur du plateau... (S'adressant à une équipe qui pesait le bas avec le sable au dessus).

309 - Él.12 : Mr, on a trouvé, on a trouvé...

310 - ET1 : Ok, il faut que ce soit bien égal... Est-ce que tous les plateaux sont en parfait équilibre ? (Il s'approche et vérifie).

311 - Él.12 : Oui, regardez...

312 - ET1 : OK, il faut que ça stabilise un peu... Bien. Tu n'oublies pas que si un plateau est haut, ça veut dire que ce plateau (il le montre) est léger...

313 - Él.12 : ... Je ne comprends pas...

314 - ET1 : Ah, quel côté qui est plus lourd là ? Comment qu'on fait, pour savoir quel côté qui est plus lourd ?

315 - Él.12 : ... quand c'est en bas...

316 - ET1 : Alors, ça veut dire que le sable est plus lourd... Regarde bien tes 2 plateaux... Il faut enlever un peu de sable pour que ça fasse pareil... (S'adressant aux É. qui sont censés travailler à leurs équations et qui bavardent), vous les garçons, travaillez en silence, S.V.P.! OK, il reste 2 min.) Avez-vous terminé ?

317 - Les R. : ... oui...

Des argumentations des élèves, il ressort des propriétés du concept de la relation d'ordre : (quand c'est en bas... est plus haut... est plus léger). L'enseignant fait des rappels sur le fonctionnement de la balance et des propriétés qui découlent de la pesée.

[12] Guy Brousseau (1987) définit la situation adidactique comme une situation où l'élève peut et doit mettre en œuvre une connaissance qu'il rencontre en dehors de tout contexte d'enseignement.

323 - ET1 : Oui, tous les clous... Laissez le sable dans son plateau... OK ? Alors, maintenant je vais vous donner l'objet que les É. ont utilisé pour calculer la masse... On va aller tous vérifier si le poids si la masse du sable correspond aux nombres de clous... D'après vous, comment on va faire pour vérifier si les É. ont donné la bonne réponse ?

Silence (7 sec.)

324 - ET1 : Autrement dit, est-ce qu'on a pris le bon poids avec les clous ?

Silence et regard interrogateur de l'enseignant sur l'ensemble des élèves (4 sec.).

325 - Él.7 : ... à cause qu'on l'a écrit sur la feuille...

326 - ET1 : oui, c'est bien. Donc comment on va faire pour vérifier ? Quel résultat c'est censé donner lorsque je vais te donner ton objet ?

327 - Él.3 : Si les plateaux sont en équilibre...

328 - ET1 : Notre ami a dit que les plateaux doivent être en équilibre... c'est ça ?

La classe : ... oui...

Une autre relation ressort également de cet épisode : la comparaison de la masse des deux plateaux de la balance qui fait apparaître la relation d'équivalence (si les plateaux sont en équilibre, tour de parole 327). Ce concept d'équilibre et la relation d'équivalence semblent avoir été compris par l'ensemble des élèves. Nous y voyons une construction et la disponibilité des opérations logiques[13].

---

344 - ET1 : (À une autre équipe : Où est le message, je veux voir le message. Alors, vous avez écrit :

8 gros clous, 14 petits, 6 moyens et 27 minis...

Qu'est-ce que vous auriez pu faire pour que ce soit plus simple que de mettre 27 minis clous ?

345 - L'équipe 4: ben... euh... ben...

346 - ET1: Alors, que vas-tu faire ?

347 - Un des coéquipiers de l'équipe 4 : Mais j'ai oublié qu'est-ce qui est le côté le plus lourd...

348 - ET1 : (demandant aux autres coéquipiers) : Alors, quel côté qui est plus lourd ?

[13] Il se pourrait que ces élèves disposent d'une organisation de connaissances en mémoire à long terme à laquelle ils ont fait appel afin d'effectuer adéquatement la mise en relation des informations nouvelles avec les anciennes.

350 - Un des coéquipiers répond : ... C'est celui qui contient ça... (Et il pointe du doigt l'objet).

351 - ET1 : Ah oui.... Mais non! Comment qu'on fait pour savoir le côté qui est plus lourd ? Réfléchissez...

(Silence – 9 sec.)

352 - ET1 : Si vous aviez mis de clous plus gros, ça aurait fait moins de minis clous, n'est-ce pas ? Réessayez... Je reviens.

La consigne pour cette activité était de parvenir à la masse donnée en utilisant le moins de clous possible. Dans ces épisodes, des membres de deux équipes ont été incapables de donner une réponse précise et d'expliquer leur démarche, soit à cause de l'oubli du concept d'équilibre, soit à cause de la complexité de la tâche (les différents clous), soit à cause d'une incompréhension du problème. Ainsi, après plusieurs explications de la consigne, il apparaît qu'une des équipes ne voit toujours pas la nécessité de modifier sa stratégie. Par ailleurs, tous les coéquipiers de l'équipe semblent avoir oublié la relation d'équivalence en jeu : le principe de l'équilibre. Ils ne se le rappellent pas et ne savent plus ce que montre un plateau qui est plus bas que l'autre dans une pesée.

L'enseignant les aide par des questions et par les comparaisons de savoir-faire des autres élèves. Il précise la tâche à résoudre à partir de leurs progrès ainsi que leur degré d'engagement. Cette stratégie est fonction du contrôle des actes par l'approche d'institutionnalisation primitive (Portugais, 1995, p. 176)[14]. Ce qui oblige ces élèves à comprendre que leur procédure doit porter sur les petits clous à échanger et sur l'observation des positions des plateaux. La difficulté pour ces élèves, semble être ici (de l'ordre de la représentation du problème). Il leur est difficile de comprendre et d'admettre qu'il est nécessaire d'effectuer un changement sur les 27 minis clous trouvés par leurs pairs. Conduite qui a nécessité a plusieurs occasions le rappel de la consigne. Cette opération d'équilibre ou d'équivalence est une des causes d'erreurs observées. Ces élèves ne manifestent pas, non seulement une perception de l'équilibre, mais aussi ne comprennent pas les valeurs attribuées aux différents clous : les unités. Environ un tiers

[14] Nous rappelons que l'approche d'institutionnalisation primitive est fonction du contrôle des actes. L'enseignant désigne explicitement aux élèves le lieu de l'erreur.

d'entre eux ne remarque pas que l'unité à utiliser pour cette donnée se trouve être le gros clou.

---

360 - ET1 : Alors les amis... (Il regarde attentivement). Ce n'est pas loin du résultat.... Qu'est-ce qu'il y a de trop ?

361 - Un élève de l'équipe 4 : ... un peu trop de sable...

362 - Un coéquipier de l'équipe : ... mais non, il faut en enlever...

363 - ET1 : Observez donc les plateaux... celui qui est en bas est...

364 - L'équipe 4 en chœur : ... est plus lourd...

365 - ET1 : Alors, qu'est-ce que vous devriez faire ?

366 - Un élève de l'équipe 4 : ... enlever un peu de sable...

367 - ET1 : Allez-y donc... Il nous reste deux minutes de travail... Je vais passer ramasser toutes les feuilles, tous les messages... Pour la prochaine activité, on va voir quels clous qu'on peut remplacer pour avoir les mêmes résultats et pour aller plus vite dans nos pesées...

368 - ET1 : On va utiliser nos balances pour poursuivre nos pesées et trouver la masse des objets que voici... (Il les montre à l'ensemble de la classe).

(Silence)

369 - ET1 : Est-ce qu'on se rappelle comment on fait pour savoir que deux objets ont la même masse... le même poids... pour déterminer... que deux masses étaient égales... étaient équivalentes sur les 2 plateaux...

(Silence... Timidement deux mains se lèvent).

370 - ET1 : Comment fait-on pour voir ?... Personne ne s'en souvient ?... Juste deux personnes qui s'en souviennent...

371 - Él.1 :... Il faut que les deux clous...

(Un camarade interrompt l'él.1)

372 - Él.2 : ... moi je sais... par exemple, tu mets ton objet et tu décides combien de clous tu dois mettre dans la balance...

373 - ET1 : ... M-hm...

374 - Él.2 : Il faut que les deux clous comme ici (il les montre)..., il faut qu'ils soient de la même façon... et de la même longueur...

375 - ET1 : Oui, mais comment tu fais pour savoir comment les deux poids, les deux masses sont pareils de chaque côté de la balance... et que c'est le même poids de chaque côté en regardant la balance ?

(Silence – 6 sec.).

376 - Puis l'É.3 : ... Il faut que la pointe soit sur la ligne... la même chose que sur la balance... (Il l'affirme en pointant la flèche située au milieu de la balance).

377 - ET1 : Oui, mais s'il n'y avait pas de ligne sur le plateau... comment ferais-tu en regardant la balance ?...

378 - Él.3 : ... il faut que ce soit... en... équilibre...

379 - ET1 : Oui, bravo, il faut que ce soit en équilibre... (S'adressant à deux garçons en train de jouer avec des clous) les garçons, ne jouez pas avec les clous... c'est dangereux... Alors, si les deux plateaux sont en équilibre... c'est-à-dire que la même chose, la même masse des deux côtés de la balance. »

Dans une perspective formative, nous pouvons dire que les apprentissages pour cette situation problème ont été qualifiants dans la mesure où ils ont aidé les élèves à découvrir, à justifier et à expliquer à la fois leurs représentations sur le concept de la masse par rapport aux objets mis à leur disposition. Nous percevons, au demeurant, des démarches différentes chez les élèves. Comme procédures, nous voyons des élèves qui défont le bas de sable et le retirent de la pesée, donc du plateau, pour n'avoir comme objets à manipuler que les clous et le sable qu'ils ont pu ajouter ou enlever au gré de leurs plateaux (362, 366). Deux analyses peuvent être faites pour cette conduite. Il se peut qu'ils aient peut-être compris que ces objets sont transformables ou non et ainsi conceptualisé le problème à l'aide d'ajouts et de retraits de sable, symbolisé par ces actions les relations en jeu. Nous relevons toutefois que cette procédure de défaire le bas, une difficulté d'abstraction, est un phénomène courant chez certains élèves qui cherchent à appliquer des lois sécurisantes dans leurs démarches.

Par contre, tous les élèves, à l'exception des trois ou quatre, ont effectué leur pesée avec le bas de sable. Cette procédure est experte, car ils ont utilisé des transformations licites. Ils ont compris que ce sont les clous qu'ils doivent manipuler et échanger afin d'équilibrer leurs plateaux. D'ailleurs, le mot équilibre est souvent revenu dans les explications de plusieurs (376, 378). Ils ont fait ressortir les variables et les relations d'ordre liées à cette activité de comparaison.

5.3.2 Synthèse des analyses de la situation problème 3

Le tableau II illustre les conduites des élèves et les interventions des enseignants pendant l'activité de pesée de différents objets. La situation problème était rigoureusement définie. Elle ne comportait qu'une solution : l'égalité quantitative du bas de sable avec le plateau devant recevoir le sable ou des objets pesés avec le sable. Toutefois, la consigne a été interprétée tout autrement par sept ou huit élèves, classes confondues, qui se sont défaits du bas protégeant le sable. Cette contrainte peut être perçue de deux façons : pour des raisons d'exactitude ou d'économie. Cette conduite suggère que ces élèves ont peut-être échoué dans la coordination des variables à utiliser l'élément-témoin (le bas de sable) et l'élément à apporter (le sable). Il se pourrait également qu'une phase de rétroaction ait provoqué, dans ce cas de non-réussite, de nouveaux ajustements dans leur conduite.

Il est à souligner que la correspondance implique un contact et que c'est justement le fait de dénombrer qui assure une correspondance biunivoque entre les mots appris et les objets désignés. Ainsi, parlant des élèves qui ont visualisé, utilisé la ligne médiane et les plateaux en équilibre de la balance dans leur stratégie, selon nous, ils ont utilisé la bijection. D'ailleurs à part l'emploi du nombre, c'est le seul moyen de vérification de la mise en correspondance. Par contre, l'examen de ces deux conduites ne nous permet pas de conclure et de décrire les conduites comme de simples efforts d'appariement. Nous y voyons, en revanche, des efforts de conceptualisation, d'activation d'autres schèmes qui, fusionnés avec ceux du dénombrement et de la correspondance terme à terme, pourraient aboutir à la notion d'unité dans les grandeurs en mesure. Une autre raison est que les élèves ne verbalisent pas souvent, au cours de l'activité. Aussi leurs procédures quoique diverses, rendent leur approche et leur compréhension un peu difficiles (Fayol, 1990, p. 132). Pour finir, pour le quart des élèves, toujours classes confondues, nous avons observé un attachement à une seule sorte de clous et des réticences à procéder à de nouveaux échanges. Cette conduite peut être attribuable au fait qu'il est difficile pour eux d'abandonner une procédure qui leur avait permis de trouver le bon résultat.

Tableau II
Situation problème 3 : Mesurage de différents objets - bas de sable, roman, encyclopédie avec des instruments non conventionnels (sable et divers clous)

Savoirs	▪ Estimation et comparaison ▪ Relation d'ordre (plus léger, plus lourd) ▪ Relation d'équivalence (équilibre)
Procédures et schèmes	▪ Procédures erronées, plus ou moins organisées ou expertes ▪ Retraits ou ajouts de sable dans un plateau ▪ Retrait du bas ▪ Utilisation experte ou moins organisée des différents clous ▪ Perception visuelle (visualisation et utilisation de la ligne médiane de la balance) ▪ Mimes des plateaux de la balance ▪ Perceptions de la structure des clous ▪ Proposition de remplacer certains clous pour faire égal
Ruptures	▪ Attachement à une sorte de clous ▪ Réticences à procéder à de nouveaux échanges de clous ▪ Dénombrement difficile à effectuer à cause de l'incompréhension ▪ Valeurs attribuées aux différents clous ▪ Difficulté d'ordre conceptuel ▪ Difficulté de calcul relationnel ▪ Difficulté à entrer dans la tâche et également à l'exécuter ▪ Difficulté de mémorisation de la consigne
Actions de l'enseignant	▪ Mise en équipe de trois ou quatre et mise en commun (travail collectif) ▪ Amorce de l'activité par un but et recherche de contrat didactique ▪ Actions sur les règles d'action donc sur les variables didactiques (consignes, valeurs numériques de l'étalon, nature des objets) ▪ Utilise des inférences pour aider ▪ Répertorie quelques procédures en voie d'organisation pour stimuler les élèves en difficulté ▪ Incitation à réinvestir les conduites adéquates du système de signifiants ▪ Incite les élèves à soutenir leurs productions langagières ▪ Agit sur les schèmes des élèves (le comment, le pourquoi, attire l'attention sur la réussite ou l'erreur) ▪ Engage et maintient l'élève dans un processus de découverte et d'utilisation de procédures expertes

Une bonne proportion d'élèves ont pensé, pour arriver à équilibrer leurs plateaux, à utiliser d'autres sortes de clous après s'être assurés auprès de l'enseignant qu'ils pouvaient le faire. Cela prouve qu'ils ont pensé et compris le concept d'équilibre; du moins, quelles que soient les circonstances de liberté donnée par l'enseignant ou les contraintes de la consigne pour l'équivalence dans leurs stratégies, ce qui était justement recherché. Quant aux deux enseignants, tout au long des activités, ils ont procédé en désignant explicitement aux élèves leurs erreurs ou en désignant un élève qui a fait juste pour montrer sa stratégie à ses pairs. Selon la situation, ils ont fait verbaliser les élèves sur leurs stratégies afin de les aider à organiser leurs nouveaux savoirs. Cette stratégie est une approche d'institutionnalisation primitive (Portugais, 1995, p. 176). Nous avons constaté que ces diverses stratégies ont toutefois aidé bon nombre d'élèves à rectifier leur conduite et en ont également incité d'autres à comprendre ce qu'on leur demandait dans la tâche. Le tableau II présente pour ces épreuves ce qui a été observé dans les deux classes.

5.5 ÉTAPE C – ACTIVITÉS 4 ET 5 – ÉTUDE DES MESSAGES, TRAVAIL SUR LES ÉCRITURES

Les activités 4 et 5 font suite à l'activité précédente, qui a permis aux élèves de comprendre ce qu'est une activité de mesure dans les grandeurs des masses. Les objets mesurés sont de nature et de dimensions variées. Les conduites attendues des élèves sont : choisir l'unité appropriée en utilisant une balance pour comparer des masses; comparer des quantités en utilisant des procédures non numériques (les clous); effectuer des pesées simples; établir des relations entre les démarches et procédés des pairs; échanger des arguments à propos de la validité d'une solution. Au début de l'activité, l'enseignant a rappelé que lors des pesées précédentes, ils ont utilisé des unités de plus en plus petites afin d'arriver à une plus grande précision; mais qu'ils ont utilisé le plus grand nombre possible d'unités les plus grandes avant de prendre le plus grand nombre d'unités immédiatement plus petites. Et ainsi de suite jusqu'à l'utilisation de minis clous. Il les invite à réinvestir ces conduites.

Activité 4

<u>Consigne</u>

Nous allons continuer nos pesées. Je donne un objet à chaque groupe d'É. qui va devoir le peser à l'aide de ces clous et d'une balance à plateaux. Le résultat de cette pesée sera inscrit dans un message qui sera envoyé aux R. À l'aide de ce message, les R. devront peser une certaine quantité de sable (ou le bas de sable). Pourrait-on alors vérifier que le sable et l'objet ont le même poids ? L'enseignant marque au tableau les messages élaborés au cours de l'activité précédente par les élèves, pour chacun des objets pesés (une balle de tennis, un roman, une encyclopédie de poche, une craie de trottoir… Tous ces objets sont à peser au fur et a mesure si le temps le permet). Comme chaque objet a été pesé deux fois par des groupes différents, il y a donc deux écritures différentes pour désigner la masse du même objet. Comment pourrions-nous prouver que pour chaque objet, ces écritures désignent le même poids ? Essayez de trouver un moyen de le prouver.

Activité 5 – Comparaison des écritures

Avez-vous réfléchi au moyen de montrer que deux écritures différentes désignent le même poids, celui du roman par exemple ? Je vais vous donner un nombre de clous et écrire deux messages au tableau.

Consigne

Vous allez vérifier si le message 1 est équivalent au message 2. Vous devez faire les pesées avec les deux messages. Le message de votre camarade et ensuite votre message. Vous allez vérifier si la masse du roman que vous avez pesé est égale ou équivalente à l'un des messages écrits.

Les objectifs

Par l'approche de la notion de l'étalon des masses, les élèves avec la balance à plateaux et les clous doivent peser et comparer la masse des objets en leur possession (roman, encyclopédie, balle de tennis, craies…), avant d'arriver à l'étalon conventionnel et aux pesées plus précises (activité 10). De cette façon, ils entretiennent et font des liens avec les techniques opératoires de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et aussi de la division en travaillant sur leur sens. Les activités 4 et 5 ont été regroupées pour les fins de compréhension dans leur passation, car elles se sont presque toutes faites dans la même grille horaire par les deux classes.

5.5.1 Analyses des situations problèmes 4 et 5

Ces situations problèmes portent sur la relation d'équivalence des masses par rapport aux pesées effectuées. Les premiers épisodes portent sur des difficultés de manipulation des balances. La consigne est de peser différents objets avec deux messages différents et un nombre donné de clous. Plusieurs conduites et schèmes apparaissent :

- un élève énonce une procédure erronée : mettre dans le deuxième plateau les clous des deux messages afin de stabiliser la balance;
- la pesée d'une première équipe s'est avérée efficace et est validée par l'enseignant;
- un épisode s'achève sur une mise en réflexion pour une autre équipe par l'utilisation de minis clous et de l'échange de ces derniers par une autre unité;
- un élève fait apparaître une procédure que nous jugeons d'abord erronée (813) puis experte suite à l'explication apportée après la manipulation (815).

Ces extraits montrent également les difficultés que semblent éprouver deux ou trois élèves à envisager le but du travail et à organiser le travail (balances qui ne se ressemblent pas et le fait de ne pas savoir par quel objet commencer la pesée), alors que les consignes ont été écrites au tableau et rappelées verbalement maintes fois par l'enseignant. Ces difficultés pourraient être attribuables à une incompréhension de l'énoncé et de la mémorisation de la consigne.

---

416 - ET1 : Qu'est-ce que je vois là ?

417 - Él.4 : Oh...

418 - ET1 : Est-ce que ça a fonctionné 15 gros clous et 1 moyen ?

419 - Él.4 : Non... ce n'est pas une bonne balance ça...

420 - ET1 : Est-ce qu'il y a un côté plus lourd que l'autre ?

(Silence).

421 - ET1 : On lâche tout et on écoute. (S'adressant à toute la classe). Est-ce qu'il y a un côté de votre balance qui est plus lourd ?

422 - La classe : Oui...

423 - ET1 : Rappelez-moi maintenant... rappelez-moi qu'est ce qu'on doit faire quand c'est trop pesant, quand c'est trop lourd. Qu'est-ce qu'on peut faire ?

424 - Él.8 :... On essaie de déplacer le livre...

425 - ET1 :... On essaie de déplacer le livre ? Oui... mais, qu'est-ce qu'on peut faire au niveau des clous ?

426 - Él.2 : On vérifie les clous qu'on a mis... (Un ami l'interrompt).

427 - Él.9 : ... Oui, je sais...

428 - ET1 : ... Tu dis qu'on vérifie... On a vérifié et ça n'arrive toujours pas... Alors ?

429 - Él.3 : On peut mettre la même quantité de clous dans l'autre plateau...

430 - ET1 : Voyons donc...

431 - Él.10 : On peut mélanger les clous... on mélange le 1er et le 2e message...

432 - ET1 : On mélange le 1er et le 2e message ? Mais nous avons terminé l'activité du 1er message... Je parle maintenant du 2e message... Oui ? ».

433 - ET1 : Si on regarde le 2e message, qu'est-ce qu'on a changé ?

434 - Él.7 : ... ici, on avait 14 gros, 1 moyen, 5 petits et 2 min... et ici, on a 15 gros et 1 moyen...

435 - ET1 : Qu'est-ce qui a changé ?

436 - Él.7 : Ici, on a plus de petits (en montrant le 1er message)... et ici (en montrant le 2e) on n'a pas de mini... et (revenant au 1er message) on en a rajouté ici...

437 - ET1 : On se rend compte que nos plateaux ne sont pas égaux... qu'est-ce qu'on fait ?

438 - Él.3 : On peut mettre les mêmes clous de l'autre bord...

439 - ET1 : Mais, ce n'est pas ce que je demande... Moi, je veux savoir si c'est trop lourd, qu'est-ce que je peux faire pour...

440 - Él.3 : Non, non, non...

441 - ET1 : Alors, qu'est-ce que je fais pour m'aider à changer le poids ?

442 - El.1 :... on peut le remplacer...

443 - ET1 : Ah..., on remplace le gros clou par de petits clous ?...

444 - Él.1 : Oui... p't'êt...

445 - ET1 : Oui, on peut le faire... Mais est-ce que ça va en prendre la même quantité ?

446 - Él.1 :Ben... je ne sais pas, moi...

447 - ET1 : Oui ? Tu veux dire que si je prends ce gros clou (et il le montre) et ce clou-là (il en montre un petit), ça va être la même chose, la même masse ?

448 - Plusieurs élèves de la classe : Non...

449 - ET1 : Non... donc, je vais avoir besoin de plus de petits clous pour faire ce gros clou ?

450 - La classe : ... plus...

La capacité à chercher la relation d'équivalence dans cette activité de comparaison relative entre les deux messages censés représenter la masse du roman pose une difficulté de raisonnement à plusieurs élèves. D'abord, ils observent de façon passive les objets, les clous, les variables mis à leur disposition. Il semble qu'ils ne voient pas et n'ont pas compris que les clous n'ont pas la même grosseur ni la même masse, donc qu'ils sont transformables ou décomposables de par leur valeur. Ces difficultés paraissent provenir du traitement de la variable de l'ordre sur les grandeurs, en l'occurrence la comparaison des clous. Dans ce cas, la relation d'ordre de grandeur n'est pas encore comprise puisqu'ils n'ont pas établi les relations entre les unités de mesure que représentent les gros, moyens, petits et minis clous.

Cinq ou six élèves de différentes équipes y sont allés par une comparaison perceptive (436), puis par une proposition de mettre les clous se ressemblant d'un bord. Cette conduite nous fait comprendre que ces élèves commencent à se construire une compréhension procédurale du problème, mais n'ont pas encore tout à fait saisi les réquisits du concept d'équivalence. Comme les grandeurs considérées sont liées par des relations du type partie/tout, l'enseignant amène ces élèves à concevoir le mot rapport dans leurs mots (tours de parole 433, 443) afin de faire subir aux mesures de chacune des grandeurs les mêmes traitements : l'isomorphisme de mesures. Cette capacité relève de la relation d'ordre. L'isomorphisme entre deux mesures ou deux grandeurs signifie que ces deux mesures ou ces deux grandeurs ont exactement les mêmes propriétés. Mathématiquement, il suffit d'une relation additive entre les deux mesures. De même, la relation entre les deux grandeurs est continue.

Un élève (436) remarque également qu'il manque une sorte de clous dans un message (en fait, il en manquait deux). Nous notons quand même une émergence du concept de la différence (plus petit, plus grand) de la relation d'ordre.

---

454 - Él.4 : M., M., venez voir...

455 - ET1 (s'approchant d'eux) : Alors, c'est en équilibre ? Tout le monde est d'accord dans votre équipe... L'É., tu écris le message... Quand c'est terminé, vous faites les mêmes expériences, mais avec une balle de tennis...

456 - Él.9 : ... On a fini..., on a fini...

457 - ET1 : Vous êtes sûrs que c'est en équilibre ? OK... Vous êtes d'accord, tout le monde ?

458 - Él.9 :... Il faut que ce soit en équilibre ?

459 - ET1 : Mais oui, je vous l'avais dit... Est-ce que c'est fait ? (Il s'approche et observe leur balance). Il faut en mettre un peu de ce côté... Pourquoi utilises-tu ces gros clous ? Vous ne pouvez pas utiliser des minis ?... Ah... Tu n'en as plus ? (Il part en chercher pour eux et revient). Est-ce que ça va ? Écrivez maintenant votre message...

(Il part vers une autre équipe).

460 - ET1 : ... Si vous avez mis beaucoup, beaucoup de minis, qu'est-ce que vous auriez pu faire ? Réfléchissez... Vous autres (s'adressant à l'équipe qui avait achevé), en attendant pesez la balle...

Une équipe appelle l'enseignant pour vérification et validation de leur pesée. L'équipe n'a pas utilisé les gros clous. Les coéquipiers ont du mal à procéder à l'utilisation d'autres genres de clous. Il appert aussi que leur balance n'est pas en équilibre et qu'ils doivent revoir leur pesée. Ces procédures de pesée montrent que le choix des clous appropriés n'est pas compris et que les élèves n'ont pas donné une certaine valeur à ces variables mathématiques. Ils ont procédé à la pesée de façon mécanique sans donner beaucoup de signification à ce qu'ils ont fait. On note, de leur part, l'oubli et la non-mention de la propriété d'équilibre. Cette conduite est-elle due à l'effet de contrat ? Comme dans « ...si l'enseignant me demande une réponse, je dois bien lui en fournir... ». On peut cependant faire l'hypothèse que la compréhension des liens entre la pesée et l'utilisation des clous comme grandeur n'est pas tout à fait comprise.

---

483 - Él.4 : M., je sais que vous avez dit qu'il faut trouver... mais le reste, je ne sais plus...

484 - ET1 : Comment peut-on prouver que le message no1 a le même poids que le message 2... que les deux messages sont pareils... que ça (il montre le message 1) et ça (le message 2) ont des poids pareils...

485 - Él.5 : Mais, il y a plus de clous ici... (En montrant le message 1).

486 - ET1 : Oui... et c'est ça que je vous explique... Il faut montrer que ces deux messages-là sont pareils... Allez! Discutez-en. Je vous donne 8 minutes pour ça...

(Les élèves commencent à discuter entre eux... L'enseignant va d'une équipe à l'autre, rappelle les consignes à l'absent de l'activité dernière – 8 min. 14 sec.)

487 - ET1 : Alors ?

488 - L'équipe 1 : ... dans les petits clous, il y en a un de plus...

489 - ET1 : Puis...

490 - L'équipe 1 : ... à cause... heu... qu'il y a 4 petits clous ici (il montre le 2e message) et ici... aussi (il montre le message 1), seulement 1 mini!

491 - ET1 : (S'approchant de leur bureau) faites voir votre message... faites voir votre solution... OK. Est-ce que cela prouve que c'est le même poids ?...

492 - Le même élève : Heu... je pense que oui..., c'est-à-dire que le mini là... Mini comme ça, c'est égal à un petit...

493 - ET1 : Oui, ça l'air probable ta solution... Oui, les amis, vous vous rappelez mardi ce qu'on avait fait ?... On avait pris des mesures et chaque équipe est arrivée à un résultat différent...

Le 1er message était :	*2e était :*
15 gros clous	*15 gros clous*
3 petits	*4 petits*
3 minis	*1 mini*

OK. Mais comment tu vas comparer maintenant les petits et les minis ? Comment tu vas faire ça ?

494 - Él.5 : Moi, je vois... je vais l'aider... Je mets ce qui se ressemble de chaque côté... je mets les petits..., un ici et pis..., un autre ici, comme ça et pis comme ça (car il s'était levé pour manipuler les clous sur la table)... Et puis quand j'arrive ici, je mets 2 minis ici...

495 - ET1 : Ah... Ah... Alors, qu'est-ce qu'il y a de pareil, qu'est-ce qu'il y a de différent ? Comment fait-on pour dire que ça et ça ont le même poids, la même masse ? D'après vous, qu'est-ce qui fait que ça change ?

496 - Él.3 : ... il faut comparer ici...

497 - ET1 : Ah... Oh... Oh..., on est bon là... On se rapproche de la solution... Alors, les autres équipes ? Il y avait une équipe qui m'a dit tantôt quelque chose de très, très logique... Vous ?

498 - Équipe 3 : Nous, on a dit..., on a vu..., que..., un petit clou faisait 2 mini-clous..., dans le message 1, il y en a plus de mini-clous...

499 - ET1 : Alors, tu me dis qu'un petit clou est le même poids que 2 minis ?... C'est ça ?

500 - Équipe 3 : Oui, c'est ça... et puis comme les autres clous sont pareils et que ça ne change pas, ça faire pareil quand on va peser...

501 - ET1 : C'est bon ça..., c'est vraiment bon. (Rappelant un élève à l'ordre). Toi, à qui c'est cette règle ? T'es mieux d'écouter... Viens la déposer sur mon bureau...). Et l'équipe no 2 ?

502 - Équipe 2 : Nous..., nous avons trouvé une différence de 3 minis clous...

503 - ET1 : Une différence de 3 minis clous ?... Et vous autres (s'adressant à l'équipe 4)

504 - Équipe 4 : nous c'est 1 mini...

505 - ET1 : bon voyez vous... des fois on trouve 1 mini, des fois 3, des fois 2... (Approchant l'équipe 2, il demande à tout le monde de suivre la pesée). Allez-y...

(Un des coéquipiers s'exécute).

506 - ET1 : Il y a une différence de combien ? Compte les clous...

507 - Él., équipe 2 : 1 de différence...

508 - ET1 : 1 de différence... Est-ce que quand tu avais mis les 3 de différence, le plateau montait ou descendait ?

509 - Le même élève : euh... ça ne descend pas, mais ça ne monte pas aussi...

510 - ET1 : Comment cela ? Ok. Recommence et observe bien... Que remarques-tu ?

511 - L'él. Ben... que quand je mets 3 minis clous de plus, le plateau descend...

512 - ET1 : Alors..., cela veut dire que le plateau est plus...

513 - L'él. : ... est trop lé... je veux dire plus lourd...

514 - ET1 : Enfin... Alors si tu en mets 1 de différence... Observe maintenant...

515 - L'él. : Ça paraît correct... ».

Cet épisode portant sur cette comparaison relative est riche en procédures. Des relations d'équivalence et de relation d'ordre se dégagent des compréhensions intuitives et procédurales des élèves (488, 490 et 493).

Premièrement, deux ou trois équipes d'élèves constatent qu'il y a plus de clous dans un message que dans l'autre (tours de paroles 485 et 498). Par exemple, au niveau des petits clous, il y a un clou <u>de plus</u>.

Aux tours de paroles 494 et 500, on voit apparaître dans leurs schèmes, la relation d'ordre dans la correspondance terme à terme :

- je mets ce qui se ressemble de chaque côté...
- un ici et pis..., un autre ici (l'élève appuie ses explications d'un déplacement des clous);
- et puis, quand j'arrive ici, je mets 2 minis clous ici...

Cette procédure interprétée comme canonique consiste à appliquer la transformation (+1) opposée de la transformation (-1) à l'étal final afin de trouver l'équivalence entre les clous, c'est-à-dire à appliquer la transformation opposée de la transformation à l'état final afin de trouver l'équivalence entre les clous (Vergnaud, 1991, p. 141).

Ces procédures expertes, mais malheureusement non achevées s'appuient sur le dénombrement. Il nous a semblé que ces élèves ont compté les clous composant chaque unité ou chaque sorte de clous provenant des deux messages. Nous pensons qu'ils auraient été en mesure de réussir si leur enseignant les avait laissés achever leur pensée et leur conduite. Nous voyons quand même par ces stratégies, des schèmes élaborés qui montrent que dans cette activité, ces élèves ont construit un sens par la représentation de la situation et de l'utilisation des variables mises à leur portée. Plusieurs équipes dans les deux classes ont d'ailleurs effectué les mêmes procédures.

---

647 - ET2 : Ce n'est pas important de faire l'activité dans l'ordre, c'est-à-dire peser d'abord avec les minis clous, puis, les petits clous, etc. Si deux ou trois équipes se servent de minis clous, qu'il n'y en a plus, vous, vous prenez les petits ou les moyens clous. Ne restez pas à ne rien faire...

(Elle leur distribue des feuilles sur lesquelles elle a pris le soin d'identifier chaque pesée d'objet).

648 - ET2 : Première chose, qu'est-ce qu'on voit sur la feuille ?

649 - Él.1 : le nom de l'objet...

650 - ET2 : Oui, le nom de l'objet, car avant de commencer la pesée, vous devez écrire le nom de l'objet. Ensuite ?

651 - Él.1 : les noms de différents clous...

652 - ET2 : Oui, le nom des différents clous. Vous écrivez à côté le nombre de clous que vous avez utilisé. Mais pour cela, il faut les compter lorsque vous êtes d'accord sur la pesée... Ok ?

653 - Él.7 : Mais Madame, nos balances ne se ressemblent pas...

(L'enseignante va à sa table)

654 - ET2 : Il y a trois sortes de balance. Elles fonctionnent toutes de la même façon. Je répète encore et je vous laisse travailler. Admettons que moi, je suis l'Émetteur. Je vais peser la calculatrice. (Un objet qu'elle prend sur son bureau comme amorce). D'abord, je mets la calculatrice dans un plateau, puis je vais aller la peser avec les clous que j'ai choisis. Je vais commencer avec les minis clous... Tu vois que j'en ai mis assez et que l'aiguille ne bouge presque pas... Alors, je vais mettre des moyens clous... Tu vois que le *plateau de la calculatrice commence à bouger... Voyons... (Elle continue à mettre des clous dans l'autre plateau jusqu'à ce qu'elle arrive à stabiliser les deux plateaux).*

655 - ET2 : Lorsque l'aiguille est au milieu et que tu vois que les « plateaux sont en équilibre, cela veut dire que...

656 - Él.5 : J'en mets combien ?

657 - ET2 : Pardon ?

658 - Él.5 : Je parle des clous...

659 - ET2 : Mais il faut attendre que les deux plateaux soient en équilibre avant de compter les clous... C'est bien ce que j'avais dit, non ? Avez-vous compris ?

660 - Classe : Oui.

Cet épisode commence en montrant des difficultés d'organisation du travail des élèves qui se plaignent des balances qui ne se ressemblent pas et qui ne savent pas par quel objet commencer la pesée...

Nous voyons que l'entrée dans la tâche est difficile à cause des questions portant sur les objets à utiliser. Pourtant, l'enseignant a utilisé plusieurs approches : d'abord didactique, en incitant les élèves et les laissant le lien à établir entre les variables données; en leur demandant explicitement d'estimer les clous avant le calcul et d'établir les rapports de leur estimation.

Nous observons néanmoins que plusieurs élèves restent bloqués à la première ligne d'informations. D'autres ont des difficultés à utiliser certaines connaissances déjà travaillées (ligne médiane de la balance, équilibre des plateaux). On peut faire l'hypothèse que ces élèves, non seulement n'ont pas de méthodologie de recherche mais n'ont pas compris et structuré la situation problème puisqu'ils ont des réticences à entrer dans la tâche, à organiser leur travail, à mettre du sens sur l'activité mathématique proposée et à exprimer à quoi elle peut servir.

---

678 - Él.4 : Mme, est-ce ici que c'est écrit combien de clous on va mesurer pour l'objet qu'on va peser pour que ça fasse égal ?

(Pendant qu'il parle, il mime les deux plateaux en équilibre).

679 - ET2 : Oui. Je vous l'ai suffisamment expliqué...

680 - Él.2 : Est-ce que la classe de Mme T. et nous faisons la même chose ?

681 - ET2 : Juste nous. Et j'ai déjà répondu à la question...

682 - Él.4 : Vas-tu nous aider si on ne comprend pas ?

683 - ET2 : Oui, je vais aller vous aider s'il le faut...

684 - ET4 : Vous n'avez pas compris ma question...

685 - ET2 : Ok. Je viens te voir tantôt pour ta question. On va commencer à travailler.

(Et elle nomme les équipes qui se forment (22 sec.) Les élèves qui ont pris leur matériel regardent les objets et échangent entre eux.

687 - ET2 : Alors, vous allez commencer le travail... On écoute : tu dois chuchoter lorsque tu échanges avec ton partenaire... C'est compris ? Allez-y.

688 - ET2 : Bon..., après avoir observé la balance et les plateaux, nous allons aujourd'hui passer à un jeu... Peser un bas de sable que voici (elle le montre) avec ces clous que voilà. Nous allons procéder comme à la dernière activité... Les R. doivent peser le bas de sable et inscrire sur cette feuille leurs résultats... Puis ce sera au tour des É... Vous avez le droit d'utiliser toutes les sortes de clous pour équilibrer vos plateaux...

(L'activité commence puis après deux ou trois minutes, un élève demande).

689 - Él.1 : Mme, à quoi va servir cette activité ?

690 - ET2 : À comprendre comment fonctionne une balance et aussi pourquoi un plateau monte ou descend...

691 - Él.1 : Est-ce que cela compte pour l'examen ?

692 - ET2 : Ai-je parlé d'examen, moi ?

693 - Él.1 : Ah bon...

694 - ET2 : Allez, commencez l'activité. Si tu ne sais pas quoi faire, tu lèves la main pour que je puisse passer t'aider...

695 - Él.1 : Moi, je n'ai pas compris quoi faire... Puis-je avoir cette balance-là ? (Et il montre une autre balance que celle qui lui a été attribuée).

696 - ET2 : Qu'est-ce que ta balance a ?

697 - Él.1 : Elle ne fonctionne pas... Et puis, je trouve les autres plus belles que la mienne...

698 - ET2 : Il faudra t'en contenter malheureusement... Et puis, c'est le temps de te mettre à la tâche...

699 - Un autre élève lève la main et dit : qu'est-ce qu'on doit faire ?

700 - ET2 : Qui peut lui expliquer la tâche ?

(Un volontaire lui redit la consigne).

701 - Él.2 : Mme, est-ce que je peux défaire le bas de sable ? Les autres l'ont défait...

702 - ET2 : Oui, tu peux le faire... mais n'oublies pas d'écrire ton message sur la feuille.

703 - Él.3 : Je compte mes clous, mais je suis mêlée. Mme, pouvez-vous m'aider ?

704 - ET2 : Tu as utilisé juste des petits clous ? N'était-ce pas mieux de prendre des gros et moyens et ensuite des petits ?

705 - Él.3 : Je pouvais faire ça ? Ah bon... (Et il recommence sa pesée).

706 - Él.1 : Les affaires (les plateaux) de ma balance ne sont pas égales... Qu'est-ce que je fais ?

707 - ET2 : As-tu utilisé les clous comme je l'avais demandé ? Les gros ou les moyens d'abord, puis les petits ou les minis ?

708 - Él.1 : (Il appelle le récepteur) peux-tu m'aider ? Il recommence à compter ses clous, arrête le comptage, puis recommence à les compter. Mme, je n'y arrive pas...

709 - ET2 : M., peux-tu l'aider ? Je suis à vous dans quelques instants...

Cet épisode permet d'observer les conduites de quelques élèves dans la situation problème donnée (tours de parole 691 et 695). D'abord, nous voyons la difficulté pour trois ou quatre d'entre eux, à entrer dans la relation didactique et à s'investir dans la tâche et par là un mauvais effet du contrat didactique par la contrainte que rencontre l'enseignant à exercer la dévolution :

- 689 - Él.1 : Madame, à quoi va servir cette activité ?
- 691 - Él.1 : Est-ce que cela compte pour l'examen ?

Nous remarquons également pour ces élèves des difficultés à se représenter la situation décrite par l'enseignant, à s'engager dans une procédure personnelle de résolution de problème ainsi que de la mener à son terme :

- 695 - Él.1 : Moi, je n'ai pas compris quoi faire... Puis-je avoir cette balance-là ? (Et il montre une autre balance que celle qui lui a été attribuée).

On peut interpréter cette incompréhension de la tâche et son utilité pour les élèves comme des difficultés de représentation inexistante et d'une possible démotivation qui s'installe.

---

745 - ET2 : Ok. Autre chose... Heu... Quelles difficultés vous avez rencontré lorsque vous avez pesé les objets ? Oui ?...

746 - Él.4 : Les difficultés... C'est avec le Moyen clou... parce que, avec la balle de tennis, moi j'avais des difficultés... parce que les clous, il y en avait 4..., c'était plus lourd que la balle de tennis... et quand j'en enlevais 1, ça ne faisait pas le même poids...

747 - ET2 : Oui, c'est vrai, tu as raison... Seulement, tu n'as pas pensé à échanger ce moyen clou avec des petits ou des minis... Alors, moi ce que je veux que vous fassiez si vous avez cette difficulté, c'est de m'expliquer ce qui se passe..., de me dire exactement la difficulté! Vous pouvez écrire une phrase pour me dire ce qui se passe... Je veux avoir les détails...OK ? Oui, toi...

748 - Él.6 : Moi, j'ai des difficultés à écrire et puis, moi et M., nous avons des difficultés à écrire... Alors, ça va être difficile...

749 - ET2 : Oui, je sais... Mais essayez quand même d'écrire, je vais vous aider...

Moment essentiel de l'action didactique, cet épisode met en évidence les difficultés rencontrées par les élèves dans cette phase de l'enseignement. L'extrait montre un élève qui verbalise son raisonnement de manière confuse et avec des expressions peu claires. Il parle d'un moyen clou qui, ajouté aux autres, rend le plateau plus lourd que celui contenant la balle à peser. Sa justification oublie l'échange des moyens clous en petits ou en minis dont il semble ne pas s'être souvenu lors de la pesée et qu'il n'a également pas pris en compte dans son discours. Il se pourrait que ces difficultés soient dues à un manque de conceptualisation et d'établissement de relations entre les grandeurs. Ces élèves paraissent ne pas savoir comment soumettre lesdites grandeurs à diverses opérations.

Par ailleurs, il s'agissait également de rédiger un message dont le destinataire aurait à apprécier sa justesse et sa pertinence (tour de parole 748). Bien que l'on prétende que l'écrit contribue à transformer les procédures mentales (savoir où on en est et ne pas perdre de vue le but fixé), il s'avère être une des plus grandes difficultés rencontrées dans les classes spéciales. Ici, les élèves ont du mal à faire évoluer leurs essais dans le bon sens, ne pouvant s'appuyer sur leurs écrits.

(2 min. 46 sec. plus tard, elle demande l'attention de toute la classe en leur demandant d'arrêter un instant leur travail).

767 - ET2 :... Est-ce que vous pensez que ça va être une belle expérience si tout est mélangé, si tout le matériel est mélangé ?

768 - La classe : Non...

769 - ET2 : Alors là, vous n'êtes plus des bébés... Chaque boîte est identifiée avec la sorte de clous...Vous ne devez pas les mélanger... Là, malheureusement, il n y a pas de boîte pour chaque élève... Vous devez être patients... Donc il y a une équipe qui va avoir les petits clous..., quand elle va terminer, elle va remettre la boîte en arrière... Là, une personne va aller chercher la boîte en arrière... Pas 2, pas 3, pas 4..., une personne. (Elle attend 9 sec. et reprend). Donc, pendant ce temps-là, toi, si tu n'as pas de clous, tu travailles sur la feuille que j'ai mise en arrière... Ce sont des multiplications... Travaille cette feuille en silence... Si tu as terminé cette feuille-là, tu fais de la lecture..., tu ne déranges pas ? Est-ce que c'est bien clair ?...

770 - La classe : Oui...

771 - ET2 : ... Et je t'avertis, si vous continuez à faire des jeux comme ça, à mélanger des clous, je vais devoir t'enlever de l'expérience... Je t'amène dans une classe de maternelle, pendant que nous, on travaille avec les élèves sérieux..., parce que nous, on perd beaucoup de temps. J'ai dû perdre 15 min pour démêler les clous... Ça ne me fait pas plaisir... Je ne devais pas avoir à faire ça... Vous êtes assez grands... Allez-y. Reprenez votre travail...

Plusieurs contraintes de la relation didactique ressortent dans cet épisode. Un incident qu'on peut qualifier de rupture didactique apparaît dans cet épisode : l'activité de recherche pour laquelle deux équipes-élèves n'ont pas donné de sens aux variables que représentent les clous (ils jouent avec les clous au lieu d'asseoir une méthodologie de recherche). Dans ce cas, il n'y a eu ni construction de représentation, ni mise en œuvre de stratégies et de procédures de résolution de problème, ni de dévolution. Nous supposons qu'à cause des difficultés de conceptualisation de la tâche qui s'est avérée difficile, ils se sont décentrés de la situation problème et adonnés à autre chose.

---

810 - ET2 : Alors, lorsque je regarde les clous ou le nombre de clous mentionnés, est-ce que je peux dire que si j'ai un gros clou par exemple, je le remplace par quoi s'il est trop lourd ?

811 - El.4 : ...Euh... par 3 petits clous..., on remplace le gros par de petits clous.

812 - ET2 : Les amis, que dites-vous de cette solution ?

813 - Él.4 : ... Il faut le couper...

814 - ET2 : Le couper ? Couper quoi ? Le gros clou ?

815 - Él.4 : ... Mais non, je veux dire qu'il faut le remplacer par de petits clous. Attendez ! (Il se lève, prend une balance, mets un gros clou dans un plateau et dans *l'autre, de petits clous jusqu'à ce que les deux plateaux soient en équilibre). L'enseignant écrit le résultat au tableau.*

816 - ET2 : Bien, bien... et si ce sont des moyens clous ? Combien tu en prendrais pour 1 gros ?

(L'élève manipule les clous pour expliciter sa procédure. Il dépose un gros dans un plateau, puis 2 moyens dans un autre. Les deux plateaux se stabilisent. Puis il retire les 2 moyens et les remplace par 4 petits. Les plateaux penchent un peu puis finissent par se stabiliser).

817 - ET2 : Avez-vous observé la manipulation de votre camarade ? Donc, on peut dire que 1 gros clou est équivalent à 4 petits clous ou 2 moyens.

Cet élève parle de couper un gros clou afin de stabiliser un des deux plateaux. À la réaction de son enseignant, il explicite sa pensée : remplacer ce gros clou par de plus petits. Il verbalise ses schèmes en mimant la balance, manipule les objets afin d'appuyer et de donner un sens à son discours, démontre qu'il a compris l'énoncé et qu'il en a construit une représentation. Il semble également qu'une structuration particulière entre ses connaissances est apparue par l'utilisation des variables. Il a procédé à une coordination entre grandeurs et procédures, ce qui l'a amené à une comparaison des structures des clous. Il est dommage qu'après que l'enseignant ait institutionnalisé la réponse de cet élève, il ne lui laisse pas le soin d'expliquer sa démarche à ses pairs.

5.5.2 Synthèse des analyses des situations problèmes 4 et 5

Il ressort de ces analyses des difficultés traduites, des schèmes et des procédures des élèves qui sont possiblement dus :

- aux écarts provenant des valeurs des clous;
- aux imprécisions liées à l'instrument de mesure et à son maniement;
- à l'incompréhension de la relation d'ordre des unités que représentent les clous.

Les conduites observées se répartissent en trois types. Environ 30 % des élèves ont procédé à des constructions ludiques et ont semblé n'avoir pas mis de sens à leur activité. Plusieurs ont évoqué une relative défectuosité de leur balance ou la position de l'objet à peser dans le plateau. Ces élèves ont dû également se faire expliquer plusieurs fois la consigne avant d'entrer dans la tâche et se faire guider dans leurs manipulations par l'enseignant. Nous observons aussi une conduite erronée. Un élève propose de mettre dans un plateau de la balance tous les clous afin de la stabiliser. Nous voyons là une erreur de raisonnement sur les variables à utiliser (clous, roman et balance). Cette procédure non appropriée est probablement due à une conception insuffisante ou partielle de la situation proposée ou même à une absence de conceptualisation. Il semble partir du principe que tous les clous doivent être additionnés pour stabiliser le plateau contenant le roman. Il y a là une rupture du sens due à l'incompréhension des variables que sont les clous que la mise en parallèle utilisée par l'enseignant ne suffit pas à faire exister aux yeux de l'élève. Nous interprétons les difficultés relevées de ces conduites comme des difficultés de conceptualisation, mais également de calcul relationnel et numérique.

Par contre, le quart des élèves a procédé par estimation visuelle. L'équilibre des deux plateaux a été jugé à l'aide d'une estimation perceptive. Ils se sont appuyés sur les caractéristiques perceptives les plus saillantes pour juger de leur compréhension de la tâche. Pour la pesée des objets, ils ont, au gré de leur estimation, visualisé la hauteur ou la ligne médiane de leur balance. Par ailleurs, ils ont profité des répétitions des consignes pour améliorer leurs procédures, car on les voyait arrêter de travailler et écouter les consignes avant de reprendre leur travail. Nous pouvons affirmer que, par leur conduite, la relation d'égalité était admise, car nous avons vu une correspondance terme à terme méthodique et aussi à cause des regards de ces élèves qui se déplaçaient alternativement d'un plateau à l'autre avec des résultats exacts à la fin de leur conduite.

De même, quatre ou six élèves seulement, classes confondues, ont compris immédiatement ce qu'on leur demandait. Ils se sont montrés très à l'aise dans l'exécution de la tâche demandée, qu'ils n'ont pas arrêtée pendant les multiples explications de la consigne par l'enseignant. Ils étaient les seuls à exprimer leurs schèmes et ont su justifier leurs démarches par des mots de relations attendues dans cette activité comme : ... ça va faire pareil... c'est égal... c'est juste assez. Nous avons observé des stratégies de résolution du problème et l'apparition des relations dans les grandeurs de masse : « ...il faut comparer ici (496), il faut mettre ce qui se ressemble ensemble..., une différence (503, 504), c'est plus lourd... ». Puis un élève, par une réponse remarquable, énonce une relation d'équivalence : « un petit clou qui vaut deux minis ». Procédure experte qui se résume à un début de conversion intuitive. En ce qui concerne les clous, on peut avancer qu'il a découvert la relation d'ordre ou la relation entre division et multiplication les unissant : 1 petit clou = 2 minis clous.

L'analyse des justifications fournies par ces élèves sur l'équivalence révèle qu'ils argumentent à partir de cette activité (Fayol, 1990, p. 93). Pour cela, nous pensons que pour les deux derniers types de conduites, le concept d'équivalence demandée dans la situation à résoudre est en voie d'acquisition à cause de cette coordination et des relations en jeu exprimées.

Dans l'ensemble, à la fin de l'activité, nous observons qu'environ 85 % des élèves, classes confondues, avec l'aide de l'enseignant et des pairs, se sont appropriés le concept d'équivalence. Si nous considérons les conduites en voie d'élaboration et celles dites expertes, ils ont mis un sens dans leur activité dans la mesure des objets donnés. Nous y avons vu une conscience et l'expression de l'activité de dénombrement apparaître dans leurs démarches. Le tableau III résume assez bien les résultats décrits.

Tableau III
Situations problèmes 4 et 5 : Comparaison des écritures

Savoirs	▪ Relation d'ordre ▪ Relation d'équivalence à l'aide d'observation des clous aux fins d'échanges
Procédures et schèmes	▪ Procédures erronées, dans l'utilisation des clous ▪ Quelques procédures en voie d'élaboration ▪ Certaines conduites expertes ▪ Choix inappropriés des clous ▪ Procédures expertes et justifications adéquates des procédures ▪ Observations des écarts entre les valeurs des clous par certains élèves ▪ Perceptions des variations entre deux messages
Ruptures	▪ Compréhension de la consigne ▪ Attachement aux premiers clous utilisés, réticences à les échanger ▪ Difficultés de compréhension de la notion de la preuve et de sa démonstration ▪ Difficulté à envisager le but du travail ▪ Difficultés pour certains à manipuler la balance ▪ Compréhension du lien entre la pesée et l'utilisation des clous non acquise
Actions de l'enseignant	▪ Amorce de l'activité par un but et recherche de contrat didactique ▪ Guide les gestes d'élèves quant à l'équilibration de leur balance ▪ Actions sur les règles d'action donc sur les variables didactiques (consignes, valeurs numériques de l'étalon, nature des objets) ▪ Les incite à réinvestir les conduites adéquates du système de signifiants ▪ Incite les élèves à soutenir les productions langagières ▪ Agit sur les schèmes des élèves (le comment, le pourquoi, attire l'attention sur la réussite ou l'erreur) ▪ Guide également leurs gestes par l'incitation à utiliser d'autres clous ▪ Utilise des inférences pour aider ▪ Fait appel à des savoirs déjà vus ▪ Répertorie quelques procédures en voie d'organisation pour stimule les élèves en difficulté ▪ Engage et maintient l'élève dans un processus de découverte ▪ Les incite à utiliser des procédures expertes

5.6 ÉTAPE D – ACTIVITÉ 6 COMPARAISON DES ÉCRITURES (SUITE) EXERCICES DE CONVERSION

L’activité 6 fait suite aux activités précédentes. Les objets mesurés sont les mêmes. Il est à noter que l’encyclopédie, les craies et la balle de tennis avaient déjà été pesées par les élèves à une autre période. Cette activité porte donc sur la comparaison d’écritures retenues selon l’objet par l’enseignant : choisir l’unité appropriée en utilisant la balance pour comparer des masses et des quantités en utilisant des procédures non numériques (les clous), effectuer des pesées simples, établir des relations entre les démarches et procédés des pairs, échanger des arguments à propos de la validité d’une solution sont les conduites attendues des élèves et qu’ils établissent des relations entre les démarches et procédés effectués par leurs pairs.

Message : les messages des élèves relatifs aux poids des différents objets pesés précédemment.

Consigne

Vous allez vérifier maintenant les deux messages relatifs à l’encyclopédie de poche.

L’enseignant ET1 écrit sur le tableau (pour l’encyclopédie) :

1er message	2e message
4 gros clous	15 gros clous
30 moyens clous	8 clous moyens
4 minis clous	24 petits clous
	44 minis clous

L’enseignant ET2 écrit au tableau (pour les craies)

1er message	2e message
89 minis clous	51 minis clous
34 petits clous	46 petits clous

Les élèves ont à vérifier, pour chacun des objets pesés lors de l’activité précédente, que les deux écritures désignent la même masse. L’enseignant écrit d’abord les messages concernant la masse de l’encyclopédie. Il rappelle encore le sens de ces résultats, les informe que les messages vont être inscrits au tableau et les stratégies décrites par leur auteur, puis vérifiées collectivement.

5.6.1 Analyses de la situation problème 6

Les extraits s'enroulent sur l'incompréhension manifeste de plusieurs élèves, de la consigne, de la notion de preuve et de sa démonstration. Dans ces tours de parole, qui montrent quelques exemples des difficultés à envisager le but de la tâche proposée, nous voyons que certains élèves ont du mal à mettre du sens dans l'activité mathématique (tour de parole 934) et ce, malgré les explications de l'enseignant. Par exemple, on remarque que l'élève qui énonce avoir eu des difficultés lors de la pesée d'un objet s'est limité à n'utiliser qu'une sorte de clous alors qu'il aurait pu en utiliser d'autres. De même, il appert différents schèmes par rapport aux procédures engagées :

- deux élèves d'une équipe ont eu beaucoup de mal à expliquer leurs stratégies de résolution;
- deux autres ont apporté une solution intéressante à propos des différents résultats trouvés : le fait de n'avoir pas ajusté comme il faut ses plateaux ou d'être distrait pendant le comptage (tours de parole 860, 862 et 866).

Hormis ces élèves, il apparaît que quelques-uns aussi ont du mal à se représenter la tâche (qui leur semble assez calculatoire), possiblement à cause des difficultés de conceptualisation éprouvées (tours de parole 934, 938). On voit qu'ils butent sur les échanges d'unités des grandeurs, les conversions. Certaines de leurs questions, en plus de leur réticence à entrer dans la tâche, sont révélatrices d'une absence de sens donnée au problème (tour de parole 934).

---

850 - ET2 : Alors, regardez bien les réponses des différentes équipes. Les mêmes morceaux de craie ont été pesés en minis clous... Il y en a qui ont trouvé 89 et il y en a qui ont trouvé 51... Par ailleurs, pour les petits clous, 34 d'un bord et il y en a qui ont trouvé aussi... 46...

(Elle laisse passer 5 sec. de silence). Pourquoi ce n'est pas la même réponse ? Qu'est-ce que vous pensez de ça ?... Oui ?

851 - La classe : (...)

852 - El.12 : Parce que, parce que... heu... parce que lorsque je mets en dessous un clou, alors ça va faire plus lourd...

853 - ET2 : OK, est-ce qu'il y en a qui ont trouvé autre chose ?... M. ? As-tu trouvé autre chose ?

854 - Él.1 : Heu... oui..., moi, je trouve que les craies..., pas les craies..., les clous, heu..., sont de différentes grandeurs... Alors, il y en a qui en ont plus quand ils sont plus petits..., c'est-à-dire... qu'ils pèsent moins que les gros... Alors si on les prend, on va en avoir beaucoup, beaucoup..., et si on en a les petits clous, c'est la même chose que les moyens clous, c'est la même chose aussi...

855 - ET2 : Alors, comment ça se fait que juste les minis clous... On a pesé la craie avec les mêmes minis clous... Il y en a qui ont trouvé 89 et il y en a qui ont trouvé 51... C'est de ça que je parle... Comment ça se fait qu'on a des résultats différents comme ça ?... Qu'est-ce que tu en penses ?...

856 - La classe (...)

857 - ET2 : Qu'est-ce qui se passe ?... Pourquoi ?... Oui, toi, W. ?

858 - Él.2 : Parce que quand tu travailles avec les minis clous, tu mets les petits clous comparés aux minis clous... quand c'est pas assez, tu rajoutes, tu rajoutes jusqu'à ce que la balance soit correcte...

859 - ET2 : OK..., mais pourquoi il y a une grande différence ?

860 - Él.3 :..., parce qu'il y avait des balances qui n'étaient pas bien arrangées...

861 - ET2 : OK..., ça aussi, c'est une possibilité..., parce que des fois, les balances sont mal arrangées... Quoi d'autre ? Qu'est-ce que tu penses de cette différence ?... W. ?

862 - Él.4. : Oui..., parce que peut-être que... il y en a qui se sont trompé en comptant...

863 - ET2 : Oui, c'est possible..., ça se peut... As-tu une autre réponse..., M. ?

864 - Él.5 : Oui..., parce qu'il y en a qui ont de petits clous..., que si tu en rajoutes un, ça va en bas..., nous autres..., tu enlèves un, ça lève... C'est pour ça que les balances ne sont pas...

(L'élève mime les deux plateaux de la balance).

865 - ET2 : ... ne sont pas en équilibre ? Oui, toi ? (À un autre élève).

866 - Él.5 : Oui, c'est comme quand quelqu'un compte..., et puis il regarde ailleurs..., et il parle..., il peut compter deux fois la même affaire...

867 - ET2 : En effet, on peut être distrait quand on compte les objets, parce que les petits clous, il faut bien les compter..., OK... Alors aujourd'hui, on va faire une petite activité encore avec des clous... Heu... Je vais vous demander de peser une autre chose cette fois-ci... C'est qui le R. dans chaque équipe ? Alors le R., quand vous l'avez choisi, le R. peut aller chercher la balance...

Répondant à la question de savoir pourquoi les réponses trouvées sont différentes, plusieurs procédures apparaissent et certaines explications sont données :

- un premier élève explique son raisonnement, qui n'est pas très explicite;
- deux élèves affichent un raisonnement confus et des expressions un peu difficiles à comprendre (tours de parole 854, 858). Ces difficultés sont sûrement dues à la complexité du concept et de vocabulaire sur les grandeurs;
- un autre donne pour raison aux différents résultats trouvés que les balances n'étaient pas bien arrimées. Difficultés dues, selon lui, à des imprécisions liées à l'instrument de mesure;
- un dernier argue que le comptage peut être erroné par distraction. Erreurs éventuellement dues aux calculs numériques par faute d'inattention.

De manière générale, nous constatons qu'un bon pourcentage d'élèves ont eu des difficultés à organiser leur travail, à verbaliser leurs stratégies et à expliquer leurs résultats dans cette mise en commun. Ces difficultés pourraient provenir d'une désorganisation dans le travail, d'un manque d'habileté motrice ou d'une incompréhension de la tâche.

---

931 - ET1 (ramassant les balances de ceux qui disent avoir achevé l'activité). OK... Nous avons terminé cette activité... Un ami ramasse les feuilles... Maintenant nous passons à une autre activité. Chacun a son idée. Cette activité, tu la fais tout seul... Prends une feuille et écris ta pensée.... D'après toi, comment va-t-on vérifier que ces deux données-là sont équivalentes, c'est-à-dire pareilles ? (Il écrit les 2 messages au tableau).

4 gros clous, 30 clous moyens, 4 minis clous

15 gros clous, 8 moyens, 24 petits clous, 44 minis clous

932 - Él.2 : On le fais-tu ensemble ?

933 - ET1 : Non, chacun doit trouver la solution et l'inscrire sur la feuille... Alors, je demande à tout le monde...

934 - Él.3 : Il faut que je mette chacun des clous dans la balance ?

935 - ET1 : Que veux-tu dire exactement ?

936 - Él.3 : ... C'est-à-dire, que je mette tout ce que tu as écrit... et je vais voir si la balance ne penche pas ?

937 - ET1 : Non, il faut que tu compares le nombre de clous d'un message aux autres clous de l'autre message et ceci, sans balance...

938 - Él.3 : Ben..., je ne sais pas...

939 - ET1 : On parle de vérifier que les masses sont pareilles sans utiliser la balance... (Et c'est là-dessus que sonne la cloche de la fin de l'activité). »

Un élève demande, après les explications données par l'enseignant, si l'activité doit se faire collectivement. Devant le refus de l'enseignant, il s'ensuit des réactions d'humeur ou d'incompréhension de plusieurs élèves à la tâche proposée (934, 936, 938) :

934 - Él.3 : Il faut que je mette chacun des clous dans la balance ?

936 - Él.3 : ... C'est-à-dire, que je mette tout ce que tu as écrit... et je vais voir si la balance ne penche pas ?

938 - Él.3 : Ben..., je ne sais pas...

Ces questions, émanant de conduites de ces élèves, nous amènent à faire l'hypothèse qu'aucune méthodologie de recherche n'a été pensée par eux et qu'ils ne veulent pas l'élaborer, même après maintes explications de la tâche. Nous observons, par ailleurs, que trois élèves de différentes équipes ne voient pas la nécessité de se représenter la situation. Ils ne recourent pas, non plus, à des notions anciennes, les mesurages des unités différentes déjà trouvés lors des précédentes activités et affichés au tableau. Ils ne comprennent certainement pas les relations existant entre elles. Cette conduite empêche la dévolution du problème par l'enseignant.

---

940 - ET1 : Alors, nous allons..., nous allons étudier les messages de chaque ami concernant ce que je vous avais demandé... à savoir :

4 gros clous, 30 moyens, 4 minis

15 gros clous, 8 moyens, 24 petits, 44 minis

... Je vais demander à certains amis de venir au tableau nous expliquer leur démarche... Toi ! (Dit-il s'adressant à l'élève 1)

941 - L'él. 1 : ... J'en ai enlevé ici et puis... j'en ai ajouté ici...

942 - ET1 : Quoi ? Tu as fait une différence ? Veux-tu l'expliquer ?... Viens l'écrire...

4 gros clous,	*30 moyens clous,*		*4 minis clous*
15gros clous,	*8 moyens,*	*24 petits clous,*	*44 minis clous*
- 11	*-22*	*0*	*+40*

Puis +11

943 - ET1 (pour le 3e calcul) : Et là ? Les petits... Il y a une différence de 0 ? Es-tu sûr de ça ?

944 - Él.1 : (...)

945 - ET1 :... S'il y a 0 ici, c'est qu'il y a une différence de 24... Non ?

946 - Él.1 :... Oui...

947 - ET1 : Ok. On voit qu'il y a une différence entre chacun des clous...

948 - ET1 à un élève ayant levé la main : Oui, toi, comment as-tu fait pour prouver que les deux messages ont le même poids ?

949 - Él.2 : Le message des 11 gros clous, c'est ça qui fait qu'il y a plus de moyens clous dans le message...

950 - ET1 : Si je comprends bien, la différence des 11 gros clous, c'est pour cela qu'il y a plus de moyens clous ? C'est cela ?

951 - L'él.2 : Oui...

952 - ET1 : Ah... On commence... on s'en va dans une bonne route... Excellent... Et toi ?

953 - Él.3 :... Vu qu'il y a de gros clous..., il y a moins là..., donc ici, on doit avoir plus de moyens clous... on voit une différence...

954 - ET1 : Hum..., hum...! Eh bien..., eh bien...

955 - ET1 : Et toi ? (À un autre élève)

956 - Él.4 : Moi, j'ai mis le même nombre de clous pour avoir tout pareil... Ici, aux 4 gros clous, j'ai ajouté 11..., aux moyens, j'ai ajouté 22...

957 - ET1 : Donc toi, tu voulais égaliser le nombre de clous dans chaque catégorie pour équilibrer les messages... pour qu'ils soient tous pareils ?

958 - Él.4 : C'est pour que les deux plateaux soient en équilibre...

959 - ET1 : Ah bon... Et toi ?

960 - Él.5 : Moi, j'ai fait la même chose... J'ai regardé ce qu'il faisait...

961 - ET1 : Ah oui, n'avais-je pas dit de travailler seul ? En voilà des manières... Et toi à l'élève 6).

962 - Él.6 : Moi, j'ai additionné tous les clous et quand ce n'était pas pareil, je faisais des soustractions...

963 - ET1 : Donc toi, tu as fait des additions et des soustractions sans tenir compte de la grosseur de tes clous ?

964 - Él.6 : oui...

965 - ET1 : Eh bien... Et toi ? (Au 7e élève).

966 - Él.7 : Moi à la place de faire ça, j'ai fait :

4 gros clous, 30 moyens clous, 4 minis clous

15 gros clous, 8 moyens, 24 petits clous, 44 minis clous

15 - 6 ... ça m'a donné 9 gros clous. Ici, 9 – 5 = 4

967 - ET1 : C'est quoi le 6 ?

968 - Él.7 :... Parce que 15 – 9, ça donne 6...

969 - ET1 : Ah bon... Ensuite ?

970 - Él.7 : Donc..., j'ai enlevé 5 clous... ce qui m'a fait 4...

971 - ET1 : Donc ?

972 - Él.7 : Alors, je pense qu'il y a un peu plus que 3 fois dans le nombre 15 (qu'il montre)... c'est-à-dire que le 1er nombre, icitte, c'est 3 x 4 = 12...

973 - ET1 : OK, OK..., 3 fois plus gros que le nombre en face... (Après 24 sec. de silence), avez-vous remarqué quelque chose ?... Notre ami vient de dire quelque chose d'intéressant... Il a dit... regarde bien... qu'il y a un peu plus de trois fois que le nombre en bas, hein ?... Ah! C'est bon ça... c'est bon... On va l'avoir ! La prochaine fois, on va chercher comment on va faire pour trouver combien de gros clous équivalent à de moyens clous... Et combien de moyens clous font de petits clous ? Et combien de petits clous valent des minis clous... Gardez votre feuille, on continuera mardi... ».

Plusieurs conduites apparaissent dans cet épisode. En premier lieu, l'élève interrogé fait mention des écarts qu'il observe entre les sortes de clous des deux messages à traiter. Il quantifie l'écart des unités entre les deux messages en faisant des va-et-vient entre chaque unité. Toutefois, il n'a pas travaillé l'écart entre les petits clous comme étant zéro. Nous attribuons cette erreur à une confusion d'écart entre deux nombres. Il n'a pas visualisé l'intervalle existant entre les deux messages (0 du premier message et 24 au deuxième). Sa conception du problème est intéressante mais incomplète. Toutefois, il a assez bien verbalisé sa stratégie et l'a expliqué de façon cohérente : 941 - L'él. 1 : ... J'en ai enlevé ici et puis... j'en ai ajouté ici...

Nous voyons là un début de processus de sélection et d'interprétation de la situation problème, soit la comparaison dans laquelle il s'agit de retrouver des états de la comparaison (plus ou moins) qui font intervenir de fait la mesure. Nous voyons une certaine compréhension de la relation d'ordre et d'équivalence. Nous voyons aussi que cet élève est capable de coder une quantité par la mise en œuvre de différences dans les unités de clous. En ce qui concerne la conduite de l'élève 3, on voit l'apparition d'une propriété de l'équivalence dans son explication, la différence : 953 - Él.3 :... Vu qu'il y a de gros clous..., il y a moins là..., donc ici, on doit avoir plus de moyens clous... on voit une différence... Il a semblé avoir mobilisé des compétences relevant du calcul numérique et relationnel.

L'élève 4, quant à lui, a énoncé que pour équilibrer les plateaux, avoir mis ensemble tous les clous ayant les mêmes valeurs, à savoir :
4 gros clous, 30 moyens clous, 4 minis clous
15 gros clous, 8 moyens, 24 petits clous, 44 minis clous

Selon sa démarche, en comparant les gros clous, il a ajouté la différence apparaissant entre les deux messages, c'est-à-dire 11. Il a donc fait une soustraction : 15 – 4 = 11 puis il a procédé de la même façon pour les moyens clous : 8 + 22 = 30 moyens. Malheureusement, l'enseignant ne l'a pas laissé terminer sa démarche. Par une approche par remédiation qui a pour fonction de contrôler les actes de l'élève, l'enseignant intervient sur la conduite de l'élève (Portugais, 1996, p. 176). Nous aurions aimé voir ce qu'il aurait fait pour les autres sortes de clous et à quoi sa stratégie aurait abouti. Un autre élève dit avoir fait la même chose, sans expliquer sa stratégie. Nous supposons qu'il se peut qu'il n'en ait pas eu puisqu'au départ la consigne était de travailler seul.

Un autre élève dit avoir additionné tous les clous et, quand ce n'était pas pareil, a fait des soustractions, ce qui veut dire qu'il a procédé comme ceci :
4 gros + 30 moyens + 4 minis = 38 clous
Et 15 gros clous + 8 moyens + 24 petits + 44 minis = 91 clous
Puis, 91 clous – 38 clous = 54 clous.

Pour cet élève, il semble qu'y a une rupture de sens : pour lui, tous les clous ont la même valeur. De plus, il a effectué des additions et une soustraction sans savoir ce qu'il cherchait. Il a certainement entendu le mot différence dans les explications précédentes et l'a appliqué et lorsque la différence était trop grande, il a fait une soustraction. L'enseignant met d'ailleurs cette procédure erronée en évidence.

Un dernier élève a lui aussi cherché la différence entre les clous : 15 – 6 = 9 puis 9 – 5 = 4, alors 15 ----- 3 x 4 = 12. Lui aussi est parti du principe que les nombres peuvent être soustraits ou multipliés. Ces deux procédures se retrouvent souvent chez les élèves qui ne savent pas comment résoudre le problème proposé (Ermel, 1999, p. 184).

---

977 - ET1 : N'oubliez pas ici qu'on doit comparer le poids, hein ! N'oubliez pas qu'un moyen clou ne pèse pas la même chose, la même masse qu'un petit... C'est quoi le moyen clou, c'est quoi le petit clou... C'est toutes des choses qu'on doit penser... Je vous laisse travailler... (4 min 37 sec.)

978 - ET1 :... Vous pouvez faire aussi des dessins pour montrer vos comparaisons... Trouvez tous les moyens possibles... Calculez ou dessinez...

979 - ET1 (s'approchant d'une équipe, il leur demande) : Est-ce que 59 petits clous vont faire le même nombre que 11 moyens clous ? Non...

980 - ET1 : Classe écoutez-moi...Tu dois savoir que la balle de tennis pèse 59 petits clous ou bien 11 moyens clous... Moi, je trouve que 59, ça fait beaucoup... Alors combien de petits clous j'ai besoin pour avoir 1 moyen clou...

981 - Él.2 : Je peux utiliser la balance pour savoir ?...

982 - ET1 : Non... Juste avec les informations que tu as ... Regarde au tableau les informations...

L'enseignant rappelle aux élèves les rapports entre les clous en réexpliquant la consigne. Il leur demande d'avoir recours à des procédures personnelles et variées : dessins, comptage, schémas, dénombrements, essais additifs. Sa stratégie est fonction du sens avec une approche adidactique. Ici, l'enseignant, en proposant aux élèves une tâche analogue, leur rappelle les conduites à mettre en exercice de même que les contraintes pouvant engendrer les erreurs passées (Portugais, 1995, p. 178). Il identifie, avec les élèves, les suites à donner à l'activité, leur donne du temps pour organiser leurs conduites. Il apparaît que, malgré la progression des activités, les élèves n'ont pas encore saisi le sens des relations existant entre les unités différentes comme la relation d'ordre ou d'équivalence. Nous voyons un élève proposer d'utiliser la balance. L'enseignant oppose un refus, car cette variable n'est pas envisagée dans l'activité. L'enseignant aurait dû l'autoriser à l'utiliser, cela aurait pu l'aider à se représenter la valeur des clous. En définitive, cet élève semble éprouver des difficultés d'ordre conceptuel et aussi de symbolisation. Mettre en exercice des stratégies de procédures de résolution et mathématiser le problème en utilisant les éléments symboliques permettant d'exprimer ces opérations lui semble ardu.

5.6.2 Synthèse des analyses de la situation problème 6

Les résultats et analyses présentés dans le tableau IV mettent en évidence des conduites homogènes en ce qui concerne les conduites et difficultés observées dans les deux classes. Plusieurs ruptures dans le contrat didactique ont été observées dans l'élaboration de la résolution du problème. Ces ruptures peuvent être dues à plusieurs facteurs :

- attachement à une sorte de clous et réticences à envisager de nouvelles stratégies,
- difficulté de mémorisation de la consigne;
- incompréhension de la consigne et à trouver du sens dans l'activité;
- difficulté à établir des relations entre les clous et à effectuer des calculs numériques.

Des conduites observées, il apparaît que près de 85 % des élèves n'ont pas perçu ou compris, malgré les multiples explications de la consigne par l'enseignant, que les ensembles présentaient un caractère commun, certes difficile, mais celui d'être de quantité égale. Le rôle des transformations par le processus d'addition ou de soustraction est fondamental dans les relations quantitatives entre ensembles. Or, nous avons constaté que la conceptualisation des quantités sous-tendue par la comparaison a été, pour plusieurs élèves, une très grande difficulté, car ils n'ont pu structurer leurs connaissances antérieures dans cette activité en utilisant des structures additives.

Ces difficultés sont vraisemblablement dues à l'abstraction demandée dans le processus de la correspondance d'unité par unité, à un déficit d'exécution des plans d'action et/ou à une limitation interprétative du problème (Vilette, 1996, p. 137). Dans le tableau IV sont résumées les conduites mises en œuvre par certains élèves comme l'appariement et le comptage à voix haute, mais avec support, en exprimant leurs actions par ces assertions : ... mais il y a plus de clous ici- Nous supposons qu'ils sont en cours de compréhension du principe de comparaison d'ensemble d'éléments au moyen de l'appariement ou du comptage. Ou qu'ils semblent avoir déterminé l'entité de quantité.

Tableau IV
Situation problème 6 : Comparaisons des écritures (suite) - Exercices de conversions

Savoirs	▪ Relation d'ordre ▪ Relation d'équivalence ▪ Convertir d'une unité à l'autre
Procédures et schèmes	▪ Procédures erronées, inachevées et expertes ▪ Compréhension intuitive et procédurale ▪ Comptage des clous ▪ Certains élèves font l'hypothèse que leur pesée est erronée parce que leur balance est défectueuse ▪ Des argumentations observées : il faut comparer, c'est plus lourd ici ▪ Il faut mettre ce qui se ressemble ensemble, je vois une différence... ▪ Résultats non écrits à cause des difficultés à les écrire
Ruptures	▪ Difficulté pour l'enseignant à faire la dévolution ▪ Difficulté de compréhension de l'énoncé pour certains élèves, à mettre du sens sur l'activité, donc à s'investir ▪ Difficulté de mémorisation ▪ Attachement à une sorte de clous, réticences à les échanger ▪ Distraction pendant le comptage ▪ Manque d'habileté motrice ▪ Difficultés à verbaliser leurs stratégies ▪ Difficultés à établir les relations entre les clous – difficultés de calcul numérique et relationnel
Actions de l'enseignant	▪ Rappelle le but de l'activité passée et recherche de contrat didactique ▪ Guide les gestes des élèves quant à l'équilibration de leurs balances ▪ Agit sur les règles d'action donc sur les variables didactiques (consignes, valeurs numériques de l'étalon, nature des objets) ▪ Incite les élèves à réinvestir les conduites adéquates du système de signifiants ▪ Incite les élèves à soutenir leurs productions langagières ▪ Agit sur les schèmes des élèves (le comment, le pourquoi, attire l'attention sur la réussite ou l'erreur) ▪ Guide également leurs gestes par l'incitation à utiliser d'autres clous ▪ Utilise des inférences pour aider ▪ Les invites et les incite à une stratégie pour la connaissance à travailler ▪ Fait appel à des savoirs déjà vus ▪ Répertorie quelques procédures en voie d'organisation pour stimuler les élèves en difficulté ▪ Engage et maintient l'élève dans un processus de découverte et d'utilisation de procédures expertes

Ils paraissent aussi avoir compris que les transformations d'ajout et de retrait caractérisent des différences, même s'ils n'ont pas su spécifier le sens sur les différences. Il s'agit là d'une abstraction qui montre une grande différence dans la conceptualisation des quantités. Ces procédures sont des propriétés de quantification du discret qui permettent de faire abstraction de la spécificité des collections envisagées et de dégager des concepts proprement dits (Vilette (1996, p. 291).

Nous faisons aussi l'hypothèse que si on leur avait laissé un peu plus de temps, ces élèves auraient été tout à fait capables de revenir sur leurs jugements préalables en explicitant les relations entre les valeurs des clous. On retiendra que cette épreuve s'est révélée difficile pour la majorité des élèves, classes confondues.

5.7 ÉTAPE E – ACTIVITÉ 7 – EXERCICE DE CONVERSION/ TRANSFORMATION DE MESSAGES

La dernière fois, vous avez écrit des messages pour vérifier si deux messages au tableau désignaient la même masse. Vous devez en faire la preuve. C'est-à-dire que vous devez me convaincre que vos calculs sont justes, mais nous allons travailler en deux temps. Voici les consignes.

Première phase

Vous devez <u>**trouver le rapport**</u> entre ces deux messages.

1) 59 petits clous

2) 11 clous moyens

Est-il possible de vérifier si les deux messages concernant le roman désignent le même poids ?

Deuxième phase

Vous devez <u>**remplacer**</u> 63 petits clous de manière à utiliser <u>le moins possible</u> de mini-clous. Chacun de vous va essayer de trouver un message.

5.7.1 Analyses de la situation problème 7

Ces extraits, les plus riches du protocole, tournent autour d'une comparaison de deux messages. Pour ces deux situations problèmes, il y a passage à l'unité immédiatement supérieure. Il est demandé aux élèves, par des calculs simples, d'exprimer le résultat d'un échange d'unités dans des unités autres que celles données. Des procédures, des schèmes erronés ou intéressants et révélateurs de la compréhension ont émergé du concept de la comparaison et de relation d'ordre repérer une différence : le retrait et le rajout de certains genres de clous. Dans cette activité, chaque élève doit travailler tout seul et faire part de son résultat à ses pairs.

---

995 - ET1 : Tu as dit 5 x 59 ? Le 59 où tu l'as trouvé ? Si je regarde ici, vous avez fait des hypothèses... L'équipe 3 a dit... a fait une hypothèse... Elle s'est dite... ils ont fait des calculs, des opérations, des multiplications pour trouver 5 petits ?... 4 petits ? Bon, 4 petits... C'est bien vous êtes avancées dans votre démarche... Mais vous devez poursuivre pour trouver la solution complète... C'est bien... Continuez. À vous l'équipe no 4...

996 - Un élève de l'équipe 4 : Je ne savais pas ce que je devais faire... Est-ce qu'il fallait que je cherche le nombre de clous ?

997 - Son coéquipier : Mais non.., il a déjà donné le nombre de clous... Regarde au tableau... M., il fallait chercher ce que ça pèse non, non ?

998 - ET1 : Il fallait savoir combien de fois entraient les 11 moyens clous dans les 59 petits...

999 - Le coéquipier : Ah bon...

1000 - ET1 : À vous l'équipe 1...

1001 - Un élève de cette équipe : Nous, nous avons dit que 11 moyens clous ça faisait 33 petits clous...

1002 - ET1 : Ça, ça donne un résultat spécial. Il faudrait valider votre opération..., c'est-à-dire me dire comment 11 moyens font 33 petits... au lieu de 59... L'équipe 3...

1003 - L'équipe : (...)

1004 - ET1 lisant leur production : ... Vous avez fait des calculs sur votre feuille... Qu'est-ce que vous avez trouvé ? Jouez un peu avec le nombre de clous... Vous avez fait un mélange d'additions et de soustractions ? Revoyez ça. (À un élève qui s'était levé). Tu te retournes et tu m'écoutes... Qu'est-ce qu'on était censé chercher ? Qu'est-ce qu'on devait faire ?... Au début, on avait déjà trouvé la masse, le poids de la balle de tennis – 59 petits clous ou 11 moyens clous... Ça donne la même masse et c'est supposé être en équilibre... Tout le monde est d'accord ?

(La classe opine de la tête).

1005 - ET1 : Mais comment on va faire pour savoir combien de petits clous je vais avoir besoin pour 1 moyen clou ? Moi, je sais que 59 petits clous égalent 11 moyens...

1006 - Él.1 : On va mettre les deux paquets là dans chaque balance...

1007 - ET1 : Moi, je veux savoir combien de petits clous font 1 moyen clou...

1008 - Él.2 :... une division ?

1009 - ET1 :... Qui a dit ça ?... Une division ?... C'est intéressant ça... Quel nombre on diviserait ?

(L'élève se lève et va montrer les nombres 59 et 11).

1010 - ET1 : Alors ces deux là ? On va l'essayer...

Je dis 59 : 11

-55 5 reste 4

(Il fait lui-même la division).

1011 - ET1 : À l'aide d'une division, on a pu le savoir... Bravo l'ami... Cela donne environ 5 petits clous... Ça va ? C'est comme cela qu'on devrait vérifier. On vas-tu se souvenir de cette démarche ? Prends note, car on va se servir de ça pour la prochaine activité.

La consigne consistait à dire combien de fois la référence (11 moyens clous) était contenu dans l'objet (59 petits). Cet épisode a montré la verbalisation de l'enseignant qui cherchait à comprendre la procédure de plusieurs équipes. D'abord l'équipe 3 a semblé percevoir la relation d'équivalence et par essais successifs travaille sur le fait que 4 petits clous font 1 moyen clou. Cette dernière a indiqué avoir fait une multiplication en sachant que : 1 moyen clou vaut 4 petits (certaines balances affichaient 5 petits). Cette réponse annonçait une conduite pertinente qui pouvait s'avérer experte car, en principe, le passage d'une unité à une unité d'ordre inférieur se traduit à l'aide d'additions réitérées ou d'une multiplication.

Quant à l'équipe 4, elle a éprouvé des difficultés de compréhension de la tâche. Elle n'avait pas de résultats, un des coéquipiers avait des difficultés à envisager le but de la tâche proposée et même à entrer dans la tâche. Son camarade lui a expliqué. Un élève d'une autre équipe a proposé de mettre les clous composant les deux messages dans chaque balance. Procédure erronée. Il n'a pas compris la relation entre les variables.

Pour finir, une procédure experte a émergé de la dernière équipe : la proposition de diviser le nombre de petits clous par le nombre de moyens clous. Cet élève a semblé avoir compris les relations entre les différentes unités de mesure et a exprimé clairement son raisonnement et sa recherche de solution qui s'est avérée être une division. Un élève de cette équipe, lorsqu'on l'a interrogé, a montré les deux variables utilisées (59 petits clous et 11 moyens).

Nous aurions souhaité que l'enseignant le laisse montrer quelle procédure il allait engager puisque le diviseur est un grand nombre. Ici, c'est l'enseignant qui a effectué l'opération parce que les élèves n'avaient pas encore vu les algorithmes d'un diviseur à deux chiffres.

1096 - ET1 : Tu remplaces 63 petits clous... Je veux que tu replaces 63 petits clous par les autres sortes de clous... et je vous demande de trouver le message pour les remplacer..., de manière à utiliser le moins de clous possible...

(Silence. L'enseignant écrit au tableau : 63 petits clous à transformer le moins de clous possible).

1097 - ET1 : ... Tu veux que je répète la consigne ?

1098 - La classe : ... oui...

1099 - ET1 : Oui ? Alors, je dis qu'il faut remplacer 60 petits clous... heu... je veux dire 63 petits clous par d'autres clous... mais de manière à avoir le moins de clous possible... Alors, faites-moi un message... 63 petits clous par le moins de clous... par une quantité moindre de clous...

(Silence de 16 sec.).

1100 - Él.1 : Mais... est-ce qu'on est obligé de... même si on change de sortes de clous, de garder quand même 63 clous ?

1101 - ET1 : Tu dois transformer mon message de façon à avoir le moins de clous possible...

1102 - Le même élève : Mais...

1103 - ET1 : Il faut qu'on ait le moins de clous possible... Autrement dit, il faut que tu arrives à un nombre plus petit que 63 là... Tu as le droit d'utiliser tous les clous qu'on a utilisés déjà...

1104 - L'él.1 : Ça donne 63 clous ? Mais on peut prendre d'autres ?...

1105 - ET1 : Hum... Il faut que ça donne... il faut que ton nombre… que ça donne… soit le moins possible de clous que tu vas utiliser... qui vont valoir la même chose..., le même poids que 63 petits clous...

1106 - L'él.1 : Ah...

1107 - ET1 : Tu remplaces 63 petits clous de façon à avoir le moins de clous possible...

La compréhension de l'énoncé et le processus de structuration du problème paraissent difficiles pour la classe, malgré les nombreuses explications de l'enseignant au point de vouloir mettre ce dernier en difficulté (1103, 1105). Sa stratégie de fonction du contrôle du sens avec une approche didactique avait pour but de favoriser la dévolution du contrat de recherche aux élèves (Portugais, 1995, p. 177). Les relations entre les différentes grandeurs et les différents moyens utilisés pour les comparer semblent être des obstacles pour ces élèves. L'élève 1 et un bon nombre de ses camarades n'ont pas compris qu'il faut étudier l'écart entre les grandeurs des clous et chercher les relations. Ils n'ont pas conscience du fait que résoudre ce problème ne revient pas à trouver tout de suite les calculs à effectuer pour répondre à la question posée, mais plutôt à élaborer des procédures menant à sa résolution.

1012 - ET2 : OK, les amis, je réécris au tableau les conversions qu'on avait trouvées... Voilà :

1 gros clou = 8 petits clous

1 moyen clou = 4 petits clous

1 moyen clou = 10 minis clous

1 petit clou = 3 minis clous

1 gros clou = 20 minis clous

Alors, voilà un message qu'il faut qu'on regarde comme il faut et qu'on essaie de me dire si les deux messages veulent dire la même chose... Si les deux messages sont pareils... Par exemple si on met ces clous-là, ces 2 messages-là chacun dans une balance..., si ça va être le même message...

- message 1 : 4 gros clous, 30 moyens, 4 minis

- message 2 : 15 gros clous, 8 moyens, 24 petits

1012 - La classe : (...)

1013 - ET2 : Mais pour cela, les clous qu'on a eus ici..., les clous qu'on avait échangés ici, vont nous aider... Voilà le travail de ce matin... Ça va ?

1014 - Él.1 : Moi, je n'ai pas envie de faire ça...

1015 - ET2 : Et pourquoi cela ?...

1016 - ET2 : Ben... Parce que..., je ne comprends pas bien..., et puis ça ne me tente pas...

1017 - ET2 : Voyez-vous ça ? Ce n'est pas une question d'être tenté ou de ne pas être tenté... Est-ce qu'il faut que j'explique pourquoi nous devons faire cette activité ?

1018 - Él.2 : Oui, pour Mme T.

1019 - ET2 : C'est vrai..., mais tu dois savoir que tu as ça au programme... Tu dois apprendre avant d'aller au secondaire à convertir, à faire des preuves et ç'est ça qu'on va apprendre aujourd'hui. Et puis, tu as de la chance de travailler sur du matériel le fun... Tu veux que je te donne des équations à faire... C'est ce qu'on appelle des mathématiques ?...

1020 - La classe : Non...

1021 - ET2 : Là, je suis d'accord avec vous... Faire seulement des équations ce n'est pas faire des mathématiques. Les mathématiques, c'est ce que tu vas apprendre pour pouvoir réfléchir plus que les autres aux choses de la vie... Pour être moins niaiseux... Y en a-t-il qui veulent rester niaiseux ?

1022 - La classe : Non...

1023 - ET2 : Si vous m'aviez dit oui.., ça m'aurait fait beaucoup de peine... Car jusqu'à présent je suis fière de vous et Mme T. aussi... Je lui ai dit que mes élèves étaient capables de mener l'expérience..., et jusqu'à maintenant tout s'est bien passé... Alors toi, tu viens comme un bébé me dire que tu n'es pas tenté...

(Elle le regarde un moment).

1024 - ET2 : Veux-tu que je t'enlève de l'expérience ?

1025 - Él.1 : (...)

1026 - ET2 : Je n'ai pas bien compris ta réponse... Si c'est oui, ce n'est pas grave... Seulement, je vais t'emmener dans une classe de maternelle et puis, nous... on va continuer notre travail... C'est ce que tu veux ?

1027 - Él.1 : N... non...

1028 - ET2 : Alors, veux-tu travailler avec nous ?

(La classe l'encourage et finalement, il accepte d'embarquer dans l'activité).

1029 - ET2 : Alors, si tu as changé d'avis, c'est bien... Tu vas voir qu'à la fin, tu ne seras pas déçu et puis... Il se pourrait qu'il y ait des surprises... Cela m'aurait fait mal au cœur que tu n'en aies pas... Allez, on commence! On réfléchit aux stratégies... Tu vas te mettre en équipe de deux..., et en silence... ».

Une contrainte ou une difficulté apparaît tout de suite dans cet épisode : le refus d'un élève d'entrer dans la relation didactique. S'engage alors entre l'enseignant et lui une argumentation ardue qui est l'occasion d'expliciter et d'insister sur l'importance de cet apprentissage et du bénéfice à en retirer. C'est un exemple de contrainte dont parlent Perrin-Glorian (1991) et Lemoyne et Hagel (1999) au sujet d'élèves rebelles ne voulant pas permettre la dévolution dans une relation didactique.

1032 - ET2 : Ok, j'aimerais que tu me fasses la preuve que ces deux messages au tableau sont les mêmes..., que tu fasses quelque chose, comme peut-être une transformation et au bout si je vérifie, je vois que tu as raison... Faire la preuve c'est me montrer que ce que tu dis est vrai quand je vais vérifier... Alors comment vas-tu faire pour que je le sache, pour que je voie ?...

1033 - La classe : (...)

1034 - ET2 : ... Par exemple si je te dis 3 + 2 =... Toi me diras 5... Mais si je te demande de me faire la preuve, qu'est-ce que tu vas faire ?

1035 - Él.1 : Mais, je peux prendre des jetons et faire le calcul devant vous...

1036 - ET2 : C'est-à-dire ?...

1037 - Él.1 : Je vais prendre 2 jetons et puis... je vais ajouter 3 jetons... Et puis si je compte le tout..., ça va me donner 5...

1038 - ET2 : Eh bien, eh bien..., c'est pas mal ça... Les autres aviez-vous compris sa démarche ?

1039 - La classe : Oui...

1040 - ET2 : Alors, revenons à notre situation de ce jour, qu'est-ce que je peux faire pour montrer que ces deux messages sont pareils...

1041 - Él.2 : Les additionner...

1042 - ET2 : Les additionner... Viens donc faire cette addition au tableau.

(L'élève vient et additionne tous les clous des deux messages).

1043 - ET2 : Classe, comprenez-vous quelque chose à ce qu'il vient de faire ?...

1044 - La classe : (...)

(L'enseignante, l'élève au tableau, les camarades, tous, regardent son addition).

1045 - Puis, l'él. 3 : Mais..., mais..., je pensais qu'on devait comparer les 2 messages...

1046 - ET2 : Tout à fait, on doit comparer les deux messages..., mais si tu additionnes les deux, comment on va faire pour les comparer ? C'est comme si je te donne... Tiens, je *vais vous donner un autre exemple... Je remplis ce verre d'une certaine quantité d'eau..., et puis ce verre-là d'une autre quantité d'eau... Les deux verres se ressemblent, non ?*

1047 - La classe : Oui...

1048 - ET2 : Ils ont la même grosseur, non ?

1049 - La classe : Oui...

1050 - ET2 : Alors, voilà que j'ai mis une certaine quantité d'eau dans les deux... Si je te dis de me faire la preuve... quel est le verre qui a plus d'eau ?...

1051 - Él.4 :... Mais c'est celui-là (en pointant le verre qui a le plus d'eau).

1052 - ET2 : Alors, toute la classe dit la même chose que notre ami ?

1053 - La classe : Oui...

1054 - ET2 : Les deux verres présentés comme ça, je peux les comparer, n'est-ce pas ?

1055 - La classe : Oui...

1056 - ET2 : Je peux donc faire la preuve ?

1057 - La classe : Oui...

1058 - ET2 : Mais..., admettons que je renverse le contenu de ce verre dans celui-là... Est-ce que je peux encore faire la preuve... à savoir si la quantité d'eau des deux verres était égale ?

1059 - La classe : Non... (Éclats de rire).

1060 - ET2 : Ah. , alors voilà ce que notre ami au tableau a fait... Il a fait exactement comme moi j'ai fait avec l'eau des deux verres...

(Elle laisse passer 8 sec.).

1061 - ET2 : Bon, l'ami... as-tu compris mon exemple avec l'eau ?

1062 Él.2 : Oui...

1063 - ET2 : ... Que peux-tu faire maintenant ?

1064 - Él.2 : Je vais aller additionner tous les clous du 1er message...

1065 - ET2 : Et après...

1066 - Él.2 : Je vais faire la même chose avec le message 1...

1067- ET2 : Est-ce que son procédé vous semble bon ?

1068 - La classe : Euh oui...

1069 - ET2 : Moi je ne crois pas... Est-ce que les minis clous pèsent la même chose que les gros clous ?

1070 - La classe : Non...

1071 - ET2 : Alors, comment voulez-vous additionner deux affaires qui ne se ressemblent pas... qui ne pèsent pas la même chose ?

1072 - La classe : (...).

Cette mise en commun visait à faire émerger les conduites des élèves en ce qui concerne la preuve de l'équivalence de ces deux messages. Dans ce cadre, les élèves devaient se détacher des variables (balances et clous) pour considérer les unités de clous mises à leur disposition. Quelques-uns de leurs schèmes erronés ont été observés :

- l'addition des deux messages proposés : 1040 - ET2 : Alors, revenons à notre situation de ce jour, qu'est-ce que je peux faire pour montrer que ces deux messages sont pareils ?
- 1041 - Él.2 : Les additionner...

Ces élèves ont pensé à procéder mécaniquement à une addition par rapport à la démonstration faite par l'enseignante, faute d'anticipation de représentation. Il nous apparaît qu'ils ont fait tout de suite référence à l'addition, équation de prédilection. Nous constatons aussi que les valeurs attribuées aux clous et les correspondances travaillées et utilisées n'ont ni été comprises, ni observées. Plusieurs élèves n'ont pas établi de relation entre les désignations des clous et n'ont pas fait le lien que ces clous sont liés par des relations. On peut dire que leurs erreurs révèlent une rupture de sens, car ils ont abandonné le sens du problème et se sont engagés dans un calcul. L'enseignant, dans son explication. a montré qu'additionner les deux différentes quantités d'eau ne permet pas de faire la preuve. De ce fait, il utilise une approche adidactique[15] afin de les inciter à la preuve et de les laisser établir le lien entre les variables (Portugais, 1995, p. 178).

À notre avis, il aurait dû prendre deux verres de dimension ou de capacité différente et une même quantité d'eau pour étayer sa démarche. C'est la capacité des deux verres (les différents clous dans les messages) qui est à comparer et non le contenant. Cela aurait pu appuyer valablement sa thèse. Cependant, il a réussi, par les points de vue différents, voire contradictoires, des élèves à les amener à s'intéresser à d'autres perspectives sur la

[15] Une situation ***adidactique*** est un processus ne faisant pas partie d'une notion d'apprentissage, mais qu'il s'agit d'un moyen pour atteindre ou pour éveiller l'attention et l'intérêt de l'élève. Elle consiste selon Brousseau (2003) non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel on veut qu'il s'adonne (consignes, règles, but, état final...) mais à faire en sorte qu'il se sente responsable, au sens de la connaissance dans l'apprentissage et non pas de la culpabilité, du résultat qu'il doit rechercher.

résolution du problème. Il a également réussi à leur faire prendre conscience du comment et du pourquoi de leurs actions. Toutefois, malgré ses explications, la représentation de la relation d'équivalence semble difficile dans cette situation problème pour ces élèves. Nous observons qu'une bonne proportion ont engagé des recherches sans organisation basées sur l'algorithme de l'addition qu'ils pensaient maîtriser.

1076 - ET2 : Ok, nous allons comparer les gros clous entre eux..., les moyens clous entre eux... Mais ce qu'on peut faire aussi, c'est les transformer tous en..., en...

1077 - La classe : en minis clous, en moyens clous, en...

1078 - ET2 : Bon, on va s'entendre... On va choisir quelque chose qui va faire l'affaire de tout le monde... On s'était dit que :

1 gros clou = 8 petits clous

1 moyen clou = 4 petits clous

1 petit clou = 3 minis clous

1 gros clou = 20 minis clous

... Alors, on va tout changer en minis clous et puis on va aller comparer tous les minis clous qu'on va avoir... Mais comment qu'on fait ?

1079 - Él.5 : ... On va prendre les gros clous du premier message et puis on va aller chercher combien ça fait de... minis clous...

1080 - ET2 : Exactement... Alors, je vous donne 5 min pour cette transformation... Allez-y...

(Elle les regarde travailler environ 4 min 12 sec.).

1081 - ET2 : Alors...

1082 - Él.6 : Est-ce que je peux venir au tableau ?

1083 - ET2 : Viens donc... Montre-nous ce que tu as fait...

1084 - Él.6 : ... Heu, heu..., on a dit que 1 gros clou = 20 minis clous... Moi j'ai fait des additions...

1085 - ET2 : Écris-nous ce que tu as fait sur ta feuille.

(L'élève écrit ceci : 1 gros clou = 20 minis

+ 1 G = 20

+ 1 G = 20

+ 1 G = 20

---

4 G = 80 minis)

1086 - ET2 : Voilà le calcul de notre ami... Alors, vous allez faire la même chose pour tous les autres clous sauf les minis..., puisqu'on cherche des minis, on l'a déjà... On ne va pas encore les calculer... Allez-y 15 min pour ça...

(Elle passe aider, vérifier l'exactitude de leurs calculs, encourager les élèves ou répondre à ceux qui l'appellent. 14 min 8 sec.).

1087 - ET2 : Ok, je pense que tout le monde a terminé... Nous allons calculer maintenant les moyens clous en mini-clous... Qui veut venir au tableau ?

1088 - La classe : Moi..., moi...

1089 - ET2 : Viens-toi (elle nomme W.), viens nous montrer ton calcul...

1090 - Él.6 : Moi j'ai fait ceci : 1 moyen clou = 10 minis clous... Alors, j'ai fait des paquets de 5 moyens clous... un paquet m'a fait 50... 50 minis clous... Et comme il y en avait 30... Ça m'a donné 6 paquets... Et puis j'ai compté... j'ai fait des bonds de 50... Et puis, j'ai eu 300 minis clous...

1091 - ET2 : Comment tu peux nous le présenter en calcul ?

(L'élève fait ceci au tableau : 1 paquet de 5 moyens clous = 50 clous + 50 = 100 + 50 = 150 + 50 = 200 + 50 = 250 + 50 = 300... Puis il compte toutes les fois qu'il a écrit 50...)

1092 - ET2 : Bien, bien, bien..., nous continuons pour les autres, c'est-à-dire les petits... Tu n'oublies pas que tu laisses tels les minis... Ok ?

1093 - La classe : Oui... '

Dans cet épisode, les élèves mettent en œuvre des conduites intéressantes : un élève a trouvé très vite la solution à partir d'essais ou grâce à une vision rapide de modifications en appliquant une procédure systématique : échanger les grandes unités en plus petites et procéder à une opération interne, l'addition. Il a expliqué clairement son raisonnement et a annoncé une procédure pertinente qui revient à additionner tous les gros clous en sachant que : 1 gros clou = 20 minis clous. Sa réponse a été cohérente avec le raisonnement déployé. Nous voyons plus loin qu'il a continué à soutenir son raisonnement (tours de parole 1084 et 1085).

Un second élève interrogé a procédé de façon similaire :

1090 - Él.6 : Moi j'ai fait ceci : 1 moyen clou = 10 minis clous... Alors, j'ai fait des paquets de 5 moyens clous... un paquet m'a fait 50... 50 minis clous... Et comme il y en avait 30... Ça m'a donné 6 paquets... Et puis j'ai compté... j'ai fait des bonds de 50... Et puis, j'ai eu 300 minis clous...

Cette procédure a été également experte. Ces deux élèves paraissent avoir conceptualisé le problème et ont utilisé de façon adéquate le calcul relationnel afin de procéder à leurs calculs. Ils ont su extraire les informations pertinentes du problème et utiliser les propriétés des unités différentes qu'ils se sont appropriées en effectuant des calculs simples avec des mesures adaptées. Toutefois, nous constatons un certain décalage entre la compréhension de ces deux élèves et bon nombre de leurs camarades. Ces derniers ont manifesté des difficultés de mise en œuvre de stratégie et même de compréhension du travail demandé. Ils n'ont pas été capables de produire des dessins, des calculs ni même de phrases par rapport à leur conceptualisation.

1111- ET1 : Voilà un ami qui a transformé ses clous en moyens et en gros clous... Ça lui a donné beaucoup moins...

1112 - Él.3 : Moi aussi, j'ai fait la même chose...

1113 - ET1 (qui passe voir sa production) : ... Toi, tu les transformes tes clous en... mais... il ne faut pas que tu en rajoutes... Lis la consigne au tableau...

1114 - ET1 (à un autre élève): ... Tu as enlevé des petits clous que tu as transformés ?... Tu as trouvé 25 gros clous ?... 25 gros clous!!!! (Il s'exclame au vu du nombre de clous convertis). Ça va donner 63 petits clous ?...

1115 –ET1 : (à l'ensemble de la classe) : Je vous rappelle... pour vous aider... rappelez-vous l'exercice de conversion de la semaine passée... Je sais que ça fait beaucoup de jours passés... mais ça pourrait te donner un indice...

(Il laisse passer 2 min. 10 sec.)

1116 - ET1 : S'il y a en qui se rappellent, ils peuvent l'utiliser, cette stratégie... cette conversion... Alors, tu vas utiliser, tu vas avoir moins de clous... Il y a quelques jours, on avait transformé de gros clous en moyens clous, et des petits clous en gros clous dans la conversion... Il faut transformer... ça va t'aider...

1117 - Él.4 : Qu'est-ce que ça va me donner la conversion ?...

1118 - ET1 : Mais tu vas avoir moins de clous..., tu vas utiliser moins de clous...

1119 - Le même élève : Qu'est-ce que ça va me donner ?

1120 - ET1 : Hum... Quoi ? Les clous ?... Ah... mais... tu n'as pas compris l'activité ? On travaille sur la mesure du poids... de la masse... »

Nous présentons la conduite d'un élève qui indique avoir trouvé 25 gros clous en échangeant 63 petits clous pour avoir le moins possible de clous. Rappelons que 1 gros clou vaut 8 petits. Pour cet élève, 63 petits clous = 25 gros clous. Nous faisons l'hypothèse qu'il a additionné 63 petits clous à 8 petits qui représentent la valeur de 1 gros. Cela donne 71 petits. Ensuite, il a dû faire des paquets de 3 sachant que 1 petit clou = 3 minis.

Il a trouvé 23 au quotient à quoi il a ajouté le reste 2. Ce qui donne 25 clous mais pas 25 gros clous... Il a peut-être cherché la valeur de 1 gros clou, mais a été arrêté par l'impossibilité de transformer les 63 petits clous dans une autre mesure. Il apparaît que l'élève n'a pas compris non plus les variables utilisées ni la valeur de ces variables. Dans ce cas, la procédure est erronée. L'élève utilise sans mettre du sens, les relations arithmétiques entre les nombres mis à sa disposition.

1127 - ET1 : On avait dit qu'on essayait de ne pas utiliser les minis... Moi, je veux que tu me trouves, comment tu ferais pour avoir exactement le même poids, la même masse avec le moins de clous... Je vais te donner un indice...

(Il revient au message écrit au tableau) :

63 petits clous à transformer le moins de clous possible.

L'as-tu écrit sur ta feuille ?

(À un élève qui l'appelle, il s'approche et lit sa production).

1128 - ET1 : Oui ?

1129 - Él.3 : Moi, j'ai fait 60 clous et puis j'ai fait des bonds de 5... Des paquets de 5... Et puis, il reste 3 clous... Les voilà...

1130 - ET1 : Alors, tu as fait des bonds de 5... Les bonds de 5 c'est pour quoi ?

1131 - Él.3 : ... les moyens... les clous moyens...

1132 - ET1 : Tu m'as dit avoir eu 12 moyens clous pour environ 60 petits clous... C'est ça ?

(L'élève acquiesce).

1133 - ET1 : Eh, c'est bon... Continue. (Il va voir la production d'une élève qui a levé la main).

1134 - ET1 : Qui dit mieux ? Mlle ? Alors, on va commencer... Par quoi tu as transformé ?

(Il regarde la production)

1135 - Él.4 : ... en gros clous...

1136 - ET1 : Elle a transformé en gros clous... Oui... Est-ce que tout le monde écoute ? Combien ça donne ? Tourne-toi là (à un élève qui regardait ailleurs). Oui ?

1137 - Él.4 : 8 petits clous pour 1 gros clou...

1138 - ET1 :... Elle a dit qu'elle a pris 7 gros clous... Et 7 gros clous, ça donne le poids de combien de petits clous ?...

1139 - Él.4 : de 56...

1140 - ET1 : ... Elle dit que 7 gros clous... 7 gros clous ça fait le poids de 56 petits clous... Ensuite ?

1141 - Él.4 : (...)

1142 - ET1 : Elle a pris 1 moyen et 1 moyen... ça vaut le poids de 5 petits clous... Donc, elle a fait une addition pour vérifier combien elle avait de clous... donc 56 + 5, ça fait...

1143 - Un autre élève répond : ... 61...

1144 - ET1 : ... 61..., on n'est pas rendu encore à 63... Elle en garde combien de petits clous sur 63 ?

1145 - La classe : 2.

1146 - ET1 : Elle en garde 2. Oui. Ça lui a donné 7 gros clous, 1 moyen et 2 petits clous... Ça fait un total de...

1147 - La classe : de 10 clous...

1148 - ET1 :... Oh... Je pense que c'est le maximum qu'on peut aller... On peut regarder s'il y a une autre manière, mais... d'après moi, c'est le minimum qu'on peut avoir de clous... C'est 10 clous parce qu'on ne peut pas rajouter d'autres clous... ça va dépasser...C'est excellent... Très bien... ».

Nous voyons, dans cet épisode, plusieurs conduites où apparaissent des propriétés arithmétiques de multiples et de diviseur. Plusieurs élèves, à l'exception de quatre ou cinq, ont trouvé la solution à partir de peu d'essais en appliquant une opération interne comme l'addition réitérée pendant que certains de leurs camarades tâtonnaient.

L'élève 3 a annoncé une procédure experte et personnelle qui revient à effectuer une division euclidienne par bonds ou par paquets de 5 ou encore par une méthode « pas à pas » par addition réitérée du diviseur (1129, 1131). Il est parti du fait que 5 petits clous valent 1 moyen clou. Ce qui lui a donné 12 moyens avec 3 petits clous comme reste qu'il a énoncé d'ailleurs. Ce raisonnement s'est avéré correct et, de plus, il l'a exprimé clairement. On peut percevoir les relations entre les différentes unités des grandeurs, mais aussi les propriétés arithmétiques entre ces quantités : dividende, diviseur, et quotient. Son enseignant le félicite et l'encourage par cette même conduite, à chercher un moyen dans lequel il utiliserait le moins de clous possible. Cette stratégie adidactique est fonction du contrôle du sens[16]. L'enseignant tente de mettre l'élève en conflit avec sa procédure en lui soumettant une tâche différente qui produira un résultat identique (Portugais, 1995, p. 178). Malheureusement, quelques équipes n'ont pas compris l'énoncé et n'ont pas construit de représentations, ce qui a amené l'enseignant à intervenir sur les contraintes de l'énoncé :

- transformer les 63 petits clous en de plus gros clous;
- valider l'opération.

Un dernier élève (1135, 1137) a annoncé avoir trouvé 7 gros clous pour 63 petits. Méthode tout à fait adaptée et experte : 8 petits clous pour 1 gros clou. Ce qui donne 56 comme la masse de 7 gros clous. Puis, 1 moyen clou = 5 petits. À la première masse (56), il ajoute celle d'un moyen clou : 56 + 5 = 61. Ici, il aurait été intéressant de laisser l'élève achever l'explicitation de sa représentation de cette situation problème. Toutefois, si l'interprétation de l'enseignant est bonne, nous pouvons dire que la conduite de cet élève est organisée.

1150 - ET2 : Nous allons effectuer..., nous allons faire une activité de conversion aujourd'hui... Qui peut me dire ce que ça signifie une conversion ?

1151 - Él.1 : ... Je sais pas vraiment..., mais je pense que..., que ça veut dire échanger...

1152 - ET2 : Oui, ça veut dire échanger... Échanger des affaires contre des affaires... Par exemple dans le cas de notre activité, je trouve que 63 petits clous, c'est beaucoup... Moi, je veux que tu m'échanges ça contre des moyens clous ou des gros clous...

(La classe écoute attentivement).

1153 - ET2 : M. ? Est-ce que dans cette consigne, je peux échanger avec des minis clous ?

[16] Inciter à estimer et laisser le lien à établir aux élèves; inciter à prouver et laisser le lien à établir aux élèves sont des stratégies qui sont fonction du contrôle du sens avec une approche adidactique (Portugais, 1995, p. 178).

1154 - Él.2 : Oui...

1155 - La classe : Mais non... mais non... ce n'est pas ce qu'elle a dit.... man...

1156 - ET2 : Qu'est-ce que j'ai dit d'abord ? Toi, S., peux-tu répéter la consigne ?

1157 - Él.3 : Vous avez dit d'échanger 63 petits clous contre des moyens ou des gros...

1158 - ET2 : C'est très bien S. alors, comment pensez-vous qu'on va faire cette conversion ? Comment allons-nous procéder ?

1159 - La classe : (...)

1160 - ET2 : Qui a une idée ?... Il faut qu'on échange ces petits clous contre d'autres clous... Alors, qu'est-ce qu'on fait ?

1161 - Él.4 : Est-ce qu'on peut utiliser les balances ?

1162 - ET2 : C'est une possibilité... Mais y a-t-il un autre moyen ?

1163 - Él.5 : Il y a une fois on s'était dit que 2 moyens clous..., heu..., 3..., je ne sais plus là... que ces clous-là faisaient un gros...

1164 - ET2 : Good..., oui on avait déjà fait une conversion... Qui s'en souvient ?

(Trois quarts de mains se lèvent).

1165 - ET2 : Et vous, vous ne vous en souvenez pas ?

1166 - Él.6 : Pas vraiment...

(L'enseignante part écrire les deux suggestions au tableau).

1167 - ET2 : On s'était dit... que... :

1 moyen clou = 10 minis clous

1 moyen clou = 5 petits clous

1 petit clou = 3 minis clous

1 gros clou = 20 minis clous

1 gros clou = 8 petits clous

... Vous vous rappelez maintenant ? Moi, j'aimerais ça, que vous me trouviez combien je peux échanger, je peux convertir 63 petits clous en moyens clous ou en gros clous..., mais je veux avoir le moins de clous possible... Il faudra faire des calculs...

1168 - Él.7 : Est-ce qu'on peut utiliser la balance ?

1169 - ET2 : Bon, la classe, qui veut utiliser la balance ?... Et qui veut faire seulement des calculs à partir de ces messages ?

(Certaines mains se lèvent pour la balance et certains demandent à essayer le calcul).

1170 - ET2 : Bravo aux amis qui veulent calculer... Nous allons comparer de toute façon nos résultats... »

Cet épisode fait un retour sur la relation d'ordre et d'explicitation de la consigne (tour de parole 1157) des résultats obtenus auparavant lors des précédentes pesées. Deux schèmes apparaissent pour cette activité :

- convertir 63 petits clous par une pesée avec d'autres sortes de clous (tour de parole 1157);
- utiliser les relations (les valeurs) existant entre les clous (tour de parole 1163). Cette deuxième procédure indique que cet élève a compris comment exprimer une grandeur à l'aide d'une autre unité (tour de parole 1163).

Nous constatons que ces conduites ont permis à certains de leurs camarades de conceptualiser le problème et de faire référence aux variables nécessaires aux fins de formulation. Ainsi, un travail collectif peut favoriser un changement de perspective d'un élève sur son activité.

1217 - ET2 : C'est intéressant ça... Alors, viens au tableau nous montrer ta stratégie...Alors, nous allons revenir à N. Toi, avec ta pesée, est-ce que les deux plateaux étaient équilibrés ?

1218 - Él.11 : Moi, j'ai pesé avec les gros clous...

1219 - ET2 : Si tu fais l'équation, ça donne quoi ?...

1220 - Él.11 : ... si 1 gros = 8 petits clous... si je dis... si je fais des bonds de 8 avec mes clous...

(Il se met à compter en faisant des sauts de 8, comptant sur ses doigts, hésitant, mais trouvant les résultats tout de même).

1221 - Él.11 : Ça me fait 8 +8 = 16 +8 =... 24... + 8 = ... 32 + 8... = 40... + 8 = ... 48 + 8 = ... = ... 56 + 8 = ...65... Non ... 64

1222 - ET2 : Bien, il a eu 64 clous... Est-ce que c'est bon ça ?

1223 - La classe : Oui...

1224 - ET2 : ... Mais rappelez-vous la consigne... On avait 63 petits clous mais pas 64... Alors, vous ne pensez pas qu'il y a 1 petit clou de trop ?...

1225 - Él.12 : Mais ça ne fait rien... On peut accepter sa réponse...

1226 - ET2 : Et pourquoi devrait-on accepter sa réponse ?

1227 - Él.12 :... Ben, parce que un petit clou de trop, c'est pas bien grave et puis sa réponse est très près de 63...

1228 - ET2 : Hum..., hum.., qui d'autre peut me donner une autre raison pour que j'accepte cette réponse ?

1229 - Él.1 : Mais Mme, vous savez que les balances ne tombent pas juste... alors on peut accepter sa réponse...

1230 - ET2 : Alors, toute la classe, on l'accepte-tu ?

1231 - La classe : Oui...

1232 - ET2 : Alors, ça nous fait combien de clous pour cette réponse-ci ?

1233 - La classe : 8 clous...

1234 - ET2 : Une dernière réponse... W ? Peux-tu nous montrer ta solution ? Qu'est-ce que tu as fait ?

1235 - Él.2 : ... Une division...

1236 - ET2 : ... Une division... Oh... montre-nous-la...

(L'élève se lève et effectue une division au tableau)

1ère : 63 : 7	2e : 63 : 7
56 8	63 9
7	0

(Elle le laisse réfléchir un peu... – 9 sec.)

1237 - ET2 : Est-ce qu'il n'aurait pas pu faire un autre paquet de 7 ?

1238 - Él.1 : Ben oui... Ben oui...

1239 - ET2 : Mais certainement! W., reprends donc ta division...

(L'élève reprend sa division et trouve 9).

1240 - ET2 : Maintenant, tu vas me dire où tu as pris le 7 en diviseur. Regarde bien les messages ? Vois-tu un 7 quelque part dans les conversions ?

(L'élève regarde longuement... La classe avec, puis il s'écrie...)

1241 - Él.11 : C'est vrai que j'aurais pu mettre un 8 à la place du 7...

1242 - ET2 : Oui, tu l'as vu ton erreur... Veux-tu refaire ta division ? Est-ce que tout le monde a compris pourquoi il doit changer 7 au 8 ?

1243 - La classe :... Oui..., non...

1244 - ET2 : Mais voyons donc..., on s'est dit ici que 1 gros clou = 8 petits clous... Alors, il aurait dû faire sa division par 63 : 8... Avez-vous compris maintenant ?

1245 - La classe : Oui...

1246 - ET2 : Reprends donc ta division...

(L'élève la reprend et trouve 7 au quotient, avec un reste 7).

1247 - ET2 : Alors, ça te fait combien en tout ?

1248 - Él.11 : Ben... 7 + 7 = 14... 14 clous...

1249 - ET2 : Eh! C'est mieux que les deux premières réponses... Alors, on va penser à... si on peut avoir moins de clous que ça... Nous continuerons après la récréation... Allez vous habiller... '

La consigne est de transformer 63 petits clous en moins de clous possibles. La contrainte de cette activité visait à limiter les échanges aux unités d'ordre immédiatement inférieur.

Un premier élève interrogé a semblé avoir identifié le nombre qui exprime les rapports entre les grandeurs qui sont en relation de la mesure et a dit avoir procédé par addition réitérée : 8 +8 = 16 + 8 = 24 + 8 = 32... Jusqu'à ce qu'il trouve 64. Résultat que l'enseignant a présenté à la classe et à qui il a demandé s'il fallait le valider. Cette stratégie de l'enseignant fonction du sens avec une approche adidactique a pour but de débattre avec les élèves d'une procédure et d'en débattre avec eux à partir de là (Portugais, 1995, p. 178).

Plusieurs arguments intéressants et exprimés de différentes façons sont ressortis. Oui, il faut accepter ce résultat parce que :

- un petit clou de plus ou de trop... ce n'est pas bien grave (tour de parole 1227)...
- toutes les balances ne tombent pas justes (tour de parole 1229)

Dans un premier temps, nous voyons que l'élève a compris le passage d'une unité à une autre. Ces propriétés entre les différentes unités de mesure lui ont permis d'effectuer cette conversion qui s'appuie sur la connaissance des relations qui existent entre elles. Enfin, cette procédure fait intervenir des multiples de 8 par addition de multiple.

Dans un deuxième temps, nous voyons la notion de l'incertitude ou de l'approximation de la mesure discutée avec intuition par les élèves. Aussi, pour l'élève qui a anticipé le partage et qui a eu un quotient légèrement plus grand, la classe a pensé qu'il n'y a pas d'inconvénient à accepter cette procédure, parce que plusieurs élèves ont défendu ce point de vue et qu'il s'est dégagé un consensus. Il est à noter que dans les grandeurs en mesure, il y a toujours une incertitude, car en pratique, toute méthode possède une limite de précision.

Un autre élève a indiqué avoir utilisé la division comme procédure. Cependant, au lieu d'utiliser la valeur du diviseur 8 petits clous, il a pris 7. L'enseignant l'a laissé faire sa division avant de lui demander d'où venait le 7 quand 1 gros clou = 8 petits. L'élève s'est rendu compte de son erreur et a repris sa division qu'il a réussie. Cette erreur peut être due à une inattention de l'élève ou à une non-maîtrise de la division.

1259 - ET2 : Voyons donc, on avait bien fait ça la fois dernière... Allez ! Bon, je vais devoir interroger..., D. Veux-tu y aller ?...

1260 - Él.3 : Ben, je ne sais pas...

1261 - ET2 : Viens donc, nous allons t'aider, tu verras... C'est bien D., on applaudit D....

(L'élève se lève en hésitant, mais part tout de même au tableau).

1262 - ET2 : Alors, qu'est-ce que tu as fait ?

1263 - Él.3 : Heu..., moi j'ai fait des paquets de 5...

1264 - ET2 : Ah oui ? Et pourquoi donc ?...

1265 - Él.3 :... Heu..., parce que..., parce que... je peux aller chercher ma feuille ?

1266 - ET2 : Mais certainement...

(Il part chercher sa feuille et revient au tableau).

1267 - Él.3 : On avait dit que... 1 moyen clou = 5 petits clous...

(L'enseignante regarde sa feuille de préparation pour l'exactitude de la conversion. Celle-ci était d'ailleurs écrite dans un coin du tableau).

1268 - ET2 : Oui..., oui, c'est exact... Alors ?

1269 - Él.3 : Alors..., j'ai fait des paquets de 5 ?

1270 - ET2 : Pourquoi des paquets de 5 ?...

1271 - Él.3 : J'ai dessiné les 59 petits clous... et puis... j'ai fait des paquets de 5 à chaque fois...

(Il dessine 59 bâtonnets et encercle 5 à chaque comptage. Tout le monde le regarde faire sans intervenir)...

1272 - ET2 : Alors, ça te fait combien de paquets ?...

1273 - Él.3 : ... ben... (Il compte les paquets). Ben... 11..., mais il y en a que j'ai pas pu faire de paquets...

1274 - ET2 : Et pourquoi cela ?...

1275 - Él.3 : Ben... parce que ça ne valait pas 5...

(En effet, il y avait un reste de 4 clous).

1276 - ET2 : Ça, c'est un très beau dessin... Je te donne 5 min. supplémentaires sur ta période libre... Mais, qu'est-ce qu'on aurait pu faire pour représenter ça en équation ?

1277 - La classe : (...)

1278 - ET2 :... Est-ce qu'on aurait pu faire, une addition..., ou bien une multiplication..., une division..., ou une soustraction ?...

1279 - Él.4 : ..., à mon avis, une division...

1280 - ET2 : Veux-tu venir la faire au tableau ?...

(L'élève vient au tableau et remplace celui qui y était. Il fait ceci) : 59 : 11

1281 - ET2 : Pourquoi tu divises 59 par 11 ?

1282 - Él.4 : Ben..., je ne sais pas...

1283 - ET2 : Qui peut l'aider ?

1284 - Él.5 : ... Là où il a mis 11, c'est là qu'on met le nombre de paquets...

1285 - ET2 : Je ne comprends pas...

1286 - Él.5 : Je peux venir au tableau ?

1287 - ET2 : Mais oui..., si tu penses que ça va être plus clair...

1288 - Él.5 : (Il efface 11 et met à la place 5) voilà!

1289 - ET2 : Mais pourquoi tu mets un 5 là ?...

1290 - Él.5 : Mais c'est les 5 petits clous... le paquet de 5 petits clous...

1291 - ET2 : Tout à fait... Eh bien achève la division...

(L'élève s'exécute et effectue la division. Il trouve un quotient de 11 et un reste de 4).

Nous voyons un élève qui a eu recours aux dessins et à un calcul réfléchi pour montrer sa compréhension du passage d'une unité à une autre dans cette activité. Il donne son raisonnement par tâtonnement et explique les calculs effectués : il a procédé en dessinant 59 petits clous, puis a fait des paquets de 5 (représentant la mesure) pour avoir de moyens clous, puisque 1 moyen clou vaut 5 petits clous. À la question de l'enseignant de n'avoir pas travaillé les 4 petits clous restants, il a argué ne pas pouvoir faire un autre paquet de moyens clous. Cette procédure personnelle est experte car, rappelons-le, la division euclidienne n'a pas encore été enseignée formellement dans cette classe. Cette assertion s'est vérifiée d'ailleurs par la procédure engagée par un de ses pairs qui a fait : 59 : 11 au lieu de 54 : 5. On peut aussi penser qu'il n'a pas compris la valeur des moyens clous en petits clous que son camarade et l'enseignant avaient rappelée. Cette erreur est mise en évidence par un camarade qui a indiqué que le diviseur montre le nombre d'objets dans le paquet.

En ce qui concerne la division en elle-même, elle constitue un obstacle indéniable pour les enfants (Vergnaud, 1991, p. 126). Selon l'auteur, il y a plusieurs raisons : certaines sont d'ordre conceptuel, d'autres liées à la complexité des règles opératoires impliquées par la division, comme c'est le cas dans cette situation problème. Pour cet élève, toutefois, il apparaît que le processus d'opérationnalisation est effectif. Ainsi, de l'ensemble des conduites observées, des difficultés pourraient être attribuées à :

- une opération incompréhensible pour l'élève lui-même;
- des données permutées;
- la non-mémorisation de la question : combien de fois 11 moyens entrent dans 59 petits, qui aurait pu l'aider à asseoir convenablement son équation;
- l'incompréhension des relations entre les unités.

5.7.2 Synthèse des analyses de la situation problème 7

Cette situation problème comportait deux phases. Rappelons les consignes :

1) trouver le rapport entre certains clous donnés pour la première activité;
2) dans la deuxième phase, échanger des clous donnés avec le moins de minis clous. Cette habileté demande également de trouver le rapport existant entre les variables données.

Au départ, nous voyons que la quasi-majorité des élèves ne comprennent pas la consigne faire la preuve, qui était l'amorce au rapport entre les clous demandé dans l'activité. Les explications de l'enseignant n'ont pas semblé avoir été comprises puisque deux procédures erronées ont surgi : l'addition des deux messages à comparer et la proposition d'additionner tous les clous du premier message, sans égard à leur grandeur.

Il nous a semblé, par les propos des élèves, qu'ils n'ont pas compris le but de l'activité et n'y ont pas donné de sens. Ils n'ont pas compris également l'ordre des grandeurs ou les valeurs attribuées aux clous de même que les relations existant entre eux. Nous prenons comme exemple l'élève qui a procédé mécaniquement à la conversion sans donner du sens à sa procédure qui était erronée :

- 25 gros clous pour 63 petits clous;
- garder le même nombre de clous malgré les échanges.

Nous faisons l'hypothèse que ces élèves ont eu comme obstacles, la compréhension de la tâche et l'emploi des signes d'opérations qu'ils ont considéré comme des indicateurs d'action, puisqu'un élève a même jugé bon recopier ce qu'a fait son camarade. Un autre, n'ayant certainement pas compris le sens de l'activité, a d'abord procédé par des additions et quand son résultat ne l'a pas satisfait, il a fait des soustractions. Il semble n'avoir pas investi la tâche (Fayol, 1990, p. 48).

La relation d'ordre entre les grandeurs des clous a été constamment rappelée par l'enseignant. Cette relation a paru malgré tout incompréhensible à beaucoup élèves. Il appert que cette activité est passée, auprès de certains, pour une activité calculatoire dans laquelle ils n'ont pas eu envie de s'investir, puisque nous avons constaté qu'une grande majorité ne s'est pas approprié le problème. Les difficultés perçues tiendraient peut-être à la compréhension et à l'exécution de la tâche.

Nous avons également observé quatre ou cinq élèves qui ont fait des tentatives pour résoudre les problèmes. D'abord, ils ont demandé à l'enseignant d'utiliser la balance. Cette proposition était intéressante, mais jugée paresseuse par l'enseignant pour exécuter la consigne. Ce refus a amené quelques-uns à ne pas entrer dans la relation didactique parce qu'ils semblaient ne plus trouver d'intérêt à cette activité. Un autre bel exemple de contrainte dans le contrat didactique.

Ces procédures erronées et le refus d'entrer dans la relation didactique provenaient certainement d'un attachement aux objets précédents et d'une difficulté de compréhension de la consigne. Ces activités, pourtant expliquées et utilisées par l'enseignant, ont semblé n'avoir pas de sens pour les élèves en regard aux questions posées (1100, 1104) et du fait qu'ils ont buté sur les conversions d'unités aux unités d'ordre immédiatement supérieur (1106). Cela aurait pu probablement se passer autrement si l'enseignant avait autorisé l'utilisation de la balance.

L'enseignant a toutefois profité des erreurs pour rappeler encore une fois l'ordre des grandeurs des clous. Il a non seulement désigné explicitement par une approche d'institutionnalisation primitive que 25 gros clous ne peuvent pas équivaloir 63 petits mais a également montré la procédure à adopter (Portugais, 1995, p. 176).

De façon détaillée, la moitié des élèves, à l'exception de quatre ou cinq classes confondues, ont d'entrée de jeu compris quoi faire. Ils ont procédé d'après leurs représentations par des calculs relationnels puis numériques (tours de parole 1076 à 1093). Ils semblent avoir compris qu'ils ne pouvaient pas additionner des grandeurs de nature différente, puis sont allés voir aux rapports qu'il y avait entre les clous. Nous avons alors vu surgir des procédures intéressantes et expertes :

- une équipe avec 60 petits clous a fait des paquets de 5 pour obtenir de moyens clous. Elle a utilisé les moyens clous pour les échanges d'unités;
- une autre remarquable procédure apparaît : prendre une plus grande unité, en l'occurrence les gros clous pour la conversion.

Cette difficulté est interprétée comme résultant plutôt d'une absence quasi complète de mise en relation de cette connaissance avec la syntaxe de l'algorithme écrit (Fayol, 1990, p. 137). Tout se passe comme si les élèves résolvaient les soustractions écrites sans exercer un quelconque contrôle sémantique sur leurs procédures ou leurs résultats. Une amélioration des performances serait possible si l'enseignant obligeait les élèves à effectuer une telle mise en correspondance, soit exercer la pensée de l'élève à aller dans deux directions opposées afin de rendre sa pensée réversible. Stratégie qu'a d'ailleurs utilisée cet enseignant (Fayol, 1990).

Un élève a aussi montré à la classe sa stratégie. Il a pensé à utiliser la plus grande unité donnée dans ce travail en faisant des bonds de 8. Toutefois, le résultat a dépassé le nombre de clous à échanger, ce qui a donné lieu à une intéressante discussion entre l'enseignant et les élèves sur la théorie intuitive de l'incertitude en mesure.

Un autre élève a également choisi d'effectuer une division, mais celle-ci s'est soldée par une erreur due à une table non parfaitement mémorisée, division qu'il a reprise et réussie par la suite. Un de ses pairs a traduit sa compréhension de la consigne sur le fait que les clous sont des objets, donc transformables pour en transformer un autre (1079). Malgré ses explications hésitantes, il a utilisé les techniques d'échange qu'il connaissait pour les unités sur la masse (1084). Sa technique a semblé avoir été comprise par plusieurs de ses camarades.

Un deuxième élève d'une autre équipe l'a d'ailleurs démontré en utilisant une conversion avec de moyens clous (Él.6, tour de parole 1090). Par leur verbalisation sur la notion de changement d'unité, ces élèves ont semblé avoir compris la relation d'ordre et d'équivalence. Ils semblent également avoir compris le rôle des variables utilisées et les différents moyens de comparaison.

Dans l'ensemble, au moins le quart des élèves, classes confondues, ont semblé n'avoir pas compris la consigne et n'a pas essayé d'entrer dans la tâche. Certains se sont bornés à recopier les procédures d'autres camarades. Ces élèves ne sont pas parvenus à ébaucher une procédure et sont restés à la première ligne d'information. Quatre ou cinq ont posé beaucoup de questions, mais n'ont toujours pas compris quoi faire. Ils nous ont semblé n'avoir pas pris conscience des pluralités des éléments ou, tout au moins, n'ont pas vu quel procédé employer pour assurer la dévolution demandée par l'enseignant.

Nous présumons que ces difficultés sont dues à un problème de conceptualisation, car ils ne sont pas arrivés à se représenter correctement la situation décrite dans l'énoncé. Il apparaît intéressant, en examinant ces conduites, de supposer que les élèves qui ne font pas ou peu référence au nombre ne le comprennent pas en raison du fait qu'ils le considèrent comme moins fiable que les autres mesures, comme la longueur par exemple. Il conviendrait, dans ce cas, notamment au niveau de l'enseignement, d'amener les élèves à sélectionner des stratégies de dénombrement lorsque la tâche le requiert (Fayol, 1990, p. 95).

En ce qui concerne les conduites non expertes observées. Un élève indique avoir additionné tous les clous et lorsqu'ils ne sont pas de la même catégorie, il a procédé à des soustractions. Cela vient peut-être en partie du fait que cet élève a agi de manière mécanique et a utilisé des concepts sans y mettre de sens : il n'a pas compris les relations entre les unités et la valeur de ces variables. Son erreur est probablement due à une mauvaise représentation de la situation et une incompréhension de la symbolisation. Il s'est limité à effectuer des algorithmes (additions et soustractions) et a semblé n'avoir pas compris que chaque clou a une valeur et qu'il peut y avoir des égalités ou des écarts entre chaque message proposé. Cette procédure des bogues s'avère être le produit d'une double détermination. Cette erreur systématique est vraisemblablement liée à une compréhension incomplète ou défectueuse de procédure à utiliser (Fayol, 1990, p. 133). Ces bogues peuvent surgir lorsqu'un élève ayant acquis ou non une certaine procédure se trouve confronté à une impasse, soit que le mode de résolution approprié ait été oublié, soit qu'il n'ait pas été appris. Par conséquent, tout se passe comme s'il devait ajouter ou soustraire quelque chose pour n'avoir pas à se trouver à court de travail.

Toutefois, quelques conduites, que nous qualifions d'intermédiaires parce qu'elles se sont caractérisées par de multiples essais et des tâtonnements, ont également été constatées. Nous y avions vu des essais de quantification. À la différence des conduites précédentes, les élèves ont effectué des correspondances mentales qu'ils ont verbalisées, même si quelques fois elles s'avéraient inexactes. Ils ont essayé d'ajuster le nombre de clous à certaines estimations et ont procédé au coup par coup. Ces conduites, selon nous, résident dans la prise en considération d'une étape intermédiaire. Ainsi, ayant évalué la valeur de leur solution préalablement employée, ils ont été amenés à remettre en doute l'efficacité du procédé dans cette mise en correspondance. Le cardinal, quelquefois perçu, semble aussitôt oublié, de sorte qu'ils n'ont pas pu mener leur action jusqu'au bout. Par conséquent, nous nous sommes demandé s'ils l'avaient perçu comme mesure.

Par ailleurs, nous avons distingué quatre conduites plus élaborées, mais un peu proches de celles définies précédemment. Nous voyons des groupements simultanés, comme des paquets de 5 ou des bonds de 8, qui peuvent êtres décrits comme une décomposition de la collection de clous. Les élèves ayant utilisé ces procédures ont fait clairement comprendre leur utilisation du nombre. Ils ont annoncé leur intention de compter les clous ou les ont expliqués après les avoir comptés. Nous voyons une mise en correspondance dans cette décomposition et dans ces groupements simultanés. Rappelons que la réalisation d'une opération de correspondance peut être la perception qu'un élève a de la tâche à effectuer et la stratégie au cours de laquelle il met en contact la collection de référence et celle qu'il a constituée.

Ces conduites suggèrent que c'est à partir de leurs habiletés de dénombrement que ces élèves ont élaboré spontanément des stratégies de résolution des opérations arithmétiques. Ils ont utilisé des faits multiplicatifs associés (Vergnaud, 1983). Nous présentons au tableau V les résultats condensés de la situation problème 7.

Tableau V
Situation problème 7
Exercice de conversion – transformation de messages

Savoirs	Comparaison de deux messages : Relation d'ordre et d'équivalence Convertir d'une unité à l'autre la mesure d'une grandeur Donner du sens aux différentes unités (les clous)
Procédures et schèmes	Procédures erronées, procédures tâtonnantes puis organisées, Procédures sans organisation, essais successifs par certains pour échanger les clous Conduites mécaniques dans lesquelles ils ne mettent pas de sens Plusieurs élèves restent bloqués à la première ligne d'information Recopiage de résultats sans en comprendre le sens Utilisation d'une plus grande unité par certains Méthode pas à pas pour quelques élèves : paquets de 5 pour 60 petits clous par exemple ou par bonds de 8 pour 63 clous Calcul relationnel et numérique pour certains (additions itérées, division et multiplication) Proposition d'utiliser la balance pour les conversions Addition de tous les clous se ressemblant puis soustraction des différences Non-anticipation des écarts entre les grandeurs (le zéro par exemple)
Ruptures	Refus d'entrer dans la relation didactique, dévolution difficile Difficultés d'ordre conceptuel (le but, le sens) Difficultés de calcul relationnel (évaluation des transformations demandées) Attachements aux objets précédents (les clous déjà utilisés) Non-mémorisation de la consigne Difficultés de calculs numériques lors des échanges des clous
Actions de l'enseignant	Rappelle le but de l'activité passée et recherche de contrat didactique Guide les gestes d'élèves quant à l'équilibration de leurs balances Agit sur les règles d'action donc sur les variables didactiques (consignes, valeurs numériques de l'étalon, nature des objets) Incite à réinvestir les conduites adéquates du système de signifiants Incite à soutenir les productions langagières Agit sur les schèmes des élèves (le comment, le pourquoi, attire l'attention sur la réussite ou l'erreur) Guide également leurs gestes par l'incitation à utiliser d'autres clous Utilise des inférences pour aider Invite et les incite à une stratégie pour la connaissance à travailler Fait appel à des savoirs déjà vus Répertorie quelques procédures en voie d'organisation pour stimuler les élèves en difficulté Engage et maintient l'élève dans un processus de découverte et d'utilisation de procédures expertes

La synthèse et le tableau V ci-dessus mettent en évidence ce qui se dégage des conduites des élèves dans cette activité. Ainsi, dans l'ensemble, nous avons observé plusieurs conduites pour lesquelles nous nous demandions à quoi les attribuer. S'agissait-il d'une inattention pour certains élèves, d'une incompréhension des termes dans la consigne ou d'une non-accession au nombre en tant que mesure ?

5.8 ÉTAPE F – ACTIVITÉ 8 – SOMME DES POIDS

Cette activité est un travail pratique. Elle est une introduction concrète de l'addition des masses. L'addition ou la soustraction des masses requiert qu'on ajoute ou qu'on soustraie des unités de mêmes valeurs. Lorsque deux masses sont écrites dans des unités différentes, il faut en réécrire une dans l'unité de l'autre. Ce sont les conduites que nous attendons des élèves à travers les échanges de clous. Toutefois, la manière dont les élèves prennent note de leurs résultats affecte souvent le lien entre le concret et l'abstrait.

Matériel

- 1 boîte de trombones
- 1 craie pour les trottoirs
- 1 carnet de notes
- 1 paire de ciseaux
- 3 stylos-feutres
- 1 mini-double décimètre

Ces objets à peser sont quelque peu différents de ceux utilisés par Brousseau. Il était recommandé de ne pas choisir des objets trop lourds à peser.

Consigne

1) Je vais donner d'abord plusieurs objets aux groupes A1, B1, C1, D1, E1. Vous les pèserez un par un et vous indiquerez, pour chacun son poids sur une feuille blanche.
2) Lorsque les groupes A1, B1, C1, D1, E1 auront terminé, je donnerai ces mêmes objets aux groupes A2, B2, C2, D2, E2 ainsi que les balances. Vous devez peser ensemble ces objets en les mettant sur le même plateau de la balance et vous indiquerez le poids obtenu sur une autre feuille blanche.

3) Les équipes portant le numéro 1 calculeront pendant ce temps sur leur feuille, la somme des poids qu'ils ont inscrits.

Dès que les pesées sont terminées et vérifiées par l'enseignant, les résultats sont inscrits de la manière suivante au tableau noir : l'enseignant choisit lui-même les résultats des équipes B et D qui paraissent plus ressemblant au premier abord.

5.8.1 Analyses de la situation problème 8

Dans ces épisodes, nous voyons aussi bien des conduites organisées que des procédures erronées. Tout d'abord, une conduite organisée d'un élève qui, encouragé par ses pairs, montre sa procédure qui correspond à l'algorithme. Il a fait une addition réitérée par des paquets de 5 petits clous et celle-ci s'est avérée exacte. Également, deux propositions de conduites intéressantes :

- effectuer l'activité avec une balance, proposition qu'on peut juger pertinente et qui peut leur paraître peut-être moins fastidieuse;
- procéder à un calcul opératoire; argument qui s'avère également pertinent.

Cependant, ce réflexe se retrouve chez certains élèves plus hardis qui ont construit du sens dans une situation problème. Dans l'ensemble, il appert que peu d'élèves ont compris ce que c'est une comparaison. Ici, les difficultés de compréhension peuvent se situer à différents niveaux : la mémorisation de la consigne ou la représentation de la situation (la construction du sens).

1337 - ET1 : Qu'est-ce que vous pensez qu'on va faire maintenant ? ... Avec ce qu'on a fait l'autre matin ?...

1338 - Él.1 : On va peser les autres objets... et puis on va comparer... nous, notre résultat à eux leur résultat..., et puis d'autres équipes aussi...

1339 - ET1 : Waoh... Ça a de l'allure... Classe ?

1340 - La classe : Oui...

1341 - ET1 : C'est exactement ce qu'on va faire. On va peser les objets et on va comparer ce que l'équipe 1 et l'équipe 2 ont eu comme résultat... Ça va être pareil les résultats ou pas pareils ?... (Silence de 13 sec.)

1342 - ET1 : ... Si on a bien mesuré, est-ce qu'on va avoir le même résultat ? Est-ce que ça va être les mêmes masses, les mêmes poids ?

1343 - Él.1 : Pas vraiment...

1344 - Él.2 : Ben... si on ne touche pas les deux plateaux, ça devrait être pareil...

1345 - Él.1 : Oui... Parce que les balances vont être en équilibre...

1346 - Él.2 : Non... parce que c'est pas les mêmes clous qu'on a utilisés...

1347 - ET1 : Votre attention tout le monde... Tantôt A. avait dit qu'on devait avoir le même message.., la masse doit être pareille pour l'équipe A1, A2, B1, B2, C1 et C2... Ça devrait être le même poids... Mais on se dit aussi que ça ne pouvait pas être forcément les mêmes messages..., parce que ça dépend de comment on a commencé à utiliser les clous... (13 sec. de silence). On se rappelle de ça ?

1348 - La classe : Oui...

1349 - ET1 : Alors, je vous laisse travailler encore 10 minutes... »

L'enseignant utilise une stratégie adidactique qui est fonction du contrôle du sens (Portugais, 1996, p. 178). Il met en évidence la nature des objets, rappelle la valeur des clous et les relations les reliant. Ici, il est demandé aux élèves une démarche de pesée des objets un par un puis de la recomposition globale des objets afin de procéder à une comparaison des masses. Il s'enquiert de la façon dont l'élève a trouvé la solution, amène l'élève à prévoir la valeur de sa réponse. Ainsi, le premier élève interrogé semble avoir compris la consigne : effectuer la pesée et comparer son résultat à celui d'un pair. Plusieurs propriétés de l'équivalence ressortent des schèmes des verbalisations de quelques élèves :

- si on ne touche pas aux plateaux, ça devrait être pareil;
- les balances (l'élève veut dire les plateaux) vont être en équilibre...;
- non..., parce que ce ne sont pas les mêmes clous qu'on a utilisés...

Nous constatons qu'ils essaient d'extraire des informations fournies, des objets, de la relation d'ordre et plus tard d'équivalence.

1463 – ET2 : Les équipes E1 maintenant... A1, B1 et C1... les équipes 1, ce que vous devez faire..., c'est vérifier la masse de tous les objets en même temps..., et vous devez *peser tous les objets en même temps..., et vous devez trouver la masse avec les clous... Allez-y...*

1464 - Él.4 : Moi, je n'ai pas bien compris...

1465 – ET2 : Vous avez des boîtes de trombones, 2 carnets et une règle... Avez-vous compris ce que j'ai demandé.. Tous les objets à peser en même temps...

1466 - Él.4 : Tous les objets...

1467 – ET2 (s'approchant de cette équipe) : Alors, vous écrivez A1... tous les objets en même temps..., tous les objets...

1468 - Él.4 : Mais ma balance n'est pas bonne...

1469 – ET2 : Si tu veux que ça tienne droit, tu dois la mettre sur le bord comme ça... (L'élève l'avait placé entre deux pupitres).

1470 – ET2 : Lorsque vous avez votre balance en équilibre, vous inscrivez sur votre feuille le nombre de clous que vous avez utilisé.., le nombre de gros clous, de moyens clous, de petits clous et de mini-clous...

(Des clous tombent).

1471 – ET2 : Allez, ramassez...

(1 min. 18 sec.)

1472 – ET2 (à une équipe): Vous, est-ce que vous avez dit le nombre total de clous que vous avez utilisé ? Je veux savoir le nombre de clous, de gros, de moyens, de petits et de minis..., au total..., en tout..., tu additionnes le tout.

1473 - Un élève de l'équipe : Je ne comprends pas bien...

1474 – ET2 : Non ? C'est ce que j'ai demandé... Combien de gros, de moyens, de petits et de mini-clous... Tu as écrit le total ? Les clous que vous avez pesés... Combien de gros, de moyens clous... »

Cette activité devait permettre le réinvestissement des notions anciennes. Nous voyons pourtant qu'il y a une difficulté dans la dévolution du problème par les contraintes qui ont surgi et par les difficultés éprouvées des élèves à entrer dans la situation didactique. Plusieurs n'ont pas semblé comprendre qu'ils avaient plusieurs objets à peser en même temps. Cette conduite indique qu'ils ont du mal à se détacher des premières consignes à savoir, peser un seul objet. Ils éprouvent des difficultés à mettre du sens sur l'activité mathématique, voire à résoudre le problème. Aussi n'entrent-ils pas dans la tâche, malgré l'aide de l'enseignant qui, par une approche d'institutionnalisation, désigne explicitement la procédure correcte (Portugais, 1995, p.176). Il utilise également une approche par remédiation[17] en leur désignant les variables à utiliser et à manipuler. Il dégage pour les élèves les données utiles de la situation que ces derniers semblent d'ailleurs ignorer.

5.8.2 Synthèse des activités de la situation 8

Il s'agissait de peser différents objets et ensuite de procéder à leur sommation afin de comparer les quantités trouvées. Les données recueillies montrent qu'une minorité d'élèves semble avoir compris la tâche demandée. Toutefois, quelques procédures de résolution ont émergé :

- un élève fait la proposition d'utiliser la balance pour cette comparaison. Proposition valable, mais rejetée par l'enseignant, car un peu paresseuse d'après lui;
- un autre élève annonce procéder par un calcul opératoire. Ce dernier fait preuve de capacité insoupçonnée dans laquelle se trouve la compétence d'utilisation qui renvoie à la compréhension de la tâche. Tâche qui recouvre les habiletés relatives aux actions.

Notons également des verbalisations sur la comparaison par des allusions à l'équilibre et la notion d'échange d'unités. Ces schèmes mettent en jeu des connaissances à la fois déclaratives et des utilisations de l'addition.

En ce qui concerne les procédures erronées, nous pensons que le problème présentait un niveau de difficulté supérieur aux tâches précédentes, que ce soit dans la présentation de la tâche par l'enseignant ou dans la compréhension du problème par les élèves. C'est apparemment la compréhension de la situation décrite par l'énoncé qui a constitué l'obstacle essentiel. Il ressort que les élèves qui ont éprouvé des difficultés n'aient pas préalablement identifié l'opération arithmétique en faisant des inférences. Ayant déjà procédé à des pesées dans les situations précédentes, nous avons pensé que la majorité des élèves aurait procédé de manière experte ou aurait utilisé des méthodes plus élaborées pour les rapports entre les clous. Ce qui n'a pas été le cas, car l'enseignant a dû leur expliquer plusieurs fois la consigne et même diriger leurs actions en leur demandant de faire appel à leurs représentations.

---

[17] La stratégie avec une approche par remédiation est fonction du contrôle des actes. Ici l'enseignant incite les élèves en difficulté à manipuler des objets (regroupements, échanges) et leur désigne explicitement le lieu ou la cause de l'erreur à travailler.

Dans ce cas, nous pensons que si l’on veut que l’élève dispose d’une base d’induction suffisamment large pour lui permettre d’élaborer un modèle global, il convient de lui fournir un éventail relativement ouvert de types de problèmes. Il en va ainsi de l’incitation à utiliser des représentations matérielles qui, d’abord appropriées à chaque situation décrite, pourraient peu à peu évoluer vers l’abstraction de la relation d’inclusion et ce, jusqu’à ce que la situation didactique devienne situation d’apprentissage pour l’élève et que ce dernier y reconnaisse des caractéristiques comme les invariants qui font sens pour lui (Fayol, 2005, p. 199). Le tableau VI présente les résultats globaux de ce qui a été observé dans les deux classes.

Tableau VI
Activité 8 - Somme des poids

Savoirs	▪ Comparaison ▪ Démarches de décomposition des unités ▪ Capacité à les décomposer ▪ Équivalence
Procédures et schèmes **Ruptures**	▪ Proposition d’effectuer l’activité avec la balance ▪ Proposition de procéder à un calcul opératoire ▪ Verbalisations sur l’équilibre et la technique de conversion ▪ Verbalisations sur les clous, ce ne sont pas les mêmes clous ▪ Qu’il faut utiliser, ça va faire pareil même si ce ne sont pas les mêmes clous, il ne faut pas qu’on touche aux plateaux pour que ça fasse égal... ▪ Difficultés d’ordre conceptuel (le but, le sens) ▪ Difficultés de calcul relationnel (évaluation des transformations demandées) ▪ Attachements aux objets précédents (les clous déjà utilisés) ▪ Non-mémorisation de la consigne ▪ Difficultés de calcul numérique lors des échanges des clous
Actions de l'enseignant	▪ Rappelle le but de l’activité passée et recherche du contrat didactique ▪ Guide les gestes des élèves quant à l’équilibration de leurs balances ▪ Agit sur les règles d’action donc sur les variables didactiques : ▪ Consignes, valeurs numériques de l’étalon, nature des objets ▪ Incite à réinvestir les conduites adéquates du système de signifiants ▪ Incite les élèves à soutenir les productions langagières ▪ Actions sur les schèmes des élèves (le comment, le pourquoi, attire l’attention sur la réussite ou l’erreur) ▪ Guide également leurs gestes par l’incitation à utiliser d’autres clous ▪ Utilise des inférences pour aider ▪ Invite et les incite à une stratégie pour la connaissance à travailler ▪ Fait appel à des savoirs déjà vus ▪ Répertorie quelques procédures en voie d’organisation pour stimuler les élèves en difficulté ▪ Engage et maintient l’élève dans un processus de découverte et d’utilisation de procédures expertes

5.9 ÉTAPE G – ACTIVITÉ 9 – COMPARAISON DES RÉSULTATS DE LA SOMME DES POIDS D'OBJETS AVEC LE POIDS GLOBAL DE TROIS OBJETS

Déroulement

Le travail se déroule comme dans la séquence précédente. L'enseignant écrit les deux résultats au tableau (la somme des poids et la pesée des objets ensemble). Les élèves doivent débattre de ces résultats.

Matériel

Les feuilles des résultats des élèves de la séance précédente. L'enseignant rappelle le matériel qui a été ou devrait continuer à être pesé :

- 1 boîte de trombones
- 1 craie pour les trottoirs
- 1 carnet de notes
- 1 paire de ciseaux
- 3 stylos-feutres
- 1 mini double décimètre

Consigne

Hier, nous n'avons pas eu le temps d'examiner les résultats de tous les groupes. Nous allons donc continuer aujourd'hui. Nous allons vérifier ensemble sur le tableau les résultats des groupes A1 et A2, pour que tout le monde ait bien compris.

5.9.1 Analyses de la situation problème 9

Dans ces différents épisodes, plusieurs conduites sont observées. D'abord pour une dizaine d'élèves, les questions leur permettent de faire le point sur leur capacité à observer et à conceptualiser les variables sur lesquelles ils doivent travailler. Par exemple, un élève voit que les deux messages n'ont pas les mêmes composantes de clous et il vient mettre en relief les différences. Ils font d'ailleurs spontanément référence à une multiplication ou à une addition réitérée dans cette activité pour exprimer les changements d'unités : 1 gros = 8 petits donc 2 gros = 16 petits. Ils ont compris que le résultat des petits clous peut s'écrire comme produit dont un des facteurs est le gros clou. Toutefois, bon nombre de leurs camarades ne perçoivent pas le but de l'activité et ne prennent pas en charge l'aspect déjà travaillé par l'élève précédent lors de la dernière activité. Ils ne semblent pas anticiper les échanges ou se rappeler des relations entre les unités. L'intériorisation de construction d'un modèle de la situation n'a pas semblé apparente chez eux.

On observe par ailleurs, pour six ou sept d'entre eux, une incompréhension de la consigne et des hésitations à entrer dans la tâche malgré les explications données par l'enseignant. Doit-on comprendre que cela signifie qu'ils ont réellement des difficultés de compréhension ou qu'ils cherchent à effectuer des procédures adéquates ? Ces difficultés sont certainement dues à l'impossibilité d'une construction du sens de l'activité qui, dès le départ, semble les décourager à entrer dans la tâche demandée. Il se pourrait qu'ils n'aient pas compris la valeur des variables que représentent les clous dans les précédentes activités de comparaisons.

1428 - ET1 : Les consignes... c'est séparé... la pesée des objets... l'un à la suite de l'autre... Pas tous les objets en même temps... C'est séparé...

Puis il continue à passer voir les activités d'équipe en équipe.

1429 - ET1 : L'équipe C, vous allez avoir 3 stylos-feutres, un double décimètre... (...)

1430 - Él.1 : Qu'est-ce qu'on fait déjà ?

1431 - (S'approchant de l'élève), ET1 : J'ai dit de les peser séparément..., séparément... SÉPARÉMENT... (En haussant la voix). Qu'est-ce que vous faites ? J'ai dit deux carnets ensemble...

Dans cet extrait, nous voyons, par la reprise de l'explication des consignes, des difficultés de compréhension qui peuvent se situer à différents niveaux : la représentation de la situation; la mémorisation des données et le choix d'une stratégie de résolution du problème. Même après l'explication, bon nombre d'élèves n'ont pas vu la nécessité de modifier leurs stratégies. Dans une classe spéciale, il est habituel pour les élèves de poser beaucoup de questions auxquelles se prête l'enseignant qui veut voir se réaliser la dévolution. Il est aussi habituel pour les enseignants d'expliquer les consignes des tâches plusieurs fois, au point qu'il survient très souvent des glissements métadidactiques[18].

1486 - ET1 : Maintenant ce que je te demande de faire... Je veux que tu me trouves... tu l'écris sur ta feuille.., je veux que tu me trouves le total de gros clous, de moyens clous, de petits clous et de minis clous que j'ai utilisé au total...

1487 - Él.6 : C'est compliqué...

1488 - ET1 : Je n'ai pas dit que c'était compliqué... Je veux que tu me trouves le total de chacun des clous qu'on a utilisé pour l'équipe A1...

1489 - Él.6: C'est qui l'équipe A1 ?

1490 - ET1 : Pour l'équipe A1..., peu importe les personnes qui les ont calculés... Je veux que tu me trouves ce que j'ai demandé...

1491 - Él.6 : Tout ça ?

1492 - ET1 : Le tout..., les objets que j'ai écrits là... »

Cet épisode montre que la difficulté n'est pas l'activité mathématique demandée, mais l'activité intellectuelle que doit déployer cet élève pour entrer dans la tâche. Ce dernier semble ne pas avoir développé une capacité à chercher aussi bien dans des moments de travail individuel qu'en petits groupes. Dans ce cas, il n'y a pas de contrat didactique parce que la dévolution du problème n'a pu se faire.

1514 - ET1 : Ok. Moi, je vais effacer... On va prendre le résultat sur le voisin... Alors au grand total, ça nous a donné...

A1			*A2*
9 gros	*-5*	*+ 5*	*14 gros*
14 moyens	*+ 7*	*– 7*	*7 moyens*
19 petits	*+ 2*	*- 2*	*17 petits*
13 minis	*- 4*	*+ 4*	*17 minis*

---

18 Lorsque l'activité d'enseignement a échoué d'après Brousseau (2003, p. 7), « l'enseignant peut être conduit à se justifier et pour continuer son action, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique. D'objets d'études, ils deviennent par le même processus objets d'enseignement. Cet effet peut se réitérer, se cumuler plusieurs fois et constituer un véritable processus échappant au contrôle de ses acteurs ».

... Alors, on va comparer les deux messages... On avait dit 14 gros, 7 moyens, 17 petits et 17 minis... Alors, il faut comparer les deux ... (4 sec.) Comparons les deux... Toi (nommant un élève. Ce dernier vient et écrit les différences entre chaque groupe de clous).

(L'élève écrit + 5 dans la case A2).

1515 - ET1 : Est ce qu'il y a 5 de plus ?

1516 - L'élève; ... De ce bord...

1517 - ET1 : Ah bon...

(1 min. 4 sec.)

1518 - ET1 : Est-ce que vous voyez ? Ok. Est-ce que vous pensez que le poids trouvé par l'équipe A1 est pareil au poids trouvé par l'équipe A2 ?

1519 - La classe : Oui... Non...

1520 - ET1 : Eh bien... On avait dit... C'est supposé être la même chose... Est-ce que le message est pareil ?

1521 - La classe : Non...

1522 - ET1 : Le message est très différent hein... On voit que l'équipe A1 a moins de gros mais a le double des moyens... Et l'équipe A2, plus. Il a plus de petits clous mais beaucoup moins de minis... Il va falloir transformer ça...

(Silence de 7 sec.).

1523 - Puis un élève dit : ... On peut échanger les gros... Est-ce qu'on peut éliminer d'autres gros ici (en pointant le message de l'équipe A2 du doigt).

1524 - ET1 : Il faut chercher dans ta mémoire... Quand on a fait l'exercice 6, on avait cherché à savoir... À comparer avec les gros et les minis..., combien de gros était égal à combien de moyens... à combien de petits et à combien de minis..., en utilisant le moins de clous possible ? Tu te rappelles de ça ?

1525 - La classe : Oui...

1526 - ET1 : Le but ici, c'était pour quoi ?

1527 - L'élève de tantôt : C'était pour trouver des différences...

1528 - Un autre élève : On devait commencer par les gros puis les moyens...

1610 - ET1 : Plus qu'on les prend gros, moins de clous ça nous donne... Alors, combien de gros j'en ai besoin pour avoir ? 17 petits si 1 gros, c'est 8 petits ?

1611 - ÉL.11 : ... 9...

1612 - ET1 : Pour les transformer en gros ? Ça nous prend combien de petits ?

1613 - La classe : 16...

1614 - ET1 : Hein!... 16 petits... 1 gros c'est 8 petits... 2 gros clous, ça vaut 16 petits. Là, j'en ai 17... Ça me donne 2 gros et il en reste...

1615 - La classe : 1...

1616 - ET1 : 1 petit... Ouhh! Et là, ça nous donnerait ça ?

1617 - Él.12 : 16...

1618 - ET1 : Vous êtes vite vous autres... Oui... Ça nous donnerait 14 + 2 = 16 gros...Combien de moyens ? J'en ai 7 + 1... ça fait 8 moyens... Ensuite..., il nous reste de petits ?

1619 - La classe : ... 1 ...

1620 - ET1 : Il m'en reste 1... Pensez-vous qu'on serait capable de transformer les minis en petits ?

1621 - La classe : Oui... Non...

1622 - ET1 : Oui, on serait capable... Mais on ne l'a pas mesuré hein! Alors, on ne sait pas combien on va avoir... Cependant, nous avons maintenant : 16 gros, 8 moyens, 1 petit et 5 minis... Est-ce que c'est la même chose qu'ici (dit-il en montrant la première conversion). Est-ce que c'est le même poids d'après vous ?... (8 sec. de silence). Est-ce que c'est le même poids ?

11 gros, 15 moyens

16 gros, 8 moyens...

1623 - Él.1 : Oui...

1624 - ET1 : Est-ce que c'est le même poids ?

1625 - Él.1 : Non...

1626 - ET1 : Mais oui... C'est le même poids. On l'a mesuré... On l'a fait avec nos balances... On a trouvé l'équilibre entre les 2...

1627 - Él.1 : Ah...

1628 - ET1 : Est-ce que c'est le même message ?...

1629 - Él.1 : Non...

1630 - ET1 : Non... Ah... On est parti de ce message là lorsqu'on avait beaucoup de clous... On a transformé pour avoir le moins de clous possible... 14 + 7 ... Ça fait 21... + 17 ?

1631 - La classe :... Ça fait 39...

1632 - ET1 : Non... 38.

1633 - La classe : 38...

1634 - ET1 : Ok... 38 + 17 ?

1635 - La classe : (...)

1636 - ET1 : Ça fait 55 clous... Et là ?... Peux-tu t'asseoir ? (Il s'adresse à un élève qui s'était levé). Et là, on est rendu à... 16 + 8... Ça fait...

1637 - L'élève qui était debout : ... 19...

1638 - ET1 : 24... Peux-tu t'asseoir, j'ai dit ? Alors 24 + 1...

1639 - La classe : 25...

1640 - ET1 : 25 + 5... Ça fait ?

1641 - La classe : 30...

1642 - ET1 : Ah... Ça fait 30. Là aussi, on avait 30. Ça fait bizarre, hein!... 30... 30... (Il montre les deux conversions du doigt).

1643 - Él.2 : Ça fait le même poids...

1644 - ET1 : Non, ça fait le même nombre de clous... Mais on a mesuré que ça faisait le même poids... Avez-vous vu qu'on a transformé et que ça donnait le même résultat ?

1645 - La classe : Oui...

1646 - ET1 : Est-ce que c'est long de faire ça ?

1647 - La classe : Oui...

La balance, variable didactique, fait comprendre que pour des activités de recherche en mesure comme pour les comparaisons, le matériel ou les objets sont signifiants pour les élèves. Cet épisode s'enroule autour d'une mise en commun sur l'équivalence de deux messages. Dans un premier temps, nous voyons plusieurs élèves s'engager dans une procédure de résolution dont ils ont rendu compte oralement: 1 gros clou = 8 petits donc 2 gros = 16. Ils se sont montrés capables de coder une quantité par la mise en œuvre de procédures de groupements, donc d'établir des relations entre les valeurs des grandeurs données. Ils ont démontré, en plus, une compréhension des symboles et des relations arithmétiques dans leur processus d'opérationnalisation. Dans un deuxième temps, nous observons ces mêmes élèves être en difficulté. À la question de savoir s'ils sont capables de transformer les minis en petits, ils ont semblé avoir du mal à élaborer des stratégies parce qu'ils ne sont plus arrivés à mettre des relations entre ces clous de façon inverse. C'est comme si convertir de petites grandeurs en grandes leur était difficile. Même les algorithmes qu'ils avaient semblé réussir jusqu'ici sont devenus difficiles, à ce point qu'un élève s'est levé sans raison. Nous comprenons qu'il ne voulait certainement plus s'investir dans la tâche demandée. Ce problème est apparu difficile pour plus de la moitié des élèves qui ont semblé ne pas envisager le but de la tâche proposée, organiser leur travail et même envisager des étapes dans ce travail. Ils n'ont pas été capables de découvrir les relations entre les unités à partir des mesurages inscrits au tableau.

Il appert également qu'ils ne se souvenaient plus que tout caractère d'un objet est susceptible de variations et que des relations peuvent apparaître comme celle d'équivalence, d'ordre. Par ailleurs, ils ne se rappelaient plus de la relation d'équivalence entre les masses travaillée auparavant et ce, malgré les écrits de ces correspondances par l'enseignant au tableau. Certains ont semblé avoir aussi publié que m (A) plus grand que m (B), si le plateau de la balance penche du côté de l'objet A. Cette difficulté peut être due à une rupture de contrat. Les activités précédentes autorisaient, de par leur contexte, de petites variables. Dans un tel cas, le retour au sens avec une obligatoire re-explication, matériel à l'appui, peut aider les élèves à modifier leurs représentations.

5.9.2 Synthèse des analyses de la situation problème 9

Cette activité est la suite de la précédente et fait état d'une mise en commun. Il s'agissait d'un contrôle des connaissances sur les relations d'ordre et d'équivalence vues et travaillées depuis le début de cette expérimentation. Sur la base des procédures observées, trois conduites sont relevées. Nous synthétisons les résultats de cette situation problème au tableau VII.

Tableau VII
Activité 9 - Comparaison des résultats de la somme des poids d'objets avec le poids global de trois objets

Savoirs	▪ Pesées de différents objets séparément, puis ensemble ▪ Comparaison des résultats ▪ Relations d'ordre et d'équivalence
Procédures et schèmes **Ruptures**	▪ Perception pour quelques élèves des structures des clous et mise en relief de leurs variations ▪ Deux pistes de solution évoquées : une multiplication et une addition itérée ▪ Démonstration d'une compréhension des symboles, des calculs ▪ Numériques et des calculs relationnels ▪ De nombreuses procédures mal organisées ou inachevées ▪ Quelques prémices de conduites organisées ▪ Dévolution difficile à réaliser (refus d'entrer dans la tâche) ▪ Difficultés d'ordre conceptuel (but et consignes incompréhensibles pour certains élèves) ▪ Difficultés de symbolisation ▪ Difficultés de mémorisation
Actions de l'enseignant	▪ Agit sur les règles d'actions donc sur les variables didactiques (consignes, valeurs numériques de l'étalon, nature des objets) ▪ Incitations aux réinvestissements des conduites précédentes ▪ Incitations à expliquer leurs démarches ▪ Agis sur les schèmes des élèves (le comment, le pourquoi, attire l'attention sur la réussite ou l'erreur) ▪ Guide également leurs gestes par l'incitation à utiliser d'autres clous ▪ Utilisations d'inférences pour aider ▪ Invitation et incitations à différentes stratégies pour la connaissance à travailler ▪ Fait appel à des savoirs déjà vus ▪ Répertorie quelques procédures en voie d'organisation pour stimule les élèves en difficulté

Nous observons des conduites d'élèves pour lesquelles l'enseignant a du mal à réaliser la dévolution didactique parce que ces élèves ne se représentaient pas, d'une part, le but de l'activité et qu'ils éprouvaient des difficultés à comprendre la consigne, d'autre part, malgré diverses approches utilisées, par exemple, en manipulant les variables utilisées, en posant des questions ou en proposant des pistes de solutions. Pour les élèves, faute de pouvoir dépasser le domaine des configurations des relations existant entre les clous, certains ont choisi de ne pas s'engager dans la tâche.

La deuxième conduite a trait à la capacité limitée à mémoriser les données de certains élèves qui ont engagé des processus de résolution (tour de parole 1430) : 1430 - Él.1 : Qu'est-ce qu'on fait déjà ?

Pour la troisième conduite, il apparaît que seulement peu d'élèves ont procédé par des calculs relationnels et numériques (tours de parole 1610 à 1614) :

1610 - ET1 : Plus qu'on les prend gros, moins de clous, ça nous donne... Alors, combien de gros j'en ai besoin pour avoir ? 17 petits si 1 gros, c'est 8 petits ?

1611 - ÉL.11 : ... 9...

1612 - ET1 : Pour en transformer en gros ? Ça nous prend combien de petits ?

1613 - La classe : 16...

1614 - ET1 : Hein!... 16 petits... 1 gros c'est 8 petits... 2 gros clous, ça vaut 16 petits. Là, j'en ai 17... Ça me donne 2 gros et il en reste...

Nous voyons là des essais convaincants du principe d'équivalence au niveau d'appariement des clous et de l'utilisation des symboles dans ces transformations quantitatives. Nous supposons que pour ces égalités numériques ils ont dû inférer à partir d'un raisonnement sur les transformations additives et soustractives. Ces mises en œuvre nous conduisent à dire que ces élèves, par leurs conduites qualifiées d'intermédiaires, ont non seulement compris la relation d'ordre et d'équivalence qui joue un rôle fondamental dans le développement de la conservation, mais aussi celui de la structure des connaissances numériques.

5.10 ÉTAPE H – ACTIVITÉ 10 – UNITÉS LÉGALES DE POIDS

L'enseignant rappelle aux élèves les activités de pesée avec les clous. Il leur rappelle aussi les difficultés et la longueur des stratégies pour comparer les messages et les transformer également. Comme amorce à l'activité 10, il leur demande si, lorsqu'ils accompagnent leurs parents au marché ou vont faire des commissions, les marchands de légumes et de fruits se servent de clous pour peser avec les balances. L'enseignant laisse les enfants s'exprimer et dire ce qu'ils savent pendant une dizaine de minutes. Puis, il leur présente les poids en laiton. Les élèves observent les poids, les décrivent, les soupèsent et regardent ce qui est marqué dessus. Ces poids sont dessinés au tableau par l'enseignant au fur et à mesure de leur description.

<u>Consigne</u>

J'ai mis un objet A sur le plateau d'une balance. Sur l'autre plateau, j'ai mis un poids de 500 grammes, un poids de 200 grammes, un poids de 100 grammes, un poids de 20 grammes et un poids de 10 grammes. À ce moment-là, la balance était en équilibre. Puis, j'ai pesé un objet B qui a été équilibré avec un poids de 500 grammes, 2 poids de 200 grammes, et un poids de 5 grammes.

1) Quel est le poids de l'objet A ?

Vous devez trouver la masse de l'objet A.

2) Quel est le poids de l'objet B ?

Vous devez également me trouver la masse de l'objet B.

3) Quel est le poids total de A et de B ?

Là, vous allez me dire comment faire pour répondre à cette question…

En même temps qu'il énonce la consigne, l'enseignant fait le schéma suivant au tableau :

A	____________	500	200	100	20	10
B	____________	500	200	200	5	
A + B =	____________					

Les élèves cherchent individuellement sur leur feuille. Les calculs sont très simples, donc très vite faits. Dès qu'ils ont terminé, l'enseignant fait faire la correction au tableau.

5.10.1 Analyses de la situation problème 10

La dixième activité commence avec la mise en commun des difficultés rencontrées sur les pesées et les changements d'unités à partir des différents messages. Elle s'est montrée relativement facile pour presque tous les élèves. Ceux interrogés se sont exprimés clairement en débattant de leurs réponses.

1821 - ET1 : Tu vas pas voir chez le voisin... Tu travailles seul, en silence bien sûr...Toi, tourne-toi (s'adressant à un élève qui regardait par-dessus la feuille d'un voisin). Alors, voilà ce que tu vas faire... (7 sec.). ...Tu trouves le poids de l'objet A..., puis le poids de l'objet B..., puis le poids de A et B ensemble. (Tout en montrant ce qu'il a écrit au tableau).

A	______________________________	*500*	*200*	*100*	*20*	*10*
B	______________________________	*500*	*200*	*200*	*5*	

(Il les laisse travailler et circule entre les pupitres pour voir leurs productions – 4 min 19 sec.).

1822 - ET1 : Tu as fait une division ?

1823 - Él.11 : Non...

1824 - ET1 : Ah... Tu as fait quoi ?... Ah, tu as additionné tout ça ?... C'est quelle opération ça ?

1825 - Él.11 : (...)

1826 - ET1 : Alors, tu as eu combien ?

(Certains élèves répondent à sa place).

1827 - ET1 : Est-ce que tout le monde s'appelle V. ici ?

1828 - La classe : Non...

(L'enseignant se tourne vers un autre élève).

1829 - ET1 : Oui... toi aussi, c'était valable pour toi... (Il s'adresse à l'élève qu'il avait interrogé plus tôt). Ça t'a donné ?

1830 - Él.11 : 830...

1831 - ET1 : 830 au total... 830 bananes ?

1832 - Él.11 : Non...

1833 - ET1 : 830 g...

(Il s'adresse à un autre élève).

1834 - ET1 : Comment tu as fait pour avoir le poids de l'objet B ?

1835 - Él.12 : J'ai fait une addition aussi...

1836 - ET1 : Et ça t'a donné...

1837 - Un autre élève répond : 905...

1838 - ET1 : J'ai demandé à M...

1839 - Él.1 : 905...

1840 - ET1 :... M ? Veux-tu me donner une réponse complète ?

1841 - Él.1 : 905 g...

1842 - ET1 : 905 g... c'est ça!... Et toi, T., comment tu as fait pour trouver le poids de A et B ?

1843 - Él.2 : J'ai tout additionné...

1844 - ET1 : Tu as tout additionné ces nombres-là ? Tu as tout additionné... (en regardant sa production), c'est bon.

1845 - ET1 : Est-ce que quelqu'un a fait d'une autre façon ?

1846 - Él.3 : Non...

1847 - ET1 : Est-ce qu'il y a quelqu'un qui a fait une autre chose ?

1848 - Le même élève : Non...

1849 - ET1 : Toi qui réponds non, non, qu'est-ce que tu as fait ?

1850 - Él.3 : J'ai pris le total de A plus le total de B...

1851 - ET1 : Ah..., notre ami a pris le total de A plus le total de B... C'est ça ?

1852 - Él.3 : Oui...

1853 - ET1 : Et ça t'a donné combien ?

1854 - Él.3 : 1735...

1855 - ET1 : 1735 g... 1735 g... (Il tape dans les mains environ 16 sec. pour avoir le silence)...

Il est ici question d'effectuer des calculs simples sur des mesures de masse. Il ressort que tous les élèves ont compris l'énoncé du problème et en ont construit des représentations par leur raisonnement, des calculs corrects. Ils ont en outre exprimé très facilement leurs procédures. Nous notons deux conduites : quelques élèves ont procédé par addition pour avoir la masse des plateaux A ou B et pour obtenir la somme des deux plateaux, ils ont fait la somme des résultats A et B. D'autres ont additionné toutes les masses mises à leur disposition.

Nous observons que ces recherches de solution sont organisées et que les élèves ont démontré et mathématisé le problème par calcul additif : regroupement des termes aboutissant à une écriture unique. L'enseignant, quant à lui, a privilégié une approche d'institutionnalisation primitive en désignant explicitement l'erreur à l'élève et en lui montrant l'appellation correcte (Portugais, 1995, p. 176).

1902 - ET2 : Ok, classe, nous avons une petite activité qui, il me semble va être comme une lettre à la poste pour vous... Alors, regardez avec moi au tableau... Toi, ramasse les poids et viens les déposer sur mon bureau (37 sec.) Ok... On te demande... Vous gardez les équipes A1. A2, B1, B2, C1, C2 comme la fois passée et vous allez calculer...

Les équipes A1 et A2, vous faites la première activité qui est de savoir la somme des poids du plateau A... Les équipes B1 et B2, la somme des poids du plateau B... et vous les équipes C... c'est-à-dire C1 et C2, la 3e consigne qui est le poids des plateaux A et B... Vous vous rappelez c'est quoi la somme ?

1903 - Él.12 : Oui..., il faut faire une addition...

1904 - ET2 : Oui, pour ceux qui ne se rappellent pas..., regardez les définitions des équations sur les murs, comme d'habitude... Ok ? Allez-y... Je vous donne 15 minutes...

(Elle les laisse travailler et passe voir si les consignes ont été comprises...)

1905 - Él.1 : Est-ce qu'on doit utiliser les balances avec les poids là ?

1906 - ET2 : Non, vous devez juste calculer...

1907 - Él.1 : Ah bon...

1908 - ET2 : 10 minutes!

(Le travail se poursuit. Un élève se lève et va distribuer le lait).

1909 - ET2 : Cinq minutes...

1910 - Un groupe d'élèves : Mme, on a fini, on a fini...

1911 - ET2 : Bon, on va passer à la mise en commun... Vous avez tous achevé ? C'est très bien... Alors, Équipe A1, quel est votre résultat ? (Elle va l'écrire au tableau).

1912 - Équipe A1 : 830... heu... 830 masses

1913 - ET2 : Non... 830 grammes... grammes..., je l'ai écrit au tableau, grammes...

1914 - ET2 : L'équipe A2 est du même avis ?... Vous avez trouvé la même chose ?

1915 - L'équipe A2 : Oui... 830 aussi.., 830 grammes...

1916 - ET2 : Et vous Équipe B1, qu'est-ce que vous avez trouvé ?

1917 - L'équipe B1 : 905... Grammes...

1918 - ET2 : Vous autres ?...

1919 - L'équipe B2 : La même chose...

1920 - ET2 : Bien, bien..., maintenant à vous l'équipe C1...

1021 - Équipe C1 :17 dix... non... 1735 grammes...

1922 - ET2 : Vous autres, l'équipe C2 ?

1923 - L'équipe C2 : 1 735 grammes aussi...

1924 - ET2 : Je le savais, je savais que vous alliez tous l'avoir... Waoh... Vous êtes bons! Mais j'aimerais savoir si vous avez aimé mieux peser avec les clous ou calculer avec les poids qui sont sur la table.

1925 - La classe : ... les poids... les clous. »

Cet énoncé permettait de travailler les variables données sans trop de difficulté. Les élèves, pour la plupart, se sont rappelé ce qu'est une somme. Toutefois, l'enseignant demande à ceux qui ne le savent plus, de regarder sur un des murs de la classe sur lequel est inscrit et expliqué sur un carton chaque opération et le symbole l'accompagnant. Par cette approche de remédiation, il intervient sur les valeurs des clous. Sa stratégie fonction du sens incite les élèves à établir le lien entre les différentes valeurs des clous et à calculer la masse demandée. Lors de la mise en commun, plusieurs niveaux d'explication et de justifications apparaissent :

- un élève dans l'organisation de son travail envisage d'utiliser la balance;
- plusieurs procèdent à des opérations en ligne (calcul mental ou comptage sur les doigts;
- certains posent leur opération par blocs de deux termes puis regroupent les résultats à la fin;
- d'autres additionnent le résultat d'un plateau à celui de l'autre plateau;
- des productions inachevées pour certains et partiellement expertes à cause de leur lenteur d'exécution dans la tâche.

Nous jugeons ces procédures expertes et organisées pour les calculs et l'exploitation des données numériques. Elles témoignent du fait que dans leur élaboration les élèves sont restés proches de la situation évoquée et ont fait attention aux quantités facilement représentables. L'enseignant a dû néanmoins rectifier l'appellation de la masse trouvée après qu'un élève eut annoncé son résultat en masse au lieu de grammes.

5.10.2 Synthèse des analyses de la situation problème 10

Chez plusieurs, nous avons observé un mouvement des lèvres, mais sans qu'ils vocalisent. Pour l'ensemble des deux classes, les procédures sont organisées et les calculs corrects, quoique les réponses des élèves ne traduisent pas leurs raisonnements, mais simplement les opérations effectuées et réussies : additionner tous les termes de A puis ceux de B et faire la somme de A et B ou anticiper les deux premières étapes et calculer directement la somme de tous les nombres donnés. Le tableau VIII synthétise les données et les observations de cette activité.

Tableau VIII
Activité 10 – Unités légales de poids

Savoirs	▪ Déterminer par calcul, la somme de plusieurs grandeurs données
Procédures et schèmes	▪ Proposition d'utiliser la balance ▪ Addition de tous les termes A et B, puis somme de A et B ▪ Somme de tous les nombres donnés ▪ Algorithmes effectués et réussis des fois sans justification de leurs démarches
Ruptures	▪ Difficultés à nommer la grandeur travaillée (grammes)
Actions de l'enseignant	▪ Agit sur les règles d'actions donc sur les variables didactiques (consignes, valeurs numériques de l'étalon, nature des objets) ▪ Incitations aux réinvestissements des conduites précédentes ▪ Incitations à expliquer leur démarche ▪ Agit sur les schèmes des élèves (le comment, le pourquoi, attire l'attention sur la réussite et l'appellation des grandeurs) ▪ Incite à l'utilisation d'inférences pour aider ▪ Invite et incite à différentes stratégies pour la connaissance à travailler ▪ Répertorie quelques procédures pour mise en commun et félicite

Dans le détail, l'ensemble des conduites des deux classes converge vers un même constat : activités calculatoires dans lesquelles ils ont associé l'action de l'union et de la réunion des ensembles donnés. Nous avons observé que presque tous ont procédé en combinant arithmétiquement les valeurs numériques de la situation problème et en les travaillant en compréhension en les additionnant dans leur ordre de présentation; opération que nous jugeons simple et peu économique, sur la base des critères comme l'appartenance au même ensemble ou au même ordre de grandeur; ils l'ont symbolisé par la réunion des deux ensembles (total de A + total de B) ou en sélectionnant des opérateurs arithmétiques comme l'addition qu'ils ont placés entre les nombres; addition de toutes les valeurs de A et ensuite addition des valeurs de B, puis réunion des deux ensembles (mesure A + mesure B).

Cependant, à la question combien, ils ont répondu par le dernier nombre compté. Ils auraient dû répondre 830 grammes ou 905 grammes. Il a semblé, pour beaucoup d'élèves et principalement pour ceux interrogés, que le dénombrement soit une suite nominale au lieu d'être une dénomination des quantités. Ces élèves ont dû penser qu'énoncer le nombre au lieu de la quantité ou se tromper sur l'appellation de la mesure pouvait satisfaire à la question, alors qu'en fait, l'enseignant, dans son insistance, voulait leur faire exprimer ces quantités. Le système de numération est un support de la conceptualisation et lorsque se font les premières acquisitions des structures numériques, l'écriture du nombre est presqu'associée au nombre lui-même, de telle sorte que l'enfant confond souvent l'une avec l'autre (Vergnaud, 1991, p. 109). Ainsi, même si le résultat semble juste par le nombre exprimé, nous faisons l'hypothèse que cela n'implique pas que le terme utilisé réfère à la collection en tant que quantité (Vilette, 1996, p. 143).

Néanmoins, du fait qu'ils ont explicité leur jugement de conservation par des termes en se référant aux ajouts, il est vraisemblable qu'ils sont parvenus à résoudre les tâches de conservation à partir d'un raisonnement sur les transformations additives. Une autre chose est la capacité pour ces élèves à utiliser les grandeurs données pour caractériser la classe-problème par l'union qui apparaît être un critère important de sa compréhension. Il est intéressant d'observer que les notions d'union, tout comme les notions de complément, sont comprises par les enfants à la fois en extension et en compréhension (Vergnaud, 1991, p. 72). On pourrait donc interpréter ces procédures comme des théorèmes en acte, c'est-à-dire comme vraies dans l'action. Finalement, nous avons remarqué la rapidité et la facilité de l'exécution du problème. Cela nous fait penser que presque tous les élèves possédaient certaines connaissances relatives aux additions. Malgré tout, nous faisons l'hypothèse qu'ils ont pu concevoir leur procédure en fonction des quantités données en les additionnant.

Au terme de notre travail, nous proposons au chapitre suivant de relier les principaux résultats de notre recherche à ceux des études antérieures sur les grandeurs en mesure. Nous concluons par quelques perspectives de recherches futures.

CHAPITRE VI

DISCUSSION ET CONCLUSION

> *« En définitive, tous ces élèves qualifiés de « en difficulté » sont en relation avec des enseignants qui de fait, sont « mis en difficulté » pour les aider, leur façon de faire habituelle n'ayant pas réussi. La difficulté n'appartient plus, dès lors, aux seuls élèves, mais constitue la caractéristique principale des interactions entre élèves, enseignant et savoir ».*
>
> Citation de www.ac.nancy-metz.fr. (5 avril 2007)

La présente recherche, faut-il le rappeler, s'inscrit avant tout dans la mouvance des recherches en didactique et spécifiquement des grandeurs en mesure en adaptation scolaire. Elle se veut exploratoire dans la mesure où c'est la première fois que sont expérimentés les travaux de Brousseau et Brousseau (1987, 1992) dans une recherche-action auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage. Dans un premier temps, nous présentons et discutons séparément les résultats obtenus en longueur et en masse, mais en abordant à tour de rôle chacun de nos questions :

1) Dans quels types de situations les savoirs dans les grandeurs en mesure prennent-ils du sens chez les élèves en difficulté d'apprentissage ?
2) Quels sont les procédures et les schèmes qu'élaborent ces élèves dans la résolution des situations problèmes sur la mesure des longueurs et des masses ?

Et dans un deuxième temps, la question 3 qui a rapport avec les stratégies de l'enseignant :

3) Dans un processus d'enseignement des grandeurs en mesure, quelles sont les conduites devant lesquelles l'enseignant est à court de moyens d'action ?

Nous répondons ensuite à notre hypothèse qui s'intitule : « En cas d'utilisation des mesures non conventionnelles, les représentations et les démarches sur les grandeurs en mesure des élèves en difficulté sont identiques à celles des élèves de classes dites régulières ».

La conclusion et les perspectives de recherches futures suivent.

6.1 ACTIVITÉS DE MANIPULATION DANS LE DOMAINE DE LA LONGUEUR

Sur le plan méthodologique, nous avons procédé par des observables qui consistent en des productions langagières, comportementales et matérielles. Des conduites observées et au sens dégagé par les élèves de ces situations problèmes, il appert que le mesurage d'une longueur a été plus facile lorsque les étalons sont arrivés justes avec les bandes (situation problème 1 dans laquelle il y avait une composition. Il s'agissait de regrouper des quantités par une correspondance terme à terme). Ils ont agi en reportant l'étalon et en inscrivant des repères sur la bande. Certains élèves ont regardé aux extrémités des bandes correspondantes pour affirmer leur égalité. Quelques-uns, par contre, pour mesurer la longueur des bandes, ont disposé plusieurs exemplaires de l'étalon qu'ils ont disposé sur la bande donnée. Cette procédure, le comptage, apparaît comme la procédure de base permettant d'évaluer de manière très précise des collections dont la taille importe peu (Fayol, 1990, p. 58).

De façon globale, les performances des élèves se situent d'emblée à un niveau très élevé lorsque longueur et densité sont égales ou varient dans le même sens. Dans ces circonstances, il appert que la recherche de l'état final ne pose jamais de problème et ce, dès l'école maternelle (Fayol, 1990, p. 155). Aussi, la grande majorité des élèves des deux classes, et dans les deux activités portant sur les longueurs, ont procédé par comparaison directe en juxtaposant l'étalon lorsqu'ils disposaient d'un seul exemplaire ou après juxtaposition.

Dans ces conduites, nous observons la correspondance terme à terme, qui correspond à la juxtaposition des étalons et la relation d'ordre, qui permet d'ordonner les éléments de telle sorte qu'il n'y ait pas deux étalons à la même place. Cette procédure autorise non seulement la comparaison, mais l'équivalence des étalons comparés entre eux et de les ordonner strictement (Vergnaud, 1991, p. 28). Eu égard à ce qui précède, la situation de mesurage 1 a été celle qui a été significativement comprise, quelle que soit la classe. Malheureusement, certains élèves n'ont pas su exprimer leurs résultats par écrit à cause des difficultés d'écriture qu'ils éprouvent. De ce fait, aucune des productions écrites qui ont trait aux activités n’est compréhensible pour quelqu’un qui n’a pas suivi l’expérimentation.

La deuxième activité de mesurage des longueurs est celle pour laquelle, classe confondue, le quart des élèves ont eu de la difficulté à percevoir le sens. Elle a été celle qui, selon nous, a été la plus intéressante à cause des diverses conduites des élèves, plus spécifiquement, la bande pour laquelle l’étalon dépassait (situation problème 2). Nous avons observé plusieurs conduites (erronées, incomplètes ou expertes). Il semble que ces élèves n’ont pas compris que mesurer c’est établir une relation entre une grandeur et un ensemble de symboles numériques.

Les opérations intensives mettent des années à se former, ce qui entraîne des difficultés pour certains enfants. Même s’ils acceptent le comptage, ils refusent de manière non moins systématique des modifications n’ayant pourtant aucune incidence sur la cardinalité, l’accroissement ou la diminution provoquant des rejets de leur part (Fayol, 1990, p. 190). Cela explique les conduites des élèves qui ont juste recouvert la bande d’étalons et n’ont pas jugé les travailler, quoiqu’ils aient néanmoins donné le résultat de l’algorithme effectué pour les étalons qui entraient.

Dans un autre ordre d’idées, dans cette activité comme dans plusieurs autres, nous avons très souvent observé que les élèves n’ont donné à voir que des actions. Ils nous ont semblé s’être attachés aux différences et ont négligé les similitudes et vice-versa, de même qu’ils n’ont pas argumenté sur leurs procédures. Cette conduite pourrait indiquer l’absence de justifications en faveur de la conservation.

Nous avons également observé, par exemple, que pour l’étalon qui dépassait, plusieurs élèves semblaient conditionnés dans le travail d’écolier. Ils ont manifesté une résistance à utiliser les étalons dans l’activité malgré l’incitation de leur enseignant à s’y prescrire. Ils semblaient ne pas comprendre l’utilité de cet étalon. Ils ont manifesté plusieurs fois le désir d’utiliser la règle pour mesurer le bout de l’étalon qui dépassait. D’autres, devant cette difficulté, ont préféré ne pas le travailler. Nous faisons l’hypothèse d’un certain attachement pour l’instrument institué qu’est la règle, d’une certaine habitude scolaire ou il se pourrait que la notion d’ordre ne soit pas tout à fait acquise pour ces élèves. Les comparaisons de grandeurs sont des occasions d'utiliser des termes comme plus que, moins que, égal. Ces notions introduisent celles d'équivalence, de rapport. Il y aurait alors véritablement accès à la conservation que lorsque ces élèves parviendraient à raisonner de manière cohérente sur les quantités non spécifiées comme l'étalon (Fayol, 1990, p. 93 et 100).

D'un autre point de vue, ces conduites corroborent celles relevées dans la recherche de Brousseau (1992, p. 87) dans laquelle les élèves essayaient d'effectuer le mesurage des longueurs en centimètres et en millimètres. Ils avaient eu beaucoup de réticence à se servir de l'étalon fourni. À l'instar de nos élèves, ils ne comprenaient pas l'utilité et n'admettaient pas une activité de mesure de longueur avec un quelconque instrument, étant habitués dès le début de leur scolarité à mesurer avec le double décimètre.

De ces conduites, nos résultats suggèrent que pour ces deux situations :

- ces élèves (ceux qui n'ont pas travaillé l'étalon qui dépasse) ont possiblement mal analysé les rapports topologiques pour le mesurage de la bande avec un étalon qui dépasse ou peut-être mal maîtrisés aussi les relations entre divers éléments. De plus, même en admettant qu'il y eût un étalon qui dépassait la bande, ils n'ont pas semblé y percevoir une logique;
- il appert des inversions dans l'utilisation de la propriété de comparaison découverte (quart à l'oblique, à la verticale inférieure ou supérieure, utilisation de la largeur de l'étalon...) qui peuvent s'expliquer par des troubles spatiaux ou par un défaut de coordination spatiale, coordination sur laquelle apparaissent des processus comme les directions, la distance et plus tard les angles, bref les références à des coordonnées cartésiennes. Ces difficultés pourraient être attribuées à l'ordre de la structuration spatio-temporelle. Nous voyons que le nombre d'étalons calculés est correct, mais l'utilisation de l'étalon supplémentaire quant à sa disposition, est erronée;
- pour finir, nous voyons aussi des confusions dans les appellations ou désignations des outils (rapporteur d'angles au lieu du double décimètre), ce qui laisse supposer des difficultés antérieures plus ou moins compensées qui présagent un futur handicap à s'approprier la géométrie d'Euclide.

Le lecteur sait déjà que la mesure des longueurs découle d'une fusion entre les conceptions cardinale et ordinale. C'est sans doute ce qui les fait paraître si incompréhensibles à certains élèves. Toutefois, nous nous demandons si ces élèves n'ont pas traité cette grandeur qu'est la longueur comme un descriptif ordinal, c'est-à-dire en ne donnant aux étalons que des valeurs numériques dans leur aspect ordinal et non cardinal. Dans ces conditions, nous pouvons ajouter que l'utilisation et la compréhension de la variable de l'étalon ne sont pas maîtrisées, pas plus que les rapports topologiques élémentaires de voisinage ou de séparation, la représentation de l'ordre ne résulte ainsi d'une simple abstraction à partir de l'objet (Piaget, 1948, p. 128). C'est de la coordination croissante des actions consistant à suivre, à déplacer (transporter mentalement) et à replacer de proche en proche que l'ordre est abstrait. L'ordre est le produit d'une reconstruction de l'objet par le moyen des actions et non pas une qualité directement extraite de l'objet comme tel. Il se peut alors que s'ensuive une différenciation insuffisante des concepts du système métrique. La structuration spatio-temporelle et la confusion de l'unité et du tout peuvent également entraîner des difficultés des ensembles.

Aussi, nous faisons l'hypothèse que ces élèves ont cherché comment utiliser l'étalon qui dépasse, mais ont été arrêtés par l'impossibilité d'exprimer le résultat. À ce stade, leurs conduites révèlent une non-conservation de la quantité, bien qu'ils aient été capables d'opérer un alignement d'étalons en regard de la bande donnée (Vilette, 1996, p. 25). La non-conservation est due au fait qu'ils se sont centrés successivement sur les différents aspects observés sans les relier entre eux. Une autre interprétation est que ces élèves, même s'ils acceptent le comptage, refusent de manière non moins systématique des modifications comme l'accroissement ou la diminution qui provoquent des rejets de leur part (Fayol, 1990, p. 190).

En ce qui concerne l'activité 2, la vision concrète venant supporter la visualisation mentale a néanmoins aidé certains de leurs pairs. Il est sûr que ce n'est pas la manipulation à elle seule qui constitue l'activité mathématique, mais les questions qu'elle a suggérées, par les actions sur leurs schèmes par l'enseignant, qui ont invité certains élèves à lire une réponse sur le matériel, à modifier leur stratégie et à construire par eux-mêmes une réponse.

Nous avons aussi observé qu'ils ont procédé par pliage ou ont découpé l'étalon en faisant une marque sur la bande pour l'avant-dernière mesure afin de se rappeler où ils étaient arrivés. De leurs verbalisations sont apparues des relations venant appuyer leur dénombrement (relation binaire et possibilité de faire des compositions additives avec l'étalon qui dépasse). Il semble même qu'ils aient compris que le descripteur qu'est la longueur est non seulement ordonnable, mais possède également des propriétés que n'ont pas les numéros d'ordre. Ils ont d'ailleurs énoncé leurs résultats en X étalons et/ + ¼ ou.

Nous pensons que le fait de les avoir mis en situation de communication pour présenter leurs résultats à leurs camarades leur a aussi permis de découvrir l'existence d'une relation entre la bande à mesurer et l'étalon à travailler. Nous avons observé après que certains élèves en difficulté commençaient à mettre un sens dans leurs procédures par les schèmes observés et exprimés en essayant de justifier leur réponse.

Enfin tous les élèves, lors de la mise en commun, ont reconnu qu'il était plus commode d'utiliser les unités conventionnelles de mesure de longueur, car celles-ci s'avèrent plus précises que celles utilisées lors des situations problèmes. D'ailleurs, ces résultats suggèrent que notre échantillon a été confronté aux mêmes difficultés que les élèves de la recherche de Brousseau (1992, p. 94), puisque l'auteur mentionne que pour contourner l'incompréhension de l'étalon et la non-utilisation du double décimètre, ils ont choisi de continuer le travail sur les grandeurs en utilisant un matériel complètement différent, la balance à plateaux.

6.2 ACTIVITÉS DE MANIPULATION DANS LE DOMAINE DE LA MASSE

Concernant les situations portant sur la masse (situations 3, 4, 5, 9 et 10 comparaison de deux quantités), précisément pour les pesées du sable et de différents objets, les élèves ont commencé à intégrer une démarche afin d'élargir le champ de leurs représentations, car plusieurs ont développé leur capacité à mettre des propriétés sur les grandeurs travaillées (augmenter, diminuer ou à exprimer et garder en mémoire la ligne médiane de la balance ou l'équilibre) par des calculs relationnels puis numériques.

Cependant, il a été un peu difficile de découvrir la manière dont ils ont effectivement procédé dans l'activité 10, comme l'ont montré ces extraits de verbalisations. L'addition est apparue comme mettant en jeu des connaissances à la fois déclaratives et procédurales. Ces activités se sont avérées tout de même assez significatives pour assurer le sens de la comparaison (relation d'ordre et équivalence). Tous les élèves ont procédé par une sommation interne (ajout et retrait de sable ou de clous pour les activités 3, 4 et 5) et par une sommation externe (activités 9 et 10, situation de composition). Plusieurs modélisations ont permis d'aboutir au même résultat pour les activités 9 et 10.

Cependant, contrairement aux activités 3, 4 et 5, les élèves ont fourni peu d'informations concernant leurs activités mentales dans les activités, car ils ne verbalisaient pas assez à notre goût. Les silences et les réussites des élèves dans de telles résolutions de problème passent par le recours à des procédures (algorithmes), le plus souvent quasi automatiques et inconscientes et qui se traduisent par des séquences d'actions et/ou d'opérations élémentaires qui, lorsqu'on les applique en respectant scrupuleusement l'ordre, conduisent, sauf erreur de calcul, à la solution (Fayol, 1990 p. 105).

Au regard de ce qui s'est dégagé, c'est ce type de situations qui sont signifiantes pour les élèves, car elles prennent du sens. Ce constat répond à notre première question car ces activités ont fait intervenir diverses conduites et ont fait découvrir et comprendre aux élèves les propriétés requises pour une comparaison ou une équivalence :

- soupeser les objets à l'étude;
- recours à la mesure par l'ajout ou le retrait de sable;
- visualisation de la ligne médiane de la balance;
- et utilisation d'un raisonnement faisant ressortir des propriétés de la comparaison et d'équivalence pour beaucoup d'entre eux (c'est plus léger, plus lourd, égal...).

Ces conduites peuvent être prises comme point de croisement entre le parcours direct et inverse qui mène à la réversibilité (Piaget, 1948, p. 125). Un sens est apparu (la propriété d'équilibre) dans une activité de pesée, lorsque ces élèves ont affirmé que les deux plateaux vont rester normaux ou qu'il faut qu'il y ait une ligne égale ou encore que les deux plateaux ont la même hauteur.

Ces manipulations ont, nous le pensons, mis en évidence certains caractères communs ou spécifiques de ces grandeurs et permis aux élèves de dégager peu à peu de manière intuitive et confuse, puis de plus en plus consciente, les propriétés des relations (plus petit, plus grand, plus lourd, plus léger, égal...) du concept abstrait des grandeurs sur la masse. Ces explications ont impliqué, à notre avis, une capacité de changer de perspective ou d'élaborer une capacité d'illustrer la situation dans laquelle les élèves ont construit le principe d'équilibre. Par exemple, beaucoup d'élèves ont compris qu'il était nécessaire d'utiliser les clous dans un certain ordre, les plus gros d'abord puis les plus petits afin d'équilibrer les plateaux et d'éviter les erreurs de comptage. D'ailleurs, l'enseignant les incitait fortement à adopter cette conduite.

Les activités de comparaison sont essentielles. C'est à travers elles que les élèves accèdent et distinguent la masse ou la longueur d'un objet à mesurer. Aussi, ces manipulations, qui ont porté sur la mesure de divers objets par leur pesée, ont permis aux élèves d'exercer leur réflexion sur ce qu'ils ont fait et de reconnaître les analogies en dépit des différences. Plusieurs verbalisations sur la balance ont eu lieu : sensibilisation de la balance, sa ligne médiane et mise en doute de l'exactitude des pesées, en somme, la découverte de l'approximation. Ils ont élaboré des schèmes et des procédures afin de résoudre les situations problèmes présentées par des conduites attendues d'eux.

Ces constatations avaient également été faites par les élèves dans l'expérimentation de Brousseau (1992, p. 99), dans laquelle ils avaient pris conscience de la sensibilité de la balance. Ils avaient observé qu'il était non seulement préférable d'utiliser les clous de la plus grande à la plus petite, qu'ils ne devaient utiliser la suivante que lorsqu'ils avaient épuisé les possibilités de celle qui précède et que les mesures s'avéraient approximatives puisqu'ils ont argumenté sur la nécessité d'accepter le résultat de cette mesure malgré la différence de clous trouvés. Finalement, d'après l'auteur, il a fallu leur faire admettre cette propriété.

Ces résultats, venant corroborer ceux de Brousseau (1992), nous font dire et ont fait comprendre aux élèves qu'à la différence d'un dénombrement qui peut être exact, une mesure, bien que nombre réel, n'est jamais exacte. Chaque mesure physique est en réalité une estimation et possède une approximation. Les élèves ont découvert cette incertitude dans le processus de mesure qui impliquait l'estimation du rapport de la grandeur à une certaine quantité donnée. Il ressort néanmoins qu'aucun élève n'a utilisé le mot mesurer dans les activités de pesée. Nos résultats montrent aussi qu'en aucun moment ils n'ont fait le rapport qu'ils étaient en situation de mesurage.

Cela dit, nous concluons que les apprentissages qui permettaient la manipulation ont été qualifiants, dans la mesure où ils ont aidé les élèves à découvrir, à exprimer certaines propriétés des grandeurs, tant sur la longueur que sur la masse, à travers les mesurages, à expliquer et à justifier dans les situations leurs techniques et à communiquer leurs résultats. Ce constat répond à notre question 2.

Le tableau IX synthétise les conduites observées dans les deux classes tout en répondant aux questions de recherche, qui sont : dans quels types de situations les savoirs dans les grandeurs en mesure prennent-ils du sens chez les élèves en difficulté d'apprentissage ? Quels sont les procédures et les schèmes qu'élaborent ces élèves dans la résolution des situations problèmes sur la mesure des longueurs et des masses ?

Tableau IX
Synthèses des résultats (Hypothèses 1 et 2)

Savoirs	Types de situations qui ont un sens pour les élèves (Hypothèse 1)	Procédures et schèmes (Hypothèse 2)
Longueur		
▪ Comparaison ▪ Ordre de grandeur ▪ Équivalence	✓ Estimation ✓ Classer ✓ Évaluer l'ordre de grandeur ✓ Effectuer des calculs simples ✓ comparaison indirecte sur les mesures	Situation de mesurage comptage, dénombrement, sommation interne comparaison directe, correspondance terme à terme, juxtapositions des étalons, pliage de l'étalon qui dépasse Schèmes : c'est égal, ça arrive juste, il faut faire des lignes, il me faut plusieurs étalons, gestes pointer/nommer, contrôle pas à pas de l'algorithme, relations arithmétiques entre les nombres : moitié, quart
Masse		
▪ Comparaison ▪ Ordre de grandeur ▪ Équivalence ▪ Échanges	✓ Estimation de deux grandeurs (bas de sable, ou sable et différents objets) ✓ Évaluer l'ordre de grandeur ✓ Effectuer des calculs simples	Situation de mesurage Comptage (retrait et ajout de sable dans les plateaux); dénombrement des clous Schèmes : ce ne sont pas les mêmes clous (différence), ça va faire pareil, c'est en équilibre, il faut regarder la ligne médiane, il ne faut pas toucher aux plateaux pour que ça fasse pareil sommation interne sommation externe geste pointer/nommer contrôle pas à pas de l'algorithme pour les échanges. Relations arithmétiques entre les nombres : plus lourd, c'est égal, est lourd, est léger… relations entre les valeurs des clous; ex. : Il y a plus de clous ici que là…

En définitive, nous avons constaté que les situations problèmes (1, 3, 4, 5, 9 et 10) ont permis de mettre en évidence que les grandeurs travaillées étaient mesurables, comparables et pouvaient être additionnées. L'analyse des procédures et des schèmes dans les situations problèmes (6, 7 et 8) qui portaient sur les conversions nous indique des difficultés variables et récurrentes.

Dans ces activités, le changement d'unité des clous et la preuve demandée se sont avérés difficiles dès l'entrée des activités pour plus de la moitié des élèves et ce, dans les deux classes. Par après, les incitations des enseignants à faire appel à leurs souvenirs et à utiliser une stratégie du contrôle des actes avec une approche par remédiation ont beaucoup aidé les élèves en difficulté qui n'avaient pas mis de sens dans ces activités. Leurs difficultés ont résidé dans le fait qu'ils ne sont pas parvenus à reconnaître les caractéristiques des problèmes auxquels ils ont été confrontés et par la valeur que représentait chaque sorte de clous : le rapport des clous entre eux, les difficultés de calcul sur la comparaison. Au départ, seulement quelques élèves ont découvert le concept d'unité dans cette notion de conversion des grandeurs de masse. Toutefois, nous avons vu un effort de créativité, d'abstraction et de transfert qui a conduits ces élèves, et par la suite le reste de la classe, à se poser de multiples questions et à élaborer des procédures en voie d'organisation.

En ce qui concerne les élèves en difficulté, nos résultats nous font penser que les difficultés rencontrées étaient probablement dues au fait qu'ils ont dû travailler à partir de leurs schèmes. Ils ne sont pas parvenus à certaines réussites, notamment parce que probablement que la représentation de situations décrites paraissait difficile à simuler en actions externes ou intériorisées. Les problèmes de type comparaison, dont l'organisation sous-jacente relève plutôt de l'inclusion, présentent un niveau de difficulté très supérieur (Fayol, 1990, p. 156 et 195). Ainsi, les problèmes difficiles à modéliser en acte se sont révélés significativement plus ardues à résoudre pour eux que les autres.

Bien qu'une modalité procédurale ait été utilisée par plusieurs élèves dans les situations problèmes, bon nombre avait de la difficulté à se rappeler les valeurs des clous, la récupération à long terme s'avérant également inopérante. Ils ne se rappelaient plus les relations entre les clous; relations qui étaient pourtant écrites au tableau ou sur la feuille qui leur avait été remise pour écrire leur résultat. Il ressort que les problèmes portant sur les problèmes additifs des transformations soient d'un niveau de difficulté très supérieur à ceux mettant en jeu des états et une ou des transformations (Vergnaud, cité dans Fayol, p. 156).

Ces résultats nous font comprendre que les schèmes ne sont efficaces que lorsqu'ils permettent à l'élève d'agir et qu'ils ne lui permettent pas d'atteindre assurément le résultat attendu. Les difficultés décrites corroborent également celles relevées dans des recherches antérieures de plusieurs auteurs, dont Diggory (1979), Lemoyne et Bisson-Trépanier (1985), Douady et Perrin-Glorian (1989), St-Laurent (2002) et Lemoyne et Lessard (2003), sur la problématique des élèves en difficulté d'apprentissage dont les rencontres didactiques sont souvent difficiles en mathématiques, à cause de leur déficit de rétention.

En ce qui a trait aux procédures erronées des élèves, elles peuvent être néanmoins comprises sous d'autres angles. Nous prenons comme exemples le placement du résultat en tête (activité dans laquelle ils devaient faire la preuve que deux messages étaient équivalents, mais en effectuant des échanges), procédure qui accroît systématiquement la difficulté de l'exercice et la capacité de lire correctement l'exercice, c'est-à-dire en respectant l'ordre des éléments et la nature de l'opération. Ces conduites constituent pourtant un préalable de la réussite. Seuls parviennent au succès ceux qui lisent de manière pertinente, même si cela ne suffit pas (Fayol, 1990, p.129). Or rappelons que la difficulté majeure des élèves de notre expérimentation réside dans la lecture. Nous retrouvons, dans les deux classes, quelques difficultés d'évocation mentale des élèves, peu utilisables ou qui manquaient de cohérence. Il semble que ceux-ci n'ont pas utilisé les stratégies que leurs enseignants nous ont affirmé leur avoir apprises comme l'évocation visuelle, verbale ou auditive. Les uns se répétaient ou redisaient plusieurs fois le message, mais en vain car, pour eux, les mots ne pouvant être accueillis dans leur espace mental par manque d'images visuelles évoquées. Également lorsqu'ils avaient un résultat, ils n'ont pas prononcé le dernier mot nombre qui indique la quantité; ils n'ont pas produit la réponse attendue. Ils ont semblé ne pas posséder de perception globale de la quantité des objets désignés. Ces conduites nous font penser à un comptage automatique et non à un dénombrement des quantités qu'ils ne semblent pas encore avoir compris. Nous pouvons avancer que la communication des quantités et celle de mise en relation des quantités ne sont pas encore acquises, du moins dans ce contexte.

Nous faisons, de surcroît, l'hypothèse que la taille des données numériques a peut-être été une difficulté pour eux. Dès lors, on peut considérer qu'en ce qui concerne les énoncés des problèmes portant sur les échanges, le schéma de comparaison ne s'est pas établi, de là les difficultés rencontrées.

Ces résultats nous font comprendre que le concept de nombre ne peut être construit par l'élève indépendamment des opérations génératrices du nombre lui-même, car pour comprendre une valeur numérique, il faut pouvoir maîtriser les techniques opératoires que Piaget appelle la pensée intuitive, articulée et opératoire. Nous avons observé que ces élèves ont tenté d'expliquer du mieux qu'ils le pouvaient leur compréhension des situations en jeu, mais que l'écart entre leur compréhension et la formalisation de leur pensée reste à être élaboré.

Ces difficultés confirment également le principe selon lequel une notion doit toujours être étudiée sous son aspect le plus général et sous la forme qui le met au mieux en évidence avant d'être étendue aux cas particuliers. Par exemple, en ce qui concerne la masse, qui apporte des hypothèses de solution, il convient :

- de manipuler pour vérification par la comparaison des masses;
- de chercher après maintes procédures erronées;
- de trouver les liens et les relations unissant les unités de masse;
- d'utiliser l'unité appropriée dans certaines situations problèmes
- et finalement, d'effectuer des changements d'unité.

En cela :

> *... pour chaque grandeur, il est important de suggérer quelques suggestions évoquant les types d'activités et les concepts importants visant à mettre en évidence les caractères communs ou spécifiques de ces grandeurs. Ces activités sont utiles à la compréhension de leur usage et à celle de leur structure mathématique, car elles accompagnent la genèse des concepts et l'apprentissage des pratiques.* (Brousseau, 2007, p. 1).

Des auteurs comme Skemp (1976) et Brousseau et Brousseau (1987, 1992) suggèrent de mettre en place des situations didactiques appropriées pour redonner un sens mathématique et physique aux opérations liées aux grandeurs en mesure et également que les enseignants proposent aux élèves aussi bien des problèmes spatiaux (objets matériels) que géométriques (objets théoriques), qu'ils les amènent à faire des conversions par des procédures réfléchies qui remplacent l'emploi des règles appliquées sans raison.

L'unité d'une grandeur n'est pas donnée d'emblée, c'est une création mentale. C'est celui qui compte qui détermine de quoi est faite l'unité. Selon les contextes, celle-ci peut être constituée d'un objet, mais aussi d'une paire d'objets ou généralement d'un groupe d'objets. Quand l'unité ne correspond pas à l'individualité qui est perçue, la difficulté est importante. Aussi, faire découvrir le concept d'unité doit donc être une priorité pour les enseignants puisque lors d'un mesurage, aucune unité de compte ne s'impose naturellement.

Pour terminer, il est possible de conclure que les activités sur les grandeurs en mesure constituent des situations privilégiées pour que les élèves prennent conscience du rôle fondamental que joue le choix d'une unité, puisqu'une même longueur n'est pas représentée par le même nombre si on la mesure en centimètres ou en mètres. Ces situations pourraient mettre les élèves en situation de recherche et d'activité. Elles pourraient permettre également un démarrage possible pour tous. La prise de sens dans une activité par les élèves demande une double compétence : celle de la compréhension de la situation proposée et la capacité d'effectuer un choix de stratégies dans l'utilisation des outils proposés. Mais si habile soit l'enseignant, il ne peut malheureusement se substituer à ses élèves ni accomplir à leur place des actes relevant de leur esprit. Le rôle de l'enseignant à l'égard de l'apprentissage des élèves en est un de formation, de guide et d'accompagnement. Cependant, c'est l'élève, et lui seul, qui doit prendre l'initiative et faire chacun des pas requis pour mettre en œuvre la construction des connaissances. Nous débattons maintenant notre troisième question qui a rapport avec les stratégies des enseignants.

6.3 LES STRATÉGIES DES ENSEIGNANTS

Nous rappelons la troisième question de recherche : dans un processus d'enseignement des grandeurs en mesure, quelles sont les conduites devant lesquelles l'enseignant est à court de moyens d'action ?

En ce qui concerne les enseignants, dans les deux classes, nous observons des actions variées dépendamment de la situation problème et quelques fois adoptant des stratégies similaires. À un niveau local, les deux enseignants avaient à peu près les mêmes stratégies, car nous avons relevé de nombreuses similitudes que nos analyses par recoupement ont confirmées. Nos résultats suggèrent que les enseignants ont assuré plus que souvent les fonctions de prise d'information et de contrôle qui faisaient défaut aux élèves tout au long de cette expérimentation. Ils avaient, la plupart du temps, la même approche en ce qui concerne l'organisation du travail, la lecture des consignes, la confrontation des résultats et la justification des réponses par des corrections collectives, ce qui a aidé les élèves en difficulté à changer de perspective dans diverses activités et ce, par l'approche d'institutionnalisation primitive (Portugais, 1995, p. 176).

Par exemple, en début de séance, ils ont fait évoquer les acquis antérieurs nécessaires à la compréhension de la notion de la longueur et de la masse avec le projet de les réutiliser dans la situation problème. L'un avait même pris la peine de dessiner les clous et écrit leur appellation et l'autre avait collé les clous sur du bristol au tableau pour que les élèves les aient constamment sous les yeux.

Il y a aussi l'écoute que les enseignants ont appliquée pour certains élèves. Ils ne recherchaient pas forcément les bonnes réponses, mais prenaient la peine d'écouter ceux qui s'exprimaient en les aidant à clarifier leurs réponses ou en leur expliquant leur erreur par une stratégie qui est fonction du contrôle des actes avec une approche par remédiation[19] dans les explicitations de leur démarche ou le développement de leur argumentation (Portugais, 1995).

---

[19] Les stratégies fonction du contrôle des actes avec une approche par remédiation sont : faire manipuler des objets aux élèves pour améliorer leur compréhension, désigner explicitement le lieu ou la cause de l'erreur à l'élève ou lui faire refaire le calcul pour qu'il se corrige...

Nous avons ainsi noté qu'ils ont fait un effort d'interprétation, car en face des ambiguïtés de réponses d'élèves, ils ont demandé aux élèves qui répondaient de préciser leurs représentations. Ils ont incité les élèves à rechercher l'erreur, non seulement pour elle-même, mais pour l'expliciter et la corriger (Portugais, 1995, p. 177).

Pour les enseignants, les réponses en voie d'élaboration peuvent avoir plusieurs significations. Pour eux, l'effort d'explicitation demandé à un élève ne peut que lui être bénéfique pour sa compréhension de la difficulté de la notion et ne peut, en outre qu'augmenter sa confiance dans ses capacités langagières. Technique que nous approuvons. Nous avons toutefois observé que les phases de formulation et de validation demandées aux élèves, c'est-à-dire expliciter leur action à leurs pairs, ont été effectives malgré le déficit du vocabulaire mathématique, car ils ont su, dans leurs mots, formuler leurs pensées avec l'aide de l'enseignant. Cela a eu pour effet de permettre la dévolution et la progression des apprentissages des pairs en difficulté dans les activités, même si une ou deux situations problèmes révèlent des difficultés d'entrée dans la tâche de certains élèves, créant des difficultés aux enseignants dans leur intention d'enseignement. Nous avions remarqué que les quatre phases ne se succédaient pas régulièrement, car elles étaient imbriquées par des allers-retours.

Dans presque toutes les activités, les enseignants ont induit la tâche des élèves et leur ont fait prendre en charge leur recherche en s'adaptant à eux. Leur attitude a déterminé la conduite des apprentissages à ce qu'il y ait dévolution, fonctionnement essentiel du contrat didactique, qui, nous le rappelons, définit les rôles des uns et des autres et la part de responsabilité de chacun dans la gestion des savoirs. Il est néanmoins apparu que certains élèves avaient beaucoup de difficultés à abandonner la procédure qui leur avait permis de trouver le bon résultat dans une autre situation. Même après des explications, ces élèves ne voyaient pas la nécessité de modifier leur stratégie. Les enseignants ont dû quelquefois aussi interrompre la communication avec des élèves qui posaient des questions répétitives, questions qui leur ont semblé ne mener à rien et de peur de se voir éventuellement pris dans des spirales de questions sans fin.

Dans le cadre didactique, l'aide aux inférences représente un aspect important dans l'action de l'enseignant. Face aux difficultés qu'éprouvaient les élèves, l'aide à la sélection des informations pertinentes est devenue, pour ces enseignants, une compétence critique de leur activité. Pourtant, de nombreuses fois, ils ont fait un retour pour des fins d'institutionnalisation, soit par eux-mêmes, comme le recommande la TSDM, soit par élève interposé en utilisant l'institutionnalisation primitive (Portugais, 1995, p. 176). Nous avons pensé que le fait qu'ils agissent sur les règles d'action ou sur les buts pourrait avoir une action sur le système d'invariants des élèves, notamment sur leurs schèmes (par les verbalisations, en attirant leur attention sur leur procédure en voie d'élaboration ou leur conduite erronée, en utilisant des inférences), auraient amélioré les conduites de certains élèves en difficulté dans l'activité.

Pourtant, les approches d'institutionnalisation primitive directe et de contrôle du sens de ces enseignants ont eu une faible importance sur ces élèves. Leurs conduites ont confirmé qu'une des caractéristiques des élèves en difficulté est de rester au niveau de la mise en œuvre de règles d'action et d'être incapables de se représenter les exigences de la tâche. Ce qui a amené les enseignants à répéter abondamment les consignes, à s'efforcer à mettre en parallèle les activités réussies et les propriétés sous-jacentes des grandeurs à chaque fois, à les aider en leur montrant explicitement leurs erreurs, à encourager également les équipes en difficulté tout en procédant à des techniques de reformulation qui portaient souvent sur le comment des agir des élèves et ce, tout au long du déroulement des activités.

Dans l'ensemble, le contrat didactique a été effectif et il y a eu dévolution dans les deux classes pour la quasi-totalité des situations problèmes. Toutes les équipes ont participé activement. Toutefois, malgré toutes ces actions des enseignants sur les variables (consignes, balances, valeurs des clous... et incitations ou désignation explicite du lieu de l'erreur en tant que tel à l'élève et indication de la procédure correcte à utiliser), les tâches demandant des conversions sur les grandeurs se sont révélées difficiles pour certains élèves et ont parfois créé des ruptures de contrat didactique ou, au demeurant, ont demandé beaucoup de créativité et d'ingéniosité aux enseignants. Nous présentons, au tableau X, les résultats condensés, résultats qui font mention des difficultés devant lesquelles les enseignants sont à court de moyens d'action.

Tableau X
Synthèse des résultats (Hypothèse 3)

Dans un processus d'enseignement des grandeurs en mesure, quelles sont les conduites devant lesquelles l'enseignant se montre pris de court de moyens d'action ?

	Actions de l'enseignant	**Conduites des élèves**
1	Stratégies de mise en équipe, de mise en commun (travail collectif)	L'élève reste au niveau de la mise en œuvre des règles d'action
2	Amorce de l'activité (recherche du contrat didactique et but de l'activité	Rupture entre le sens donné au problème et la procédure utilise pour sa résolution
3	Agis sur les règles d'actions des élèves et des variables didactiques (consignes, nature du matériel utilisé, valeurs des clous)	Attachement à une mesure à peu près connue ou à une variable déjà utilisée (clous, balance)
4	Actions sur les schèmes des élèves le comment, le pourquoi, attire leur attention sur la réussite ou l'erreur)	Dénombrement difficile à effectuer à cause de l'incompréhension des valeurs attribuées aux différents clous
5	Utilisations d'inférences	Difficultés à entrer dans la tâche demandée
6	Engage et maintien au possible les élèves dans un processus de découverte et d'utilisation de procédures expertes	Difficultés de calcul relationnel et du calcul numérique
7	Guide les gestes des élèves	Difficultés à réaliser la dévolution
8	Incite les élèves à réinvestir les conduites adéquates du système de signifiants	Difficultés de mémorisation de la consigne
9	Répertorie quelques procédures en voie d'organisation pour stimuler les élèves en difficulté	Difficultés de compréhension de la notion de la preuve et de sa démonstration
10	Répertorie quelques procédures erronées pour les expliquer et les corriger	Difficultés des élèves à verbaliser leurs stratégies

En dernière analyse, pour la phase d'institutionnalisation, les exercices d'entraînement, d'application et de réinvestissement préconisés par la TSDM n'ont pas eu lieu en notre présence, par manque de temps.

Cette phase pourrait être interprétée par certains comme la plus faible des quatre phases de l'ingénierie didactique de notre recherche. Ce qui n'est cependant pas notre avis. Nous l'avions dit, institutionnaliser les connaissances est difficile en classe spéciale. Nous avons également dit que les élèves ne peuvent pas dégager seuls ce que la démarche utilisée dans une autre situation a de général et de réutilisable, qu'il est aussi parfois difficile pour l'enseignant d'évaluer le véritable niveau d'activité mathématique de ces élèves et, enfin, qu'il arrive que l'enseignant reconnaisse les indices d'une connaissance qui n'est pas réellement présente et que le calendrier scolaire ne permet pas, parfois, de s'y attarder… Toutefois, l'une des contraintes relevées a été, pour les enseignants, la gestion de l'activité qui, non seulement a demandé une bonne maîtrise mais aussi de mener une classe entière sur une activité longue où chacun va à son rythme, par exemple, la situation « émetteur-récepteur » dans laquelle ils ont dû gérer des groupes faisant des activités différentes et mettre l'élève en position de construire son savoir en s'appuyant sur ses acquis antérieurs.

La deuxième contrainte observée est qu'il a été quelquefois difficile pour les enseignants de prendre appui sur le dispositif d'enseignement. Leurs demandes d'explicitation n'ont malheureusement pas permis de modifier, ni même de connaître la pensée des élèves interrogés, malgré leurs tentatives pour rendre intelligibles les réponses déroutantes dans l'activité mathématique. Ces faits ne sont toutefois pas propres à l'enseignement spécialisé (Vergnaud, 1996). Alors, tout bien considéré, même si les quatre phases de la théorie des situations n'ont pas été linéaires du fait que les élèves sont arrivés à accepter la dévolution des situations, que les enseignants aient été efficaces dans leur enseignement, nous pensons que la relation didactique a été efficiente, puisqu'elle nous a permis d'observer les conduites des élèves, de mieux les comprendre et d'avoir des possibilités de différenciation sur les activités proposées.

Nous répondons maintenant à notre hypothèse de recherche, à savoir qu'en cas d'utilisation des mesures non conventionnelles : « **Les représentations sur les grandeurs en mesure des élèves du 2^e^ cycle du primaire en adaptation scolaire sont identiques à celles des élèves de classes dites régulières** ».

Nos résultats montrent que les élèves, à plus de 60 %, sont parvenus à élaborer des représentations en action, c'est-à-dire à simuler, à l'aide de matériel, les états relatés dans les énoncés des problèmes, même si les difficultés observées ont porté sur les épreuves de conversion et les rapports à établir entre les clous. En effet, le rapport à déterminer entre les clous s'est avéré la difficulté majeure, car incompréhensible pour certains élèves. Ces derniers semblaient être confrontés à des difficultés d'ordre conceptuel portant sur les échanges de clous, les difficultés de compréhension des rapports existants entre les clous (difficulté de calcul relationnel) et à des difficultés de symbolisation. Dans ces situations problèmes, la mise en relation des valeurs des clous s'est avérée difficilement inopérante pour eux. Ces faits sont corroborés par la recherche de Perrin-Glorian (1997, p. 6) qui résume et explique très bien ce que nous avons observé. L'auteur mentionne que :

> *... si les élèves en difficulté en mathématiques ont des difficultés spécifiques, c'est davantage au niveau de la représentation et dans l'articulation de plusieurs registres de représentations. Ils ont aussi des difficultés de nature cognitive (difficultés langagières, difficultés à changer de cadre ou de point de vue, difficulté à percevoir en quoi consiste leur activité au cours de mathématiques, question des rapports avec le réel).*

Nos résultats indiquent toutefois que les interventions de pilotage ont été bien menées par les deux enseignants. Ils ont joué un rôle actif pendant toute l'expérimentation. En faisant le parallèle entre les résultats de notre recherche et celle de Brousseau (1992), il n'y a qu'une différence de degré de niveau par rapport à l'étude de l'auteur. Cela nous conforte dans l'idée qu'on ne doit pas négocier à la baisse les apprentissages des élèves en difficulté d'apprentissage. Il faut plutôt leur faire confiance car, de toute évidence, nous n'avons pas observé dans leurs conduites des procédures aberrantes. En distinguant ces conduites et en accord avec Vergnaud (1981), nous convenons que ce n'est pas en théorie que l'on peut montrer aux élèves les différents sens d'une notion dans une situation problème, mais à partir de situations qui éprouveront les représentations premières de ces élèves. De plus, si on veut qu'ils aient une base suffisamment large pour tirer profit de ces situations problèmes sur les grandeurs en mesure, il serait souhaitable de leur permettre d'élaborer un modèle (Fayol, 1990, p. 199).

Finalement, il serait également intéressant de leur fournir un éventail relativement ouvert des types de problèmes, les inciter à utiliser des représentations graphiques ou matérielles appropriées à chaque situation décrite, qui leur permettront d'évoluer vers l'abstraction de la relation en jeu. Il est aussi essentiel que les élèves puissent non seulement identifier sur quel état (transformation positive ou négative) porte la question du problème, mais qu'ils puissent mieux appréhender le sens de cette opération en prenant conscience des conséquences du point de vue de la mathématisation de la situation. L'apprentissage et la compétence supposant de nombreux exercices et des répétitions. Ces suggestions mériteraient qu'on s'y intéresse.

6.4 APPORTS ET LIMITES DE LA RECHERCHE

Nous aurions pu choisir d'autres champs d'études, par exemple en géométrie ou en numération. Toutefois, en choisissant de travailler les grandeurs en mesure, nous savions avoir un défi de taille à relever. D'abord, nous n'aurions pas eu la même richesse de conduites observées dans les situations problèmes données. Il va de soi que cela a été un défi lorsque nous considérons tout ce qui caractérise les élèves en difficulté sur le plan cognitif, leur déficit d'attention, leurs difficultés de transfert et de généralisation, leurs manques de stratégies... Quoi qu'il en soit, nous avions vu dans cette recherche se déployer des compétences étonnantes et insoupçonnées de ces élèves.

Tout compte fait, cette recherche nous a permis de mettre en évidence la pertinence de certains apports de la didactique des mathématiques, en particulier ceux de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991) et des situations didactiques en mathématiques de Brousseau (1986). Notre intention n'était pas de négocier à la baisse les situations présentées, ni de considérer des « adaptations » qui n'auraient été que le pâle reflet des situations de Brousseau, avec tout ce qu'elles exigent comme mobilisations cognitives de la part de ces élèves. Notre pari était bel et bien de hausser le niveau habituel des tâches destinées à ces élèves en s'inscrivant dans une démarche explicitement exigeante. Essentiellement, nous voulions déceler, dans l'application de ces théories, le type d'effets qu'elles induisent et qui, selon le cas, pourraient être promoteurs du point de vue didactique.

Notre recherche est en soi un apport pour la didactique en mathématique et pour plusieurs raisons. La première est qu'il a été intéressant d'expérimenter la TSDM auprès d'élèves en difficulté en faisant, en même temps, une place plus large à l'étude effective des grandeurs en mesure et ce, grâce à l'ingénierie didactique.

Un autre apport est la stabilité de nos résultats quant aux conduites des élèves en difficulté d'apprentissage par rapport aux résultats de ceux des classes ordinaires de Brousseau (1992). Cela est en soi un événement à souligner en tant que tel, à cause de la connotation extrêmement positive que cela donne à l'ensemble de la recherche. Nos résultats montrent, de ce fait, la robustesse de l'ingénierie didactique de Brousseau (1986) et partant de là, prouvent que les conduites des élèves en difficulté ont de nombreux points communs avec celles des élèves du régulier.

En ce qui concerne notre deuxième outil, la TCC, il a révélé de manière précise que les schèmes des élèves (que ce soit dans notre recherche ou dans celle de Brousseau) sont les mêmes. Par ailleurs, le caractère invariant des conduites montre que la TCC est une théorie très forte, car elle stipule que ce sont les situations qui « encadrent » les conduites et nous avons des exemples remarquables. L'intention générale qui guide tout processus d'une recherche en didactique des mathématiques consiste à enrichir la connaissance dans ce domaine. Nous nous sommes, certes, intéressée au travail de l'enseignant puisqu'il tient un rôle dans le système didactique, mais, comme nous l'avons indiqué, ce dernier avait un rôle secondaire. Nous sommes bien conscients de l'importance de revenir sur les interactions et stratégies de l'enseignant. En effet, non seulement cette étude ne s'intéresse qu'aux enseignants de classes spéciales, mais les résultats ne sont que partiels, vu que cela ne constituait pas le cœur de notre travail. Car, nous n'avons pas mis en place de dispositifs d'observation et d'analyse pour les relier à ces caractéristiques dans le développement de notre recherche. Nous reconnaissons toutefois qu'une analyse des choix et des décisions de l'enseignant en classe spéciale, notamment celles qui conduisent à infléchir le déroulement des situations prévues par Brousseau, seraient fort pertinentes et importantes à travailler dans de futures recherches. Pour nous, il convenait de limiter la portée de cette recherche, qui se veut avant tout exploratoire et descriptive.

De ce fait, le lecteur désireux d'obtenir un plus grand portrait sur les enseignants risque de ne pas y trouver son compte.

Cette recherche est surtout une occasion pour nous, chercheurs et enseignants en classe spéciale, d'enrichir les connaissances dans le domaine des grandeurs en mesure qui pourraient favoriser un changement de stratégie. Bien que ces résultats ne peuvent être généralisés dans toutes les classes d'adaptation scolaire, vu que les élèves n'éprouvent pas les mêmes besoins, il nous semble néanmoins qu'ils peuvent permettre de dégager des pistes de réflexion qui méritent d'être essayées et ou améliorées. Ils pourront contribuer, pourquoi pas, à l'émergence d'une didactique des mathématiques pour l'enseignement des grandeurs en mesure en adaptation scolaire, car les résistances spécifiques de ces élèves peuvent aussi servir de révélateur sur les insuffisances des paradigmes et des situations didactiques proposées par les chercheurs en didactique des mathématiques. Nous comptons, pour notre part, sur des retombées d'ordre pratique auprès des formateurs d'enseignants par :

1) la mise à jour des moyens d'enseignement;
2) les situations problèmes réutilisables par les enseignants en classes spéciales;
3) les possibilités pour ces enseignants de réviser certaines manières traditionnelles de faire des mathématiques en classe qui sont peu susceptibles de permettre un vrai travail de résolution de problème.

Comme le dit Fayol (1990, p. 202), l'objectif restant toujours la construction de modèles susceptibles de rendre compte à la fois des comportements particuliers et des processus généraux qui y conduit. Nous concluons donc sur cette citation de Vergnaud (dans Fayol, 1990, p. 12) qui indique que pour l'apprentissage des grandeurs en mesure :

> *... le concept de nombre ne se réduit ni au critère de la conservation, ni à l'activité de dénombrement, ni à la résolution d'une classe de problèmes, ni à quelques procédures automatisables, ni à la compréhension et à la manipulation de signes sur papier. Mais c'est de cet ensemble d'éléments divers qu'émerge, avec l'aide de l'environnement familial et scolaire, l'un des édifices cognitifs les plus impressionnants.*

BIBLIOGRAPHIE

Altet, M. (1994). La formation professionnelle des enseignants : analyse des pratiques et situations pédagogiques. Paris : PUF, 264 p.

Arsenault, C. (1996). *Didactique sur les procédés de calcul d'addition et de soustraction : réalisation auprès d'élèves de deuxième année primaire*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, 259 p.

Artigue, M. (1991). « Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique ». *Petit x, 26,* 5-27.

Artigue, M. (1996). « Ingénierie didactique », *in* J. Brun (dir.), *Didactique des mathématiques* (p. 243-274). Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Astolfi, J.P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner ?* Paris : ESF, coll. Pratiques et enjeux pédagogiques.

Auger, J. (1990). *Correction individuelle des difficultés d'apprentissage en mathématiques au niveau du secondaire III, IV et V*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, 202 p.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège*. Grenoble : Université Joseph Fourier. Institut national polytechnique de Grenoble.

Balacheff, N. et Margolinas, C. (2005). « cK Modèle de connaissances pour le calcul des situations didactiques », *in* A. Mercier et C. Margolinas (dir.), *Balises pour la didactique de mathématiques* (p. 75-106), Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bideaud, J., Lehalle, H., Vilette, B. (2004). *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant*. Villeneuve d'Ascq Cedex : Presses Universitaires du Septentrion, p. 371.

Boule, F. (1989). *La construction des nombres*. Paris : Armand Colin, 95 p.

Brousseau, G. (1981). *Problèmes de didactique des décimaux*. Recherches en didactique des mathématiques. Orléans : IREM.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1988). « Exemple : le nombre naturel : macro et micro ingénierie. Situations adidactiques et didactiques, Didactiques des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire ». *Actes de l'université d'été*, IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1990). « Le contrat didactique, le milieu ». *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2003). Conférence au séminaire de Didactique des mathématiques. Université de Montréal, Faculté des sciences de l'éducation.

Brousseau, G. et Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Université de Bordeaux I, IREM, 555 p.

Brousseau, G. et Brousseau, N. (1992). « Le poids d'un récipient : étude des problèmes de mesurage en CM pour une ingénierie didactique ». *Se former+Pratiques et apprentissages de l'éducation*, 15, 15.

Brousseau, G. et Centeno, J. (1991). « La mémoire du système didactique ». *Recherches en didactique des mathématiques, 11*(2-3), 167-210.

Brousseau, N. (1987). *La mesure en cours moyen 1ère année*. Document pour les enseignants et pour les formateurs. Bordeaux : IREM

Brown, J.S. et Burton, R.R. (1978). « Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills ». *Cognitive Science*, 2, 155-192.

Brun, J. (1996). *Didactiques des mathématiques*. Delachaux et Niestlé, coll. Textes de base en pédagogie.

Brun, J. et Conne, F. (1990). « Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations ». *Éducation et recherche*, 3, 260-286.

Brun, J., Conne, F., Cordey. P.A., Floris, R., Lemoyne, G., Leutenegger, F. et Portugais, J. (1994a). « Erreurs systématiques et schèmes-algorithmiques », *in* M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (dir.), *Vingt ans de didactique en France* (p. 203-209). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brun, J., Conne, F., Floris, R., Lemoyne, G., Leuteneegger, F. et Portugais, J. (1994b). « La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des Algorithmes de calcul écrit ». *Cahiers de la recherche en éducation, 1*(1), 117-132.

Cange, C. et Favre, J.M. (2001). « Petite boutique des erreurs ». *Actes du colloque « constructivisme : usages et perspectives en éducation*, volume II, Cahier 8, p. 525-528. Genève.

Chernay, R. (1997). *Mathématique de base pour tous ? Tous les enfants peuvent-ils connaître la réussite en mathématiques en début de scolarité*. Aléas, 93 p.

Chevallard, Y. (1989). *Le concept du rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*. Séminaire de didactiques des mathématiques et de l'informatique. Université Joseph Fourier, Grenoble 1, 108, 211-236.

Clément, P. (1994). « Représentations, conceptions et connaissances », *in* A. Giordan, Y. Girault et P. Clément (dir.), *Conceptions et connaissances* (p. 15-46). Berne : Peter Lang.

Coffey, A. et Atkinson, P. (1996). *Making Sense of Qualitative Data*. Thousand Oaks : Sage Pub.

Commission scolaire de Montréal (CSDM) (2004). *Rapport annuel d'évaluation. Année Scolaire 2003-2004*. Bibliothèque nationale du Canada.

Conne, F. (1999). « Domaine de validité des différentes approches en didactique des mathématiques : pouvons-nous parler d'une didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé ? » *Actes de la X^e^ école d'été de didactique des mathématiques*. Houlgate.

De Vecchi, G. et Giordan, A. (1988). *L'enseignement scientifique : comment faire pour que ça marche* ? Nice : Z'éditions, 208 p.

Deslauriers, J.P. (1991). *Recherche qualitative. Guide pratique*. McGraw-Hill. 142 p.

Diggory, F. (1979). *Learning Disabilities*. London.

Douady, R. et Perrin-Glorian, M.J. (1989). « Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane ». *Educational Studies in Mathematics, 20*, 387-424.

Dubois, C., Fénichel, M. et Pauvert M. (2001). *Se former pour enseigner les mathématiques*. 2. Maternelle, grandeur et mesure. Paris : Bordas, Pédagogie, 159 p.

Encyclopédie Universalis (1998). *Les nombres réels*. Paris : S.A.

Ermel (1999). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes,* Cours moyen*,* Collectif. Paris : IRNP, Hatier, 579 p.

Ermel (2001). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes.* Cours élémentaire*,* Collectif. Paris : IRNP, Hatier, 431 p.

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre* : *Du comptage à la résolution de problèmes.* Paris : Delachaux et Niestlé SA, 233 p.

Fregona, D. (1995). *Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrat et transpositions didactiques*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.

Giordan, A. et De Vecchi, G. (1987). *Les origines du savoir*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé, 212 p.

Giordan, A. et Martinand, J.L. *et al.* (1988). *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifique*. Nice : Z'éditions, 103 p. (Investigations scientifiques).

Grenier, D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Hervé, P. (2005). *La résolution de problèmes arithmétiques à l'école*. Paris : Hatier Pédagogie, 155 p.

Huberman, A.M. et Miles, M.B. (1991). « Analyse des données qualitatives ». *Recueil de nouvelles méthodes*. De Boeck Université, 480 p.

Kerbrat-Orecchini, C. (1990). *Les interventions verbales*. Tome 1. Paris : Armand Colin, 334 p.

Larousse (2006). *Dictionnaire illustré*. Paris : Cedex 06, 1856 p.

Le Boursicot, D. et Ripoche, J.L. (1988). *Mesure, Géométrie, Transformations géométriques*. Paris : Delagrave, 151 p.

Lemoyne, G. et Haguel, M.J. (1999). « Harmonie didactique, cognitive et mathématique », *in Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 295-325). Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.

Lemoyne, G. et Tremblay, C. (1983). « Interprétation de certaines expressions référant à des situations mathématiques ». *Congrès Psychology Thematics Education*.

Lemoyne, G., Coulange, L. et René de Cotret, S. (2002). « La dynamique du couple représentation-interprétation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques » *L'année de la recherche en sciences de l'éducation 2002. Des représentations*.

Lemoyne, G.et Bisson-Trépanier, L. (1985). *Connaissances et habiletés en mathématiques des élèves en adaptation scolaire*. Université de Montréal, Faculté des sciences de l'éducation, section d'orthopédagogie.

Margolinas, C. (1992). « Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion ». *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 113-115.

Mercier, A., (1995a). « Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques », *in* C. Margolinas (dir.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 157-168). La Pensée Sauvage, Grenoble.

Migne, J. (1970). « Pédagogie et représentation ». *Éducation permanente*, 65-88.

Ministère de l'Éducation du Québec (1999). *Une école adaptée à tous ses élèves. Prendre le virage du succès*. Politique de l'adaptation scolaire (19-6509, 19-6509-A), Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (2001). *Programme de formation de l'école québécoise*. Québec : Gouvernement du Québec, version révisée, 349 p.

Muchielli, A. (1996). *Dictionnaire des méthodes qualitatives en sciences humaines et sociales*. Paris : Armand Colin, Neil, J.O, p. 275.

Perraudeau, M, (2002). *L'entretien cognitif à visée d'apprentissage : un dispositif pour aider l'élève en mathématiques*. Paris : L'Harmattan, 362 p.

Perrenoud, P. (1994). « La formation des enseignants en question(s) ». *Pédagogies*, Revue du Département des sciences de l'éducation de l'Université de Louvain, Actes du colloque du REF Former des enseignants. Pratiques et recherches, no 10, p. 11-21.

Perrin-Glorian, M.J. (1991). « Élèves de 6^e^ en difficulté ». *Les cahiers de didactique. Repères*, 3, 97-139.

Perrin-Glorian, M.J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6^e^*. Thèse de doctorat d'État. Université, Paris 7.

Perrin-Glorian, M.J. (1993). « Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement dans les classes « faibles ». *Recherches en didactique des mathématiques*, *13*(1-2), 5-118.

Perrin-Glorian, M.J. (1998). Les mathématiques en ZEP, un moyen de réussir à l'école et par l'école. *X.Y.ZEP, Bulletin du Centre Alain Savary*, 3, p. 3-5.

Piaget, J. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : PUF, 581p.

Poisson, Y. (1991). *La recherche qualitative en éducation*. Montréal : Presses de l'Université du Québec, 174 p.

Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Berne : Lang, 312 p.

Portugais, J. (2000). *DID 4505. Notes de cours*. Automne. Université de Montréal.

Ratsimba-Rajohn, H. (1977). *Étude de l'introduction ostensive d'un objet mathématique*. Mémoire de DEA, Université Bordeaux I, Bordeaux.

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier-Hatier.

Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*

Rouchier, A. (1980). « Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs ». *RDM, 1-2*.

Saint-Laurent, L. (2002). *Enseigner aux enfants à risque et en difficulté au primaire*. Boucherville : Gaëtan Morin éditeur, 363 p.

Schubauer-Léoni, M.-L. (1986). *Maître-élève-savoir : analyse psychosociale du jeu et des enjeux de la relation didactique*. Thèse de doctorat, Université de Genève, 349 p.

Schubauer-Léoni, M.-L. (2002). « Didactique comparée et représentations sociales » *L'année de la recherche en sciences de l'éducation, Des représentations.*

Second, L. (1979). *Proverbes, 11,1.* La Sainte Bible*,* Alliance Biblique Universelle*,* 1277 p.

Sensevy, G. (1998). *Institutions didactiques: étude et autonomie à l'école élémentaire*. Paris : PUF.

Skemp, R. (1976). « Relational understanding and instrumental understanding ». *Mathematics Teaching*, 77.

Therrien, D. (1994). *La didactique de la mathématique*. Les Presses Universitaires, 235 p.

Touré, M.L. (2003). *L'enseignement des identités remarquables : un dispositif de formation initiale des maîtres*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, 391 p.

Van Hout, G. (1994). *Et que le nombre soit !...* Bruxelles : De Boeck-Wesmael, 284 p.

Vergnaud, G. (1981, 1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne : Peter Lang, 218 p.

Vergnaud, G. (1983). « Multiplicative structures », in R. Lesh et M. Landau (dir.), *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes* (p. 127-174). New York : Academic Press.

Vergnaud, G. (1990, 1991). « La théorie des champs conceptuels ». *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*, 2-3.

Vergnaud, G. (1994). *Apprentissages et didactiques, où en est-on ? Former, organiser pour enseigner*. Paris : Hachette.

Vergnaud, G. (1996). « Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation », *in* R. Noirfalise et M.J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la VIII^e école et université d'été de didactique des mathématiques* (p. 174-185). Clermont-Ferrand : IREM.

Vilette, B. (1996). *Le développement de la quantification chez l'enfant*. Presses Universitaires du Septentrion, 322 p.

Hyperliens bibliographiques

ADOQ (2002). *Mandat et structure de l'Association*. http://adoq.rtsq.qc.ca/mandat.htm

Brousseau, G. (2007). *Les grandeurs dans la scolarité obligatoire*. wwwleibniz.imag.fr/EEDDM11/Theme4/Cours4.html.

Brousseau, G. (2003). *L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire.* http://perso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Enseignement_des_maths.pdf-.

Cange, C. et Favre, J.M. (2003). *L'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé est-il pavé de bonnes analyses d'erreurs* ? http://www.acelf.ca/revue/31-2/articles/09-cange.html

Conne, F. http://www.ardm.eu/contenug%C3%A9rard-vergnaud-0.

Diaz, F. (2005). *L'observation participante comme outil de compréhension du champ de sécurité.* http://champpenal.revues.org/document79.html.

Lemoyne, G. et Lessard, G. (2003). *Les rencontres singulières entre les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques et leurs enseignants*. www.acelf.ca/revue/31-2/articles/01-lemoyne.html.

Lyons, R. (2002). *Les représentations des élèves en difficulté*. Vol. 3, no 100, www.defimath.ca/mathadore/vol3numero100.html.

Martineau, S. (2004). « L'instrumentation dans la collecte des données : L'observation en situation : enjeux, possibilités et limites ». *Actes du colloque*, 26 novembre. UQTR.

Mary, C. (2003). *Interventions orthopédagogiques sous l'angle du contrat didactique.* www.acelf.ca/revue/31-2/articles/05-mary-html.

Mary, C. et Schmidt, S (2003). http://www.acelf.ca/revue/31-2/articles/00-liminaire.htlml

Perrin-Glorian, M.J. (1997). « Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ? » *Repères IREM*, 29. http://centrealain-savary.inrp.fr/CAS/les dossiers/mathématiques-en-zep-rep/bibliographie.

Rouchier, A. http://ardm.eu/contenu/guy-brousseau.

Thompson, P. S. (2008). Maths et citations. www.iec.ch/about/history/articles/fr/ikbio-f.htm.

Villemin, G. (2006). Citations sur les mathématiques. http://villemin.gerard.free.fr/Langue/EnMotsRe.htm.

Vincent, S. (1997). « Des conduites d'élèves en construction, le cas de figure des relations multiplicatives ». *L'apprentissage et l'enseignement des sciences et des mathématiques dans une perspective constructiviste, XXV*(1), www.acelf.ca/c/revuehtml/25-1rxxvl-07.html

Bulletins

Brousseau, G. « Les mathématiques à l'école ». *Bulletin de l'APMEP*, 400.

Vergnaud, G. (1977). « Activité et connaissance opératoire ». *Bulletin de l'APM*, *307*(2), 52-65.

ANNEXES

ANNEXE 1

Autorisation d’enregistrement

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
Département de didactique

AUTORISATION D'ENREGISTREMENT

Madame, Monsieur,

Dans le cadre d'une recherche en didactique des mathématiques auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage, nous souhaitons avoir votre accord pour que les entretiens qu'aurait votre enfant soient enregistrés sur magnétophone et/ou filmés par une caméra vidéo qui fonctionne en circuit fermé, à l'usage exclusif de professionnels de l'éducation tenus aux règles de déontologie.

Les documents de recherche ne seront utilisés qu'au titre du développement des connaissances en enseignement des mathématiques et ne seront en aucune façon associés à une évaluation des élèves pour fins académiques. Par ailleurs, ils seront conservés confidentiellement uniquement pour la durée de la recherche. Aucune information nominative ne sera divulguée, conformément à la loi sur la protection des renseignements personnels.

L'enregistrement des entretiens est utile pour notre recherche à plus d'un titre car il permettra par la suite aux enseignants des classes à améliorer leur enseignement en mathématique auprès des élèves en difficulté. Nous vous informons que la Commission Scolaire de Montréal et l'Université de Montréal sont propriétaires de ces enregistrements. Cependant, vous pouvez à tout moment et sans justification, demander qu'ils soient effacés.

Nous vous demandons votre accord pour l'enregistrement en apposant votre signature ci-dessous.

Montréal, le .... Signature

ANNEXE 2

Consentement de participation à la recherche

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Département de didactique

Consentement de participation à la recherche

Je soussigné(e) ....
accepte que les enregistrements des entretiens que mon enfant aura avec M... soient utilisés dans le cadre d'une recherche menée par le Département de didactique de l'Université de Montréal.

J'ai été informé(e) que la recherche se fera sur la base d'entretiens suivis de productions écrites anonymes et qu'aucune information permettant d'identifier l'un ou l'autre des participants ainsi que toute personne citée au cours de ces entrevues ne sera maintenue.

J'ai été informé(e) que, à ma demande, j'ai la possibilité de consulter le vidéo et lesdites productions. De plus, j'ai eu la possibilité de poser à la personne que j'ai rencontrée pour la recherche toutes les questions que je me suis posé sur cette étude et j'ai compris l'information qui m'a été donnée.

J'accepte que les différents résultats de cette recherche puissent être divulgués sous la forme de publications scientifiques et de présentations scientifiques, sachant que l'identité de mon enfant ne sera jamais dévoilée et que rien dans le texte de la publication ou de l'exposé ne permettra de le reconnaître.

Montréal, le .... Signature

ANNEXE 3

Formulaire de consentement destiné au supérieur immédiat

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
Département de didactique

Formulaire de consentement destiné aux supérieurs immédiats

Nous demandons une autorisation de votre part afin que ……………………………….. et son groupe participent à un court projet portant sur les apprentissages en mesure et sur les interactions entre les élèves et leur enseignant lors des résolutions de problèmes.

Notre recherche a pour but de mieux comprendre les conceptions des élèves en difficulté d'apprentissage face aux situations problèmes qu'ils rencontrent lors des activités en mathématiques, spécifiquement sur les grandeurs en mesure.
Cette recherche est dirigée conjointement par le professeur Jean Portugais (Ph. D.) du département de didactique de l'Université de Montréal et par Mme Thérèse Tieidé, doctorante et orthopédagogue à l'École Ahuntsic de la Commission Scolaire de Montréal.

Nous désirons enregistrer sur magnétophone et/ou filmer sur bande vidéo ces échanges qui, analysées nous permettrons de mieux comprendre les conceptions de ces` élèves et les échanges entre ces derniers et leur enseignant. Nous vous assurons que les productions des élèves ciblés demeureront anonymes. De plus, elles seront conservées sous clé et accessibles seulement aux membres de cette recherche. Les retombées de cette recherche visent l'amélioration des apprentissages des élèves en difficulté dans le domaine des mathématiques.

Nous tenons à souligner que votre acceptation sera fort appréciée. Les efforts de recherche en éducation sont essentiels à l'amélioration des apprentissages des élèves, à la qualité de la formation continue des enseignants et aussi à la formation universitaire. Votre collaboration est précieuse et nous anticipons la possibilité de travailler au sein de l'école ……………..
Si vous avez des questions ou des commentaires concernant la recherche, vous pouvez contacter :

Prof. Jean Portugais

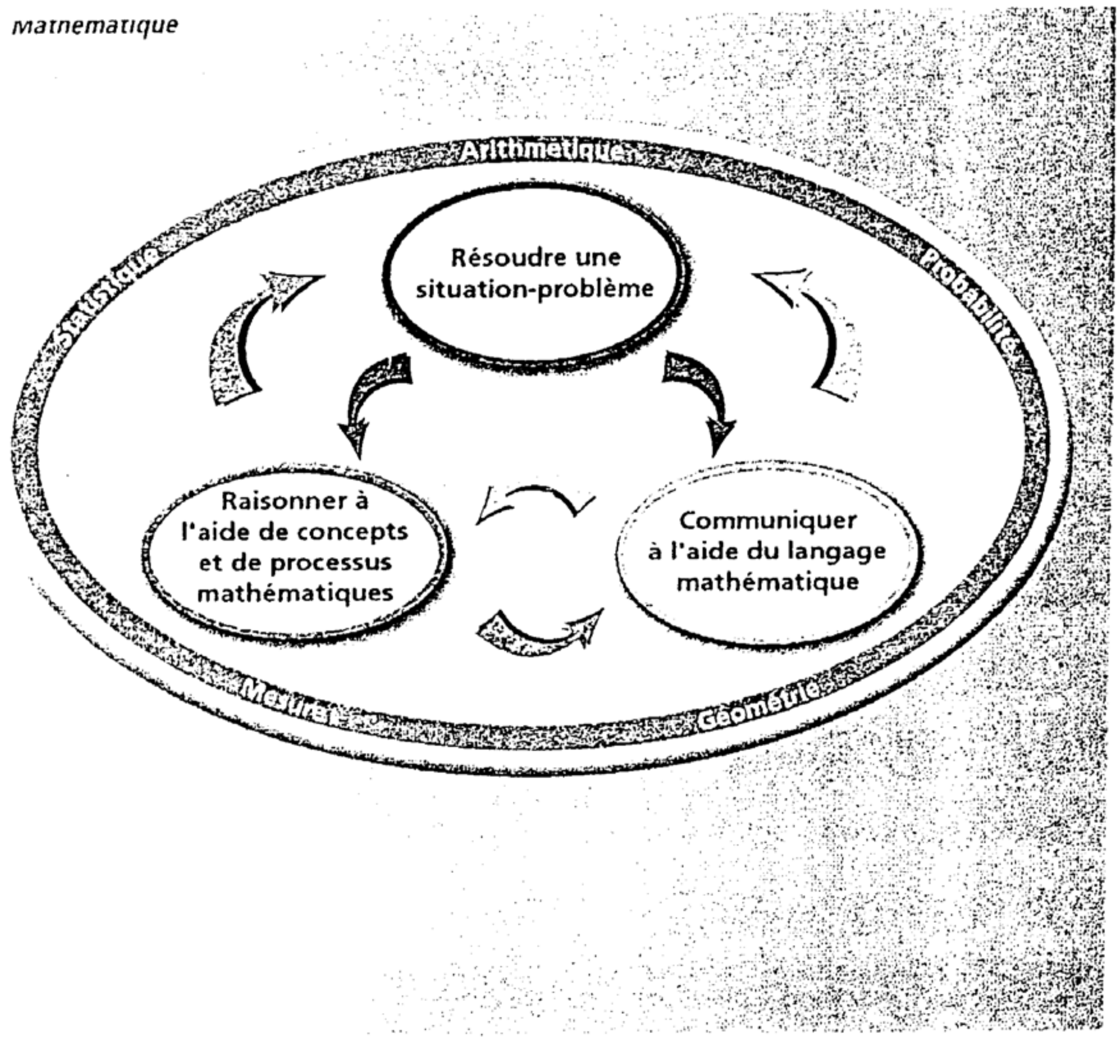
Mme Thérèse Tieidé, orthopédagogue

Je, soussigné(e) ………………………………………………… consens à ce que cette recherche soit menée auprès d'élèves de l'école ………………………….. et je conserve une copie du présent formulaire.

Montréal, le …………………………   Signature…………………

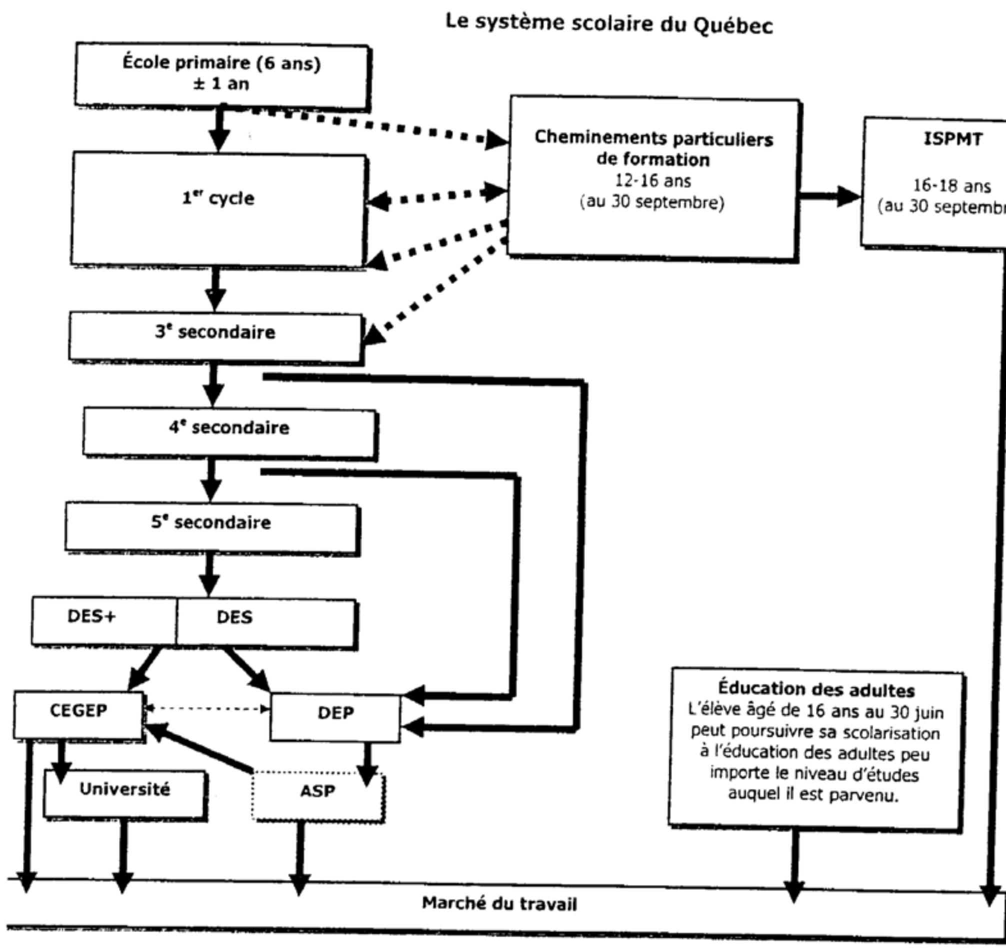
ANNEXE 4

Les trois compétences du programme de mathématiques


Mathématique
Arithmétique
Statistique
Probabilité
Mesures
Géométrie
Résoudre une situation-problème
Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques
Communiquer à l'aide du langage mathématique

ANNEXE 5

Le système scolaire du Québec



Légende

ASP	Attestation de spécialisation professionnelle
CEGEP	Collège d'enseignement général et professionnel
DEP	Diplôme d'études professionnelles
DES	Diplômes d'études secondaires
DES+	Diplôme d'études secondaires comprenant les cours exigés pour l'entrée au CEGEP
ISPMT	Insertion sociale et préparation au marché du travail

« Le passage du primaire au secondaire s'effectue après 6 années d'études primaires; il peut toutefois s'effectuer après 5 années d'études primaires si l'élève a atteint les objectifs des programmes d'études du primaire et a acquis suffisamment de maturité affective et sociale.
Il appartient à la commission scolaire qui assume la responsabilité de l'enseignement primaire d'un élève de déterminer si cet élève satisfait aux exigences du primaire. » Article 13, Régime pédagogique de l'éducation préscolaire, de l'enseignement primaire et de l'enseignement secondaire.
(Commission Scolaire de Montréal, Les orientations scolaires et professionnelles, 2006-2007, p.4)

ANNEXE 6

Définitions des élèves handicapés ou en difficulté d’adaptation ou d’apprentissage

Définitions des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage

MEQ

et

Convention collective

annexe XIX

Élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage

A. Élèves en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage

Élèves à risque	Troubles graves du comportement
	13 Avec entente MEQ-MSSS
	14 Sans entente MEQ-MSSS

B. Élèves handicapés

Déficience motrice légère ou organique ou déficience langagière	Déficience intellectuelle moyenne à sévère, déficience intellectuelle profonde ou troubles sévères du développement	Déficience physique grave
33 Déficience motrice légère ou organique	24 Déficience intellectuelle moyenne à sévère	36 Déficience motrice grave
34 Déficience langagière	23 Déficience intellectuelle profonde	42 Déficience visuelle
	50 Troubles envahissants du développement	44 Déficience auditive
	53 Troubles relevant de la psychopathologie	
	99 Déficience atypique	

A. ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ D'ADAPTATION OU D'APPRENTISSAGE

A.1 ÉLÈVES À RISQUE

Les élèves à risque sont des élèves à qui il faut accorder un soutien particulier parce qu'ils :
- présentent des difficultés pouvant mener à un échec;
- présentent des retards d'apprentissage;
- présentent des troubles émotifs;
- présentent des troubles du comportement;
- présentent un retard de développement ou une déficience intellectuelle légère[1].

L'identification de ces élèves aux fins de la déclaration des effectifs scolaires au ministère de l'Éducation n'est plus exigée. Le financement des services adaptés dont ils ont besoin est normalisé.

L'évaluation des besoins et des capacités de ces élèves demeure nécessaire pour déterminer les services à leur offrir et pour établir le plan d'intervention. Cependant, cette évaluation pourra être davantage orientée vers la recherche des conditions facilitant leur réussite éducative que vers la recherche d'un diagnostic précis aux fins d'admissibilité au financement des services nécessaires. D'ailleurs, le financement alloué pour assurer les services dont ils ont besoin est, depuis plusieurs années, indépendant de cette déclaration. En effet, le financement est normalisé, et le fait de ne plus identifier ces élèves ne se traduit pas par une diminution des ressources et des services auxquels ils ont droit.

La notion d'élève à risque repose sur une conception non catégorielle des services éducatifs fournis aux élèves dits en « difficulté » dans laquelle sont privilégiées les interventions préventives. Cette conception s'appuie sur la conviction qu'une identification administrative des élèves à risque n'est pas utile pour leur offrir des services adaptés à leurs besoins. Elle repose également sur le constat que les catégories utilisées antérieurement présentaient une perméabilité et un manque de fiabilité ne justifiant pas le temps consacré à recueillir l'information exigée. De plus, les définitions antérieures, lorsqu'elles étaient appliquées d'une manière stricte, ne laissaient pas de place à l'intervention préventive.

Nous proposons donc ici une définition de l'élève à risque qui s'appuie sur les progrès ou sur l'absence de progrès du jeune en fonction des buts que se fixe l'école au regard de ses apprentissages, de sa socialisation et de sa qualification. C'est le cheminement de l'élève par rapport à ces buts qui va déterminer si une intervention préventive ou adaptée est nécessaire. Ce modèle de définition est fondé sur la reconnaissance d'un besoin et sur l'intention d'offrir un service rendant possible une réussite éducative qui, autrement, demeurerait peu probable.

La compréhension des besoins de l'élève et l'adaptation nécessaire des services éducatifs exigent l'action concertée de l'enseignant ou de l'enseignante, de l'élève et de ses parents, du directeur ou de la directrice de l'école et, au besoin, du personnel professionnel ou de soutien. Cette démarche de collaboration donne lieu à la mise en place d'actions préventives pour éviter l'apparition ou l'aggravation de problèmes passagers. Elle peut également donner lieu à l'établissement d'un plan d'intervention qui définit les mesures éducatives adaptées par l'école et les parents pour faciliter les apprentissages ou les comportements désirés. Périodiquement, l'école et la famille doivent valider leur perception de l'évolution de la situation de l'élève et s'appuyer mutuellement dans le choix et la réalisation des actions pour l'aider.

1. Si un diagnostic de déficience intellectuelle légère doit être posé, il faut le faire avec toute la rigueur possible. L'Association américaine pour le retard mental a révisé ses définitions en 1992. La nouvelle conception du retard mental prend maintenant en considération l'importance du soutien particulier dont a besoin la personne, compte tenu de son déficit. Ainsi, une dimension nouvelle est incluse dans les définitions en vue d'établir l'intensité de la déficience. En plus des résultats aux tests d'intelligence ou aux échelles de développement et de l'évaluation des comportements adaptatifs, l'appréciation de l'ampleur des besoins de services est prise en considération.

A.1 ÉLÈVES À RISQUE (SUITE)

Il peut s'agir, à titre indicatif, d'enfants ou d'élèves qui présentent des caractéristiques parmi les suivantes :

à l'éducation préscolaire, enfants qui :
- ont fréquemment des problèmes de discipline,
- sont isolés socialement,
- présentent un retard de langage expressif (autre que la déficience langagière),
- ont de la difficulté à suivre les consignes formulées par un adulte,
- montrent des difficultés à sélectionner, à traiter, à retenir et à utiliser l'information,
- montrent un retard en ce qui a trait à la conscience de l'écrit et du nombre,
- ont des déficits de l'attention,
- ont un retard de développement,
- ont des troubles du comportement;

au primaire, élèves qui :
- éprouvent des difficultés à atteindre les objectifs du Programme de formation de l'école québécoise,
- présentent un retard de langage expressif (autre que la déficience langagière),
- sont considérés comme surréactifs (problèmes de discipline, d'attention et de concentration) ou sous-réactifs (très faible interaction avec les camarades de leur classe),
- ont des difficultés ou des troubles d'apprentissage,
- ont des retards d'apprentissage,
- ont une déficience intellectuelle légère,
- ont des problèmes émotifs,
- ont des troubles du comportement;

au secondaire, élèves qui :
- ont des retards d'apprentissage,
- ont des difficultés ou des troubles d'apprentissage,
- ont une déficience intellectuelle légère,
- ont des difficultés non scolaires (grossesse, anorexie, dépression, toxicomanie, etc.),
- ont des problèmes émotifs,
- se sont absentés, sans motif valable, de plusieurs cours,
- ont été impliqués dans plusieurs incidents touchant la discipline (suspension, retenues, etc.),
- ont des troubles du comportement.

D'autres élèves éprouvent des difficultés à cause de leur non-maîtrise de la langue d'enseignement, de leur mésadaptation à la culture d'accueil, de leur incompréhension des nuances de la langue, et ce, malgré les mesures d'accueil ou le temps passé dans une classe ordinaire. Eux aussi peuvent avoir besoin de services adaptés.

ANNEXE 7

MEQ et convention collective

Commission scolaire de Montréal
Secteur de l'adaptation scolaire

Document 10

Identification d'un élève présentant la caractéristique de retards d'apprentissage aux fins de l'application des dispositions de la convention collective du personnel enseignant

Élève visé par l'application des nouveaux programmes	**Élève non encore visé par l'application des nouveaux programmes**
Celle ou celui : • qui ne répond pas aux critères de réussite attendus en langue d'enseignement ou en mathématiques au cours (pas avant de s'engager dans la 2^{e} année du premier cycle) ou à la fin du cycle ; ou • qui était déjà identifié comme ayant des difficultés graves d'apprentissage ; ou • qui était déjà identifié comme ayant une déficience intellectuelle légère. Les **préalables** à l'identification : • la mise en place des mesures d'appui et d'adaptation liées aux besoins de l'élève ; • la consignation des productions de l'élève, des observations de l'enseignant et des adaptations mises en place ; • l'analyse de la situation de l'élève a conduit à la mise en place de mesures d'aide ; • les parents ont été mis à contribution et un plan d'intervention a été établi avec leur participation. **Les critères généraux d'identification :** • l'élève présente des **difficultés persistantes depuis au moins un (1) an ;** • **il ne peut s'agir de difficultés portant sur des connaissances** qui peuvent être compensées par l'utilisation de mesures d'appui habituelles ; • l'élève fait preuve d'un **manque d'autonomie** dans sa participation aux activités proposées en classe, il a besoin pour progresser, d'un **appui constant** de l'enseignant ou de **modifications substantielles aux situations d'apprentissage** déjà proposées aux autres élèves.	Celle ou celui : • qui a des difficultés légères d'apprentissage. Un retard de plus d'un (1) an en langue d'enseignement ou en mathématiques peut être jugé significatif (au primaire seulement) ; ou • qui a des difficultés graves d'apprentissage c'est-à-dire un retard de deux (2) ans ou plus en langue d'enseignement ou en mathématiques (au secondaire seulement) ; ou • qui a des difficultés graves d'apprentissage, c'est-à-dire celle ou celui dans l'évaluation révèle des troubles spécifiques d'apprentissage (autre que la déficience langagière) ; ou • qui a une déficience intellectuelle légère.

Références : Convention collective du personnel enseignant
Annexe au document ministériel (19-6505)

au primaire, élèves qui :

- éprouvent des difficultés à atteindre les objectifs du Programme de formation de l'école québécoise,
- présentent un retard de langage expressif (autre que la déficience langagière),
- sont considérés comme surréactifs (problèmes de discipline, d'attention et de concentration) ou sous-réactifs (très faible interaction avec les camarades de leur classe),
- ont des difficultés ou des troubles d'apprentissage,
- ont une déficience intellectuelle légère,
- ont des problèmes émotifs,
- ont des troubles du comportement[1];

au secondaire, élèves qui :

- ont des retards scolaires,
- ont des difficultés ou des troubles d'apprentissage,
- ont une déficience intellectuelle légère;
- ont des difficultés non scolaires (grossesse, anorexie, dépression, toxicomanie, etc.),
- ont des problèmes émotifs,
- se sont absentés, sans motifs valables, de plusieurs cours,
- ont été impliqués dans plusieurs incidents touchant la discipline (suspension, retenues, etc.),
- ont des troubles du comportement[1].

Pour ces ordres d'enseignement, d'autres élèves éprouvent des difficultés à cause de leur non-maîtrise de la langue d'enseignement, de leur mésadaptation

à la culture d'accueil, de leur incompréhension des nuances de la langue, et ce, malgré les mesures d'accueil ou le temps passé dans une classe ordinaire. Ils peuvent avoir également besoin des services adaptés.

A.2 Élèves ayant des troubles graves du comportement

L'élève ayant des troubles graves du comportement associés à une déficience psychosociale est celle ou celui dont le fonctionnement global, évalué par une équipe multidisciplinaire comprenant une ou un spécialiste des services complémentaires, au moyen de techniques d'observation systématique et d'instruments standardisés d'évaluation, présente les caractéristiques suivantes:

- comportements agressifs ou destructeurs de nature antisociale dont la fréquence est élevée depuis plusieurs années;

- comportements répétitifs et persistants qui violent manifestement les droits des autres élèves ou les normes sociales propres à un groupe d'âge et qui prennent la forme d'agressions verbales ou physiques, d'actes d'irresponsabilité et de défi constant à l'autorité.

L'intensité et la fréquence de ces comportements sont telles qu'un enseignement adapté et un encadrement systématique sont nécessaires. L'élève dont le comportement est évalué sur une échelle de comportement standardisée, s'écarte d'au moins deux (2) écarts types de la moyenne des jeunes de son groupe d'âge.

Les troubles du comportement considérés ici sont tels qu'ils empêchent l'élève d'accomplir des activités normales et qu'ils rendent obligatoire, aux fins de services éducatifs, l'intervention du personnel d'encadrement ou de réadaptation au cours de la majeure partie de sa présence à l'école.

---

[1] L'élève ayant des troubles de comportement présente fréquemment des difficultés d'apprentissage, en raison d'une faible persistance face à la tâche ou d'une capacité d'attention et de concentration réduite.

ANNEXE 8

Liste des codes pour les EHDAA

LISTE DES CODES POUR LES EHDAA

MEQ	ABRÉVIATION	DESCRIPTION
*10	DLA – DGA	Troubles d'apprentissage
*11	DIL	Déficience intellectuelle légère
*12	TC	Troubles de comportement
13	TGE	T.G.C. avec entente MEQ / MSSS
14	TGC	T.G.C. sans entente MEQ / MSSS
23	DIP	Déficience intellectuelle profonde
24	DIM	Déficience intellectuelle moyenne à sévère
33	DML - DO	Déficience motrice légère ou organique
34	AUD	Déficience langagière sévère
36	DMG	Déficience motrice grave
42	DV	Déficience visuelle
44	DA	Déficience auditive
50	TED	Troubles envahissants du développement
53	TOP	Troubles de l'ordre de la psychopathologie
99		Déficience atypique

** Code CSDM*

ANNEXE 9

Répertoire des classes fermées au primaire

Commission scolaire de Montréal

DOCUMENT 7

Répertoire des classes fermées au primaire

1. Vous trouverez en page suivante les ressources **actuelles,** qui sont appelées à se modifier en fonction des références du printemps.

2. Dans la mesure du possible, nous tentons de privilégier un maximum de deux niveaux d'âge et de deux degrés académiques.

3. En plus du niveau académique et de l'âge, d'autres critères doivent être considérés lors de la formation des groupes: sexe, situation géographique (surtout dans le cas d'un élève qui doit voyager seul), demande de services professionnels et l'équilibre dans la composition du groupe en tenant compte du portrait des élèves.

4. La convention collective des enseignants prévoit:
   - Un maximum d'élèves par classe;
   - Un calcul du maximum s'il y a plus d'une catégorie d'élèves;
   - Un maximum de trois catégories par classe.

5. Légende:
   - DGA - Difficultés graves d'apprentissage
   - DIL - Déficience intellectuelle légère
   - TC - Troubles de comportement
   - DIM - Déficience intellectuelle moyenne

Document 12B

SECTEUR DE L'ORGANISATION SCOLAIRE

RÈGLES DE FORMATION DE GROUPE
SEPTEMBRE 2000 - EHDAA

NOUVEAUX CODES DE DIFFICULTÉ		ANCIENS CODES DE DIFFICULTÉ	MOY / MAX UTILISÉS		
			Préscolaire	Primaire	Secondaire
13	Troubles graves du comportement + Entente MEQ-MSS	13		7-9	9-11
14	Troubles graves du comportement	14		7-9	9-11
23	Déficience intellectuelle profonde	23	4-6	4-6	4-6
24	Déficience intellectuelle moyenne à sévère	22-75-78	8-10	10-12	12-14
33	Déficience motrice légère ou organique	31-35-74-81	6-8	8-10	9-11
34	Déficience langagière	52	5-7	6-8	7-9
36	Déficience motrice grave	32-81-74-78	6-8	8-10	9-11
42	Déficience visuelle	41-72-76-79-82-83	5-7	5-7	5-7
44	Déficience auditive	43-73-77-80-84	5-7	5-7	5-7
50	Troubles envahissants du développement	51	4-6	5-7	6-8
53	Troubles de l'ordre de la psychopathologie	53	4-6	5-7	6-8
99	Déficience atypique	99	6-8	8-10	9-11
10	Troubles d'apprentissage	01-02	18-20	14,5-16	18-20
12	Troubles du comportement	12	8-10	10,25-12	12-14
11	Déficience intellectuelle légère	21-71	18-20	14,5-16	18-20

2000-08-18

DIFFICULTÉS ET HANDICAPS : RATIOS ET FACTEURS DE PONDÉRATION

CATÉGORIE	TYPE	CODE MELS	PRÉSCOLAIRE moy.	PRÉSCOLAIRE max.	PRÉSCOLAIRE pond.	PRIMAIRE moy.	PRIMAIRE max.	PRIMAIRE 1re P1*	PRIMAIRE 1re P2**	PRIMAIRE 2e P1*	PRIMAIRE 2e P2**	PRIMAIRE 3e	PRIMAIRE 4e,5e,6e	SECONDAIRE moy.	SECONDAIRE max.	SECONDAIRE pond.
→ À RISQUE	Diff. légère d'apprentissage	10														
	Diff. grave d'apprentissage					12	16	1,38	*1,25*	1,50	*1,25*	1,69	1,81	16	20	1,60
	Déf. intellectuelle légère	11														
	Trouble de comportement	12	8	10	2,00	10	12	1,83	*1,67*	2,00	*1,67*	2,25	2,42	12	14	2,29
	Trouble grave de comportement	13,14				7	9	2,44	*2,22*	2,67	*2,22*	3,00	3,22	9	11	2,91
→ DÉFICIENCE MOTRICE LÉGÈRE OU ORGANIQUE	Déficience motrice légère	33	10	12	1,67	12	14	1,57	*1,43*	1,71	*1,43*	1,93	2,07	14	16	2,00
	Déficience organique	33														
→ DÉFICIENCE LANGAGIÈRE	Déficience langagière sévère	34	5	7	2,86	6	8	2,75	*2,50*	3,00	*2,50*	3,38	3,63	10	12	2,67
	Déficience langagière	34	6	8	2,50	8	10	2,20	*2,00*	2,40	*2,00*	2,70	2,90	10	12	2,67
→ DÉF. INTELLECTUELLE MOYENNE À PROFONDE	Déf. intellectuelle moyenne à sévère	24	8	10	2,00	10	12	1,83	*1,67*	2,00	*1,67*	2,25	2,42	12	14	2,29
	Déf. intellectuelle profonde	23	4	6	3,33	4	6	3,67	*3,33*	4,00	*3,33*	4,50	4,83	4	6	5,33
OU	Troubles envahissants (autisme)	50	4	6	3,33	5	7	3,14	*2,86*	3,43	*2,86*	3,86	4,14	6	8	4,00
→ TROUBLES SÉVÈRES DU DÉVELOPPEMENT	Psychopathologie	53	4	6	3,33	5	7	3,14	*2,86*	3,43	*2,86*	3,86	4,14	6	8	4,00
	Déficience atypique	99	6	8	2,50	8	10	2,20	*2,00*	2,40	*2,00*	2,70	2,90	9	11	2,91
→ DÉFICIENCE PHYSIQUE GRAVE	Déficience motrice grave	36	6	8	2,50	8	10	2,20	*2,00*	2,40	*2,00*	2,70	2,90	9	11	2,91
	Déficience visuelle	42	5	7	2,86	5	7	3,14	*2,86*	3,43	*2,86*	3,86	4,14	5	7	4,57
	Déficience auditive	44	5	7	2,86	5	7	3,14	*2,86*	3,43	*2,86*	3,86	4,14	5	7	4,57
	Déficiences multiples		Déficience principale													

* Pondération 1 : pour les écoles **non ciblées** à l'annexe XLVI. — ** Pondération 2 : pour les écoles **ciblées** à l'annexe XLVI

Alliance des professeures et professeurs de Montréal

ANNEXE 10

Caractéristiques des retards d’apprentissage

Commission scolaire de Montréal
Secteur de l'adaptation scolaire

Document 10

Identification d'un élève présentant la caractéristique de retards d'apprentissage aux fins de l'application des dispositions de la convention collective du personnel enseignant

Élève visé par l'application des nouveaux programmes	Élève non encore visé par l'application des nouveaux programmes
Celle ou celui : • qui ne répond pas aux critères de réussite attendus en langue d'enseignement ou en mathématiques au cours (pas avant de s'engager dans la 2e année du premier cycle) ou à la fin du cycle ; ou • qui était déjà identifié comme ayant des difficultés graves d'apprentissage ; ou • qui était déjà identifié comme ayant une déficience intellectuelle légère. Les **préalables** à l'identification : • la mise en place des mesures d'appui et d'adaptation liées aux besoins de l'élève ; • la consignation des productions de l'élève, des observations de l'enseignant et des adaptations mises en place ; • l'analyse de la situation de l'élève a conduit à la mise en place de mesures d'aide ; • les parents ont été mis à contribution et un plan d'intervention a été établi avec leur participation. **Les critères généraux d'identification :** • l'élève présente des **difficultés persistantes depuis au moins un (1) an** ; • **il ne peut s'agir de difficultés portant sur des connaissances** qui peuvent être compensées par l'utilisation de mesures d'appui habituelles ; • l'élève fait preuve d'un **manque d'autonomie** dans sa participation aux activités proposées en classe. il a besoin pour progresser, d'un **appui constant** de l'enseignant ou de **modifications substantielles aux situations d'apprentissage** déjà proposées aux autres élèves.	Celle ou celui : • qui a des difficultés légères d'apprentissage. Un retard de plus d'un (1) an en langue d'enseignement ou en mathématiques peut être jugé significatif (au primaire seulement) ; ou • qui a des difficultés graves d'apprentissage c'est-à-dire un retard de deux (2) ans ou plus en langue d'enseignement ou en mathématiques (au secondaire seulement) ; ou • qui a des difficultés graves d'apprentissage, c'est-à-dire celle ou celui dans l'évaluation révèle des troubles spécifiques d'apprentissage (autre que la déficience langagière) ; ou • qui a une déficience intellectuelle légère.

Références Convention collective du personnel enseignant
Annexe au document ministériel (19-6505)

ANNEXE 11

Identification des élèves à risque

(1^{er} et 2^{e} cycle du primaire)

Document 11

IDENTIFICATION DES ÉLÈVES À RISQUE PRÉSENTANT LA CARACTÉRISTIQUE DE RETARD D'APPRENTISSAGE
au 1er et 2e cycle du primaire

Aux fins de l'application des dispositions
de la convention collective du personnel enseignant

ANNEXE AU DOCUMENT MINISTÉRIEL (19-6505)
élèves handicapés
ou en difficulté d'adaptation
ou d'apprentissage (EHDAA)
définitions

Ministère de l'Éducation
Direction de l'adaptation scolaire et des services complémentaires
Mars 2002

CRITÈRES PARTICULIERS EN MATHÉMATIQUE

- Pour être identifié comme présentant la caractéristique de retard d'apprentissage en mathématique, un élève doit présenté un profil correspondant de près **À L'ENSEMBLE** des indications ci-dessous:

Au cours du 2e cycle	À la fin du 2e cycle
Dans plus d'un thème mathématique, dans des problèmes comportant des données complètes dont la solution comporte le plus souvent une étape, l'élève, malgré une aide ponctuelle,…	Dans la plupart des thèmes mathématiques, dans des problèmes comportant des données complètes ou superflues dont la solution comporte une ou deux étapes, l'élève, sans aide,…
☐ dégage rarement les données utiles d'un problème;	☐ est incapable de se représenter la situation problème;
☐ fait régulièrement des erreurs de lecture et d'écriture de nombre (compréhension);	☐ ne fait pas la distinction entre les données pertinentes et les données non pertinentes;
☐ sait rarement s'il doit utiliser l'addition ou la soustraction (compréhension limitée du sens des opérations);	☐ sait rarement quelle opération choisir;
☐ n'utilise pas les stratégies appropriées;	☐ se concentre essentiellement sur l'application de certaines opérations de calcul;
☐ se rend rarement compte lorsque sa réponse est improbable;	☐ a beaucoup de difficulté à expliquer sa démarche;
☐ a de la difficulté à communiquer à l'aide du langage mathématique;	☐ rectifie rarement sa solution suite à une validation avec ses pairs ou son professeur;
☐ est incapable de résoudre une situation dont la solution comporte plus d'une étape;	☐ n'arrive à résoudre que des problèmes qui comportent des données complètes et ne demandent qu'une étape de réalisation.
☐ valide rarement le résultat.	

N.B.: La mesure du retard d'apprentissage se fait par une évaluation continue, dans un contexte le plus authentique possible et en privilégiant l'observation prolongée.

Remarques: ____

____

____

Bulletins: année 20___ - année 20___ Mathématique: ____________________

année 20___ - année 20___ Mathématique: ____________________

Document complété par: ______________________ Fonction: ______________

École: ______________________ Date: ______________ 20___